آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم؛ $y''+\frac{x}{x^2(1-x)}y'+\frac{1}{x^2(1-x)}y=0$. در نتیجه تابع $p(x)=\frac{1}{x(1-x)}$ و $q(x)=\frac{1}{x^2(1-x)}$ است. واضح است که $x_0=0$ و $x_0=1$ نقاط غیرعادی معادله هستند. اما آیا این نقاط منظم هستند یا نامنظم؟ برای این منظور حدهای p_0 و q_0 را در نقاط موردنظر محاسبه می‌کنیم:

$$x_0=0 \Rightarrow \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0} x\frac{1}{x(1-x)}=1 \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0} x^2\frac{1}{x^2(1-x)}=1 \end{cases} \Rightarrow$$
به دلیل موجود بودن هر دو حد، پس $x_0=0$ نقطه غیرعادی منظم است.

$$x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{x(1-x)}=-1 \\ q_0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\frac{1}{x^2(1-x)}=0 \end{cases} \Rightarrow$$
به دلیل موجود بودن هر دو حد، پس $x_0=1$ نقطه غیرعادی منظم است.

۲ـ گزینه «۴» ابتدا معادله را بر $(x-1)$ تقسیم کرده تا به فرم استاندارد تبدیل شود:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\cot\pi x}{(x-1)}\frac{dy}{dx}+\frac{\operatorname{cosec}^2\pi x}{x-1}y=0 \Rightarrow y''+\frac{\cos\pi x}{(x-1)\sin\pi x}y'+\frac{1}{(x-1)\sin^2\pi x}y=0$$

دو تابع $P(x)$ و $q(x)$ به دست آمدند. چون $x_0=1$ و $x_0=0$ هر دو مخرج کسرها را صفر می‌کنند پس نقاط غیرعادی معادله هستند.

۳ـ گزینه «۳» از آنجا که $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی معادله است و حدهای $P_0=\frac{1}{4}$ و $q_0=\frac{1}{8}$ موجود هستند پس این نقطه غیرعادی منظم می‌باشد. و ریشه‌های معادله مشخصه متناظر عبارتند از:

$$r^2+(P_0-1)r+q_0=0 \Rightarrow r^2+(\frac{1}{4}-1)r+\frac{1}{8}=0 \Rightarrow r^2-\frac{3}{4}r+\frac{1}{8}=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=\frac{1}{2} \\ r_2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

۴ـ گزینه «۳» چون ریشه‌های مخرج $p(x)=q(x)=\frac{1}{2+x^2}$ برابر $\pm i\sqrt{2}$ هستند و به فاصله $|\pm i\sqrt{2}-1|=\sqrt{(\pm\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$ از $x_0=1$ قرار دارند، شعاع همگرایی $R=\sqrt{3}$ است.

۵ـ گزینه «۴» ضریب x^2 از رابطه $c_2=\frac{y''(0)}{2!}$ و ضریب x^3 از رابطه $c_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌شود. با مشتق‌گیری از معادله و جایگذاری شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} y''-xy'=e^{-x} \\ y'''-y'-xy''=-e^{-x} \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری شرایط اولیه}} \begin{cases} y''(0)=1 \\ y'''(0)-(-3)-0=-1 \Rightarrow y'''(0)=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_2=\frac{y''(0)}{2}=\frac{1}{2} \quad \& \quad c_3=\frac{y'''(0)}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

۶ـ گزینه «۱» برای نقطه $x_\circ=\circ$ که از نوع عادی است باید ضرایب سری جواب عمومی $y(x)$ را تعیین کرد. با توجه به اینکه جمله عمومی بسط تیلور سری $y(x)$ حول $x_\circ=\circ$ به‌صورت $C_n=\dfrac{y^{(n)}(\circ)}{n!}$ است و گزینه‌ها تا جمله $C_۴$ داده شده‌اند پس دوبار از معادله مشتق می‌گیریم تا به ضابطه $y^{(۴)}(x)$ و پس از آن به $C_۴$ دست یابیم.

$$\begin{cases} y''+۴y'+۶xy=\circ \\ y'''+۴y''+۶y+۶xy'=\circ \\ y^{(۴)}+۴y'''+۶y'+۶y'+۶xy''=\circ \end{cases} \xrightarrow[y'(\circ)=C_۱,\,y(\circ)=C_\circ]{\text{جایگذاری } x=\circ \text{ درمعادله}} \begin{cases} y''(\circ)+۴C_۱+\circ=\circ \Rightarrow y''(\circ)=-۴C_۱ \\ y'''(\circ)+۴y''(\circ)+۶C_\circ=\circ \Rightarrow y'''(\circ)=۱۶C_۱-۶C_\circ \\ y^{(۴)}(\circ)+۴y'''(\circ)+۱۲C_۱+\circ=\circ \Rightarrow y^{(۴)}(\circ)=-۷۶C_۱+۲۴C_\circ \end{cases}$$

