مدرسان شریف

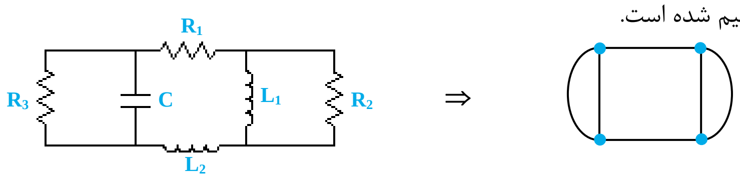
فصل ششم

«گراف‌های شبکه، روش‌های تجزیه و تحلیل مدار و مدار دوگان»

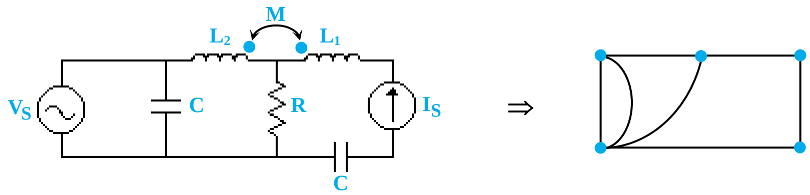
تعریف گراف

گراف به مجموعه‌ای از گره‌ها و شاخه‌های متصل به آن گفته می‌شود، در صورتی که هر شاخه در ابتدا و انتهایش گره‌ای داشته باشد. برای اینکه گراف معادل یک شبکه را ترسیم کنیم، لازم است که به جای هر المان، یک شاخه به همراه دو گره در انتها و ابتدای شاخه قرار دهیم. لازم به ذکر است که ترسیم گراف‌های مربوط به سلف‌های شامل القای متقابل و یا ترانسفورمر، بدون توجه به القای متقابل آنها صورت می‌گیرد. (یعنی نمایش به صورت گراف، القای متقابل در سلف‌ها را نشان نمی‌دهد، زیرا القای متقابل مربوط به ماهیت شاخه‌های مدار الکتریکی مورد نظر بوده و در تعریف ریاضیاتی گراف بی‌معنا است.)
برای مثال، گراف سه مدار در زیر ترسیم شده است.

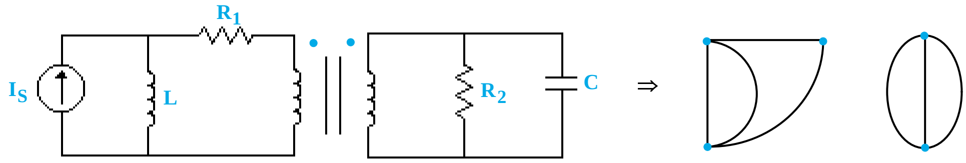
(مدار الف)



(مدار ب)



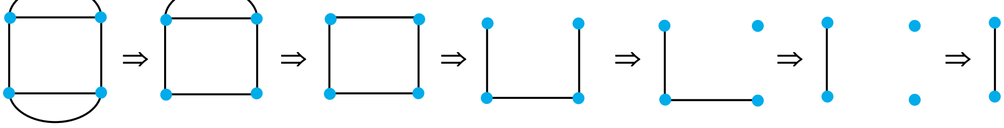
(مدار ج)



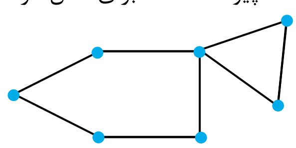
همان‌طور که در مدارهای (ب) و (ج) دیده شد، القای متقابل سلف‌های L_1 و L_2 و تزویج ترانسفورماتور در نمایش گرافی، نشان داده نشده است. لازم به ذکر است که در ترسیم گراف یک مدار، ممکن است گره‌ای وجود داشته باشد که به آن، هیچ شاخه‌ای متصل نباشد و این مورد با تعریف گراف منافاتی ندارد.

تعاریف اولیه در مبحث گراف‌ها

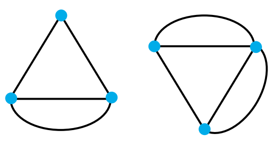
با حذف تعدادی از گره‌ها و شاخه‌های یک گراف، زیرگراف‌های مربوط به آن تشکیل می‌شوند. برای مثال در گراف زیر با حذف مرحله به مرحله گره‌ها و شاخه‌های گراف اصلی، تعدادی از زیرگراف‌های آن تشکیل شده است.



در صورتی که بین هر دو گره دلخواه از یک گراف، حداقل یک شاخه (یا حداقل یک مسیر متصل‌کننده آن دو گره) وجود داشته باشد، گراف مذکور پیوسته بوده و در غیر این صورت گراف ناپیوسته است. برای مثال گراف (الف) یک گراف پیوسته و گراف (ب) یک گراف ناپیوسته است.

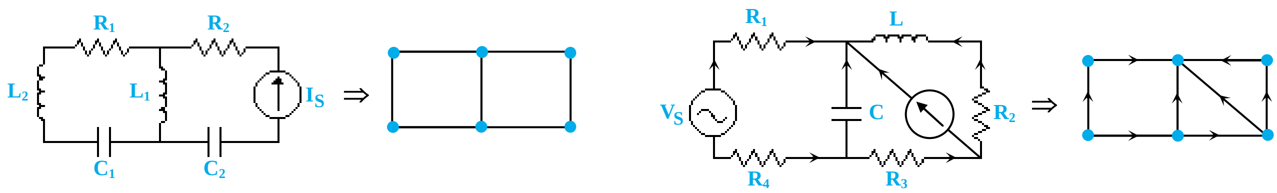


(گراف الف)



(گراف ب)

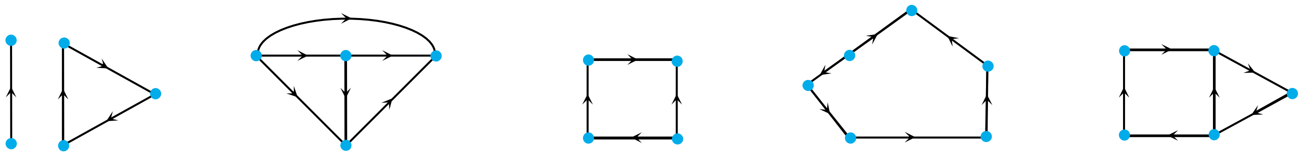
در صورتی که در یک مدار جریان المان‌ها دارای جهت قراردادی باشد، شاخه‌های گراف معادل آن نیز دارای همان جهت‌ها خواهند بود. لذا گرافی را که شامل شاخه‌های جهت‌دار باشد، گراف جهت‌دار و گرافی را که شامل شاخه‌های بدون جهت باشد، گراف بدون جهت می‌نامند. برای مثال گراف معادل مدار (الف) جهت‌دار و گراف معادل مدار (ب) بدون جهت است.



