



سوالات آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۷

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

■ راهنمایی: در این بخش، دو متن به طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیر آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

متن (۱)

سابقه به‌کارگیری مؤثر پایگاه داده‌ها به‌عنوان ابزاری قدرتمند در ذخیره، بازیابی و تحلیل داده‌ها در زمینه تاکسونومی، به سال ۱۹۶۳ و معرفی ایندکس جهانی گیاهی باز می‌گردد. پیش از آن، در سال ۱۹۵۰ در تهیه نقشه‌های پراکنش گیاهان گل‌دار بریتانیا جهت داده‌پردازی اطلاعات مربوطه، از کارت‌های پانچ‌شده استفاده شده بود. افزایش حجم تولید داده‌ها در زمینه تاکسونومی و سیستماتیک (گیاهی و جانوری)، توجه محققان را به طراحی سیستم‌هایی جهت ذخیره و بازیابی مؤثر اطلاعات معطوف کرده است. با پیشرفت فناوری‌های مرتبط با ساخت کامپیوترهای سریع‌تر و کوچک‌تر، مراکز گیاه‌شناسی متعددی در سراسر دنیا درصدد توسعه پایگاه داده‌های محلی کوچک و بزرگ برآمده‌اند. امروزه می‌توان پایگاه داده‌های مورد استفاده در زمینه تاکسونومی را در سه سطح طبقه‌بندی کرد.

از جمله تفاوت‌های میان پایگاه داده‌های سطح اول و دوم این است که یک نام علمی معتبر در پایگاه داده سطح اول یک‌بار ثبت می‌شود، ولی در پایگاه داده سطح دوم به‌ازای هر مطالعه فلوریستیک در کشور یا منطقه موردنظر، ممکن است تکرار شود. پایگاه داده‌های سطح اول در نهایت، بایستی فهرستی از کلیه اسامی علمی معتبر کل دنیا را همراه با ذکر منبع پروتولوگ آن نام ارائه نمایند. لذا، نگهداری یک پایگاه داده جهانی واحد برای استفاده جامعه علمی دنیا، عملی منطقی خواهد بود. این در حالی است که پایگاه داده‌های سطح دوم بایستی در طی فرایندی زمان‌بر، فهرست‌های فلوریستیک حاصل از مطالعات مختلف در یک کشور یا منطقه را ذخیره و بازیابی نمایند. از تجمیع داده‌ها در پایگاه داده‌های سطح دوم، فهرست گیاهان یک کشور یا منطقه حاصل می‌شود. بدیهی است چنین پایگاه داده‌هایی در سطح ملی مدیریت می‌شوند، نه در سطح جهانی.

ذخیره و بازیابی داده‌هایی که سرعت تولید آنها به‌طور مرتب در حال افزایش است، از جمله اهداف اولیه توسعه پایگاه داده‌ها در زمینه تاکسونومی بوده، اما امروزه با حجم بالای داده‌های ذخیره‌شده، امکان تبدیل مؤثر داده‌ها به اطلاعات نیز از طریق داده‌پردازی وجود دارد. درواقع، چنین به‌نظر می‌رسد که نیاز جامعه علمی به اطلاعات، هم‌تراز با نیاز به دسترسی به داده‌های خام اولیه است. برای رسیدن به چنین سطحی از دسترسی به داده‌ها و اطلاعات، یکنواخت بودن داده‌های ثبت‌شده در پایگاه داده‌های محلی یک ضرورت است، زیرا امکان تجمیع داده‌های پراکنده و محلی در یک پایگاه داده ملی بزرگ و جامع را فراهم می‌سازد.

❏ ۱- کدام مورد در خصوص پایگاه‌های داده در زمینه تاکسونومی، در متن مطرح شده است؟

- (۱) تفاوت‌های نحوه مدیریت در سطوح ملی
(۲) سطح سوم طبقه‌بندی مربوطه
(۳) نحوه جمع‌آوری داده‌ها
(۴) تاریخچه کلی

❏ ۲- از متن چنین برمی‌آید که ایندکس جهانی گیاهی

- (۱) به نوعی به‌خاطر محدودیت شیوه‌های سنتی داده‌پردازی ظهور یافت.
(۲) در ابتدا، در یک مقیاس کوچک و براساس پایش پوشش گیاهی بریتانیا تهیه شد.
(۳) به یک دهه برتری نقشه‌های پراکنش گیاهان گلدار بریتانیا در زمینه تاکسونومی پایان داد.
(۴) درست در زمانی معرفی شد که استفاده از کارت‌های پانچ‌شده، در سراسر دنیا متداول بود.

❏ ۳- براساس متن، کدام مورد در خصوص سطوح پایگاه‌های داده، صحیح است؟

- I. اگر گیاهی یکسان، در کشورهای مختلف، با نام‌های مختلف شناخته شود، تمامی آن نام‌ها در پایگاه داده‌های سطح اول ثبت می‌شوند.
II. تهیه پایگاه داده‌های سطح دوم، روندی تدریجی است.
III. تا حد امکان، از تکرار اسامی علمی در آنها خودداری می‌شود.

- (۱) I و II و III (۲) II و III (۳) فقط II (۴) فقط I

❏ ۴- کدام مورد، نقش جمله‌ای را که زیر آن در متن خط کشیده شده، به خوبی توصیف می‌کند؟

- (۱) بین انواع ملی و محلی پایگاه‌های داده، تمایز برقرار می‌کند.
(۲) شرط حصول آنچه در جمله ماقبل آمده را با ذکر دلیل بیان می‌کند.
(۳) آنچه را که ما قبل آن، در متن بحث شده است، به‌صورت کلی‌تر بازگو می‌کند.
(۴) بر نقش بالقوه پایگاه داده‌های محلی در داده‌پردازی حجم بالای اطلاعات تأکید می‌کند.



متن (۲)

بنابر نیاز باستان‌شناسان به سن‌یابی مواد حرارت‌دیده، فیزیک‌دان انگلیسی، پروفیسور آیتکن، در دهه هفتاد میلادی موفق شد تا با استفاده از گرمادرخشایی، روشی برای سن‌یابی سرامیک‌ها عرضه کند. این روش، بعدها برای سن‌یابی مواد آتشفشانی و آجر نیز مورد استفاده قرار گرفت. با توجه به اهمیت تعیین زمان ساخت بناها و دیوارها در تعیین تمدن‌ها، سن‌یابی آجر و خاک همواره برای باستان‌شناسی اهمیت زیادی داشته است. لذا، از روش گرمادرخشایی برای سن‌یابی آنها استفاده شده است. از جمله برای دیوارهای کوره آجرپزی قصرهای مینوان در قبرس، که با استفاده از کوارتزهای جداشده از دیواره کوره‌ها، سن حدود ۳۳۰۰ تا ۳۸۰۰ سال به‌دست آمد. برای آثار ارتش تراکوتا مربوط به دوران اولین امپراتوری چین، به روش گرمادرخشایی (روش دانه‌های ۴ تا ۱۱ میکرونی جداشده از سرامیک‌ها و خاک‌های حرارت‌دیده) سن حدود ۲۲۰۰ سال محاسبه شد. با استفاده از روش پرژر، سن ظروف سفالین سنگ‌نمای مربوط به دوران آغاز پادشاهی سوخوتای در شمال مرکزی تایلند ۶۰۰ تا ۸۰۰ سال به‌دست آمده است و همچنین با روش اندرون‌گیری کوارتز در سرامیک‌ها و آجرهای حرارت‌دیده، سن معابد و ارگ‌های سریلانکا، ۲۵۰۰ سال برآورد شد.

به‌منظور سن‌یابی زمان ساخت دیوار میسه‌نه‌آن در یونان، بلوک‌های آهکی حرارت‌ندیده آن دیوار، به روش گرمادرخشایی مورد سن‌یابی قرار گرفت. سن ۳۷۰۰ ± ۴۵۰ سال تعیین‌شده برای این جایگاه، با انتظار باستان‌شناسان تطبیق داشت. پس از این موفقیت، این روش در سن‌یابی هرم‌های آهکی و همین‌طور معبد آپولو در دلفی به‌کار رفت. علی‌رغم موفقیت‌های پیش‌گفته در سن‌یابی آجر و دیوار، استفاده از گرمادرخشایی برای تعیین آخرین زمان ساخت بناهای خاکی با مشکل مواجه است، زیرا گرمادرخشایی آخرین زمانی را که نمونه حرارت‌دیده است، سن‌یابی می‌کند، در حالی‌که برای سن‌یابی زمان ساخت بناها و دیوارهای خاکی و خشتی، زمان آخرین نورخوردگی خاک یا خشت، مبین زمان ساخت بنا است. از این‌رو، درخشایی نوری برای سن‌یابی رسوبات (حرارت‌ندیده) ابداع شد که کاربردهای وسیعی در دیرین‌اقلیم‌شناسی و دیرین‌زلزله‌شناسی دارد. بدیهی است که این روش در سن‌یابی رسوبات باستان‌شناسی یا باستان‌رسوب نیز کاربرد فراوان دارد. از سویی کار با آن بسیار راحت‌تر از درخشایی گرمایی است و دقت آن نیز بیشتر است، و در نتیجه، گزینه خوبی برای سن‌یابی دیوارهای باستانی نیز هست. لذا می‌توان از روش سن‌یابی درخشایی نوری، در ایران برای سن‌یابی دیوارهای باستانی و بناهای تاریخی استفاده کرد.

کجه ۵- در پاراگراف دوم متن، نویسنده دلایلی ارائه می‌دهد مبنی بر اینکه

- (۱) روش گرمادرخشایی می‌تواند به بناهای تاریخی، آسیب جدی وارد نماید.
- (۲) گرمادرخشایی، روش مناسبی برای تعیین سن بناهای خاکی نیست.
- (۳) گرمادرخشایی در تعیین سن آثار باستانی یونان و ایران، چندان مؤثر نبوده است.
- (۴) امروزه درخشایی نوری، در مقایسه با گرمادرخشایی، روش سن‌یابی سریع‌تر و محبوب‌تری است.

کجه ۶- با توجه به مثال‌های ارائه‌شده در پاراگراف اول، کدام مورد زیر را در خصوص تعیین سن آثار باستانی می‌توان گفت؟

- (۱) استفاده از روش گرمادرخشایی مناسب، ولی با قطعیت کامل همراه نیست.
- (۲) بر پایه دانسته‌های پیشین خود باستان‌شناسان در برخی نقاط دنیا متداول است.
- (۳) با استفاده از اطلاعات و ابزار علوم دیگر، از نظر دقت و صحت، مطلوب نظر باستان‌شناسان نیست.
- (۴) تا پیش از دهه هفتاد میلادی، با بررسی حرارت دریافت‌شده مصالح ساختمانی موجود در آنها صورت می‌گرفت.

کجه ۷- براساس متن، کدام مورد در خصوص روش‌های گرمادرخشایی و درخشایی نوری، صحیح است؟

- (۱) مصالح ساختمانی موجود در بناهای تاریخی، ملاک اصلی برتری گرمادرخشایی بر درخشایی نوری است و یا بالعکس.
- (۲) با توجه به تفاوت کارکردی میان آنها، مقایسه دقت و سهولت انجامشان چندان منطقی به‌نظر نمی‌رسد.
- (۳) مکمل یکدیگرند و بهتر است حداقل، جهت تعیین زمان ساخت بنا، از هر دو روش استفاده کرد.
- (۴) هدف مشترکی را دنبال می‌کنند، اما ابزار رسیدن به هدفشان متفاوت است.

کجه ۸- از متن، کدام مورد زیر را در خصوص سن‌یابی ابنیه تاریخی در ایران، می‌توان نتیجه گرفت؟

- (۱) با روش گرمادرخشایی انجام نمی‌گیرد.
- (۲) با الهام از روش‌های به‌کارگرفته‌شده در یونان و دلفی انجام می‌گیرد.
- (۳) فقدان یک ویژگی خاص در این بناها، آنها را مناسب برای سن‌یابی از طریق گرمادرخشایی نمی‌کند.
- (۴) معمولاً براساس اطلاعات موجود درباره زمان ساخت بنا صورت می‌گیرد.

پاسخنامه آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۷

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

پاسخ سؤالات متن (۱)

۱- گزینه «۴» همانطور که مشخص است، پاراگراف اول به‌طور کلی در خصوص تاریخچه کلی پایگاه‌های داده در زمینه تاکسونومی (از زمان به‌کارگیری مؤثر پایگاه‌های داده در سال ۱۹۶۳ که به‌معرفی ایندکس جهانی گیاهی باز می‌گردد، تا به اکنون که با پیشرفت فناوری و ساخت کامپیوترهای کوچک‌تر و سریع‌تر توسعه یافتند و در سه سطح طبقه‌بندی می‌شوند) صحبت کرده است.

بررسی گزینه (۱): متن، به هیچ وجه، مدیریت پایگاه‌های داده را در سطح ملی باز نکرده است و صرفاً به این موضوع اکتفا کرده است که «پایگاه داده‌های سطح دوم، در سطح ملی مدیریت می‌شوند، نه در سطح جهانی».

بررسی گزینه (۲): متن تنها در مورد سطح اول و دوم طبقه‌بندی پایگاه داده‌ها، صحبت کرده است و به هیچ‌وجه در مورد سطح سوم طبقه‌بندی صحبت نکرده است.

بررسی گزینه (۴): دقت کنید که پاراگراف دوم متن، پایگاه‌های داده را باز کرده و در مورد آن بیشتر توضیح داده است؛ اما در مورد اینکه داده‌ها در این سطوح از طبقه‌بندی چگونه جمع‌آوری می‌شوند، توضیحی نداده است.

۲- گزینه «۱» با توجه به پاراگراف اول متن و اینکه «سابقه به‌کارگیری مؤثر پایگاه داده‌ها به‌عنوان ابزاری قدرتمند در ذخیره، بازیابی و تحلیل داده‌ها در زمینه تاکسونومی، به سال ۱۹۶۳ و معرفی ایندکس جهانی گیاهی باز می‌گردد. پیش از آن در سال ۱۹۵۰ در تهیه نقشه‌های پراکنش گیاهان گل‌دار بریتانیا جهت داده‌پردازی اطلاعات مربوطه، از کارت‌های پانچ‌شده استفاده شده بود. افزایش حجم تولید داده‌ها در زمینه تاکسونومی و سینماتیک (گیاهی و جانوری)، توجه محققان را به طراحی سیستم‌هایی جهت ذخیره و بازیابی مؤثر اطلاعات معطوف کرده است.» می‌توانیم نتیجه بگیریم که افزایش حجم تولید داده‌ها موجب شد شیوه‌های سنتی ذکر شده نتوانند پاسخگو باشند؛ بنابراین ایندکس‌های جهانی گیاهی ظهور یافت.

بررسی گزینه (۲): متن در مورد پیشینه‌ی ایندکس جهانی صحبتی نکرده است؛ صرفاً بیان کرده است که معرفی آن به چه تاریخی باز می‌گردد.

بررسی گزینه (۳): در متن، هیچ‌گونه نشانی در مورد اینکه نقشه‌های پراکنش گیاهان گل‌دار بریتانیا در زمینه تاکسونومی در دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ برتری خاصی داشتند، وجود ندارد.

بررسی گزینه (۴): متن در مورد متداول بودن این کارت‌ها در «سراسر دنیا» بحث نکرده است. آنچه که به نظر می‌رسد این است که این کارت‌ها در بریتانیا رواج داشته است.

۳- گزینه «۳» **رد گزاره (I):** با توجه به اینکه «از جمله تفاوت‌های میان پایگاه داده‌های سطح اول و دوم این است که یک نام علمی معتبر در پایگاه داده سطح اول یک‌بار ثبت می‌شود، ولی در پایگاه داده سطح دوم به ازای هر مطالعه فلوریستیک در کشور یا منطقه موردنظر، ممکن است تکرار شود» لذا گزاره (I) رد می‌شود.

رد گزاره (III): در متن بیان شده است که در پایگاه داده سطح اول اسامی تکرار نمی‌شوند، اما در پایگاه سطح دوم امکان تکرار اسامی وجود دارد. همین! در مود اینکه آیا تلاشی برای عدم تکرار این اسامی می‌شود یا نه، صحبتی نشده است.

با توجه به اینکه «در پایگاه داده‌های سطح دوم، به ازای هر مطالعه فلوریستیک در کشور یا منطقه موردنظر ممکن است یک نام علمی تکرار شود» و اینکه «این در حالی است که پایگاه داده‌های سطح دوم باید در طی فرایندی زمان‌بر، فهرست‌های فلوریستیک حاصل از مطالعات مختلف در یک کشور یا منطقه را ذخیره و بازیابی نمایند» می‌توان نتیجه‌گیری کرد که تهیه پایگاه داده‌های سطح دوم، روندی تدریجی است.

۴- گزینه «۲» با توجه به متن «امروزه با حجم بالای داده‌های ذخیره شده، امکان تبدیل مؤثر داده‌ها به اطلاعات نیز از طریق داده‌پردازی وجود دارد، در واقع چنین به نظر می‌رسد که نیاز جامعه علمی به اطلاعات، هم‌تراز با نیاز به دسترسی به داده‌های خام اولیه است». حال داریم، شرط حصول به این سطح از دسترسی: «برای رسیدن به چنین سطحی از دسترسی به داده‌ها و اطلاعات، یکنواخت بودن داده‌های ثبت شده در پایگاه داده‌های محلی یک ضرورت است» دلیل این موضوع این است که «زیرا امکان تجمع داده‌های پراکنده و محلی در یک پایگاه داده ملی بزرگ و جامع را فراهم می‌سازد».

بررسی گزینه (۱) و (۴): این قسمت از متن، داده‌های ملی و محلی را از یکدیگر تفکیک نکرده و توضیحی کلی در مورد همه نوع پایگاه داده‌ها می‌دهد.

بررسی گزینه (۳): این بخش از متن، تلاش نمی‌کند تا موضوعی را بازگو کند، بلکه به وضوح ساختاری که در گزینه (۲) بیان شده است را دنبال کرده است.



پاسخ سؤالات متن (۲)

۵- گزینه «۲» با توجه به این جمله از متن: «علی‌رغم موفقیت‌های پیش گفته در سن‌یابی آجر و دیوار، استفاده از گرمادرخشایی برای تعیین آخرین زمان ساخت بناهای خاکی با مشکل مواجه است، زیرا گرمادرخشایی آخرین زمانی را که نمونه حرارت دیده است، سن‌یابی می‌کند، در حالی که برای سن‌یابی زمان ساخت بناها و دیوارهای خاکی و خشتی، زمان آخرین نورخوردگی خاک یا خشت، مبین زمان ساخت بنا است.» می‌توان نتیجه گرفت که گرمادرخشایی روش مناسبی برای تعیین سن بناهای خاکی نیست.

بررسی گزینه (۱): متن در مورد اینکه این روش به بناهای تاریخی آسیب وارد می‌کند یا خیر، سخنی نگفته است.

بررسی گزینه (۳): با توجه به جمله اول پاراگراف دوم، گرمادرخشایی در تعیین سن آثار باستانی یونان استفاده شده و مؤثر بوده است. بنابراین این گزینه رد می‌شود.

بررسی گزینه (۴): در متن بیان شده است که درخشایی نوری نسبت به گرمادرخشایی، راحت‌تر و دقیق‌تر است. در مورد سریع‌تر یا محبوب‌تر بودن آن صحبتی نشده است.

۶- گزینه «۱» همانگونه که از این مثال‌ها مشخص است، روش گرمادرخشایی در مورد آن‌ها موفق بوده است و سن تمامی آن‌ها با توجه به این روش، تخمین زده شده است؛ اما خیلی از این موارد به صورت حدودی بوده و کاملاً دقیق نمی‌باشند، بنابراین با قطعیت "کامل" همراه نیست.

بررسی گزینه‌های (۲) و (۳): متن در مورد کاربرد دانسته‌های پیشین باستان‌شناسان و همین‌طور اطلاعات و ابزار علوم دیگر، هیچ صحبتی نکرده است.

بررسی گزینه (۴): متن در مورد برهه قبل از دهه هفتاد میلادی، به‌طور مشخص سخنی نگفته است.

۷- گزینه «۴» با توجه به متن، روش‌های گرمادرخشایی و درخشایی نوری هر دو جهت سن‌یابی آثار باستانی و بناهای تاریخی به کار می‌روند؛ در روش گرمادرخشایی آخرین زمانی که نمونه حرارت دیده است مشخص می‌شود و براساس آن سن‌یابی انجام می‌گیرد (با روش‌هایی مانند کوارتزهای جدا شده، دانه‌های میکرونی جدا شده، پردز، اندرون‌گیری کوارتز)؛ در روش درخشایی نوری آخرین نورخوردگی خاک یا خشت مبین زمان ساخت بنا است. بنابراین، این دو روش هدف مشترکی دارند، اما ابزار آن‌ها متفاوت است (در درخشایی نوری، رسوبات سن‌یابی می‌شوند).

بررسی گزینه (۱): با توجه به متن «از این رو، درخشایی نوری برای سن‌یابی رسوبات (حرارت ندیده) ابداع شد که کاربردهای وسیعی در دیرین‌شناسی و دیرین‌زنده‌شناسی دارد. بدیهی است که این روش در سن‌یابی رسوبات باستان‌شناسی یا باستان رسوب "نیز" کاربرد فراوان دارد. از سویی کار با آن بسیار راحت‌تر از درخشایی گرمایی است و دقت آن نیز بیشتر است و در نتیجه، گزینه خوبی برای سن‌یابی دیوارهای باستانی نیز است. لذا می‌توان از این روش، در ایران برای سن‌یابی دیوارهای باستانی و بناهای تاریخی استفاده کرد» می‌توان نتیجه گرفت که درخشایی نوری کاملاً می‌تواند به جای گرمادرخشایی مورد استفاده قرار گیرد؛ به‌گونه‌ای برتر از روش گرمادرخشایی می‌باشد. پس اکنون مصالح ساختمانی موضوعیت ندارد، بلکه روش درخشایی نوری برای مصالح مختلف ساختمانی (با توجه به اینکه سن رسوبات را اندازه‌گیری می‌کند) می‌تواند مناسب باشد، پس مصالح ساختمانی ملاک برتری روشی نسبت به دیگری نیست.

بررسی گزینه (۲): اگر چه این دو روش از نظر کارکرد متفاوت هستند، اما هدف آن‌ها سن‌یابی است. بنابراین مقایسه میان آن‌ها منطقی می‌باشد.

بررسی گزینه (۳): هر دو روش، برای تعیین سن بناهای مربوطه کافی هستند، در متن هیچ نکته‌ای خاکی از اینکه به هر دو این روش‌ها نیاز باشد، بیان نشده است (تنها نکته‌ای که وجود دارد این است که گرمادرخشایی برای بناهای خاکی مناسب نیست که روش درخشایی نوری برای این نوع بناها مناسب و کاملاً کافی می‌باشد).

۸- گزینه «۳» ویژگی که ابنیه تاریخی در ایران فاقد آن هستند این است که این بناها از جنس سرامیک یا آجر یا آهک نیستند. این ابنیه از جنس خاک هستند. بنابراین نمی‌توان از روش گرمادرخشایی برای سن‌یابی آن‌ها استفاده کرد.

بررسی گزینه (۱): در این مورد متن توضیحی داده نشده است.

بررسی گزینه (۲): متن در این مورد، هیچ سخنی نگفته است.

بررسی گزینه (۳): متن به این موضوع اشاره نکرده است.

بخش دوم: استدلال منطقی

۹- گزینه «۱» سؤال می‌خواهد کارآمدی سیستم خواب عمیق گوگل برای مطالعه مغز را تضعیف کند. متن یکی از تفاوت‌های مهم سیستم عصبی گوگل را جلوگیری از تغییر ترکیبات شیمیایی مغز عنوان کرده است (به عبارات قبل و بعد از «از این رو» در متن توجه کنید). بنابراین گزینه (۱) که می‌گوید سیستم شبکه عصبی (سیستم خواب عمیق گوگل) هم ترکیبات شیمیایی مغز را دچار تغییر می‌کند، باعث تضعیف متن می‌شود.

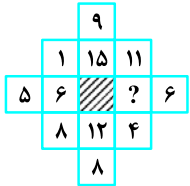
بخش چهارم: حل مسئله

■ راهنمایی: این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمی، شامل مقایسه‌های کمی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و... تشکیل شده است.

- توجه داشته باشید به‌خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

■ راهنمایی: هرکدام از سؤال‌های ۲۴ تا ۲۷ را به‌دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

🔗 ۲۴- در شکل زیر، بین اعداد ارتباط خاصی برقرار است. به‌جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار بگیرد؟



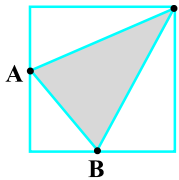
(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹

🔗 ۲۵- در شکل زیر، نقاط A و B وسط اضلاع مربع قرار دارند. چند درصد از مساحت مربع، هاشور خورده است؟



(۱) ۲۲/۵

(۲) ۲۵

(۳) ۳۲/۵

(۴) ۳۷/۵

🔗 ۲۶- کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی که اگر یکی از آن کم شود، بر ۷ و اگر یکی به آن اضافه شود، بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود را در نظر بگیرید. مجموع ارقام این عدد، کدام است؟

(۴) ۱۷

(۳) ۱۴

(۲) ۱۱

(۱) ۸

🔗 ۲۷- نسبت پول A به B، ۳ به ۵ است. دو نفر به اسامی C و D که هیچ پولی ندارند، به آنها ملحق می‌شوند. A، مقداری از پولش را به C می‌دهد و B، مقداری از پولش را بین C و D (نه لزوماً برابر) تقسیم می‌کند، به‌طوری‌که نهایتاً، هر چهار نفر به یک اندازه پول خواهند داشت. C، چند درصد از پول دریافتی را از B گرفته است؟

(۴) ۶۰

(۳) ۵۰

(۲) ۴۰

(۱) ۳۰

■ راهنمایی: سؤال ۲۸، شامل دو مقدار یا کمیت است، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورالعمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

- اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۱ را علامت بزنید.
- اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۲ را علامت بزنید.
- اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه، گزینه ۳ را علامت بزنید.
- اگر براساس اطلاعات داده‌شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بین مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه، گزینه ۴ را علامت بزنید.

🔗 ۲۸- دو ساعت رومیزی، همزمان رأس یک ساعت خاص، شروع به کار می‌کنند. یکی از ساعت‌ها هر ۵ ثانیه و دیگری هر ۸ ثانیه یک بوق می‌زند.

ب

الف

حداقل مدت‌زمانی که از شروع، لازم است تا دو

حداقل مدت‌زمانی که از شروع، لازم است تا هر دو

ساعت، مجموعاً ۲۶ بوق بزنند.

ساعت، برای دومین بار با هم بوق بزنند.

راهنمایی: با توجه به اطلاعات و نمودارهای زیر، به سؤال‌های ۲۹ و ۳۰ پاسخ دهید.

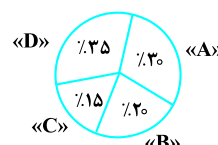
چهار ماده شیمیایی «A»، «B»، «C» و «D»، در مجموع به یک مقدار در دو آزمایشگاه «الف» و «ب» موجود است. نمودار شماره ۱، درصد مقدار هر ماده شیمیایی از مجموع مقادیر مواد شیمیایی در دو آزمایشگاه و نمودار شماره ۲، درصد مقدار سه ماده شیمیایی «A»، «B» و «C» به تفکیک دو آزمایشگاه «الف» و «ب» را نشان می‌دهد.

