مدرسان شریف

فصل اول

آمار توصیفی

«تعاریف اولیه»

جمعیت یا جامعهٔ آماری: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که مطالعات آماری در مورد یک یا چند صفت آنها در یک مکان و زمان معین انجام می‌گیرد، جامعه یا جمعیت آماری گفته می‌شود. تعداد اعضای جمعیت به حجم جامعه معروف است که آن را با N نمایش می‌دهند.

نمونه: در بررسیهای آماری به دلیل هزینه زیاد، کمبود وقت و در بعضی مواقع غیر ممکن بودن انجام کار زیر مجموعه‌ای از جمعیت، با قاعده و ضابطه خاصی انتخاب می‌شود که به آن نمونه گویند و بررسی بر روی آن نمونه انجام می‌گیرد. تعداد اعضای نمونه به حجم نمونه معروف است که آن را با n نمایش می‌دهند.

صفت مشخصه: صفتی است که بین همه‌ی عناصر جامعه‌ی آماری مشترک و جدا کننده جامعه آماری از سایر جوامع است. به طور کلی صفات خود، به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱ـ صفات کمی ۲ـ صفات کیفی

داده‌های آماری: در بررسی آماری، باید صفت مورد مطالعه به صورت اعداد و ارقام نمایش داده شود اگر صفت مورد مطالعه کمی باشد این عمل به سادگی امکان‌پذیر است. اما اگر صفت مورد مطالعه کیفی (مانند گروه خون، رنگ چشم و ...) باشد آنگاه باید طبق یک قاعده مشخص این صفات کیفی با عدد و رقم نمایش داده شوند. به طور کلی داده‌ها به دو صورت گسسته و پیوسته تقسیم می‌شوند.

داده‌های گسسته: داده‌هایی هستند که بین دو مقدار متصور آنها هیچ عددی وجود ندارد مانند تعداد فرزندان یک خانواده که مقادیر ۰,۱,۲,… است.

داده‌های پیوسته: داده‌هایی هستتند که بین هر دو مقدار متصور آنها همواره عدد دیگری وجود دارد مانند: وزن افراد ـ طول قد افراد ـ طول عمر قطعات الکتریکی و ... .

✍ **تست ۱:** ***کدامیک از صفات زیر یک صفت کمی است؟***

۱) گروههای خونی متفاوت ۲) رنگ چشم افراد ۳) عمر یک انسان ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ: گزینه «۳»** گزینه (۱) و (۲) صفات کیفی هستند ولی عمر انسان یک صفت کمی است.

چگونه اعداد را گرد می‌کنیم

فرض کنیم عددی را می‌خواهیم تا n رقم اعشار گرد کنیم. تقریبی را که بر اساس آن می‌خواهیم عدد را گرد کنیم در نظر می‌گیریم آن را نصف کرده و به عدد اصلی اضافه می‌کنیم سپس n رقم اعشار را نگه داشته و بقیه ارقام را صفر می‌کنیم.

برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱: ***عدد ۵۸۲۴/۰۱۵۷ را با تقریب ۰/۱ گرد کنید.***

☑ **پاسخ:** تقریب ۰/۱ را نصف می‌کنیم این مقدار به عدد اصلی اضافه یک رقم پشت ممیز را نگه داشته و بقیه را صفر می‌کنیم.

$$۵۸۲۴/۰۱۵۷+۰/۰۵=۵۸۲۴/۰۶۵۷ \rightarrow ۵۸۲۴/۰$$

مثال ۲: ***عدد ۷۵۲۳/۰۱۸۲ را با تقریب ۱ گرد کنید.***

☑ **پاسخ:** نصف عدد ۱ برابر با ۰/۵ است. پشت ممیز هیچ عددی را نگه نمی‌داریم.

$$۷۵۲۳/۰۱۸۲+۰/۵=۷۵۲۳/۵۱۸۲ \rightarrow ۷۵۲۳$$

مثال ۳: ***عدد ۶۷۲۳/۰۳۸۶ را با تقریب ۱۰۰ گرد کنید.***

☑ **پاسخ:** نصف عدد ۱۰۰ برابر با ۵۰ است.

