

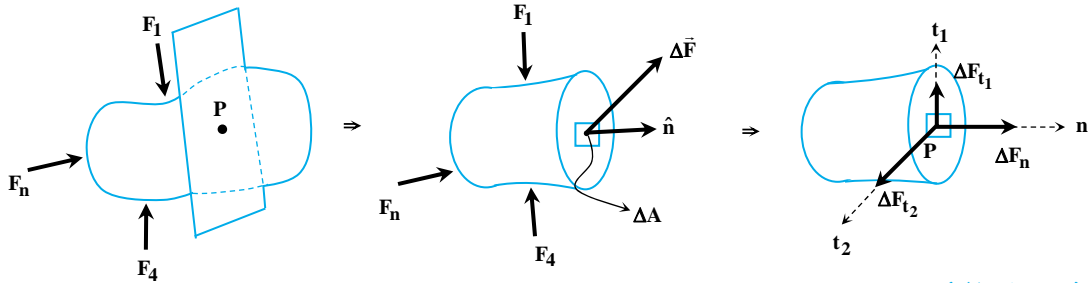
درسنامه: معرفی انواع تنش‌ها

مقدمه

هرگاه جسمی (طبق شکل زیر) تحت انواع بارگذاری‌ها قرار گیرد، نیروهای داخلی که در جسم به وجود می‌آیند در جسم تولید تنش می‌کنند.

در شکل روبرو اگر جسم در نقطه P موازی صفحه yz برش زده شده و پیکره سمت چپ برش رسم شود. به علت حفظ تعادل در سطح برش خورده نیروی داخلی وجود خواهد داشت، اگر برآیند نیروهای وارد بر المان سطح ΔA که در برگیرنده‌ی نقطه P است با $\Delta \vec{F}$ نشان داده شود، این نیرو سه مؤلفه دارد. یک مؤلفه آن عمود بر سطح ΔA (ΔF_n) در راستای بردار نرمال \hat{n} و دو مؤلفه دیگر مماس بر سطح ΔA (ΔF_t) خواهد داشت.

از تقسیم ΔF_n بر مساحت سطح مقطع ΔA کمیتی به نام تنش قائم (σ) و از تقسیم ΔF_t بر مساحت سطح مقطع ΔA نوع دیگری از تنش به دست می‌آید که به آن تنش برشی (τ) گفته می‌شود. لازم به ذکر است که با استفاده از مقادیر به دست آمده، مقادیر متوسط تنش را می‌توان به دست آورد.



تنش قائم (تنش نرمال)

تعریف تنش عمودی: به شدت نیروی عمودی سطحی یا نیروی عمود بر واحد سطح تنش عمودی می‌گویند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

A مساحت سطح مقطع اولیه جسم است. لازم به ذکر است در صورتی که نیرو به مرکز سطح مقطع جسم وارد شود نیرو محوری اما اگر نیرو به مرکز سطح مقطع وارد نشود نیرو، غیر محوری می‌باشد که برای محاسبه تنش ناشی از آن، در فصل‌های بعدی بحث می‌کنیم. همچنین رابطه بالا تنش عمودی متوسط در فاصله‌های دور از ناحیه‌ی اعمال بار متمرکز را نشان می‌دهد، (چرا که تنش در مقاطع نزدیک به نقطه‌ی اعمال بار توزیعی غیریکنواخت دارد). ولی برای

محاسبه‌ی تنش واقعی در یک نقطه، می‌توان حد تنش متوسط را وقتی سطح مقطع به سمت صفر میل می‌کند محاسبه نمود: $\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$

طبق قرارداد، تنش‌های کششی را با علامت مثبت و تنش‌های فشاری را با علامت منفی نشان می‌دهند. واحد تنش در سیستم متریک نیوتن بر

مترمربع ($\frac{N}{m^2}$) یا پاسکال Pa و در سیستم اینچی U.S، پوند بر اینچ مربع ($\frac{lb}{in^2}$) یا Psi می‌باشد.

در رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ نیروی داخلی در مقطعی است که تنش در آن مورد نظر می‌باشد. برای یافتن نیروی داخلی در هر مقطع کافی است که مقطع مورد

نظر را برش زده و از رابطه تعادل نیروها، نیروی وارده در مقطع برش خورده را به دست آورد. به عنوان مثال:

نیروی داخلی در برش A-A:

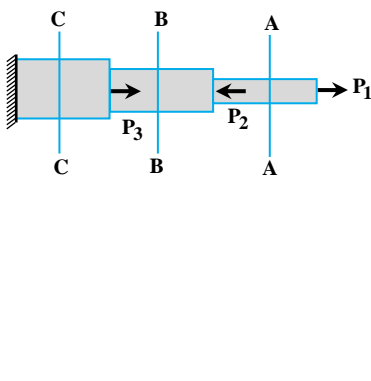
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - R_A = 0 \Rightarrow R_A = P_1$$

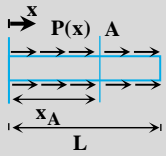
نیروی داخلی در برش B-B:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 - R_B = 0 \Rightarrow R_B = P_1 - P_2$$

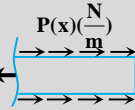
نیروی داخلی در برش C-C:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 + P_3 - R_C = 0 \Rightarrow R_C = P_1 - P_2 + P_3$$



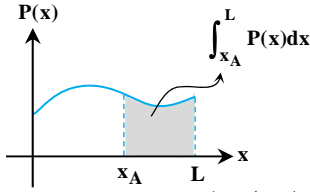


ابتدا نیروی داخلی در مقطع A محاسبه می‌شود



نکته ۱: اگر به میله‌ای بار گسترده محوری وارد کنیم از رابطه انتگرالی برای محاسبه نیروی داخلی در هر سطح مقطع دلخواه از آن استفاده می‌شود:

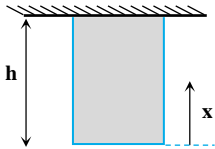
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A = \int_{x_A}^L P(x) dx$$



اگر نمودار تغییرات $P(x)$ بر حسب x به صورت روبرو باشد، حاصل انتگرال $\int P(x) dx$ در واقع سطح زیر منحنی در بازه مورد نظر بوده که برابر نیروی داخلی در سطح مقطع داخلی می‌باشد.

یادآوری: لازم به ذکر است که تنش کمیتی تانسوری و از مرتبه دو بوده و نباید به اشتباه آن را کمیت اسکالر یا برداری فرض نمود.

