



آزمون (۱)

۱- گزینه «۳» ابتدا معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

شرط آنکه $y_1 = e^{-2x}$ و $y_2 = e^{3x}$ دو جواب مستقل خطی معادله باشند این است که $\lambda_1 = -2$ و $\lambda_2 = 3$ دو ریشه‌ی معادله مشخصه باشند، پس داریم:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda + 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - \lambda - 6 \Rightarrow a = -1, b = -6 \Rightarrow ab = 6$$

۲- گزینه «۱» با توجه به اینکه عبارت $(2x+1)$ در معادله چند بار تکرار شده تغییر متغیر $u = 2x+1$ را در نظر می‌گیریم. با اعمال این تغییر متغیر y' و y''

$$\text{را برحسب } \frac{dy}{du} \text{ و } \frac{d^2y}{du^2} \text{ به دست می‌آوریم:}$$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \frac{dy}{du}$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \frac{d^2y}{du^2}$$

$$u^2 \left(2 \frac{d^2y}{du^2} \right) + u \left(2 \frac{dy}{du} \right) + 3y = u \Rightarrow 4u^2 \frac{d^2y}{du^2} + 2u \frac{dy}{du} + 3y = u$$

با جایگذاری y' و y'' در معادله‌ی اصلی داریم:

معادله به شکل معادلات کوشی - اوپلر درآمده است پس با تغییر متغیر $u = e^t$ به معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌رسیم. اکنون توجه شود که دو تغییر متغیر $u = e^t$ و $u = 2x+1$ را اعمال کردیم، پس از ابتدا با اعمال تغییر متغیر $u = e^t$ می‌توانستیم به معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت برسیم. سمت راست معادله صورت سؤال عبارت $2x+1$ وجود دارد که با تغییر متغیر گفته شده به e^t تبدیل می‌شود، پس گزینه «۱» صحیح است.

۳- گزینه «۳» معادله از نوع کوشی - اوپلر است پس با تغییر متغیر $t = e^u$ و جایگزینی‌های $Dy = ty'$ و $D(D-1)y = t^2 y''$ داریم:

$$D(D-1)y + \alpha Dy + y = 0 \Rightarrow [D^2 + (\alpha-1)D + 1]y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2 + (\alpha-1)\lambda + 1 = 0$$

برای اینکه پاسخ‌ها نوسانی باشند باید ریشه‌ی معادله مشخصه دارای قسمت موهومی باشد پس شرط $\Delta < 0$ باید برقرار باشد:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (\alpha-1)^2 - 4 < 0 \Rightarrow (\alpha-1)^2 < 4 \Rightarrow -2 < \alpha-1 < 2 \Rightarrow -1 < \alpha < 3$$

۴- گزینه «۴» معادله‌ی همگن را به صورت $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$a_2 = (x-1), a_1 = -x, a_0 = 1$$

با توجه به اینکه شرط $a_1 + x a_0 = 0$ برقرار است پس یکی از جواب‌های معادله‌ی همگن $y_1 = x$ است.

۵- گزینه «۲» رونسکین داده شده را تشکیل می‌دهیم:

$$W = \begin{vmatrix} x^{-1} & y \\ -x^{-2} & y' \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x^{-1} y' + x^{-2} y = 3$$

به معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول رسیدیم که با حل آن به تابع y می‌رسیم:

$$x^{-1} y' + x^{-2} y = 3 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = 3x$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\ln x} = x$$

معادله‌ی مرتبه اول به دست آمده یک معادله‌ی خطی است پس داریم:

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) \cdot 3x dx + c_1 \right) = \frac{1}{x} \left(\int 3x^2 dx + c_1 \right) = \frac{1}{x} (x^3 + c_1) = x^2 + \frac{c_1}{x} \xrightarrow{c_1 = -c} y = x^2 - cx^{-1}$$

۶- گزینه «۱» معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{-1}{x}$$

$$W = ce^{-\int P(x) dx} = ce^{\int \frac{dx}{x}} = ce^{\ln x} = cx$$

با توجه به قضیه‌ی آبل رونسکین پاسخ‌های معادله را به دست می‌آوریم:

۷- گزینه «۲» معادله مشخصه را تشکیل داده و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

$$16\lambda^2 + 24\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (4\lambda + 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3}{4}$$