$$۶۷۲۳/۰۳۸۶+۵۰=۶۷۷۳/۰۳۸۶ \rightarrow ۶۷۰۰$$

مثال ۴: ***عدد ۳۷۷۵/۰۱۵۲ را با تقریب ۰/۰۰۱ گرد کنید.***

☑ **پاسخ:** نصف عدد ۰/۰۰۱ برابر با ۰/۰۰۰۵ است.

$$۳۷۷۵/۰۱۵۲+۰/۰۰۰۵=۳۷۷۵/۰۱۵۷ \rightarrow ۳۷۷۵/۰۱۵$$

مفهوم و کاربرد نماد Σ

نماد Σ برای جمع کردن بکار برده می‌شود فرض کنید بخواهیم اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را با هم جمع کنیم در اینصورت می‌توانیم به جای استفاده از علامت + از نماد Σ که سیگما نامیده می‌شود استفاده کنیم.

$$\sum_{i=۱}^{۵} i=۱+۲+۳+۴+۵$$

$$\sum_{i=۱}^{۸} i=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i=x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n$$

خواص Σ

c یک عدد ثابت است.

$$۱)\ \sum_{i=۱}^{n} c = nc$$

$$۲)\ \sum_{i=۱}^{n} cx_i = c\sum_{i=۱}^{n} x_i$$

$$۳)\ \sum_{i=۱}^{n} (x_i + c) = \sum_{i=۱}^{n} x_i + nc$$

$$۴)\ \sum_{i=۱}^{n} (ax_i + b) = a\sum_{i=۱}^{n} x_i + nb$$

$$۵)\ \sum_{i=۱}^{n} (ax_i + by_i) = a\sum_{i=۱}^{n} x_i + b\sum_{i=۱}^{n} y_i$$

مثال ۵: ***فرض کنید متغیر X مقادیری مانند ۳ و ۵ و ۷ را بگیرد مقدار $\sum_{i=1}^{۳}(x_i + ۵)^۲$ را بدست آورید.***

☑ **پاسخ :**

$$\sum_{i=۱}^{۳}(x_i + ۵)^۲ = (x_۱ + ۵)^۲ + (x_۲ + ۵)^۲ + (x_۳ + ۵)^۲ = (۳ + ۵)^۲ + (۵ + ۵)^۲ + (۷ + ۵)^۲ = ۶۴ + ۱۰۰ + ۱۴۴ = ۳۰۸$$

در آمار توصیفی بعد از جمع‌آوری داده‌ها مراحل زیر انجام می‌گیرد.

۱ـ تنظیم و طبقه بندی داده‌ها در یک جدول

۲ـ ترسیم نمودارهای گوناگون با استفاده از مقادیر جدول

۳ـ خلاصه کردن داده‌ها به یک یا چند عدد موسوم به شاخص یا آماره

در زیر این مراحل را توضیح خواهیم داد.

جدول فراوانی: متداولترین جدول آماری به جدول فراوانی معروف است. یک جدول فراوانی شامل موارد زیر است:

فراوانی و فراوانی نسبی: اگر n داده از k نوع داشته باشیم و تعداد این داده‌ها در این k طبقه به ترتیب $f_۱, f_۲, ..., f_k$ باشند به $f_۱, f_۲, ..., f_k$ فراوانی‌های مطلق طبقات و به $r_۱ = \frac{f_۱}{n}, r_۲ = \frac{f_۲}{n}, ..., r_k = \frac{f_k}{n}$ فراوانی‌های نسبی طبقات گویند.

$$۱ \le f_i \le n \Rightarrow f_۱ + f_۲ + ... + f_k = \sum_{i=۱}^{k} f_i = n$$

$$۰ \le r_i \le ۱ \Rightarrow r_۱ + r_۲ + ... + r_k = \sum_{i=۱}^{k} r_i = ۱$$

فراوانی تجمعی و فراوانی تجمعی نسبی: اگر در هر طبقه فراوانی آن طبقه و طبقات قبل از آن را با یکدیگر جمع کنیم فراوانی تجمعی آن طبقه بدست می‌آید و اگر در هر طبقه فراوانی نسبی آن طبقه و طبقات قبل را با هم جمع کنیم فراوانی تجمعی نسبی آن طبقه بدست می‌آید. پس:

فراوانی تجمعی طبقه jام $= g_j = f_۱ + f_۲ + ... + f_j$

فراوانی تجمعی نسبی طبقه jام $= s_j = r_۱ + r_۲ + ... + r_j$

مراحل ساخت یک جدول فراوانی برای داده‌های پیوسته

۱ـ دریافت داده‌های خام و در صورت لزوم گرد کردن آنها

۲ـ تقسیم داده‌ها به تعدادی رده یا طبقه. یک قاعده مفید می‌گوید: (n تعداد کل داده‌ها و k تعداد طبقات است) $k = ۱ + ۳/۳۲۲\log_{۱۰}^{n}$

۳ـ $\text{میزان تغییرپذیری داده‌ها} = s = \frac{\text{واحد گرد شده داده‌ها}}{۲}$

۴ـ دامنه داده‌ها که برابر با تفاضل کوچکترین داده از بزرگترین داده می‌باشد را بدست می‌آوریم. (R) $R = \max - \min$

۵ـ طول هر رده یا طبقه از تقسیم دامنه بر تعداد رده (k) بدست می‌آید. $w = \frac{R}{k}$

مثال ۶: برای داده‌های زیر جدول فراوانی بسازید. (داده‌های زیر طـول عمـر نـوعی قطعـه الکتریکـی برحـسب سـاعت می‌باشند.)

۳۷ -۳۲ -۳۸ - ۳۴ - ۳۲ - ۴۰ - ۳۸- ۳۲ - ۳۵ - ۳۴ - ۲۹ - ۳۶- ۳۷ - ۲۴ - ۳۵ - ۳۹ - ۳۳- ۴۲ - ۴۵ - ۳۰ - ۴۳- ۳۲ - ۲۹ - ۲۷- ۲۲

☑ **پاسخ:** داده‌ها با تقریب ۱ گرد شده‌اند. $k = ۱ + ۳/۳۲۲\log_{۱۰}^{۲۵} = ۱ + ۳/۳۲(۱/۳۹) = ۵/۶۴ \simeq ۶$

توجه کنید که داده‌ها پیوسته‌اند. $s = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$

$R = \max - \min = ۴۵/۵ - ۲۱/۵ = ۲۴$

$w = \frac{R}{k} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$

توجه کنید که دامنه تغییرات از تفاضل کوچکترین داده واقعی از بزرگترین داده واقعی بدست می‌آید و چـون دراینجـا داده‌هـا بـا تقریـب ۱ گرد شده‌اند می‌توان گفت $\max = ۴۵/۵$ و $\min = ۲۱/۵$

حدود واقعی	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۲۱/۵ – ۲۵/۵	۲۳/۵	۲	۰/۰۸	۲	۰/۰۸
۲۵/۵ – ۲۹/۵	۲۷/۵	۳	۰/۱۲	۵	۰/۲۰
۲۹/۵ – ۳۳/۵	۳۱/۵	۶	۰/۲۴	۱۱	۰/۴۴
۳۳/۵ – ۳۷/۵	۳۵/۵	۷	۰/۲۸	۱۸	۰/۷۲
۳۷/۵ – ۴۱/۵	۳۹/۵	۴	۰/۱۶	۲۲	۰/۸۸
۴۱/۵ – ۴۵/۵	۴۳/۵	۳	۰/۱۲	۲۵	۱

در اینجا x_i ها نماینده دسته (نشان‌دسته) نامیده می‌شوند که از جمع حد پایین با حد بالای هر طبقه تقسیم بر ۲ بدست می‌آید.