مثال ۱: یک ستون تحت وزن خود آویزان است. تنش نرمال در $x = \frac{h}{2}$ چقدر است؟ γ وزن مخصوص جنس ستون است.



$$\sigma = \frac{3}{2} \gamma h \quad (۲)$$

$$\sigma = \gamma h \quad (۱)$$

$$\sigma = 0 \quad (۴)$$

$$\sigma = \frac{\gamma h}{2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳» نیروی داخلی در هر مقطع دلخواه از میله باید وزن بخش پایینی میله را

$$\sigma = \frac{F_x}{A} = \frac{W_x}{A} = \frac{mg}{A}$$

تحمل کند، بنابراین:

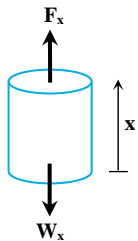
اما حجم بخش جدا شده از میله برابر $V = Ax$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sigma = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho A x g}{A} = \rho x g = \gamma x$$

طبق رابطه فوق، تنش قائم در هر مقطع از استوانه‌ای که تحت وزن خود آویزان است، با فاصله x نسبت خطی دارد اما مقدار

تنش در $x = \frac{h}{2}$ برابر است با:

$$x = \frac{h}{2} \Rightarrow \sigma = \gamma \frac{h}{2}$$



مثال ۲: کدام یک از عبارات زیر در مورد تنش صحیح است؟

(۱) تنش به ابعاد هندسی قطعه وابسته و مستقل از جنس و فرآیند ساخت می‌باشد.

(۲) تنش به ابعاد هندسی، جنس و مقاومت قطعه و نیروهای اعمالی وابسته است.

(۳) تنش از خواص ذاتی ماده است که به چگونگی توزیع نیروهای داخلی وابسته می‌باشد.

(۴) تنش به ابعاد هندسی قطعه، جنس آن و نیروهای خارجی اعمال به قطعه وابسته است.

پاسخ: گزینه «۱» تنش مستقل از جنس و فرآیند ساخت می‌باشد و با توجه به رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ تنها به ابعاد هندسی و بارگذاری خارجی وابسته است.

مثال ۳: تانسور تنش، تانسوری است از مرتبه:

۴ (۴)

۳ (۳)

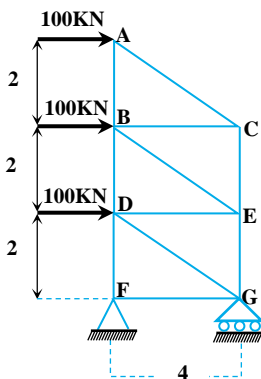
۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» طبق توضیحات متن درس، تنش کمیت تانسوری و از مرتبه دو، می‌باشد. این کیفیت در هر نقطه از جسم دارای ۹ مؤلفه است که در فصل‌های بعدی به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود.

مثال ۴: برای خرابی نشان داده شده اگر مساحت مقطع عضو BD، 1000 میلی‌متر مربع باشد.

تنش عمودی در این عضو چند MPa است؟

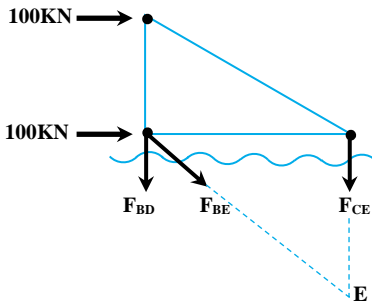


۵۰ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۵۰ (۳)

۲۰۰ (۴)



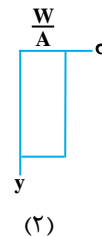
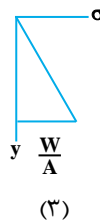
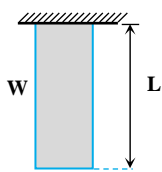
پاسخ: گزینه «۳» برای تعیین تنش در عضو BD کفایت نیرو در عضو مورد نظر را به دست آوریم. از روش برش برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم: مطابق شکل خرپا، برشی افقی می‌زنیم و دیگرام آزاد بخش فوقانی برش را رسم می‌کنیم. برش مورد نظر عضوهای BD، BE و CE را قطع می‌کند.

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{BD} \times 4 - 100 \times 2 - 100 \times 4 = 0 \Rightarrow F_{BD} = 150 \text{ KN}$$

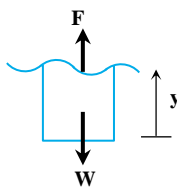
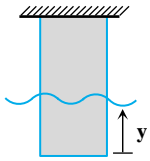
$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{BD}} = \frac{150000 \text{ N}}{10000 \text{ mm}^2} = 15 \text{ MPa}$$

توجه کنید اگر در رابطه تنش $\sigma = \frac{F}{A}$ ، F بر حسب نیوتن و A بر حسب mm^2 جایگزین شوند، واحد تنش MPa خواهد شد.

مثال ۵: نمودار توزیع تنش در طول یک میله یکنواخت به طول L و سطح مقطع A و به وزن W که از یک سقف آویزان شده است، مطابق کدام نمودار است؟



پاسخ: گزینه «۱» اگر γ وزن مخصوص میله باشد می‌توان از رابطه زیر تنش را در یک مقطع دلخواه محاسبه کرد. (نیروی وزن برابر حاصل ضرب وزن مخصوص در حجم میله است.)

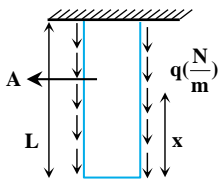


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - W = 0$$

$$\Rightarrow F = W = \gamma V = \gamma A y \Rightarrow \sigma = \frac{\gamma A y}{A} = \gamma y$$

طبق رابطه بالا تغییرات تنش بر حسب y به صورت خطی است. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۶: میله‌ای طبق شکل زیر در انتهای فوقانی خود از سقف آویزان بوده و در طول خود تحت بار گسترده یکنواخت q قرار گرفته است. تغییرات تنش در میله، در یک مقطع دلخواه از تیر به فاصله x از انتهای آن مساوی کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



$$\frac{q}{A} x \quad (۲)$$

$$\frac{W}{2A} x \quad (۱)$$

$$\frac{q}{2A} x^2 \quad (۴)$$

$$\frac{q}{A} x^2 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۲» برای تعیین تنش قائم در میله، آن را به فاصله x از انتهایش برش می‌زنیم سپس دیگرام آزاد بخش جداشده را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه بار وارد شده بر میله از نوع گسترده طولی است، لذا نیروی داخلی برابر حاصل ضرب بار گسترده در فاصله طولی اعمال بار گسترده می‌باشد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - \int q dx = 0 \Rightarrow F = \int q dx = q \int_0^x dx = qx$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{q}{A} x$$