(مدار ب) (مدار الف)

تعریف حلقه و قانون KVL

اگر زیرگرافی از یک گراف در نظر گرفته شود، به صورتی که اولاً زیرگراف مورد نظر پیوسته بوده و ثانیاً در آن هر گره فقط به دو شاخه متصل باشد، آنگاه زیرگراف مذکور تشکیل یک حلقه خواهد داد. برای مثال، چند زیرگراف زیر را در نظر بگیرید:



(هـ) (د) (ج) (ب) (الف)

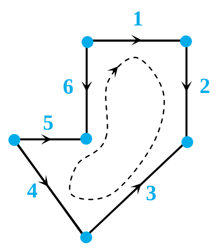
گراف‌های (ب) و (ج) هر دو شرط را دارا بوده و حلقه هستند؛ ولی گراف‌های (الف) و (د) شرط دوم را ندارند و حلقه نمی‌باشند. همچنین گراف (هـ) نیز شرط اول و دوم را ندارد (زیرا برخی از گره‌ها تنها به یک شاخه وصلند). لذا گراف‌های (الف)، (د) و (هـ) حلقه نمی‌باشند.

پس از تعریف حلقه به ارائه قانون KVL در هر حلقه می‌پردازیم. قانون ولتاژ کیرشهف یا همان قانون KVL در مورد هر حلقه مطلب زیر را بیان می‌کند:

«برای هر حلقه از یک گراف، حاصل جمع جبری ولتاژ شاخه‌ها برابر صفر است.»

برای نوشتن KVL به این نکته باید دقت شود که اگر جهت شاخه‌ها با جهت حرکت برابر باشد، ولتاژ شاخه با ضریب مثبت و در غیر این صورت با ضریب منفی نوشته می‌شود. لازم به ذکر است که انتخاب جهت حرکت اختیاری است.

مثال ۱: در گراف مقابل کدامیک از گزینه‌های زیر مربوط به قانون KVL است؟



۱) $V_1 + V_2 - V_3 + V_4 - V_5 + V_6 = 0$

۲) $V_1 + V_2 - V_3 - V_4 + V_5 - V_6 = 0$

۳) $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 + V_5 - V_6 = 0$

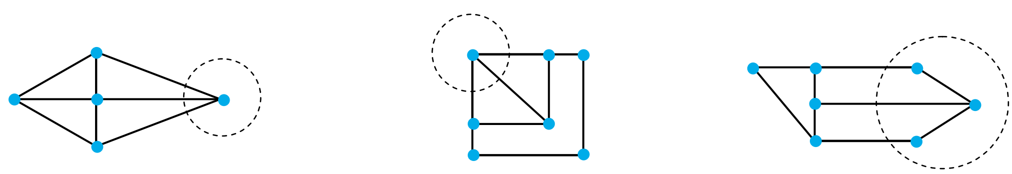
۴) $V_1 - V_2 - V_3 - V_4 + V_5 + V_6 = 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای نوشتن معادله KVL در درون حلقه فوق، از یک نقطه و در یک جهت اختیاری حرکت می‌کنیم. اگر جهت حرکت، با فلش شاخه یکی بود، ولتاژ شاخه را مثبت و اگر جهت حرکت با فلش شاخه یکی نبود، ولتاژ شاخه را منفی لحاظ می‌کنیم. بدین ترتیب داریم:

$$V_1 + V_2 - V_3 - V_4 + V_5 - V_6 = 0$$

تعریف کاتست و قانون KCL

برای مشخص شدن مفهوم کاتست، یک زیرگراف شامل چند شاخه را در نظر بگیرید. اگر با حذف کلیه شاخه‌های این زیرگراف، گراف اصلی به دو قسمت کاملاً جدا از هم و منفصل تبدیل شود، و با بازگرداندن هر یک از شاخه‌های این زیرگراف به گراف اصلی، این قسمت‌های مجزا دوباره متصل گردند، این زیرگراف که مجموعه‌ای از شاخه‌هاست، یک کاتست نامیده می‌شود. برای مثال در شکل‌های زیر چند کاتست از یک گراف ترسیم شده است.

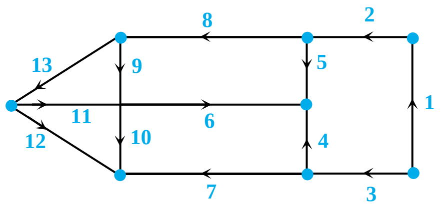


تفسیر قانون جریان کیرشهف یا همان قانون KCL در مورد هر کاتست به این صورت است:

«در هر کاتست مجموع جریان‌های شاخه‌های مختلف کاتست (با در نظر گرفتن جهت مناسب برای جریان‌ها) برابر صفر است.»

برای یافتن جهت مناسب جریان‌ها کافی است زیرمدار یا زیرگراف‌های ایجاد شده با حذف کاتست مورد نظر را در نظر بگیریم. در این صورت جهت جریان‌ها را به شکلی در نظر می‌گیریم که همگی به یکی از این دو زیرگراف خاص وارد شده و یا همگی از آن خارج شوند.