نمودار شماره ۱: «درصد مقدار هر ماده شیمیایی

از مجموع مقادیر مواد شیمیایی در دو آزمایشگاه»

نمودار شماره ۲: «درصد مقدار سه ماده شیمیایی «A»، «B» و «C»

به تفکیک دو آزمایشگاه «الف» و «ب»»



۲۹- اختلاف مقدار ماده شیمیایی D در دو آزمایشگاه، چند درصد از مجموع مقادیر چهار ماده شیمیایی در دو آزمایشگاه است؟

۳ (۴)

۳/۵ (۳)

۴ (۲)

۴/۵ (۱)

۳۰- اگر آزمایشگاه «ب»، ۹/۶ لیتر ماده شیمیایی A داشته باشد، آزمایشگاه «الف»، چند لیتر ماده شیمیایی B دارد؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)



بخش چهارم: حل مسئله

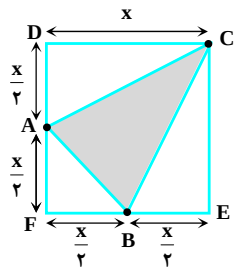
۲۴- گزینه «۱» سؤال راحتی است! در هر باکس چهارتایی سه عدد که در یک ردیف هستند، با هم جمع می‌شوند و تقسیم بر ۳ می‌شوند و عدد چهارم نوشته می‌شود. به عنوان مثال داریم:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline & 8 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1+6+8=15 \Rightarrow \frac{15}{3}=5, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 9 & & \\ \hline 1 & 15 & 11 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1+15+11=27 \Rightarrow \frac{27}{3}=9$$

$$\frac{11+?+4}{3}=6 \Rightarrow 11+?+4=18 \Rightarrow ?=18-15=3$$

بنابراین داریم:

۲۵- گزینه «۴» بیشترین مطلبی که در صورت سؤال داده شده است، این است که رئوس A و B وسط اضلاع مربع هستند. اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، داریم:



می‌خواهیم بدانیم مساحت مثلث هاشورخورده چند درصد مساحت مربع است؟ می‌توان مساحت هاشورخورده را حساب کرد و از مساحت مربع کم کرد. دو مثلث یکسان ADC و BEC داریم که مساحت هر کدام از آن‌ها برابر $\frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times (x)$ است،

پس مجموع مساحت این دو مثلث $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times x = \frac{x^2}{2}$ است. مساحت مثلث ABF هم برابر $\frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{8}$ است، پس مساحت مثلث هاشورخورده برابر است با:

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = x^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{8} \right) = x^2 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = x^2 \left(\frac{8-4-1}{8} \right) = \frac{3}{8}x^2 \xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در } 12/5}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = \frac{3 \times 12/5}{8 \times 12/5} = \frac{37/5}{100} x^2$$

۲۶- گزینه «۱»

روش اول: طبق داده‌های سؤال داریم:

$$a = 3k - 1 = 3(k-3) + 8$$

$$a = 7k' + 1 = 7(k'-1) + 8$$

حال چون باقی‌مانده‌ی عدد موردنظر (a) بر ۳ و ۷ برابر می‌شود با ۸، پس باقی‌مانده‌ی آن عدد بر ۲۱ نیز برابر ۸ می‌باشد. پس باید کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی که بر ۲۱ بخش‌پذیر است را به علاوه عدد ۸ کنیم تا عدد موردنظر به‌دست آید.

$$21k > 1000 \Rightarrow k > \frac{1000}{21} \Rightarrow k > 47/62$$

$$21 \times 48 = 1008 \Rightarrow a = 1008 + 8 = 1016$$

اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از رقم بالا $k = 48$ می‌باشد، پس داریم:

روش دوم: فرض کنیم عدد موردنظر N باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} N-1=7k \\ N+1=3k' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=7k+1 \\ N=3k'-1=3k''+2 \end{cases}$$

N باید عددی باشد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۷ و ۳ به ترتیب ۱ و ۲ باشد. کافی است اولین عدد با این ویژگی را پیدا کنیم. اولین عددی که در این شرایط صدق کند ۲۹ است. اعداد بعدی را می‌توانیم با اضافه کردن کم‌م ۳ و ۷ به اولین عدد محاسبه کنیم:

$$N_1 = 29, N_2 = 21+29, N_3 = 2 \times 21+29, N_4 = 3 \times 21+29, \dots$$

$$N_{k+1} = k \times 21 + 29 \xrightarrow{k_{\max}=47} N = 47 \times 21 + 29 = 1016$$

که مجموع ارقام این عدد ۸ می‌باشد.

توضیح بیشتر: در حالتی که $\begin{cases} N = aq + m \\ N = bq' + n \end{cases}$ را داریم، کافی است اولین N که در این شرایط صدق می‌کند را پیدا کنیم. برای یافتن اعداد بعدی با این شرایط کافی است کم‌م a و b را به N_1 اضافه کنیم.

۲۷- گزینه «۳» ابتدا صورت سؤال را به زبان ریاضی ترجمه می‌کنیم:

گفته شده نسبت پول A به B، ۳ به ۵ است. پس $\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$. از طرفی با فرض این که A، به اندازه‌ی x از پول خودش را به C داده و B به اندازه‌ی y به C و به اندازه‌ی z به D بدهد، لذا با توجه به این که در نهایت پول چهار نفر یکسان می‌شود، داریم:

$$\underbrace{A-x}_{\text{پول A}} = \underbrace{x+y}_{\text{پول C}} = \underbrace{B-y-z}_{\text{پول B}} = \underbrace{z}_{\text{پول D}}$$

از معادله‌ی اول و دوم سمت چپ داریم:

$$A - x = x + y \Rightarrow A = 2x + y$$

از معادله‌ی سوم و چهارم و همچنین مقایسه معادله‌ی آخر و معادله‌ی اول داریم:

$$B - y - z = x + y \xrightarrow{z=A-x} B - y - A + x = x + y \Rightarrow B = A + 2y \xrightarrow{A=2x+y} B = 2x + y + 2y = 2x + 3y$$

$$\frac{2x+y}{2x+3y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10x + 5y = 6x + 9y \Rightarrow 4x = 4y \Rightarrow x = y$$

چون $\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{y}{y+y} = \frac{1}{2} = 50\%$$

۲۸- گزینه «۳» با توجه به صورت سؤال باید کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۵ و ۸ را حساب کرد.

مقدار ستون (الف): در ثانیه‌ی ۸۰ ام هر دو ساعت برای دومین بار با هم بوق می‌زنند. حال باید ببینیم مقدار ستون (ب) از عدد ۸۰ بیشتر است یا کمتر؟ تا ثانیه ۸۰ داریم:

$$\begin{cases} 16 \times 5 = 80 \\ 10 \times 8 = 80 \end{cases} \Rightarrow 16 + 10 = 26 = \text{مجموع تعداد زنگ این دو ساعت تا ثانیه } 80$$

پس مقدار ستون (ب) هم همان ۸۰ ثانیه است که دو ساعت مجموعاً ۲۶ بار بوق می‌زنند.

فرض کنیم کل حجم ماده‌های شیمیایی N باشد، از این مقدار $\frac{N}{4}$ سهم آزمایشگاه (الف) و $\frac{N}{4}$ سهم آزمایشگاه (ب) است. مواد A، B، C و D به ترتیب ۳۰، ۲۰، ۱۵ و ۳۵ درصد N هستند. جدول سمت چپ را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

آزمایشگاه (ب)	$\frac{40}{100} \times \frac{30}{100} N = 0.12N$	$\frac{75}{100} \times \frac{20}{100} N = 0.15N$	$\frac{50}{100} \times \frac{15}{100} N = 0.075N$	$\frac{N}{2} - (0.12N + 0.15N + 0.075N) = 0.155N$
آزمایشگاه (الف)	$\frac{60}{100} \times \frac{30}{100} N = 0.18N$	$\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} N = 0.05N$	$\frac{50}{100} \times \frac{15}{100} N = 0.075N$	$\frac{N}{2} - (0.18N + 0.05N + 0.075N) = 0.195N$
	A	B	C	D

اکنون مقادیر مواد شیمیایی در هر آزمایشگاه به تفکیک مشخص شده و می‌توانیم به سؤالات پاسخ دهیم:

۲۹- گزینه «۲» مقدار کل را چون N فرض کردیم، پس پاسخ 0.04 درست است. یعنی اختلاف ماده D در دو آزمایشگاه 0.04 از کل مواد شیمیایی است.

۳۰- گزینه «۳» ماده‌ی A در آزمایشگاه مطابق جدول برابر است با:

$$0.12N = 9/6 \Rightarrow N = 80$$

اکنون می‌توانیم حجم ماده‌ی B در آزمایشگاه (الف) را محاسبه کنیم:

$$0.05N = 0.05 \times 80 = 4$$



بخش دوم: استدلال منطقی

■ راهنمایی: برای پاسخگویی به سؤال‌های این بخش، لازم است فقط موقعیتی را که در هر سؤال مطرح شده، مورد تجزیه و تحلیل قرار دهید و سپس گزینه‌ای را که فکر می‌کنید پاسخ مناسب‌تری برای آن سؤال است، انتخاب کنید. هر سؤال را با دقت بخوانید و با توجه به مطالب مطرح شده در هر سؤال و نتایجی که بیان شده و بیان نشده ولی قابل استنتاج است، پاسخی را که صحیح‌تر به نظر می‌رسد، انتخاب و در پاسخنامه علامت بزنید.

کله ۹- در بسیاری از بناهای ایرانی، از جمله ساختمان عالی‌قاپو، پلان و مقطع قائم در چارچوبی از مربع‌ها و مثلث‌های متساوی‌الاضلاع طراحی می‌شد که بر خورده‌گاه‌های آنها همه نقاط ثابت مهم، نظیر عرض و ارتفاع درها، عرض، طول و ارتفاع سالن‌ها، موقعیت کتیبه‌ها و غیره را مشخص می‌کرد. بنابراین، اندازه هر قسمت به وسیله تناسب معینی، به هر قسمت دیگر مرتبط بود. بنابراین، در معماری ایرانی، یک ساختمان مجموعه‌ای از اجزای غیرمتجانس نبود، بلکه ترکیبی هماهنگ و موزون از اجزای با ارتباطات متناسب بود که به فضا، حرکت و به چشم، آرامش می‌داد. برای مثال، تحلیل‌های هندسی نشان می‌دهد که نسبت زرین در پلان تخت جمشید به کار رفته است. نسبت زرین، در طراحی هندسی گنبد تاج‌الملک مسجد جامع اصفهان نیز به گونه‌ای شگفت‌آور به کار رفته است.

کدام مورد، رابطه دو بخشی از متن که زیر آنها خط کشیده شده است را به بهترین وجه، توصیف می‌کند؟

- (۱) اولی، زیربنای لازم برای تعریف اصلی مهم در معماری ایرانی را پایه می‌گذارد و دومی، آن اصل را در قالب یک نمونه مشخص، تعبیری دوباره می‌کند.
- (۲) اولی، مثالی برای معرفی یک نمونه از اصول حاکم در معماری ایرانی است و دومی، بخشی دیگر از آن اصول را مورد تأکید خاص قرار می‌دهد.
- (۳) اولی، ادعایی مبتنی بر ادله است که زمینه‌ساز نتیجه‌گیری اصلی متن می‌باشد و دومی، ادله‌ای دیگر بر درستی آن نتیجه‌گیری است.
- (۴) اولی، نتیجه‌گیری کلی و اصلی متن و دومی، مثالی در تقویت آن است.

کله ۱۰- از دیگر تدابیر، حمام رفتن مبتنی بر مزاج تن افراد است و اگر فرد سردمزاج باشد و تری بر او غالب باشد، در ابتدای ورود به حمام نباید آب بریزد تا عرق کامل بکند و بعد از آن، آب گرم بریزد و بیرون آید و اگر فرد مزاجش گرم و خشک باشد، باید همان ابتدا که به حمام می‌رود، بر خود آب بریزد و در آب گرم بنشیند و زود بیرون آید. اگر فرد معتدل المزاج است، زمانی که به حمام می‌رود، باید بدن او نمناک شود و آب را بر خود بریزد تا هوای حمام تر شود و زمانی که گونه‌اش سرخ شد، باید به تدریج از حمام بیرون آید.

فرض لازم برای ارزیابی تجربی صحت توصیه‌های مندرج در متن، کدام است؟

- (۱) راهی برای تشخیص مزاج خاص هر فرد وجود دارد.
- (۲) گروه‌بندی افراد برحسب مزاج، سابقه‌ای طولانی دارد.
- (۳) حمام رفتن افراد، فارغ از ویژگی‌های مزاجیشان، کاری مفید است.
- (۴) افرادی وجود دارند که ناخواسته، آداب استحمام درست را رعایت نمی‌کنند.

کله ۱۱- حضور گیاهخوارانی مانند ماموت‌ها روی زمین، به تولید بیش از پیش گاز متان منجر می‌شده و این مقدار، با شواهد مدفون در یخچال‌های قدیمی قطبی همخوانی دارد. میزان متان موجود در جو زمین، پیش از انقراض این حیوانات، ۷۰۰ ذره در هر میلیارد ذره هوا بوده و این بدان معناست که در آن دوره، اثر گلخانه‌ای موجب شده دمای زمین بالاتر از حد معمول باشد، اما پس از شکار بی‌رویه این جانوران و انقراض نسل آنها، منابع تزریق متان به جو هم کاهش یافت و فراوانی آن ذرات، به ۵۰۰ ذره در هر میلیارد ذره هوا کاهش یافت. به دنبال این کاهش، اثر گلخانه‌ای جو زمین نیز تضعیف شد و دما به شدت پایین آمد و آخرین عصر یخبندان زمین اتفاق افتاد. خلاصه اینکه، انسان‌ها از همان آغاز حضورشان در زمین، تغییرات آب و هوایی را رقم زده‌اند.

کدام مورد، در صورتی که صحیح فرض شود، نتیجه‌گیری متن را به بهترین شکل، تضعیف می‌کند؟

- (۱) اگر انسان‌ها با شکار بی‌رویه، ماموت‌ها را نابود نمی‌کردند، شاید افزایش بیشتر گرمایش زمین که خود این موجودات به وجود می‌آوردند، به تنهایی موجبات محو آنها را فراهم می‌ساخت.
- (۲) برخی دانشمندان می‌گویند که میزان متان تولیدی توسط حیوانات، از جمله ماموت‌ها را نمی‌توان دقیق تخمین زد.
- (۳) ماموت‌ها تنها جانورانی نبودند که به خاطر مداخله بشر در طبیعت، به ورطه نابودی و انقراض کشیده شدند.
- (۴) بعد از اینکه منبع تغذیه اصلی ماموت‌ها کاهش یافت، این موجودات به تدریج منقرض شدند.

کله ۱۲- تاکنون تمام تلاش دانشمندان انفورماتیک و مهندسان کامپیوتر، طراحی الگوریتم‌ها و مدارهایی بود که درصد خطای محاسبات آنها حتی المقدور به صفر نزدیک باشد و همیشه پاسخ درست ارائه دهند، اما دستیابی به این حد کم‌اشتباهی یا بی‌اشتباهی، نیازمند کنترل‌های فراوانی است که هم مصرف انرژی را افزایش می‌دهند و هم سرعت پردازش را پایین می‌آورند که در شرایط حاضر به صرفه نیست. اما اکنون دانشمندان به این نتیجه رسیده‌اند که اگر اجازه دهند مدارهای الکترونیک و ریزپردازنده‌ها هم اندکی در محاسبات خود اشتباه کنند، هم می‌توان مصرف انرژی را پایین‌تر آورد و هم سرعت پردازش را افزایش داد. البته نگران این خطاهای محاسباتی نباشید، چون نرم‌افزارهای جدید می‌توانند آنها را رهگیری و تصحیح کنند.

کدام مورد، در صورتی که صحیح فرض شود، به نزدیک‌ترین شکل، با استدلال متن فوق همخوانی دارد؟

- (۱) آن دسته از اشتباهات محاسباتی که تاکنون روی داده‌اند، همگی قابل رفع و رجوع بوده‌اند.
- (۲) هنوز از نظر فناوری، انسان در مرتبه‌ای قرار ندارد که بتواند ماشینی که کارکردی بی‌خطا داشته باشد، تولید کند.
- (۳) در محاسبه سود و زیان، مزیت کم شدن مصرف انرژی و افزایش سرعت پردازش، بر مشکلی که بابت خطاهای محاسباتی پیش می‌آید، می‌چربد.
- (۴) دست‌اندرکاران صنعت کامپیوتر، بیشتر از کاربران کامپیوتر، نگران دقت این ماشین‌ها هستند، زیرا که در غیر این صورت، منافع درازمدت‌شان تأمین نمی‌شود.



۱۳- دستگاه TBM، نوعی دستگاه حفاری است که در ایجاد تونل‌های زیرزمینی، مثلاً برای خطوط مترو، از آن استفاده می‌شود. این دستگاه علاوه بر حفاری سریع، کار را به مطمئن‌ترین شکل ممکن انجام می‌دهد. یعنی تا وقتی پای این دستگاه در میان است، نه جایی نشست می‌کند و نه بالازدگی خاک به وجود می‌آید. اما طراحان دستگاه نیز اذعان دارند که اگر در سر راهش، به سنگی سخت و غیرقابل نفوذ برسد، راه عقب‌گردی در میان نیست؛ یعنی باید دستگاه را رها کرد تا در زمین مدفون بماند.

کدام مورد می‌تواند به بهترین وجه، استفاده از دستگاه TBM، علی‌رغم مشکلی که می‌تواند برای آن پیش بیاید را توجیه کند؟

- (۱) امروزه، کم کردن زمان اجرای پروژه‌ها به قدری مهم است که مهندسين، در برخی موارد، وجود برخی خطرات در اجرای پروژه‌ها را به شرط صرفه‌جویی در زمان، به جان می‌خرند.
- (۲) هزینه‌ای که باید صرف شود تا دستگاه را از وضعیتی که در آن گرفتار شده است، رها ساخت، از هزینه لازم برای به‌کارگیری یک نمونه جدید، کمتر است.
- (۳) امروزه، به دلیل پیشرفت تکنولوژی، امکانات لازم برای تعیین مسیر درست و بی‌دردسر حفاری، قبل از هر پروژه مربوطه‌ای موجود است.
- (۴) چنانچه از انسان برای حفر تونل استفاده شود، آن وقت به دلیل کندی کار و خطرات محتمل، برآورد هزینه پروژه کاری دشوار می‌شود.

۱۴- اگر از زلزله بگذریم، کره ما سیاره‌ای آرام و بی‌سروصدا محسوب می‌شود. ولی زیر پای ما و در اعماق زمین، اتفاقات زیادی در حال رخ دادن است. در محل برخورد صفحه‌های شکل‌دهنده زمین، اتفاق عجیبی می‌افتد.

پوسته اقیانوسی (قسمت نازک پوسته که بستر اقیانوس‌ها را تشکیل داده)، به زیر پوسته قاره‌ای (قسمت ضخیم پوسته که قاره‌ها روی آن قرار دارند) می‌رود و در جبهه زمین ذوب می‌شود. این عمل، با زایش پوسته اقیانوسی جبران می‌شود؛ یعنی جایی در اعماق اقیانوس‌ها که مواد مذاب از کف اقیانوس خارج و در اثر تماس با آب، سرد شده و

کدام مورد، به منطقی‌ترین وجه، جای خالی در متن فوق را کامل می‌کند؟

- (۱) پوسته را شکل می‌دهند
- (۲) باعث تکرار این فرایند می‌شود
- (۳) عمق اقیانوس‌ها را بیشتر می‌کند
- (۴) آرامش نسبی زمین را باعث می‌شود

۱۵- نگاهی به وضعیت آلایندگی دو خودروی تولیدی شرکت «الف» که یکی بنزینی و دیگری هیبریدی است نشان می‌دهد، این خودروی هیبریدی است که هم مصرف سوخت پایینی داشته و هم آلایندگی کمتری را منتشر می‌کند. بنابر اعلام شرکت، خودروی هیبریدی در هر کیلومتر، چیزی نزدیک به ۶۰ تا ۷۵ گرم دی‌اکسیدکربن و ۱۶ میلی‌گرم مونواکسید نیتروژن تولید می‌کند، در حالی که مصرف ترکیبی این خودرو در شهر و جاده، ۴ لیتر در هر صد کیلومتر است. در مقابل، سدان بنزینی این شرکت، با انتشار ۱۵۰ تا ۲۰۰ گرم دی‌اکسیدکربن در هر کیلومتر، چیزی نزدیک به ۸ لیتر بنزین در هر صد کیلومتر مصرف می‌کند. پس اگر به حفظ محیط زیست علاقه‌مند هستید، خودروی هیبریدی این شرکت را بخرید.

برای ارزیابی صحت استدلال و نتیجه‌گیری متن فوق، پاسخ به کدام سؤال زیر، ضروری است؟

- (۱) آیا حفظ محیط زیست از راه‌های دیگر، کاراتر و به صرفه‌تر نیست؟
- (۲) آیا دو خودروی مورد بحث از نظر حجم موتور یکسان هستند؟
- (۳) آیا روی آوردن مردم به خودروهای دوستدار محیط زیست، با منافع شرکت هم‌راستا است؟
- (۴) آیا استفاده از خودروی شخصی برای حمل‌ونقل درون‌شهری، پدیده‌ای شایع در شهرهای آلوده جهان است؟

بخش سوم: سؤالات تحلیلی

■ راهنمایی: در این بخش، توانایی تحلیلی شما مورد سنجش قرار می‌گیرد. سؤال‌ها را به دقت بخوانید و پاسخ صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید. راهنمایی: با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۱۶ تا ۱۹ پاسخ دهید.

چهار اتوبوس که مبدأ آنها یکی از شهرهای تهران، تبریز، ارومیه و رشت است، در صف یک پمپ‌بنزین، پشت‌سر هم برای سوختگیری توقف کرده‌اند و پس از سوختگیری، به سمت مقصدشان که یکی از شهرهای اصفهان، شیراز، بندرعباس و زاهدان است، نه لزوماً به ترتیب، حرکت خواهند کرد. اطلاعات زیر موجود است:

- اتوبوس با مقصد شیراز، دقیقاً جلوی اتوبوس با مبدأ تهران ایستاده است.
- اتوبوس‌هایی که مقصدشان زاهدان و اصفهان است، دقیقاً پشت‌سر هم ایستاده‌اند.
- یکی از اتوبوس‌ها، از تبریز به مقصد بندرعباس می‌رود.
- مبدأ اولین و آخرین اتوبوس، یکی از دو شهر تبریز و رشت است.

۱۶- اگر مبدأ و مقصد اتوبوسی، به ترتیب، رشت و اصفهان باشد، سومین اتوبوس از کجا به کجا می‌رود؟

- (۱) تهران به اصفهان (۲) ارومیه به زاهدان (۳) ارومیه به شیراز (۴) تهران به زاهدان

۱۷- اگر مقصد آخرین اتوبوس زاهدان باشد، مبدأ اتوبوسی که به شیراز می‌رود، کدام شهر است؟

- (۱) رشت (۲) ارومیه (۳) تهران (۴) تبریز

۱۸- اگر مقصد دومین اتوبوس اصفهان باشد، کدام مورد زیر، مبدأ و مقصد اتوبوسی را به درستی نشان می‌دهد؟

- (۱) ارومیه به اصفهان (۲) رشت به اصفهان (۳) ارومیه به زاهدان (۴) رشت به زاهدان

۱۹- اگر اولین اتوبوس به شیراز برود، کدام مورد زیر، به طور قطع مشخص نمی‌شود؟

- (۱) مبدأ اولین اتوبوس (۲) مبدأ دومین اتوبوس (۳) مقصد آخرین اتوبوس (۴) مقصد سومین اتوبوس

راهنمایی: با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۲۰ تا ۲۳ پاسخ دهید.

چهار مدیر A، B، C و D از یک اداره قرار است هر کدام نامه‌ای به یکی از مدیران دیگر ارسال کنند. هر کدام از نامه‌ها درخصوص یکی از موضوعات انرژی، امنیت، تغذیه و نیروی انسانی است. به طوری که نامه‌ها، موضوع‌های متفاوت، ارسال‌کننده متفاوت و دریافت‌کننده متفاوت داشته باشند. اطلاعات زیر موجود است:

- مدیری که نامه‌ای با موضوع تغذیه ارسال کرده است، از A نامه‌ای با موضوع امنیت دریافت کرده است.
- نامه‌ای که B ارسال کرده است، به مدیری غیر از D ارسال شده است.
- نامه‌ای که D دریافت کرده است، با موضوع تغذیه نبوده است.
- هیچ دو مدیری، متقابلاً بین خودشان نامه‌نگاری نکرده‌اند.

۲۰- اگر نامه با موضوع نیروی انسانی توسط D ارسال شده باشد، نامه با موضوع انرژی را چه کسی دریافت کرده است؟

- (۱) D (۲) C (۳) B (۴) A

۲۱- اگر D نامه‌ای با موضوع انرژی ارسال کرده باشد، موضوع نامه‌ای که A دریافت کرده است، کدام است؟

- (۱) نیروی انسانی (۲) امنیت (۳) انرژی (۴) تغذیه

۲۲- اگر B نامه‌ای با موضوع تغذیه دریافت کرده باشد، کدام مورد، به طور قطع صحیح است؟

- (۱) A از B، نامه دریافت کرده است. (۲) B به C، نامه ارسال کرده است.
(۳) A، نامه‌ای با موضوع انرژی دریافت کرده است. (۴) B، نامه‌ای با موضوع نیروی انسانی ارسال کرده است.

۲۳- اگر B به A نامه ارسال کرده باشد، D نامه‌ای با چه موضوعی ارسال کرده است؟

- (۱) به طور قطع، نمی‌توان تعیین کرد. (۲) نیروی انسانی
(۳) انرژی (۴) تغذیه

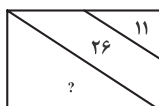
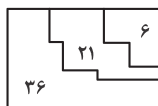
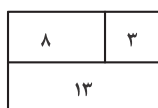
بخش چهارم: حل مسئله

■ راهنمایی: این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمی، شامل مقایسه‌های کمی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و... تشکیل شده است.

- توجه داشته باشید به خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

راهنمایی: هر کدام از سؤال‌های ۲۴ تا ۲۷ را به دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۲۴- در هر کدام از اشکال زیر، بین اعداد هر شکل، ارتباط خاص و مشترکی برقرار است، به جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار داد؟



(۱) ۵۹

(۲) ۵۲

(۳) ۴۶

(۴) ۴۱

بخش دوم: استدلال منطقی

- ۹- گزینه «۳» به وضوح این گزینه صحیح است چون در هر دو قسمت دلایلی برای تأیید نتیجه‌گیری متن وجود دارد.
- گزینه (۲) غلط است چون در قسمت اول مثال نداریم!
- گزینه (۱) غلط است چون قسمت اول به هیچ وجه زیربنای ارائه تعریف مهمی در معماری ایرانی نیست بلکه اصول و دلایل و مشخصات اصلی معماری ایرانی را بیان می‌دارد.
- گزینه (۴) هم غلط است چون قسمت اول نتیجه‌گیری متن نیست، نتیجه‌گیری بعد از قسمت اول متن و بعد از کلمه بنابراین آورده شده است.
- ۱۰- گزینه «۱» فرض لازم برای ارزیابی تجربی استدلال این است که ما بتوانیم نوع مزاج هر فرد را تعیین کنیم. اگر نتوان نوع مزاج هر فرد را تعیین کرد اساساً نمی‌توان ارزیابی دقیقی از استدلال داشت (درست یا غلط بودن ادعا مشخص نمی‌شود).

۱۱- گزینه «۴» نویسنده می‌گوید ماموت‌ها گیاه‌خوار بوده‌اند و این باعث می‌شده گاز متان زیاد تولید شود. از طرفی انسان‌ها با شکار بی‌رویه این ماموت‌ها باعث شده‌اند کاهش گیاهان متوقف شود و به تبع آن دما به شدت پایین آمده و بالاخره تغییرات آب و هوایی رقم بخورد. می‌خواهیم نتیجه‌گیری متن که انسان‌ها را باعث تغییرات آب و هوایی می‌داند، تضعیف کنیم. گزینه (۴) به خوبی این کار را کرده است، چون می‌گوید وقتی گیاهان کاهش یافتند این موجودات منبع غذایی نداشته و خود به خود منقرض شده‌اند (یعنی نقش انسان‌ها را منکر می‌شود)، پس این گزینه برخلاف نظر نویسنده متن، دلیل دیگری برای تغییرات آب و هوایی ارائه می‌کند. گزینه (۱) هم در نگاه اول قابل بررسی است اما وجود کلمه‌ی شاید در این گزینه باعث شده هیچ شانس‌ی در مقابل گزینه (۴) برای انتخاب نداشته باشد!

۱۲- گزینه «۳» این گزینه بیشترین همخوانی را با متن دارد چون در متن اشاره شده که دستیابی به آن حد از کم‌اشتباهی یا بی‌اشتباهی باعث مصرف انرژی و کاهش سرعت پردازش می‌شود و اکنون دانشمندان به این نتیجه رسیده‌اند که اجازه دادن به کمی اشتباه باعث کاهش مصرف انرژی و افزایش سرعت پردازش می‌شود.

۱۳- گزینه «۳» به دنبال این هستیم که بگوییم استفاده از دستگاه TBM توجیه‌پذیر است (علی‌رغم مشکلاتی که در متن اشاره شده است). در گزینه (۳) این اتفاق افتاده است؛ چون آن مشکل مطرح شده در متن را حل کرده است. در متن قرار گرفتن سنگ سخت و غیرقابل نفوذ در مسیر حفاری به عنوان عیب استفاده از این دستگاه عنوان شده است و گزینه (۳) می‌گوید پیشرفت تکنولوژی باعث شده قبل از حفاری بتوان مسیر درست و بی‌دردسر را انتخاب کرد.

۱۴- گزینه «۱» در متن اشاره شده پوسته قاره‌ای ذوب می‌شود و این عمل با زایش پوسته اقیانوسی جبران می‌شود و در ادامه این مطلب را تقریباً با بیان نحوه و تشکیل پوسته تکرار کرده و به وضوح گزینه (۱) باید در ادامه قسمت آخر قرار بگیرد.

۱۵- گزینه «۲» برای ارزیابی دو ماشین قطعاً باید دو ماشین با شرایط یکسان به لحاظ موتور بررسی گردد. اگر مثلاً حجم موتور خودروی بنزینی ۴ برابر خودروی هیبریدی باشد و دو برابر آن دی‌اکسیدکربن تولید کند، اتفاقاً خودروی بنزینی بهتر است. ولی اگر هر دو حجم موتور یکسان داشته باشند، قطعاً خودروی هیبریدی بهتر است. پس برای ارزیابی شرایط حجم موتور باید معلوم گردد.