از طرفی تنش قائم مساوی است با:

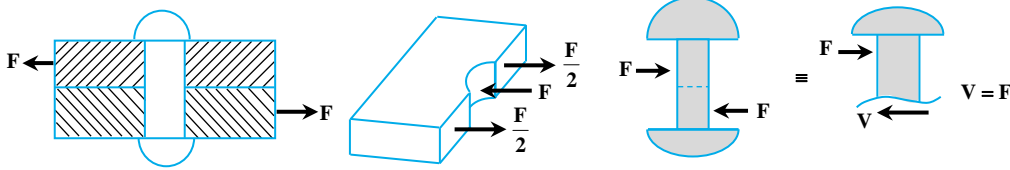
تذکره: تنش ماکزیمم در میله فوق در تکیه‌گاه ایجاد شده که مقدار آن مساوی $\sigma_{\max} = \frac{qL}{A}$ می‌باشد. این نوع بارگذاری را می‌توانیم مشابه میله‌ای در نظر گرفت که از سقف آویزان بوده و تحت اثر وزنش قرار گرفته است. در چنین حالتی اگر میله استوانه‌ای بوده و وزن مخصوص مساوی γ باشد، آنگاه تغییرات تنش آن بر حسب متغیر x مساوی $\sigma = \gamma x$ و خطی بوده و حداکثر تنش آن در تکیه‌گاه ایجاد شده و برابر $\sigma_{\max} = \gamma l$ می‌باشد.

تنش برشی

تعریف: هرگاه نیروی وارد شده بر سطح مقطع جسم، مماس باشد تنش به وجود آمده در عضو، تنش برشی خواهد بود. برای به دست آوردن مقدار میانگین تنش برشی از رابطه‌ی روبرو استفاده می‌کنیم:

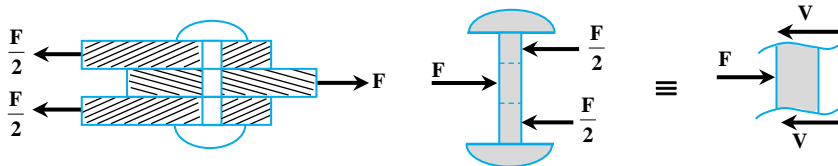
$$\tau_{ave} = \frac{F}{A}$$

محاسبه‌ی تنش برشی معمولاً در اجزاء اتصال دهنده مانند پیچ‌ها، پرچ‌ها، چسب و جوش‌ها دارای اهمیت زیادی می‌باشد. مثلاً دو ورق که توسط یک پرچ مطابق شکل به هم وصل شده‌اند را در نظر می‌گیریم. در صورتی که نیروی وارد بر صفحات از یک حد مشخص بیشتر شود، ممکن است پرچ دیگر قادر به تحمل آن نبوده و بریده شود. علت برش آن است که تنش برشی ایجاد شده در پرچ از حد تحمل آن بیشتر می‌باشد. به این حالت از برش در پرچ، برش منفرد یا ساده می‌گوییم و تنش برشی در این حالت از رابطه $\tau_{ave} = \frac{F}{A}$ به دست می‌آید.



اما در صورتی که پرچ اتصال دهنده‌ی سه ورق باشد، آنگاه در حالت بحرانی احتمال برش خوردن پرچ در دو سطح مقطع وجود دارد. در چنین حالتی برش به وجود آمده را

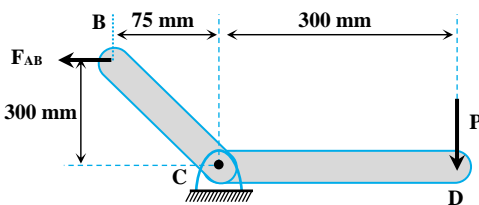
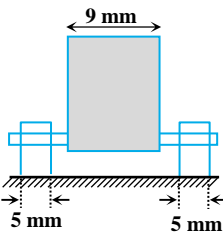
برش مضاعف گفته و تنش برشی در آن از رابطه $\tau_{ave} = \frac{F}{2A}$ به دست می‌آید.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = 2V \Rightarrow V = \frac{F}{2} \Rightarrow \tau_{ave} = \frac{V}{A} = \frac{F}{2A}$$


تذکره ۲: اگر در حالت فوق اتصال ورق‌ها توسط N پرچ باشد، آنگاه برای محاسبه تنش برشی در پرچ‌ها، در مخرج رابطه‌های بالا، ضریب N در مساحت سطح مقطع یک پرچ (A) ضرب می‌شود.

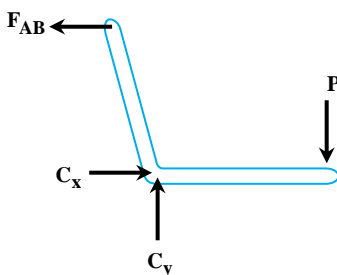
نکته ۲: در پین‌ها برای محاسبه مقدار تنش برشی ایجاد شده در آن باید مقدار کل نیرو که باعث برش می‌شود را جایگزین کنیم، مثلاً اگر C_x و C_y مؤلفه‌های نیرو در یک پین باشند، مقدار کل نیرو $F_C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$ بوده و تنش برشی $\tau_{ave} = \frac{F_C}{A}$ می‌باشد.

مثال ۷: پینی با قطر ۵ mm در اتصال C برای پدال نشان داده شده به کار رفته است. اگر $P = 600\text{ N}$ باشد، تنش برشی تقریبی پین کدام است؟ ($\pi = 3$)



- (۱) $\tau = 16\sqrt{2}\text{ MPa}$
- (۲) $\tau = 32\sqrt{2}\text{ MPa}$
- (۳) $\tau = 8\sqrt{2}\text{ MPa}$
- (۴) $\tau = 12\sqrt{2}\text{ MPa}$

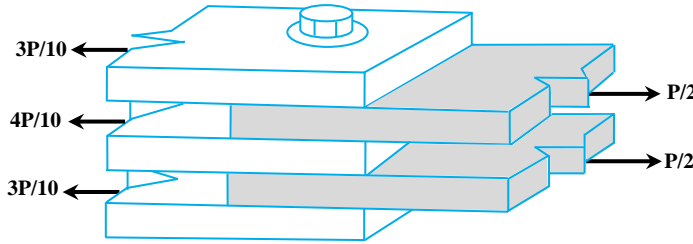
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا با گشتاورگیری حول مفصل C، نیروی موجود در کابل AB را به دست می‌آوریم سپس با حل معادلات تعادل ($\sum F_{x,y} = 0$) مؤلفه‌های نیروی C_x و C_y و در نهایت نیروی برآیند F_C را محاسبه می‌کنیم.