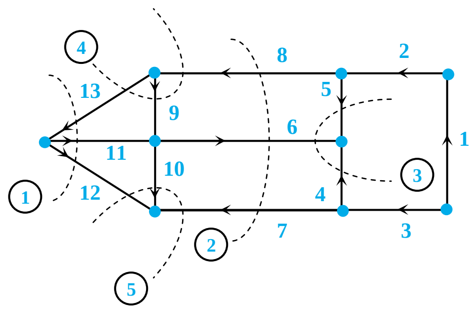
مثال ۲: در گراف زیر کدامیک از دسته معادلات، مربوط به کاتست در گراف است؟



۱) $\begin{cases} I_6 = I_7 + I_8 \\ I_{13} = I_{11} + I_{12} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} I_4 = I_5 + I_6 \\ I_{13} = I_{11} + I_{12} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} I_7 + I_{10} = I_{12} \\ I_7 + I_9 + I_{13} = 0 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} I_4 = I_5 + I_6 \\ I_{10} + I_6 + I_8 = 0 \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۱» با نوشتن معادلات کاتست‌های نشان داده شده داریم:



کاتست ۱ : $I_{13} = I_{11} + I_{12}$ کاتست ۴ : $I_8 = I_9 + I_{13}$

کاتست ۲ : $I_6 = I_8 + I_7$ کاتست ۵ : $I_7 + I_{10} + I_{12} = 0$

کاتست ۳ : $I_4 + I_5 + I_6 = 0$

لازم به ذکر است که برای گراف بالا کاتست‌های دیگری را نیز می‌توان در نظر گرفت.

ماتریس تلاقی شاخه با مش (M_a)

برای حل مدارها به صورت ساده‌تر با قانون KVL و بیان ارتباط حلقه‌های مدار با شاخه‌های موجود در آن، ماتریس تلاقی شاخه با مش یا در حالت کلی حلقه، M_a را تعریف می‌کنیم. برای نوشتن این ماتریس تمام حلقه‌ها یا مش‌های درونی را ساعتگرد و حلقه بیرونی گراف را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. ماتریس تلاقی شاخه با مش یا M_a مستطیلی بوده و به تعداد شاخه‌های گراف یعنی b، دارای ستون می‌باشد. همچنین تعداد سطرهای آن برابر با مجموع تعداد مش‌های درونی و بیرونی مدار یعنی $L+1$ است. در صورتی که L تعداد مش‌های درونی گراف باشد، روابط زیر برقرار است و درایه‌های این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ موجود نباشد.} \\ 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت قراردادی آنها یکی باشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت قراردادی آنها یکی نباشد.} \end{cases}$$

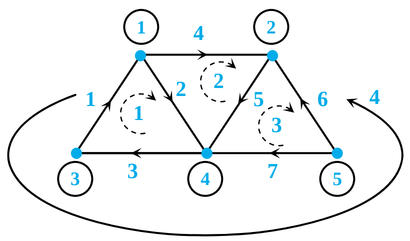
$$\begin{cases} L = b - n_t + 1 \\ L: \text{تعداد مش‌های درونی} \\ b: \text{تعداد شاخه‌ها} \\ n_t: \text{تعداد گره‌های گراف} \end{cases}$$

نکته۱: در ماتریس تلاقی شاخه با مش، جمع جبری کلیه ستون‌های ماتریس M_a باید برابر صفر باشد. همچنین هر سطر از این ماتریس، بیانگر این است که چند شاخه درون مش مورد نظر بوده و چه شاخه‌هایی با مش هم‌جهت و چه شاخه‌هایی با مش غیرهم‌جهت هستند. هر ستون از این ماتریس، بیانگر این است که هر شاخه با چه مش‌هایی تلاقی دارد و آیا با آنها هم‌جهت است یا خیر. بنابراین چون هر شاخه حتماً با یک مش هم‌جهت و حتماً با یکی غیر هم‌جهت است، پس جمع درایه‌های هر ستون حتماً صفر است. (یعنی حتماً یک ۱+ و یک ۱- دارد.)

ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده (M)

در صورتی که سطر مربوط به مش بیرونی از ماتریس M_a حذف شود، ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده M تشکیل می‌شود.

مثال ۳: برای گراف مقابل ماتریس‌های M_a و M را بدست آورید.



پاسخ: طبق نکات گفته شده، برای مش درونی جهت را ساعتگرد و برای مش بیرونی جهت را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش ذکر شده برای بدست آوردن ماتریس‌های M_a و M داریم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \Big\} \text{مش‌های درونی}$$

ستون‌ها: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ (تعداد شاخه‌ها)

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \Big\} L+1 = \text{تعداد مش‌ها}$$

ستون‌ها: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ (تعداد شاخه‌ها)

نکته۲: در صورتی که در یک سؤال ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده داده شده باشد و در گزینه‌ها ماتریس تلاقی شاخه با مش اصلی خواسته شده باشد، بدین صورت عمل می‌شود که یک سطر در انتهای ماتریس تلاقی شاخه با مش خلاصه شده M به صورتی اضافه می‌شود که جمع جبری درایه‌های هر ستون ماتریس M_a تشکیل شده صفر شود.

مثال۴: کدامیک از ماتریس‌های زیر مربوط به ماتریس تلاقی شاخه با مش M زیر به صورت M_a هستند؟

$$M=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

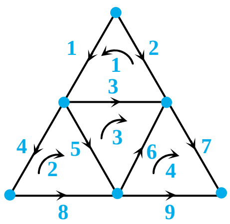
۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

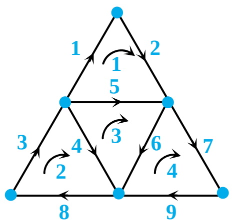
پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه جمع جبری عناصر هر ستون ماتریس M_a صفر است، یک سطر در انتهای ماتریس M، به صورتی اضافه می‌کنیم که جمع جبری هر ستون برابر صفر شود. دقت کنید که سطر اضافه شده، مربوط به مش بیرونی خواهد بود.

$$M_a=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{سطر اضافه شده}$$

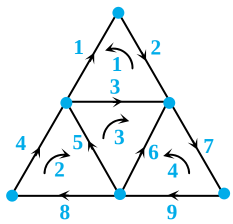
مثال۵: با توجه به ماتریس M_a بدست آمده در مثال قبل، کدامیک از گراف‌های زیر مربوط به ماتریس M_a هستند؟



