



مثال ۱: روی خط به معادله $\vec{r} \times \hat{x} = -\Delta \hat{z}$ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت به اندازه $\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ کولن بر متر توزیع شده است. شدت میدان

الکتریکی \vec{E} در فضای آزاد در نقطه‌ای به مختصات $(2, 5, 4)$ با کدام رابطه زیر داده می‌شود؟ (می‌دانیم $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \frac{F}{M}$)

(مهندسی برق - سراسری ۹۰)

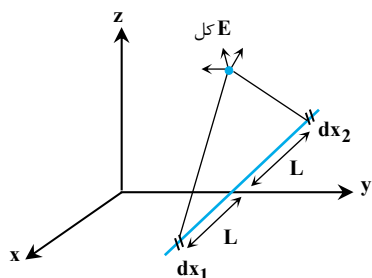
(۱) $-\frac{1}{8\pi} \hat{z}$ (۲) $-\frac{1}{10\pi} \hat{y}$ (۳) $\frac{1}{10\pi} \hat{y}$ (۴) $\frac{1}{8\pi} \hat{z}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا معادله خط رو بازنویسی می‌کنیم:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \Rightarrow \vec{r} \times \hat{x} = -\Delta \hat{z} \Rightarrow [x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}] \times \hat{x} = -\Delta \hat{z} \Rightarrow x(\hat{x} \times \hat{x}) + y(\hat{y} \times \hat{x}) + z(\hat{z} \times \hat{x}) = -\Delta \hat{z}$$

$$\Rightarrow y(-\hat{z}) + z(\hat{y}) = -\Delta \hat{z}$$

$$\left. \begin{matrix} y = \Delta \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \text{ پس از معادله بالا خواهیم داشت:}$$



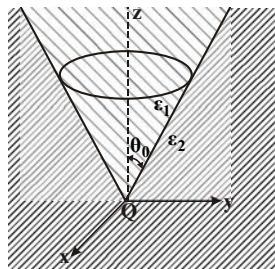
حالا میدان ناشی از این خط تو نقطه $(2, 5, 4)$ در راستای \hat{z} خواهد بود، زیرا خط $\begin{cases} y = \Delta \\ z = 0 \end{cases}$ و نقطه $(2, 5, 4)$ هر دو تو صفحه $y = \Delta$ واقع شده‌اند. بنابراین می‌تونیم دو المان متناظر dx_1 و dx_2 رو روی

توزیع بار در نظر بگیریم که میدان ناشی از المان dx_1 در راستای $-\hat{x} + \hat{z}$ و میدان ناشی از المان dx_2 در راستای $\hat{x} + \hat{z}$ هستش که اگه به همین صورت تمام المان‌های متناظر رو روی خط $y = \Delta$ و $z = 0$ دوبه‌دو در نظر بگیریم، میدان کل دو المان در راستای \hat{z} خواهد بود. پس گزینه (۴) جوابه، به همین سادگی.

مثال ۱۴: ناحیه‌ی $\theta_0 < \theta$ از فضا را عایقی با ضریب نفوذپذیری ϵ_1 ، مطابق شکل زیر، پر کرده است. بقیه فضا با عایقی با ضریب نفوذپذیری ϵ_2 پر

(مهندسی برق - سراسری ۹۵)

شده است. بار نقطه‌ای Q در رأس مخروط در مبدأ قرار دارد، میدان \vec{E} در درون مخروط $\theta_0 < \theta$ ، کدام است؟



$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r^2 ((\epsilon_1 - \epsilon_2) + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cos \theta_0)} \hat{a}_r \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r^2 ((\epsilon_1 + \epsilon_2) - (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos \theta_0)} \hat{a}_r \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_1} \hat{a}_r \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{a}_r \quad (4)$$

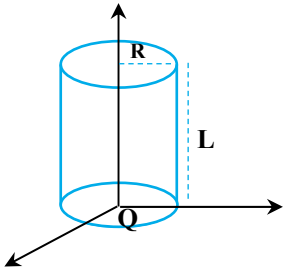
پاسخ: گزینه «۲» اگه $\theta_0 = \pi$ باشه، یعنی کل فضا از ϵ_1 پر شده و نباید ϵ_2 تو میدان ظاهر بشه. گزینه‌های (۱) و (۴) هر چند خیلی خوشتپین،

باید حذف بشن. قرار نیست که هر چیزی خوشتیپه حفظ بشه. روش علمی برای هیچکس تبعیض قائل نمیشه.