$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow F_{AB} \times 300 - 600 \times 300 = 0 \Rightarrow F_{AB} = 600\text{ N} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow C_x = 600\text{ N} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow C_y = 600\text{ N} \\ \Rightarrow F_C &= \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \Rightarrow F_C = \sqrt{600^2 + 600^2} = 600\sqrt{2}\text{ N} \\ \tau_C &= \frac{F_C}{2A_C} = \frac{600\sqrt{2}}{2 \times \frac{\pi}{4} \times 5^2} = 16\sqrt{2}\text{ MPa} \end{aligned}$$

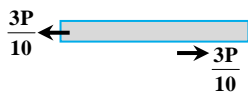
نکته ۳: در این مثال بین C با دو اتصال به زمین متصل شده است بنابراین بین C تحت برش مضاعف می‌باشد.

مثال ۸: در اتصال زیر مطابق شکل ۵ ورق فولادی که ضخامت هر یک t می‌باشد با یک پیچ با سطح مقطع A به همدیگر متصل شده‌اند و نیروی P را باید انتقال دهند. تنش برشی ماکزیمم در پیچ کدام است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{4} \left(\frac{P}{A} \right) \\ (2) \quad & \frac{3}{10} \left(\frac{P}{A} \right) \\ (3) \quad & \frac{2}{10} \left(\frac{P}{A} \right) \\ (4) \quad & \frac{1}{2} \left(\frac{P}{A} \right) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۲» برش ماکزیمم در فصل مشترک صفحات اول و دوم ایجاد می‌شود که برابر است با:



$$\tau_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} = \frac{10}{A} = \frac{3}{10} \frac{P}{A}$$

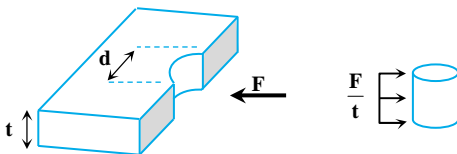
توجه کنید که صفحات میانی تحت نیروی بزرگ‌تر یعنی $\frac{4P}{10}$ قرار دارند که از $\frac{3}{10}P$ بیشتر است ولی مساحت سطح در این حالت دو برابر است و در نتیجه تنش آن‌ها از مقدار محاسبه شده بین صفحات اول و دوم کمتر است.



$$\Rightarrow \tau = \frac{2P}{10A}$$

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی)

در سطوح تکیه‌گاهی یا سطوح تماس اعضایی که به یکدیگر فشار وارد می‌کنند، تنشی ایجاد می‌شود که آن را تنش لهیدگی می‌نامند. به عنوان مثال در داخل سوراخ قلاب‌های تکیه‌گاهی تنشی فشاری از طرف پین به سطح داخلی سوراخ وارد می‌شود که باعث تنش لهیدگی می‌شود و مقدار آن برابر است با:



$$\sigma_b = \frac{F}{A} = \frac{F}{dt}$$

در رابطه فوق d قطر سوراخ و t ضخامت صفحه‌ی قلاب تکیه‌گاهی می‌باشد. در واقع dt برابر مساحت یک مستطیل بوده که سطح تصویر یافته نیم استوانه بر صفحه قائم می‌باشد.

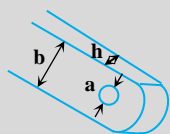
اگر مطابق شکلی که در بخش تنش برشی رسم شده است، دو ورق هم جنس توسط پرچ به هم متصل باشند، پدیده لهیدگی در ورق‌ی که ضخامت کمتری داشته باشد بیشتر قابل ملاحظه است. همچنین در چنین حالتی اگر بجای یک پرچ از N پرچ برای اتصال استفاده شود، مخرج کسر تنش لهیدگی،

$$\sigma_b = \frac{F}{dt} \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود به}} \sigma_b = \frac{F}{Nd t_{\min}}$$

در عدد N ضرب می‌شود، بنابراین:

تذکر ۳: برای محاسبه تنش در رابطه‌ی تنش لهیدگی، از تقسیم نیرو بر مساحت تصویر یافته سطح استوانه‌ای بر صفحه عمود بر نیرو که یک مستطیل بوده، استفاده شده است. این مقدار تنش از مقدار واقعی آن بزرگ‌تر است. در دیگر مسائل نیز اگر سطح تحت فشار به صورت تخت نباشد، یا آنکه سطحی که فشار اعمال می‌کند دارای سطح تخت نباشد (مانند سطح سمبه) آنگاه برای محاسبه تنش لهیدگی در آن از مساحت تصویر یافته در صفحه عمود بر امتداد نیرو استفاده می‌شود. (برای درک بهتر به مثال ۹ مراجعه شود).

نکته ۴: در سازه‌هایی که با اتصالات پینی به هم متصل شده‌اند، اگر نیروی عضو کششی داشته باشیم، برای محاسبه تنش حداکثر در عضو باید از مساحت در قسمتی از عضو که دارای سوراخ است یعنی $(b-a)h$ استفاده کنیم و اگر نیروی عضو فشاری داشته باشیم برای محاسبه حداکثر تنش از مساحت bh استفاده می‌کنیم.



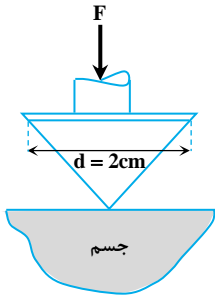
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{F}{(b-a)h}$$

عضو تحت نیروی کششی است.

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{F}{bh}$$

عضو تحت نیروی فشاری است.