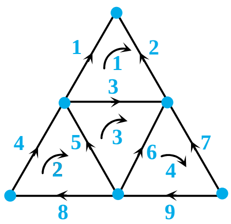
(۱)



(۲)



(۳)



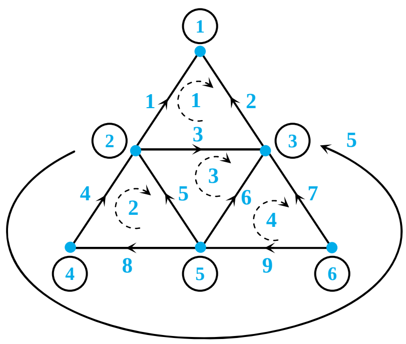
(۴)

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به ماتریس M_a بدست آمده در مثال قبل، دیده می‌شود که تعداد مش‌ها به اندازه سطرهای ماتریس M_a یعنی ۵ است که از این تعداد، ۴ عدد مش درونی و یک عدد مش بیرونی است و تعداد شاخه‌ها با توجه به ستون‌های ماتریس ۹ عدد است. لذا داریم:

تعداد شاخه‌ها $b=9$ و تعداد مش‌های درونی $L+1=5 \Rightarrow L=4$

تعداد گره‌ها $n_t=6$ $\quad L=b-n_t+1 \Rightarrow 4=9-n_t+1 \Rightarrow n_t=6$

با توجه به اطلاعات بدست آمده گراف مذکور به صورت مقابل ترسیم می‌شود:



(با توجه به درایه‌های ماتریس M_a در مثال قبل، جهت شاخه‌ها و نیز مش‌ها باید مطابق گزینه‌ی (۴) باشد، زیرا مثلاً سطر اول می‌گوید که جهت مش ۱ باید با شاخه‌ی ۱ هم‌جهت و با شاخه‌های ۲ و ۳ مخالف جهت باشد که تنها گزینه‌ی (۴) این‌گونه است.)

ماتریس تلاقی گره با شاخه (A_a)

برای بیان کامل‌تر قوانین KVL و KCL، ماتریس تلاقی گره با شاخه را تعریف می‌کنیم. این ماتریس بیانگر مشخصات ظاهری و ترسیمی گراف است و از روی آن به سادگی می‌توان یک گراف را ترسیم کرد و بدون داشتن خود گراف می‌توان در مورد اینکه کدام گره به کدام شاخه متصل است، اظهارنظر کرد.

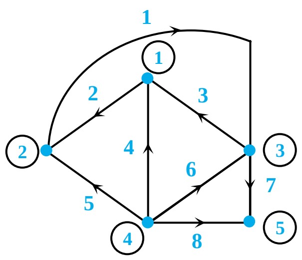
ماتریس A_a به صورت یک ماتریس مستطیلی بوده و دارای ابعاد $n_t \times b$ می‌باشد که n_t تعداد سطرها و برابر تعداد گره‌ها بوده و b تعداد ستون‌ها و برابر تعداد شاخه‌ها است. ماتریس A_a فقط برای گراف‌های جهت‌دار تعریف شده و درایه‌های آن به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$A_a = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots \end{array}}^{\text{b: تعداد شاخه‌ها}} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ \vdots \end{array} \ \text{تعداد گره‌ها: } n_t$$

$$a_{jk} = \begin{cases} ۰ & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } j \text{ تلاقی نداشته باشد} \\ ۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } j \text{ خارج شونده باشد} \\ -۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } j \text{ وارد شونده باشد} \end{cases}$$

لازم به ذکر است که درایه‌های ماتریس A_a فقط ۱ و ۱- و ۰ بوده و غیر از این سه عدد، عدد دیگری را شامل نمی‌شوند. برای توصیف بهتر ماتریس A_a، مطلب را با ذکر یک مثال ادامه می‌دهیم.

مثال ۶: گراف روبرو را در نظر گرفته و ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a را برای آن بدست آورید.



☑ **پاسخ:** برای شماره‌گذاری گره‌ها به این صورت عمل می‌شود که از بالاترین گره شروع کرده و سپس از سمت چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم. با توجه به قوانین مذکور، ماتریس A_a گراف فوق به صورت زیر است:

$b = ۸$ (تعداد شاخه‌ها)

$$A_a = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

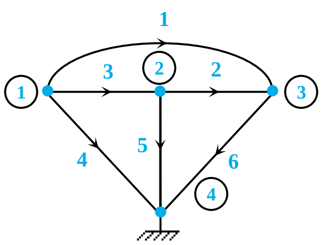
تعداد گره‌ها $n_t = ۵$

به ماتریس A_a دقت کنید؛ هر ستون از این ماتریس بیانگر وجود شاخه‌های بین گره‌ها است. برای مثال ستون ۴ نشان می‌دهد که شاخه‌ای بین گره‌های ۴ و ۱ است و شاخه مذکور از گره ۴ خارج و به گره ۱ وارد می‌شود. همچنین سطرهای ماتریس A_a نشان می‌دهد که به هر گره چند شاخه متصل است و شاخه‌های مذکور وارد شونده هستند یا خارج شونده. برای مثال سطر سوم بیانگر این است که تعداد ۴ شاخه به گره ۳ متصل بوده و شاخه‌های ۶ و ۱ به آن وارد شونده و شاخه‌های ۳ و ۷ خارج شونده هستند.

ماتریس تلاقی گره با شاخه خلاصه شده (A)

برای بدست آوردن ماتریس A_a مختصر شده در گراف، ابتدا یک گره را به عنوان مبنا انتخاب کرده و سپس ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a را می‌نویسیم و سطر مربوط به گره مبنا را حذف می‌کنیم.

مثال ۷: در شبکه زیر ماتریس خلاصه شده تلاقی گره با شاخه A را بدست آورید.