اگه $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ناحیه بالایی از ϵ_1 پر شده و ناحیه پایینی از ϵ_2 پر شده و برای حساب کردن میدان از قانون گاوس هر دوی ϵ_1 و ϵ_2 درگیر میشن. یعنی فقط

گزینه (۲) جوابه.

مثال ۲۰: مطابق شکل بار نقطه‌ای Q روی محور استوانه‌ای به شعاع R و طول L قرار دارد. شار الکتریکی خالص گذرنده از سطح جانبی استوانه چقدر است؟ (فوتونیک - سراسری ۹۰)



$$(1) \quad \frac{Q}{2\epsilon_0} \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}$$

$$(2) \quad \frac{Q}{4\epsilon_0} \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}$$

$$(3) \quad \frac{Q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{L^2 + R^2}}\right)$$

$$(4) \quad \frac{Q}{4\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{L^2 + R^2}}\right)$$

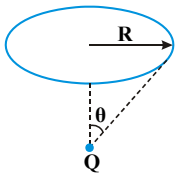
پاسخ: گزینه «۱» اگر $L = 0$ باشد، سطح جانبی صفر همیشه پس شار گذرنده نیز صفر همیشه که خوشبختانه تو همه گزینه‌ها این ویژگی صدق میکند.

طبق قانون گاوس اگر بار Q داخل یک سطح بسته قرار بگیرد، کل شار گذرنده از یک سطح بسته برابر $\frac{Q}{\epsilon_0}$ خواهد بود.

حالا اگر L به سمت بی‌نهایت میل کند، کل شار گذرنده از نیم صفحه بالایی از سطح جانبی می‌گذرد و چون Q در صفحه $Z = 0$ قرار گرفته، نصف شار

کل یعنی $\frac{Q}{2\epsilon_0}$ از نیم صفحه بالایی و نصف دیگر شار $\frac{Q}{2\epsilon_0}$ از نیم صفحه پایینی عبور می‌کند که فقط گزینه (۱) یا (۳) صحیح است. از طرفی طبق توضیح

درسنامه، گزینه (۳) مربوط به شار گذرنده از دایره بالایی به شعاع R هستش پس غلط است.



$$R \text{ شعاع به دیسک از گذرنده از } \phi = \frac{q}{2} (1 - \cos \theta)$$



نکته ۱: در دو حالت امکان داره پتانسیل بی‌نهایت به دست بیاد. طبق رابطه $V = \int \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r}$ ، اگه بار بی‌نهایت بشه ($q \rightarrow \infty$) و یا اگه روی توزیع

بار بریم یعنی ($r \rightarrow 0$).

نکته ۲: اگه توزیع بار به صفر میل کنه، پتانسیل الکتریکی نیز به صفر میل می‌کنه.

گفتیم که رابطه میان میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت $E = -\nabla V$ و $V = -\int E \cdot dl$ هستش. پس اگه تو مسأله‌ای پتانسیل الکتریکی رو باید حساب کنیم، اگه پیدا کردن میدان الکتریکی آسون‌تر بود، می‌تونیم اول میدان الکتریکی رو به دست بیاریم و از روی میدان، پتانسیل رو حساب کنیم و یا برعکس.

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

پتانسیل الکتریکی یه دوقطبی از رابطه مقابل به دست میاد:

دقت کنید که پتانسیل دوقطبی با $\frac{1}{r}$ متناسبه.