بنابراین پاسخ معادله و مشتق آن به شکل روبه‌رو است:

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{3}{4}t}, \quad y' = [c_2 - \frac{3}{4}(c_1 + c_2 t)] e^{-\frac{3}{4}t}$$

با اعمال شرایط اولیه ثابت‌های c_1 و c_2 به دست می‌آیند:

$$y(0) = \alpha \Rightarrow c_1 = \alpha$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow c_2 - \frac{3}{4}c_1 = -1 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{4}\alpha - 1 \Rightarrow y = [(\frac{3}{4}\alpha - 1)t + \alpha] e^{-\frac{3}{4}t}$$

حالا خوب دقت کنید؛ اگر دو شرط $\frac{3}{4}\alpha - 1 > 0$ و $\alpha > 0$ برقرار باشد آنگاه همواره جواب مثبت است و اشتراک دو شرط گفته شده $\alpha > \frac{4}{3}$ است پس در $\alpha = \frac{4}{3}$ جواب‌های همواره مثبت از جواب‌هایی که در نهایت منفی می‌شوند، جدا می‌شوند.

۸- گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله مرتبه دوم فاقد y است. در این صورت داریم:

$$xy'' + y' = x \xrightarrow{y'=p \Rightarrow y''=p'} xp' + p = x \Rightarrow p' + \frac{1}{x}p = 1$$

معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد. لذا داریم:

$$\xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول نسبت به } p \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\text{Ln}x} = x \Rightarrow p = \frac{1}{x} \left\{ \int x \times 1 dx + c_1 \right\} = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right)$$

با ساده‌سازی و جایگذاری $p = y'$ و انتگرال‌گیری از طرفین معادله حاصل، مقدار y به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$p = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \xrightarrow{p=y'} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \Rightarrow y = \int \left(\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \right) dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + c_1 \text{Ln}x + c_2$$

۹- گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض فاقد y است، بنابراین داریم:

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0 \xrightarrow{y'=p, y''=p'} x^2 p' + 2xp - 1 = 0 \Rightarrow p' + \frac{2p}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow p' + \frac{2p}{x} = \frac{1}{x^2}$$

معادله حاصل یک معادله خطی مرتبه اول است، پس داریم:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\text{Ln}x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) \cdot \frac{1}{x^2} dx + c \right) \Rightarrow p = \frac{1}{x^2} \left(\int dx + c \right) = \frac{1}{x^2} (x + c) = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$$

$$\xrightarrow{p=y'} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} \Rightarrow dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} \right) dx \xrightarrow{\int} y = \text{Ln}x - \frac{c}{x} + c_2 \xrightarrow{c_1 = -c} y = \text{Ln}x + \frac{c_1}{x} + c_2$$

۱۰- گزینه «۱» می‌دانیم که دو پاسخ معادله $y'' + P(t)y' + Q(t) = 0$ هنگامی مستقل خطی هستند که رونسکین آن‌ها مخالف صفر باشد. با توجه به

اطلاعات مسئله y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند. پس داریم:

$$W_0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

رونسکین y_3 و y_4 را تشکیل می‌دهیم:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 y_1 + a_2 y_2 & b_1 y_1 + b_2 y_2 \\ a_1 y_1' + a_2 y_2' & b_1 y_1' + b_2 y_2' \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) (y_1 y_2' - y_2 y_1') = (a_1 b_2 - a_2 b_1) W_0$$

برای اینکه y_3 و y_4 مستقل خطی باشند، باید $W \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$$W = (a_1 b_2 - a_2 b_1) W_0 \neq 0 \xrightarrow{W_0 \neq 0} a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \Rightarrow a_1 b_2 \neq a_2 b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

۱۱- گزینه «۳» دو طرف معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم تا معادله استاندارد شود.

$$y'' + \frac{-2}{x+1} y' + \frac{2}{(x+1)^2} y = 0$$

اکنون به روش کاهش مرتبه y_2 را به دست می‌آوریم:

$$y_2 = y_1 \times \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{\int -p(x) dx} dx \Rightarrow y_2 = (x+1) \int \frac{e^{\int \frac{2}{x+1} dx}}{(x+1)^2} dx \Rightarrow y_2 = (x+1) \int \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} dx = (x+1)(x) = x^2 + x$$