پس از تعیین مشتقات به سادگی ضرایب را محاسبه می‌کنیم و در ادامه جواب عمومی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} C_۲=\dfrac{y''(\circ)}{۲}=\dfrac{-۴C_۱}{۲}=-۲C_۱ \\ C_۳=\dfrac{y'''(\circ)}{۳!}=\dfrac{۱۶C_۱-۶C_\circ}{۶}=\dfrac{-۳C_\circ+۸C_۱}{۳} \\ C_۴=\dfrac{y^{(۴)}(\circ)}{۴!}=\dfrac{-۷۶C_۱+۲۴C_\circ}{۲۴}=\dfrac{۶C_\circ-۱۹C_۱}{۶} \end{cases}$$

$$y(x)=C_\circ+C_۱x-۲C_۱x^۲+(\frac{-۳C_\circ+۸C_۱}{۳})x^۳+(\frac{۶C_\circ-۱۹C_۱}{۶})x^۴+\cdots$$

۷ـ گزینه «۳» معادله مشخصه را در $x_\circ=\circ$ به‌دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

$$\Rightarrow r^۲+(p_\circ-۱)r+q_\circ=\circ \Rightarrow r^۲+۲r+۱=\circ \Rightarrow r_۱,r_۲=-۱\ ,\ (r_۱-r_۲)=\circ\in Z$$

در نتیجه جواب‌های معادله دیفرانسیل مفروض $y_۱=x^{-۱}\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}C_nx^n$ و $y_۲=y_۱Lnx+x^{-۱}\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}d_nx^n$ است.

۸ـ گزینه «۲» ابتدا معادله را بر x تقسیم کرده و برای فرم استاندارد معادله یعنی $y''+\frac{۲}{x}y'+y=\circ$، مقادیر $p_\circ=\lim\limits_{x\to\circ}x\frac{۲}{x}=۲$ و $q_\circ=\lim\limits_{x\to\circ}x^۲=\circ$ و همچنین معادله مشخصه $r^۲+(p_\circ-۱)r+q_\circ=r^۲+r=\circ$ را تعیین می‌کنیم. معادله مشخصه دارای ریشه‌های $r_۱=\circ$ و $r_۲=-۱$ است. پایه جواب اول به شکل سری فربنیوسی $y_۱=x^\circ\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}C_۱x^n$ است. اما چون اختلاف ریشه‌ها عدد صحیح است پس پایه جواب دوم طبیعت لگاریتمی دارد و به صورت $y_۲=ay_۱(x)Lnx+x^{-۱}\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}d_nx^n$ است.

۹ـ گزینه «۱» با جایگذاری $y''=\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}n(n-۱)C_nx^{n-۲}$ در معادله داریم:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}n(n-۱)C_nx^{n-۲}+\sum_{n=\circ}^{\infty}C_nx^{n+۱}=\circ \xrightarrow[\text{در سری نخست}]{\text{تبدیل } n-۲ \text{ به } n+۱}\sum_{n=-۲}^{\infty}(n+۳)(n+۲)C_{n+۳}x^{n+۱}+\sum_{n=\circ}^{\infty}C_nx^{n+۱}=\circ$$

از سری اول ۳ جمله نخست را استخراج کرده تا شروع حد پایین سری از $n=\circ$ شود.

$$\circ+\circ+۲C_۲x^\circ+\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+۳)(n+۲)C_{n+۳}x^{n+۱}+\sum_{n=\circ}^{\infty}C_nx^{n+۱}=۲C_۲+\sum_{n=\circ}^{\infty}[(n+۳)(n+۲)C_{n+۳}+C_n]x^{n+۱}=\circ$$

برای برقراری تساوی فوق باید علاوه بر $C_۲=\circ$، جمله عمومی سری نیز صفر شود، یعنی:

$$(n+۳)(n+۲)C_{n+۳}+C_n=\circ \Rightarrow C_{n+۳}=-\frac{C_n}{(n+۳)(n+۲)} \xrightarrow{n\to n-۱} C_{n+۲}=-\frac{C_{n-۱}}{(n+۲)(n+۱)}\quad ;\quad n\geq ۱$$

۱۰ـ گزینه «۲» می‌توان با جایگذاری سری در معادله دیفرانسیل رابطه بازگشتی c_n را تعیین کرد اما به جای استفاده از روش معمول روش سریع را به کار گرفته و معادل جملات y''، xy' و $3y$ را محاسبه کرده و در معادله قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y''=x^{0}y''\equiv(n+2)(n+1)C_{n+2} \\ xy'\equiv nC_n \\ 3y\equiv 3C_n \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} (n+2)(n+1)C_{n+2}+nC_n+3C_n=0 \Rightarrow \frac{C_n}{C_{n+2}}=-\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}$$

۱۱ـ گزینه «۲» معادله دیفرانسیل اول لژاندر مرتبه ۲ و معادله دوم لژاندر مرتبه ۳ است. در نتیجه جواب آن‌ها به ترتیب $p_2(x)$ و $p_3(x)$ است. چون مقدار توابع ذکر شده در $x=1$ برابر یک است پس $f(x)=p_2(x)$ و $g(x)=p_3(x)$. در نتیجه انتگرال خواسته شده به فرم جدید زیر بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_{-1}^{1}(f(x)+g(x)+x^2)^2dx=\int_{-1}^{1}(p_2+p_3+x^2)^2dx=\int_{-1}^{1}[p_2^2+p_3^2+(x^2)^2+2p_2p_3+2x^2p_2+2x^2p_3]dx$$

$$\Rightarrow I=\underbrace{\int_{-1}^{1}p_2^2(x)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{-1}^{1}p_3^2(x)dx}_{I_2}+\underbrace{\int_{-1}^{1}x^4dx}_{I_3}+\underbrace{2\int_{-1}^{1}p_2(x)p_3(x)dx}_{I_4}+\underbrace{2\int_{-1}^{1}x^2p_2(x)dx}_{I_5}+\underbrace{2\int_{-1}^{1}x^2p_3(x)dx}_{I_6}$$