نکته ۳: طبق رابطه $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ اگه بار مثبت باشه، پتانسیل مثبت میشه و اگه روی توزیع بار بریم، پتانسیل مثبت بی‌نهایت میشه و اگه بار

منفی باشه، پتانسیل منفی میشه و اگه روی بار بریم، پتانسیل منفی بی‌نهایت میشه.

نکته ۴: تو گزینه‌های داده شده، چک کنید که آیا تو معادله لاپلاس $\nabla^2 V = 0$ صدق می‌کنه یا نه. با این روش می‌تونیم دو تا از گزینه‌ها رو حذف کنیم.

همیشه تو گزینه‌ها نقاط شرایط مرزی و معلومات داده شده تست رو چک کنید، ممکنه بعضی از گزینه‌ها با این روش حذف بشن.

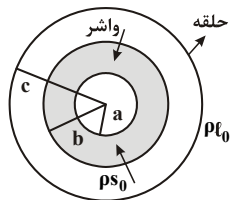
در مرز مشترک دو محیط، پتانسیل الکتریکی همواره پیوسته هستش $V_1 = V_2$.

مثال ۱: بار سطحی با چگالی یکنواخت $\rho_s = \rho_{s_0} \left(\frac{C}{m}\right)$ روی سطح واشرمانند به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b (مانند شکل زیر) توزیع شده است.

بار خطی با چگالی یکنواخت $\rho_L = \rho_{L_0} \left(\frac{C}{m}\right)$ روی حلقه‌ای به شعاع c و هم‌مرکز و هم‌سطح با واشر قرار گرفته است.

(مهندسی برق، مخابرات میدان - دکتری ۹۶)

در مرکز این مجموعه صفر شود؟



$$\rho_{s_0} \frac{c^2}{a-b} \quad (1)$$

$$\rho_{s_0} (c-a+b) \quad (2)$$

$$\rho_{s_0} (a-b) \quad (3)$$

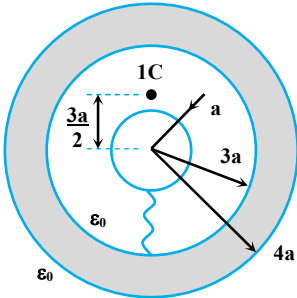
$$\rho_{s_0} \frac{(a-b)^2}{c} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۳» اگه $a = b$ قرار بدید سطح واشر صفر میشه، پس بار سطحی روی اون هم صفر میشه و پتانسیل در مرکز ایجاد نمیکنه، حالا باید

پتانسیل حلقه هم در مرکز صفر بشه، در نتیجه بار روی حلقه باید صفر بشه. با این توضیحات گزینه (۱) و (۲) رو می‌زنیم.

از طرفی نباید شعاع C تو گزینه‌ها ظاهر بشه، چون پتانسیل حلقه تو مرکز برابره با $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 C}$ که $q = 2\pi C \lambda_0$. پس $V = \frac{\lambda_0}{2}$ که گزینه (۴) هم نادرسته.

مثال ۴: در مجموعه شکل زیر، کره رسانای مرکزی توسط یک سیم بسیار نازک به پوسته رسانای کروی متصل شده است. بار نقطه‌ای $1C$ در فاصله $\frac{2}{3}a$ از کره مرکزی قرار دارد. در عین حال $1C$ بار دیگر به پوسته کروی اعمال می‌شود، پتانسیل کره مرکزی کدام است؟ (مهندسی برق - سراسری ۸۶)



$$(1) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$(3) \frac{1}{16\pi\epsilon_0 a}$$

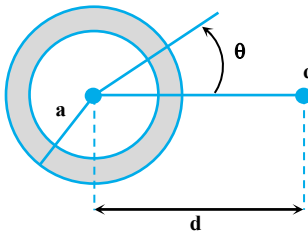
$$(2) \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$(4) \frac{11}{48\pi\epsilon_0 a}$$

پاسخ: گزینه «۲» وقتی که از بیرون به کره نگاه می‌کنیم بار ۲ کولن رو می‌بینیم و این بار ۲ کولن برای ما مهم نیست که در کجای کره قرار داده و ما اون رو در مرکز کره فرض می‌کنیم. پس پتانسیل کره به شعاع $4a$ برابره با $V = \frac{2}{4\pi\epsilon_0(4a)} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a}$ و کره مرکزی توسط سیم به پوسته وصله؛ پس پتانسیل اون با کره به شعاع $4a$ برابره و گزینه (۲) جوابه!

