فصل اول

«آنالیز برداری»

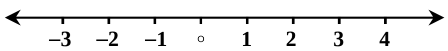
مقدمه

دوستان و همراهان عزیز قرار است از الان تا آخر کتاب یکدیگر را همراهی کنیم و با جزئیات الکترومغناطیس به طور کامل آشنا شویم. همان‌طور که می‌دانید، الکترومغناطیس یک کلمه ترکیبی از دو کلمه الکتریسیته و مغناطیس است. از آنجایی که الکتریسیته زودتر از مغناطیس کشف شد، ما هم بنای این کتاب را بر روی تاریخ آن می‌گذاریم و ابتدا الکتریسیته و سپس مغناطیس را آموزش می‌دهیم.

فصل اول این کتاب آنالیز برداری است. با یادگیری و درک صحیح مطالب این فصل در حل مسائل آنالیز برداری تا انتهای کتاب مشکلی نخواهید داشت. معمولاً در کتب درسی و تستی به این فصل کم لطفی می‌شود، ولی ما آن را به طور کامل همراه با نکات ارزشمندی به شما ارائه می‌کنیم. اگر متن درس را به طور کامل و دقیق بخوانید، نیازی به حفظ کردن فرمول‌ها ندارید و با حل کردن سؤال‌های متعدد کتاب، خودبه‌خود فرمول‌ها در ذهنتان حک می‌شوند؛ پس با ما همراه باشید.

محور مختصات

محور مختصات خطی است به طول بی‌نهایت که اعداد حقیقی از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت بر روی آن قرار می‌گیرند.

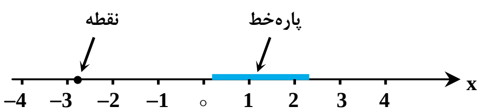


دستگاه‌های مختصات (از دید بعد)

دستگاه مختصات از محورهای مختصات تشکیل شده است. بسته به اینکه در دستگاه مختصات چند محور به کار رفته باشد به چند دسته تقسیم می‌شوند.

۱ــ دستگاه مختصات تک بعدی

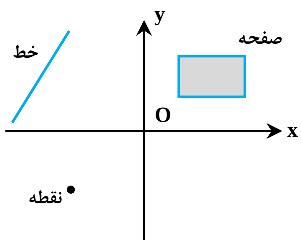
این دستگاه شامل یک محور مختصات است که معمولاً به صورت افقی است و به اسم محور x شهرت دارد. در این دستگاه می‌توانید نقطه روی محور و خط (خط، نیم‌خط، پاره‌خط) روی محور را نشان دهید.



۲ــ دستگاه مختصات دو بعدی

این دستگاه شامل دو محور مختصات عمود بر هم می‌باشد. معمولاً محور افقی محور x و محور عمودی محور y نامیده می‌شود. محل تلاقی این دو محور مبدأ مختصات را نشان می‌دهد که معمولاً با حرف انگلیسی "o" نامگذاری می‌شود.

در دستگاه دو بعدی می‌توان نقطه، خط و صفحه را نشان داد.



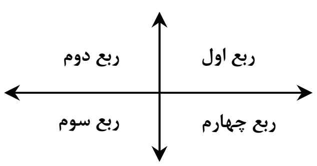
نکته۱: دستگاه دو بعدی صفحه را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کند که به هر یک از آن‌ها ربع می‌گوییم و آن‌ها را به صورت زیر نشان داده و تعریف می‌کنیم.

ربع اول: $x > 0$ و $y > 0$

ربع دوم: $x < 0$ و $y > 0$

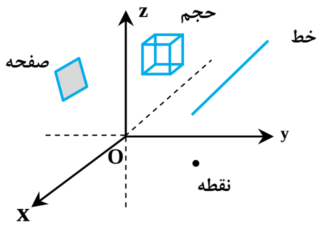
ربع سوم: $x < 0$ و $y < 0$

ربع چهارم: $x > 0$ و $y < 0$



۳ـ دستگاه مختصات سه بعدی

این دستگاه شامل سه محور مختصات عمود بر هم به نام‌های x، y و z می‌باشد. معمولاً به آنها محورهای طول (x)، عرض (y) و ارتفاع (z) هم می‌گویند. محل تلاقی این سه محور مبدأ مختصات را به وجود می‌آورد.



توجه: برای سادگی در نشان دادن این دستگاه، قسمت منفی محورهای مختصات با خط‌چین نشان داده شده است ولی معمولاً کشیده نمی‌شوند. در این دستگاه نقطه، خط، صفحه و یک جسم سه بعدی (حجم) را می‌توانیم نشان دهیم.

با این دستگاه زیاد کار داریم پس خوب به آن نگاه کنید.

نکته ۲: دستگاه سه بعدی، فضا را به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌کند. ۴ قسمتی که دارای ارتفاع مثبت هستند یعنی $z > 0$ است را اول فضا می‌نامند و ۴ قسمتی که دارای ارتفاع منفی هستند یعنی $z < 0$ است را دوم فضا می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$\frac{۱}{۸}$ اول فضا: $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ — $\frac{۱}{۸}$ دوم فضا: $x > 0$ و $y > 0$ و $z < 0$

$\frac{۲}{۸}$ اول فضا: $x > 0$ و $y < 0$ و $z > 0$ — $\frac{۲}{۸}$ دوم فضا: $x > 0$ و $y < 0$ و $z < 0$

$\frac{۳}{۸}$ اول فضا: $x < 0$ و $y < 0$ و $z > 0$ — $\frac{۳}{۸}$ دوم فضا: $x < 0$ و $y < 0$ و $z < 0$

$\frac{۴}{۸}$ اول فضا: $x < 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ — $\frac{۴}{۸}$ دوم فضا: $x < 0$ و $y > 0$ و $z < 0$

۴ـ دستگاه چهاربعدی

شامل دستگاه ۳ بعدی به اضافه یک محور به اسم محور زمان می‌باشد ولی ما با آن در این کتاب کاری نداریم.