از ۶ انتگرال فوق حاصل ۲ انتگرال صفر است. انتگرال I_4 به دلیل مخالف بودن اندیس p_2 و p_3 صفر است و انتگرال I_6 به‌دلیل فرد بودن تابع زیر انتگرال (x^2 زوج و p_3 فرد است که حاصلضرب آنها تشکیل تابعی فرد می‌دهد). دو انتگرال I_1 و I_2 را با توجه به خاصیت تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر محاسبه می‌کنیم، حالا انتگرال I_3 و I_5 را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{1}p_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}\Rightarrow\begin{cases} I_1=\frac{2}{5} \\ I_2=\frac{2}{7}\end{cases}$$

$$I_3=\int_{-1}^{1}x^4dx=2\int_{0}^{1}x^4dx=2\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{2}{5}\Rightarrow I_3=\frac{2}{5}$$

$$I_5=2\int_{-1}^{1}x^2p_2(x)dx\xrightarrow{p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)}I_5=2\int_{-1}^{1}x^2\frac{3x^2-1}{2}dx=2\int_{0}^{1}(3x^4-x^2)dx=2\left(\frac{3x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow I_5=2\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{15}\Rightarrow I_5=\frac{8}{15}\Rightarrow I=\sum_{i=1}^{6}I_i=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{5}+\frac{8}{15}=\frac{170}{105}=\frac{12}{7}$$

۱۲ـ گزینه «۳» اگر دقت کنید تابع x^4 را می‌توان برحسب $P_n(x)$ بسط داد، یعنی $x^4=C_0P_0+C_1P_1+\cdots+C_4P_4$ اگر این رابطه را در انتگرال خواسته شده جایگذاری کنیم داریم:

$$I=\int_{-1}^{1}x^4P_6(x)dx=C_0\int_{-1}^{1}P_0P_6dx+C_1\int_{-1}^{1}P_1P_6dx+\cdots+C_4\int_{-1}^{1}P_4P_6dx=0$$

چون اندیس P_nP_m در انتگرال‌های فوق یکسان نیست پس حاصل انتگرال I صفر می‌شود.

۱۳ـ گزینه «۳» اگر به جای n در رابطه داده شده ۲ قرار دهیم داریم:

$$P_2(x)=\frac{1}{2!2^2}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}(4x(x^2-1))=\frac{4}{8}(x^2-1+2x^2)\Rightarrow P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$

بنابراین $3x^2-1$ برابر $2P_2(x)$ است. در نتیجه انتگرال را به صورت $2\int_{-1}^{1}P_2(x)P_2(x)dx$ نمایش می‌دهیم و از فرمول $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$ حاصل انتگرال برابر $\frac{4}{5}=2\times\frac{2}{2\times2+1}$ است.

۱۴ـ گزینه «۳» اگر بخواهیم رابطه $p_6(x)$ را در انتگرال جایگذاری و حاصل انتگرال را حساب کنیم محاسبه انتگرال بسیار زمانبر است. به جای آن از فرمول $\int_{-1}^{1}p_n^2(x)=\frac{2}{2n+1}$ استفاده کرده و به راحتی مقدار انتگرال را $\frac{2}{13}=\frac{2}{2\times6+1}$ به‌دست می‌آوریم.

۱۵ـ گزینه «۲» واضح است که معادله داده شده بسل مرتبه $\nu=\frac{3}{4}$ است و جواب این معادله برابر $AJ_{\frac{3}{4}}(x)+BJ_{-\frac{3}{4}}(x)$ خواهد بود.

۱۶ـ گزینه «۲» معادله داده شده بسل مرتبه n است. پایه جواب‌ها برابر $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ هستند. با توجه به رفتار توابع بسل نـوع اول و دوم هـر دو تـابع در $x_0=\infty$ میرا هستند اما در $x_0=0$ تنها $J_n(x)$ محدود بوده و $Y_n(x)$ نامحدود است.

۱۷ـ گزینه «۴» به روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جز و فرمول $\int x^{-u}J_{u+1}(x)dx=-x^{-u}J_u(x)$ داریم:

$$I=\int x^2J_2(x)\,dx=\int x^3x^{-1}J_2(x)dx\ \Rightarrow\begin{cases}u=x^3\ \Rightarrow du=3x^2dx\\ dv=x^{-1}J_2dx\ \Rightarrow v=-x^{-1}J_1(x)\end{cases}$$

$$I=uv-vdu=-x^2J_1(x)+3\int xJ_1(x)dx\ \Rightarrow\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=x^0J_1(x)dx\ \Rightarrow v=-J_0(x)\end{cases}$$

$$I=-x^2J_1(x)+3(-xJ_0(x)+\int J_0(x)dx)\ \Rightarrow I=-x^2J_1(x)-3xJ_0(x)+3\int J_0(x)dx$$

