



مدرسان شریف

فصل اول

«کمیتی»

بخش اول: حل مسئله

در آزمون‌های دکتری دانشگاه دولتی ۹۰ و ۹۲ و ۱۰ سؤال از ۴۰ سؤال و در آزمون دکتری ۹۱، ۱۵ سؤال از ۶۰ سؤال و در آزمون‌های دکتری سالیان اخیر ۷ سؤال از ۳۰ سؤال در تمام گروه‌های آزمایشی به این فصل اختصاص داشت که شامل دو قسمت «حل مسأله» و «مقایسه‌های کمی» می‌شوند. سؤالات حل مسئله مهارت‌های اصلی و عمومی ریاضی را که اکثر داوطلبان تا سال سوم دبیرستان یاد گرفته‌اند، می‌سنجد. در واقع دلیل طرح این سؤالات در آزمون دکتری، ارزیابی و سنجش قدرت داوطلب در پیدا کردن بهترین و کوتاه‌ترین روش برای حل مسئله می‌باشد. داوطلب باید اطلاعات داده شده را بسنجد و فکر کند که آن‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند و بهترین و کوتاه‌ترین راه حل چیست؟

در آزمون‌های بین‌المللی هوش، معمولاً سؤالات حل مسئله طوری طراحی می‌شوند که لازم نباشد داوطلب برای پاسخگویی به آن‌ها، با تمام فرمول‌ها و قضایای پیچیده ریاضی آشنا باشد و درگیر عملیات ذهنی سخت و محاسبات وقت‌گیر شود. از طرفی تست‌ها آن قدر ساده نیستند که داوطلب بدون فکر به راحتی بتواند به آن‌ها پاسخ دهد. البته بعضاً در آزمون‌های داخلی بی‌دقتی و شاید هم عدم آشنایی طراحان باعث می‌شود، مسائلی سخت مطرح شوند. اما اگر با سؤال ساده‌ای روبه‌رو شدید، در جواب دادن به آن دقت کنید. به مثال زیر توجه کنید:

کج مثال ۱: اگر x, y, z و z عددهای حقیقی و مخالف صفر باشند و $x > y$ ، آنگاه کدام گزینه حتماً صحیح است؟

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \quad (۱) \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \quad (۲) \quad xz > yz \quad (۳) \quad y - x < z^2 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۴» شاید باور نکنید در برخی کلاس‌ها، حدود ۳۰ درصد داوطلبان سریع گزینه (۱) را انتخاب کردند! آن‌ها خیلی توجه نمی‌کنند که

اگر $x > 0$ و $y < 0$ آن‌گاه گزینه (۱) نادرست است (مثلاً از نامساوی $-2 > 2$ ، نمی‌توان نتیجه گرفت $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$) و اگر $x > 0$ و $y > 0$ آن‌گاه گزینه (۲)

نادرست است. (مثلاً از نامساوی $2 > 3$ ، نمی‌توان نتیجه گرفت $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$) یعنی علامت x و y در تعیین جواب بسیار مهم است.

دقت کنید گزینه (۳) هم به هیچ‌وجه نمی‌تواند صحیح باشد، چون می‌توانید فرض کنید $x = 2$ و $y = 1$ ، یعنی شرط $x > y$ برقرار است. حالا اگر z عددی مثبت مانند $z = 4$ باشد، آن‌گاه $xz > yz$ (چون $2 \times 4 > 1 \times 4$) اما اگر z عددی منفی مانند $z = -4$ باشد، $xz < yz$ است (چون $2 \times (-4) < 1 \times (-4)$)

ظاهر گزینه (۴) خیلی جلب توجه نمی‌کند، ولی این گزینه صحیح است:

$$x > y \Rightarrow y - x < 0 \xrightarrow{z^2 > 0} y - x < z^2$$

اگر به سؤالاتی برخورد کردید که به نظر راه‌حل طولانی دارند، دنبال راه‌حل کوتاه باشید. به مثالی که ظاهر خیلی خوشایندی ندارد! و به نظر می‌رسد راه‌حل طولانی و وقت‌گیری داشته باشد، توجه کنید:

کج مثال ۲: حاصل عبارت $A = (1/352)^3 + (1/648)^3 + 9 \times 1/352 \times 1/648$ کدام است؟

$$۱۸ \quad (۱) \quad ۲۷ \quad (۲) \quad \text{عددی بزرگتر از ۱۸ و کمتر از ۲۷} \quad (۳) \quad ۲۷ \quad (۴) \quad \text{عددی بزرگتر از ۲۷}$$

پاسخ: گزینه «۳» به توان رساندن و ضرب کردن قطعاً راه‌حل عاقلانه‌ای نیست. اگر خوب دقت کنید، مجموع دو عدد $1/352$ و $1/648$ برابر ۳

می‌شود، در واقع عبارت A به صورت $a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ می‌باشد که می‌دانیم همان $(a+b)^3$ است، پس $A = (1/352 + 1/648)^3 = 3^3 = 27$ شاید اتحادهای سال اول دبیرستان برای خیلی از داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد ساده باشد و از آن عبور کنند، ولی روش‌های استفاده از آن در مسائلی نظیر این مثال آن‌ها را جذاب می‌کند.

پس در این فصل از کتاب سعی کنید به تمام مطالب توجه کرده و تست‌های متنوعی که از هر مبحث طرح شده است را در نظر داشته باشید. هر چند به عنوان یک پیشنهاد به داوطلبانی که سطح علمی خوبی دارند، توصیه می‌شود؛ اگر احساس می‌کنند در ریاضی دارای پایه‌ی علمی قوی هستند، بیشتر وقت خود را به بخش‌های نسبت و تناسب، آمار و احتمال، نظریه اعداد، هندسه، سرعت و مسافت، هوش و خلاقیت و همچنین مسائل متفرقه اختصاص دهند.

درس

از جمله مباحث مورد توجه در سؤالات دکتری در آزمون‌های دانشگاه دولتی «مبحث درصد» می‌باشد. ممکن است فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد این مبحث را ساده در نظر بگیرند، اما مطالعه‌ی این بخش تا انتها و مشکلاتی که در حل بعضی مسائل خواهند داشت، نظر این دوستان را تغییر خواهد داد! **تعریف درصد:** همان‌طور که از نام آن مشخص است یعنی «در هر صدتا» و علامت آن به شکل % می‌باشد که در سمت چپ عدد و یا بعضاً در سمت راست عدد قرار می‌گیرد. وقتی می‌گوییم از یک کلاس ۱۰۰ نفره، ۳۰ نفر قبول شده‌اند، یعنی ۳۰% کلاس قبول شده‌اند، ۳۰% یعنی $\frac{30}{100}$. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$0/25 = \%25 \quad , \quad 0/5 = \%50$$

$$0/75 = \%75 \quad , \quad 0/10 = \%10$$

در مثال‌های فوق سمت چپ تساوی علامت ممیز و سمت راست آن علامت درصد قرار داده شده ولی همیشه این طور نیست که اعداد بعد از ممیز و درصد یکی باشند. مثال‌های مقابل:

$$0/375 = \%37/5 \quad \text{یا} \quad 0/125 = \%12/5$$

برای بیان یک کسر برحسب درصد به روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \times 100 = \frac{300}{4} = 75 \Rightarrow 75\%$$

(۱) کسر را در عدد ۱۰۰ ضرب می‌کنیم و در نهایت علامت درصد را جلوی آن قرار می‌دهیم:

(۲) صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را به عنوان درصد بیان می‌کنیم:

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 \rightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 28 & 0/75 \\ \hline 20 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow \frac{3}{4} \Rightarrow 75\%$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} \Rightarrow 75\%$$