توجه: در هر سه دستگاه تک‌بعدی، دوبعدی و سه بعدی محورهای مختصات مکانی وجود دارند.

کمیت

جوهر و بنیاد پدیده‌های فیزیکی و مخصوصاً الکترومغناطیس با دو نوع کمیت ساخته می‌شود که عبارتند از:

۱ـ کمیت‌های اسکالر که فقط با اندازه مشخص می‌شوند؛ مانند جرم (m)، دما $(^\circ C)$. برای توصیف این کمیت‌ها کافی است یک عدد ارائه کنید؛ مثل $1kg$، $30^\circ C$ و ... .

۲ـ کمیت‌های برداری که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز می‌باشند؛ مانند نیرو $(\vec{F})$، شتاب $(\vec{a})$.

کمیت‌های برداری را به اختصار بردار نیز می‌گوییم و چون تا آخر کتاب خیلی زیاد با آن سر و کار داریم، پس آن را به طور مفصل در قسمت بردار یاد می‌گیریم. برای تشخیص کمیت‌های برداری از کمیت‌های اسکالر، از علامت $(\rightarrow)$ روی کمیت‌های برداری استفاده می‌کنیم. اندازه یک بردار را نیز با استفاده از علامت قدرمطلق نشان می‌دهیم.

بردار

بردار ابزاری است برای توصیف کمیت‌هایی که هم اندازه دارند و هم جهت. در این کتاب برای نشان دادن یک بردار از یک حرف بزرگ لاتین به همراه یک فلش روی سر آن که همان نشانه‌ی بردار است، استفاده می‌کنیم: $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a}_A$

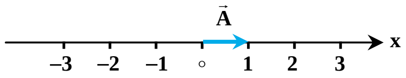
$|\vec{A}|$ اندازه بردار و $\hat{a}_A$ جهت بردار را نشان می‌دهد.

بردار واحد (یکّه)

همان‌طور که در بالا گفتیم یک بردار را با اندازه و جهت آن می‌شناسیم. جهت یک بردار توسط بردار یکه تعریف می‌شود. حالا بردار یکه چیست؟! بردار یکه، برداری است که اندازه آن یک می‌باشد و فقط جهت را نشان می‌دهد. اگر بردار $\vec{A}$ را بر اندازه آن تقسیم کنیم، برداری به دست می‌آید که اندازه آن برابر واحد بوده و جهت آن با جهت بردار $\vec{A}$ یکسان است. به این بردار، بردار واحد (یکّه) می‌گوییم.

$$\boxed{\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}}$$

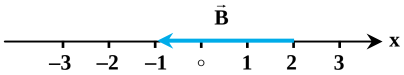
حالا می‌خواهیم بردار را با دستگاه‌هایی که یاد گرفتید تلفیق کنیم. آیا می‌توانید بردار نشان داده شده در شکل زیر را توصیف کنید.



بردار $\vec{A}$ دارای اندازه یک و در جهت محور x است؛ پس می‌توانیم بنویسیم: $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a}_A = ۱\hat{a}_x = \hat{a}_x$

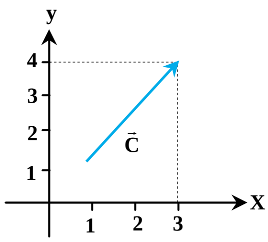
در واقع بردار $\vec{A}$ یک بردار یکه است چون اندازه آن برابر با یک است.

برای توصیف بردار $\vec{B}$ به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا اندازه آن را به دست می‌آوریم که برابر با ۳ است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید جهت بردار $\vec{B}$ خلاف جهت محور x ها است. بنابراین یک علامت منفی در جهت آن نیز لحاظ کردیم.



$$\vec{B} = ۳(-\hat{a}_x) = -۳\hat{a}_x$$

مثال۱: بردار زیر را توصیف کنید.



☑ **پاسخ:** این بردار ۲ واحد در جهت محور x ها و ۳ واحد در جهت محور y ها حرکت کرده است. بنابراین می‌توانیم بردار را اینگونه بنویسیم:

$$\vec{C} = ۲\hat{a}_x + ۳\hat{a}_y$$

سؤالی که ممکن است در این‌جا برای شما پیش آید، این است که بردار، یک اندازه و یک جهت دارد ولی اندازه بردار $\vec{C}$ چیست و جهت آن کدام است؟

اگر بخواهید برداری مثل $\vec{C}$ که دارای فرمت $\alpha\hat{a}_x + \beta\hat{a}_y$ می‌باشد را به روش کلی خودمان توصیف کنید، باید اندازه و جهت آن را به روش زیر به دست آورید.