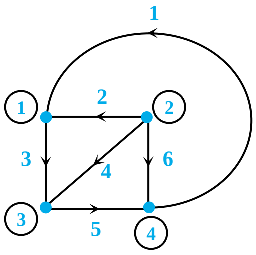


☑ **پاسخ:**

$$A_a = \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow \text{سطر روبرو حذف می‌شود} \end{array} \Rightarrow A = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نکته ۳: در ماتریس A_a جمع جبری درایه‌های هر ستون باید برابر صفر باشد، زیرا همان‌طور که گفته شد، هر ستون بیانگر این است که یک شاخه از چه گره‌ای خارج و به کدام گره وارد می‌شود. لذا چون هر شاخه حتماً از یک گره خارج و به یک گره وارد می‌شود، پس حتماً در هر ستون یک درایه‌ی ۱+ و یک درایه‌ی ۱- خواهیم داشت.

مثال۸: برای گراف زیر کدام ماتریس می‌تواند ماتریس A_a باشد؟



۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل تست باید ابتدا به این نکته دقت کنید که جمع جبری هر ستون از ماتریس A_a باید برابر صفر باشد و این خاصیت فقط در گزینه‌های (۱) و (۳) برقرار است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) که دارای این خاصیت نیستند، غلط هستند. با دقت در ماتریس A_a در گزینه (۱) دیده می‌شود که در سطر اول دو عدد یک وجود دارد و این بیانگر این است که به گره یک دو شاخه متصل است؛ در حالی که با دقت در شکل دیده می‌شود که به گره شماره یک، سه شاخه متصل است. لذا گزینه (۱) غلط بوده و گزینه (۳) صحیح است.

تشریح قوانین KVL و KCL با استفاده از ماتریس (M_a) و (M)

در صورتی که I بردار جریان مش‌ها و j بردار جریان شاخه‌ها و V بردار ولتاژ شاخه‌ها باشد، داریم:

$$\mathbf{KCL}: j = M_a^T . I \qquad \text{و} \qquad \mathbf{KVL}: M_a . V = 0$$

معادلات بدست آمده از KVL و KCL با ماتریس M_a دارای استقلال خطی نیستند. (زیرا ماتریس M_a در برگیرنده‌ی مش بیرونی است و رابطه‌ی حاصل از مش بیرونی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از سایر مش‌ها نوشت؛ لذا با حذف رابطه حاصل از مش بیرونی، از ماتریس M استفاده می‌کنیم.) بنابراین برای وجود استقلال خطی معادلات، از ماتریس M با توجه به روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\mathbf{KCL}: j = M^T . I \qquad \text{و} \qquad \mathbf{KVL}: M . V = 0$$

قوانین KVL و KCL با استفاده از ماتریس (A_a) و (A)

در صورتی که بردار j، بردار شامل جریان شاخه‌های مختلف یک گراف جهت‌دار باشد و V بردار ولتاژ شاخه‌ها و e بردار ولتاژ گره‌ها باشد، روابط زیر برقرار است:

$$\mathbf{KCL}: A_a . j = 0 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{KVL}: V = A_a^T . e$$

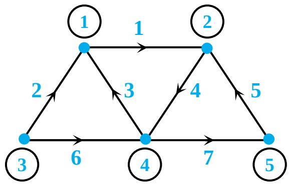
برای هر شبکه می‌توان $n = n_t - 1$ معادله جبری خطی که قوانین KCL را در شبکه توصیف نماید، بیان کرد. ولی اگر از ماتریس A_a استفاده شود، روابط بدست آمده دارای استقلال خطی نمی‌باشند. برای وجود استقلال خطی باید از ماتریس A استفاده نمود. در صورتی که بردار j، بردار شامل جریان شاخه‌های مختلف یک گراف جهت‌دار باشد، قانون KCL به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{A . j = 0}$$

همچنین برای هر شبکه می‌توان $n = n_t - 1$ معادله جبری خطی که قوانین KVL را توصیف کند، بیان کرد. با فرض اینکه A^T ترانهاده ماتریس تلاقی گره و شاخه مختصر شده و e بردار ولتاژ گره‌ها و V بردار ولتاژ شاخه‌ها باشد، داریم:

$$\mathbf{V = A^T . e}$$

مثال۹: در گراف زیر کدام دسته از معادلات، مربوط به معادلات KVL مستقل است؟



۱) $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = -e_1 + e_3 \\ V_3 = -e_1 \\ V_4 = e_2 \\ V_5 = -e_2 + e_5 \\ V_6 = e_3 \\ V_7 = -e_5 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = -e_1 + e_3 \\ V_3 = -e_1 - e_4 \\ V_4 = e_2 - e_4 \\ V_5 = -e_2 - e_3 \\ V_6 = e_3 - e_4 \\ V_7 = e_4 - e_5 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = -e_1 + e_3 \\ V_3 = e_2 \\ V_4 = -e_2 \\ V_5 = e_2 - e_5 \\ V_6 = e_2 \\ V_7 = e_2 - e_4 \end{cases}$

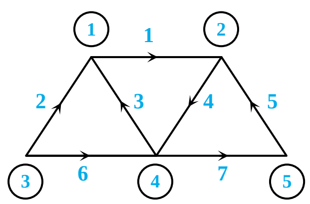
۴) $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = -e_1 + e_3 \\ V_3 = -e_1 + e_4 \\ V_4 = e_2 - e_4 \\ V_5 = -e_2 - e_3 \\ V_6 = e_3 - e_4 \\ V_7 = e_3 - e_4 \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل سؤال ابتدا ماتریس A_a و A را محاسبه کرده و سپس ماتریس A^T را بدست می‌آوریم. دقت کنید که گره (۴) را به عنوان مبنا انتخاب می‌کنیم.

$$A_a = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \to b=7 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad n_t = 5 \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V = A^T.e \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{(معادلات مستقل KVL)}: \begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = -e_1 + e_3 \\ V_3 = -e_1 \\ V_4 = e_2 \\ V_5 = -e_2 + e_5 \\ V_6 = e_3 \\ V_7 = -e_5 \end{cases}$$