بخش سوم: سؤالات تحلیلی

چهار اتوبوس از مبدأهای تهران، تبریز، ارومیه و رشت به مقصدهای اصفهان، شیراز، بندرعباس و زاهدان در یک صف پشت‌سرهم ایستاده‌اند. هدف مشخص نمودن جایگاه، مبدأ و مقصد هر اتوبوس است، پس می‌توان شکل مسئله را به صورت زیر رسم نمود:

شماره اتوبوس	۱	۲	۳	۴
مبدأ				
مقصد				

قیدهای مسئله:

۱- اتوبوس با مقصد شیراز دقیقاً جلوی اتوبوس با مبدأ تهران قرار دارد. ←

تهران	→ مبدأ
شیراز	→ مقصد

۲- اتوبوس‌های با مقصد زاهدان و اصفهان دقیقاً پشت‌سرهم ایستاده‌اند. ←

زاهدان	یا	اصفهان
اصفهان		زاهدان

۳- یکی از اتوبوس‌ها از تبریز به مقصد بندرعباس می‌رود. ←
 → مبدأ
 → مقصد

۴- مبدأ اولین و آخرین اتوبوس یکی از دو شهر تبریز و رشت است. ←
 یا

۱۶- گزینه «۴» اگر مبدأ و مقصد اتوبوس به ترتیب رشت و اصفهان باشد با توجه به قید ۴ می‌توان گفت:

۱	۲	۳	۴
رشت		تبریز	
اصفهان			

حالت اول

۱	۲	۳	۴
تبریز			رشت
			اصفهان

حالت دوم

اکنون با توجه به قید ۲ و ۳ داریم:

۱	۲	۳	۴
رشت			تبریز
اصفهان	زاهدان	بندرعباس	

حالت اول

۱	۲	۳	۴
تبریز			رشت
بندرعباس		زاهدان	اصفهان

حالت دوم

با توجه به قید ۱ فقط حالت اول می‌تواند برقرار باشد:

۱	۲	۳	۴
تبریز		تهران	رشت
بندرعباس	شیراز	زاهدان	اصفهان

در نتیجه سومین اتوبوس از تهران به زاهدان می‌رود.

۱۷- گزینه «۲» اگر مقصد آخرین اتوبوس زاهدان باشد با توجه به قید ۳ و ۴ داریم:

۱	۲	۳	۴
تبریز			رشت
بندرعباس			زاهدان

اکنون با توجه به قید ۱ و ۲ داریم:

۱	۲	۳	۴
تبریز	ارومیه	تهران	رشت
بندرعباس	شیراز	اصفهان	زاهدان

در نتیجه مبدأ اتوبوسی که به شیراز می‌رود، ارومیه است.

۱۸- گزینه «۳» اگر مقصد دومین اتوبوس اصفهان باشد با توجه به قید ۲ و ۳ و ۴ داریم:

۱	۲	۳	۴
تبریز			رشت
بندرعباس	اصفهان	زاهدان	

حالت اول

۱	۲	۳	۴
رشت			تبریز
	اصفهان		بندرعباس

حالت دوم

با توجه به قید ۱، حالت دوم برقرار نمی‌باشد و فقط حالت اول صادق است. اکنون با توجه به قید ۱ داریم:

۱	۲	۳	۴
رشت	تهران		تبریز
شیراز	اصفهان		بندرعباس

و در نهایت خواهیم داشت:

۱	۲	۳	۴
رشت	تهران	ارومیه	تبریز
شیراز	اصفهان	زاهدان	بندرعباس

در نتیجه اتوبوس دوم از ارومیه به زاهدان می‌رود.

۱۹- گزینه «۴» اگر اولین اتوبوس به شیراز برود، با توجه به قید ۳ و ۴ داریم:

۱	۲	۳	۴
رشت			تبریز
شیراز			بندرعباس

اکنون با توجه به قید ۱ داریم:

۱	۲	۳	۴
رشت	تهران	ارومیه	تبریز
شیراز			بندرعباس

در نتیجه مقصد اتوبوس‌های دوم و سوم به‌طور قطع مشخص نیست.

اطلاعات مسئله:

چهار مدیر A، B، C و D هریک نامه‌ای با موضوعات انرژی، امنیت، تغذیه و نیروی انسانی برای یکدیگر ارسال می‌کنند به‌طوری که نامه‌ها موضوع متفاوت، ارسال‌کننده متفاوت و دریافت‌کننده متفاوت داشته باشد.

قیدهای مسئله:

- ۱- مدیری که نامه‌ای با موضوع تغذیه ارسال کرده، از A نامه‌ای با موضوع امنیت دریافت می‌کند. ← A نامه‌ای با موضوع امنیت ارسال کرده است.
- ۲- نامه‌ای که B ارسال کرده به مدیری غیر از D ارسال شده ← نامه B را یا A یا C دریافت می‌کند.
- ۳- نامه دریافتی توسط D با موضوع تغذیه نبوده است.
- ۴- هیچ دو مدیری متقابلاً خودشان نامه‌نگاری نکرده‌اند.

۲۰- گزینه «۱» اگر D نامه‌ای با موضوع نیروی انسانی ارسال کرده باشد:

نیروی انسانی	تغذیه	امنیت	انرژی	موضوع ارسال
D	B	A	C	مدیر

با توجه به قیدهای مسئله خواهیم داشت:

نیروی انسانی	تغذیه	امنیت	انرژی	موضوع دریافت
C	A	B	D	مدیر

پس نامه با موضوع انرژی توسط D دریافت شده است.

۲۱- گزینه «۳» اگر D نامه‌ای با موضوع انرژی ارسال کرده باشد:

نیروی انسانی	تغذیه	امنیت	انرژی	موضوع ارسال
C	B	A	D	مدیر

با توجه به قیدهای مسئله داریم:

نیروی انسانی	تغذیه	امنیت	انرژی	موضوع دریافت
D	C	B	A	مدیر

پس نامه دریافتی توسط A با موضوع انرژی است.

۲۲- گزینه «۲» اگر B نامه‌ای با موضوع تغذیه دریافت کرده باشد با توجه به قیدهای مسئله داریم:

نیروی انسانی	تغذیه	امنیت	انرژی	موضوع ارسال
B	D	A	C	مدیر

با توجه به قیدهای مسئله داریم:

نیروی انسانی	تغذیه	امنیت	انرژی	موضوع دریافت
C	B	D	A	مدیر

پس B به C نامه ارسال کرده است.

PART A: Grammar

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.

31- The rate that bright comets enter the solar system implies there should be around 3000 of them buzzing around, only 25 are known.

- 1) nonetheless 2) regardless of the fact 3) and yet 4) as there are

32- Contemporary theories of interpretation require that, in our analyses of texts, we consider not only what the text says "made."

- 1) also its meaning gets and 2) but also gets the meaning of it
3) but its meaning also gets 4) but how its meaning gets

33- individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.

- 1) That 2) An 3) The 4) It is that

34- Plant scientists have been trying for years to genetically modify flowers for aesthetic purposes. The first to go on sale were blue carnations in Australia, in 1996.

- 1) were produced 2) produced 3) had been produced 4) to produce

35- Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, weapon platforms.

- 1) they are often called 2) often called 3) called they are often 4) that are called often

36- Articulating what the difference between humans and other creatures consists of behind it have formed a large and difficult project tackled by biologists, anthropologists, psychologists, and philosophers.

- 1) uncovering the biology 2) the biology of uncovering
3) the biology uncovering 4) and uncovering the biology

37- Most healthcare professionals view depression as "just part of getting old and argue that this illness,, can have serious, even fatal consequences.

- 1) untreated then 2) untreated whether it is 3) if untreated 4) that is untreated

38- Ted had a terrible habit of boasting so much about his smallest accomplishments his vainglory became renowned throughout the small college campus.

- 1) that 2) as 3) in that 4) as though

PART B: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.

39- Dogs growl and show their teeth in an attempt to frighten the animal or person they perceive as a

- 1) habitat 2) prey 3) suspicion 4) threat

40- Based on his recent poor decisions, it was obvious that Seth lacked even a modicum of good

- 1) sentiment 2) sense 3) sensation 4) sensitivity

41- The judge the extraneous evidence because it was not pertinent to the trial.

- 1) disclosed 2) distended 3) dismissed 4) distorted

42- The more frequently employees take time to exercise during working hours each week, the fewer sick days they

- 1) expend 2) save 3) take 4) recall

43- Classic psychology experiments have shown that when rats are first with an electrical shock to fear a tone when it sounds, they later fear the tone even without the associated shock.

- 1) conditioned 2) sparkled 3) displayed 4) intended

بخش اول: دستور زبان

در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۱- گزینه «۳» با توجه به سرعت و تعداد ورود ستاره‌های دنباله‌دار به منظومه شمسی می‌توان حدس زد که باید تقریباً ۳۰۰۰ مورد از آن‌ها وجود داشته؛ با این حال تنها ۲۵ عدد از آنها شناسایی شده‌اند.

توضیح: همان‌طور که می‌دانید nonetheless قید ربط است؛ یعنی قبل از آن باید نقطه یا نقطه‌ویرگول و بعد از آن باید حتماً کاما بیاید. با این حساب گزینه (۱) نادرست است. گزینه (۲) در صورتی ارزش بررسی کردن دارد که طراح بعد از fact از حرف ربط that استفاده می‌کرد. گزینه (۳) صحیح است، هم با توجه به مفهوم جمله و هم با توجه به اینکه قبل از and کاما می‌آید. و گزینه (۴) نادرست است چون بعد از as دو تا فعل داریم؛ یکی are و یکی know.

۳۲- گزینه «۴» نظریه‌پردازان معاصر در زمینه ترجمه شفاهی باور دارند ما در آنالیز متن، علاوه بر چیزی که متن می‌گوید، باید به نحوه شکل‌گیری معنی آن نیز توجه داشته باشیم.

توضیح: همان‌طور که می‌بینیم این تست با مبحث not only ...but also سروکار دارد. اول از همه اینکه در این ساختار but also می‌تواند به صورت but یا also هم به کار برود. پس امیدوارم فوری گزینه (۲) را نزنه باشید. ضمناً می‌دانیم ساختار (also)but not only مستلزم رعایت ساختار موازی است؛ بنابراین چون بعد از not only کلمه پرسشی what را داریم باید بعد از (also)but هم از کلمه‌ی پرسشی how استفاده کنیم: not only what the text says but how its meaning gets made.

۳۳- گزینه «۱» اینکه شبکه‌های اجتماعی بر روی رفتار افراد تاثیرگذار هستند، قابل تردید نمی‌باشد. توضیح: تست بسیار ساده‌ای است. توی مبحث جمله‌واره‌ی اسمی گفتیم یکی از کاربردهای that clause این است که قبل از فعل be به عنوان فاعل استفاده شوند. گفتیم در این موارد that به صورت «اینکه» ترجمه می‌شود:

That individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.

مثال بیشتر:

That coffee grows in Brazil is well known.

۳۴- گزینه «۲» گیاه‌شناسان سال‌هاست که با استفاده از اصلاح ژنتیک به دنبال زیباتر ساختن گل‌ها هستند. گل میخک آبی اولین موردی بود که برای فروش عرضه شد. این گل در سال ۱۹۹۶ در استرالیا تولید شد.

توضیح: این تست از دو جمله تشکیل شده که برای پاسخگویی به آن فقط به جمله دوم نیاز داریم. جمله دوم دارای فعل اصلی were می‌باشد، با این حساب به هیچ فعل اصلی دوم دیگری نیاز نداریم چون هر جمله فقط فقط باید یک فعل اصلی داشته باشد. این یعنی حذف همزمان گزینه‌های (۱) و (۳). گزینه (۴) نادرست است چون قصد بیان هدف نداریم. ضمناً شکل اولیه گزینه (۲) این‌طوری بوده:

The first to go on sale were blue carnations that were produced in Australia, in 1996.

اگر that were را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

۳۵- گزینه «۲» سلاح‌ها از طریق وسایل نقلیه مختلفی حمل و تحویل داده می‌شوند. این وسایل نقلیه اغلب با نام پلنفرم سلاح شناخته می‌شوند. توضیح: تقریباً هر سال از این مبحث سؤال می‌آید و ما هم هر سال می‌گوییم بعد از کاما کاربرد that ممنوع است. (این یعنی حذف گزینه (۴)). گزینه (۱) در صورتی صحیح است که کاما به نقطه تبدیل بشود و they هم به They. مهم‌ترین دلیل رد گزینه (۳) کاربرد they بعد از called است. ضمناً شکل اولیه‌ی گزینه‌ی ۲ این‌طوری بوده:

Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, which are often called weapon platforms.

اگر which are را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

۳۶- گزینه «۴» درک تفاوت بین انسان و سایر موجودات و مسائل بیولوژیکی نهفته در آن باعث بوجود آمدن مباحث و تحقیقات دشوار و گسترده‌ای شده است که دانشمندانی از رشته‌های مختلف مانند زیست‌شناسی، انسان‌شناسی، روانشناسی و فلسفه به آن می‌پردازند.

توضیح: توی تست‌هایی که این‌قدر طولانی هستند، اولین کار این است که به دنبال فعل اصلی باشیم. فعل اصلی سوال ما have formed است. پس به خاطر حضور have باید فاعلمون جمع باشد. اما articulating به تنهایی به فعل مفرد نیاز دارد، این یعنی باید articulating را با and به یک ساختار ing دار موازی دیگر متصل کنیم تا آن موقع کاربرد فعل have هم معنی پیدا کند. و چون فقط گزینه (۴) است که دارای and می‌باشد، می‌توانیم باقی گزینه‌ها را رد کنیم.

۳۷- گزینه «۳» اکثر متخصصین حوزه بهداشت و درمان، افسردگی را بخشی از پروسه افزایش سن می‌دادند و اعتقاد دارند که در صورت عدم درمان می‌تواند عواقب بسیار وخیمی داشته و یا حتی باعث مرگ بیمار شود.

توضیح: اول از همه اینکه طراح سؤال ظاهراً یادش رفته آن (") را که باز کرده ببندد. باید این علامت را قبل از and بیاورد. حالا می‌رسیم به رد گزینه‌ها. کاربرد that بعد از کما ممنوع است (یعنی رد گزینه (۴)). گزینه ۱ نادرست است چون معلوم نیست طراح سوال آن then را بابت چی استفاده کرده. گزینه (۲) هم کنار می‌رود چون بعد از is هیچ عبارت کامل‌کننده‌ای نداریم. اما برای اینکه ببینیم چرا گزینه (۳) صحیح است باید اصل جمله را پیدا کنیم.

Most healthcare professionals argue that this illness, **if it is untreated**, can have serious, even fatal consequences.

چون it به this illness برمی‌گردد، می‌توانیم با فرض اینکه فاعل‌ها یکسان هستند، فاعل جمله‌واره‌ی وابسته یعنی it و فعل is را حذف کنیم و یک وجه وصفی بسازیم:

Most healthcare professionals argue that this illness, **if untreated**, can have serious, even fatal consequences.

۳۸- گزینه «۱» تد اخلاق بسیار زشتی داشت و به خاطر کوچک‌ترین موفقیت‌هایش به‌قدری فخرفروشی می‌کرد که عادت خودستایی او در سرتاسر محوطه‌ی کوچک دانشگاه زبانزد عام و خاص بود.

توضیح: از ساختار that....so استفاده شده.

....so much about that

بخش دوم: واژگان

دستورالعمل: در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۹- گزینه «۴» سگ‌ها در هنگام مواجهه با خطر / تهدید، پارس می‌کنند و دندان‌های خود را نشان می‌دهند تا حیوان یا شخص مورد نظر را بترسانند.

(۱) زیستگاه، زیست‌بوم (۲) طعمه (۳) سوءظن، تردید (۴) خطر، تهدید

۴۰- گزینه «۲» ضعف تصمیمات اخیر سبب نشان می‌دهد که کوچک‌ترین درکی نسبت به مسائل مختلف ندارد.

(۱) تمایل، گرایش، احساس (۲) شعور، معنی، ادراک (۳) احساس، هیجان (۴) حساسیت

۴۱- گزینه «۳» قاضی شواهد غیرضروری را مردود اعلام کرد زیرا ارتباط چندانی با روال دادرسی نداشت.

(۱) افشاء کردن، فاش کردن (۲) بزرگ کردن، منبسط کردن (۳) مردود شمردن، رد کردن (۴) کج کردن، تحریف کردن

۴۲- گزینه «۳» کارمندان هرچقدر در طول هفته بیشتر ورزش کنند، کمتر به مرخصی استعلاجی نیاز پیدا می‌کنند.

توضیح: جواب این سؤال عیناً توی خود سؤال آمده. یعنی اول بوده take time حالا شده take days.

اصطلاح take sick days یعنی «استعلاجی گرفتن».

۴۳- گزینه «۱» طبق آزمایشات روانشناسی کلاسیک، وقتی موش‌ها برای ترسیدن از یک صدای بخصوص به وسیله شوک الکتریکی شرطی شوند، بعدها بدون وجود شوک الکتریکی هم از آن صدا می‌ترسند.

(۱) شرطی کردن (۲) درخشیدن، برق زدن (۳) نمایش دادن (۴) قصد داشتن

**PART B: Vocabulary**

Directions: Select the answer choice (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

41- We will have to repeat the experiment because the results were not

- 1) equivocal 2) credulous 3) conclusive 4) spontaneous

42- The doctor's medical license was after it was discovered that out of sheer cupidity, he had diagnosed people with illnesses they didn't have and pocketed insurance money for performing procedures they didn't need.

- 1) overlooked 2) revoked 3) diminished 4) belittled

43- When she didn't receive the job, she asked the company for feedback to help her with future employment.

- 1) unexceptional 2) foreseeable 3) hierarchical 4) constructive

44- Although I tried to pay you a compliment, you have unfortunately decided to my words as an insult.

- 1) adopt 2) construe 3) contribute 4) qualify

45- The twins began school, but they did not graduate at the same time.

- 1) simultaneously 2) interchangeably 3) symmetrically 4) chronologically

46- Though we are in on what our goals should be, we differ on the means for achieving them.

- 1) monotony 2) accord 3) homogeneity 4) jeopardy

47- The debate is becoming polarized and there appears to be little in the way of ground between the two sides.

- 1) similar 2) clear 3) slippery 4) middle

48- The main dish had little flavor, but I made it more by adding condiments.

- 1) affordable 2) unrecognizable 3) palatable 4) memorable

49- In our to leave for our camping trip we'd long been looking forward to, we actually forgot to bring our tent.

- 1) haste 2) scheme 3) apathy 4) collaboration

50- Any dispute over finances is likely to sour the relationship to the of both parties.

- 1) intensity 2) detriment 3) barrier 4) isolation

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following two passages and select the choice (1), (2), (3), or (4) that best answers each question. Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

In a country where government and families alike are tightening their belts and trying to make do with less, you could be pardoned for thinking that private education would be in a bit of a jam right now. And yet, although fees at independent schools in Britain have approximately doubled over the last two and a half decades, pupil numbers are the highest since records started in 1974. Although there are numerous reasons why parents might choose to fork out an average of £12,500 per year on their child's education, there is one which stands out more than any other: their reputation for getting their students into elite universities, such as the Ivy League colleges and Britain's most prestigious universities: Oxford and Cambridge.

Private schools with experience in these admissions processes run like well-oiled machines. Their informed careers advisers have in-depth tactical knowledge of which colleges would best suit each candidate, and help them to edit their personal statements to reflect the qualities that elite universities are looking for. Interview training sessions guide young applicants through an interview system which has been described as being more reminiscent of an old-boy network than justice for society. Those with family members and teachers who have successfully gone through the admissions process are at a considerable advantage to those who are the first to apply among their social group.

Consequently, the social mix of students at the top universities remains sadly biased towards the rich and privately educated—although thanks to increasing numbers of bursaries providing free private school education to academically gifted youngsters, it is possible to be one without the other. Even so, the fact is that 7% of British children go to private schools, while more than 40% of the intake at Oxford and Cambridge is privately educated, and this statistic depicts a worryingly skewed trend. The proportion matters because, although there are obviously plenty of other universities offering excellent study programs, an Oxbridge or Ivy-League degree undoubtedly enhances employability in the ruling professions. According to recent studies by the UK educational charity “The Sutton Trust”, over 30% of leading professionals in the United Kingdom, including almost 80% of lawyers, 47% of highflyers in financial services and 41% of top journalists attended Oxford or Cambridge.

 **51- What is the best title for the passage?**

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) Unfair Education in Britain | 2) Moribund Education Standards |
| 3) Social Class Immobility in Britain | 4) Fewer Opportunities for Everyone |

 **52- What is the phrase “in a bit of a jam” in paragraph 1 closest in meaning to?**

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| 1) overwhelmed with demand | 2) under severe attack |
| 3) in a difficult situation | 4) on its last legs |

 **53- According to the passage, the most important reason why parents in Britain choose to send their children to expensive independent schools is**

- 1) because of such schools' flexibility in adjusting their curricula to the changing demands of the job market
- 2) that elite universities' admissions policies are intentionally skewed towards students from wealthy backgrounds
- 3) that this way their children's future career opportunities could be somehow guaranteed
- 4) because of such schools' reputation for having influence over prestigious universities

 **54- The word “one” in paragraph 3 refers to**

- | | | | |
|-------------------|----------------------|------------|-------------------|
| 1) private school | 2) gifted youngsters | 3) bursary | 4) top university |
|-------------------|----------------------|------------|-------------------|

 **55- Why has the author mentioned the statistics reported by “The Sutton Trust”?**

- 1) To further support the quality of the education offered by elite universities
- 2) To introduce another reason for the popularity of private schools
- 3) To clarify the link between tertiary education and employability
- 4) To support an earlier assertion

PASSAGE 2:

The James Webb Space Telescope has an expected mass about half of Hubble Space Telescope's, but its primary mirror, a 6.5 m (21 ft) diameter gold-coated beryllium reflector will have a collecting area over six times as large, 25.4 m² (273 sq ft), using 18 hexagonal mirrors with 0.9 m² (9.7 sq ft) obscuration for the secondary support struts.

JWST is designed primarily for near-infrared astronomy, but can also see orange and red visible light, as well as the mid-infrared region, depending on the instrument. The design emphasizes the near to mid-infrared for three main reasons: first, high-redshift objects have their visible emissions shifted into the infrared, second, cold objects such as debris disks and planets emit most strongly in the infrared, and finally, this band is difficult to study from the ground or by existing space telescopes such as Hubble.

۳۷- گزینه «۴» کسی که کاخ باشکوه ورسای را ساخت، لویی چهاردهم بود؛ اگرچه هزینه‌ی آن به قدری بالا بود که عصبانیت و خشم مردم فرانسه را به همراه داشت. توضیح گرامری: گزینه‌های (۱) و (۲) باعث می‌شوند معنی جمله‌مان ناقص شود. گزینه‌ی (۳) کنار می‌رود چون کاربرد ضمیر موصولی *that* و *he* با هم نادرست است. پس فقط گزینه‌ی (۴) صحیح است:

It was King Louis xiv who had the magnificent Palace of Versailles built.

۳۸- گزینه «۲» دلیلی که صنعت ساختمان‌سازی از هم پاشید این بود که نرخ بهره‌ی وام‌ها بسیار بالا بود. توضیح گرامری: گزینه‌ی (۴) کنار می‌رود چون بعد از *because of* نباید از جمله استفاده شود. ضمناً الگوی *پُر کاربرد* زیر را هم حتماً حفظ کنید:

The reason ... is / was that ...

The reason (that) we need new guidelines **is that** the present ones are just not working.

The reason that the building industry declined **was that** the interest rate on loans was so high.

در حالت‌های غیررسمی می‌توانیم به جای *that* از *because* هم استفاده کنیم:

The reason (that) we need new guidelines **is because** the present ones are just not working.

The reason that the building industry declined **was because** the interest rate on loans was so high.

پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۳۹- گزینه «۳» آسپرین، نام رایج برای استیل‌سالیسیلیک اسید، به عنوان یک دارو برای تسکین درد بسیار *پُر کاربرد* است. توضیح گرامری: گزینه‌ی (۱) رد می‌شود چون کاربرد *that* بعد از *as much as* ممنوع است. گزینه‌ی (۲) با توجه به ترجمه کنار می‌رود: «آسپرین که نام رایجش برای استیل‌سالیسیلیک اسید، به عنوان یک دارو برای تسکین درد بسیار *پُر کاربرد* است.» گزینه‌ی (۴) به دو دلیل رد می‌شود. اولاً به خاطر عدم حضور حرف تعریف *the* قبل از *common name* و دوماً به خاطر غیرضروری بودن *being*. این هم اصل جمله:

Aspirin, which is the common name for acetylsalicylic acid, is widely used like a drug...

می‌توانیم *which is* را حذف کنیم:

Aspirin, the common name for acetylsalicylic acid, is widely used like a drug...

۴۰- گزینه «۱» ریشه داشتن در بسیاری از چالش‌ها و نوآوری‌های رشته‌های مختلف به این معناست که کسی که در مهندسی مکانیک آموزش می‌بیند، همه‌فن حریف است.

توضیح گرامری: فاعل این جمله یک عبارت چند کلمه‌ای است:

Being ingrained in many challenges and innovations across many fields

بعد از فاعل باید فعل اصلی بیاید. فقط گزینه‌ی (۱) فعل اصلی است، بنابراین بقیه‌ی گزینه‌ها رد می‌شوند.

همچنین دقت کنید در فاعل چند کلمه‌ای بالا باید اولین کلمه یعنی *being* (در واقع یک جراند) ملاک تطابق فعل و فاعل قرار بگیرد. به همین دلیل فعل باید به صورت *means* باشد.

Being ingrained in many challenges and innovations across many fields means ...

همچنین دقت کنید در اینجا بعد از فعل *means* یک *that* داشتیم که حذف شده.

Being ingrained in many challenges and innovations across many fields means that a mechanical engineering education is versatile.

بخش دوم: واژگان

دستورالعمل: در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۴۱- گزینه «۳» ما مجبور هستیم آزمایش را تکرار کنیم چون نتایج آن قطعی و مسلم نبودند.

۱	equivocal	۲	credulous	زودباور، ساده‌لوح
۳	conclusive	۴	spontaneous	خودجوش، بی‌مقدمه
			چندپهلو، مبهم	
			مسلم، قطعی	

۴۲- گزینه «۲» مجوز پزشکی آن دکتر باطل شد پس از اینکه مشخص شد او از روی حرص و طمع بیش از حد، به مراجعه‌کنندگان سالم می‌گفته شما بیماری را تا بابت جراحی‌ها و عمل‌هایی که آنها به آن نیاز نداشتند، بیمه را سر کیسه کند.

۱	overlook	۲	revoke	لغو کردن، باطل کردن
۳	diminish	۴	belittle	کوچک و کم ارزش شمردن
	sheer		cupidity	حرص و طمع
	diagnose		pocket	به جیب زدن
			نادیده گرفتن	
			کاستن، کم کردن	
			صرف، محض	
			تشخیص دادن (بیماری)	

۴۳- گزینه «۴» وقتی او برای آن شغل انتخاب نشد (به آن شغل دست پیدا نکرد)، از شرکت استخدام‌کننده درخواست فیدبک و بازخورد سازنده کرد تا به او در استخدام‌های بعدی‌اش کمک کند.

۱ unexceptional	۲ foreseeable	قابل پیش بینی
۳ hierarchical	۴ constructive	سازنده (مثلاً انتقاد، بازخورد، پیشنهاد)
	عادی، غیراستثنایی	
	سلسله مراتبی	

۴۴- گزینه «۲» گرچه سعی می‌کردم از شما تعریف و تمجید کنم، اما متأسفانه شما تصمیم گرفتید که حرف‌های من را به عنوان توهین برداشت کنید.

۱ adopt	۲ construe	برداشت کردن، تلقی کردن، تفسیر کردن
۳ contribute	۴ qualify	واجد شرایط بودن
pay sb a compliment	insult	توهین
	از کسی تعریف و تمجید کردن	
	کمک کردن، سهمی داشتن	

۴۵- گزینه «۱» آن دو قلوها به طور همزمان (در یک زمان) مدرسه را شروع کردند، اما همزمان فارغ التحصیل نشدند.

۱ simultaneously	۲ interchangeably	به جای هم، به صورت قابل تبادل
۳ symmetrically	۴ chronologically	به ترتیب وقوع زمانی
	به صورت همزمان	
	به صورت متقارن	

۴۶- گزینه «۲» اگرچه ما در مورد اینکه اهدافمان چه باشد توافق داریم، اما بر سر ابزار دستیابی به آنها با هم اختلاف نظر داریم.

۱ monotony	۲ accord	توافق
۳ homogeneity	۴ jeopardy	خطر، مخاطره
	یکنواختی	
	یک‌شکلی، همسانی	

۴۷- گزینه «۴» منظره دارد به سمت دوگانگی و اختلاف می‌رود و به نظر می‌رسد وجه اشتراک کمی بین طرفین وجود دارد.

توضیح: اصطلاح middle ground یعنی «وجه اشتراک» و تا حدودی با common ground هم معنی است.

۱ affordable	۲ unrecognizable	غیرقابل تشخیص
۳ palatable	۴ memorable	فراموش‌نشدنی، به یادماندنی
	قابل خرید، قابل پرداخت	
	خوشمزه، خوش‌طعم	

۴۹- گزینه «۱» به خاطر عجله برای بستن بار و بندیل و رفتن به سفر کمپینگی که مدت‌ها منتظرش بودیم، فراموش کردیم چادر بیاوریم.

۱ haste	۲ scheme	طرح، نقشه، تدبیر
۳ apathy	۴ collaboration	همکاری
	عجله، شتابزدگی	
	بی‌علاقگی، بی‌هیجانی	

۵۰- گزینه «۲» هر گونه اختلافی بر سر مسائل مالی به احتمال زیاد آن رابطه را به ضرر هر دو طرف تلخ خواهد کرد.