$$|\vec{C}| = \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}$$

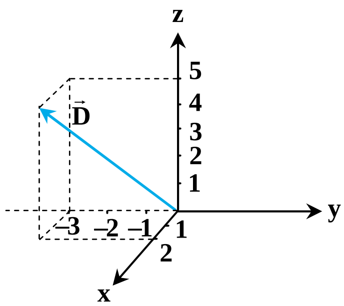
$$\hat{a}_C = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\alpha\hat{a}_x + \beta\hat{a}_y}{\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}}$$

پس بردار $\vec{C}$ در مثال فوق به صورت زیر هم نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} |\vec{C}| = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۳} \\ \hat{a}_c = \dfrac{۲\hat{a}_x + ۳\hat{a}_y}{\sqrt{۱۳}} \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = \sqrt{۱۳}\left(\frac{۲\hat{a}_x + ۳\hat{a}_y}{\sqrt{۱۳}}\right)$$

مثال۲: بردار $\vec{D}$ نشان داده شده در شکل مقابل را به صورت ریاضی‌وار بنویسید.

$$\mathbf{\vec{D} = ۲\hat{a}_x - ۳\hat{a}_y + ۵\hat{a}_z}$$



☑ **پاسخ:** اگر بخواهیم اندازه چنین برداری با فرمت $\alpha\hat{a}_x + \beta\hat{a}_y + \gamma\hat{a}_z$ را به دست آوریم، مقدار آن برابر است با:

$$|\vec{D}| = \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲}$$

و جهت آن هم به صورت زیر است:

$$\hat{a}_D = \frac{\vec{D}}{|\vec{D}|} = \frac{\alpha\hat{a}_x + \beta\hat{a}_y + \gamma\hat{a}_z}{\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲}}$$

بنابراین $\vec{D}$ را به شکل زیر هم می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} |\vec{D}| = \sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۴ + ۹ + ۲۵} = \sqrt{۳۸} \\ \hat{a}_D = \dfrac{۲\hat{a}_x - ۳\hat{a}_y + ۵\hat{a}_x}{\sqrt{۳۸}} \end{cases}$$

$$\vec{D} = |\vec{D}|\hat{a}_D = \sqrt{۳۸}\left(\frac{۲\hat{a}_x - ۳\hat{a}_y + ۵\hat{a}_z}{\sqrt{۳۸}}\right)$$

قواعد ساده برداری

تساوی بردارها

اگر گفتید چه موقع می‌گوییم دو بردار مساویند؟ بله درسته! در صورتی که اندازه و جهت دو بردار مثلاً $\vec{A}$ و $\vec{B}$ یکسان باشد، می‌گوییم که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ مساویند. اگر اندازه بردارها یکسان ولی جهت آنها خلاف یکدیگر است، آن دو بردار قرینه یکدیگر هستند.

ضرب بردار در کمیت اسکالر

اگر بردار $\vec{A}$ را در کمیت اسکالری مانند k ضرب کنیم، اندازه بردار $\vec{A}$، k برابر شده و برحسب اینکه k مثبت یا منفی باشد، جهت بردار $k\vec{A}$ همان جهت قبلی یا خلاف جهت اولیه خواهد بود.

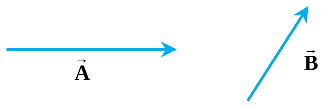
اگر بردار $\vec{A}$ را بر کمیت اسکالر تقسیم کنیم، مانند حالت ضرب عمل می‌کنیم؛ یعنی بردار $\vec{A}$ را در عکس کمیت اسکالر $(\frac{1}{k})$ ضرب می‌کنیم. $\frac{\vec{A}}{k}=\vec{A}(\frac{1}{k})$

در این حالت جهت بردار $\frac{\vec{A}}{k}$ مانند حالت ضرب عوض می‌شود؛ یعنی اگر k منفی باشد، جهت بردار $\frac{\vec{A}}{k}$ عکس جهت $\vec{A}$ شده و اگر k مثبت باشد، جهت آن همان جهت بردار $\vec{A}$ باقی می‌ماند.

جمع و تفریق بردارها

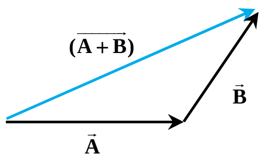
جمع بردارها

می‌خواهیم دو بردار دلخواه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با هم جمع کنیم.

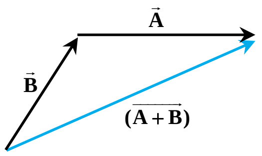


دو روش برای جمع کردن این دو بردار وجود دارد، به نام‌های روش مثلثی و روش متوازی‌الاضلاع.

روش مثلثی: در این روش ابتدای یکی از بردارها به انتهای بردار دیگر متصل می‌شود. پس ضلع سوم می‌ماند که باید سعی کنید آن را رسم کنید به طوری که ابتدای آن ابتدای بردار اولی و انتهای آن انتهای بردار دومی باشد.



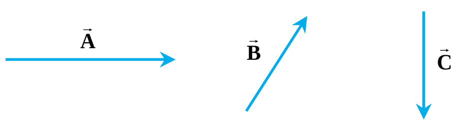
یک سؤال: به نظر شما اگر جای بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را عوض کنیم، یعنی بردار $\vec{B}$ بردار اول و بردار $\vec{A}$ بردار دوم شود، جهت و اندازه حاصل‌جمع این دو بردار عوض می‌شود؟ امتحانش مجانی است.



همان‌طور که دیدید تغییری به وجود نمی‌آید، پس می‌توانیم بگوییم جمع بردارها خاصیت جابجایی دارند.