۱۲- گزینه «۱» معادله از نوع کوشی - اوایلر است. با اعمال تغییر متغیر $x = e^t$ و جایگزین‌های $xy' = Dy$ و $x^2 y'' = D(D-1)y$ داریم:

$$D(D-1)y + Dy + y = 0 \Rightarrow (D^2 + 1)y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t \xrightarrow{x=e^t} y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 (\ln x)$$

با توجه به معادله مشخصه پاسخ عمومی معادله به شکل مقابل است:

۱۳- گزینه «۱» معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

$$\lambda^2 + 64 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 8i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 8$$

$$y = c_1 \cos 8x + c_2 \sin 8x \Rightarrow y' = -8c_1 \sin 8x + 8c_2 \cos 8x$$

با اعمال شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y(0) = -3 \Rightarrow c_1 = -3 \\ y'(0) = 32 \Rightarrow 8c_2 = 32 \Rightarrow c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y = -3 \cos 8x + 4 \sin 8x$$

با توجه به پاسخ خصوصی به دست آمده دامنه حرکت و فرکانس را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{دامنه} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \quad \text{و} \quad \text{فرکانس} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

۱۴- گزینه «۲» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

مجموع ضرایب توان‌های زوج با مجموع ضرایب توان‌های فرد برابر است $(13 - 3 = 9 + 1)$ ، پس یک ریشه عدد -1 است. اکنون با تقسیم کردن معادله مشخصه بر $(\lambda + 1)$ آن را تجزیه می‌کنیم:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 \left| \begin{array}{l} \lambda + 1 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 13 \end{array} \right.$$

پس معادله مشخصه به فرم $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$ است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ و $\lambda_3 = -1$ خواهد بود. با توجه به ریشه‌ها، پاسخ عمومی معادله به شکل زیر است:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \cos 3x + c_3 e^{2x} \sin 3x$$

۱۵- گزینه «۴» معادله از نوع کوشی - اوایلر است، لذا با تغییر متغیر $x = e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)(D-2)y - D(D-1)y - 6Dy + 18y = 0 \Rightarrow [D^3 - 3D^2 + 2D - D^2 + D - 6D + 18]y = 0 \Rightarrow [D^3 - 4D^2 - 3D + 18]y = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0$$

معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

با توجه به گزینه‌ها یکی از ریشه‌های معادله مشخصه $\lambda = -2$ است پس با تقسیم بر $\lambda + 2$ ، معادله مشخصه را تجزیه می‌کنیم:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 \left| \begin{array}{l} \lambda + 2 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 9 \end{array} \right.$$

پس معادله مشخصه به فرم $(\lambda + 2)(\lambda - 3)^2$ می‌باشد و ریشه‌های آن به شکل $\lambda_1 = -2$ و $\lambda_{2,3} = 3$ است.

با توجه به ریشه‌ها پاسخ عمومی را تشکیل می‌دهیم:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} \xrightarrow{x=e^t} y = c_1 x^{-2} + c_2 x^3 + c_3 x^3 \ln x$$

۱۶- گزینه «۱» معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم:

$$4\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

با توجه به ریشه‌ها پاسخ عمومی را به دست می‌آوریم:

$$y = c_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

برای اینکه وقتی $t \rightarrow +\infty$ جواب مسأله به صفر میل کند باید ضریب عبارت $e^{\frac{1}{2}t}$ صفر باشد. بنابراین داریم:

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_2 = 2 \Rightarrow y = 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

اکنون با توجه به شرایط اولیه مقدار c_2 و β را به دست می‌آوریم:

$$y' = -e^{-\frac{1}{2}t} \Rightarrow y'(0) = \beta = -1$$

۱۷- گزینه «۲» برای محاسبه جواب خصوصی از روش اپراتور معکوس استفاده می‌کنیم:

$$(D^2 + 2D^2 + D - 2)y_p = e^x + \cos x \Rightarrow y_p = \frac{e^x}{(D^2 + 2D^2 + D - 2)|_{D=1}} + \frac{\cos x}{(D^2 + 2D^2 + D - 2)|_{D^2=-1}}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{e^x}{(1+2+1-2)} + \frac{\cos x}{(-D-2+D-2)} = \frac{e^x}{2} - \frac{\cos x}{4}$$