۱۸ـ گزینه «۳» از رابطه $\frac{d}{dx}(x^{-\nu}J_\nu(x))=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$ داریم: $\xrightarrow{\nu=0}\frac{d}{dx}(x^0J_0(x))=-x^0J_{0+1}\Rightarrow J_0'(x)=-J_1(x)\Rightarrow J_0'(x)+J_1(x)=0$

۱۹ـ گزینه «۳» توجه کنید که $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. حالا مجموع مربعات آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$J_{\frac{1}{2}}^2(x)+J_{-\frac{1}{2}}^2(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\right)^2=\frac{2}{\pi x}(\sin^2x+\cos^2x)=\frac{2}{\pi x}$$

۲۰ـ گزینه «۳» معادله مفروض بسل پیراسته مرتبه $\nu=2$ است و جواب آن به‌صورت $y(x)=AI_2(x)+Bk_2(x)$ است.

آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۱» واضح است که $x_0 = 0$ نقطه تکین معادله است و چون $p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{4x}{x^2} = 4$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{2}{x^2} = 2$ هر دو موجود و کراندار هستند پس $x_0 = 0$ نقطه تکین منظم است. اما برای $x = \infty$ تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ را در نظر می‌گیریم و به جای بررسی وضعیت $x = \infty$ در معادله مفروض، وضعیت $t_0 = 0$ را در معادله جدید مدنظر قرار می‌دهیم.

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \xrightarrow{\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\xrightarrow{\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}$$

حالا $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را برحسب روابط جدید در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2\left(\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}\right) + 4x\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) + 2y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \xrightarrow{t=\frac{1}{x}} t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

ملاحظه می‌کنید که $t_0 = 0$ (همان $x_0 = \infty$) برای معادله جدید تکین است و چون حدهای $P_0 = \lim_{t\to 0} t\frac{-2t}{t^2} = -2$ و $q_0 = \lim_{t\to 0} t^2\frac{2}{t^2} = 2$ موجود هستند پس $t_0 = 0$ تکین منظم است.

۲ـ گزینه «۲» در قدم اول معادله را بر $x(x-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x(x-1)} y'' + \frac{\sin x}{x(x-1)}y' + \frac{2x(x-1)}{x(x-1)}y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{\sin x}{x(x-1)}y' + 2y = 0$$

بنابراین $P(x) = \frac{\sin x}{x(x-1)}$ و $q(x) = 2$ هستند. $q(x)$ در تمام نقاط تحلیلی است. اما $P(x)$ در نقطه $x = 1$ غیرعادی است. چون در نزدیکی $x_0 = 0$، $\sin x \simeq x$ بنابراین $P(x) = \frac{1}{x-1} \xleftarrow{\sin x \simeq x}$ نیز در نقطه $x_0 = 0$ تحلیلی است. خب تا اینجای کار تنها باید وضعیت منظم یا نامنظم بودن $x_0 = 1$ را بررسی کرد. بنابراین به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$x_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{\sin x}{x(x-1)} = \sin 1\ ,\ q_0 = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 \times 2 = 0$$

پس $x_0 = 1$ به دلیل موجود بودن هر دو حد، یک نقطه غیرعادی منظم معادله محسوب می‌شود اما $x_0 = 0$ نقطه عادی می‌باشد.

۳ـ گزینه «۲» جهت دستیابی به فرم استاندارد معادله دیفرانسیل، آن را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم:

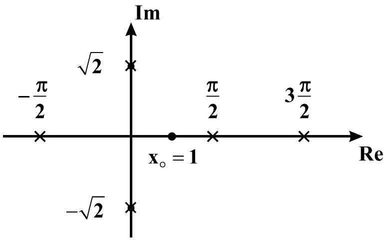
$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 2x(2+x)} y'' - \frac{2(2+3x)}{2x(2+x)}y' + \frac{x}{2x(2+x)}y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{2+3x}{x(2+x)}y' + \frac{1}{2(2+x)}y = 0$$

بنابراین داریم $p(x) = -\frac{2+3x}{x(2+x)}$ و $q(x) = \frac{1}{2(2+x)}$. حالا حدهای p_0 و q_0 را در نقطه $x_0 = 0$ محاسبه می‌کنیم.

$$x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{-(2+3x)}{x(2+x)} = -1 \\ q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2(2+x)} = 0 \end{cases}$$

پس نقطه $x_0 = 0$ از نوع غیرعادی منظم است چون هر دو حد موجود هستند. اما معادله شاخصی را از رابطه $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ تشکیل داده و داریم:

$$r^2 + (-1-1)r + 0 \Rightarrow r^2 - 2r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = 0 \end{cases}$$



۴ـ گزینه «۲» ریشه‌های مخرج $y=\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x^۲+۲}=\dfrac{\sin x}{(x^۲+۲)\cos x}$ ، $x=\pm i\sqrt{۲}$ و $k\in\mathbb{Z}$ $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ هستند. کمترین فاصله نقطه $x_۰=۱$ تا این نقاط، یعنی شعاع همگرایی، $R=\frac{\pi}{۲}-۱$ است.