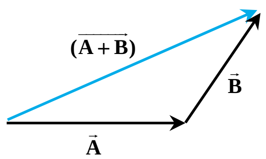
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

مثال ۳: سه بردار زیر را با هم جمع کنید.

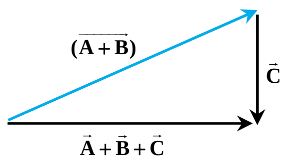


☑ **پاسخ:** ممکن است کمی گیج شده باشید و بگویید چطور سه بردار را با هم می‌توان جمع کرد، در حالی که فقط جمع دو بردار را می‌دانید. دو روش وجود دارد.

روش اول: ابتدا دو بردار دلخواه را جمع می‌کنیم، سپس حاصل آن را با بردار سوم جمع می‌کنیم.

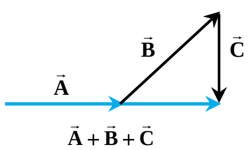


مرحله اول



مرحله دوم

روش دوم: تمامی بردارها را پشت سر هم قرار می‌دهید و سپس ضلع چهارم را رسم می‌کنید.

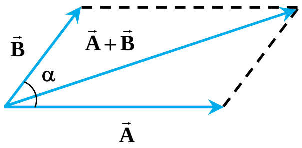


تذکر۱: فرقی نمی‌کند که کدام دو بردار را با هم جمع می‌کنید، یعنی جمع بردارها خاصیت شرکت‌پذیری دارند.

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=\vec{B}+(\vec{A}+\vec{C})$$

نکته۳: از این روش برای تفریق دو بردار هم استفاده می‌کنیم.

روش متوازی الاضلاع: در این روش دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم. حاصل جمع دو بردار، قطر متوازی‌الاضلاعی است که دو بردار اضلاع مجاور آن هستند و از رأس مشترک دو بردار رسم می‌شود.



این روش‌ها، روش‌های هندسی بودند ولی در دنیای تئوری چه اتفاقی می‌افتد؟! اگر بردار A و B را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$$

$$\vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$$

در حاصل‌جمع آنها مؤلفه‌های متناظر با یکدیگر جمع می‌شوند یعنی:

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{a}_x+(A_y+B_y)\hat{a}_y+(A_z+B_z)\hat{a}_z$$

تفریق بردارها

حال می‌پردازیم به تفریق بردارها. اگر زاویه بین دو بردار α باشد، اندازه مجموع و تفاضل دو بردار را می‌توانیم برحسب اندازه هر یک از بردارها به صورت زیر بنویسیم:

$$\boxed{|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^{۲}+|\vec{B}|^{۲}+۲|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}}$$

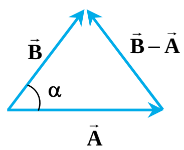
$$\boxed{|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^{۲}+|\vec{B}|^{۲}-۲|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}}$$

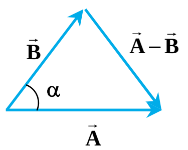
همان‌طور که مشاهده می‌کنید $\vec{A}-\vec{B}$ برابر با $\vec{B}-\vec{A}$ نیست. ولی $\vec{A}-\vec{B}=-(\vec{B}-\vec{A})$. یعنی فقط جهتشان با هم فرق دارد و خلاف جهت هم هستند.

تفریق برداری را نیز برحسب جمع برداری به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

به عبارتی می‌توانیم بگوییم که تفریق بردار $\vec{B}$ از $\vec{A}$ $(\vec{A}-\vec{B})$ یعنی مجموع بردار $\vec{A}$ و قرینه بردار $\vec{B}$





مثال۴: **زاویه بین دو بردار $\vec{A}=۲\hat{i}+۳\hat{j}-۳\hat{k}$ و $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ را با استفاده از رابطه اندازه مجموع دو بردار بیابید.**

☑ **پاسخ:** حاصل جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با:

$$\vec{A}+\vec{B}=۳\hat{i}+۴\hat{j}-۴\hat{k}\Rightarrow|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}+(-۴)^{۲}}=\sqrt{۴۱}$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{۲^{۲}+۳^{۲}+(-۳)^{۲}}=\sqrt{۲۲}\ ,\ |\vec{B}|=\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^{۲}+|\vec{B}|^{۲}+۲|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}\Rightarrow\sqrt{۴۱}=\sqrt{۲۲+۳+۲\sqrt{۲۲}\sqrt{۳}\cos\alpha}\Rightarrow ۴۱=۲۵+۲\sqrt{۶۶}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۸}{\sqrt{۶۶}}\Rightarrow\alpha\approx ۱۰^{\circ}$$

ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی یا ضرب اسکالر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با علامت «۰» نشان می‌دهیم که یک کمیت اسکالر است و اندازه آن برابر با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو بردار و کسینوس زاویه بین آنها است. با فرض اینکه θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد، ضرب داخلی آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

همین جا این را بگوییم که در ضرب داخلی بردارها، قوانین جابجایی و توزیع‌پذیری صادق است اما قانون شرکت‌پذیری نه.

$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

$\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})\neq(\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$

در مختصات دکارتی اگر دو بردار $\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$ و $\vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$ را داده باشند، ضرب داخلی آنها را از رابطه زیر می‌توانید به دست آورید:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

به نکات زیر در مورد ضرب داخلی توجه کنید:

۱ـ ضرب داخلی علاوه بر ضرب اسکالر به ضرب نقطه‌ای هم معروف است و دلیل آن هم، استفاده از علامت نقطه در میان دو بردار به جای علامت ضرب می‌باشد $(\vec{A}.\vec{B})$.