(۳) صورت و مخرج را در یک عدد، طوری ضرب می‌کنیم که مخرج برابر ۱۰۰ شود:

کج مثال ۳: ۹ درصد عددی ۷۲۰۰ تومان است، آن عدد چقدر است؟

$$\frac{9}{100} \times X = 7200 \Rightarrow X = \frac{7200 \times 100}{9} = 80000$$

پاسخ: عدد را X فرض می‌کنیم:

کج مثال ۴: عدد ۱۲۵، چند درصد عدد ۵۰۰ می‌باشد؟

$$125 = \frac{X}{100} \times 500 \Rightarrow X = \frac{125}{500} \times 100 = 25$$

پاسخ: چند درصد را می‌توان به شکل X درصد و یا به عبارت دیگر $\frac{X}{100}$ نوشت:

افزایش و کاهش درصدی

متغیری مانند X را در نظر بگیرید. اگر این متغیر a درصد افزایش یابد، آن‌گاه مقدار آن پس از این افزایش به صورت زیر حساب می‌شود:

$$X \xrightarrow{+a\%} X + \frac{a}{100}(X) = X\left(1 + \frac{a}{100}\right)$$

و اگر متغیر X به اندازه a درصد کاهش یابد، آن‌گاه مقدار آن پس از این کاهش به صورت مقابل حساب می‌شود:

$$X \xrightarrow{-a\%} X - \frac{a}{100}(X) = X\left(1 - \frac{a}{100}\right)$$

کج مثال ۵: بازرگانی با سرمایه ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان در یک معامله شرکت کرد و در پایان ۱۵% ضرر کرد، سرمایه او در حال حاضر چقدر است؟

$$20,000,000 \xrightarrow{-15\%} 20,000,000 - \frac{15}{100}(20,000,000) = 20,000,000 - 3,000,000 = 17,000,000$$

پاسخ:

تذکره: همان‌طور که می‌دانید «درصد تخفیف» به مفهوم «درصد کاهش» است و این کلمه در حل تست‌ها زیاد کاربرد دارد.

کله مثال ۶: قیمت یک خودکار پس از ۲۰٪ تخفیف و ۱۴۰ ریال تخفیف مجدد، ۴۲۰ ریال می‌باشد، قیمت اصلی خودکار کدام است؟

- (۱) ۵۶۰ ریال (۲) ۶۷۲ ریال (۳) ۸۴۰ ریال (۴) ۷۰۰ ریال

پاسخ: گزینه «۴» قیمت خودکار را x در نظر می‌گیریم. بنابراین قیمت خودکار بعد از ۲۰٪ تخفیف برابر است با:

$$x \left(1 - \frac{20}{100}\right) = x(1 - 0.2) = 0.8x$$

با توجه به صورت تست از مبلغ $0.8x$ ، باز هم ۱۴۰ ریال کسر شده است و قیمت خودکار بعد از کسر ۱۴۰ ریال برابر ۴۲۰ ریال شده است، بنابراین:

$$0.8x - 140 = 420 \Rightarrow x = 700$$

کله مثال ۷: ارزش یک آدامس ۷۲۰ ریال است. این آدامس به چه قیمتی فروخته شود تا ۲۰٪ قیمت فروش آن سود باشد؟

- (۱) ۹۰۰ ریال (۲) ۸۶۴ ریال (۳) ۹۲۰ ریال (۴) ۸۶۵ ریال

پاسخ: گزینه «۱» قیمت فروش را x می‌نامیم و داریم:

$$\text{ارزش اولیه} + \text{سود} = \text{درآمد} = \text{قیمت فروش} \Rightarrow x = \frac{20}{100}x + 720 \Rightarrow x - \frac{20}{100}x = x(1 - \frac{20}{100}) = 720 \Rightarrow x = 900 \text{ (ریال)}$$