۱۸- گزینه «۳» اگر $g(x)$ جواب معادله باشد پس باید در معادله صدق کند:

$$g'' + gg' - x^3 = 0 \quad (1)$$

اکنون در نقطه‌ی $(x = -1)$ معادله را بررسی می‌کنیم و $g''(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$g''(-1) + g(-1)g'(-1) - x^3 = 0 \Rightarrow g''(-1) + (1)(2) - (-1)^3 = 0 \Rightarrow g''(-1) = -3$$

از معادله‌ی (۱) مشتق می‌گیریم و با بررسی در نقطه‌ی $(x = -1)$ مقدار $g'''(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$g''' + (g')^2 + gg'' - 3x^2 = 0 \Rightarrow g'''(-1) + (2)^2 + (1)(-3) - 3(1) = 0 \Rightarrow g'''(-1) = -4 + 3 + 3 = 2$$

۱۹- گزینه «۱» با قرار دادن $x = 0$ در معادله، مقدار y'' در این نقطه به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$y''(0) + y(0) = 3 \Rightarrow y''(0) = 3$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادله مفروض داریم:

$$-e^{-x}y'' + e^{-x}y''' + y' + xy'' + y' = 0$$

با قرار دادن $x = 0$ در معادله حاصل و جایگذاری شرایط اولیه نتیجه می‌شود که:

$$-y''(0) + y'''(0) + 2y'(0) = 0 \Rightarrow -3 + y'''(0) + 2 = 0 \Rightarrow y'''(0) = 1$$

۲۰- گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض از نوع کوشی - اوایلر است. لذا با تغییر متغیر $x = e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)y - 2Dy + 2y = -2 \ln(e^t) \Rightarrow (D^2 - 3D + 2)y = -2t$$

معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و با توجه به ریشه‌های آن پاسخ عمومی معادله همگن متناظر را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

با توجه به سمت راست معادله پاسخ خصوصی را به صورت $y_p = At + B$ فرض می‌کنیم و با جایگذاری آن در معادله ضرایب A و B را به دست می‌آوریم:

$$(D^2 - 3D + 2)y_p = -2t \Rightarrow -3A + 2(At + B) = -2t \Rightarrow \begin{cases} 2A = -2 \Rightarrow A = -1 \\ -3A + 2B = 0 \Rightarrow B = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

اکنون پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوریم:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - t - \frac{3}{2} \xrightarrow{x=e^t} y = c_1 x + c_2 x^2 - \ln|x| - \frac{3}{2}$$



آزمون (۲)

۱- گزینه «۴» معادله از نوع کوشی - اوپلر است پس با تغییر متغیر $t = e^u$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)x + Dx + a^\gamma x = b \Rightarrow (D^\gamma + a^\gamma)x = b$$

معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم و با توجه به آن پاسخ معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^\gamma + a^\gamma = 0 \Rightarrow \lambda = \pm ia \Rightarrow (\alpha = 0, \beta = a)$$

$$x_h = c_1 \cos au + c_2 \sin au$$

با توجه به سمت راست معادله پاسخ خصوصی را به فرم $x_p = A$ فرض می‌کنیم و با جایگذاری در معادله مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$(D^\gamma + a^\gamma)x_p = b \Rightarrow a^\gamma A = b \Rightarrow A = \frac{b}{a^\gamma}$$

$$x = x_h + x_p = c_1 \cos au + c_2 \sin au + \frac{b}{a^\gamma}$$

$$\xrightarrow{t=e^u} x = c_1 \cos(a \ln t) + c_2 \sin(a \ln t) + \frac{b}{a^\gamma} \quad \text{اکنون پاسخ عمومی را به دست می‌آوریم:}$$

۲- گزینه «۴» تغییر متغیر $z = f(x)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^\gamma \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } y', y'' \text{ در معادله اصلی}} \left(\frac{dz}{dx}\right)^\gamma \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz} + \left(x - \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} + x^\gamma y = 0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله را بر } x^\gamma \text{ تقسیم می‌کنیم تا ضریب } y \text{ عدد ثابت شود}} \left(\frac{dz}{dx}\right)^\gamma \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(x - \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} + y = 0$$

با توجه به خواسته‌ی سؤال ضرایب $\frac{dy}{dz}$ و $\frac{d^2 y}{dz^2}$ باید عدد ثابت باشند:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^\gamma = c_1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \pm \sqrt[\gamma]{c_1} x = c_2 x \Rightarrow z = c_3 x^\gamma + c_4$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(x - \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} = c_5 \xrightarrow{z=c_3 x^\gamma + c_4} \gamma c_3 x + \left(x - \frac{1}{x}\right) \gamma c_3 x = c_6 x^\gamma \Rightarrow \gamma c_3 = c_6$$