مثال ۱۰: در گراف زیر کدام دسته از معادلات، مربوط به معادلات KCL مستقل می‌باشند؟



۱) $\begin{cases} j_1 - j_2 - j_3 = 0 \\ j_1 - j_4 + j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 - j_7 = 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} j_1 + j_2 + j_3 = 0 \\ j_1 - j_4 - j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 + j_7 = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} j_1 - j_2 = j_3 \\ j_1 = j_4 - j_5 \\ j_2 = j_6 \\ j_5 = -j_7 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} j_1 - j_2 - j_3 = 0 \\ -j_1 + j_4 - j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 - j_7 = 0 \end{cases}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» از حاصلضرب ماتریس A در ماتریس جریان‌های شاخه‌ها، معادلات KCL مستقل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$A.j = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \text{(معادلات مستقل KCL)}: \begin{cases} j_1 - j_2 - j_3 = 0 \\ -j_1 + j_4 - j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 - j_7 = 0 \end{cases}$$

روش تجزیه و تحلیل مدار با استفاده از روش حلقه (مش)

برای بدست آوردن جریان حلقه‌های یک گراف، می‌توان از روش تحلیل حلقه با استفاده از ماتریس M استفاده کرد. برای توضیح این روش ابتدا به بیان تعاریف اولیه می‌پردازیم. اگر E_S بردار منابع ولتاژ مش‌ها و I بردار جریان مش‌ها باشد، داریم:

$$\boxed{Z = MZ_bM^T \quad , \quad Z.I = E_S}$$

در روابط بالا، Z ماتریس امپدانس گراف و Z_b ماتریس امپدانس شاخه‌های گراف می‌باشد. حال در ادامه به ارائه روش تحلیل مدار یا گراف با استفاده از روش حلقه (مش) می‌پردازیم.

مراحل تحلیل مدار یا گراف با استفاده از روش حلقه (مش):

۱) با استفاده از قانون تبدیل منابع، کلیه المان‌های مقاومتی موازی با منابع جریان را به صورت معادل تونن آنها تبدیل می‌کنیم.

۲) ابتدا تمام مش‌های مدار را ساعتگرد فرض کرده و مش بیرونی را در نظر نمی‌گیریم.

۳) سپس ماتریس امپدانس Z را برای گراف به صورت زیر بدست می‌آوریم.

الف) قطر اصلی ماتریس امپدانس Z، برابر مجموع امپدانس شاخه‌های موجود در هر مش است.

ب) درایه‌های دیگر ماتریس، مثبت یا منفی امپدانس موجود بین حلقه‌های گراف است و در صورتی که جهت مش‌ها یکی باشد، مثبت و اگر جهت مش‌ها متفاوت باشد، منفی لحاظ می‌شود. لازم به ذکر است که با توجه به اینکه تمام مش‌ها هم‌جهت و ساعتگرد هستند، علامت مذکور همیشه منفی خواهد بود.

۴) بردار E_S مربوط به منابع ولتاژ مش‌ها می‌باشد. در صورتی که جهت جریان مش از پایه مثبت منبع ولتاژ خارج شود، علامت مثبت و اگر جریان مش از پایه منفی منبع خارج شود، علامت منفی برای آن در نظر گرفته خواهد شد.

۵) در صورت وجود منابع ولتاژ وابسته، ابتدا بدون توجه به وابسته بودن، آنها را به صورت مستقل در نظر گرفته و ماتریس Z اولیه را تشکیل می‌دهیم و سپس بعد از تشکیل معادلات ماتریسی $ZI = E_S$، درایه‌های شامل جریان حلقه در ماتریس E_S به سمت چپ و در ماتریس Z منتقل شده و ماتریس Z نهایی تشکیل خواهد شد.

۶) با استفاده از رابطه $Z.I = E_S$ معادلات مربوط به جریان مش‌ها بدست آمده و حل می‌شوند.

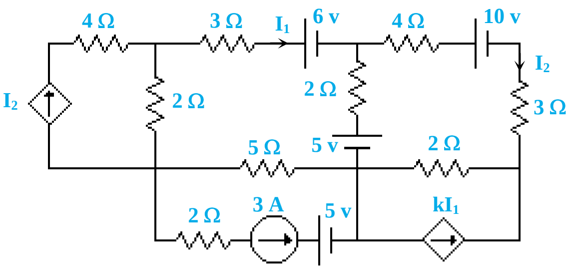
نکات تکمیلی:

۱ـ در صورتی که فقط مقاومت و منابع مستقل در مدار باشد، ماتریس امپدانس متقارن است.

۲ـ در صورتی که تمام المان‌های مقاومتی مثبت باشد و مدار فاقد منابع وابسته باشد، جواب جریان‌های مش‌ها یکتا بوده و $\det[Z] > 0$ خواهد بود.

۳ـ در صورت وجود منابع وابسته یا وجود عناصر با القای متقابل، ماتریس Z متقارن نخواهد بود.

مثال۱۱: در مدار زیر ماتریس Z نهایی شبکه کدام است؟

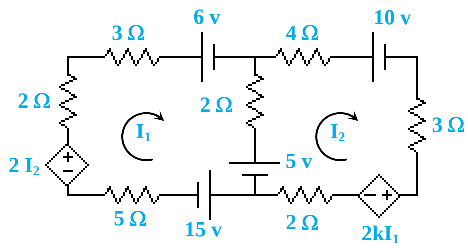


۱) $\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -2+2k & 11 \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 2-2k & 11 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 2-2k & 11 \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 2-2k & -11 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۱»

ابتدا المان‌های سری با منابع جریان وابسته یا مستقل را حذف کرده و کلیه شاخه‌ها را به معادل تونن تبدیل می‌کنیم و سپس دو مش را در جهت ساعتگرد مشخص می‌کنیم:



اکنون ماتریس Z اولیه و بردار E_S را تشکیل می‌دهیم:

$$Z\ (\text{اولیه}) = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}, \quad E_S = \begin{bmatrix} -6-5-15+2I_2 \\ -10-2kI_1+5 \end{bmatrix}$$

و

$$Z.I = E_S \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26+2I_2 \\ -5-2kI_1 \end{bmatrix}$$