مثال ۹: توسط یک سمبه مخروطی نیروی فشاری $6/28 \text{ tons}$ بر سطح جسم مطابق شکل اعمال می‌شود، مقدار تنش ایجاد شده در سطح جسم در هنگام فرو رفتن به داخل آن چه اندازه است؟



(۱) 2000 kg/cm^2

(۲) 1000 kg/cm^2

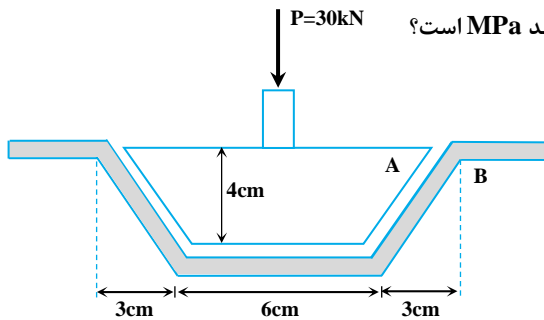
(۳) 4000 kg/cm^2

(۴) برای محاسبه تنش نیاز به زاویه رأس مخروط است که در شکل مسئله داده نشده است.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه یک سطح مخروطی بر جسم فشار وارد می‌کند، برای محاسبه تنش لهیدگی در آن از مساحت سطح تصویر یافته آن بر صفحه افقی که یک دایره بوده استفاده می‌شود. بنابراین سطح تصویر یافته مخروط یک دایره بوده و تنش لهیدگی در آن برابر است با:

$$\sigma_b = \frac{F}{A} = \frac{6280 \text{ kg}}{\frac{\pi}{4} \times 2^2 \text{ cm}^2} = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

مثال ۱۰: تنش تماسی (bearing Stress) بین دو قطعه‌ی A و B در شکل مقابل چند MPa است؟ (پهنای سطح تماس ۱cm است)



(۱) ۵

(۲) $18/75$

(۳) ۲۰

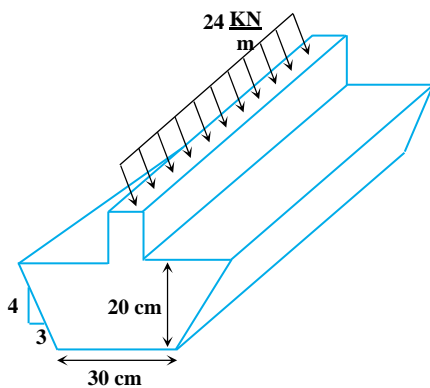
(۴) ۲۵

پاسخ: گزینه «۴» در محاسبه تنش تماسی، نیرو، تقسیم بر مساحت تصویر یافته می‌شود. اگر تصویر سمبه A بر روی سطح افقی با A_t نشان داده شود آنگاه:

$$\sigma_b = \frac{F}{A_t} \quad \text{مساحت تصویر شده در راستای عمود بر نیرو: } A_t$$

$$\sigma_b = \frac{30000 \text{ N}}{(30 + 60 + 30) \times 10 \text{ mm}^2} = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 25 \text{ MPa}$$

مثال ۱۱: در تکیه‌گاه متقارن زیر تنش لهیدگی چقدر است؟



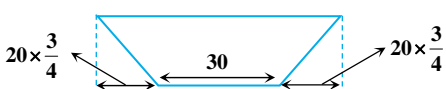
(۱) $25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

(۲) $30 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

(۳) $80 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

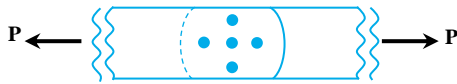
(۴) $40 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

پاسخ: گزینه «۴» تنش لهیدگی مساوی با نیرو تقسیم بر مساحت تصویر یافته سطح تحت تنش، بر صفحه عمود در راستای نیرو می‌باشد: (در صورتی که ضخامت ورق برابر یک متر در نظر گرفته شود).



$$F = 24 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times 1 \text{ m} = 24 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} ; \quad A = 1 \text{ m} \times \left(30 + 20 \times \frac{3}{4} + 20 \times \frac{3}{4} \right) \times 10^{-2} \text{ m} = 0.6 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma = \frac{24 \text{ kN}}{0.6} = 40 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$



مثال ۱۲: اتصال پرچی از نوع منفرد مفروض است. اگر عرض تسمه‌ها معادل 2 cm و ضخامت آن‌ها معادل 3 cm و قطر پرچ‌ها معادل 2 cm باشد، مقدار تنش لهیدگی بین تسمه و پرچ‌ها چقدر است؟ ($P = 1641\text{ kg}$)

$$547 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad (4)$$

$$303 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad (2)$$

$$391 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad (3)$$

$$104 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad (1)$$

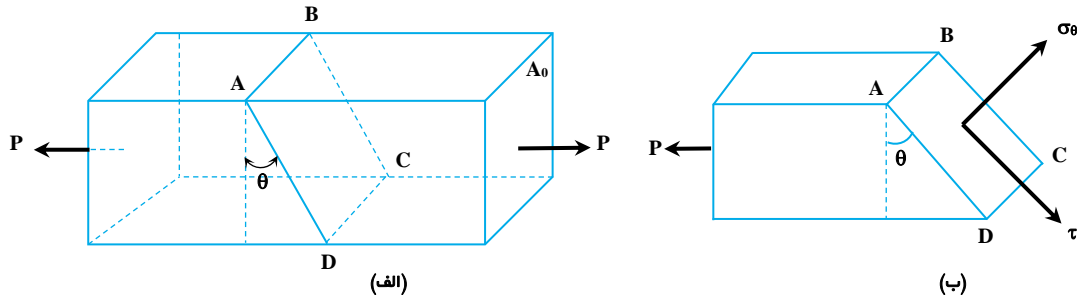
پاسخ: گزینه «۴» از ۵ پرچ مطابق شکل فوق برای اتصال تسمه‌ها استفاده شده است، در نتیجه تنش لهیدگی در سطح داخلی سوراخ توسط رابطه‌ی

$$\sigma_b = \frac{P}{Ndt} = \frac{P}{\Delta dt} = \frac{1641\text{ kg}}{5 \times 2 \times 0.3\text{ cm}^2} = 547 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

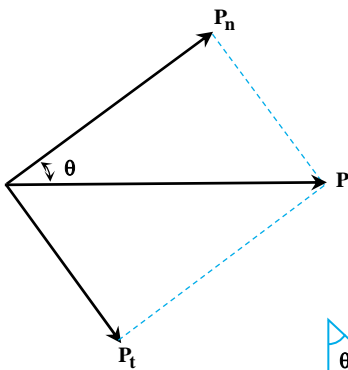
مقابل تعیین می‌شود.

تنش در صفحات مایل تحت بارگذاری‌های محوری

اگر جسمی مطابق شکل تحت بار محوری قرارگیرد، آنگاه نیروهای محوری در صفحات مایل نه تنها ایجاد تنش قائم کرده بلکه تنش برشی نیز ایجاد خواهند کرد.

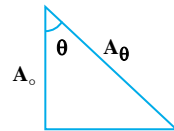


ابتدا باید نیروی محوری در سطح مایل به دو مؤلفه عمود بر سطح P_n و مماس بر سطح P_t تجزیه شده سپس مؤلفه‌های مذکور تقسیم بر مساحت سطح شیب‌دار A_θ شوند.