۱ intensity	۲ detriment	ضرر، زیان
۳ barrier	۴ isolation	انزوا، گوشه‌نشینی
dispute	sour a relationship	رابطه‌ای را تلخ کردن (بر هم زدن)
	شدت	
	مانع	
	نزاع، بگومگو	

بخش سوم: درک مطلب

دو متن زیر را بخوانید و از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) گزینه‌ای را انتخاب کنید که برای هر سؤال بهترین پاسخ باشد. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

متن ۱:

در کشوری که دولت و خانواده‌ها به طور یکسان، صرفه‌جویی می‌کنند و می‌کوشند با کمترین‌ها سر کنند، ممکن است شما بابت این طرز تفکر که آموزش خصوصی هم‌اکنون در مضیقه قرار دارد، بخشیده شوید. با این حال، با این که هزینه‌های آموزشی در مدارس خصوصی بریتانیا در طول دو و نیم دهه گذشته تقریباً دو برابر شده، ولی تعداد دانش‌آموزان، به بالاترین میزان از زمان شروع ثبت‌ها در سال ۱۹۷۴ رسیده است. با وجود این که دلایل متعددی وجود دارد که چرا والدین به طور متوسط هر سال ۱۲۵۰۰ پوند بابت آموزش فرزندشان هزینه می‌کنند، اما یک دلیل قطعی وجود دارد که از سایر دلایل برجسته‌تر است: شهرت آنها به خاطر ورود دانشجویان به دانشگاه‌هایی نخبه‌مانند دانشگاه آیوی لیگ و معتبرترین دانشگاه‌های بریتانیا: آکسفورد و کمبریج. مدارس خصوصی باتجربه در این فرآیندهای پذیرشی، مانند ماشین‌های روغن‌کاری شده، کار می‌کنند. مشاوران شغلی آگاه این مدارس، دانش تاکتیکی عمیقی درباره این موضوع دارند که کدام کالج برای هر داوطلب مناسب‌تر است و به آنها کمک می‌کنند تا اظهارات شخصی خود را برای بازتاب ویژگی‌هایی که دانشگاه‌های نخبه در پی آن هستند، ویرایش کنند. جلسات آموزشی مصاحبه، متقاضیان جوان را از طریق سیستم مصاحبه‌ای راهنمایی می‌کنند؛ یعنی سیستمی که بیش از آن که یادآور عدالت جامعه باشد، شبکه‌های مافیایی را به یاد می‌آورد. آنهایی که اعضای خانواده و معلمان دارند که فرآیند پذیرش را با موفقیت پشت سر گذاشته‌اند، نسبت به کسانی که برای اولین بار در گروه اجتماعی خود درخواست می‌کنند، از مزیت قابل توجهی برخوردارند.

در نتیجه، ترکیب اجتماعی دانشجویان در دانشگاه‌های برتر، متأسفانه باعث ایجاد تعصب نسبت به افراد ثروتمند و تحصیل کرده خصوصی شده است. اگرچه به لطف افزایش تعداد بورسیه‌هایی که آموزش مدارس خصوصی رایگان برای جوانان با استعداد تحصیلی فراهم کرده، آموزش در یکی بدون دیگری نیز امکان پذیر شده است. با این حال، واقعیت این است که ۷٪ از کودکان بریتانیایی به مدارس خصوصی می‌روند در حالی که بیش از ۴۰٪ از پذیرفته‌شدگان در دانشگاه آکسفورد و کمبریج، در مدارس خصوصی تحصیل کرده‌اند و این آمار و ارقام، نشان‌دهنده روندی منحرف و نگران‌کننده است. این نسبت از اهمیت بالایی برخوردار است زیرا با وجود این که کاملاً بدیهی است که دانشگاه‌های بیشتری وجود دارند که برنامه‌های تحصیلی عالی ارائه می‌دهند، ولی بدون شک، مدرک آکسبریج یا آیوی لیگ، قابلیت استخدام در حرفه‌های حاکم را افزایش می‌دهد. طبق مطالعه‌ای که اخیراً توسط موسسه خیریه آموزشی ساتون تراست در انگلستان انجام گرفته، بیش از ۳۰٪ از متخصصان برجسته در بریتانیا، از جمله تقریباً ۸۰٪ از وکلا، ۴۷٪ از پیشگامان خدمات مالی و ۴۱٪ از روزنامه نگاران برتر، در دانشگاه آکسفورد یا کمبریج بوده‌اند.

۵۱- گزینه «۱» بهترین عنوان برای متن چیست؟

- (۱) آموزش نابرابر در بریتانیا
(۲) استانداردهای آموزشی رو به مرگ (moribund)
(۳) عدم حرکت (عدم جابجایی) تضاد طبقاتی در بریتانیا
(۴) فرصت‌های کمتر برای همه
- توضیح: اگر متن را دقیق بخوانیم می‌بینیم کل متن درباره آموزش نابرابر در بریتانیا بحث می‌کند.

۵۲- گزینه «۳» عبارت in a bit of a jam (در مضیقه) در پاراگراف اول به لحاظ معنایی به نزدیک است.

۱ overwhelmed with demand	۲ under severe attack	مورد حمله (یا انتقاد) شدید
۳ in a difficult situation	۴ on its last legs	در یک وضعیت بد (یا به صورت خودمانی «داره نفس‌های آخرش می‌کشه»)
زیر فشار یک تقاضا بودن	در مضیقه	

۵۳- گزینه «۳» طبق متن، مهم‌ترین دلیلی که والدین بریتانیایی تصمیم می‌گیرند فرزندان خود را به مدارس خصوصی بفرستند این است که فرصت‌های شغلی فرزندان‌شان در آینده تا حدودی تضمین باشد.

توضیح: وقتی از عبارت according to the passage استفاده می‌کنیم، جواب باید به وضوح توی متن ذکر شده باشد. متن مهم‌ترین دلیل را چیز دیگری معرفی کرده:

Although there are **numerous reasons** why parents might choose to fork out an average of £12,500 per year on their child's education, **there is one which stands out more than any other: their reputation for getting their students into elite universities**, such as the Ivy League colleges and Britain's most prestigious universities: Oxford and Cambridge.

این یعنی دلیل اصلی که والدین بریتانیایی تصمیم می‌گیرند فرزندان خود را به مدارس خصوصی بفرستند این است که می‌خواهند آنها وارد دانشگاه‌های تاپ مثل آکسفورد و کمبریج شوند (که این در هیچ یک از گزینه‌ها نیامده). درست است کسی که در دانشگاه تاپ درس بخواند، فرصت‌های شغلی‌اش تا حدودی تضمین شده است، اما این فقط یک inference (استنباط) خواهد بود، اما صورت سوال از واژه infer استفاده نکرده بنابراین این اساسی‌ترین ایرادی است که می‌شود به گزینه (۳)، گزینه انتخابی سازمان سنجش) وارد کرد.

۵۴- گزینه «۲» صورت سؤال مرجع ضمیر one را از ما خواسته. مرجع این ضمیر باید یک اسم مفرد باشد نه اسم جمع. در واقع در این متن، ضمیر one به academically gifted youngster برمی‌گردد که در بین گزینه‌ها تنها گزینه (۲) به جواب نزدیک است.

۵۵- گزینه «۴» چرا نویسنده به آمار و ارقام گزارش شده توسط موسسه خیریه «ساتون تراست» اشاره می‌کند؟
گزینه (۴): تا از یک ادعای قبلی حمایت کنید.

توضیح: تقریباً هر سال، یک سؤال این تپیی داریم. جواب این سؤالات در ۹۹/۹ درصد مواقع گزینه‌ای است که حاوی کلمات cast light on, back up, support و مواردی مثل این باشد. در واقع در این متن، نویسنده به این خاطر به آمار و ارقام گزارش شده توسط موسسه خیریه «ساتون تراست» اشاره می‌کند که جمله پُررنگ زیر را تقویت کند:

The proportion matters because, although there are obviously plenty of other universities offering excellent study programs, **an Oxbridge or Ivy-League degree undoubtedly enhances employability in the ruling professions**. According to recent studies by the UK educational charity "The Sutton Trust", over 30% of leading professionals in the United Kingdom, including almost 80% of lawyers, 47% of highflyers in financial services and 41% of top journalists attended Oxford or Cambridge.

گزینه (۱) هم حاوی کلمه support است اما این گزینه در صورتی درست است که به جای quality of education از واژه‌ای نظیر employment opportunities استفاده می‌شد.

راهنمایی: با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۲۰ تا ۲۳ پاسخ دهید.

دو خواهر به نام‌های زهرا و فاطمه (نه لزوماً به ترتیب)، یکی، یک فرزند پسر به نام وحید و دیگری، دو فرزند دختر به نام‌های دنیا و رؤیا. دنیا و رؤیا نیز (نه لزوماً به ترتیب)، یکی، یک فرزند پسر به نام سعید و دیگری، یک فرزند دختر به نام پروانه دارد. هیچ نسبتی دیگر، بین این ۷ نفر وجود ندارد و قرار است با توجه به اطلاعات و محدودیت‌های زیر، آن‌ها را با حروف انگلیسی A تا G نامگذاری کنیم.

– B که فاطمه نیست، یک فرزند پسر دارد.

– A، خاله C و C، مادر فردی غیر از D است.

– دنیا، خاله D بوده و E، خواهرزاده فردی غیر از G است.

۲۰- اگر فاطمه همان G باشد، A چه نسبتی با F دارد؟

- (۱) خاله مادر (۲) خواهر (۳) خاله (۴) مادر

۲۱- اگر F یک پسر باشد، نام چند نفر از ۷ نفر، به صورت حروف الفبای انگلیسی، به طور قطع مشخص می‌شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۲۲- اگر G نوه فاطمه باشد، کدام مورد زیر، صحیح است؟

- (۱) G، دختر رؤیاست. (۲) A، مادر E است. (۳) F، خواهر فاطمه است. (۴) B و G، فرزند یک مادر هستند.

۲۳- اگر زهرا خاله G باشد، کدام مورد زیر، صحیح است؟

- (۱) E، همان وحید است. (۲) A، همان زهرا است. (۳) C، مادر E است. (۴) B، دختر G است.

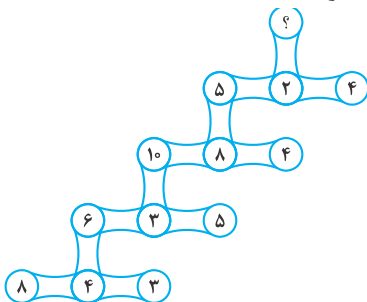
بخش چهارم: حل مسئله

راهنمایی: این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمی، شامل مقایسه‌های کمی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و... تشکیل شده است.

• توجه داشته باشید به‌خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

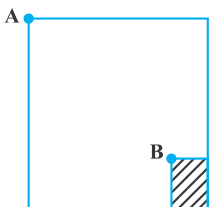
راهنمایی: هر کدام از سؤال‌های ۲۴ تا ۲۷ را به‌دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۲۴- در شکل زیر، بین اعداد ارتباط خاص و یکسانی برقرار است. به جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار بگیرد؟



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۱۰

۲۵- در مربع زیر، مستطیلی به نسبت اضلاع ۱ به ۲ دیده می‌شود که مساحتش ۸ درصد مساحت مربع است. فاصله نقطه A و B، چند برابر طول ضلع مربع است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{5}{8}$
(۳) ۱
(۴) $\frac{1}{2}$

۲۶- فردی ۶۰ درصد از اموال خود را بین A و B به ترتیب به نسبت ۲ به ۳ تقسیم می‌کند. وی باقی اموالش را بین A و B به ترتیب با چه نسبتی باید تقسیم کند تا نهایتاً به هر دو نفر، به یک میزان ارث رسیده باشد؟

- (۱) ۷ به ۱۳ (۲) ۳ به ۷ (۳) ۲ به ۳ (۴) ۱ به ۴

۲۷- یک مرغداری دارای ۳ سوله A، B و C است. به ازای هر ۱۲ مرغ که در سوله A قرار دارد، در دو سوله دیگر، جمعاً ۲۷ مرغ و به ازای هر ۱۲ مرغ که در سوله C قرار دارد، در دو سوله دیگر، ۲۸ مرغ وجود دارد. در این مرغداری، حداقل چند مرغ وجود دارد؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۳۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۶۰

راهنمایی: سؤال ۲۸، شامل دو مقدار یا کمیت است، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورالعمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

- اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه (۱) را علامت بزنید.
- اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه (۲) را علامت بزنید.
- اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه گزینه (۳) را علامت بزنید.
- اگر براساس اطلاعات داده شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بین مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه گزینه (۴) را علامت بزنید.

۲۸- از هر کدام از وزنه‌های ۲، ۵ و ۷ کیلوگرمی، ۳ عدد در اختیار داریم. با قراردادن تعدادی از وزنه‌ها در یک کفه ترازو و یک کیسه حاوی برنج در کفه دیگر، قرار است وزن کیسه برنج را محاسبه کنیم.

(ب)

(الف)

تعداد حالات ممکن مختلف که
می‌توان یک کیسه ۲۱ کیلوگرمی
را وزن کرد.

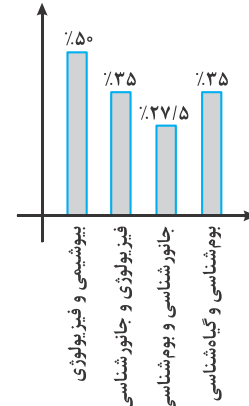
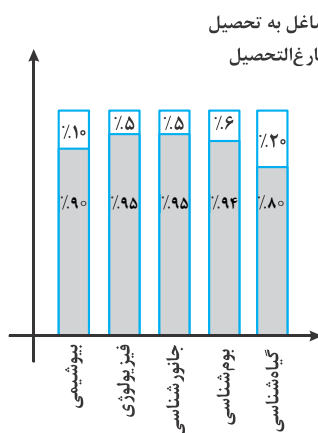
تعداد حالات ممکن مختلف که
می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلوگرمی
را وزن کرد.

راهنمایی: با توجه به اطلاعات و نمودارهای زیر، به سؤال‌های ۲۹ و ۳۰ پاسخ دهید.

تعداد دانشجویان گروه‌های پنج‌گانه «بیوشیمی»، «فیزیولوژی»، «جانورشناسی»، «بوم‌شناسی» و «گیاه‌شناسی» دانشکده زیست‌شناسی یک دانشگاه در دو ترم اول و دوم یک سال خاص جمع‌آوری شده است. در ترم دوم، از هر ۱۰ نفر، یک نفر فارغ‌التحصیل شده است. نمودار ۱، درصد تعداد دانشجویان هر دو گروه ذکر شده در ترم اول را از مجموع دانشجویان ۵ گروه در همان ترم و نمودار ۲، در هر گروه، سهم تعداد فارغ‌التحصیلان و دانشجویان را در ترم دوم به تفکیک هر گروه نشان می‌دهد.

نمودار ۱: «درصد تعداد دانشجویان هر دو گروه در ترم اول، از مجموع دانشجویان ۵ گروه در همان ترم»

نمودار ۲: «سهم تعداد فارغ‌التحصیلان و دانشجویان در ترم دوم به تفکیک هر گروه»



۲۹- اگر در ترم اول، نسبت دانشجویان بیوشیمی به جانورشناسی ۲ به ۱ باشد، چند درصد از فارغ‌التحصیلان ترم دوم، از گروه بوم‌شناسی بوده‌اند؟

(۴) ۶

(۳) ۷/۵

(۲) ۱۲/۵

(۱) ۱۴

۳۰- اگر ۴۵ درصد از فارغ‌التحصیلان ترم دوم از گروه گیاه‌شناسی باشند، نسبت تعداد فارغ‌التحصیلان بیوشیمی به فیزیولوژی کدام است؟

(۴) ۳ به ۱

(۳) ۳ به ۴

(۲) ۲ به ۱

(۱) ۲ به ۳

۲۳- گزینه «۳» اگر زهرا خاله G باشد آنگاه حتماً وحید باید G و فرزند فاطمه باشد. بر این اساس جدول جدید به صورت زیر خواهد بود:

	A	B	C	D	E	F	G
زهرا	○	⊗	⊗	⊗	⊗	○	⊗
فاطمه	○	⊗	⊗	⊗	⊗	○	⊗
وحید	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	≡
دنیا	⊗	⊗	≡	⊗	⊗	⊗	⊗
رویا	⊗	≡	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
سعید	⊗	⊗	⊗	≡	⊗	⊗	⊗
پروانه	⊗	⊗	⊗	⊗	○	○	⊗

بر این اساس حتماً پروانه E خواهد بود.

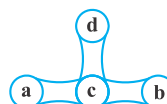
همچنین چون A خاله C است، پس قطعاً فاطمه A و زهرا F خواهد بود و همه افراد مشخص می‌شوند.

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: گزینه (۱): نادرست، G وحید است و E پروانه است. گزینه (۲): نادرست، A فاطمه است و F زهرا است. گزینه (۳): درست، F (زهرا) خواهر A (فاطمه) است. گزینه (۴): نادرست، B (رویا) دختر خاله G (وحید) است.

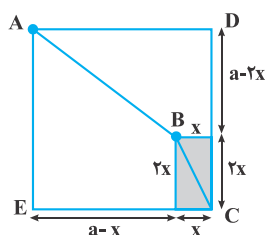
بخش چهارم: حل مسأله

$$4 \times 5 = 2 \times ? \Rightarrow ? = 10$$

رابطه به صورت $ab = cd$ می‌باشد. بنابراین داریم:



۲۴- گزینه «۴» در هر ترکیب

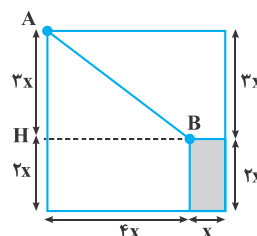


۲۵- گزینه «۳» فرض می‌کنیم طول ضلع مربع a و عرض مستطیل x باشد، طبق اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\frac{2x \times x}{a^2} = \frac{8}{100} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{100} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{2}{10} \Rightarrow \boxed{a = 5x}$$

حالا می‌توان شکل را به صورت مقابل ترسیم کرد:

در مثلث ABH که قائم‌الزاویه است، رابطه‌ی فیثاغورث را می‌نویسیم:



$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow (3x)^2 + (4x)^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 25x^2 \Rightarrow AB = 5x$$

طراح نسبت AB به ضلع مربع را خواسته و چون طول ضلع مربع هم 5x بود، لذا نسبت ۱ می‌شود.

۲۶- گزینه «۱» فرض می‌کنیم کل ارث ۱۰۰ واحد باشد. به A و B مجموعاً ۶۰ درصد ارث رسیده است.

$$\begin{cases} A + B = 60 \\ \frac{A}{B} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}B + B = 60 \xrightarrow{\text{طرفین رابطه ضربدر ۳}} 2B + 3B = 180 \Rightarrow 5B = 180 \Rightarrow B = 36 \Rightarrow A = 24$$

باقی‌مانده ۴۰ واحد است که باید ۲۶ واحد به A و ۱۴ واحد به B بدهد تا هر دو نفر ۵۰ واحد داشته باشند؛ پس نسبت $\frac{14}{26}$ و یا $\frac{7}{13}$ است.

۲۷- گزینه «۲» تعداد مرغ‌های سوله A را با A، سوله B را با B و سوله C را با C نمایش می‌دهیم و اطلاعات صورت سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\frac{A}{B+C} = \frac{12}{27} \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} \frac{A}{B+C} = \frac{4}{9} \quad (1)$$

$$\frac{C}{A+B} = \frac{12}{28} \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۴}} \frac{C}{A+B} = \frac{3}{7} \quad (2)$$

با توجه به نسبت (۱) می‌دانیم حداقل تعداد مرغ‌ها باید مضرب ۱۳ باشد ($4+9=13$) و با توجه به نسبت (۲) متوجه می‌شویم که حداقل تعداد مرغ‌ها باید مضرب ۱۰ هم باشد. پس حداقل تعداد مرغ‌ها با توجه به گزینه‌ها باید ۱۳۰ باشد.

۲۸- گزینه «۱» از هر کدام از وزنه‌های ۲، ۵ و ۷ کیلوگرمی، ۳ عدد در اختیار داریم. با این وزنه‌ها قرار است کیسه برنج را وزن کنیم. محاسبه‌ی مقدار ستون (الف): برای وزن کردن یک کیسه ۲۱ کیلوگرمی به شکل‌های زیر می‌توان در کفه دیگر ترازو وزنه قرار داد:

حالت (۱): ۳ وزنه ۷ کیلوگرمی ($3 \times 7 = 21$)

حالت (۲): ۳ وزنه ۵ کیلوگرمی و ۳ وزنه ۲ کیلوگرمی ($3 \times 5 + 3 \times 2 = 21$)

حالت (۳): دو وزنه ۷ کیلوگرمی، یک وزنه ۵ کیلوگرمی و یک وزنه ۲ کیلوگرمی ($2 \times 7 + 1 \times 5 + 1 \times 2 = 21$)

حالت (۴): دو وزنه ۵ کیلوگرمی، دو وزنه ۲ کیلوگرمی و یک وزنه ۷ کیلوگرمی ($2 \times 5 + 2 \times 2 + 1 \times 7 = 21$)

پس ۴ حالت وجود دارد؛ یعنی مقدار ستون (الف) برابر با ۴ است.

محاسبه‌ی مقدار ستون (ب): برای وزن کردن یک کیسه ۲۳ کیلوگرمی حالات زیر وجود دارد:

حالت (۱): دو وزنه ۷ کیلوگرمی، یک وزنه ۵ کیلوگرمی و دو وزنه ۲ کیلوگرمی ($2 \times 7 + 1 \times 5 + 2 \times 2 = 23$)

حالت (۲): سه وزنه ۷ کیلوگرمی و یک وزنه ۲ کیلوگرمی ($3 \times 7 + 1 \times 2 = 23$)

حالت (۳): دو وزنه ۵ کیلوگرمی، یک وزنه ۷ کیلوگرمی و سه وزنه ۲ کیلوگرمی ($2 \times 5 + 1 \times 7 + 3 \times 2 = 23$)

پس مقدار ستون (ب) برابر با ۳ است. چون مقدار ستون (الف) برابر با ۴ و مقدار ستون (ب) برابر با ۳ به دست آمد، پس جواب گزینه (۱) است.

۲۹- گزینه «۳»

$$\frac{\text{درصد بیوشیمی}}{\text{درصد جانورشناسی}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \text{درصد جانورشناسی} = 2 \times \text{درصد بیوشیمی}$$

$$15\% = \text{درصد جانورشناسی} = \text{درصد جانورشناسی} - \text{درصد بیوشیمی} = (\text{درصد فیزیولوژی و جانورشناسی}) - (\text{درصد بیوشیمی و فیزیولوژی})$$

$$\left. \begin{aligned} 27\% / 5 &= \text{جانورشناسی} + \text{بوم‌شناسی} \\ 15\% &= \text{جانورشناسی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 27\% / 5 - 15\% = 12\% / 5 = \text{تعداد دانشجویان بوم‌شناسی}$$

$$\frac{\text{فارغ التحصیلان بوم‌شناسی}}{\text{کل فارغ التحصیلان}} = \frac{12\% / 5 \times 6\%}{10\%} = 7\% / 5$$

بر اساس نمودار (۲) داریم:

۳۰- گزینه «۴»

A: دانشجویان بیوشیمی

B: دانشجویان فیزیولوژی

C: دانشجویان جانورشناسی

D: دانشجویان بوم‌شناسی

E: دانشجویان گیاه‌شناسی

T: کل دانشجویان

$$\Rightarrow \text{نمودار ۱} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{1}{2}T & (1) \\ B + C = \frac{7}{20}T & (2) \\ C + D = \frac{11}{40}T & (3) \\ D + E = \frac{7}{20}T & (4) \end{cases} \quad \Rightarrow \text{نمودار ۲} \Rightarrow \frac{A}{10} + \frac{B}{20} + \frac{C}{20} + \frac{2D}{50} + \frac{E}{5} = \frac{T}{16}$$

$$\Rightarrow \text{سؤال} \Rightarrow \frac{9}{20} \times \frac{T}{\cancel{20}} = \frac{E}{\cancel{40}} \Rightarrow E = \frac{9}{40}$$

$$(4) D = \frac{5}{40}T \quad (3) C = \frac{6}{40}T \quad (2) B = \frac{1}{40}T \quad (1) A = \frac{12}{40}T$$

$$\frac{\frac{A}{10}}{\frac{B}{20}} = ? \Rightarrow \frac{2A}{B} = \frac{24T}{8T} = \frac{3}{1}$$



سؤالات فیزیک

مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته - الکترومغناطیس و الکترومغناطیس - ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱)

۱- عملگر $a = i|1\rangle\langle 2|$ را که در آن $|1\rangle$ و $|2\rangle$ حالت‌های بهنجار متعامد هستند در نظر بگیرید. حاصل جابه‌جاگر $[a, a^\dagger]$ کدام است؟ ($i = \sqrt{-1}$)

$$(1) |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| \quad (2) |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \quad (3) |1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1| \quad (4) |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$$

۲- هامیلتونی دستگاهی به صورت $\hat{H} = \hat{a}_0^\dagger + \hat{\sigma} \cdot \vec{a}$ است که در آن $\hat{a}_0$ ماتریس واحد، $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برداری حقیقی با مؤلفه‌های a_i ضربی حقیقی و $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ است. σ_i ها ($i = 1, 2, 3$) ماتریس‌های پائولی هستند. قدرمطلق تفاضل بین ویژه مقادیر انرژی این دستگاه کدام است؟

$$(1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2} \quad (2) \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (3) \sqrt{a_1^2 + |a_2|^2 - a_3^2} \quad (4) 2(a_1 + a_2 + a_3)$$

۳- عملگر $S_n = \hat{S} \cdot \hat{n}$ را که در آن $\hat{n} = \sin\beta\hat{i} + \cos\beta\hat{k}$ ، $\hat{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ و σ ها ماتریس‌های پائولی هستند در نظر بگیرید. نمایش عملگر S_n در پایه $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ، ویژه حالت‌های عملگر S_z ، کدام است؟

$$(1) \frac{\hbar}{2} \cos\beta(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta(|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|) \quad (2) \frac{\hbar}{2} \cos\beta(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) \\ (3) \frac{\hbar}{2} \cos\beta(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) \quad (4) \frac{\hbar}{2} \cos\beta(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta(|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|)$$

۴- اگر $|n\rangle$ ویژه حالت انرژی یک نوسانگر هماهنگ ساده یک‌بعدی به جرم m و بسامد زاویه‌ای ω و $\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{x} + \frac{i\mathbf{p}}{m\omega})$ عملگر پایین‌آورنده باشد، حاصل عبارت $\langle m|\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{x}|n\rangle$ کدام است؟

$$(1) i\hbar(\sqrt{(m+1)n}\delta_{m+1,n-1} - \sqrt{m(n+1)}\delta_{m-1,n+1}) \quad (2) i\hbar(-\sqrt{m(m-1)}\delta_{m-2,n} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}) \\ (3) i\hbar(\sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{m+2,n} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}) \quad (4) i\hbar(\sqrt{m(n+1)}\delta_{m-1,n+1} - \sqrt{n(m+1)}\delta_{m+1,n-1})$$

۵- ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل نامتناهی یک‌بعدی به عرض a ، $(0 < x < a)$ ، قرار دارد. تبدیل فوریه انتشارگر این ذره $\tilde{K}(x, x'; E) = \int_0^a dt e^{\frac{iEt}{\hbar}} K(x, t; x', 0)$ کدام است؟

$$\tilde{K}(x, x'; E) = \frac{2i\hbar}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi x'}{a})}{E + \frac{n^2 \hbar^2}{4ma^2}} \quad (2) \tilde{K}(x, x'; E) = \sqrt{\frac{2}{a}} i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) + \sin(\frac{n\pi x'}{a})}{E - \frac{n^2 \hbar^2}{4ma^2}} \\ \tilde{K}(x, x'; E) = \frac{2i\hbar}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi x'}{a})}{E - \frac{n^2 \hbar^2}{4ma^2}} \quad (4) \tilde{K}(x, x'; E) = \sqrt{\frac{2}{a}} i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) + \sin(\frac{n\pi x'}{a})}{E + \frac{n^2 \hbar^2}{4ma^2}}$$

۶- در یک فضای سه‌بعدی، ماتریس چگالی یک دستگاه برحسب پایه‌های بهنجار متعامد $|\Psi_1\rangle$ ، $|\Psi_2\rangle$ ، $|\Psi_3\rangle$ به شکل $\rho = \cos^2\theta |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \sin^2\theta |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + 2\sin^2\theta \cos^2\theta |\Psi_2\rangle\langle\Psi_3|$ است که در آن $0 \leq \theta \leq \pi$ می‌باشد. اگر $[A]$ میانگین آنسامبلی عملگر $A = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ باشد که در آن $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_3\rangle$ کدام نامساوی درست است؟

$$\frac{1}{4} \leq [A] \leq \frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{8} \leq [A] \leq \frac{3}{8} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \leq [A] \leq \frac{3}{8} \quad (2) \quad \frac{1}{8} \leq [A] \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