حال با انتقال درایه‌های شامل I_1 و I_2 در بردار E_S به سمت چپ و در ماتریس Z اولیه، ماتریس Z نهایی حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} 12I_1 - 2I_2 = -26 + 2I_2 \\ -2I_1 + 11I_2 = -5 - 2kI_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12I_1 - 4I_2 = -26 \\ (-2+2k)I_1 + 11I_2 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -2+2k & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow Z\ (\text{نهایی}) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -2+2k & 11 \end{bmatrix}$$

روش تجزیه و تحلیل مدار با استفاده از روش گره

برای بدست آوردن ولتاژ گره‌های مدار، می‌توان از ماتریس A و ماتریس ادمیتانس شبکه استفاده کرد. اگر I_S بردار مربوط به منابع جریان مدار و e بردار شامل ولتاژ گره‌های مدار باشد، داریم:

$$\mathbf{Y = AY_bA^T} \quad , \quad \mathbf{Y.e = I_S}$$

در روابط بالا Y ماتریس ادمیتانس مدار، Y_b ماتریس ادمیتانس شاخه‌های گراف و A ماتریس تلاقی گره و شاخه خلاصه شده می‌باشد.

مراحل تحلیل مدار یا گراف با استفاده از روش گره:

۱) تمام المان‌های سری با منابع ولتاژ را به حالت نورتن، یعنی منبع جریان و مقاومت موازی تبدیل می‌کنیم.

۲) گره‌های مدار را از بالا به پایین و چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم.

۳) ولتاژ گره‌ها را در یک بردار با نام e مرتب می‌کنیم.

۴) ماتریس ادمیتانس را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

الف) عناصر قطر اصلی: حاصل‌جمع تمام ادمیتانس‌های متصل به گره

ب) عناصر قطر فرعی: منفی حاصل‌جمع ادمیتانس‌های بین گره‌ها

۵) بردار I_S یا همان بردار منابع جریان مدار را تشکیل می‌دهیم. اگر منبع جریان از گره خارج شود، با علامت منفی و اگر به گره وارد شود، با علامت مثبت لحاظ می‌شود. در صورتی که منابع وابسته در مدار باشد، ابتدا بدون توجه به وابسته بودن آنها، به صورت منبع جریان مستقل با آنها برخورد می‌کنیم و پس از بدست آمدن ماتریس Y اولیه، روابط مربوط به آنها را به سمت چپ معادلات منتقل کرده و ماتریس Y نهایی را بدست می‌آوریم.

۶) با استفاده از رابطه $Y.e = I_S$ معادلات مربوط به ولتاژ گره‌ها را بدست آورده و آنها را حل می‌کنیم.

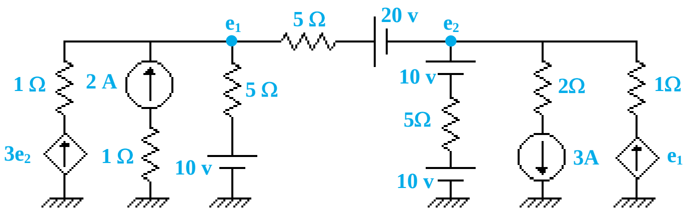
نکات تکمیلی:

۱ـ در صورتی که فقط مقاومت و منابع مستقل در مدار باشد، ماتریس ادمیتانس متقارن خواهد بود.

۲ـ در صورت وجود القای متقابل یا وجود منابع وابسته، ماتریس ادمیتانس متقارن نمی‌باشد.

۳ـ در صورتی که المان‌های مقاومتی همگی مثبت باشند و مدار فاقد منابع وابسته باشد، ولتاژ تمام گره‌ها یکتا بوده و $\det(Y) > ۰$ خواهد بود.

مثال ۱۲: در مدار زیر کدامیک از گزینه‌ها مربوط به ماتریس ادمیتانس است؟



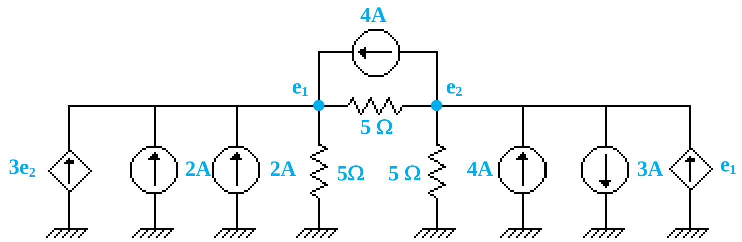
۱) $\begin{bmatrix} ۰/۴ & -۳/۲ \\ ۱/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۰/۴ & ۳/۲ \\ -۱/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰/۴ & -۳/۲ \\ -۱/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۰/۴ & ۳/۲ \\ ۱/۲ & -۰/۴ \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا تمام منابع ولتاژ را به منابع جریان معادل تبدیل نموده و مدار را ساده می‌کنیم. لازم بـه ذکـر اسـت که تمام المان‌های سـری بـا منـابع جریـان، چـه مـستقل و چـه وابسته حذف می‌شوند.



حال بدون توجه به منابع وابسته، ماتریس ادمیتانس اولیه را می‌نویسیم. با توجه به اینکه مدار دارای دو گره است، ماتریس مذکور مربعی و ۲×۲ می‌باشد.

$$Y\ (\text{اولیه}) = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵} & -\frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \Rightarrow Y.e = I_S \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰/۴ & -۰/۲ \\ -۰/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۴+۳e_۲ \\ -۴-۳+۴+e_۱ \end{bmatrix}$$

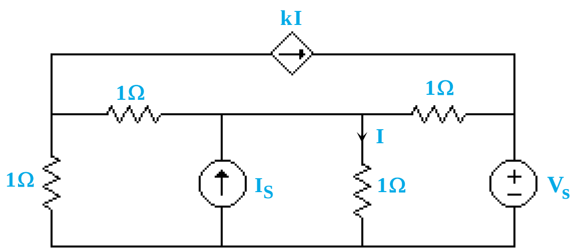
با انتقال جملات شامل $e_۱$ و $e_۲$ موجود در سمت راست به سمت چپ و در ماتریس ادمیتانس اولیه و با مرتب‌سازی، ماتریس ادمیتانس نهایی حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} ۰/۴e_۱ - ۰/۲e_۲ = ۸+۳e_۲ \\ -۰/۲e_۱ + ۰/۴e_۲ = -۳+e_۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰/۴e_۱ - ۳/۲e_۲ = ۸ \\ -۱/۲e_۱ + ۰/۴e_۲ = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰/۴ & -۳/۲ \\ -۱/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y\ (\text{نهایی}) = \begin{bmatrix} ۰/۴ & -۳/۲ \\ -۱/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix}$$

دقت کنید که با توجه به حضور منابع وابسته، ماتریس ادمیتانس متقارن نمی‌باشد.