مثال ۷: در یک جدول توزیع فراوانی با هشت طبقه و $n = ۱۰۰$ مجموع فراوانی نسبی تا قبل از طبقه هشتم برابر ۰/۹۲ است، فراوانی مطلق آخرین طبقه را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** $r_۸ = ۱ - ۰/۹۲ = ۰/۰۸ \Rightarrow r_۸ = \frac{f_۸}{n} \Rightarrow \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{f_۸}{۱۰۰} \Rightarrow f_۸ = ۸$

تست ۲: اگر در یک جدول توزیع فراوانی حجم جامعه برابر ۴۰ و فراوانی مطلق طبقه سوم آن برابر ۵ باشد، درصد فراوانی نسبی آن چند درصداست؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱۲۵ ۳) ۸ ۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه «۴»

$$r_i=\frac{f_i}{n}\Rightarrow r_۳=\frac{f_۳}{n}=\frac{۵}{۴۰}=۰/۱۲۵\Rightarrow ۰/۱۲۵\times ۱۰۰=۱۲/۵$$

تست ۳: اگر در یک جدول توزیع فراوانی با حجم نمونه ۲۵، فراوانی نسبی طبقه پنجم ۰/۴ باشد، فراوانی مطلق طبقه پنجم کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۲»

$$r_۵=\frac{f_۵}{n}\Rightarrow \frac{۴}{۱۰}=\frac{f_۵}{۲۵}\Rightarrow f_۵=۱۰$$

تست ۴: در یک جدول توزیع فراوانی، فراوانی تجمعی طبقه دوم و سوم برابر می‌باشد، کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) فراوانی مطلق طبقه دوم صفر است.

۲) فراوانی مطلق طبقه دوم و چهارم صفر است.

۳) فراوانی مطلق طبقه سوم صفر است.

۴) فراوانی مطلق طبقه دوم و چهارم برابر است.

پاسخ: گزینه «۳»

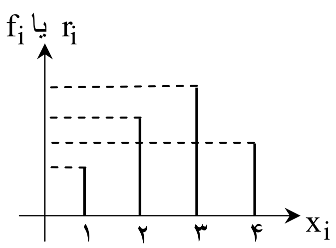
$$\begin{array}{l} g_۲=f_۱+f_۲ \\ g_۳=f_۱+f_۲+f_۳ \end{array}\Rightarrow f_۳=۰$$

ترسیم نمودارهای گوناگون از روی مقادیر جدول

در اینجا به معرفی نمودارهایی برای داده‌های گسسته و پیوسته به صورت جداگانه می‌پردازیم.

نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های گسسته بکار می‌روند.

الف ـ نمودارهای میله‌ای: در این نمودار دو محور عمود بر هم را در نظر می‌گیریم و بر روی محور افقی مقادیر x_i ها و بر روی محور عمودی مقادیر فراوانی‌های مطلق (فراوانی‌های نسبی) را می‌نویسیم سپس روی هرمقدار x_i میله‌ای به ارتفاع فراوانی مطلق f_i (فراوانی نسبی r_i) رسم می‌کنیم.



تست ۵: در نمودار میله‌ای روی محور X ها چه اندازه‌هایی قرار می‌گیرند؟

۱) فراوانی نسبی ۲) فراوانی تجمعی ۳) فراوانی مطلق ۴) نشان دسته‌ها

پاسخ: گزینه «۴»

ب ـ نمودار دایره‌ای: در این نمودار دایره‌ای را رسم کرده و آن را به تعداد طبقات جدول فراوانی به قطعهایی تقسیم می‌کنیم. اندازه هر قطاع متناسب با فراوانی نسبی طبقه مربوطه می‌باشد.

$$\text{درجه متناظر دسته } i \text{ ام} = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰^\circ$$

$$\text{درصد متناظر دسته } i \text{ ام} = \frac{f_i}{n} \times ۱۰۰$$

در مثال ۶ برای طبقه دوم درجه قطاع مربوطه عبارت است از:

$$\frac{۳}{۲۵} \times ۳۶۰^\circ = ۴۳/۲^\circ$$

✍ ***تست۶: در نمودار دایره‌ای ۱۰۰ داده آماری، کمانی به اندازه °۷۲ به یک طبقه تعلق دارد. فراوانی مطلق آن طبقه کدام است؟***

۱) ۷　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۲۰

☑ **پاسخ: گزینه «۴»**

$$\text{سهم برحسب درجه}: ۷۲ = \frac{f_i}{۱۰۰} \times ۳۶۰ \Rightarrow ۳۶f_i = ۷۲۰ \Rightarrow f_i = ۲۰$$