۵ـ گزینه «۱» از آنجا که ضریب $x^۴$ در بسط تیلور جواب $y(x)$ برابر $C_۴=\dfrac{y^{(۴)}(۰)}{۴!}$ است، ابتدا باید به ضابطه $y^{(۴)}(x)$ دست یابیم و سپس با جایگذاری شرایط اولیه داده شده $y^{(۴)}(۰)$ را تعیین نماییم. برای این منظور ۲ بار از معادله نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم.

$$\begin{cases} y''(x)=y(۲e^{-x}+۱) \\ y'''(x)=y'(۲e^{-x}+۱)-۲e^{-x}y \\ y^{(۴)}(x)=y''(۲e^{-x}+۱)-۲e^{-x}y'+۲e^{-x}y-۲e^{-x}y'=y''(۲e^{-x}+۱)-۴e^{-x}y'+۲e^{-x}y \end{cases}$$

با قرار دادن $y(۰)=۱$ و $y'(۰)=۱$ در معادله نخست و سپس جایگذاری نتیجه حاصل در معادلات دوم و سوم داریم:

$$\begin{cases} y''(۰)=y(۰)(۲+۱)\ \Rightarrow y''(۰)=۳ \\ y'''(۰)=y'(۰)(۲+۱)-۲y(۰)=۳-۲=۱ \\ y^۴(۰)=y''(۰)(۲+۱)-۴y'(۰)+۲y(۰)=۳\times۳-۴+۲=۷\ \Rightarrow C_۴=\dfrac{y^۴(۰)}{۴!}=\dfrac{۷}{۴\times۳\times۲}=\dfrac{۷}{۲۴} \end{cases}$$

۶ـ گزینه «۱» واضح است که $x_۰=۲$ نقطه عادی معادله است. بنابراین به دنبال جوابی از معادله به‌صورت سری $y=C_۰+C_۱(x-۲)+C_۲(x-۲)^۲+\cdots$ هستیم. برای راحتی کار تغییر متغیر $t=x-۲$ را در نظر می‌گیریم. با این تغییر متغیر فرآیند یافتن جواب حول $x_۰=۲$ به $t_۰=۰$ در معادله دیفرانسیل $y''_t+(t-۱)y'_t+y=۰$ تبدیل می‌شود. حالا برای تک تک جملات معادله جدید معادل‌سازی را انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} y''_t \xrightarrow{k=۲-۰=۲} y''_t\equiv(n+۲)(n+۱)C_{n+۲} \\ ty'_t \xrightarrow{k=۱-۱=۰} ty'_t\equiv nC_n \\ -y'_t \xrightarrow{k=۱-۰=۱} -y'_t\equiv-(n+۱)C_{n+۱} \\ y \xrightarrow{k=۰-۰=۰} y\equiv C_n \end{cases}$$

سپس عبارات فوق را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$y''+(t-۱)y'_t+y\equiv(n+۲)(n+۱)C_{n+۲}+nC_n-(n+۱)C_{n+۱}+C_n=۰\ \Rightarrow C_{n+۲}=\frac{C_{n+۱}-C_n}{n+۲}$$

چون اختلاف بزرگترین و کوچکترین اندیس ۲ است پس تمامی ضرایب برحسب ۲ ضریب آغازین یعنی $C_۰$ و $C_۱$ محاسبه می‌شوند. با مقداردهی به n داریم:

$$\begin{cases} \quad\quad C_۰ \\ \quad\quad C_۱ \\ n=۰\quad \Rightarrow C_۲=\dfrac{C_۱-C_۰}{۲} \\ n=۱\quad \Rightarrow C_۳=\dfrac{C_۲-C_۱}{۳}=\dfrac{\frac{C_۱-C_۰}{۲}-C_۱}{۳}=-\dfrac{C_۰+C_۱}{۶} \\ n=۲\quad \Rightarrow C_۴=\dfrac{C_۳-C_۲}{۴}=\dfrac{۱}{۴}(-\dfrac{C_۰+C_۱}{۶}-\dfrac{C_۱-C_۰}{۲})=\dfrac{C_۰-۲C_۱}{۱۲} \\ \ \vdots \quad\quad \vdots \end{cases}$$

حالا سری جواب عمومی را می‌نویسیم:

$$y(t)=C_۰+C_۱t+(\frac{C_۱-C_۰}{۲})t^۲-\frac{C_۰+C_۱}{۶}t^۳+\frac{C_۰-۲C_۱}{۱۲}t^۴+\cdots$$

که با جانشینی $t=x-۲$ به خواسته سؤال می‌رسیم:

$$y(x)=C_۰+C_۱(x-۲)+\frac{C_۱-C_۰}{۲}(x-۲)^۲-\frac{C_۰+C_۱}{۶}(x-۲)^۳+\frac{C_۰-۲C_۱}{۱۲}(x-۲)^۴+\cdots$$

۷ـ گزینه «۲» به سادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = 1$ و $q_0 = -9$ است:

$$P_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{x+x^2}{x^2} = 1 \quad , \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x-9}{x^2} = -9$$

و همچنین معادله مشخصه متناظر $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - 9 = 0$ دارای ریشه‌های مضاعف $r_{1,2} = 3$ می‌باشد. در این صورت با توجه به اینکه ریشه‌ها مضاعف هستند پس یکی از پایه جواب‌های معادله به صورت سری فربنیوسی و جواب دوم آن طبیعت لگاریتمی دارد. یعنی:

$$y_1 = x^3\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad , \quad y_2 = y_1(x)\mathrm{Ln}x + x^3\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