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\theta = \frac{P_n}{A_\theta}, P_n = P \cos \theta, A_\theta = \frac{A_o}{\cos \theta} \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{P}{A_o} \cos^2 \theta \\ \tau_\theta = \frac{P_t}{A_\theta}, P_t = P \sin \theta \Rightarrow \tau_\theta = \frac{P}{A_o} \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \tau_\theta = \frac{P}{2A_o} \sin 2\theta \end{array} \right.$$

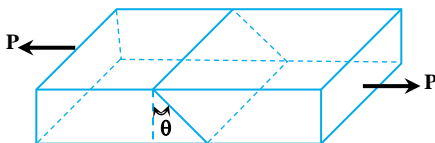
در رابطه فوق P_n , P_t به ترتیب مؤلفه‌های قائم و مماسی نیروی P بر صفحه مایل می‌باشند. توجه کنید که A_θ به طریق زیر محاسبه شده است:



$$\cos \theta = \frac{A_o}{A_\theta} \Rightarrow A_\theta = \frac{A_o}{\cos \theta}$$

از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که تنش قائم در $\theta = 0^\circ$ ماکزیمم بوده و مساوی $\frac{P}{A_o}$ می‌باشد و تنش برشی در $\theta = 45^\circ$ ماکزیمم شده و مساوی $\frac{P}{2A_o}$ می‌باشد. (A_o مساحت سطح مقطع عمود بر محور طولی عضو است). با توجه به مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که در بارگذاری محوری زاویه بین صفحات تنش قائم ماکزیمم و تنش برشی ماکزیمم مساوی 45° است.

مثال ۱۳: برای نمونه نشان داده شده، مطلوبست تعیین زاویه‌ای که حداکثر تنش برشی در آن اتفاق می‌افتد؟



$$22.5^\circ \quad (1)$$

$$90^\circ \quad (2)$$

$$45^\circ \quad (3)$$

$$0^\circ \quad (4)$$

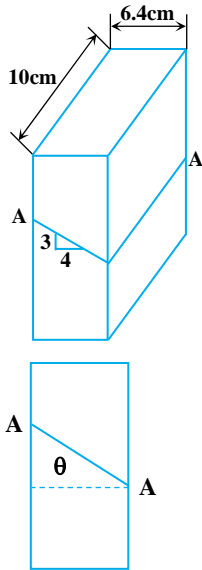
پاسخ: گزینه «۳» طبق رابطه‌ی ارائه شده در قسمت قبل، مقدار تنش برشی در صفحه‌ای که با صفحه‌ی قائم زاویه θ می‌سازد، برابر است با:

$$\tau_\theta = \frac{P}{2A_o} \sin 2\theta \quad \text{بنابراین } \tau \text{ زمانی ماکزیمم می‌شود که } \sin 2\theta \text{ مساوی یک می‌شود به عبارت دیگر:}$$

$$\sin 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$



مثال ۱۴: در شکل مقابل مقدار نیروی p حداکثر چقدر باشد تا در مقطع $A-A$ ، تنش عمودی از 2800 kPa و تنش برشی از 840 kPa بیشتر نشود؟ (ابعاد مقطع $6/4 \text{ cm}$ در 10 cm)



- (۱) 11200 N
- (۲) 12800 N
- (۳) 24200 N
- (۴) 28000 N

پاسخ: گزینه «۱»

$$\text{tg} \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 36/8^\circ$$

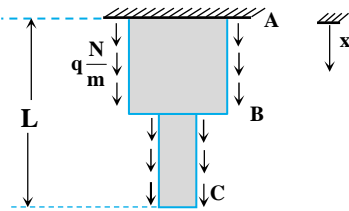
$$\sigma_\theta = \frac{P}{A_o} \cos^2 \theta \Rightarrow 2800 \times 10^3 = \frac{P_1}{0/1 \times 0/064} \cos^2 36/8^\circ \Rightarrow P_1 = 28000 \text{ N}$$

$$\tau_\theta = \frac{P}{A_o} \sin \theta \cos \theta \Rightarrow 840 \times 10^3 = \frac{P_2}{0/1 \times 0/064} (\cos 36/8^\circ)(\sin 36/8^\circ)$$

$$P_2 = 11200 \text{ N}$$

در بین دو جواب به دست آمده، جواب کوچک‌تر مورد نظر است:

نکته ۵: اگر در یک سازه بخواهیم حداکثر یک کمیت که به پارامتر خاصی وابسته است به حداقل برسد، ابتدا مقادیر کمیت در نقاط اکسترمم را محاسبه نموده، سپس قدرمطلق کمیت مورد نظر را در این نقاط با هم برابر قرار داده تا پارامتر مورد بررسی به دست آید.



مثال ۱۵: در شکل روبرو اگر مساحت قسمت AB چهار برابر قسمت BC باشد، طول قسمت‌های AB و BC را طوری تعیین کنید که تنش ماکزیمم در میله AC مینیمم شود.

(میله تحت بار گسترده یکنواخت $q \frac{N}{m}$ در واحد طول است)

پاسخ: در این مسئله باید مقدار تنش را به دست آوریم. پس تنش را در نقاط اکسترمم به دست می‌آوریم و با هم برابر قرار می‌دهیم، تنش حداکثر در قسمت AB در مقطع A و در قسمت BC در مقطع B اتفاق می‌افتد. چرا که حداکثر نیرو در قسمت AB در مقطع A روی داده و حداکثر نیرو در قسمت BC در مقطع B اتفاق می‌افتد. چون بار گسترده طولی در کل تیر ثابت است، بنابراین نیروی داخلی در مقاطع A و B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

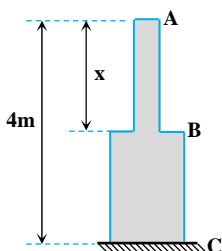
$$R_A = \int_0^L q dx = qL = q(L_{BC} + L_{AB}) \quad R_B = \int_{x_B}^L q dx = q(L - x_B) = qL_{BC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{تنش در مقطع } A: \sigma_A = \frac{qL}{4A} \\ \text{تنش در مقطع } B: \sigma_B = \frac{q(L_{BC})}{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق نکته فوق}} \sigma_A = \sigma_B \Rightarrow \frac{qL}{4A} = \frac{q(L_{BC})}{A}$$

$$\Rightarrow L = 4L_{BC} \Rightarrow L_{BC} + L_{AB} = 4L_{BC} \Rightarrow L_{AB} = 3L_{BC} \quad (1)$$

$$L_{AB} + L_{BC} = L \xrightarrow{(1)} 3L_{BC} + L_{BC} = L \Rightarrow L_{BC} = \frac{L}{4}, L_{AB} = \frac{3}{4}L$$