✍ ***تست۷: در نمودار دایره‌ای ۱۲۰ داده آماری، کمانی به اندازه °۶۰ به یک طبقه تعلق دارد فراوانی مطلق آن طبقه کدام است؟***

۱) ۲۰　　۲) ۳۰　　۳) ۴۰　　۴) ۵۰

☑ **پاسخ: گزینه «۱»**

$$\text{سهم بر حسب درجه} = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰ \Rightarrow ۶۰ = \frac{f_i}{۱۲۰} \times ۳۶۰ \Rightarrow f_i = ۲۰$$

✍ ***تست ۸: در نمودار دایره‌ای اگر فراوانی مطلق طبقه‌ای ۲۰ باشد و کمانی که برای این طبقه جدا شده برابر با ۲۰ درصد باشد مجموع فراوانی‌های مطلق کدام است؟***

۱) ۱۰۰　　۲) ۱۱۰　　۳) ۱۵۰　　۴) ۷۵

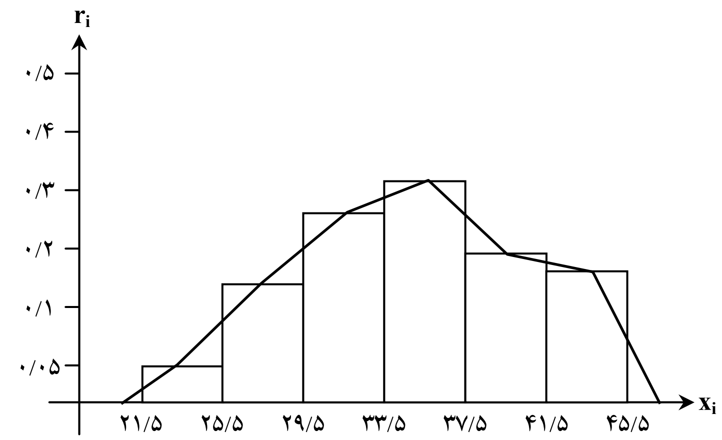
☑ **پاسخ: گزینه «۱»**

$$\frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۲۰}{n} \Rightarrow n = \sum f_i = ۱۰۰$$

> **توجه :**
> ***نمودار دایره‌ای معمولاً برای داده‌ها کیفی نیز رسم می‌شود.***

نمودارهای هیستوگرام و چند بر فراوانی یا چند ضلعی برای داده‌های پیوسته بکار می‌روند.

الف ـ نمودار هیستوگرام: نموداری است متشکل از تعدادی مستطیل که تعداد این مستطیل‌ها برابر با تعداد رده‌های جدول فراوانی می‌باشد. قاعده هر مستطیل روی محور افقی قرار دارد و طول آن برابر با طول واقعی رده است. و مرکز آن نماینده رده است. ارتفاع مستطیل برابر فراوانی نسبی مربوط به آن رده یا فراوانی مطلق آن رده می‌باشد.



ب ـ چند بر فراوانی: اگر وسط قاعده‌های بالای مستطیل‌های هیستوگرام را بوسیله خطوط مستقیم به طور متوالی به یکدیگر وصل کرده و ابتدا و انتهای آن‌ها را به وسط ردهٔ ماقبل و ما بعد وصل کنیم یک چند ضلعی بوجود می‌آید که آن را چند بر فراوانی یا نمودار چندضلعی می‌نامند.

خلاصه کردن داده‌ها به یک یا چند عدد موسوم به شاخص یا آماره

با تشکیل جدول و رسم نمودار می‌توان تا حدودی اطلاعات در مورد داده‌ها به دست آورد. ولی برای آنکه بتوانیم نتایج کلی را به صورت ساده‌تر ارائه دهیم بهتر است که داده‌ها را در یک یا چند عدد خلاصه کنیم شاخصها خود به سه بخش شاخصهای تمرکز، شاخصهای پراکندگی و شاخصهای نسبی پراکندگی تقسیم می‌شوند.

شاخصهای تمرکز یا مرکزی:

این شاخص‌ها میزان تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهند. شاخص‌های مهم مرکزی عبارتند از میانگین، میانه، مُد یا نما و چندک‌ها.