۸ـ گزینه «۲» چون جواب به صورت سری است پس حل معادله به کمک سری توانی حول $x_0 = 0$ مدنظر است. با دقت به فرم جواب دو ریشه معادله مشخصه $r_1 = 0$ و $r_2 = -2$ است و جمله عمومی سری فربنیوسی متناظر با ریشه بزرگتر خواسته شده است. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم: $(r_1 = 0)$

$$\begin{cases} x^2y'' \xrightarrow{k=2-2=0} (n+0+0)(n+0-1)C_n \Rightarrow x^2y'' \equiv n(n-1)C_n \\ 3xy' \xrightarrow{k=1-1=0} 3(n+0+0)C_n \Rightarrow 3xy' \equiv 3nC_n \\ -2x^2y' \xrightarrow{k=1-2=-1} -2(n+0-1)C_{n-1} \Rightarrow -2x^2y' \equiv -2(n-1)C_{n-1} \\ -2xy \xrightarrow{k=0-1=-1} -2C_{n-1} \Rightarrow -2xy \equiv -2C_{n-1} \end{cases}$$

برای چهار جمله تشکیل‌دهنده معادله توانستیم معادل‌سازی را انجام دهیم. حالا آن‌ها را در معادله دیفرانسیل قرار داده و با ساده‌سازی داریم:

$$x^2y'' + 3xy' - 2x^2y' - 2xy \equiv n(n-1)C_n + 3nC_n - 2(n-1)C_{n-1} - 2C_{n-1} = 0 \Rightarrow n(n+2)C_n - 2nC_{n-1} = 0 \Rightarrow C_n = \frac{2}{n+2}C_{n-1} \ , \ n \geq 1$$

خب! حالا به n مقدار داده و ضرایب را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} \qquad C_0 = C_0 \\ n=1 \ \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}C_0 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{2}C_0 = \frac{2^2}{3!}C_0 \\ n=2 \ \Rightarrow C_2 = \frac{2}{4}C_1 = \frac{2}{4}\times\frac{2}{3}C_0 = \frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}C_0 = \frac{2^3}{4!}C_0 \\ n=3 \ \Rightarrow C_3 = \frac{2}{5}C_2 = \frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}C_0 = \frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}C_0 = \frac{2^4}{5!}C_0 \\ \ \vdots \end{cases}$$

$$y_1(x) = C_0x^0\left(1 + \frac{2^2}{3!}x + \frac{2^3}{4!}x^2 + \frac{2^4}{5!}x^3 + \cdots + \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}x^n + \cdots\right)$$

بنابراین جمله عمومی به‌صورت $C_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}$ است.

۹ـ گزینه «۲» برای نقطه عادی $x_0 = 0$ مراحل گام به گام را اجرا می‌کنیم:

گام اول: معادل‌سازی جملات تشکیل دهنده معادله دیفرانسیل:

$$y'' \xrightarrow{k=2-0=2} (n+2)(n+1)C_{n+2} \Rightarrow y'' \equiv (n+2)(n+1)C_{n+2}$$

$$-x^2y'' \xrightarrow{k=2-2=0} -(n)(n-1)C_{n+0} \Rightarrow -x^2y'' \equiv -n(n-1)C_n$$

$$-2xy' \xrightarrow{k=1-1=0} -2nC_{n+0} \Rightarrow -2xy' \equiv -2nC_n$$

گام دوم: جایگذاری روابط فوق در معادله و محاسبه رابطه بازگشتی:

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} - n(n-1)C_n - 2nC_n = 0 \Rightarrow (n+2)(n+1)C_{n+2} - n(n+1)C_n = 0 \Rightarrow C_{n+2} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}C_n \Rightarrow C_{n+2} = \frac{n}{n+2}C_n$$

چون به ازای $n = 0$، C_2 صفر می‌شود پس تمامی ضرایب زوج بعدی نیز صفر خواهند بود و تنها ضرایب فرد باقی می‌مانند. با مقدار‌دهی به n داریم:

$$\begin{cases} C_0 \\ C_1 \\ n=1 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{3}C_1 \\ n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{3}{5}C_3 = \frac{3}{5}\times\frac{1}{3}C_1 = \frac{1}{5}C_1 \\ n=5 \Rightarrow C_7 = \frac{5}{7}C_5 = \frac{5}{7}\times\frac{1}{5}C_1 = \frac{1}{7}C_1 \\ \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

گام سوم: نوشتن جواب عمومی و تعیین رابطه عمومی ضرایب:

$$y = C_0 + C_1\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right) = C_0 + C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

پس رابطه جمله عمومی سری به صورت $C_n = \frac{C_0}{2n+1}$ است.