مثال ۱۳: در مدار شکل زیر، به ازای چه مقدار k، به ازای هر مقدار I_S و V_S، جریان I مقداری منحصر به فرد، ندارد؟



۱) ۱+

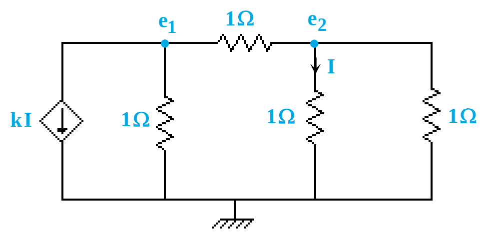
۲) ۵+

۳) ۱−

۴) ۵−

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق نکته‌ای که در فصل سوم از کتاب مدار (۱) گفته شد، اگر دترمینان ماتریس امپدانس یا ادمیتانس مدار برابر صفر باشد، مدار جواب منحصر به فرد نداشته و بسته به مقدار بردار منابع مدار، بدون پاسخ یا دارای بینهایت پاسخ خواهد بود. بنابراین برای حل این تست می‌توانیم ماتریس ادمیتانس مدار را محاسبه کرده و دترمینان آن را برابر صفر قرار دهیم. از آنجایی که تنها مقدار ماتریس ادمیتانس مدار برای ما مهم است، می‌توانیم منابع مستقل مدار را غیرفعال کنیم:

حال با استفاده از روش بیان شده، ماتریس ادمیتانس را به دست می‌آوریم:



$I = e_۲$

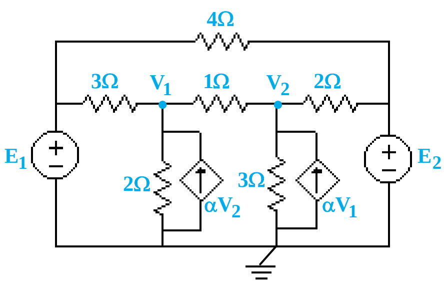
$$Y.e = I_S \quad \text{و} \quad Y\,(\text{اولیه}) = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kI \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ke_۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۱+k \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow Y\,(\text{نهایی}) = \begin{bmatrix} ۲ & -۱+k \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |Y(\text{نهایی})| = ۳\times۲-(-۱)\times(-۱+k) = ۵+k$$

$$|Y(\text{نهایی})| = ۰ \Rightarrow k+۵ = ۰ \Rightarrow k = -۵$$

بنابراین به ازای $k = -۵$، مدار و کلیه متغیرهای مجهول آن از جمله I جواب منحصر بفردی ندارند.

مثال ۱۴: در مدار شکل مقابل به ازای چه مقدار α، مدار می‌تواند جواب‌های بی‌شماری داشته باشد؟ (با فرض انتخاب مقادیر مناسب $E_۱$ و $E_۲$)



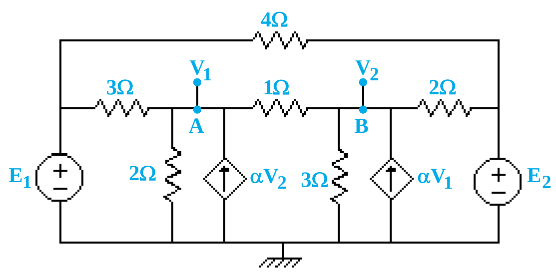
۱) $\frac{۱}{۶}\,,\,\frac{-۱۷}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۶}\,,\,\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{-۱۷}{۶}\,,\,\frac{۵}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۶}\,,\,\frac{-۱۷}{۶}\,,\,\frac{۵}{۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا با نوشتن روابط KCL، ماتریس ادمیتانس مدار را محاسبه می‌کنیم:



$$KCL(A): \frac{V_۱-E_۱}{۳}+\frac{V_۱}{۲}-\alpha V_۲+\frac{V_۱-V_۲}{۱} = ۰ \Rightarrow ۱۱V_۱-۶(۱+\alpha)V_۲ = ۲E_۱ \quad (۱)$$

$$KCL(B): \frac{V_۲-V_۱}{۱}+\frac{V_۲}{۳}-\alpha V_۱+\frac{V_۲-E_۲}{۲} = ۰ \Rightarrow -۶(۱+\alpha)V_۱+۱۱V_۲ = ۳E_۲ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \underbrace{\begin{bmatrix} ۱۱ & -۶(۱+\alpha) \\ -۶(۱+\alpha) & ۱۱ \end{bmatrix}}_{Y}\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲E_۱ \\ ۳E_۲ \end{bmatrix}$$

دقت کنید که ماتریس ادمیتانس را می‌توان با استفاده از روش گفته شده در این بخش و با صفر کردن منابع $E_۱$ و $E_۲$ نیز به دست آورد.

برای آن‌که مدار تعداد بی‌شماری جواب داشته باشد، دترمینان ماتریس Y لزوماً باید صفر شود:

$$\begin{vmatrix} ۱۱ & -۶(۱+\alpha) \\ -۶(۱+\alpha) & ۱۱ \end{vmatrix} = ۱۲۱-۳۶(۱+\alpha)^۲ = ۰ \Rightarrow (۱+\alpha)^۲ = \frac{۱۲۱}{۳۶} \Rightarrow ۱+\alpha = \pm\frac{۱۱}{۶} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۵}{۶} \\ \alpha = -\frac{۱۷}{۶} \end{cases}$$