میانگین:

اگر داده‌ها بر روی یک محور به صورت منظم ردیف شوند، مقدار میانگین دقیقاً در نقطه تعادل یا مرکز ثقل توزیع قرار می‌گیرد. این محور همانند آلا کلنگ است که میانگین، نقطه تعادل آن است.

میانگین حسابی: یکی از مهمترین شاخص‌های تمرکز است. میانگین جامعه را با نماد μ و میانگین نمونه را با $\overline{x}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید داده‌های $x_۱, x_۲, \dots, x_k$ به ترتیب دارای فراوانیهای $f_۱, f_۲, \dots, f_k$ باشند و تعداد کل داده‌ها برابر با n باشد.

$$\overline{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i$$

توجه شود اگر داده‌ها طبقه‌بندی شده باشند (داده‌های پیوسته) به جای x_i از نماینده طبقه استفاده می‌شود.

مثال ۸: ***میانگین داده‌های زیررا بدست آورید.***

۲,۸,۴,۷,۶,۵,۹,۱,۳,۴

☑ **پاسخ :**

$$\overline{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} x_i = \frac{۱}{۱۰}(۲+۸+۴+۷+۶+۵+۹+۱+۳+۴) = \frac{۴۹}{۱۰} = ۴/۹$$

مثال ۹: میانگین داده‌های روبرو را بدست آورید. ۲,۳,۳,۵,۵,۵,۶,۶,۲۰,۲۰,۲۰

☑ **پاسخ :**

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_ix_i=\frac{1}{11}(1\times2+2\times3+3\times5+2\times6+3\times20)=8/64$$

مثال ۱۰: میانگین داده های جدول روبرو را بدست آورید.

x_i	۵	۱۰	۱۵	۲۰
f_i	۴	۸	۶	۷

☑ **پاسخ :**

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{k}f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k}f_i}=\frac{4\times5+8\times10+6\times15+7\times20}{25}=13/2$$

مثال ۱۱: میانگین داده‌های جدول زیر را بدست آورید.

حدود طبقات	۳-۵	۵-۷	۷-۹	۹-۱۱
f_i	۷	۴	۳	۵

☑ **پاسخ :**

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}f_ix_i=\frac{1}{7+4+3+5}(7\times4+4\times6+3\times8+5\times10)=6/631$$

تست ۹ : در جدول روبرو میانگین برابر با ۴/۹ است در اینصورت به جای نشان دسته سوم کدام عدد قرارمی‌گیرد؟

x_i	۱	۳	?	۷	۹
f_i	۲	۴	۸	۵	۱

۱) ۵   ۲) ۴

۳) ۳   ۴) ۲

☑ **پاسخ: گزینه «۱»**

$$\overline{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

$$4/9=\frac{1\times2+3\times4+8\times x+7\times5+9\times1}{2+4+8+5+1}\Rightarrow 98=8x+58\Rightarrow 8x=40\Rightarrow x=5$$

تست ۱۰: در جدول زیر میانگین کدام است؟

حدود طبقات	۲ - ۴	۵ - ۷	۸ - ۱۰
f_i	۲	۴	۲

۱) ۵   ۲) ۶

۳) ۷   ۴) ۸

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** ابتدا در جدول نشان دسته‌ها را بدست می‌آوریم:

x_i	۳	۶	۹
f_i	۲	۴	۲

$$\Rightarrow\overline{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2++f_3x_3}{f_1+f_2+f_3}=\frac{3\times2+6\times4+9\times2}{2+4+2}=6$$

نکات مربوط به میانگین حسابی

۱ـ اگر داده‌های $x_1, x_2, ..., x_k$ تشکیل تصاعد عددی را بدهند میانگین آنها برابر است با: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_k}{2}$

۲ـ مجموع انحرافات از میانگین برابر صفر است یعنی:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

۳ـ $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

۴ـ اگر به تمام داده‌ها مقدار ثابت a را اضافه یا کم کنیم به میانگین نیز مقدار a اضافه و یا کم می‌شود یعنی:

$$y_i = x_i \pm a \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} \pm a$$

۵ـ هر گاه تمام داده‌ها را در عدد ثابتی مثل b ضرب یا تقسیم کنیم، میانگین نیز در b ضرب یا تقسیم می‌شود یعنی:

$$y_i = bx_i \Rightarrow \bar{y} = b\bar{x}$$

مثال ۱۲: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, ..., x_n$ برابر با ۲۰ باشد میانگین داده‌های $\frac{x_1}{3}+6, \frac{x_2}{3}+6, ..., \frac{x_n}{3}+6$ را بدست آورید.