۲ـ ضرب داخلی یک بردار با خودش برابر مربع اندازه آن بردار است. $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$

دلیل آن، این است که زاویه یک بردار با خودش صفر درجه می‌باشد و بنابراین می‌توانیم اینگونه بنویسیم: $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2\cos(0)=|\vec{A}|^2$

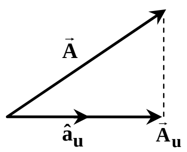
۳ـ ضرب داخلی دو بردار، کوچکتر یا برابر با حاصلضرب اندازه‌های آنهاست، زیرا همواره $\cos\theta\leq 1$ است. $\vec{A}.\vec{B}\leq|\vec{A}|.|\vec{B}|$

فرض کنید $\hat{a}_u$ یک بردار یکه در یک جهت دلخواه باشد که ضرب داخلی آن با بردار $\vec{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{A}.\hat{a}_u=|\vec{A}||\hat{a}_u|\cos(\vec{A},\hat{a}_u)=|\vec{A}|\cos(\vec{A},\hat{a}_u)=|\vec{A}_u|=A_u$$

$$\vec{A}_u=|A_u|\hat{a}_u$$

به شکل روبه‌رو نگاه کنید. در این‌جا $\cos(\vec{A},\hat{a}_u)$، کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\hat{a}_u$ است و $\vec{A}_u$ تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار یکه $\hat{a}_u$ می‌باشد. این یک نتیجه ساده ولی مهم می‌باشد.



تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر

مطلبی را که در بالا گفتیم، همین مفهوم را می‌رساند. یعنی برای پیدا کردن طول تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$، اول باید بردار یکّه که جهت $\vec{B}$ را نشان می‌دهد به دست آوریم و سپس ضرب داخلی آن را با بردار $\vec{A}$. حاصل این ضرب داخلی طول تصویر بردار $\vec{A}$ به روی بردار $\vec{B}$ می‌شود که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}=\vec{A}.\hat{a}_B=\vec{A}.\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}}\qquad(۱)$$

فراموش نکنید که $\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}$ یک اسکالر است و بردار نیست. چرا؟ به این دلیل که هم حاصل ضرب $\vec{A}.\vec{B}$ اسکالر است و هم اندازه بردار $\vec{B}$. پس اگر تصویر بردار $\vec{A}$ به روی بردار $\vec{B}$ را از ما بخواهند، باید مقدار $\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}$ را در جهت بردار $\vec{B}$ (که همان بردار یکه $\vec{B}$ می‌باشد) ضرب کنیم.

پس به این صورت می‌توان نوشت:

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}\ \hat{a}_B=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\vec{B}}\qquad(۲)$$

مثال۵: طول تصویر بردار $\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}$ بر بردار $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دقت کنید که در این‌جا طول تصویر بردار $\vec{A}$ به روی بردار $\vec{B}$ خواسته شده است. بنابراین از رابطه اول استفاده می‌کنیم که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Proj_{\vec{B}}^{\vec{A}}=\frac{|\vec{A}.\vec{B}|}{|\vec{B}|}=\frac{|2\times1+(-1)\times1+0\times1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال ۶: تصویر بردار $\vec{A}=-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ بر روی بردار $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\hat{i}-\frac{1}{4}\hat{j}+\frac{1}{2}\hat{k}$ ۲) $\frac{4}{9}\hat{i}-\frac{2}{9}\hat{j}+\frac{4}{9}\hat{k}$ ۳) $\frac{-2}{9}\hat{i}-\frac{4}{9}\hat{j}+\frac{6}{9}\hat{k}$ ۴) $\frac{-1}{4}\hat{i}-\frac{1}{4}\hat{j}+\frac{3}{4}\hat{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» این مثال بردار تصویر را از ما خواسته است. پس ابتدا باید طول تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ را به دست آوریم و سپس آن را در بردار یکّه بردار $\vec{B}$ ضرب می‌کنیم. یا این که می‌توانیم مستقیم از رابطه دوم استفاده کنیم که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Proj_{\vec{B}}^{\vec{A}}=(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|})\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^2})\vec{B}=(\frac{(-1)\times2+2\times(-1)+3\times2}{(\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2})^2})(2,-1,2)=\frac{2}{9}(2,-1,2)=\frac{4}{9}\hat{i}-\frac{2}{9}\hat{j}+\frac{4}{9}\hat{k}$$

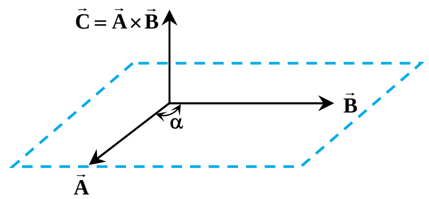
نکته۴: در صورتی دو بردار $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$ و $\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$ بر هم عمودند که حاصل‌ضرب داخلی آنها برابر صفر گردد.

$$\vec{A}\perp\vec{B}\Leftrightarrow A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0$$

همچنین در صورتی دو بردار $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$ و $\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$ با هم موازیند که نسبت مؤلفه‌های متناظر آنها با هم برابر باشد، یعنی:

$$\vec{A}\parallel\vec{B}\Leftrightarrow\frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}$$

ضرب خارجی دو بردار



و اما ضرب خارجی دو بردار چگونه به دست می‌آید؟! ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که با علامت «×» نشان داده می‌شود، بردار دیگری مانند $\vec{C}$ است که اندازه آن مساوی حاصل‌ضرب اندازه‌های $\vec{A}$ در $\vec{B}$ و سینوس زاویه بین آنها می‌باشد.