مثال ۶: اگر بار q در فاصله d از مرکز یک پوسته کروی رسانا با شعاع خارجی a قرار گیرد ($d > a$) چگالی بارهای سطحی روی جدار خارجی و داخلی پوسته به ترتیب:

(فیزیک - سراسری ۸۵)



- (۱) ثابت است، متناسب است با θ .
- (۲) متناسب است با θ ، ثابت است.
- (۳) متناسب است با θ ، صفر است.
- (۴) صفر است، متناسب است با θ .

پاسخ: گزینه «۳» بارهای سطحی روی سطح داخلی پوسته به شعاع و بارهای بیرون بستگی نداره و بار روی سطح داخلی باید صفر بشه. پس گزینه (۳) صحیحه!

نکته: بارهای آزاد مثبت، بارهای مقید منفی را به سمت خود جذب می‌کنند و بارهای آزاد منفی، بارهای مقید مثبت را به سمت خود جذب می‌کنن. مثلاً اگر دو صفحه موازی مطابق شکل زیر که به پتانسیل V_0 وصل شدن، رو صفحه بالایی بارهای آزاد مثبت و رو صفحه پایینی بارهای آزاد منفی داریم؛ حالا اگه محیط با یه عایقی پر بشه، بارهای مقید سطحی رو صفحه بالایی منفی می‌شن و بارهای مقید سطحی رو صفحه پایینی مثبت می‌شن.



مثال ۶: لایه‌ی عایقی به ضخامت d متر بین $z = d, z = 0$ در فضای آزاد قرار دارد. ضریب گذردهی الکتریکی عایق $\epsilon = \epsilon_0 e^{\frac{z}{d}}$ است. اگر عایق در معرض میدان خارجی ثابت $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ قرار گیرد، آنگاه چگالی بار مقید حجمی چند کولن بر متر مکعب است؟ (مهندسی برق، مخابرات میدان - دکتری ۹۱)

$$(4) \frac{\epsilon_0 E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

$$(3) \frac{E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

$$(2) \frac{-\epsilon_0 E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

$$(1) \frac{-E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

پاسخ: گزینه «۲» میدان، عمود بر عایقه، پس محیط سریعه. از رابطه $\vec{p} = (1 - \frac{1}{\epsilon_r}) \vec{D}$ استفاده می‌کنیم و $\epsilon_r = e^{\frac{z}{d}}$.

حالا از طرفی $D = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$ پس در رابطه p جمله ϵ_0 وجود داره و چون $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{p}$ پس در رابطه چگالی بار مقید نیز ϵ_0 وجود داره و گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شن. حالا \vec{D} یکنواخته و فقط ϵ_r تابعیت z داره و چون $\frac{\partial}{\partial z} (1 - \frac{1}{\epsilon_r}) > 0$ و $\nabla \cdot \vec{p} > 0$ و $\rho_b < 0$ پس $(\rho_b = -\nabla \cdot \vec{p})$ پس گزینه (۲) درسته.



درسنامه ۲: مقاومت الکتریکی

برای محاسبه مقاومت در محیط‌های همگن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا یک اختلاف پتانسیل ΔV بین دو سر مقاومت اعمال می‌کنیم، سپس پتانسیل الکتریکی فضای داخل مقاومت را با حل معادله لاپلاس به دست می‌آریم، از رابطه $E = -\nabla V$ میدان الکتریکی رو پیدا می‌کنیم و چگالی جریان رو از $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ حساب می‌کنیم و از رابطه $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$ ، جریان کل گذرنده

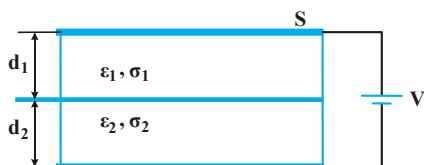
$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