☑ پاسخ:

$$y_i = \frac{x_i}{3} + 6 \Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{x}}{3} + 6 = \frac{1}{3} \times 20 + 6 = 12/66$$

۶ـ اگر $\bar{x}_1$ میانگین f_1 داده، $\bar{x}_2$ میانگین f_2 داده و ... ، $\bar{x}_k$ میانگین f_k داده باشد میانگین جمع این اعداد یعنی میانگین میانگین‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{f_1\bar{x}_1 + f_2\bar{x}_2 + ... + f_k\bar{x}_k}{f_1 + f_2 + ... + f_k}$$

مثال ۱۳: دانشکده‌ای دارای ۵ رشته است که به ترتیب ۲۰ ، ۲۵ ، ۳۰ ، ۳۵ و ۳۲ نفر دانشجو دارند و میانگین درس عمومی ریاضی آنها به ترتیب ۱۸ ، ۱۷/۵ ، ۱۶/۸ ، ۱۶/۲ و ۱۷/۲ می‌باشد. میانگین درس ریاضی عمومی این دانشکده را بدست آورید.

☑ پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{20\times18 + 25\times17/5 + 30\times16/8 + 35\times16/2 + 32\times17/2}{20+25+30+35+32} = \frac{360+437/5+504+567+550/4}{142} = 17/034$$

تست ۱۱: میانگین ۴ عدد ۸۰ است اگر به این چهار عدد، عدد ۳۰ اضافه شود، میانگین ۵ عدد حاصل کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

☑ پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 80 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 320$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 30}{5} = \frac{320 + 30}{5} = 70$$

تست ۱۲: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر با ۱۰ باشد و هر یک از داده‌ها را در عدد ۳ ضرب و با عدد ۵ جمع کنیم، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = 10$$

عملی که بر روی داده‌ها انجام می‌شود بر روی میانگین نیز انجام می‌شود.

$$\bar{y} = 3 \times 10 + 5 = 35$$

تست ۱۳: در صورتیکه میانگین $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ برابر با a باشد در این صورت حاصل $\sum_{i=1}^{30}(x_i - a)$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) $30a$ ۳) $15a$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» مجموع انحراف داده‌ها از میانگین همواره صفر است.

میانگین وزنی یا موزون

فرض کنید شما می‌خواهید معدل دروس خود را در یک ترم محاسبه کنید. برای درک بهتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۴: دانشجویی در ترم گذشته در درس ریاضی نمره ۱۵، در درس آمار نمره ۱۲ و در درس ادبیات ۱۴ گرفته است اگر ریاضی و آمار هر کدام ۴ واحد و ادبیات درس ۳ واحدی باشد معدل او در ترم گذشته چقدر بوده است؟

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{4 \times 15 + 4 \times 12 + 3 \times 14}{4 + 4 + 3} = \frac{150}{11} = 13/64$$

پس در حالت کلی اگر داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب دارای ضرایب وزنی $w_1, w_2, \dots, w_n$ باشد آنگاه:

$$\text{میانگین وزنی} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

پس هنگامی که هر یک از داده‌ها، وزنی متناسب داشته باشند برای محاسبه میانگین به هر داده وزن خودش داده می‌شود.

میانه

در داده‌های آماری عددی که از پنجاه درصد داده‌ها کوچکتر و از پنجاه درصد داده‌ها بزرگتر باشد را **میانه** گویند. میانه را با نماد Md نمایش می‌دهند.

محاسبه میانه برای داده‌های گسسته

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم اگر تعداد داده‌ها فرد باشد میانه عدد وسط می‌باشد و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانه برابر با میانگین دو عدد وسط می‌باشد.

n فرد باشد $\quad Md = x_{\frac{n+1}{2}}$

n زوج باشد $\quad Md = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$