کله مثال ۸: مهناز با ۳۰٪ از ۲۲٪ پولش ۶ کتاب ۲۲۰ تومانی و یازده مداد ۳۰۰ تومانی خرید. او با باقی‌مانده‌ی پولش چند تا خودکار ۲۰ تومانی می‌تواند بخرد؟

- (۱) ۳۷۸۱ (۲) ۳۵۹۲ (۳) ۳۳۶۷ (۴) ۳۲۶۹

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا درصد پول خرج شده را به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد پول خرج شده برای خرید کتاب و مداد} = \frac{30}{100} \times \frac{22}{100} = \frac{30}{100} \times \frac{11}{50} = \frac{33}{500}$$

با این پول ۶ کتاب و ۱۱ مداد خریداری شده است مبلغ آنها را حساب می‌کنیم:

$$6 \times 220 + 11 \times 300 = 1320 + 3300 = 4620 \text{ (تومان)}$$

از این پول ۴۶۲۰ تومان خرج شده، پس $7000 - 4620 = 6538 = \frac{6538}{20}$ خودکار ۲۰ تومانی بخرد.

کله مثال ۹: با افزایش ۸۰ درصدی وزن A ، مجموع وزن A و B ، ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. کدام مورد زیر، صحیح است؟

- (۱) به‌طور قطع نمی‌توان چیزی گفت. (۲) وزن B ، سه برابر وزن A است.
(۳) وزن A ، $1/5$ برابر وزن B است. (۴) مجموع وزن‌های A و B ، $4/5$ برابر وزن A است.

پاسخ: گزینه «۲» به‌راحتی می‌توان تساوی زیر را نوشت:

$$A + \frac{80}{100}A + B = \frac{120}{100}(A + B) \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 100} 100A + 80A + 100B = 120A + 120B \Rightarrow 60A = 20B \Rightarrow B = 3A$$

کله مثال ۱۰: درصد سود حاصل از فروش یک خودرو به قیمت ۱۹ میلیون و ۲۰۰ هزار تومان، برابر درصد زیان حاصل از فروش این خودرو با قیمت

۱۲ میلیون و ۸۰۰ هزار تومان می‌باشد. این خودرو با چه قیمتی فروخته شود که سود ۱۵ درصدی حاصل شود؟

- (۱) ۱۷ میلیون و ۶۰۰ هزار تومان (۲) ۱۸ میلیون و ۴۰۰ هزار تومان (۳) ۱۹ میلیون و ۲۰۰ هزار تومان (۴) ۲۰ میلیون تومان

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم قیمت تمام شده خودرو برابر با x میلیون تومان باشد. اگر با $m\%$ سود فروخته شود، یعنی قیمت فروش برابر است با:

$$x + \frac{m}{100}x = 19.2 \text{ میلیون} \quad (1)$$

$$x - \frac{m}{100}x = 12.8 \text{ میلیون} \quad (2)$$

حال فرض کنیم با $m\%$ ضرر فروخته شود:

$$\xrightarrow{(1)+(2)} 2x = 32 \rightarrow x = 16 \text{ میلیون تومان}$$

یعنی قیمت تمام شده خودرو ۱۶ میلیون تومان خواهد بود. حال اگر قرار باشد خودرو با ۱۵٪ سود فروخته شود، کافی است به عدد ۱۶ میلیون، ۱۵٪ آن

$$16 + \frac{15}{100} \times 16 = 18.4 \text{ میلیون تومان}$$

را اضافه کنیم:

مثال ۱۱: هما چند مرتبه در آزمون زبان شرکت کرده است. نمره وی در هر آزمون، از دو برابر نمره آزمون قبلی اش، ۲ نمره کمتر است. اگر وی سه بار آزمون داده باشد و در آزمون دوم، نمره اش ۶۰ درصد افزایش پیدا کرده باشد، در آزمون سوم نسبت به آزمون دوم، نمره اش چند درصد افزایش یافته است؟
(گروه علوم انسانی - دکتری ۹۷)