۷- ذرات با اسپین ۱ را از یک دستگاه اشتراک - گریز که میدان مغناطیسی آن در جهت $\hat{n} = \sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k}$ است عبور می‌دهیم. این دستگاه مشاهده‌پذیر $\hat{S} \cdot \hat{n}$ را اندازه‌گیری می‌کند. ذرات خروجی را که دارای ویژه مقدار بزرگتر هستند جدا می‌کنیم و آن‌ها را از دستگاه اشتراک - گریز دیگری که میدان مغناطیسی آن در جهت $\hat{k}$ است عبور می‌دهیم. احتمال این که ذرات خروجی از دستگاه دوم دارای $S_z = \hbar$ باشند، چقدر است؟

$$d^{(1)}(\beta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos\beta & -\sqrt{2}\sin\beta & 1 - \cos\beta \\ \sqrt{2}\sin\beta & 2\cos\beta & -\sqrt{2}\sin\beta \\ 1 - \cos\beta & \sqrt{2}\sin\beta & 1 + \cos\beta \end{bmatrix} \quad \text{در صورت نیاز:} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (4) \quad \sin^4 \frac{\theta}{2} \quad (3) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (2) \quad \cos^4 \frac{\theta}{2} \quad (1)$$



۸- $X^{(k_1=2)} Z^{(k_2=3)}$ و $Z^{(k_1=3)} X^{(k_2=2)}$ دو تانسور کروی تقلیل‌ناپذیر رتبه ۲ و ۳ هستند. از ترکیب خطی مؤلفه‌های مختلف حاصل ضرب این دو، $X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$ می‌توان تانسور کروی تقلیل‌ناپذیر رتبه k ساخت. کدام مقادیر را می‌تواند اختیار کند؟

$$(1) \quad k=1, k=3, k=5 \quad (2) \quad k=0, k=2, k=4 \quad (3) \quad k=2, k=4, k=6 \quad (4) \quad k=0, k=3, k=6$$

۹- $D^{(j)} = e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{J} \cdot \hat{n} \phi}$ عملگر دوران حول $\hat{n}$ به اندازه ϕ است. برای $\hat{n}$ و ϕ دلخواه، عملگر $D^{(j_1=\frac{1}{2})} \otimes D^{(j_2=\frac{1}{2})}$ در پایه‌های $|j, m\rangle$ حداکثر چند عنصر صفر دارد؟ $(|j, m\rangle)$ ویژه حالت مشترک J_z و J^2 است که $\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \vec{1} + \vec{1} \otimes \vec{J}_2$ است. (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰- هامیلتونی دستگاهی به شکل $H = \sum_{n=1}^N E_0 |n\rangle \langle n| + \sum_{n=1}^N W \{ |n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n| \}$ است که حالت‌های $|n\rangle$ متعامد و بهنجار هستند و E_0 و W ضرایب ثابت‌اند. اگر شرط تناوبی $|N+1\rangle = |1\rangle$ برقرار باشد، ویژه مقادیر H کدام‌اند؟ $(n=1, 2, \dots, N)$

$$(1) \quad E_n = E_0 + 2W \sin \frac{\pi n}{N} \quad (2) \quad E_n = E_0 + 2W \cos \frac{\pi n}{N} \quad (3) \quad E_n = E_0 + 2W \cos \frac{\pi n}{N} \quad (4) \quad E_n = E_0 + 2W \sin \frac{\pi n}{N}$$

۱۱- اگر θ عملگر وارون زمان، $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه حالت‌های ماتریس پائولی σ_z و $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$ باشد، کدام عبارت صحیح است؟

$$(1) \quad \theta^2 |\alpha\rangle = |\alpha\rangle \quad (2) \quad \theta^2 |\alpha\rangle = -|\alpha\rangle$$

$$(3) \quad \theta^2 |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (4) \quad \theta^2 |\alpha\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

۱۲- هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ ساده سه‌بعدی همسانگرد $\vec{P} \cdot \vec{P} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x} \cdot \vec{x}$ است. اگر این نوسانگر با انرژی پتانسیل $\lambda y x^2 z$ مختل شود، انرژی نخستین حالت برانگیخته تا اولین مرتبه غیرصفر λ کدام است؟ $(\vec{x}$ و $\vec{P}$ به ترتیب عملگر مکان و تکانه خطی در سه بعد هستند.)

$$(1) \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \pm 2\lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2, \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (2) \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \pm \frac{2}{\hbar \omega} \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4, \frac{3}{2} \hbar \omega$$

$$(3) \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \pm \frac{1}{\hbar \omega} \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4, \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (4) \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \pm \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2, \frac{3}{2} \hbar \omega$$

۱۳- ذره‌ای به جرم m در لحظه $t=0$ در حالت پایه یک چاه کوانتومی بی‌نهایت یک‌بعدی که دیواره‌هایش در $x=0$ و $x=a$ است، قرار دارد. این

ذره برای زمان‌های $0 \leq t < \infty$ تحت تأثیر پتانسیل اختلالی $V(t) = \lambda x^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ قرار می‌گیرد که در آن x عملگر مکان، τ پارامتر حقیقی ثابت و λ عدد حقیقی بسیار کوچکی هستند. احتمال آن که ذره در لحظه دلخواه $t \geq 0$ در اولین حالت برانگیخته چاه یافت شود، کدام است؟ $(\omega_1 = \frac{3\pi^2 \hbar}{2ma^2})$

$$(1) \quad \left(\frac{4a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2 \quad (2) \quad \left(\frac{16a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2$$

$$(3) \quad \left(\frac{4a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} - 2e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2 \quad (4) \quad \left(\frac{16a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} - 2e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2$$

۱۴- سطح مقطع پراکندگی کل کشسان ذره‌ای به جرم m از یک کره نرم با پتانسیل $V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$ در تقریب اول بورن به

$$\text{ازای } 1 \ll ka \quad (E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}) \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \quad \frac{16\pi}{9} \left(\frac{m V_0 a^2}{\hbar^2} \right)^2 a^2 \quad (2) \quad \frac{16\pi}{9} \left(\frac{m V_0 a^2}{\hbar^2} \right) a^2 \quad (3) \quad \frac{4\pi}{9} \left(\frac{m V_0 a^2}{\hbar^2} \right) a^2 \quad (4) \quad \frac{4\pi}{9} \left(\frac{m V_0 a^2}{\hbar^2} \right)^2 a^2$$

پاسخنامه فیزیک

مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته - الکترومغناطیس و الکتروپوینامیک - ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱)

۱- گزینه «۱» از آنجایی که بین عملگر A و هم‌یوغ هرmitesی آن یعنی $A^\dagger$ رابطه مقابل برقرار است:
 $A = a|\alpha\rangle\langle\beta| \Rightarrow A^\dagger = a^*|\beta\rangle\langle\alpha|$
 برای عملگر معرفی شده در این سؤال خواهیم داشت:
 $a = i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \Rightarrow a^\dagger = -i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$
 حال می‌توانیم حاصل جابه‌جایی $[a, a^\dagger]$ را به دست آوریم. با توجه به تعریف عملگر جابه‌جایی داریم:
 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a$
 $aa^\dagger - a^\dagger a = (i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|)(-i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|) - (-i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|)(i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|) = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|$
 بنابراین داریم:
 $|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$
 $|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1, i \times -i = 1$
 در محاسبات فوق از تساوی‌های مقابل استفاده کرده‌ایم.

۲- گزینه «۲» برای حل این‌گونه مسائل ابتدا هامیلتونی را به صورت ماتریسی می‌نویسیم تا بتوانیم به راحتی ویژه مقادیر آن را به دست آوریم.

با استفاده از تعریف ماتریس‌های پائولی و ماتریس واحد به صورت مقابل، داریم:
 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 بنابراین هامیلتونی موردنظر عبارت است از:

$H = a_0\hat{I} + \vec{\sigma} \cdot \vec{a} = a_0\hat{I} + \sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z$
 $= a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}$
 حال با استفاده از معادله $\text{Det}|H - \lambda I| = 0$ داریم:
 $\text{Det}(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_0 + a_3 - \lambda & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$
 $\Rightarrow \{(a_0 + a_3 - \lambda)(a_0 - a_3 - \lambda) - (a_1 - ia_2)(a_1 + ia_2)\} = 0$
 $\Rightarrow \{((a_0 - \lambda) + a_3)((a_0 - \lambda) - a_3) - (a_1 - ia_2)(a_1 + ia_2)\} = 0$
 $\Rightarrow \{(a_0 - \lambda)^2 - a_3^2 - (a_1^2 + a_2^2)\} = 0$
 $\Rightarrow \{(a_0 - \lambda)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\} = 0$

حال که ویژه مقادیر انرژی را تعیین کرده‌ایم به راحتی مشخص می‌شود که قدرمطلق تفاضل آن‌ها برابر است با:
 $|\lambda_1 - \lambda_2| = |a_0 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - (a_0 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})| = 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

۳- گزینه «۳» ابتدا عملگر موردنظر را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

با توجه به تعاریف $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ، $\hat{n} = \sin\beta\hat{i} + \cos\beta\hat{k}$ در نهایت داریم:

با توجه به تعریف ماتریس‌های پائولی $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ، $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $S_n = \vec{S} \cdot \hat{n} \Rightarrow S_n = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z$
 $S_n = \frac{\hbar}{2} \sin\beta \sigma_x + \frac{\hbar}{2} \cos\beta \sigma_z$
 $S_n = \frac{\hbar}{2} \sin\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \cos\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \cos\beta & \frac{\hbar}{2} \sin\beta \\ \frac{\hbar}{2} \sin\beta & -\frac{\hbar}{2} \cos\beta \end{pmatrix}$
 در نهایت داریم:

حال می‌توانیم با استفاده از پایه‌های $|+\rangle$ ، $|-\rangle$ ماتریس فوق را به راحتی بسط دهیم:
 $S_n = \frac{\hbar}{2} \cos\beta |+\rangle\langle+| + \frac{\hbar}{2} \sin\beta |+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2} \sin\beta |-\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2} \cos\beta |-\rangle\langle-|$
 $= \frac{\hbar}{2} \cos\beta [|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|] + \frac{\hbar}{2} \sin\beta [|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|]$



۴- گزینه «۴» به طور کلی اگر $|n\rangle$ ویژه حالت هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک‌بُعدی باشد، تحت اثر عملگرهای بالا برنده $\hat{a}^\dagger$ و پایین‌آورنده $\hat{a}$ در روابط مقابل صدق می‌کند:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

علاوه بر آن، ویژه حالت‌ها در رابطه راست هنجاری (تعامد) صادق هستند: $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ با توجه به هرمیتی بودن عملگرهای معرف مکان و تکانه خطی

می‌توانیم تعریف آن‌ها را برحسب عملگرهای بالا برنده و پایین‌آورنده به‌دست آوریم:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right); \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

به‌این ترتیب عملگرهای مکان و تکانه عبارت‌اند از:

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{a} - \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \Rightarrow \hat{p} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

بنابراین عملگر $\hat{x}\hat{p}$ عبارت است از:

$$\hat{x}\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) = \frac{i\hbar}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) = \frac{i\hbar}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger\hat{a})$$

همچنین عملگر $\hat{p}\hat{x}$ عبارت است از:

$$\hat{p}\hat{x} = \frac{i\hbar}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \frac{i\hbar}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger)$$

حال می‌توانیم عبارت $\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$ را به‌دست آوریم:

$$\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} = \frac{i\hbar}{2}\{\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\} = \frac{i\hbar}{2}\{-2\hat{a}^2 + 2\hat{a}^{\dagger 2}\} = i\hbar\{\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2\}$$

به‌این ترتیب می‌توانیم مقدار چشم‌داشتی $\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\langle m|\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}|n\rangle = i\hbar\langle m|\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2|n\rangle = i\hbar\{\langle m|\hat{a}^{\dagger 2}|n\rangle - \langle m|\hat{a}^2|n\rangle\}$$

$$= i\hbar\{\langle m|\sqrt{n+1}\hat{a}^\dagger|n+1\rangle - \langle m|\sqrt{n}\hat{a}|n-1\rangle\} = i\hbar\{\sqrt{n+1}\langle m|\hat{a}^\dagger|n+1\rangle - \sqrt{n}\langle m|\hat{a}|n-1\rangle\}$$

$$= i\hbar\{\sqrt{n+1}\langle m|\sqrt{n+2}|n+2\rangle - \sqrt{n}\langle m|\sqrt{n-1}|n-2\rangle\} = i\hbar\{\sqrt{(n+1)(n+2)}\langle m|n+2\rangle - \sqrt{n(n-1)}\langle m|n-2\rangle\}$$

با توجه به رابطه راست هنجاری $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$ خواهیم داشت:

$$\langle m|\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}|n\rangle = i\hbar\{\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\}$$

اما برای پیدا کردن گزینه صحیح لازم است دوباره با استفاده از خواص تابع دلتا m و n را برحسب یکدیگر تعریف کنیم.

از عبارت $\delta_{m,n+2}$ می‌توانیم روابط زیر را مشخص کنیم:

$$\delta_{m,n+2} \rightarrow m = n+2 \text{ یا } m-1 = n+1 \text{ یا } m-2 = n \quad (۱)$$

همچنین $\delta_{m,n-2}$ عبارات زیر را جهت غیر صفر بودن مشخص می‌کند:

$$\delta_{m,n-2} \rightarrow m = n-2 \text{ یا } m+1 = n-1 \text{ یا } m+2 = n \quad (۲)$$

به‌این ترتیب می‌توانیم با استفاده از این روابط تغییراتی در نوع نگارش $\langle m|\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}|n\rangle$ ایجاد کنیم.

$$\langle m|\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}|n\rangle = i\hbar\{\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}\} = i\hbar\{\sqrt{(n+1)m}\delta_{m-1,n+1} - \sqrt{n(m+1)}\delta_{m+1,n-1}\}$$

توجه شود که برای تغییر دادن جمله اول از هریک از تساوی‌های عبارت (۱) و برای تغییر دادن جمله دوم از هریک از تساوی‌های عبارت (۲) که بخواهیم می‌توانیم استفاده کنیم.

۵- گزینه «۴» معادله معرف انتشارگر در مکانیک موجی عبارت است از:

$$K(x'', t; x', t_0) = \sum_{a'} \langle x''|a'\rangle \langle a'|x'\rangle \exp\left[\frac{-iE_{a'}(t-t_0)}{\hbar}\right]$$

برای مسئله حاضر نیاز داریم $K(x, t; x', 0)$ را برای ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل نامتناهی یک‌بُعدی به عرض a بنویسیم. بنابراین از تعاریف زیر

استفاده خواهیم کرد:

$$K(x, t; x', 0) = \sum_n \langle x|n\rangle \langle n|x'\rangle \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right)$$

برای ذره در جعبه می‌دانیم که توابع موج عبارت‌اند از:

$$\psi(x) = \langle x|n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\psi^*(x') = \langle n|x'\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x'}{a}$$

بنابراین در نهایت تبدیل فوریه انتشارگر موردنظر عبارت است از:

$$\begin{aligned}\tilde{K}(x, x'; E) &= \int_0^\infty dt e^{\frac{iEt}{\hbar}} K(x, t; x', 0) = \int_0^\infty dt e^{\frac{iEt}{\hbar}} \sum_n \frac{\sqrt{a}}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x'}{a} \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) \\ &= \sum_n \frac{\sqrt{a}}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x'}{a} \int_0^\infty e^{-i(E_n - E)\frac{t}{\hbar}} dt = \sum_n \frac{\sqrt{a}}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x'}{a} \left\{ \frac{-\hbar}{i(E_n - E)} e^{-i(E_n - E)\frac{t}{\hbar}} \right\} \Big|_0^\infty \\ &= \sum_n \frac{\sqrt{a}}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x'}{a} \left\{ \frac{i\hbar}{E_n - E} (0 - 1) \right\} = \sum_n \frac{\sqrt{a}}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x'}{a} \left(\frac{i\hbar}{E - E_n} \right) \\ \tilde{K}(x, x'; E) &= \frac{\sqrt{a}i\hbar}{a} \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x'}{a}}{E - \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2}}\end{aligned}$$

با استفاده از تعریف $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2}$ برای ویژه مقادیر انرژی ذره در جعبه خواهیم داشت:

۶- گزینه «۲» می‌دانیم که میانگین آنسامبلی عملگر A با ماتریس چگالی ρ عبارت است از:

$$[A] = \text{tr}(\rho A)$$

کافی است ماتریس‌های ρ و A را تشکیل دهیم سپس حاصل ضرب ماتریسی ρA را به دست آوریم تا در نهایت مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس را که همان $\text{tr}(\rho A)$ است محاسبه کنیم.

$$\rho = \cos^2 \theta |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \sin^2 \theta |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta |\psi_3\rangle \langle \psi_3|$$

$$\Rightarrow \rho = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

همچنین برای عملگر $A = |\psi\rangle \langle \psi|$ که در آن $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_3\rangle$ است داریم:

$$\begin{aligned}A = |\psi\rangle \langle \psi| &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_3\rangle \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_3| \right\} \\ &= \frac{1}{4} |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \frac{1}{4} |\psi_1\rangle \langle \psi_2| + \frac{1}{4\sqrt{2}} |\psi_1\rangle \langle \psi_3| + \frac{1}{4} |\psi_2\rangle \langle \psi_1| + \frac{1}{4} |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + \frac{1}{4\sqrt{2}} |\psi_2\rangle \langle \psi_3| \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} |\psi_3\rangle \langle \psi_1| + \frac{1}{4\sqrt{2}} |\psi_3\rangle \langle \psi_2| + \frac{1}{4} |\psi_3\rangle \langle \psi_3|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بنابراین شکل ماتریسی عملگر A عبارت است از:

حال می‌توانیم حاصل ضرب ρA را به دست آوریم:

$$\rho A = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cos^2 \theta & \frac{1}{4} \cos^2 \theta & \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos^2 \theta \\ \frac{1}{4} \sin^2 \theta & \frac{1}{4} \sin^2 \theta & \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin^2 \theta \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta & \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta & \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

به این ترتیب میانگین آنسامبلی عملگر A عبارت است از:

$$\begin{aligned} [A] &= \text{tr}(\rho A) = \frac{1}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{4} [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ &= \frac{1}{4} [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta] = \frac{1}{4} [(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ &= \frac{1}{4} [1 + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \end{aligned}$$

چون $2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ به ازای تمام مقادیر θ عددی مثبت است بنابراین کمترین مقدار عبارت به دست آمده به ازای $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0$ به دست می آید.

$$\min[A] = \frac{1}{4} [1 + 0] = \frac{1}{4}$$

یعنی کمترین مقدار این عبارت برابر است:

همچنین می دانیم که $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ به ازای زاویه $\theta = \frac{\pi}{4}$ بیشترین مقدار خود را دارد بنابراین برای بیشترین مقدار عبارت $[A]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max[A] &= \frac{1}{4} [1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4}] = \frac{1}{4} [1 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}] = \frac{1}{4} [1 + \frac{1}{2}] = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \leq [A] &\leq \frac{3}{8} \end{aligned}$$

بنابراین در نهایت خواهیم داشت:

۷- گزینه «۱» اگر $|\psi\rangle$ تابع موج ذرات خروجی از دستگاه اشترن گریلاخ اول با ویژه مقدار بزرگتر مشاهده پذیر $\vec{S} \cdot \hat{n}$ ، $|\varphi\rangle$ تابع موج ذرات خروجی از دستگاه اشترن گریلاخ دوم با $S_z = \hbar$ باشند، احتمال موردنظر در سؤال عبارت است از:

$$P = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2$$

برای محاسبه مقدار فوق کافی است $|\varphi\rangle$ و $|\psi\rangle$ را مشخص کنیم. به این ترتیب در قدم اول ماتریس $\vec{S} \cdot \hat{n}$ را تشکیل می دهیم تا بتوانیم ویژه توابع و ویژه مقادیر آن را محاسبه کنیم.

$$\vec{S} \cdot \hat{n} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z$$

$$n_x = \sin \theta, n_y = 0, n_z = \cos \theta$$

$$\vec{S} \cdot \hat{n} = \sin \theta S_x + \cos \theta S_z$$

با توجه به صورت مسئله و $\hat{n} = \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}$ می توانیم بنویسیم:

به این ترتیب داریم:

با توجه به تعریف ماتریس های S_x, S_y, S_z برای اسپین $S=1$ داریم:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

پس ماتریس $\vec{S} \cdot \hat{n}$ عبارت است از:

$$\vec{S} \cdot \hat{n} = \sin \theta \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \cos \theta \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar \cos \theta & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta & -\hbar \cos \theta \end{pmatrix}$$

حال که ماتریس $\vec{S} \cdot \hat{n}$ تشکیل شده است با استفاده از رابطه $\text{Det}(\vec{S} \cdot \hat{n} - \lambda I) = 0$ می توانیم λ (ویژه مقادیر $\vec{S} \cdot \hat{n}$) را پیدا کنیم.

$$\text{Det}(\vec{S} \cdot \hat{n} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hbar \cos \theta - \lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta & -\lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta & -\hbar \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\hbar \cos \theta - \lambda) \{ (-\lambda)(-\hbar \cos \theta - \lambda) - \frac{\hbar^2}{2} \sin^2 \theta \} - \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta \{ (\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sin \theta)(-\hbar \cos \theta - \lambda) \} = 0$$



$$\Rightarrow (h \cos \theta - \lambda) \{ \lambda (h \cos \theta + \lambda) \} - \frac{\hbar^2}{r} \sin \theta \{ h \cos \theta - \lambda - h \cos \theta - \lambda \} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda (h^2 \cos^2 \theta - \lambda^2) - \left(\frac{\hbar^2}{r} \sin^2 \theta \right) (-2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda (h^2 \cos^2 \theta) - \lambda^2 + \hbar^2 \lambda \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \hbar^2 \lambda (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \hbar^2 \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda (\hbar^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \hbar^2 \\ \lambda = -\hbar^2 \end{cases}$$

چون $|\psi\rangle$ ویژه تابع وابسته به بزرگترین ویژه مقدار $\hat{S} \cdot \hat{n}$ است پس $|\psi\rangle$ را به ازای $\lambda = \hbar^2$ با استفاده از معادله ویژه مقاری $H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ محاسبه خواهیم کرد.

چون $S=1$ مربوط به فضای ۳ بعدی است می توانیم $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ در نظر بگیریم، به این ترتیب داریم:

$$\begin{bmatrix} h \cos \theta & \frac{\hbar}{\sqrt{r}} \sin \theta & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{r}} \sin \theta & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{r}} \sin \theta \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{r}} \sin \theta & -h \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \hbar^2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{r}} \beta \sin \theta = \alpha \Rightarrow \alpha(1 - \cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} \beta \sin \theta \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 - \cos \theta} \beta \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \alpha \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta \gamma = \beta \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \beta \sin \theta - \gamma \cos \theta = \gamma \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \beta \sin \theta = \gamma(1 + \cos \theta) \Rightarrow \gamma = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 + \cos \theta} \beta \end{cases}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

با استفاده از اصل بهنجارش برای ویژه توابع داریم:

پس در نهایت خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 \beta^2 + \beta^2 + \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2 \beta^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{r(1 - \cos \theta)^2} \beta^2 + \beta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{r(1 + \cos \theta)^2} \beta^2 = 1 \Rightarrow \left\{ \frac{1}{r} \sin^2 \theta \left[\frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2} \right] + 1 \right\} \beta^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{r} \sin^2 \theta \left[\frac{(1 + \cos \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2}{(1 - \cos^2 \theta)^2} \right] + 1 \right\} \beta^2 = 1 \Rightarrow \left\{ \frac{1}{r} \sin^2 \theta \left[\frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] + 1 \right\} \beta^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left\{ \sin^2 \theta \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] + 1 \right\} \beta^2 = 1 \Rightarrow \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 1 \right\} \beta^2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{\sin^2 \theta} \beta^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{r}}}$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 - \cos \theta} \beta = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\sqrt{r}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{r} (1 + \cos \theta)$$

$$\gamma = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 + \cos \theta} \beta = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\sqrt{r}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{r} (1 - \cos \theta)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$

به این ترتیب برای $|\psi\rangle$ داریم:

از طرفی باتوجه به اینکه $|\phi\rangle$ ویژه تابع مربوط به $S_z = \hbar$ است می‌دانیم که $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ خواهد بود. پس در نهایت برای احتمال موردنظر داریم:

$$P = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix} \right|^2 = \left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right)^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

در خطر آخر از معادله مثلثاتی $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ استفاده کرده‌ایم.

۸- گزینه «۱» فرض کنید $X_{q_1}^{(k_1)}$ و $Z_{q_2}^{(k_2)}$ به ترتیب تانسورهای کروی تقلیل‌ناپذیر از مرتبه k_1 و k_2 باشند. در این صورت:

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1} \sum_{q_2} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; kq \rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$$

عملگرهای تانسوری با مرتبه‌های بزرگ‌تر یا کوچک‌تر را می‌توان به این ترتیب با ضرب دو عملگر تانسوری به‌دست آورد. به‌علاوه نحوه تشکیل ضرب تانسوری از دو تانسور، کاملاً مشابه نحوه تشکیل یک ویژه حالت تکانه زاویه‌ای با استفاده از جمع دو تکانه زاویه‌ای است، به این معنی که دقیقاً همان ضرایب کلبش - گوردون ظاهر می‌شوند، اگر قرار دهیم:

$$k_{1,2} \rightarrow j_{1,2}; \quad q_{1,2} \rightarrow m_{1,2}$$

$$|\ell - m| \leq j \leq |\ell + m|$$

طبق تشکیل ویژه حالت تکانه زاویه‌ای j از طریق جمع تکانه‌های ℓ و m می‌دانیم که:

بنابراین برای k در ضرب تانسوری خواهیم داشت:

$$|k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2$$

$$|2-3| \leq k \leq 2+3 \Rightarrow 1 \leq k \leq 5$$

برای مثال حاضر $k_1 = 2$ و $k_2 = 3$ است. بنابراین داریم:

بنابراین k می‌تواند اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را بپذیرد.

۹- گزینه «۲» حاصل ضرب تانسوری عملگرهای $D^{(j_1)}$ و $D^{(j_2)}$ به‌صورت زیر قابل تقلیل به حاصل جمع است:

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \oplus D^{(j_1+j_2-1)} \oplus \dots \oplus D^{|j_1-j_2|}$$

$$\left. \begin{matrix} j_1 = \frac{1}{2} \\ j_2 = \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow |j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2| \Rightarrow 0 \leq j \leq 1$$

برای مورد حاضر داریم:

$$D^{(\frac{1}{2})} \otimes D^{(\frac{1}{2})} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}$$

یعنی j می‌تواند مقادیر ۰ و ۱ را بپذیرد:

با استفاده از قواعد گزینش ویگنر - اکارت می‌توانیم ضرایب غیرصفر و ضرایب صفر را در پاسخ این ضرب تانسوری تعیین کنیم. ضرب تانسوری فوق در نهایت می‌تواند یک فضای $N = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ بعدی را ایجاد کند. پس در مثال حاضر یک فضای ۴ بعدی تشکیل می‌شود.



قاعده گزینش ویگنر - اکارت می‌گوید که:

$$\langle \alpha', j'm' | T_q^{(k)} | \alpha, jm \rangle = 0 \text{ مگر } m' = q + m$$

$$\begin{cases} j = 0 \rightarrow m_j = 0 \\ j = 1 \rightarrow \begin{cases} m'_j = -1 \\ m'_j = 0 \\ m'_j = 1 \end{cases} \end{cases}$$

برای سیستم حاضر:

$$m' = q + m \Rightarrow \begin{cases} m' = 0 ; m = -1 \rightarrow q = +1 \\ m' = 0 ; m = 0 \rightarrow q = 0 \\ m' = 0 ; m = +1 \rightarrow q = -1 \\ m' = -1 ; m = 0 \rightarrow q = -1 \\ m' = 0 ; m = 0 \rightarrow q = 0 \\ m' = +1 ; m = 0 \rightarrow q = +1 \end{cases}$$

به این ترتیب برای مقادیر مجاز q داریم:

به این ترتیب حداکثر ۶ عنصر صفر خواهیم داشت.

۱۰- گزینه «۳»

راه حل تستی: کافی است قرار دهیم $N = 2$. در این حالت هامیلتونی به صورت زیر در خواهد آمد:

$$H = E_0(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2\omega(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad (1)$$

(در (۱) روی ۱ و ۲ جمع خورده است و ضریب ۲ به همین دلیل ظاهر شده است)

که در (۱) از $|2+1\rangle = |1\rangle$ استفاده شده است. چون $|n\rangle$ ها تشکیل پایه متعامد و بهنجار می‌دهند، می‌توان (۱) را به صورت ماتریس زیر در پایه $|1\rangle$ و $|2\rangle$ نوشت:

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 2\omega \\ 2\omega & E_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

حال برای به دست آوردن ویژه مقادیر H از رابطه $\det(H - \lambda I) = 0$ که در آن I ماتریس همانی می‌باشد، استفاده می‌کنیم.