از مقاومت به دست می‌آید و در نهایت

در محیط‌های غیرهمگن، مقاومت به صورت زیر به دست می‌آید: فرض می‌کنیم که جریان الکتریکی کل گذرنده از مقاومت I باشد، حال از روی اون چگالی جریان \vec{J} به دست می‌آید. سپس با استفاده از رابطه $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ، میدان الکتریکی داخل مقاومت به دست می‌آید. حال اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت $V = -\int E \cdot dl$ رو حساب می‌کنیم و در نهایت مقاومت از

$$R = \frac{V}{I}$$

مثال ۱۱: مطابق شکل زیر فضای میان دو جوشن یک خازن مسطح با دو ماده یکی با ضخامت d_1 ، ضریب گذردهی ϵ_1 و ضریب رسانندگی σ_1 و دیگری با ضخامت d_2 ، ضریب گذردهی ϵ_2 و ضریب رسانندگی σ_2 پر شده است. مساحت هر یک از صفحات خازن S و خازن به اختلاف پتانسیل ثابت V متصل است. چگالی جریان در هر یک از دو ماده کدام است؟ (فیزیک - سراسری ۹۳)



$$J_1 = J_2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (1)$$

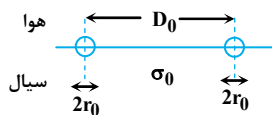
$$J_1 = J_2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 V}{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2} \quad (2)$$

$$J_2 = \frac{\sigma_2^2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad \text{و} \quad J_1 = \frac{\sigma_1^2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad (3)$$

$$J_2 = \frac{\sigma_2^2 V}{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2} \quad \text{و} \quad J_1 = \frac{\sigma_1^2 V}{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۱» جریان در هر دو محیط یکسانه، زیرا در مرز مشترک $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. پس گزینه (۳) و (۴) غلطن. از طرفی اگر σ_1 رو به بی نهایت میل بدیم خازن اولی اتصال کوتاه می‌شه و جریان فقط به مشخصات خازن دوم وابسته میشه. پس گزینه (۲) هم غلطه. و فقط گزینه (۱) صحیح می‌باشه.

مثال ۱۵: طبق شکل دو گلوله فلزی کاملاً یکسان و کوچک به شعاع r_0 درون یک سیال با ضریب رسانش σ_0 تا نصف شناور هستند و فاصله آن‌ها D_0 بسیار بزرگتر از r_0 می‌باشد. مقاومت بین این دو گلوله فلزی وقتی جریانی از یکی به دیگری برقرار شود، کدام است؟ (فیزیک - دکتری ۹۲)



$$\frac{1}{\pi \sigma_0} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\pi \sigma_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{D_0} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi \sigma_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{D_0} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2\pi \sigma_0} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۳» برای چنین ساختاری مقاومت طبق درسنامه از رابطه $R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{2}{D_0} \right)$ حساب می‌شه پس $R = \frac{1}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{D_0} \right)$ به دست می‌آید و

گزینه (۳) درسته. یه نکته دیگه اینکه اگر $D_0 \gg r_0$ باشه، دو مقاومت با هم سری میشن و مقاومت هر گلوله برابر با $\frac{1}{4\pi\sigma_0 r_0}$ ، پس در کل مقاومت کل

میشه $\frac{1}{2\pi\sigma_0 r_0}$ ، پس یا گزینه (۳) یا (۴) صحیحه.