(۱) ۵۷ (۲) ۶۰ (۳) ۶۶ (۴) ۷۵

پاسخ: گزینه «۴» یک سؤال بسیار ساده از بحث درصد داریم! اگر نمره آزمون اول هما X باشد و نمره آزمون دوم $2X - 2$ و نمره آزمون سوم $4X - 6$ می باشد. ضمناً نمره آزمون دوم $1/6$ برابر نمره آزمون اول است.

$$\begin{array}{l} \text{آزمون سوم} \quad \text{آزمون دوم} \quad \text{آزمون اول} \\ 4X - 6 \quad \longrightarrow \quad 2X - 2 \quad \longrightarrow \quad X \end{array}$$

$$2X - 2 = 1/6 \times X \Rightarrow X = 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{نمره آزمون اول} = 5 \\ \text{نمره آزمون دوم} = 8 \\ \text{نمره آزمون سوم} = 14 \end{cases}, \quad \text{درصد افزایش سوم نسبت به دوم} = \frac{14 - 8}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\%$$

مثال ۱۲: اگر قیمت فروش محصولی دو برابر شود، سود حاصل از فروش محصول، سه برابر خواهد شد. درصد سود اولیه، کدام است؟

(گروه علوم انسانی - دکتری ۹۴)

(۱) ۹۶ (۲) ۳۳/۳ (۳) ۶۶/۶ (۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه «۴» بین قیمت خرید و سود و قیمت فروش ارتباط زیر برقرار است:

قیمت فروش = سود + قیمت خرید

قیمت خرید را X ، سود را Y و قیمت فروش را Z فرض کنیم.

$$(1) \quad X + Y = Z$$

$$(2) \quad X + 3Y = 2Z$$

اگر قیمت فروش ۲ برابر شود، سود ۳ برابر می شود:

$$\xrightarrow{(2)-(1)} 2Y = Z \xrightarrow{(1)} X + Y = 2Y \rightarrow X = Y$$

یعنی سود برابر با قیمت خرید است. به بیان دیگر سود ۱۰۰٪ می باشد.

مثال ۱۳: خرمافروشی قرار است محصول خود را با ۵ درصد سود به فروش برساند. پس از فروش ۹۰ درصد از محصول، خرمافروش مجبور است باقیمانده خرماها را به دلیل پایین بودن کیفیت، ارزان تر بفروشد. وی حداکثر چند درصد قیمت فروش را باید تخفیف بدهد تا ضرر نکند؟

(گروه زبان - دکتری ۹۲)

(۱) ۴۵ (۲) ۴۷/۶ (۳) ۵۲/۴ (۴) ۴۴/۵

پاسخ: گزینه «۲» برای حل راحت تر فرض کنید، قیمت اصلی خرما (بدون سود) برابر با ۱۰۰ تومان باشد. خرما فروش ۹۰ درصد خرما را با سود ۵ درصد فروخته است. ۵ درصد، ۱۰۰ تومان برابر با ۵ تومان است، یعنی خرما فروش این مقدار خرما را به قیمت ۱۰۵ تومان فروخته است. اگر مقدار خرماها را X بنامیم، مقدار پول بدست آمده قبل از «ارزان فروشی» به قرار زیر است:

$$\text{مقدار پول بدست آمده} = \left(\frac{90}{100} X\right) \times 105 = 94/5 X$$

اگر قرار باشد، خرمافروش ضرر نکند، نباید کمتر از $100X$ ، نصیبش شود! یعنی باید $5/5X$ دیگر از فروش ۱۰ درصد باقیماندهی خرماها بدست آورد.

$$\left(\frac{10}{100} X\right) \times k = 5/5X \Rightarrow k = 55 \text{ (تومان)}$$

اگر قیمت خرماهای باقیمانده را k بنامیم، باید رابطه مقابل را داشته باشیم:

پس او باید حداکثر $50 = 105 - 55$ تومان تخفیف بدهد چند درصد قیمت فروش، یعنی چند درصد ۱۰۵ تومان است؟

$$\text{درصد تخفیف} = \frac{50}{105} \times 100 \approx 47/6\%$$

مثال ۱۴: پس انداز سعید، ۳ برابر پس انداز برادرش است. اگر پس انداز سعید ۶۰ درصد کاهش یابد، پس انداز برادر سعید، چند درصد باید افزایش یابد تا برادر سعید، ۱/۵ برابر سعید پول داشته باشد؟

(گروه هنر - دکتری ۹۵)

(۱) ۴۰ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم پس انداز برادر سعید ۱۰۰۰ تومان باشد، در این صورت طبق صورت سؤال پس انداز سعید ۳۰۰۰ تومان می باشد. اگر

پس انداز سعید ۶۰ درصد کاهش یابد، یعنی سعید (تومان) $3000 - 1800 = 1200$ پول دارد. حالا می خواهیم ببینیم پس انداز

برادر سعید چقدر زیاد شود تا برادر سعید ۱/۵ برابر سعید پول داشته باشد، اگر درصد افزایش را X بنامیم، تساوی زیر را داریم:

$$1000 + 1000 \times X = 1/5 \times 1200 \Rightarrow 10 + 10X = \frac{3}{5} \times 12 \Rightarrow 10X = 18 - 10 \Rightarrow 10X = 8 \Rightarrow X = \frac{8}{10} \Rightarrow X = 80\%$$

کله مثال ۱۵: فروشنده متقلبی، پس از آنکه مقداری آب به شیر اضافه می‌کند، هر کیلوگرم آن را به قیمت خرید یک کیلوگرم شیر اولیه می‌فروشد و با این کار، ۲۵ درصد سود می‌برد. چند درصد از شیر فروخته شده را آب تشکیل می‌دهد؟
(گروه علوم پایه - دکتری ۹۵)

- ۴ (۱) ۲۰ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: با توجه به صورت سؤال اگر فرض کنیم قیمت هر کیلوگرم شیر خالص خریداری شده ۱۰۰۰ تومان است و در فروش x کیلوگرم شیر مخلوط شده با y کیلوگرم آب ۲۵ درصد سود حاصل شده، تساوی مقابل را می‌نویسیم:

$$x + y = 1/25x \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{x}{x + y} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{x}{x + y} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{x}{x + y} \Rightarrow \frac{x}{x + y} = 0/8 = 80\%$$

پس ۸۰ درصد را شیر تشکیل می‌دهد و بنابراین ۲۰٪ را آب تشکیل خواهد داد.

روش دوم: این فرد یک کیلوگرم شیر خالص را با قیمت p می‌خرد؛ سپس به آن y کیلوگرم آب اضافه می‌کند و با قیمت p می‌فروشد در نهایت داریم:

$$(1 + y)p = 1/25 \times p \Rightarrow 1 + y = 1/25 \Rightarrow y = 0/25$$

$$\text{نسبت آب در شیر} = \frac{y}{1 + y} = \frac{0/25}{1 + 0/25} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

پس ۲۰٪ از شیر را آب تشکیل می‌دهد.

کله مثال ۱۶: فردی نصف سرمایه خود را در یک بانک با سود ماهیانه ۱۰ درصد و مابقی را در بانکی دیگر با سود ماهیانه ۲۰ درصد، سپرده‌گذاری می‌کند به طوری که بانک‌ها در پایان هر ماه به ترتیب ۱۰ درصد و ۲۰ درصد به موجودی وی اضافه می‌کنند. در پایان سه ماه، اختلاف حساب وی در دو بانک، چند درصد سرمایه اولیه‌اش می‌باشد؟
(گروه کشاورزی و منابع طبیعی - دکتری ۹۰)

- ۵۴/۱ (۱) ۳۹/۷ (۲) ۲۰/۳۵ (۳) ۱۹/۸۵ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنید کل سرمایه فرد ۲۰۰ باشد.

$$\begin{aligned} \text{بانک اول} &= (100, 110, 121, 133/1) \\ \text{بانک دوم} &= (100, 120, 144, 172/8) \end{aligned} \Rightarrow \text{اختلاف} = 39/7$$

که این ۳۹/۷ معادل ۱۹/۸۵٪ پول اولیه خودش است.