۱۰ــ گزینه «۴» در معادله داده شده $p_0 = 1$ و $q_0 = -1$ است. بنابراین معادله مشخصه $r^2 - 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف $r_{1,2} = 1$ است. جواب فربنیوسی معادله به‌صورت $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$ است. برای محاسبه ضریب $\frac{x^{21}}{x^{19}}$ باید ابتدا رابطه بازگشتی بین ضرایب را محاسبه کرد و سپس ضرایب C_{20} و C_{18} را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} x^2y'' \xrightarrow{k=2-2=0} (n+1+0)(n+1-1)C_{n+0} \Rightarrow x^2y'' \equiv n(n+1)C_n \\ xy' \xrightarrow{k=1-1=0} (n+1+0)C_{n+0} \Rightarrow xy' \equiv (n+1)C_n \\ x^2y \xrightarrow{k=0-2=-2} C_{n-2} \Rightarrow x^2y \equiv C_{n-2} \\ -y \xrightarrow{k=0-0=0} -C_{n+0} \Rightarrow -y \equiv -C_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2y'' + xy' + (x^2-1)y \equiv n(n+1)C_n + (n+1)C_n + C_{n-2} - C_n = 0 \Rightarrow n(n+2)C_n + C_{n-2} = 0 \Rightarrow C_n = \frac{-C_{n-2}}{n(n+2)} \quad ; \quad n \geq 2$$

با توجه به اینکه ضریب x^{21} همان C_{20} و ضریب x^{19} همان C^{18} است داریم: $C_{20} = \frac{-C_{18}}{20\times 22} \Rightarrow \frac{C_{20}}{C_{18}} = \frac{-1}{20\times 22}$

۱۱ــ گزینه «۴» معادله مفروض لژاندر مرتبه ۳ $\lambda(\lambda+1) = 3\times 4 \Rightarrow \lambda = 3$ است. پس یکی از جواب‌های آن $p_3(x)$ می‌باشد و چون مقدار چند جمله‌ای‌های لژاندر در $x = 1$، برابر یک هستند، در نتیجه $f(x) = p_3(x)$. حالا $f(x) = p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ را در نظر گرفته و تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه اول: $f(0) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$

گزینه دوم: $f(-1) = \frac{1}{2}(5(-1) - 3(-1)) = \frac{-2}{2} = -1$

گزینه سوم: $\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 p_3(x)p_3(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 p_3(x)p_3(x)dx = \frac{1}{2}\times\frac{2}{2\times 3+1} = \frac{1}{7}$

گزینه چهارم: $f'''(x) = \frac{1}{2}\times 5\times 3\times 2\times 1\times x^0 \Rightarrow f'''(0) = 15$

۱۲ــ گزینه «۱» در صورتی‌که در رابطه داده شده $n = 3$ قرار دهیم: $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$. حالا تغییر متغیر $u = \cos x$ را در نظر می‌گیریم که نتیجه $-\sin x dx = du$ را دارد و انتگرال I را بازنویسی می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\pi} 2\sin(x)\cos(x)(5\cos^2 x - 3)P_3(\cos x)dx = \int_0^{\pi} 2(5\cos^3 x - 3\cos x)p_3(\cos x)\sin x dx$$

$$I = -2\int_1^{-1}(5u^3 - 3u)P_3(u)du = -2\int_1^{-1} 2P_3(u)P_3(u)du = 4\int_{-1}^{1} P_3^2(u)du = 4\times\frac{2}{2\times 3+1} \Rightarrow I = \frac{8}{7}$$

۱۳ـ گزینه «۲» ضرایب بسط تابع $f(x)$ به صورت $C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$ محاسبه می‌شود. با قراردادن ۱ و $n=0$ و توجه به اینکـه $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$ به محاسبه C_0 و C_1 می‌پردازیم:

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\times 1\times dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx\right]=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}xdx=\frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{0}=-\frac{1}{4}$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int f(x)\times x\times dx=\frac{3}{2}[\int_{-1}^{0}f(x)xdx+\int_{0}^{1}f(x)xdx]=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}x^2dx=\frac{1}{2}x^3\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$$

۱۴ـ گزینه «۱» رابطه بازگشتی داده شده را به صورت $(2n+1)xp_n=(n+1)p_{n+1}+np_{n-1}$ نوشته و در آن یک بار به جای n، $n-1$ و بار دیگر $n+1$ قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{n\to n-1}(2n-1)xp_{n-1}=np_n+(n-1)p_{n-2}$$

$$\xrightarrow{n\to n+1}(2n+3)xp_{n+1}=(n+2)p_{n+2}+(n+1)p_n$$

طرفین دو تساوی فوق را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$(2n-1)(2n+3)x^2p_{n-1}p_{n+1}=n(n+1)p_n^2+n(n+2)p_{n+2}p_n+(n-1)(n+2)p_{n-2}p_{n+2}+(n-1)(n+1)p_{n-2}p_n$$

از طرفین تساوی فوق در بازه متقارن $(-1,1)$ انتگرال گرفته و با توجه به خاصیت تعامد حاصل انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$(2n-1)(2n+3)\int_{-1}^{1}x^2p_{n-1}p_{n+1}dx=n(n+1)\underbrace{\int_{-1}^{1}p_n^2dx}_{I_1}+n(n+2)\underbrace{\int_{-1}^{1}p_np_{n+2}dx}_{I_2}+(n-1)(n+2)\underbrace{\int_{-1}^{1}p_{n-2}p_{n+2}dx}_{I_3}$$

$$+(n^2-1)\underbrace{\int_{-1}^{1}p_np_{n-2}dx}_{I_4}\xrightarrow[I_1=\frac{2}{2n+1}]{I_2=I_3=I_4=0}(2n-1)(2n+3)\int_{-1}^{1}x^2p_{n-1}p_{n+1}dx=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{1}x^2p_{n-1}p_{n+1}dx=\frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\xrightarrow{n=3}\int_{-1}^{1}x^2p_2p_4dx=\frac{2\times3\times4}{5\times7\times9}=\frac{8}{105}$$