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha}$$

واضح است که $|\vec{A}\times\vec{B}|$ مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

همان‌طور که در شکل هم می‌بینید، بردار $\vec{C}$ برداری عمود بر صفحه است که شامل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

حتما با قاعده دست راست آشنا هستید؟ چرا پرسیدم؟ برای این که جهت بردار $\vec{C}$ با توجه به قاعده دست راست تعیین می‌شود. یعنی اگر جهت بسته شدن انگشتان دست راست از بردار $\vec{A}$ به طرف بردار $\vec{B}$ باشد، انگشت شست جهت بردار $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ را نشان می‌دهد. در ضرب خارجی بردارها، قوانین جابجایی و شرکت‌پذیری صادق نیست، ولی قانون توزیع‌پذیری صادق است، (عکس ضرب داخلی).

$$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}\quad,\quad\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\quad,\quad\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

در مختصات دکارتی اگر دو بردار $\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$ و $\vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$ را داشته باشیم، ضرب خارجی آنها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=[(A_yB_z-A_zB_y)\hat{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{a}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{a}_z]}$$

مثال ۷: مختصات بردار واحد (یکه) عمود بر دو بردار $\vec{A}=۴\hat{i}-\hat{j}+۳\hat{k}$ و $\vec{B}=-۲\hat{i}+\hat{j}-۲\hat{k}$ کدام است؟

۱) $(۱,-۲,۲)$ ۲) $(\frac{۱}{۳},\frac{-۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۳) $(\frac{-۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۴) $(-۱,۲,۲)$

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که گفتیم، بردار عمود بر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر حاصل‌ضرب خارجی آن دو بردار می‌باشد. پس می‌توانیم بنویسیم:

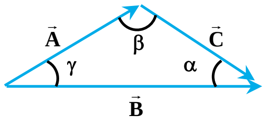
$$\vec{N}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ۴ & -۱ & ۳\\ -۲ & ۱ & -۲\end{vmatrix}=(-۱,۲,۲)$$

حالا بردار واحد متناظر با $\vec{N}$ را به دست می‌آوریم:

$$\hat{a}_N=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{(-۱,۲,۲)}{\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲+(۲)^۲}}=(\frac{-۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$$

توجه کنید که ضرب خارجی یک بردار با خودش برابر با صفر است، زیرا در این حالت زاویه بین دو بردار صفر و $\sin\theta$ برابر با صفر خواهد بود.
در اینجا شما را با قانونی به نام قانون سینوس‌ها آشنا می‌کنیم. قانون سینوس‌ها بیان می‌کند که در هر مثلثی رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\sin\alpha}{|\vec{A}|}=\frac{\sin\beta}{|\vec{B}|}=\frac{\sin\gamma}{|\vec{C}|}$$



اثبات: کافی است طرفین رابطه $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$ را در بردار $\vec{A}$ ضرب خارجی کنیم:

$$\vec{A}\times(\vec{A}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}\rightarrow\underbrace{\vec{A}\times\vec{A}}_{۰}+\vec{A}\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

$$|\vec{A}||\vec{C}|\sin(\pi-\beta)=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\gamma\Rightarrow\frac{\sin\beta}{|\vec{B}|}=\frac{\sin\gamma}{|\vec{C}|}$$

با ضرب خارجی طرفین رابطه $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$ در بردار $\vec{C}$ به رابطه مقابل می‌رسیم:

$$\frac{\sin\alpha}{|\vec{A}|}=\frac{\sin\beta}{|\vec{B}|}$$

بنابراین قانون سینوس‌ها اثبات می‌شود.

ضرب سه بردار

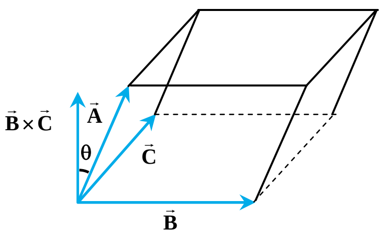
دو نوع ضرب برای ضرب ۳ بردار می‌توان در نظر گرفت که عبارتند از:

۱ـ ضرب سه گانه عددی: ابتدا دو بردار را ضرب خارجی می‌کنیم، سپس حاصل آن را که یک بردار است، در بردار سوم ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=|\vec{A}||\vec{B}\times\vec{C}|\cos\theta$$

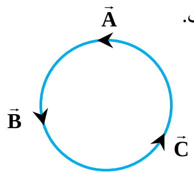
که در آن θ زاویه بین بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}\times\vec{C}$ است.

مطابق شکل مقابل، $|\vec{A}|\cos\theta$ در واقع ارتفاع متوازی‌السطوح ساخته شده توسط سه بردار است و همان‌طورکه قبلاً نیز اشاره شد، $|\vec{B}\times\vec{C}|$ مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $\vec{B}$ و $\vec{C}$ است. از این رو حاصل‌ضرب سه گانه عددی حجم متوازی‌السطوح است و برای آن رابطه زیر صادق است.