مثال ۵: کره‌ای فلزی به شعاع a در فضای آزاد هم‌مرکز با مبدأ مختصات دارای پتانسیل V_0 است. انرژی پتانسیل الکتریکی کل سیستم W_e چقدر است؟ (مهندسی برق - سراسری ۸۱)

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2\pi\epsilon_0 a V_0^2 \\ (2) \quad & \frac{2\pi\epsilon_0 a^2 V_0^2}{\sqrt{a^2 - 2}} \\ (3) \quad & \frac{1}{2} \pi\epsilon_0 a V_0^2 \\ (4) \quad & \frac{2\pi\epsilon_0 a^2 V_0^2}{\sqrt{a^2} - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه انرژی ابتدا ظرفیت سیستم را به دست می‌آوریم. پتانسیل ثابت، پس $w = \frac{1}{2} C V_0^2$ و $C = 4\pi\epsilon_0 a$ که گزینه (۱) جوابه. قیافه گزینه‌های (۲) و (۴) به جوراییه که مشکوک می‌زنن؛ چون برای a شرط گذاشتن که زیر رادیکال باید مثبت باشه که البته شرط غلطیه و a هیچ محدودیت نداره یا مثلاً در $a = \sqrt{2}$ انرژی گزینه‌های (۲) و (۴) نامحدود میشه، مگه داریم؟! در شعاع‌های محدود انرژی الکتریکی محدود میشه، چون پتانسیل محدوده.

مثال ۶: خازن مسطحی که سطح هر الکتروود آن s و فاصله دو الکتروود از هم d است به باتری v_0 وصل شده است. قطعه رسانای کامل به سطح s و ضخامت w ($w < d$) را به موازات الکتروودها وارد فضای این خازن می‌کنیم. کار انجام شده را به دست آورید. (مهندسی برق - سراسری ۷۸)

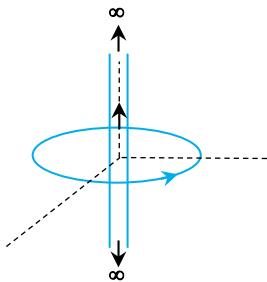
$$\begin{aligned} (1) \quad & W_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 s \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{d} \right) v_0^2 \\ (2) \quad & W_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 s \left(\frac{d}{(d-w)d} \right) v_0^2 \\ (3) \quad & W_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 s \left(\frac{w}{(d-w)d} \right) v_0^2 \\ (4) \quad & W_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 s \left(\frac{w}{d-w} - \frac{1}{d} \right) v_0^2 \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۳» اگر ضخامت الکتروود صفر باشه، هیچ کاری صورت نمی‌گیره پس گزینه (۳) یا (۴) درسته. از طرفی چون رابطه انرژی $w = \frac{1}{2} C V_0^2$ است که انرژی و نیرو با C رابطه مستقیم دارن، با قرار دادن الکتروود ظرفیت زیاد میشه پس کار انجام گرفته همواره مثبت. با این توضیحات گزینه (۳) درسته، چون گزینه (۴) میتونه منفی باشه (در گزینه (۴) به ازای $w = \frac{d}{d+1}$ کار انجام شده منفی میشه که قطعاً غلطه)، اصلاً این طور بگیریم که گزینه (۴) از پایه غلطه، زیرا از مشکلات دیمانسیون رنج می‌بره.

درسنامه ۲: روش‌های حدی

برای حل سؤالات به روش‌های حدی از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

- اگر توزیع جریان رو به صفر میل بدیم، میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع بار صفر میشه.
- میدان مغناطیسی ناشی از یک سیستم جریان‌دار I نامتناهی برابره با $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}$ که اگر r به بی‌نهایت بره، میدان مغناطیسی صفره و روی توزیع جریان یعنی $r = 0$ ، میدان بی‌نهایت میشه. توجه کنید که میدان مغناطیسی در راستای سیم حامل جریان صفره.