مثال ۱۶: ستون بتونی به ارتفاع 4 m برای تحمل وزنش از دو قسمت AB و BC به ترتیب به قطر 200 mm و 400 mm تشکیل شده است. طول تقریبی قسمت AB را برای اینکه مقدار ماکزیمم تنش عمودی در ستون کمترین مقدار خود را داشته باشد؟



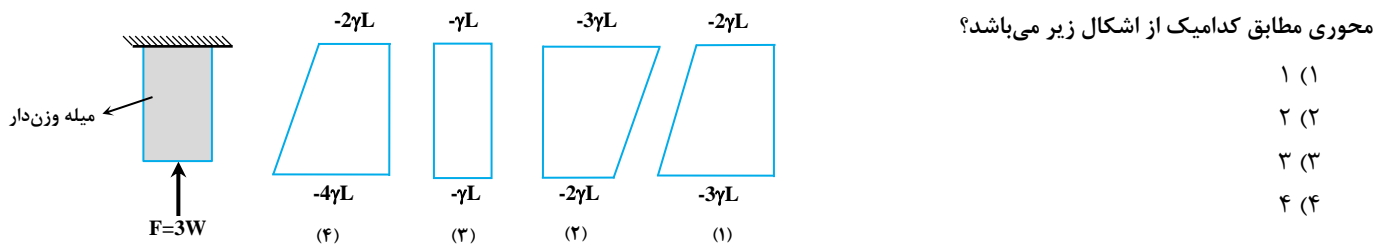
- (۱) 230 cm
- (۲) $86/4 \text{ cm}$
- (۳) 200 cm
- (۴) اطلاعات ناقص است.

✓ پاسخ: گزینه «۱» ماکزیمم تنش عمودی در ستون زمانی کمترین مقدارش را خواهد داشت که ماکزیمم تنش عمودی در کل ستون ثابت باشد. از طرفی ماکزیمم وزن هر بخش از میله برابر حاصل ضرب حجم میله در وزن مخصوص آن (γ) می‌باشد. بنابراین تنش در دو بخش میله را محاسبه نموده و مقادیر آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم.

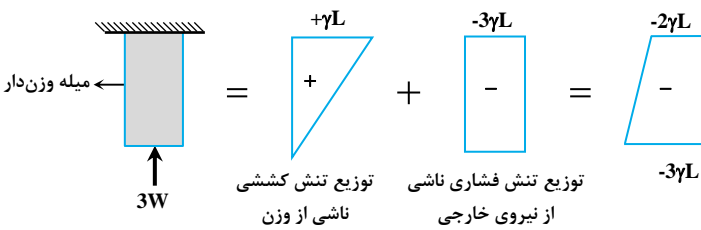
$$(\sigma_{AB})_{\max} = (\sigma_{BC})_{\max} \Rightarrow \frac{W_{AB}}{A_1} = \frac{W_{AB} + W_{BC}}{A_2} \Rightarrow \frac{\gamma V_{AB}}{A_1} = \frac{\gamma V_{AB} + \gamma V_{BC}}{A_2} \Rightarrow \gamma x = \frac{\gamma A_1 x + \gamma A_2 (L - x)}{A_2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{A_1}{A_2} x + L - x \Rightarrow 2x - x \frac{A_1}{A_2} = L \Rightarrow x = \frac{L}{2 - \frac{A_1}{A_2}} = \frac{400}{2 - \frac{\pi \times 200^2}{\pi \times 400^2}} = \frac{1600}{\gamma} \text{ cm} \sim x = 230 \text{ cm}$$

✓ مثال ۱۷: یک میله به مقطع ثابت A ، طول L و وزن مخصوص γ تحت تأثیر نیروی فشاری معادل سه برابر وزنش قرار دارد. منحنی توزیع تنش محوری مطابق کدامیک از اشکال زیر می‌باشد؟



✓ پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخ می‌توان از روش جمع آثار استفاده نمود، به این صورت که تنش ناشی از بار فشاری $3W$ و نیروی وزن را به صورت جداگانه محاسبه نموده و نتایج را با هم جمع کنیم. با توجه به تذکر (۱) توزیع تنش ناشی از وزن یک توزیع خطی است، در حالی که توزیع تنش ناشی از بار فشاری یک توزیع ثابت می‌باشد که حاصل جمع آن‌ها مساوی است با:



مفاهیم و اصطلاحات مورد استفاده در درس مقاومت مصالح

تنش نهایی (σ_{II}): حداکثر تنشی است که جسم می‌تواند آن را تحمل نماید. مقدار این تنش را توسط آزمایشاتی مانند کشش یا فشار تعیین می‌کنند و در جداول خواص مکانیکی مواد موجود است البته دماهای بالا می‌تواند بر مقدار این تنش تأثیرگذار باشند.

کرنش سختی: در تغییر شکل پلاستیک در برخی از فلزات، تغییراتی در ساختمان کریستالی جسم به وجود می‌آید که منجر به افزایش مقاومت فلز در مقابل تغییر شکل‌های بعدی می‌شود، به این اثر کرنش سختی گفته می‌شود. با افزایش کرنش سختی رفتار جسم از حالت انعطاف‌پذیری فاصله می‌گیرد.

خزش (Creep): برخی مواد هنگامی که تحت اثر بار ثابت برای مدت زمان طولانی قرار می‌گیرند، کرنش‌های دیگری در آن‌ها به وجود می‌آید که به آن خزش گفته می‌شود. مقدار خزش به وجود آمده در جسم به مدت زمان بارگذاری و همچنین درجه حرارتی که جسم در آن بارگذاری شده وابسته می‌باشد.

سختی (Hardness): توانایی ماده برای مقابله با سایش سطحی را سختی می‌نامند.

طاقة یا چقرمگی (Toughness): مقدار انرژی جذب شده توسط ماده، بدون ایجاد گسیختگی در آن معرف طاققت مصالح می‌باشد. این خاصیت در بارهای ناگهانی یا بارهای تناوبی بسیار مطلوب می‌باشد.

فرم‌پذیری یا چکش‌خواری (Malleability): خاصیتی است که باعث می‌شود مصالح به صورت یکنواخت در یک جهت منبسط شده، بدون اینکه گسیخته شوند.

حالت خمیری (Plasticity): حالت خمیری خاصیتی از مصالح است که در طی آن تغییر شکل‌های به وجود آمده در جسم حتی پس از باربرداری از روی جسم ماندگار می‌باشد.