$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$$

این رابطه به سادگی از روی جایگشت دورانی شکل زیر نوشته شده است.



و اگر سه بردار را به صورت زیر داشته باشیم:

$$\vec{A}=a_۱\hat{i}+b_۱\hat{j}+c_۱\hat{k}\quad,\quad\vec{B}=a_۲\hat{i}+b_۲\hat{j}+c_۲\hat{k}\quad,\quad\vec{C}=a_۳\hat{i}+b_۳\hat{j}+c_۳\hat{k}$$

ضرب سه گانه عددی به این صورت به دست می‌آید:

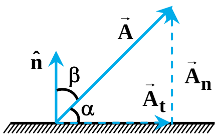
$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}a_۱ & b_۱ & c_۱\\ a_۲ & b_۲ & c_۲\\ a_۳ & b_۳ & c_۳\end{vmatrix}=a_۱(b_۲c_۳-c_۲b_۳)+b_۱(c_۲a_۳-a_۲c_۳)+c_۱(a_۲b_۳-b_۲a_۳)$$

۲ـ ضرب سه گانه برداری:

برای ضرب سه گانه برداری قاعده‌ای معروف به قاعده $BAC-CAB$ داریم (شما هم به همین راحتی می‌توانید آن را حفظ کنید).

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

تجزیه بردار



اگر بردار $\vec{A}$ با سطح مشخصی زاویه α بسازد، در این صورت می‌توانیم آن را به دو راستای مماس بر سطح $(\vec{A}_t)$ و عمود بر سطح $(\vec{A}_n)$ تجزیه کنیم که به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\vec{A}=\vec{A}_t+\vec{A}_n$$

خب! در صورتی که بردار واحد عمود بر سطح $\hat{n}$ باشد، اندازه تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\hat{n}$ را چگونه به دست می‌آورید؟ بسیار ساده است. با توجه به روابطی که در قسمت قبل گفتیم، به صورت روبرو به دست می‌آید:

$$|\vec{A}_n|=\vec{A}.\hat{n}$$

همچنین تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\hat{n}$ به صورت مقابل است:

$$\vec{A}_n=|\vec{A}_n|.\hat{n}=(\vec{A}.\hat{n})\hat{n}$$

و اگر بردار واحد مماس بر سطح را به صورت $\hat{t}$ در نظر بگیریم، $\vec{A}_t$، مانند رابطه‌ی بالا به صورت $(\vec{A}.\hat{t})\hat{t}$ به دست می‌آید. البته بدون داشتن بردار $\hat{t}$ هم می‌توانیم از بردار $\vec{A}$ و $\vec{A}_n$، بردار $\vec{A}_t$ را به دست آوریم که به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$\vec{A}=\vec{A}_n+\vec{A}_t\ \Rightarrow\vec{A}_t=\vec{A}-\vec{A}_n$$

$\text{tg}\alpha$ هم از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\text{tg}\alpha=\frac{|\vec{A}_n|}{|\vec{A}_t|}$$

و اگر β زاویه بین بردار $\vec{A}$ و بردار عمود بر سطح باشد، خواهیم داشت:

$$\text{tg}\beta=\frac{|\vec{A}_t|}{|\vec{A}_n|}$$

مثال ۸: بردار $\vec{A}=۲\hat{a}_x+۳\hat{a}_y+z\hat{a}_z$ با صفحه xy زاویه ۳۰° می‌سازد. مقدار z تقریباً چقدر است؟

۱) ۱	۲) ۲/۱	۳) ۳/۲	۴) ۴/۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تجزیه بردار $\vec{A}$ روی صفحه xy به صورت زیر است:

$$\vec{A}_t=۲\hat{a}_x+۳\hat{a}_y\ ,\ \vec{A}_n=z\hat{a}_z$$

$$\text{tg}\alpha=\frac{|\vec{A}_n|}{|\vec{A}_t|}\Rightarrow|\vec{A}_n|=|\vec{A}_t|\text{tg}\alpha\Rightarrow z=\sqrt{۱۳}\text{tg}۳۰^\circ\Rightarrow z=\sqrt{۱۳}.\frac{۱}{\sqrt{۳}}\approx۲/۱$$

معادله صفحه و خط در فضا

فرض کنید $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ مختصات یک نقطه از صفحه و بردار $\vec{N}(a,b,c)$ عمود بر صفحه باشد. در این صورت معادله صفحه به صورت زیر خواهد بود:

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$$

بنابراین در معادله این صفحه که به صورت $ax+by+cz=d$ است، ضرایب a و b و c مؤلفه‌های بردار عمود بر صفحه هستند. پس بردار واحد عمود بر چنین صفحه‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\hat{a}_n=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{a\hat{a}_x+b\hat{a}_y+c\hat{a}_z}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}}$$

همچنین اگر $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ مختصات یک نقطه از خط و بردار $\vec{N}(a,b,c)$ موازی خط باشد ($\vec{N}$ را بردار هادی خط نیز می‌نامند)، معادله خط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c}$$

تذکر ۲: اگر $N_۱(a_۱,b_۱,c_۱)$ و $N_۲(a_۲,b_۲,c_۲)$ بردارهای عمود بر دو صفحه باشند، آنگاه بردار هادی خط مربوط به فصل مشترک دو صفحه برابر حاصل‌ضرب خارجی $N_۱$ و $N_۲$ خواهد بود. $(\vec{V}=\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲)$