ملاحظه می‌شود که به ازای تمام c_3 ها با تغییر متغیر $z = c_3 x^\gamma + c_4$ معادله‌ی اصلی به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. از آنجا که ثابت c_3 تأثیری در مشتقات ندارد می‌توانیم آن را در نظر نگیریم و شکل کلی $z = \gamma x^\gamma$ را برای تغییر متغیر انتخاب کنیم.

۳- گزینه «۴» ابتدا ریشه‌های معادله مشخصه را محاسبه می‌کنیم و با توجه به آن‌ها فرم پاسخ عمومی معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^\gamma + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^\gamma + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ و } \lambda_{2,3} = \pm 2i \Rightarrow y_h = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین پاسخ خصوصی را به فرم $y_p = x^r [(A_0 x + A_1) \cos 2x + (B_0 x + B_1) \sin 2x]$ فرض می‌کنیم که r تعداد تکرار

$$y_p = x[(A_0 x + A_1) \cos 2x + (B_0 x + B_1) \sin 2x] \quad \text{در ریشه‌های معادله مشخصه و بنابراین برابر ۱ است. پس داریم:}$$

۴- گزینه «۲» معادله فاقد y است، لذا با جایگزینی $y' = p$ و $y'' = p'$ داریم:

$$p' = xp^r \Rightarrow p^{-r} dp = x dx \Rightarrow \frac{-1}{r p^{r+1}} = \frac{x^r}{r} + c \Rightarrow \frac{1}{p^r} = -x^r - rc \xrightarrow{-rc=c_1^r} p^r = \frac{1}{c_1^r - x^r} \Rightarrow p = \frac{\pm 1}{\sqrt{c_1^r - x^r}}$$

معادله به دست آمده مرتبه اول و خطی است. با انتگرال گیری از طرفین معادله تفکیک شده داریم:

باز هم به معادله مرتبه اول خطی رسیدیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 1}{\sqrt{c_1^r - x^r}} \Rightarrow dy = \frac{\pm dx}{\sqrt{c_1^r - x^r}} \xrightarrow{\int} y = \text{Arcsin}\left(\frac{\pm x}{c_1}\right) + c_2$$

از آنجا که c_1 اختیاری است پس به جای $\frac{\pm x}{c_1}$ همان $\frac{x}{c_1}$ را استفاده می کنیم:

۵- گزینه «۳» از روش اپراتور معکوس برای به دست آوردن پاسخ خصوصی استفاده می کنیم:

$$y_p = \frac{\cos x}{P(D)} + \frac{e^{rx}}{P(D)} \Rightarrow y_p = \frac{\cos x}{(D^r - rD^{r-1} + 1)|_{D=r}} + \frac{e^{rx}}{(D^r - rD^{r-1} + 1)|_{D=r}} = \frac{\cos x}{-D + r + 1} + \frac{e^{rx}}{r - r + 1} = \frac{(r + D)\cos x}{r - D^2} + e^{rx} \Rightarrow y_p = \frac{r \cos x - \sin x}{r - D^2} + e^{rx}$$

۶- گزینه «۳» ریشه های معادله مشخصه متناظر با معادله دیفرانسیل مفروض را به دست می آوریم:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

برای اینکه پاسخ مسئله کراندار باشد باید ضریب جمله e^t صفر باشد پس $c_2 = 0$. بنابراین داریم:

$$x = c_1 e^{-2t} \Rightarrow x' = -2c_1 e^{-2t} \rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \Rightarrow c_1 = x_0 \\ x'(0) = v_0 \Rightarrow -2c_1 = v_0 \Rightarrow v_0 = -2x_0 \end{cases}$$

۷- گزینه «۳» ریشه های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 3$$

در نتیجه جواب عمومی معادله همگن از ضابطه مقابل به دست می آید:

برای محاسبه جواب خصوصی y_p ، ابتدا به محاسبه رونسکین دو جواب $y_1 = e^{2x}$ و $y_2 = e^{3x}$ می پردازیم:

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}$$

در این صورت با داشتن مقادیر y_1 و y_2 و $W(y_1, y_2)$ ، جواب خصوصی از رابطه زیر قابل محاسبه است. به نظر ویراستار این سؤال اشتباه است یا اینکه سؤال یا گزینه ها نیاز به اصلاح دارند چرا که در تمامی گزینه ها انتگرال نامعین بر حسب t دیده می شود که موجب می شود در پاسخ نهایی y_p بر حسب t و x به دست آید در حالی که اصلاً t در سؤال وجود ندارد.