شکل‌پذیری (Ductility): بر طبق این خاصیت جسم قادر خواهد بود قبل از گسیختگی، تغییر شکل قابل توجهی از خود نشان دهد، این خاصیت را از نمودار تنش - کرنش می‌توان دریافت.

تردی (Brittleness): تردی عکس حالت شکل‌پذیری می‌باشد. در مصالح ترد، گسیختگی ممکن است در اثر تغییر شکل‌های کوچک رخ داده و معمولاً این نوع گسیختگی‌ها بدون علائم و هشدار قبلی (قابل مشاهده در جسم) اتفاق می‌افتد.

اصل سنت ونانت: این اصل بیان می‌کند که اگر جسمی تحت تأثیر بارگذاری محوری قرار گیرد، به جز در نواحی انتهایی میله، توزیع تنش در دیگر مقاطع آن یکنواخت می‌باشد.

برای توزیع تنش یکنواخت حداقل فاصله مقطع مورد نظر تا مکان بارگذاری مساوی پهنا یا عرض جسم است.
ضریب ایمنی (Factor of Safety): برای جلوگیری از گسیختگی یک سازه، ظرفیت تحمل بار سازه باید از نیروهایی که به آن اعمال می‌گردد بیشتر باشد، بدین جهت در محاسبات مربوط به طراحی، فاکتوری تحت عنوان ضریب ایمنی تعریف می‌شود.
 طبق تعریف، ضریب ایمنی مساوی نسبت نیروی بحرانی به نیروی مجاز است:

$$n = \frac{P_u}{P_{all}}$$

در صورتی که رابطه بین نیرو و تنش خطی باشد، ضریب اطمینان را بر حسب تنش نهایی و تنش مجاز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$n = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}}$$

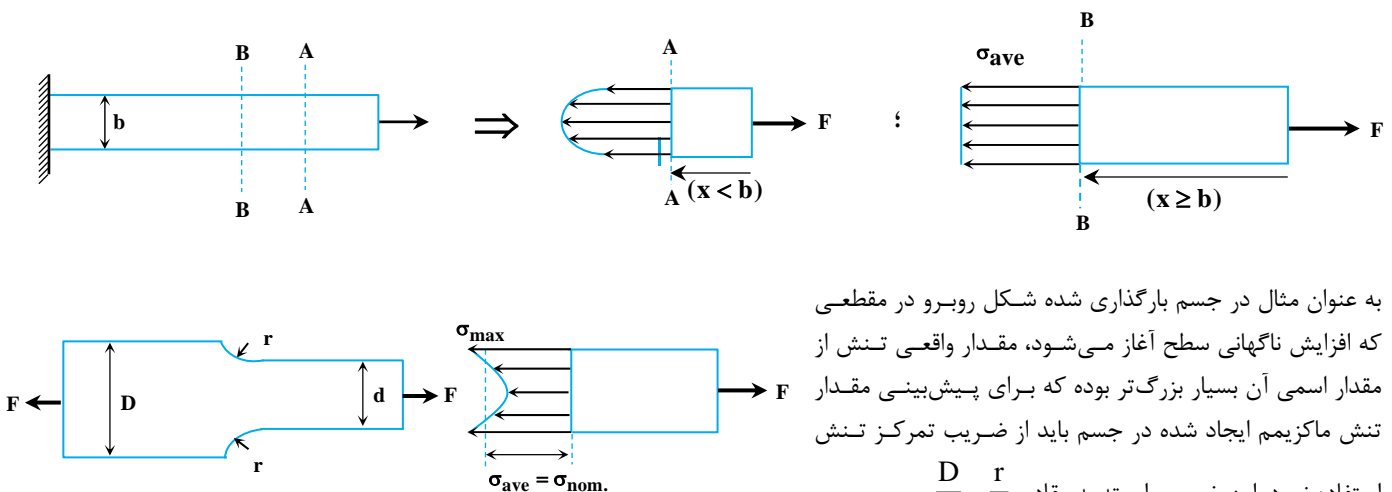
رابطه فوق معمولاً ضریب اطمینان را برای مواد ترد و شکننده مانند بتن تعیین می‌کند. این در حالی است که برای مواد نرم مانند فولاد کم‌کربن به جای تنش نهایی از تنش تسلیم استفاده می‌شود.

$$n = \frac{\sigma_y}{\sigma_{all}}$$

تمرکز تنش: معمولاً تمرکز تنش در نزدیکی نقاط اعمال بار و یا ناپوستگی‌های هندسی موجود در عضو مانند سوراخ، تغییر ناگهانی سطح مقطع و ... وجود داشته که باعث افزایش موضعی تنش خواهد شد. مقدار این تنش‌های ماکزیم موضعی را می‌توانیم از رابطه‌ی زیر به دست آوریم:

$$\sigma_{max} = k\sigma_{nom.}$$

در رابطه فوق تنش اسمی بوده و k ضریب تمرکز تنش نامیده می‌شود. این ضریب مستقل از اندازه و جنس عضو بوده و تنها به نسبت پارامترهای هندسی وابسته است. همچنین $\sigma_{nom.}$ تنش متوسط محاسبه شده در مقطع بحرانی (باریک‌ترین مقطع) می‌باشد.
 همان طور که در اصل سنت ونانت بیان شد هر چه از نقاط اثر نیرو فاصله گرفته شود، مقدار توزیع تنش یکنواخت‌تر می‌شود تا آنکه در نهایت، هرگاه به فاصله حداقل، برابر عرض جسم برسیم، تنش توزیعی یکنواخت خواهد داشت.



به عنوان مثال در جسم بارگذاری شده شکل روبرو در مقطعی که افزایش ناگهانی سطح آغاز می‌شود، مقدار واقعی تنش از مقدار اسمی آن بسیار بزرگ‌تر بوده که برای پیش‌بینی مقدار تنش ماکزیم ایجاد شده در جسم باید از ضریب تمرکز تنش استفاده نمود. این ضریب وابسته به مقادیر $\frac{D}{d}$ و $\frac{r}{d}$

است و می‌توان مقدار آن را از جداول ضریب تمرکز تنش که با کمک داده‌های تجربی به دست آمده‌اند، تعیین نمود. البته لازم به ذکر است که این جداول

ضرایب تمرکز تنش تئوری را پیش‌بینی می‌کند، در حالی که ضرایب تمرکز تنش واقعی به جنس جسم نیز وابسته است.

$$\sigma_{max} = k\sigma_{nom.} = k \frac{F}{dt}$$

t در رابطه فوق ضخامت جسم می‌باشد.