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} E_0 - \lambda & 2\omega \\ 2\omega & E_0 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (E_0 - \lambda)^2 - 4\omega^2 = 0 \Rightarrow E_0 - \lambda_{\pm} = \pm 2\omega \Rightarrow \boxed{\lambda_{\pm} = E_0 \pm 2\omega} \quad (3)$$

پس:

حال کافی است در گزینه‌ها قرار دهیم $N = 2$ و $n = 1$ و $n = 2$ دیده می‌شود که تنها گزینه (۳) است که به ما $E_0 \pm 2\omega$ را خواهد داد.

$$H = E_0(|1\rangle\langle 1| + \omega(|1\rangle\langle 1+1| + |1\rangle\langle 1+1|))$$

نکته: حتی می‌توانستیم قرار دهیم $N = 1$ ، در این حالت هامیلتونی به صورت مقابل است:

$$H = (E_0 + 2\omega)|1\rangle\langle 1|$$

در می‌آمد که از $|1\rangle = |1+1\rangle$ داریم:

اما در پایه $|1\rangle$ هامیلتونی به صورت $H = [E_0 + 2\omega]_{1 \times 1}$ است که از گذاردن $N = 1$ و $n = 1$ در گزینه‌ها تنها گزینه (۳) درست خواهد بود.

راه حل تشریحی:

$$H = E_0 \sum_{n=1}^N |n\rangle\langle n| + \omega \sum_{n=1}^N (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \quad \text{فرض کنید } N > 2. \text{ در این حالت } H \text{ را در پایه } |1\rangle \dots |N\rangle \text{ به صورت ماتریس می‌نویسیم.}$$

$$= E_0(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + \dots) + \omega(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2| + \dots + |N\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle N|) \quad (4)$$

از نوشتن (۴) به صورت ماتریسی H به صورت زیر در می‌آید:



$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \omega & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega \\ \omega & E_0 & \omega & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \omega & E_0 & \omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & \ddots & \omega \\ \omega & 0 & \dots & \dots & 0 & \omega & E_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

طبق تعریف ویژه مقدار داریم:

$$H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad (6)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \quad (7)$$

فرض کنید که $|\psi\rangle$ به صورت مقابل است:

از جایگذاری (۷) در (۶)، با استفاده از (۵)، داریم:

$$\begin{cases} \omega V_{n-1} + E_0 V_n + \omega V_{n+1} = \lambda V_n & 1 < n < N \\ E_0 V_1 + \omega V_2 + \omega V_N = \lambda V_1 & n = 1 \\ E_0 V_N + \omega V_1 + \omega V_{N-1} = \lambda V_N & n = N \end{cases} \quad (8)$$

حال فرض کنید که در حالت کلی V_0 ها به صورت زیر هستند:

$$V_n = A \sin n\theta + B \cos n\theta \quad (9)$$

از (۹) و (۸) برای $1 < n < N$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \omega(A \sin(n-1)\theta + B \cos(n-1)\theta) + (A \sin n\theta + B \cos n\theta)E_0 + \omega(A \sin(n+1)\theta + B \cos(n+1)\theta) \\ & = \lambda(A \sin n\theta + B \cos n\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

سمت چپ (۱۰) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} (10) \text{ سمت چپ} &= \omega(A \sin n\theta \cos \theta - A \cos n\theta \sin \theta + B \cos n\theta \cos \theta + B \sin n\theta \sin \theta) + (A \sin n\theta + B \cos n\theta)E_0 \\ &+ \omega(A \sin n\theta \cos \theta + A \cos n\theta \sin \theta + B \cos n\theta \cos \theta - B \sin n\theta \sin \theta) \\ &= (\omega A \sin n\theta \cos \theta + \omega B \cos n\theta \cos \theta) + (A \sin n\theta + B \cos n\theta)E_0 \\ &= (\omega \cos \theta + E_0)(A \sin n\theta + B \cos n\theta) = (E_0 + \omega \cos \theta)V_n \end{aligned} \quad (11)$$

$$\lambda = E_0 + \omega \cos \theta \quad (12)$$

با توجه به (۱۰) می توان نوشت:

حال θ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن θ از شرایط روی $(n=1)$ استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} & E_0(A \sin \theta + B \cos \theta) + \omega(A \sin 2\theta + B \cos 2\theta) + \omega(A \sin N\theta + B \cos N\theta) \\ &= (E_0 + \omega \cos \theta)(A \sin \theta + B \cos \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Rightarrow A E_0 \sin \theta + B E_0 \cos \theta + \omega A \sin \theta \cos \theta + \omega B \cos^2 \theta - B \omega + A \omega \sin N\theta + B \omega \cos N\theta$$

$$= A E_0 \sin \theta + B E_0 \cos \theta + \omega A \sin \theta \cos \theta + \omega B \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow A \omega \sin N\theta + B \omega \cos N\theta = B \omega \quad (14)$$

$$A \omega (\sin \theta - \sin(N+1)\theta) + B \omega (\cos \theta - \cos(N+1)\theta) = 0 \quad (15)$$

مشابهاً شرط روی $n = N$ به ما خواهد داد:

از رابطه $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{(a+b)}{2} \sin \frac{(a-b)}{2}$ و $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{(a+b)}{2} \sin \frac{(a-b)}{2}$ ، (۱۵) را به صورت زیر می نویسیم:

$$(15) = 2A \omega \cos \frac{(N+2)\theta}{2} \sin \frac{N\theta}{2} - 2B \omega \sin \frac{(N+2)\theta}{2} \sin \frac{N\theta}{2} = 0 \quad (16)$$



اگر $A \neq 0$ باشد از (۱۵) داریم $(\sin \frac{N\theta}{2} \neq 0)$

$$\frac{B}{A} = \cot \frac{(N+2)\theta}{2} \quad (۱۷)$$

با گذاردن $A \neq 0$ بر حسب $B \neq 0$ (اگر یکی از A یا B مساوی صفر و دیگری مخالف صفر باشد روابط (۱۶) و (۱۴) با فرض $\sin \frac{N\theta}{2} \neq 0$ هم تناقض خواهند داشت.) از (۱۶) در (۱۴) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow B\omega(\sin N\theta \sin(N+2)\theta + \cos N\theta \cos(N+2)\theta) = B\omega \Rightarrow \cos 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 2\pi m \Rightarrow \theta = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

در (۱۶) فرض کردیم که $\sin \frac{N\theta}{2} \neq 0$ تا به (۱۷) رسیدیم، پس m فرد است. اما اگر m فرد باشد آنگاه (۱۴) برای هر N فرد برقرار نیست. پس

$$N\theta = 2m\pi \quad \text{از (۱۶) باید } \sin \frac{N\theta}{2} = 0 \text{ که نتیجه می‌شود:}$$

$$\lambda_m = E_0 + 2\omega \cos \frac{2m\pi}{N} \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, N \quad \text{پس داریم:}$$

اما B و A برای ما نامعلوم است و می‌تواند مقدار دلخواهی را اخذ کنند برای داشتن N بردار مستقل خطی باید $B \neq 0$ و $A \neq 0$. پس داریم:

$$V_m = \begin{pmatrix} A \sin \frac{2\pi m}{N} + B \cos \frac{2\pi m}{N} \\ A \sin \frac{4\pi m}{N} + B \cos \frac{4\pi m}{N} \\ \vdots \\ B \end{pmatrix} ; \quad A \neq 0, B \neq 0$$

بردارهای m و $N-m$ ویژه مقادیر یکسانی دارند ولی برای $A \neq 0$ و B به راحتی دیده می‌شود که V_m و V_{N-m} مستقل خطی هستند. همچنین اگر $\{V_1, \dots, V_k\}$ بردارهایی با ویژه مقادیر متمایز باشند آنگاه بردارهایی مستقل خطی هستند. پس V_m ها برای $A \neq 0$ و $B \neq 0$ کلیه بردارهای مستقل خطی را برای ما تشکیل خواهند داد.

۱۱- گزینه «۲» برای تأثیر عملگر وارون زمان θ روی حالت‌های اسپینی داریم:

$$\theta\{c_+|+\rangle + c_-|-\rangle\} = +\eta c_+^*|-\rangle - \eta c_-^*|+\rangle$$

که η فاز است. اگر یک‌بار دیگر θ را اثر دهیم داریم:

$$\theta^2\{c_+|+\rangle + c_-|-\rangle\} = -|\eta|^2 c_+|+\rangle - |\eta|^2 c_-|-\rangle = -|\eta|^2\{c_+|+\rangle + c_-|-\rangle\}$$

$$\theta^2|\psi\rangle = -|\psi\rangle \quad \text{با توجه به اینکه برای هر جهت اسپینی } |\eta|^2 = 1 \text{ بنابراین خواهیم داشت:}$$

در محاسبات فوق از $\theta|-\rangle = -|+\rangle$ و $\theta|+\rangle = |-\rangle$ استفاده کردیم و $k = \frac{is_y\hbar}{\hbar} = k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ که $\theta = ke$ عملگر همیوگ مختلط (complex conjugate) می‌باشد.

بنابراین برای مثال حاضر داریم:

$$\theta|\alpha\rangle = \theta\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle$$

$$\Rightarrow \theta^2|\alpha\rangle = \theta\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle = -\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle\right\} = -|\alpha\rangle$$

روش تستی: حالت داده شده در مسأله ویژه حالت عملگر اسپین در جهت y است و بنابراین با تأثیر عملگر وارون زمان روی حالت‌های موج از قاعده زیر

$$|\theta^2| \text{ نیمه صحیح} = -| \text{ نیمه صحیح} \rangle \quad \text{می‌توان استفاده کرد:}$$

$$|\theta^2| \text{ صحیح} = +| \text{ صحیح} \rangle$$



۱۲- گزینه «۴»

$$H = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) = H_x + H_y + H_z$$

ویژه حالت‌های H_x و H_y و H_z را به ترتیب با ψ_{nx} , ψ_{ny} , ψ_{nz} , $\psi_{nx,ny,nz}$ نشان می‌دهیم. در این صورت ویژه مقادیر انرژی آن‌ها

$$H_x |\psi_{nx}\rangle = (n_x + \frac{1}{2}) \hbar \omega |\psi_{nx}\rangle \quad \text{به ترتیب } E_{nx}^{(0)}, E_{ny}^{(0)}, E_{nz}^{(0)}, E_{nx,ny,nz}^{(0)} \text{ هستند و خواهیم داشت:}$$

$$H_y |\psi_{ny}\rangle = (n_y + \frac{1}{2}) \hbar \omega |\psi_{ny}\rangle$$

$$H_z |\psi_{nz}\rangle = (n_z + \frac{1}{2}) \hbar \omega |\psi_{nz}\rangle$$

که در آن n_x, n_y, n_z اعداد صحیح مثبت یا صفر هستند. همچنین می‌توانیم بنویسیم: $|\psi_{nx}, \psi_{ny}, \psi_{nz}\rangle = |\psi_{nx}\rangle |\psi_{ny}\rangle |\psi_{nz}\rangle = |\psi_{nx,ny,nz}\rangle$ اثر عملگر هامیلتونی کل روی این ویژه تابع عبارت است از:

$$H |\psi_{nx,ny,nz}\rangle = (n_x + n_y + n_z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \hbar \omega |\psi_{nx,ny,nz}\rangle$$

$$\Rightarrow E_{nx,ny,nz} = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) \hbar \omega$$

$$E_{0,0,0} = \frac{3}{2} \hbar \omega \quad \text{به این ترتیب انرژی حالت پایه سیستم:}$$

$$E_{0,0,1} = E_{0,1,0} = E_{1,0,0} = \frac{5}{2} \hbar \omega \quad \text{و انرژی اولین حالت برانگیخته سیستم عبارت است از:}$$

چون اولین حالت برانگیخته سیستم یک حالت تبهگن است لازم است از نظریه اختلال تبهگن برای حل این سؤال استفاده کنیم. پس لازم است ماتریس

اختلال را تشکیل دهیم. اگر برای سادگی $|\psi_{nx,ny,nz}\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle$ نمایش دهیم، ماتریس اختلال برای اولین حالت برانگیخته عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} \langle 100 | V | 100 \rangle & \langle 100 | V | 010 \rangle & \langle 100 | V | 001 \rangle \\ \langle 010 | V | 100 \rangle & \langle 010 | V | 010 \rangle & \langle 010 | V | 001 \rangle \\ \langle 001 | V | 100 \rangle & \langle 001 | V | 010 \rangle & \langle 001 | V | 001 \rangle \end{pmatrix}$$

با توجه به اینکه اختلال $V = \lambda y x^2 z$ به سیستم اعمال شده است داریم:

$$V_{11} = \langle 100 | V | 100 \rangle = \lambda \langle 100 | y x^2 z | 100 \rangle = \lambda \langle 1 | y | 1 \rangle \langle 0 | x^2 | 0 \rangle \langle 0 | z | 0 \rangle = 0$$

$$V_{12} = \langle 100 | V | 010 \rangle = \lambda \langle 100 | y x^2 z | 010 \rangle = \lambda \langle 1 | y | 0 \rangle \langle 0 | x^2 | 1 \rangle \langle 0 | z | 0 \rangle = 0$$

$$V_{13} = \langle 100 | V | 001 \rangle = \lambda \langle 100 | y x^2 z | 001 \rangle = \lambda \langle 1 | y | 0 \rangle \langle 0 | x^2 | 0 \rangle \langle 0 | z | 1 \rangle = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2$$

$$V_{21} = \langle 010 | V | 100 \rangle = \lambda \langle 010 | y x^2 z | 100 \rangle = \lambda \langle 0 | y | 1 \rangle \langle 1 | x^2 | 0 \rangle \langle 0 | z | 1 \rangle = 0$$

$$V_{22} = \langle 010 | V | 010 \rangle = \lambda \langle 010 | y x^2 z | 010 \rangle = \lambda \langle 0 | y | 0 \rangle \langle 1 | x^2 | 1 \rangle \langle 0 | z | 0 \rangle = 0$$

$$V_{23} = \langle 010 | V | 001 \rangle = \lambda \langle 010 | y x^2 z | 001 \rangle = \lambda \langle 0 | y | 0 \rangle \langle 1 | x^2 | 0 \rangle \langle 0 | z | 1 \rangle = 0$$

$$V_{31} = \langle 001 | V | 100 \rangle = \lambda \langle 001 | y x^2 z | 100 \rangle = \lambda \langle 0 | y | 1 \rangle \langle 0 | x^2 | 0 \rangle \langle 1 | z | 0 \rangle = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2$$

$$V_{32} = \langle 001 | V | 010 \rangle = \lambda \langle 001 | y x^2 z | 010 \rangle = \lambda \langle 0 | y | 0 \rangle \langle 0 | x^2 | 1 \rangle \langle 1 | z | 0 \rangle = 0$$

$$V_{33} = \langle 001 | V | 001 \rangle = \lambda \langle 001 | y x^2 z | 001 \rangle = \lambda \langle 0 | y | 0 \rangle \langle 0 | x^2 | 0 \rangle \langle 1 | z | 1 \rangle = 0$$

توجه شود که در محاسبات فوق از روابط زیر استفاده شده است:

$$\langle n | x | k \rangle = \langle n | y | k \rangle = \langle n | z | k \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \{ \sqrt{k} \delta_{n,k-1} + \sqrt{k+1} \delta_{n,k+1} \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \circ | x | \circ \rangle = \langle 1 | x | 1 \rangle = 0 \\ \langle \circ | x | 1 \rangle = \langle 1 | x | \circ \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \end{cases}$$

این روابط برای y و z نیز صدق می‌کنند. همچنین باتوجه به رابطه $x^\vee = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^{\dagger\vee} + a^\vee + aa^\dagger + a^\dagger a)$ خواهیم داشت:

$$\langle \circ | x^\vee | \circ \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \{ \langle \circ | a^{\dagger\vee} | \circ \rangle + \langle \circ | a^\vee | \circ \rangle + \langle \circ | aa^\dagger + a^\dagger a | \circ \rangle \} = \frac{\hbar}{2m\omega} \{ \langle \circ | aa^\dagger + a^\dagger a | \circ \rangle \} = \frac{\hbar}{2m\omega} \{ \langle \circ | 1 | \circ \rangle \} = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

که در رابطه اخیر از $\{a, a^\dagger\} = aa^\dagger + a^\dagger a = 1$ استفاده کرده‌ایم. در نهایت می‌توانیم ماتریس اختلال را به صورت زیر تشکیل دهیم:

$$V = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee \\ \circ & \circ & \circ \\ \lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

حال با پیدا کردن ویژه مقادیر ماتریس فوق به راحتی می‌توانیم مقدار تغییر در انرژی را تعیین کنیم.

$$\det[V - IE] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -E & \circ & \lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee \\ \circ & -E & \circ \\ \lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee & \circ & -E \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -E(E^\vee) + \lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee (\circ + E\lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee) = 0$$

$$\Rightarrow -E^\vee + E\lambda^\vee(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee = 0 \Rightarrow E[\lambda^\vee(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee - E^\vee] = 0 \Rightarrow \begin{cases} E = 0 \\ E = \pm \lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee \end{cases}$$

به این ترتیب ترازهای انرژی پس از اختلال عبارت‌اند از: $E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega + 0 = \frac{5}{2}\hbar\omega$, $E_{\vee, \vee} = \frac{5}{2}\hbar\omega \pm \lambda(\frac{\hbar}{2m\omega})^\vee$

نکته: داوطلب توجه داشته باشد که در پاسخ سؤال به اشتباه از انرژی حالت پایه سیستم یعنی $E_\circ = \frac{3}{2}\hbar\omega$ استفاده شده است.

۱۳- گزینه «۴» چون اختلال وابسته به زمان مطرح است از تصویر برهمکنش برای بررسی مسئله استفاده می‌کنیم.

با تعریف $\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$ برای گذار از حالت n به حالت m در شروع داریم:

$$\omega_{\vee 1} = \frac{E_\vee - E_1}{\hbar} = \frac{\frac{3}{2}\pi\hbar^\vee - \frac{\pi^\vee\hbar^\vee}{2ma^\vee}}{\hbar} = \frac{\frac{3}{2}\pi\hbar^\vee}{2ma^\vee} = \frac{3\pi^\vee\hbar}{2ma^\vee}$$

در محاسبات بالا از $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ برای ذره در چاه پتانسیل به عرض a استفاده کرده‌ایم. چون ذره ابتدا در حالت پایه است و در نهایت احتمال حضور

در اولین حالت برانگیخته مورد سؤال قرار گرفته است باید $\omega_{\vee 1}$ یعنی گذار از حالت ۱ به حالت ۲ مورد بررسی قرار گیرد.

می‌دانیم که احتمال حضور در یک حالت خاص با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P_{1 \rightarrow \vee} = |C_\vee^{(1)}(t)|^2 ; C_\vee^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{\vee 1}t'} V_{\vee 1}(t') dt'$$

$$V_{nm}(t') = \int \psi_n^*(x) V(x) \psi_m(x) dx$$

لازم است ابتدا ضریب $V_{nm}(t')$ محاسبه شود.



که در آن $\psi_n(x)$ و $\psi_m(x)$ ویژه توابع ذره در جعبه هستند.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \rightarrow \psi_n^*(x) = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} \rightarrow \psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

به این ترتیب برای ضرایب V_{11} که در این سؤال مورد نیاز است داریم:

$$V_{11}(t) = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \lambda x e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \cdot \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot x dx$$

$$= \frac{2}{a} \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx$$

برای حل انتگرال فوق باید از روش جزیه‌ج‌ز استفاده کنیم.

$$x^2 = u \rightarrow 2x dx = du$$

$$\sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx = dv \rightarrow \frac{a}{2\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{a} = v$$

$$\Rightarrow \int_0^a x^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx = \frac{ax^2}{2\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{2ax}{2\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

$$\Rightarrow - \int_0^a \frac{2ax}{2\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = - \int_0^a \frac{2ax}{2\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

$$= - \frac{2a}{2\pi} \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} (1 - \cos^2 \frac{\pi x}{a}) dx = - \frac{2a}{2\pi} \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx + \frac{2a}{2\pi} \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

حال دو انتگرال دیگر ایجاد شده است که باید هرکدام را جداگانه به روش جزیه‌ج‌ز حل کنیم:

$$\int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$\sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = du \Rightarrow \frac{-a}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} = v$$

$$\Rightarrow \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = - \frac{ax}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a + \int_0^a \frac{a}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} dx = - \frac{ax}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a + \frac{a^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a = - \frac{a^2}{\pi} \cos \pi + 0 = \frac{a^2}{\pi}$$

انتگرال دوم عبارت است از:

$$\int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$\sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = dv \Rightarrow - \frac{a}{2\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{a} = v$$

$$\Rightarrow \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = - \frac{ax}{2\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a + \int_0^a \frac{a}{2\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

$$= - \frac{ax}{2\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a + \frac{a}{2\pi} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = - \frac{ax}{2\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a + \frac{a}{2\pi} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} (1 - \sin^2 \frac{\pi x}{a}) dx$$

$$= - \frac{ax}{2\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a + \frac{a}{2\pi} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx - \frac{a}{2\pi} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

$$= - \frac{ax}{2\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a + \frac{a^2}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a - \frac{a^2}{2\pi^2} \times \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a = - \frac{a^2}{2\pi} \cos^2(\pi) - 0 = \frac{a^2}{2\pi}$$

بنابراین در نهایت با جایگذاری عبارت به دست آمده برای انتگرال‌ها، مقدار V_{r1} برابر است با:

$$V_{r1}(t) = \frac{r}{a} \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \times \left\{ \frac{-ra}{3\pi} \times \frac{a^r}{\pi} + \frac{ra}{3\pi} \times \frac{a^r}{3\pi} \right\} = \frac{r}{a} \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \times \frac{-ra^r}{9\pi^2} = \frac{-16a^r}{9\pi^2} \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

حال می‌توانیم ضرایب $C_n^{(1)}(t)$ را برای مسئله حاضر به دست آوریم.

$$\begin{aligned} C_r^{(1)}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{r1}t'} V_{r1}(t') dt' = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{r1}t'} \left\{ \frac{-16a^r}{9\pi^2} \lambda e^{-\frac{t'}{\tau}} \right\} dt' \\ &= \frac{1}{i\hbar} \times \frac{-16a^r}{9\pi^2} \lambda \int_0^t e^{i\omega_{r1}t'} e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' = \frac{1}{i\hbar} \times \frac{-16a^r \lambda}{9\pi^2} \int_0^t e^{(i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau})t'} dt' = \frac{1}{i\hbar} \times \frac{-16a^r \lambda}{9\pi^2} \times \frac{1}{i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau}} e^{(i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau})t'} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{i\hbar} \times \frac{-16a^r \lambda}{9\pi^2} \times \frac{1}{i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau}} \{ e^{(i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau})t} - 1 \} \end{aligned}$$

در نهایت احتمال حضور در اولین حالت برانگیخته برابر است با:

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow r} &= |C_r^{(1)}(t)|^2 = C_r^*(t) \cdot C_r(t) \\ &= \frac{-1}{i\hbar} \times \frac{-16a^r \lambda}{9\pi^2} \times \frac{1}{-i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau}} \times \{ e^{(-i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau})t} - 1 \} \times \frac{1}{i\hbar} \times \frac{-16a^r \lambda}{9\pi^2} \times \frac{1}{i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau}} \times \{ e^{(i\omega_{r1} - \frac{1}{\tau})t} - 1 \} \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \times \left(\frac{16a^r \lambda}{9\pi^2} \right)^2 \times \frac{1}{\omega_{r1}^2 + \left(\frac{1}{\tau} \right)^2} \times \{ e^{-\frac{rt}{\tau}} - e^{-i\omega_{r1}t} e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{i\omega_{r1}t} e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 \} = \left(\frac{16a^r \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \times \frac{\{ e^{-\frac{rt}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} (e^{-i\omega_{r1}t} + e^{i\omega_{r1}t}) + 1 \}}{\omega_{r1}^2 + \left(\frac{1}{\tau} \right)^2} \\ \Rightarrow P_{1 \rightarrow r} &= \left(\frac{16a^r \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \times \frac{e^{-\frac{rt}{\tau}} - re^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_{r1}t + 1}{\omega_{r1}^2 + \left(\frac{1}{\tau} \right)^2} = \left(\frac{16a^r \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \times \frac{1 + e^{-\frac{rt}{\tau}} - re^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_{r1}t)}{\omega_{r1}^2 + \frac{1}{\tau^2}} \end{aligned}$$

۱۴- گزینه «۱» با استفاده از معادله شرودینگر در مختصات کروی برای $r \leq a$ می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 u_\ell}{dr^2} + \left(k'^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u_\ell = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_\ell}{dr^2} + \left(k'^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u_\ell = 0$$

در رابطه فوق $k'^2 = k^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}$ است. با حل این معادله موج دیفرانسیلی می‌توان نوشت:

$$u_\ell(k'r) = r j_\ell(k'r)$$

از طرفی می‌دانیم که جواب معادله شرودینگر با استفاده از روش پاره‌موج‌ها به صورت مقابل است:

$$u_\ell(k'r) = r A_\ell(k'r)$$

پس $A_\ell(k'r) = j_\ell(k'r)$ در این صورت با استفاده از مشتق لگاریتمی داریم:

$$\beta_\ell = \left(\frac{r}{A_\ell(r)} \frac{dA_\ell(r)}{dr} \right)_{r=a} \Rightarrow \beta_\ell = \frac{k'a}{A_\ell(k'a)} = \frac{k'a}{j_\ell(k'a)} j'_\ell(k'a)$$

با استفاده از مشتق تابع بسل داریم:

$$j'_n(x) = \frac{n}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x) \Rightarrow \beta_\ell = \frac{k'}{j_\ell(k'a)} \left(\frac{1}{k'a} j_\ell(k'a) - j_{\ell+1}(k'a) \right) = \ell - k'a \frac{j_{\ell+1}(k'a)}{j_\ell(k'a)}$$

با استفاده از $j_\ell(kr)$ در ناحیه $ka \ll 1$ می‌توان نوشت:



۱۲- ذره‌ای به جرم m در لحظه $t = 0$ ابتدا در حالت پایه چاه پتانسیل یک بُعدی بی‌نهایت که دیواره‌هایش در $x = a$ و $x = 0$ است، قرار دارد. این ذره در بازه $0 \leq t \leq \infty$ تحت تأثیر پتانسیل اختلالی وابسته به زمان $V(x, t) = \beta x^\tau e^{-t/\tau}$ قرار می‌گیرد که β و τ ثابت‌های مثبتی هستند. تا مرتبه اول اختلال وابسته به زمان، احتمال این‌که در $t \rightarrow \infty$ ذره در اولین حالت برانگیخته انرژی باشد، چقدر است؟ (اگر $\langle x | 1 \rangle$ و $\langle x | 2 \rangle$ توابع موج حالت پایه و

اولین حالت برانگیخته ذره در چاه پتانسیل یک بُعدی نامتناهی باشند $\langle 2 | x^2 | 1 \rangle = -\frac{16}{9} \frac{a^2}{\pi^2}$.)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left(\frac{16a^2\tau\beta}{3\hbar\pi} \right)^\tau \left(1 + \frac{3\hbar^\tau\pi^\tau\tau^\tau}{4m^\tau a^4} \right)^{-1} \\ (2) \quad & \left(\frac{4a^2\tau\beta}{\hbar\pi} \right)^\tau \left(1 + \frac{9\hbar^\tau\pi^\tau\tau^\tau}{2m^\tau a^4} \right)^{-1} \\ (3) \quad & \left(\frac{4a^2\tau\beta}{3\hbar\pi} \right)^\tau \left(1 + \frac{3\hbar^\tau\pi^\tau\tau^\tau}{2m^\tau a^4} \right)^{-1} \\ (4) \quad & \left(\frac{16a^2\tau\beta}{9\hbar\pi} \right)^\tau \left(1 + \frac{9\hbar^\tau\pi^\tau\tau^\tau}{4m^\tau a^4} \right)^{-1} \end{aligned}$$

۱۳- به روش وردش و با تابع موج آزمون $\psi(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ انرژی حالت پایه نوسانگر هماهنگ ساده یک بُعدی $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ چقدر است؟

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{a^{2n-1}} ; n = 2, 3, \dots \right)$$

$$\frac{1}{2} \hbar \omega \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \hbar \omega \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \hbar \omega \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \hbar \omega \quad (1)$$

۱۴- دامنه پراکندگی ذرات پراثری به جرم m و انرژی $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ از پتانسیل یوکاوا $V(r) = V_0 \frac{e^{-r/a}}{r}$ تا تقریب مرتبه اول بورن به شکل

$f(\theta) \approx \frac{-2mV_0 a^2}{\hbar^2} \frac{1}{1 + k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$ است که θ زاویه بین راستای موج (ذرات) فرودی و راستای مشاهده (آشکارساز) است. سطح مقطع کل پراکندگی کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left(\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \right) \pi (1 + k^2 a^2) \ln(1 + k^2 a^2) \\ (2) \quad & \left(\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \right) \pi \ln(1 + k^2 a^2) \\ (3) \quad & \left(\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \right) \frac{4\pi}{1 + k^2 a^2} \\ (4) \quad & \left(\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \right) \frac{4\pi (1 + k^2 a^2)}{1 + k^2 a^2} \end{aligned}$$

۱۵- در پراکندگی کشسان ذره‌ای به جرم m با انرژی $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ و تکانه زاویه‌ای $\ell = 0$ (پراکندگی موج S) از پتانسیل متقارن و کروی

$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 < r \leq a \\ 0 & r \geq a \end{cases}$ ، $(V_0 > 0)$ تابع موج شعاعی در ناحیه $0 < r \leq a$ به صورت $R(r) = C_1 \frac{\sin(qr)}{r}$ و در ناحیه $r \geq a$ به صورت

$R(r) = C_2 \frac{\sin(kr + \delta_0)}{r}$ است که $q^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}$. سطح مقطع کل پراکندگی در انرژی‌های پایین $E \ll V_0$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \pi a^2 \left(\frac{\tan(qa)}{qa} + 1 \right)^2 \\ (2) \quad & \pi a^2 \left(\frac{\tan(qa)}{qa} - 1 \right)^2 \\ (3) \quad & \pi a^2 \left(\frac{\tan(qa)}{qa} - 1 \right)^2 \\ (4) \quad & \pi a^2 \left(\frac{\tan(qa)}{qa} + 1 \right)^2 \end{aligned}$$

۱۶- مرزهای یک ناحیه دوبعدی (نامتناهی در امتداد z) $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند. در داخل حجم این ناحیه بار الکتریکی به‌طور یکنواخت توزیع شده است. به‌طوری‌که چگالی آن در واحد طول امتداد z ، برابر واحد است. با تابع پتانسیل

آزمون $\phi(x, y) = Axy(1-x)(1-y)$ و روش وردش بهترین مقدار A کدام است؟ (راهنمایی: وردش معادله $\nabla^2 \phi = -\rho$ منجر

به معادله پواسون می‌شود و $\epsilon_0 = 1$)

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

گزینه (۴):

$$\pi^\dagger H \pi = \frac{1}{2m} \pi^\dagger p^2 \pi + \xi \pi^\dagger \vec{p} \cdot \vec{L} \pi = \frac{p^2}{2m} - \xi \vec{p} \cdot \vec{L}$$

تقارن پاریته ندارد.

$$\theta H \theta^{-1} = \frac{1}{2m} \theta p^2 \theta^{-1} + \xi \theta \vec{p} \cdot \vec{L} \theta^{-1} = \frac{p^2}{2m} + \xi \vec{p} \cdot \vec{L}$$

تقارن وارونی زمان دارد.