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W} dx = -e^{2x} \int \frac{e^{3x} g(x)}{e^{5x}} dx + e^{3x} \int \frac{e^{2x} g(x)}{e^{5x}} dx \Rightarrow y_p = -e^{2x} \int e^{-2x} g(x) dx + e^{3x} \int e^{-2x} g(x) dx$$

۸- گزینه «۴» u' و u'' بر حسب y و مشتقات آن محاسبه کرده و در معادله اصلی جایگذاری می کنیم:

$$u = y^r \Rightarrow u' = ryy' \Rightarrow u'' = r(y')^2 + ryy''$$

$$(xy' - y)^r = -x^r yy'' \Rightarrow x^r (y')^2 - rxyy' + y^r + x^r yy'' = 0$$

$$x^r ((y')^2 yy'') - rxyy' + y^r = 0 \Rightarrow \frac{x^r}{r} \cdot u'' - xu' + u = 0 \xrightarrow{\cdot x^r} x^r u'' - rxu' + ru = 0$$

با اندکی ساده سازی داریم:

۹- گزینه «۲» $y = e^x v(x)$ پاسخ معادله است پس باید در معادله صدق کند. y' و y'' را به دست می آوریم و در معادله جایگذاری می کنیم:

$$y = e^x v \Rightarrow y' = e^x (v + v') \Rightarrow y'' = e^x (v + 2v' + v'')$$

$$xy'' - (x + r)y' + ry = 0 \Rightarrow xe^x (v + 2v' + v'') - (x + r)e^x (v + v') + re^x v = 0$$

$$\Rightarrow xv'' + (2x - x - r)v' + (x - x - r + r)v = 0 \Rightarrow xv'' + (x - r)v' = 0$$



۱۰- گزینه «۲» اگر y_1 و y_2 جواب‌های مستقل یک معادله دیفرانسیل خطی باشند و y جواب عمومی آن باشد داریم:

$$W(y, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \text{Ln}x & x \\ y' & \frac{1}{x} & 1 \\ y'' & -\frac{1}{x^2} & 0 \end{vmatrix} = (\text{Ln}x - 1)y'' + \left(-\frac{1}{x}\right)y' + \left(\frac{1}{x^2}\right)y = 0$$

برای نوشتن معادله در فرم استاندارد، طرفین را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم:

$$y'' - \frac{1}{x(\text{Ln}x - 1)}y' + \frac{1}{x^2(\text{Ln}x - 1)}y = 0$$

۱۱- گزینه «۴» طبق قضیه آبل با فرض $c = 1$ داریم:

$$e^{-x} = e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow -x = -\int p(x)dx \Rightarrow \int p(x)dx = x \Rightarrow p(x) = 1$$

بنابراین یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) صحیح است. طرفین معادلات داده شده در گزینه‌ها را بر x^2 تقسیم کنید. فقط در گزینه (۲) و (۴) ضریب y' برابر با یک است. برای تعیین جواب از بین این دو گزینه باید ببینیم عبارت $x^2 y'' + x^2 y'$ برابر $y(2+x)$ است یا برابر $y(2-x)$ ؟
 لذا $y_1 = x^{-1}$ و $y_1' = -x^{-2}$ و $y_1'' = 2x^{-3}$ در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2(y_1'' + y_1') = x^2(2x^{-3} - x^{-2}) = 2x^{-1} - 1 = (2-x)x^{-1} \xrightarrow{y=x^{-1}} x^2(y'' + y') = (2-x)y$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

۱۲- گزینه «۴» با توجه به عبارت سمت راست معادله باید ببینیم که $D_1 = 1$ و $D_2 = 2$ ریشه‌های مرتبه چند معادله‌ی مشخصه هستند:

$$(D^2 - 4)(D^2 - 8D + 65)(D^2 - 5D + 6)^2 y = 5e^{2x} + 1392e^x \Rightarrow D^4(D+2)(D-2)^4(D-3)^2(D^2 - 8D + 65)y = 5e^{2x} + 1392e^x$$