مثال ۸: بی‌نهایت هادی فیلامانی در صفحه $z = 0$ و در $y = n, \dots, \pm 2, \pm 1, 0, n$ که هر یک جریان I آمپر را در جهت x از خود عبور می‌دهند. شدت میدان مغناطیسی H_y در $(0, 0, \infty)$ چقدر است؟ (مهندسی برق، مخابرات میدان - دکتری ۹۳)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{I}{4} \\ (2) \quad & -\frac{I}{3} \\ (3) \quad & -\frac{I}{2} \\ (4) \quad & -I \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۳» در فاصله دور توزیع جریان‌ها رو به صورت پیوسته می‌بینیم. از طرفی میدان ناشی از یک توزیع پیوسته برابره با $\frac{1}{2} \vec{J} \times \vec{n}$ ؛

$$\text{پس گزینه (۳) درسته. چون } \frac{1}{2} \hat{x} \times \hat{z} = -\frac{1}{2} \hat{y}$$



درسنامه ۲: پیدا کردن پتانسیل مغناطیسی از طریق میدان مغناطیسی

رابطه میدان مغناطیسی با پتانسیل برداری به صورت $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ است، پس اگره مسأله‌ای پتانسیل برداری یک ساختار را خواسته بود که به دست آوردن آن سخت بود و ما میدان مغناطیسی آن ساختار را بلد نبودیم، از رابطه بالا گزینه‌ها را چک می‌کنیم. ذکر چند نکته خالی از لطف نیست.

نکته ۱: پتانسیل برداری مغناطیسی در مرز مشترک دو محیط مختلف پیوسته است.

نکته ۲: میدان مغناطیسی یک استوانه نامحدود حامل جریان یکنواخت I در خارج استوانه برابره با $\frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}$ و در داخل استوانه برابره با:

$$\frac{I r}{2\pi a^2} \hat{\phi}$$

مثال ۴: پتانسیل برداری برای نقاط داخل و خارج یک سیمولوله استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع a که محور آن بر محور z منطبق است و در واحد

(فوتونیک - سراسری ۹۰)

طول آن n دور سیم حامل جریان I پیچیده شده، در مختصات استوانه‌ای کدام است؟

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I \rho}{3} \hat{\phi} & \rho < a \\ \frac{\mu_0 n I a^2}{3 \rho^2} \hat{\phi} & \rho > a \end{cases} \quad (۲)$$

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I}{3} \rho \hat{\phi} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad (۱)$$

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I \rho}{2} \hat{\phi} & \rho < a \\ \frac{\mu_0 n I a^2}{2 \rho} \hat{\phi} & \rho > a \end{cases} \quad (۴)$$

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I}{2} \rho \hat{\phi} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» اولاً باید در مرز مشترک ($\rho = a$) پتانسیل پیوسته باشد، پس (۱) و (۳) غلطن. میدان مغناطیسی خارج سیمولوله صفره، پس از روی \vec{A} داده شده تو گزینه‌ها برای $\rho > a$ میدان مغناطیسی باید صفر به دست بیاد که فقط گزینه (۴) درسته. از رابطه $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۵: از یک سیم پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیمولوله) جریان ثابت I می‌گذرد. تعداد دورها بسیار زیاد و n دور بر واحد طول فرض می‌شود. بردار پتانسیل

مغناطیسی \vec{A} خارج از سیم پیچ و در فاصله‌ی r از محور آن (محور z) با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (شعاع سیم پیچ را a و جهت جریان آن را $\hat{\phi}$ فرض کنید).

(مهندسی برق - سراسری ۸۹)

$$\frac{\mu_0 n I a^2}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (۴) \quad \frac{\mu_0 n I a}{2} \hat{\phi} \quad (۳) \quad \frac{\mu_0 n I r}{2} \hat{\phi} \quad (۲) \quad \frac{\mu_0 n I a^2}{2r} \hat{\phi} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» با اندکی تفکر و سپس با خنده بر لبان سؤال رو حل کنید.

میدان خارجی سیم پیچ نامحدود رو بلدین که. برابر صفره دیگه. پس از رابطه $\vec{B}_z = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA\phi)$ از همان ابتدا معلومه که گزینه‌های (۲) و (۳)

غلطاند، چون زمانی صفره که عبارت $rA\phi$ ثابت باشه، و از طرفی عدد π نباید ظاهر بشه چون از قضیه استوکس داریم $\vec{A}L = \vec{B}S$ که $S = \pi a^2$ و $L = 2\pi r$ پس عدد π از طرفین حذف میشه و گزینه (۱) جواب مسأله است.