در حل این مسئله از روابط زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} \pi^\dagger \vec{r} \pi &= -\vec{r} & , & & \pi^\dagger \vec{p} \pi &= -\vec{p} \\ \pi^\dagger \vec{s} \pi &= \vec{s} & , & & \pi^\dagger \vec{L} \pi &= \vec{L} \\ \theta \vec{r} \theta^{-1} &= \vec{r} & , & & \theta \vec{p} \theta^{-1} &= -\vec{p} \\ \theta \vec{L} \theta^{-1} &= -\vec{L} & , & & \theta \vec{s} \theta^{-1} &= -\vec{s} \end{aligned}$$

۱۱- گزینه «۱» با توجه به اینکه حالت پایه انرژی متناظر $\ell = 0$ است، بنابراین غیرتبهمگن بوده و از نظریه اختلال ناتبهمگن استفاده می‌کنیم:چنانچه هامیلتونی مختل شده به صورت $H = H_0 + \lambda V$ باشد تا مرتبه دوم λ انرژی مختلف شده مربوط به حالت $|n^{(0)}\rangle$ به صورت زیر خواهد بود:

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda \langle n^{(0)} | V | n^{(0)} \rangle + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{\langle k^{(0)} | V | n^{(0)} \rangle \langle n^{(0)} | V | k^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad (۱)$$

که $|k^{(0)}\rangle$ و $E_k^{(0)}$ نشان‌دهنده انرژی مختل شده حالت k ام است حال چنانچه قرار دهیم $H = \frac{L^2}{2I} - P_0 E_0 \cos(\theta)$ به محاسبه انرژی تا مرتبه دوماختلال برای حالت پایه $|\ell(u) = \ell, m\rangle$ می‌پردازیم:قرار می‌دهیم $V = -P_0 E_0 \cos \theta$ و داریم:

$$-\langle \ell, m | V | \ell, m \rangle = P E_0 \int \langle \ell, m | \cos \theta | \ell, m \rangle \cos \theta d\Omega = P E_0 \int Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = P E_0 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 0$$

دیده می‌شود که در مرتبه اول اختلال یعنی $P E_0$ حاصل انرژی اختلالی صفر است. حال به محاسبه مرتبه دوم می‌پردازیم توجه کنید که در (۱)، روی همه حالات به جز $|n^{(0)}\rangle$ جمع خورده است.با توجه به اینکه برای دو حالت کلی $m^{Y_\ell}(\theta, \phi) \propto p_n(\cos \theta)$ و پتانسیل اختلالی با $P_1(\theta, \phi)$ متناسب است از متعامد بودن توابع لژاندر نتیجه می‌شود که تنها $m^{Y_\ell}(\theta, \phi)$ به حاصل جمع در (۱) سهم می‌دهد. همچنین با توجه به اینکه برای $\mu \neq 0$ و $\int_0^{2\pi} e^{i\mu\phi} d\phi = 0$ بنابراین دیده می‌شود که در

$$E_n^{(2)} = \frac{|\langle \ell, m | V | \ell, m \rangle|^2}{-E_n^{(0)}}$$

مجموع تنها Y_1^0 مهم است و گزینه (۱) یا (۲) درست است بنابراین داریم:

$$E_n^{(2)} = \frac{-P^2 E_0^2 I}{2\hbar^2} \left(\int \langle \ell, m | \cos \theta | \ell, m \rangle \cos \theta d\Omega \right)^2$$

چون $(\ell-1)E_1^{(0)} = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2I} = \frac{\hbar}{I}$ داریم:

$$\begin{aligned} &= -\frac{P^2 E_0^2 I}{2\hbar^2} \left(\int Y_1^0(\theta, \phi) Y_1^0(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \right)^2 = -\frac{2P^2 E_0^2 I}{4\hbar^2} \left(\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right)^2 = -\frac{P^2 E_0^2 I}{3\hbar^2} \\ \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= -\int_0^\pi \cos^2 \theta d\cos \theta = \frac{-\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

که در آن از انتگرال مقابل استفاده کرده‌ایم:

۱۲- گزینه «۴» برای حالت پایه $n=1$ و برای اولین برانگیختگی $n=2$ است. می‌توانیم احتمال اینکه در $t \rightarrow \infty$ ذره در اولین حالت برانگیخته انرژی باشد را به روش زیر محاسبه کنیم:

$$p_{12}(t) = \left| -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle 2 | V(t') | 1 \rangle e^{i\omega_{21}t'} dt' \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty \langle 2 | V(t) | 1 \rangle e^{i\omega_{21}t} dt \right|^2 = \frac{\beta^2}{\hbar^2} |\langle 2 | \hat{x} | 1 \rangle|^2 \times \left| \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\tau} - i\omega_{21})t} dt \right|^2$$



طبق راهنمایی صورت سؤال $\langle \hat{X}^2 \rangle = -\frac{16a^2}{9\pi^2}$ است و بنابراین داریم:

$$P_{12}(t) = \frac{\beta^2}{\hbar^2} \left(-\frac{16a^2}{9\pi^2} \right)^2 \left| \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\tau} - i\omega_{21})t} dt \right|^2 = \left(\frac{16\beta a^2}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \times \left| \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\tau} - i\omega_{21})t} dt \right|^2$$

حال کافی است مقدار انتگرال بالا محاسبه شود:

$$\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\tau} - i\omega_{21})t} dt = -\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega_{21}} e^{-(\frac{1}{\tau} - i\omega_{21})t} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega_{21}}$$

بنابراین در نهایت برای احتمال مورد نظر داریم:

$$P_{12}(t) = \left(\frac{16\beta a^2}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \times \left(-\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega_{21}} \right)^2 = \left(\frac{16\beta a^2}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega_{21}} \times \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega_{21}} = \left(\frac{16\beta a^2}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \omega_{21}^2}$$

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad \text{و} \quad \omega_{21} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad \text{برای ذره در جعبه پتانسیل خواهیم داشت:}$$

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

یعنی در نهایت احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P_{12}(t) = \left(\frac{16\beta a^2}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \left(\frac{2\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)^2} = \left(\frac{16\beta a^2}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \frac{4\pi^4 \hbar^2}{4m^2 a^4}} = \left(\frac{16\beta a^2}{9\hbar\pi^2} \right)^2 \times \left(1 + \frac{9\pi^4 \hbar^2}{4m^2 a^4} \right)^{-1}$$

$$\frac{\langle \tilde{\psi} | \hat{H} | \tilde{\psi} \rangle}{\langle \tilde{\psi} | \tilde{\psi} \rangle} \geq E_0$$

۱۳- گزینه «۲» بنابر اصل وردشی حد بالایی برای انرژی حالت پایه به صورت مقابل وجود دارد:

در این رابطه $\hat{H}$ عملگر هامیلتونی برابر با مجموع عملگرهای انرژی پتانسیل $\hat{V}$ و انرژی جنبشی $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ ذره است. E_0 انرژی حالت پایه و $\tilde{\psi}(x)$ تابع موج آزمون سیستم است. بنابر فرض مسئله $\hat{V}(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ و $\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ هستند. بنابراین با جایگذاری آن‌ها در رابطه

$$\langle \tilde{\psi} | \hat{H} | \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi} | \hat{V} + \hat{T} | \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi} | \hat{V} | \tilde{\psi} \rangle + \langle \tilde{\psi} | \hat{T} | \tilde{\psi} \rangle$$

اصل وردشی داریم:

حال هر یک از این عبارات را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\langle \tilde{\psi} | \hat{V} | \tilde{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^* \hat{V} \tilde{\psi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

به منظور استفاده از راهنمایی مسئله لازم است انتگرال را به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ تبدیل کنیم. پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} - a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{a} - a^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{a^3} = \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{V} \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \times \frac{\pi}{2a} = \frac{m \omega^2 \pi}{4a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan} \frac{x}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{a}$$

توجه شود که انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$ برابر است با:

$$\langle \hat{T} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{\psi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) dx$$

به همین ترتیب می‌توانیم $\langle \hat{T} \rangle$ را نیز محاسبه کنیم:



ابتدا باید از $\frac{1}{x^2 + a^2}$ دو بار مشتق بگیریم. بنابراین داریم:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-2x}{(x^2 + a^2)^2} \right) = \frac{-2(x^2 + a^2)^2 + 4x^2(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^4} = \frac{-2(x^2 + a^2) + 4x^2}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{2x^2 - 2a^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

به این ترتیب برای $\langle \hat{T} \rangle$ خواهیم داشت:

$$\langle \hat{T} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 2a^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + 2a^2 - 4a^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx - 4a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} dx \right\}$$

دوباره به کمک راهنمایی صورت سؤال مقدار این انتگرال برابر است با:

$$\langle \hat{T} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ 6 \times \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \times \frac{\pi}{a^5} - 4a^2 \times \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \times \frac{\pi}{a^5} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{\pi}{a^5} \right\} = \frac{\hbar^2 \pi}{4ma^5}$$

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{T} \rangle + \langle \hat{V} \rangle = \frac{\hbar^2 \pi}{4ma^5} + \frac{m\omega^2 \pi}{4a}$$

پس در نهایت داریم:

$$\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{a^3} = \frac{\pi}{2a^3}$$

حال کافی است $\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle$ را محاسبه کنیم:

$$\tilde{E} = \frac{\langle \tilde{\Psi} | \hat{H} | \tilde{\Psi} \rangle}{\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle} = \frac{\frac{\hbar^2 \pi}{4ma^5} + \frac{m\omega^2 \pi}{4a}}{\frac{\pi}{2a^3}} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

اکنون تابع $\tilde{E}$ قابل محاسبه است:

مقدار انرژی حالت پایه سیستم بنا بر روش اصل وردشی با مقدار کمینه $\tilde{E}$ برابر است.

پس از $\tilde{E}$ نسبت به a مشتق می‌گیریم و مقدار a که به ازای آن $\tilde{E}$ کمینه می‌شود را پیدا می‌کنیم و در نهایت با جایگذاری در رابطه $\tilde{E}$ مقدار کمینه آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d\tilde{E}}{da} = -\frac{\hbar^2}{2ma^3} + m\omega^2 a = 0 \Rightarrow m\omega^2 a = \frac{\hbar^2}{2ma^3} \Rightarrow a^4 = \frac{\hbar^2}{2m\omega^2} \Rightarrow a^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega}$$

$$\Rightarrow \tilde{E} = \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{\sqrt{2}m\omega}{\hbar} + \frac{1}{2} m\omega^2 \times \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hbar \omega$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega$$

۱۴- گزینه «۳» می‌دانیم که سطح مقطع پراکندگی کل برابر است با:

در این رابطه $d\Omega = 2\pi d(\cos\theta)$ و $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{-1}(\theta)|^2$ را باید $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ را برحسب $\cos\theta$ تعیین کنیم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{-1}(\theta)|^2 = \left| \frac{-2mV_0 a^2}{\hbar^2} \times \frac{1}{1 + k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right|^2 = \frac{4m^2 V_0^2 a^4}{\hbar^4} \times \frac{1}{(1 + k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} = \frac{4m^2 V_0^2 a^4}{\hbar^4} \times \frac{1}{(1 + k^2 a^2 \times \frac{1 - \cos\theta}{2})^2}$$

در این رابطه از معادله مثلثاتی $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$ استفاده شده است. حال می‌توانیم مقدار σ_{tot} را به دست آوریم:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \cdot 2\pi d(\cos\theta) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \frac{4m^2 V_0^2 a^4}{\hbar^4} \times \frac{d(\cos\theta)}{(1 + k^2 a^2 (\frac{1 - \cos\theta}{2}))^2}$$

$$= \frac{2\pi \times 4m^2 V_0^2 a^4}{\hbar^4} \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos\theta)}{(1 + 2k^2 a^2 - 2k^2 a^2 \cos\theta)^2} = \frac{2\pi \times 4m^2 V_0^2 a^4}{\hbar^4 \times 4k^4 a^4} \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos\theta)}{(\frac{1}{2k^2 a^2} + 1 - \cos\theta)^2}$$



اگر از تغییر متغیر $1 + \frac{1}{2k^2 a^2} - \cos \theta = U$ استفاده کنیم، داریم $dU = -d(\cos \theta)$ و به این ترتیب انتگرال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi \times 4m^2 V_0 a^6}{h^4 \times 4k^4 a^4} \int_{-1}^{+1} \frac{-dU}{U^2} = \frac{2\pi \times 4m^2 V_0 a^6}{h^4 \times 4k^4 a^4} \times \frac{1}{U} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2\pi \times 4m^2 V_0 a^6}{h^4 \times 4k^4 a^4} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2k^2 a^2} - \cos \theta} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2\pi \times 4m^2 V_0 a^6}{h^4 \times 4k^4 a^4} \times \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2k^2 a^2}} - \frac{1}{\frac{1}{2k^2 a^2} + 1} \right\} = \frac{2\pi \times 4m^2 V_0 a^6}{h^4 \times 4k^4 a^4} \times \left\{ 2k^2 a^2 - \frac{2k^2 a^2}{1 + 4k^2 a^2} \right\} \\ &= \frac{2\pi \times 4m^2 V_0 a^6}{h^4 \times 4k^4 a^4} \times 2k^2 a^2 \times \left(1 - \frac{1}{1 + 4k^2 a^2} \right) = \frac{2\pi \times 4m^2 V_0 a^6}{h^4 \times 2k^2 a^2} \times \frac{4k^2 a^2 - 1}{1 + 4k^2 a^2} = \left(\frac{4m^2 V_0 a^6}{h^4} \right) \frac{4\pi}{1 + 4k^2 a^2} \end{aligned}$$

۱۵- گزینه «۴» طبق صورت سؤال جواب داخل چاه که در $r = 0$ منظم است، عبارت است از: $R(r) = C_1 \frac{\sin qr}{r} \Rightarrow u(r) = rR(r) = C_1 \sin qr$

همچنین جواب خارج چاه عبارت است از: $R'(r) = C_2 \frac{\sin(kr + \delta_0)}{r} \Rightarrow u'(r) = rR'(r) = C_2 \sin(kr + \delta_0)$

از پیوستگی $\frac{1}{u} \left(\frac{du}{dr} \right)$ در $r = a$ داریم: $\frac{qC_1 \cos qa}{C_1 \sin qa} = \frac{kC_2 \cos(kr + \delta_0)}{C_2 \sin(kr + \delta_0)} \Rightarrow q \cot qa = k \cot(ka + \delta_0)$

به این ترتیب با استفاده از بسط $\cot(ka + \delta_0)$ خواهیم داشت:

$$\tan \delta_0 = \frac{\left(\frac{k}{q} \right) \tan qa - \tan ka}{1 + \left(\frac{k}{q} \right) \tan qa \tan ka}$$

اگر تعریف کنیم $\tan q'a = \frac{k}{q} \tan qa$ خواهیم داشت:

$$\tan \delta_0 = \frac{\tan q'a - \tan ka}{1 + \tan q'a \tan ka} = \tan(q'a - ka)$$

یعنی: $\delta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{k}{q} \tan qa \right) - ka$

با توجه به روابط $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ و $q = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}$ خواهیم داشت:

$$(qa)^2 = (ka)^2 + \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$

که در آن برای پتانسیل جاذبه داریم $V_0 > 0$. بنابراین، در انرژی‌های بسیار کم، با استفاده از $\tan x \approx x$ برای $x \ll 1$ خواهیم داشت:

$$\tan \delta_0 = \delta_0 = ka \left(\frac{\tan qa}{qa} - 1 \right)$$

وقتی qa از $\frac{\pi}{2}$ می‌گذرد که درست این شرط است که چاه برای به وجود آمدن یک حالت مقید به اندازه کافی عمیق باشد.

در انرژی‌های بسیار کم فقط $\ell = 0$ در سطح مقطع سهمیم است و این سهم برابر است با:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = \frac{4\pi}{k^2} (ka)^2 \left(\frac{\tan qa}{qa} - 1 \right)^2 = 4\pi a^2 \left(\frac{\tan qa}{qa} - 1 \right)^2$$

۱۶- گزینه «۴» با توجه به راهنمایی سؤال کافی است $\phi(x, y) = Axy(1-x)(1-y)$ را در کنش قرار دهیم و از حاصل نسبت به A وردش بگیریم. ابتدا کنش را برای پتانسیل داده شده محاسبه می‌کنیم. قبل از محاسبه کنش راحت‌تر است که جمله اول آن را با استفاده از انتگرال جزء به جزء به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{2} \int_V \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi dV = \frac{1}{2} \left(\int_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) dV - \int_V \phi \nabla^2 \phi dV \right) \quad (1)$$

حال توجه کنید که جمله اول در سمت راست تساوی معادله (۱) را با استفاده از قضیه دیورژانس می‌توان روی سطح استوانه برد:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) dV = \int_A \phi \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

توجه کنید که استوانه موردنظر سؤال، ۶ سطح جانبی دارد؛ سطوح در $Z = \pm \ell$ ($\ell \rightarrow \infty$) و سطوح $x=1, y=1$ با توجه به اینکه بردار عمود به خارج حجم روی سطوح $Z = +\ell$ و $Z = -\ell$ به ترتیب در جهت $\hat{k}$ و $-\hat{k}$ می‌باشد، این دو سطح اثر یکدیگر را در (۲) حذف می‌کنند. همچنین روی سطوح $x=1, y=1$ ، $\phi = yx(1-x)(1-y)$ صفر است و بنابراین جمله (۲) صفر خواهد بود. پس:

$$\frac{1}{\gamma} \int \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi dV = -\frac{1}{\gamma} \int \phi \nabla^2 \phi dV \quad (۳)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = A(-2x(1-x) - 2y(1-y)) \quad (۴)$$

حال دقت کنید که:

با قرار دادن (۴) در (۳) داریم:

$$\frac{1}{\gamma} \int \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi dV = A^2 \left(\int_0^1 \int_{-\ell}^{\ell} x^2(1-x)^2 y(1-y) dx dy dz + \int_0^1 \int_{-\ell}^{\ell} x(1-x)y^2(1-y)^2 dx dy dz \right) \quad (۵)$$

که با توجه به تقارن روی X و Y جمله اول و دوم برابرند و می‌توان حاصل بالا را به‌صورت زیر نوشت (2ℓ طول استوانه است که به بی‌نهایت می‌رود):

$$(۵) = 2A^2 \int_0^1 \int_0^1 x^2(1-x)^2 y(1-y) dx dy \times 2\ell \quad (۶)$$

گرفتن انتگرال بالا روی X و Y با توجه به اینکه توابع داخل انتگرال چندجمله‌ای هستند ساده می‌باشد. اما ساده‌تر از نکته زیر استفاده کنیم:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

نکته: در حالت کلی تابع بتا برابر است با:

$$T(a) = (a-1)!$$

که T تابع گاما است و در حالتی که آرگومان a صحیح باشد با عبارت مقابل داده می‌شود:

$$\int_0^1 y(1-y) dy = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \quad (۷)$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)} = \frac{2!2!}{5!} = \frac{1}{30} \quad (۸)$$

$$(۵) = \frac{+2\ell A}{90} = \frac{1}{\gamma} \int \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi dV \quad (۹)$$

با قرار دادن (۷) و (۸) در (۶) داریم:

$$-\int \rho \phi dV = -A \int_{-\ell}^{\ell} \int_0^1 yx(1-x)(1-y) dx dy dz = -2\ell A \left(\int_0^1 x(1-x) dx \right)^2 = \frac{-2\ell A}{36} \quad (۱۰)$$

همچنین:

که در آن از تقارن روی X و Y در تساوی دوم انتگرال به‌صورت مربعی نوشته شده است و از (۷) استفاده شده است. همچنین از فرض $\rho=1$ سؤال نیز

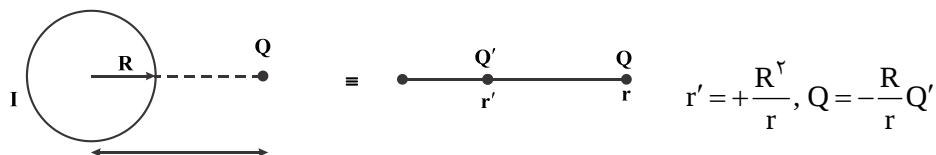
$$I(\phi) = +2\ell \left(\frac{A^2}{90} - \frac{A}{36} \right) \quad (۱۱)$$

استفاده کردیم. از (۹) و (۱۰) می‌توان نوشت:

توجه کنید که وردش‌گیری از A در (۱۱) به معنای مشتق گرفتن از آن و اکسترمم ساختن آن است. پس داریم:

$$\frac{dI}{dA} = 0 \Rightarrow \frac{A}{45} - \frac{1}{36} = 0 \Rightarrow A = \frac{5}{4}$$

۱۷- گزینه «۱» کار انجام گرفته را از رابطه $w = \int_d^{+\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ محاسبه می‌کنیم. $\vec{F}$ نیرویی بین بار نقطه‌ای Q و تصویر آن است.



$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_d^{+\infty} \frac{QQ'\hat{r}}{\epsilon_0 (r-r')^2} \cdot d\vec{r} \rightarrow \vec{F} = \int_d^{+\infty} \frac{-\frac{R}{r} Q' dr}{\epsilon_0 (r - \frac{R^2}{r})^2} = \int_d^{+\infty} \frac{-\frac{R}{r} Q' dr}{\epsilon_0 (\frac{r^2 - R^2}{r^2})^2} = \int_d^{+\infty} \frac{-RQ' r dr}{\epsilon_0 (r^2 - R^2)^2} \\ &= -\frac{RQ'}{\epsilon_0} \int_d^{+\infty} \frac{r dr}{(r^2 - R^2)^2} = -\frac{RQ'}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 - R^2} \right]_d^{+\infty} = \frac{+RQ'}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{d^2 - R^2} \right] \end{aligned}$$

۱۵- ذره‌ای به جرم m و انرژی $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ از پتانسیل کروی $V(r) = V_0 e^{-\lambda r^2}$ به طور کشسان پراکنده می‌شود. V_0 و λ مقادیر ثابت مثبتی هستند. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی در تقریب اول بورن کدام است؟ (θ زاویه پراکندگی است).

$$\begin{aligned} (۱) \quad \frac{\pi m^2 V_0^2}{4 \hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{r^2 k^2 \sin^2(\theta/2)}{\lambda}\right) & \quad (۲) \quad \frac{m^2 V_0^2}{2 \hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{k^2 \sin^2(\theta/2)}{2 \lambda}\right) \\ (۳) \quad \frac{\pi m^2 V_0^2}{4 \hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{r^2 k^2 \sin^2 \theta}{\lambda}\right) & \quad (۴) \quad \frac{m^2 V_0^2}{2 \hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{k^2 \sin^2 \theta}{2 \lambda}\right) \end{aligned}$$

۱۶- بار الکتریکی به صورت سطحی با چگالی $\sigma(r, \theta)$ روی نیم‌صفحه نامتناهی $\Phi = \Phi_0$ توزیع شده است که (r, θ, ϕ) مختصات کروی یک نقطه در فضا است. معادله پواسون برای پتانسیل الکتریکی $\Phi(r, \theta, \phi)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad \nabla^2 \Phi(r, \theta, \phi) &= -\frac{\sigma(r, \theta)}{2 \pi \epsilon_0} \frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r \sin \theta} \\ (۲) \quad \nabla^2 \Phi(r, \theta, \phi) &= -\frac{\sigma(r, \theta)}{\epsilon_0} \frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r \sin \theta} \\ (۳) \quad \nabla^2 \Phi(r, \theta, \phi) &= -\frac{\sigma(r, \theta)}{2 \pi \epsilon_0} \delta(\phi - \phi_0) \\ (۴) \quad \nabla^2 \Phi(r, \theta, \phi) &= -\frac{\sigma(r, \theta)}{\epsilon_0} \delta(\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

۱۷- یک پوسته کروی فرضی به مرکز O و شعاع R در فضایی که در آن بار الکتریکی ساکن وجود دارد در نظر بگیرید. اگر $\bar{\Phi}_S$ پتانسیل الکتریکی متوسط روی سطح این پوسته و Φ_0 پتانسیل الکتریکی در مرکز این پوسته باشد، کدام عبارت همواره درست است؟ (Q_{in} بار الکتریکی خالص داخل پوسته و Q_{out} بار الکتریکی خالص خارج پوسته است).

$$\begin{aligned} (۱) \quad \text{اگر بار الکتریکی داخل پوسته وجود نداشته باشد} \quad \Phi_0 &= \bar{\Phi}_S \\ (۲) \quad \text{اگر بار الکتریکی داخل پوسته وجود نداشته باشد} \quad \Phi_0 &= \bar{\Phi}_S / 4 \pi \\ (۳) \quad \text{اگر } Q_{in} \neq 0 \text{ و } Q_{out} \neq 0 \text{ در این صورت} \quad \bar{\Phi}_S &= Q_{in} / 4 \pi \epsilon_0 R \\ (۴) \quad \text{اگر } Q_{in} \neq 0 \text{ و } Q_{out} \neq 0 \text{ در این صورت} \quad \bar{\Phi}_S &= Q_{out} / 4 \pi \epsilon_0 R \end{aligned}$$

۱۸- پتانسیل الکتریکی در داخل یک ناحیه استوانه‌ای به شعاع R متشکل از دو نیم پوسته نازک رسانای نامتناهی استوانه‌ای به شعاع R (که محور آن در راستای z است) با شرایط مرزی $\Phi(\rho = R, \phi) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq \phi \leq \pi \\ -V_0 & \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$ به صورت $\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{2\rho R \sin \phi}{R^2 - \rho^2}\right)$ است. چگالی بار سطحی روی سطح داخلی دو نیم‌استوانه کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad -\frac{2\epsilon_0 V_0 \sin \phi}{\pi R} & \quad (۲) \quad -\frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi R \sin \phi} \\ (۳) \quad \frac{2\epsilon_0 V_0 \sin \phi}{\pi R} & \quad (۴) \quad \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi R \sin \phi} \end{aligned}$$

۱۹- تابع گرین $G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{<}^{\ell}}{R^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta', \phi')$ مربوط به ناحیه داخلی یک مرز کروی به شعاع R با شرط

مرزی دیریشله است. پتانسیل الکتریکی در ناحیه بین یک پوسته کروی عایق به شعاع a با توزیع بار سطحی $\sigma(a, \theta, \phi)$ و یک پوسته رسانای کروی به شعاع b که در پتانسیل الکتریکی صفر نگه داشته شده کدام است؟ (دو پوسته به صورت هم‌مرکز قرار گرفته‌اند و $b > a$)

$$\text{و } A_{\ell m} = \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \sigma(a, \theta', \phi') Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') a^2 d\Omega' \text{ (است).}$$

$$\begin{aligned} (۱) \quad \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{b}{r}\right)^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ (۲) \quad \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ (۳) \quad \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ (۴) \quad \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \left(\frac{a}{b}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{b}{r}\right)^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \end{aligned}$$



توجه کنید که برای راحتی در انتگرال گیری بالا می‌توان از تعریف تابع گاما به صورت $\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$ و اینکه $\Gamma(4) = 3! = 6$ استفاده کرد.

$$E_T = E_1 + \delta E = -\frac{m_e \lambda^2}{2\hbar^2} - \frac{2\hbar^2 E_0}{2m_e \lambda}$$

پس دیده می‌شود که انرژی کل (E_T) به صورت مقابل داده می‌شود:

توجه کنید که $\lambda = \frac{\hbar^2}{m_e a_0}$ و بنابراین $\frac{\hbar^2 E_0}{m_e \lambda} = E_0 a_0$ که بعد انرژی دارد و در گزینه (۲) صرف نظر از نبود علامت منفی، e در جمله دوم نباید باشد.