۱۵ـ گزینه «۲» باید تابع مسأله از y به u تغییر داده شود. با مشتق‌گیری از $y=ux^{\frac{1}{2}}$ نسبت به x داریم:

$$\xrightarrow{\frac{dy}{dx}}y'=x^{\frac{1}{2}}u'+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})}y''=x^{\frac{1}{2}}u''+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u'-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u'=x^{\frac{1}{2}}u''+x^{-\frac{1}{2}}u'-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}x^{\frac{5}{2}}u''+x^{\frac{3}{2}}u'-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}u+(x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}})u=0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } x^{-\frac{1}{2}}}x^2u''+xu'-\frac{1}{4}u+x^2u+\frac{1}{4}u=0\Rightarrow x^2u''+xu'+(x^2-0)u=0$$

ملاحظه می‌کنید که معادله دیفرانسیل جدید بسل مرتبه صفر است.

۱۶ـ گزینه «۱» با مقایسه معادله داده شده با فرم کلی $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$ تغییر متغیر مناسب $t=3x$ است. معادله جدید بـه‌دسـت آمـده پس از تغییر متغیر، بسل مرتبه ۲ خواهد بود. که جواب آن به‌صورت $y=C_1J_2(3x)+C_2Y_2(3x)$ می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۱» انتگرال داده شده از جمع دو انتگرال I_1 و I_2 تشکیل شده است:

$$I=\int_0^1[xJ_0(x)+x^3J_0(x)]dx \Rightarrow I\underbrace{\int_0^1 xJ_0(x)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^1 x^3J_0(x)dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_0^1 xJ_0(x)dx \xrightarrow{\int x^\nu J_{\nu-1}(x)dx=x^\nu J_\nu(x)} I_1=xJ_1(x)\Big|_0^1=J_1(1)$$

$$I_2=\int_0^1 x^3J_0(x)dx=\int_0^1 x^2(x^1J_0(x)dx) \Rightarrow \begin{cases}u=x^2 \Rightarrow du=2xdx\\ dv=xJ_0(x)dx \Rightarrow v=xJ_1(x)\end{cases}$$

$$I_2=uv-\int vdu=x^3J_1(x)-2\int x^2J_1(x)dx \xrightarrow{\int x^\nu J_{\nu-1}(x)dx=x^\nu J_\nu} I_2=(x^3J_1(x)-2x^2J_2(x)+C)\Big|_0^1 \Rightarrow I_2=J_1(1)-2J_2(1)$$

$$I=I_1+I_2=J_1(1)+J_1(1)-2J_2(1)=2(J_1(1)-J_2(1))$$

۱۸ـ گزینه «۱» رابطه بازگشتی $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$ را به کارگرفته و در آن به جای ν، $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)+J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) \Rightarrow J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right) \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \sqrt{\frac{2}{\pi x}}} \frac{J_{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}=\frac{\sin x}{x}-\cos x \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{\sin x}{x}-\cos x$$

۱۹ـ گزینه «۱» تغییر متغیر $xy=t$ که نتیجه آن $xdy=dt$ است را در نظر گرفته و داریم:

$$x\int_0^x J_\nu(t)\left(\frac{t}{x}\right)^{\nu+1}.\frac{dt}{x}=x\int_0^x x^{-\nu-2}t^{\nu+1}J_\nu(t)dt=x^{-\nu-1}\int_0^x t^{\nu+1}J_\nu(t)dt$$

با استفاده از رابطه انتگرالی $\int x^\nu J_{\nu-1}(x)dx=x^\nu J_\nu(x)$، حاصل انتگرال فوق را تعیین می‌کنیم:

$$x^{-\nu-1}(t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t))\Big|_0^x=x^{-\nu-1}\times x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)=J_{\nu+1}(x)$$

۲۰ـ گزینه «۱» همانگونه که ملاحظه می‌کنید $x_0=0$ نقطه غیرعادی است و چون حدهای $p_0=-1$ و $q_0=-\frac{5}{4}$ موجود هستند پس این نقطه از نوع غیرعادی منظم می‌باشد.

$$p_0=\lim_{x\to 0} x\frac{-x}{x^2}=-1 \qquad \& \qquad q_0=\lim x^2\frac{-(x^2+\frac{5}{4})}{x^2}=-\frac{5}{4}$$

حالا معادله مشخصه را تشکیل داده و ریشه‌های آن را تعیین می‌کنیم.

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \Rightarrow r^2+(-1-1)r-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow r^2-2r-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow r_1=\frac{5}{2}\ ,\ r_2=-\frac{1}{2}$$

تفاضل دو ریشه $r_1-r_2=3\in Z$ یک عدد صحیح است. بنابراین به استثنای پایه جواب نخست که ارتباطی به چگونگی تفاضل دو ریشه نداشته و همیشه فرم سری فربنیوسی دارد، پایه جواب دوم طبیعت لگاریتمی خواهد داشت.

$$y_1(x)=x^{\frac{5}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \qquad \& \qquad y_2(x)=ay_1(x)\mathrm{Ln}x+x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$$