مثال ۹: معادله خط گذرنده از نقطه $(-۲,۳,۴)$ و موازی صفحات $۲x+۳y+۴z=۵$ و $۳x+۴y+۵z=۶$ کدام است؟

۱) $\frac{x+۲}{۱}=\frac{y-۳}{۱}=\frac{z-۲}{-۲}$ ۲) $\frac{x+۲}{۲}=\frac{y-۳}{۱}=\frac{z-۴}{-۱}$ ۳) $\frac{x+۲}{۱}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-۴}{-۱}$ ۴) $\frac{x+۲}{-۱}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-۴}{-۱}$

پاسخ: گزینه «۴» چون معادله خط موازی با دو صفحه خواسته شده است، می‌توانیم معادله خطی که موازی با خط فصل مشترک دو صفحه است را به دست آوریم. برای این که خطی که با خط فصل مشترک دو صفحه موازی باشد حتماً با خود دو صفحه موازی است. اینجاست که تذکر ۲ به کمک ما می‌آید تا بردار هادی خط مربوطه را به دست آوریم. ابتدا به سراغ بردارهای عمود بر دو صفحه می‌رویم. با توجه به معادله دو صفحه داده شده، بردارهای عمود بر آنها عبارتند از: $N_۱=(۲,۳,۴)$ و $N_۲=(۳,۴,۵)$. حال برای به دست آوردن بردار هادی خط مربوطه باید جواب ضرب خارجی $N_۱$ و $N_۲$ را پیدا کنیم:

$$V=N_۱\times N_۲=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ ۲ & ۳ & ۴\\ ۳ & ۴ & ۵\end{vmatrix}=(-۱,۲,-۱)$$

و حالا! یک نقطه از خط که داده شده است، بردار هادی آن را هم که در بالا به دست آوردیم؛ پس می‌توانیم معادله‌ی خط خواسته شده را به این صورت بنویسیم:

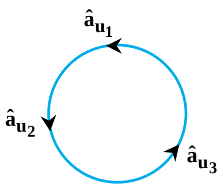
$$\frac{x+۲}{-۱}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-۴}{-۱}$$

نکته ۵: اگر معادله $f(x,y,z)=۰$ بیانگر یک سطح (رویه) فضایی باشد، بردار واحد عمود بر این رویه در هر نقطه دلخواه مانند $(x_۰,y_۰,z_۰)$ بر روی رویه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\hat{n}=\left.\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^۲+(\frac{\partial f}{\partial y})^۲+(\frac{\partial f}{\partial z})^۲}}\right|_{\substack{x=x_۰\\ y=y_۰\\ z=z_۰}}$$

دستگاه‌های مختصات متعامد

در فضای سه بعدی یک نقطه می‌تواند از محل تقاطع سه سطح حاصل شود. اگر سه سطح دو به دو بر هم عمود باشند، یک دستگاه مختصات متعامد داریم. فرض کنید این سطوح با معادلات $u_۱=$ ثابت و $u_۲=$ ثابت و $u_۳=$ ثابت تعریف شوند که در آن u_iها لزوماً دارای بعد طول نیستند. در دستگاه دکارتی، $u_۱$ و $u_۲$ و $u_۳$ به ترتیب متناظر با x و y و z هستند. اگر بردار عمود بر سطح $u_i=$ ثابت را با $\hat{a}_{u_i}$ نشان دهیم، روابط مقابل برقرار خواهند بود:



$$\begin{cases}\hat{a}_{u_۱}\times\hat{a}_{u_۲}=\hat{a}_{u_۳}\\ \hat{a}_{u_۲}\times\hat{a}_{u_۳}=\hat{a}_{u_۱}\\ \hat{a}_{u_۳}\times\hat{a}_{u_۱}=\hat{a}_{u_۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{a}_{u_۱}.\hat{a}_{u_۲}=\hat{a}_{u_۲}.\hat{a}_{u_۳}=\hat{a}_{u_۳}.\hat{a}_{u_۱}=۰\\ \hat{a}_{u_۱}.\hat{a}_{u_۱}=\hat{a}_{u_۲}.\hat{a}_{u_۲}=\hat{a}_{u_۳}.\hat{a}_{u_۳}=۱\end{cases}$$

برای به دست آوردن حاصل ضرب خارجی بردارهای پایه در دستگاه $(u_۱,u_۲,u_۳)$ یا از قانون دست راست استفاده می‌کنیم یا از شکل دایره‌ی بالا. قانون دست راست را که بلدید و دیگر نمی‌گوییم. اما شکل دایره! به این صورت است که حاصل ضرب خارجی هر دو جمله متوالی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت جمله سوم می‌شود. اگر این عمل را در جهت عقربه‌های ساعت انجام دهیم، مانند روند بالا عمل می‌کنیم، با این اختلاف که حاصل ضرب در یک منفی ضرب می‌شود.

هر بردار $\vec{A}$ می‌تواند به صورت مجموع مؤلفه‌های خود در سه جهت متعامد به صورت مقابل نوشته شود: $\vec{A}=A_{u_۱}\hat{a}_{u_۱}+A_{u_۲}\hat{a}_{u_۲}+A_{u_۳}\hat{a}_{u_۳}$

و این هم اندازه بردار $\vec{A}$:

$$\boxed{|\vec{A}|=\sqrt{(A_{u_۱})^۲+(A_{u_۲})^۲+(A_{u_۳})^۲}}$$