۱۳- گزینه «۳» با حل معادله ویژه مقداری می‌توانیم ویژه مقادیر انرژی را محاسبه کنیم.
که در آن H ماتریس هامیلتونی و λ ویژه مقادیر ماتریس هستند.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} m_0 c^2 - \lambda & \hbar\omega & \hbar\omega \\ \hbar\omega & m_0 c^2 - \lambda & \hbar\omega \\ \hbar\omega & \hbar\omega & m_0 c^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda)[(m_0 c^2 - \lambda)^2 - \hbar^2 \omega^2] - \hbar\omega[\hbar\omega(m_0 c^2 - \lambda) - \hbar^2 \omega^2] + \hbar\omega[\hbar^2 \omega^2 - \hbar\omega(m_0 c^2 - \lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda)[(m_0 c^2 - \lambda)^2 - \hbar^2 \omega^2] - 2\hbar\omega[\hbar\omega(m_0 c^2 - \lambda) - \hbar^2 \omega^2] = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda)[(m_0 c^2 - \lambda)^2 - \hbar^2 \omega^2] - 2\hbar^2 \omega^2[(m_0 c^2 - \lambda) - \hbar\omega] = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda)[(m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega)(m_0 c^2 - \lambda + \hbar\omega)] - 2\hbar^2 \omega^2(m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega) = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega)[(m_0 c^2 - \lambda)(m_0 c^2 - \lambda + \hbar\omega) - 2\hbar^2 \omega^2] = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega)[(m_0 c^2 - \lambda)^2 + \hbar\omega(m_0 c^2 - \lambda) - 2\hbar^2 \omega^2] = 0$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک عبارت دوم را تجزیه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega)(m_0 c^2 - \lambda + 2\hbar\omega)(m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega) = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega)^2 (m_0 c^2 - \lambda + 2\hbar\omega) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0 c^2 - \lambda + 2\hbar\omega = 0 \Rightarrow \lambda_1 = m_0 c^2 + 2\hbar\omega = E_1 \\ (m_0 c^2 - \lambda - \hbar\omega)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = m_0 c^2 - \hbar\omega = E_2 = E_3 \end{cases}$$

به این ترتیب ویژه مقادیر انرژی تعیین شده‌اند.

۱۴- گزینه «۲» احتمال اینکه پس از گذشت زمان t نوترینوی ν_e به وجود آمده در لحظه صفر به نوترینوی ν_μ تبدیل شود وابسته به اختلاف انرژی این دو

$$\Delta E = E_e - E_\mu = E_1 - E_2 = m_0 c^2 + 2\hbar\omega - (m_0 c^2 - \hbar\omega) = 3\hbar\omega$$

نوترینو است:

بنابراین احتمال تبدیل شدن ν_e به ν_μ باید تابعی از $3\hbar\omega$ باشد. بنابراین گزینه (۲) گزینه صحیح است.

۱۵- گزینه «۱» طبق تقریب بورن، سطح مقطع دیفرانسیلی، $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ برحسب زاویه پراکندگی مرکز جرمی θ به دست می‌آید. اگر ذره هدف خیلی سنگین باشد

$$m_{\text{کاهیده}} = m \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2} \left| \frac{1}{\hbar^2} \tilde{V}(q) \right|^2$$

و m جرم ذره فرودی باشد، خواهیم داشت:

$$\tilde{V}(q) = \int d^3r e^{-iqr} V(r) = V_0 \int d^3r e^{-iqr} e^{-\lambda r} = V_0 2\pi \int_0^\infty r^2 dr e^{-\lambda r} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) e^{-iqr \cos\theta}$$

در این رابطه انتگرال نهایی برابر است با:

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) e^{-iqr \cos\theta} = \frac{1}{(-iqr)} [e^{-iqr} - e^{iqr}] \Rightarrow \tilde{V}(q) = \frac{i2\pi V_0}{q} \int_0^\infty r dr [e^{-iqr} - e^{iqr}] e^{-\lambda r}$$



حال باید انتگرال فوق محاسبه شود. با استفاده از مربع کامل کردن داریم:

$$-\lambda r^2 + iqr = -\left(\sqrt{\lambda}r - \frac{iq}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 - \left(\frac{q}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2$$

$$\sqrt{\lambda}r - \frac{iq}{2\sqrt{\lambda}} = x \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(x + \frac{iq}{2\sqrt{\lambda}}\right) \Rightarrow dr = \frac{dx}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \int_0^\infty r dr e^{-iqr - \lambda r^2} = \frac{1}{\lambda} e^{-\left(\frac{q}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2} \left\{ \int_0^\infty x dx e^{-x^2} + \frac{iq}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty dx e^{-x^2} \right\}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty dx x e^{-x^2} = \frac{1}{2}$$

با استفاده از دو انتگرال مقابل داریم:

$$\Rightarrow \int_0^\infty r dr e^{-iqr - \lambda r^2} = e^{-\left(\frac{q}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2} \left[\frac{1}{2\lambda} + \frac{iq}{4\lambda\sqrt{\lambda}} \sqrt{\pi} \right]$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty r dr e^{iqr - \lambda r^2} = e^{-\left(\frac{q}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2} \left[\frac{1}{2\lambda} - \frac{iq}{4\lambda\sqrt{\lambda}} \sqrt{\pi} \right]$$

اگر q به $-q$ تبدیل شود داریم:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \pi \left[\frac{mV_0}{\hbar^2 \lambda^2} \right]^2 \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{q}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right]$$

در نهایت برای سطح مقطع پراکندگی داریم:

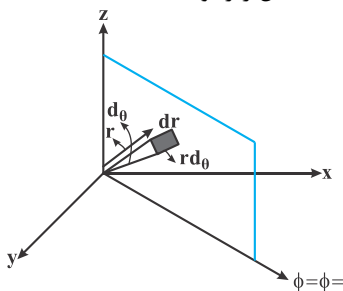
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \pi \left[\frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 \lambda^2} \right] \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda}\right] = \pi \left[\frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4 \lambda^2} \right] \exp\left[-\frac{2k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda}\right]$$

حال با جایگذاری $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ خواهیم داشت:

۱۶- گزینه «۲» روش تشریحی: ابتدا توجه کنید که چنانچه $\sigma(r, \theta)$ چگالی بار الکتریکی روی صفحه باشد آن‌گاه بار روی صفحه به صورت زیر خواهد بود:

$$Q = \int_{\text{روی صفحه}} \sigma(r, \theta) r dr d\theta$$

به عبارتی در این صفحه از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم و θ روی صفحه نقش زاویه سمتی و r نقش فاصله را دارد. به شکل زیر توجه کنید:



$$\nabla^2 \phi = \frac{-\rho(r, \theta, \varphi)}{\epsilon_0}$$

حال توجه کنید که معادله پواسون به صورت زیر است:

که ρ چگالی بار حجمی روی صفحه است و در مختصات کروی داریم:

$$\int \sigma(r, \theta) r dr d\theta = \int \rho(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

توجه کنید که چگالی بار حجمی در فضا همه جا صفر است به جز $\varphi = \varphi_0$. پس باید $\rho(r, \theta, \varphi) = f\delta(\varphi - \varphi_0)$ که تابعی از r و θ است بنابراین داریم:

$$\int \sigma(r, \theta) r dr d\theta = \int f(r, \theta) \delta(\varphi - \varphi_0) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int f(r, \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$f(r, \theta) = \frac{\sigma(r, \theta)}{r \sin \theta}$$

با برابر قرار دادن آرگومان داخل انتگرال‌ها در بالا داریم:

توجه کنید که در صورت سؤال گزینه (۱) و (۳) شبیه به هم هستند که البته پاسخ صحیح نیستند. به نظر می‌رسد گزینه (۳) یک علامت منفی با گزینه (۱) تفاوت داشته است.

روش تستی: کافی است از تحلیل ابعادی استفاده کنیم. توجه کنید که $[\sigma(r, \theta)] = \frac{C}{m}$ که بعد بار الکتریکی در واحد سطح را دارد. همچنین

چون $\int \delta(\varphi - \varphi_0) d\varphi = 1$ و φ بدون بعد است، پس $[\delta(\varphi - \varphi_0)] = 1$ و دلتای دیراک داده شده در گزینه‌های بعد است. با توجه به گزینه‌ها دیده

می‌شود که چگالی داده شده در گزینه (۱) و (۳) بعد $\frac{C}{m^4}$ و چگالی داده شده در گزینه (۴) بعد $\frac{C}{m}$ که هر سه نادرست هستند و تنها گزینه (۲) بعد

$$\left[\frac{\sigma(r, \theta)}{r} \right] = \frac{C}{m^3}$$

چگالی بار حجمی دارد:

$$\bar{\Phi}_S = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi R^2}$$

۱۷- گزینه «۱» پتانسیل متوسط $\bar{\Phi}_S$ از رابطه مقابل به دست می‌آید:

حال اگر $\Phi_{in} = 0$ ، آنگاه پتانسیل مرکز کره با پتانسیل روی پوسته کره برابر خواهد شد؛ یعنی $\Phi = \Phi_0$. با جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$\bar{\Phi}_S = \Phi_0 \frac{(4\pi R^2)}{4\pi R^2} \Rightarrow \bar{\Phi}_S = \Phi_0$$

۱۸- گزینه «۴» چگالی بار سطحی از رابطه $\sigma = (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot (-\hat{\rho}) \Big|_{\rho=R}$ به دست می‌آید که $\vec{D}_1$ ، میدان الکتریکی داخل استوانه و $\vec{D}_2$ ، میدان الکتریکی

خارج استوانه است. پوسته استوانه‌ای رساناست؛ بنابراین $\vec{D}_2 = 0$.

با تغییر متغیر $u = \frac{r\rho R \sin \varphi}{R^2 - \rho^2}$ خواهیم داشت:

$$\Phi = \frac{rV_0}{\pi} \tan^{-1} u \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{rV_0}{\pi} \left(\frac{1}{1+u^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}$$

$$\sigma = \frac{r\varepsilon_0 V_0}{\pi} \left[\frac{1}{1 + \frac{r^2 \rho^2 R^2 \sin^2 \varphi}{(R^2 - \rho^2)^2}} \right] \left(\frac{rR \sin \varphi (R^2 - \rho^2) + r\rho^2 R \sin \varphi}{(R^2 - \rho^2)^2} \right) \Big|_{\rho=R}$$

$$\sigma = \frac{r\varepsilon_0 V_0}{\pi R \sin \varphi}$$

با ساده‌سازی خواهیم داشت:

۱۹- گزینه «۳» اگر توزیع بار را یکنواخت (Q) در نظر بگیریم، آنگاه پتانسیل در فضای $a < r < b$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) a^{\ell} \left[\frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{\ell+1}} \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

در این حالت تقارن کره‌ای داریم ($m=0$) و خواهیم داشت:

$$P_{\ell}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,0}(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} a^{\ell} \left[\frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{\ell+1}} \right] \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,0}(\theta, \varphi) \Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{a}{r} \right)^{\ell} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \left(\frac{r}{b} \right)^{\ell} \right] Y_{\ell,0}(\theta, \varphi)$$

که در گزینه‌های داده شده با قرار دادن $m=0$ ، به گزینه (۳) می‌رسیم.

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}'$$

۲۰- گزینه «۱» پتانسیل را می‌توان از رابطه مقابل به دست آورد:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{r^{\ell+1}} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

با بسط جمله $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ داریم:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell,m} \frac{1}{r^{\ell+1}} \left[\int Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \rho(x') r'^{\ell} d^3x' \right] \frac{Y_{\ell m}}{r^{\ell+1}}$$

خواهیم داشت:

با مقایسه این عبارت با صورت سؤال داریم:

$$q_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') r'^{\ell} \rho(\vec{x}') d^3x' \Rightarrow q_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') r'^{\ell} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{e}{a_0^{\ell}} \left(\frac{r'}{a_0} \right)^{\ell} e^{-\frac{r'}{a_0}} Y_{\ell \ell}(\theta', \varphi') r'^{\ell} \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m}$$

از طرفی از شرط نرمالیزاسیون داریم:

$$q_{\ell m} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{e}{a_0^{\ell}} \frac{r^{\ell}}{a_0^{\ell}} e^{-\frac{r}{a_0}} r^{\ell} \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m} dr \Rightarrow q_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{e}{a_0^{\ell}} \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m} \int_0^{\infty} r^{\ell} e^{-\frac{r}{a_0}} dr$$

$$q_{\ell m} = 4\pi \sqrt{\frac{2}{4\pi}} e a_0^{\ell} \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m}$$

با ساده‌سازی خواهیم داشت:



۴۰- ذره کوانتومی به جرم m درون یک چاه بی‌نهایت یک‌بعدی با پهنای L قرار دارد. گرمای ویژه در پهنای ثابت این سیستم، C_L ، در دماهای بسیار پایین کدام است؟ $(\alpha = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2 k_B})$

$$(1) \quad 2k_B \left(\frac{\alpha}{T}\right) e^{\frac{-\alpha}{T}} \quad (2) \quad k_B \left(\frac{\alpha}{T}\right) e^{\frac{-\alpha}{T}} \quad (3) \quad 9k_B \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 e^{\frac{-3\alpha}{T}} \quad (4) \quad 3k_B \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 e^{\frac{-4\alpha}{T}}$$

۴۱- اندازه قطبش الکتریکی یک گاز ایده‌آل شامل N مولکول دو اتمی که ممان دوقطبی الکتریکی هر مولکول آن برابر α است در میدان الکتریکی E با رابطه $P = \frac{N\alpha}{V} \left\{ \coth\left(\frac{\alpha E}{k_B T}\right) - \frac{k_B T}{\alpha E} \right\}$ داده می‌شود که V حجم و T دمای گاز است. در شرایطی که $k_B T \gg \alpha E$ باشد، ثابت دی‌الکتریک این گاز در سیستم واحد SI، کدام است؟

$$(1) \quad 1 + \frac{\epsilon_0 N V}{3\alpha^2 k_B T} \quad (2) \quad 1 + \frac{2\epsilon_0 N V}{3\alpha^2 k_B T} \quad (3) \quad 1 + \frac{N\alpha^2}{3k_B \epsilon_0 T V} \quad (4) \quad 1 + \frac{N\alpha^2}{k_B \epsilon_0 T V}$$

۴۲- افت و خیز انرژی در یک آنسامبل کانونیک برابر $\overline{E^2} - \overline{E}^2 = k_B T^2 C_V$ است که T دما و C_V ظرفیت گرمایی در حجم ثابت سیستم است. برای گاز ایده‌آل تک‌اتمی با تعداد N اتم، مقدار کمیت $\frac{\overline{E^2} - \overline{E}^2}{\overline{E}^2}$ ، کدام است؟

$$(1) \quad \frac{2}{3N^2} \quad (2) \quad \frac{3}{3N^2} \quad (3) \quad \frac{2}{3N} \quad (4) \quad \frac{3}{2N}$$

۴۳- گازی از مولکول‌هایی تشکیل یافته که پتانسیل برهم‌کنش میان دو مولکول به صورت $u(r) = \frac{\alpha}{r^n}$ است که r فاصله دو مولکول از هم،

$$\alpha \text{ ضریبی ثابت و } n > 0 \text{ است. ضریب ویریال دوم این گاز } a_2 = \frac{2\pi}{\lambda^3} \int_0^\infty dr r^2 (1 - e^{-\beta u(r)}) \text{ کدام است؟ } (\Gamma(n) = \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x})$$

$$(1) \quad \frac{2\pi}{3\lambda^3} (\alpha\beta)^{\frac{3}{n}} \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right) \quad (2) \quad \frac{2\pi}{\lambda^3} (\alpha\beta)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right) \quad (3) \quad \frac{4\pi}{\lambda^3} (\alpha\beta)^{\frac{(n-1)}{n}} \Gamma(n-1) \quad (4) \quad \frac{\pi}{3\lambda^3} (\alpha\beta)^{\frac{(n-3)}{n}} \Gamma(n-3)$$

۴۴- گاز الکترونی متشکل از N الکترون در حجم V در دمای $T = 0 \text{ K}$ در حضور میدان مغناطیسی ثابت $\vec{H}$ قرار دارد. χ_m حساسیت‌پذیری پارامغناطیسی این گاز کدام است؟ (μ_0 انرژی فرمی در دمای صفر کلین و μ_B ممان مغناطیسی هر الکترون است.)

$$(1) \quad \frac{3V\mu_B}{4\mu_0 N} \quad (2) \quad \frac{4V\mu_B}{3\mu_0 N} \quad (3) \quad \frac{3N\mu_B}{2\mu_0 V} \quad (4) \quad \frac{2N\mu_B}{3\mu_0 V}$$

۴۵- مدلی از یک کوتوله سفید را به صورت یک کره متشکل از گاز هلیوم، با جرم 10^3 kg ، چگالی $10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ و دمای $T = 10^4 \text{ K}$ در نظر بگیرید. در این دما گاز هلیوم به طور کامل یونیزه است و داخل کره یک گاز الکترونی و یک گاز متشکل از هسته هلیوم موجود است. کدام عبارت در مورد این مدل

$$\text{نادرست است؟ } (\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \text{ و } k_B = 1/4 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}})$$

(۱) فشار گاز الکترونی بسیار بیشتر از فشار گاز هسته‌های هلیوم است.

(۲) چون $n_{\text{He}} \lambda_{\text{He}}^3 \ll 1$ است، هسته‌های هلیوم یک گاز ایده‌آل کوانتومی تشکیل می‌دهند.

(۳) انرژی جنبشی هر الکترون (انرژی فرمی) در حدود 1 MeV و در نتیجه گاز الکترونی نسبیتی است.

(۴) برای گاز الکترونی $E_F \gg k_B T$ است و در نتیجه گاز الکترونی یک گاز سرد است.



۴۰- گزینه «۳» کافی است از تابع پارش ذره در یک چاه یک بعدی استفاده کنیم تا انرژی ذره و ظرفیت گرمایی آن را به دست آوریم. در حالت کلی انرژی

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = k_B \alpha n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

ترازهای ذره در یک چاه یک بعدی به صورت مقابل داده می‌شود:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n}$$

از طرفی داریم:

در دماهای خیلی پایین می‌توان از جملات مرتبه بالاتر سری بالا صرف نظر کرد و حاصل را با جملات مرتبه پایین‌تر تقریب زد.

$$Z = e^{-\beta E_1}$$

چنانچه صرفاً Z را با اولین جمله تقریب بزنیم داریم:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = E_1 \Rightarrow C_L = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = 0$$

اما از حاصل فوق داریم:

در حالی که اولین مرتبه غیرصفر C_L را می‌خواهیم به دست آوریم.

بنابراین دو جمله اول را در محاسبه وارد می‌کنیم:

$$Z = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} = e^{-k_B \beta \alpha} + e^{-4k_B \beta \alpha} \Rightarrow \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = k_B \alpha \frac{e^{-k_B \beta \alpha} + 4e^{-4k_B \beta \alpha}}{e^{-k_B \beta \alpha} + e^{-4k_B \beta \alpha}}$$

$$C_L = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = \frac{9}{4} k_B \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{3\alpha}{4T}\right)$$

حال با استفاده از عبارت فوق C_L را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{sech}^2\left(\frac{3\alpha}{4T}\right) \approx 4e^{-\frac{3\alpha}{T}}$$

در دماهای خیلی پایین می‌توان از تقریب مقابل استفاده کرد:

$$C_L \approx 9k_B \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 e^{-\frac{3\alpha}{T}}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r = 1 + \chi_e$$

۴۱- گزینه «۳» از تعریف ثابت دی الکتریک می‌دانیم که:

$$P = \epsilon_0 \chi_e E$$

و همچنین داریم:

کافی است P را تا اولین مرتبه خطی نسبت به E بسط دهیم تا $\epsilon_0 \chi_e$ را بیابیم. چون $k_B T \gg \alpha E$ می‌توان $\coth\left(\frac{\alpha E}{k_B T}\right)$ را تقریب زد. برای $x \ll 1$

$$\coth(x) = (\tanh(x))^{-1} \approx \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^{-1}$$

داریم:

که در آن $\tanh(x)$ را تا دومین مرتبه ناصفر بسط داده‌ایم. بنابراین داریم:

$$\coth(x) \approx \frac{1}{x - \frac{x^3}{3}} = \frac{1}{x(1 - \frac{x^2}{3})} \approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \Rightarrow P \approx \frac{N\alpha}{V} \left(\frac{\alpha E}{3k_B T}\right) = \epsilon_0 \left(\frac{N\alpha^2}{3k_B \epsilon_0 T V}\right) E$$

پس $\chi_e = \frac{N\alpha^2}{3k_B \epsilon_0 T V}$ و گزینه (۳) صحیح است.

$$\bar{E}^2 = (C_V T)^2 = \frac{9}{4} N^2 T^2 k_B^2$$

۴۲- گزینه «۳» برای گاز ایده‌آل تک اتمی $C_V = \frac{3}{2} N k_B$ و بنابراین داریم:

$$\frac{\overline{E^2} - \bar{E}^2}{\bar{E}^2} = \frac{\frac{3}{2} N k_B^2 T^2}{\frac{9}{4} N^2 k_B^2 T^2} = \frac{2}{3N}$$

پس داریم:



۴۳- گزینه «۱» با استفاده از تعریف داده شده a_r را به دست می آوریم. داریم:

$$a_r = \frac{\gamma\pi}{\lambda^r} \int_0^\infty dr r^\gamma e^{\frac{-\beta\alpha}{r^n}}$$

$$r = \left(\frac{\beta\alpha}{x}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow r^\gamma = \left(\frac{\beta\alpha}{x}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \Rightarrow dr = (\beta\alpha)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{-1}{n}\right) x^{\frac{-1}{n}-1} dx$$

از تغییر متغیر $x = \frac{\beta\alpha}{r^n}$ داریم:

$$\frac{\gamma\pi}{\lambda^r} \int_0^\infty dr r^\gamma e^{\frac{-\beta\alpha}{r^n}} = -\frac{\gamma\pi}{\lambda^r} \int_\infty^0 \frac{(\beta\alpha)^{\frac{\gamma}{n}}}{n} x^{\frac{-\gamma}{n}-1} e^{-x} dx = -\frac{\gamma\pi}{\lambda^r} \frac{(\beta\alpha)^{\frac{\gamma}{n}}}{n} \Gamma\left(\frac{-\gamma}{n}\right) \quad (۱)$$

پس داریم:

از طرفی از خواص تابع گاما می دانیم که:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx x^n e^{-x} = -x^n e^{-x} \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n)$$

چراکه:

$$(۱) = \frac{-\gamma\pi}{\lambda^r} \frac{(\beta\alpha)^{\frac{\gamma}{n}}}{(-\gamma)} \Gamma\left(\frac{-\gamma}{n}\right) = \frac{\gamma\pi(\beta\alpha)^{\frac{\gamma}{n}}}{\lambda^r \gamma} \Gamma\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)$$

که در رابطه بالا از انتگرال جزء به جزء استفاده کردیم. بنابراین داریم:

توجه کنید که a_r داده شده در صورت سؤال ایراد تایپی دارد و نمی تواند همگرا باشد.

۴۴- گزینه «۳» چنانچه M مغناطش کل سیستم باشد و χ_m حساسیت پذیری مغناطیسی در واحد حجم باشد داریم:

$$V\chi_m H = M$$

پس کافی است M را محاسبه کنیم. چنانچه $(N^+)(N^-)$ تعداد ذراتی باشد که ممان مغناطیسی آنها پادموازی (موازی) میدان مغناطیسی است آنگاه:

$$\mu = \mu_B(N^+ - N^-)$$

$$\varepsilon = \frac{p^r}{\gamma m} - \mu_B H$$

پس باید $N^\pm$ را محاسبه کنیم و انرژی ذراتی که ممان مغناطیسی آنها موازی میدان مغناطیسی است به صورت مقابل داده می شود:

$$\varepsilon = \frac{p^r}{\gamma m} + \mu_B H$$

و انرژی ذراتی که ممان مغناطیسی آنها پادموازی میدان مغناطیسی است به صورت مقابل است:

بالاخص تکانه آنهایی که در تراز ε_F هستند و ممان مغناطیسی آنها موازی یا پادموازی جهت میدان است به صورت زیر داده می شود:

$$p^\pm = \sqrt{\gamma m(\varepsilon_F \pm \mu_B H)} \quad (۱)$$

$$N = \frac{4\pi g V}{\gamma h^3} p_F^r \quad (۲)$$

حال توجه کنید که تعداد ترازهای انرژی تا انرژی فرمی از رابطه مقابل داده می شود:

که در آن g ضریبی است که به ساختار درونی ذرات مانند اسپین وابسته است و p_F تکانه متناظر با سطح انرژی فرمی است. (برای به دست آوردن رابطه

فوق کافی است از تعریف انرژی فرمی که به صورت $\int_0^{\varepsilon_F} a(\varepsilon) d\varepsilon = N$ است استفاده کنید و قرار دهید $a(\varepsilon) = \frac{gV4\pi p^r}{h^3} \frac{dp}{d\varepsilon}$) با توجه به اینکه تعداد

$$N^\pm = \frac{4\pi V}{\gamma h^3} (\gamma m(\varepsilon_F \pm \mu_B H))^{\frac{3}{2}}$$

ترازهای انرژی اشغال شده تا سطح انرژی فرمی برابر تعداد ذرات است از (۱) و (۲) داریم:

توجه کنید که در رابطه فوق $g = 2$ برای الکترون ها استفاده نشده است چراکه $N^\pm$ تنها یک جهت برای اسپین را در نظر گرفته اند.

$$M = \mu_B(N^+ - N^-) = \frac{4\pi\mu_B V(\gamma m)^{\frac{3}{2}}}{\gamma h^3} ((\varepsilon_F + \mu_B H)^{\frac{3}{2}} - (\varepsilon_F - \mu_B H)^{\frac{3}{2}})$$

بنابراین داریم:

$$\chi_m = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{HV} = \frac{4\pi\mu_B^{\frac{1}{2}}(\gamma m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \alpha_F^{\frac{1}{2}} \quad (۳)$$

χ_m خواسته شده در صورت سؤال مربوط به میدان های کوچک است و بنابراین داریم:

$$\varepsilon_F = \left(\frac{\gamma N}{4\pi g V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^r}{\gamma m} \quad (۴)$$

از طرفی ε_F در حالت کلی به صورت مقابل داده می شود:

$$\chi_m = \frac{\gamma N}{\gamma V} \frac{\mu_B}{\varepsilon_F}$$

با قرار دادن $g = 2$ و استفاده از (۳)، (۴) را می توان به صورت مقابل نوشت:

که ε_F همان μ_0 است.

۴۵- گزینه «۲» تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): در دماهای خیلی پایین فشار یک گاز فرمیونی با ثابت g به صورت مقابل داده می‌شود:

$$P = \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} n^{\frac{5}{3}}$$

دیده می‌شود که فشار با جرم نسبت عکس دارد و چون جرم الکترون خیلی کوچک‌تر از جرم اتم هلیوم است پس فشار الکترون‌ها بیشتر خواهد بود. در رابطه بالا n چگالی تعداد است.

گزینه (۲): زمانی که طول موج دوبروی خیلی کوچک‌تر از فاصله بین ذره‌ای باشد گاز رفتار کلاسیکی دارد. به عبارت دیگر معیار کلاسیکی شدن عبارت است از:

$$\lambda_{th} \leq \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

روش دیگر آن است که دقت کنید در حد دماهای زیاد گاز رفتار کلاسیکی پیدا می‌کند که متناظر آن λ_{th} کاهش می‌یابد. پس شرط $n_{He} \lambda_{He}^3 \ll 1$ متناظر با گاز با رفتار کلاسیکی است و نه کوانتومی.

گزینه (۳): چنانچه انرژی جنبشی هر الکترون 1 MeV باشد انرژی آن با انرژی جرم سکون الکترون (0.5 MeV) قابل مقایسه است و بنابراین الکترون رفتار نسبیتی خواهد داشت. برای محاسبه انرژی جنبشی الکترون با فرض آنکه گازی سرد داریم (در گزینه بعد آن را نشان می‌دهیم)

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 n}{g}\right)^{\frac{2}{3}}$$

از انرژی فرمی استفاده می‌کنیم:

با قرار دادن $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$ و $n \sim 10^{37} \text{ m}^{-3}$ و $g = 2$ و $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$ دیده می‌شود که $\varepsilon_F \sim 1 \text{ MeV}$ و بنابراین الکترون‌ها نسبیتی

هستند (در محاسبه چگالی تعداد n از چگالی کوتوله سفید $n = \frac{10^{30} \text{ kg}}{m^3}$ تقسیم به جرم یک اتم هلیوم $m = 6.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ استفاده شده است)

گزینه (۴): در قسمت قبل انرژی فرمی الکترون را محاسبه کردیم. حال چنانچه با استفاده از $k_B T$ دمای ستاره را برحسب eV محاسبه کنیم داریم:

$$k_B T = 1/23 \times 10^{-16} \text{ J} = 1/23 \times 10^{-16} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1/6 \times 10^{-19} \text{ J}} \approx 770 \text{ eV} = O(1000 \text{ eV}) = 1 \text{ keV}$$

که حاصل آن از $\varepsilon_F = 1 \text{ MeV}$ خیلی کمتر است. پس گاز فرمیونی سرد محسوب می‌شود.