با توجه به عبارت سمت چپ معادله $D_1 = 1$ ریشه‌ی معادله مشخصه نیست و $D_2 = 2$ ریشه‌ی درجه ۴ است پس داریم:

$$y_p = \frac{5e^{2x} \cdot x^4}{P(D)|_{D=2}} + \frac{1392e^x}{P(D)|_{D=1}} \xrightarrow{\frac{\Delta}{P(D)}=M} y_p = Mx^4 e^{2x} + \frac{1392e^x}{-1392} = Mx^4 e^{2x} - e^x$$

۱۳- گزینه «۱» معادله از نوع کوشی - اویلر است، پس با تغییر متغیر $x = e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$D(D-1)y + \Delta Dy + \epsilon y = 0 \Rightarrow (D^2 + \epsilon D + \epsilon)y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2 + \epsilon\lambda + \epsilon = 0 \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی معادله به شکل روبه‌رو به دست می‌آید:

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

با توجه به تغییر متغیر $x = e^t$ داریم:

$$y = (c_1 + c_2 \text{Ln}x)x^{-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{c_1 + c_2 \text{Ln}x}{x^2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{c_2}{2x} = \frac{c_2}{2x^2} = 0$$

۱۴- گزینه «۱» با ضرب دو طرف معادله در x داریم:

معادله به فرم کوشی - اویلر درآمد، پس با تغییر متغیر $x = e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$[D(D-1)+D]y = e^t + e^{3t} \Rightarrow D^2 y = e^t + e^{3t} \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی همگن را به دست می‌آوریم:

$$y_h = (c_1 + c_2 t)$$

$$y_p = \frac{e^t}{P(D)|_{D=1}} + \frac{e^{3t}}{P(D)|_{D=3}} = \frac{e^t}{1} + \frac{e^{3t}}{9}$$

به روش اپراتور معکوس پاسخ خصوصی را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 t) + e^t + \frac{e^{3t}}{9} \xrightarrow{\substack{x=e^t \\ t=\text{Ln}x}} y = c_1 + c_2 \text{Ln}x + x + \frac{x^3}{9}$$

۱۵- گزینه «۱» با تقسیم دو طرف معادله بر x به فرم معادله‌ی کوشی - اویلر می‌رسیم و با اعمال تغییر متغیر $x = e^t$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$x^r y'' + 2x^r y' = a \Rightarrow x^r y'' + 2xy' = \frac{a}{x} \xrightarrow{x=e^t} [D(D-1) + 2D]y = ae^{-t}$$

معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم و پاسخ عمومی همگن را می‌یابیم:
 $\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1 \Rightarrow y_h = c_1 + c_2 e^{-t}$
 با توجه به اینکه $\lambda = -1$ ریشه‌ی مرتبه اول معادله مشخصه است. پاسخ خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_p = \frac{ae^{-t} \cdot t}{P'(D)|_{D=-1}} = \frac{ae^{-t} \cdot t}{(2D+1)|_{D=-1}} = \frac{ae^{-t}}{-1} = -ae^{-t} \cdot t \Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-t} - ate^{-t}$$

$$\xrightarrow{x=e^t} y = c_1 + \frac{c_2}{x} - \frac{a \ln x}{x} \Rightarrow y' = \frac{-c_2}{x^2} - \frac{a}{x^2} + \frac{a \ln x}{x^2}$$

با توجه به شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - 0 = 0 \\ y'(1) = \frac{2a}{3} \Rightarrow -c_2 - a + 0 = \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{\Delta a}{3} \\ c_1 = -c_2 = \frac{\Delta a}{3} \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{\Delta a}{3} - \frac{\Delta a}{3x} - \frac{a \ln x}{x} \Rightarrow y(e) = \frac{\Delta a}{3} - \frac{\Delta a}{3e} - \frac{a(1)}{e} = \frac{\Delta a}{3} - \frac{\Delta a}{3e} - \frac{a}{e} = \frac{a}{3} \left(\frac{\Delta}{e} - \frac{1}{e} \right)$$

۱۶- گزینه «۲» طبق فرمول کاهش مرتبه، اگر y_1 یکی از جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، جواب دیگر این معادله از

$$y_2 = y_1 \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} \right) dx$$

فرمول مقابل به دست می‌آید:

در این سؤال، با جایگذاری $y_1 = e^x$ و $p(x) = -(2 - \frac{1}{x})$ داریم:

$$y_2 = e^x \int \left(\frac{1}{e^{2x}} e^{-\int -(2 - \frac{1}{x}) dx} \right) dx \Rightarrow y_2 = e^x \int \left(\frac{1}{e^{2x}} e^{\int (2 - \frac{1}{x}) dx} \right) dx = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{2x - \ln x} dx = e^x \int e^{-\ln x} dx = e^x \int \frac{1}{x} dx = e^x \ln x$$

با داشتن جواب‌های خصوصی $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^x \ln x$ می‌توانیم جواب عمومی را به این صورت بنویسیم:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^x \ln x \Rightarrow y = e^x (c_1 + c_2 \ln x)$$

۱۷- گزینه «۳» با جایگذاری شرایط اولیه $y(\pi) = \pi$ ، $y'(\pi) = \frac{1}{\pi}$ در معادله‌ی $\frac{1}{p} = -y \cos y + c \cos y$ مقدار ثابت c را به دست می‌آوریم:

$$\pi = -\pi(-1) + c(-1) \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} = -y \cos y$$

با توجه به اینکه $P = y'$ است پس به معادله‌ی مرتبه اول و تفکیک پذیر رسیدیم، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{dy} = \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -y \cos y \Rightarrow dx = -y \cos y dy \xrightarrow{\int} x = -y \sin y - \cos y + c_1$$

با توجه به شرط اولیه $y(\pi) = \pi$ مقدار c_1 به دست می‌آید:

$$\pi = -\pi(0) - (-1) + c_1 \Rightarrow c_1 = \pi - 1 \Rightarrow y \sin y + \cos y + x = \pi - 1$$

۱۸- گزینه «۴» معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم و با توجه به ریشه‌های آن پاسخ عمومی همگن را به دست می‌آوریم:

$$(D^3 - D^2 + D - 1) = 0 \Rightarrow (D-1)(D^2 + 1) = 0 \Rightarrow D_{1,2} = \pm i, D_3 = 1 \Rightarrow y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^x$$

با توجه به اینکه $D = 1$ ریشه‌ی مرتبه اول معادله مشخصه است، پاسخ خصوصی به روش اپراتور معکوس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_p = \frac{r e^x \cdot x}{P'(D)|_{D=1}} = \frac{r x e^x}{(3D^2 - 2D + 1)|_{D=1}} = \frac{r x e^x}{2} \Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \left(c_3 + \frac{r x}{2} \right) e^x$$



۱۹- گزینه «۱» معادله از نوع کوشی - اویلر است، بنابراین با تغییر متغیر $x = e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$[2D(D-1) + 2D-1]y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow (2\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -1$$

$$y = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{-t}$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه پاسخ عمومی معادله به دست می‌آید:

$$y = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-1}$$

با توجه به تساوی $x = e^t$ داریم:

۲۰- گزینه «۴» ابتدا رونسکین تابع داده شده را تشکیل می‌دهیم:

$$W(y_1', y_2') = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = y_1' y_2'' - y_1'' y_2' \xrightarrow{\frac{W(y_1', y_2') = 2e^x}{y_1 = e^x}} e^x y_2'' - e^x y_2' = 2e^x \Rightarrow y_2'' - y_2' = 2$$

$$y_2'' - y_2' = 2 \Rightarrow P' - P = 2$$

معادله فاقد y^2 است پس فرض $y_2' = P$ را در نظر می‌گیریم:

به معادله مرتبه اول خطی رسیدیم، بنابراین داریم:

$$\mu = e^{\int -dx} = e^{-x} \Rightarrow P = \frac{1}{e^{-x}} \cdot \left[\int 2e^{-x} dx + c \right] = e^x (-2e^{-x} + c) = ce^x - 2$$

$$y_2' \frac{dy_2}{dx} = ce^x - 2 \Rightarrow dy_2 = (ce^x - 2) dx$$

با توجه به تساوی $P = y_2'$ داریم:

$$\int \rightarrow y_2 = ce^x - 2x + c_2$$

با فرض $c = 1$ و $c_2 = 0$ داریم:

$$y_2 = e^x - 2x$$