کله مثال ۱۷: اداره‌ای دارای ۵۴۰ کارمند است که ۶۰ درصد آن‌ها دارای تحصیلات عالی هستند. اگر تعداد کارمندان زن این اداره که تحصیلات عالی دارند، برابر ۳۵ نفر باشد، به کدام یک از پرسش‌های زیر می‌توان پاسخ داد؟
(گروه دامپزشکی - دکتری ۹۰)

- I. چند درصد از کارمندان مرد تحصیلات عالی دارند؟
II. چند درصد از کارمندان زن تحصیلات عالی ندارند؟
III. چند درصد از کارمندانی که تحصیلات عالی دارند، مرد هستند؟
- (۱) I و II (۲) فقط I (۳) فقط III (۴) I, II و III

پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{60}{100} \times 540 = 324 \quad ; \quad \text{تعداد کارمندانی که تحصیلات عالی دارند.}$$

$$324 - 35 = 289 \quad ; \quad \text{تعداد کارمندان مرد که تحصیلات عالی دارند.}$$

گزینه (۱) و (۲) قابل تعیین نیست، چون تعداد مردان و زنان را نمی‌دانیم و فقط سومی را می‌توان تعیین کرد.

$$\text{نسبت مردانی که تحصیلات عالی دارند} = \frac{289}{324} = 89\%$$

از کل کارمندانی که تحصیلات عالی دارند

کله مثال ۱۸: یک میوه فروش دوره گرد، قبل از ظهر $\frac{3}{5}$ از میوه‌های خود را می‌فروشد و هنگام ظهر ۱۵ درصد از مابقی میوه‌ها را به علت کیفیت پایین جدا نموده و دور می‌ریزد. وی بعد از ظهر نیز نیمی از میوه‌های خود را می‌فروشد و مابقی را دور می‌ریزد. او چند درصد از کل میوه‌ها را دور ریخته است؟
(گروه کشاورزی و منابع طبیعی - دکتری ۹۰)

- ۳۵ (۱) ۲۹ (۲) ۲۳ (۳) ۱۷ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» ۶۰٪ کل میوه‌ها را می‌فروشد و سپس ۱۵٪ از ۴۰٪ باقی مانده را دور می‌ریزد که برابر با ۶٪ میوه‌ها می‌شود. بنابراین در بعد از ظهر ۳۴٪ کل میوه‌ها را دارد که نصف آن را می‌فروشد و مابقی را دور می‌ریزد در نتیجه جمعاً (۱۷ + ۶) درصد را دور می‌ریزد.

نکته ۱: اگر عددی ابتدا **a درصد کاهش** و سپس عدد حاصل دوباره **b درصد کاهش** پیدا کند، مقداری که کاهش می‌یابد، کوچکتر از زمانی است که آن عدد از همان اول به اندازه **(a + b) درصد کاهش** پیدا کند.

نکته ۲: اگر عددی ابتدا **a درصد افزایش** و سپس عدد حاصل دوباره **b درصد افزایش** پیدا کند، مقداری که افزایش می‌یابد، بزرگتر از زمانی است که آن عدد از همان اول به اندازه **(a + b) درصد افزایش** پیدا کند.

مثال ۱۹: تخفیف‌های متوالی ۱۰٪ و ۲۰٪ با کدام تخفیف برابرند؟

- (۱) ۳۰٪ (۲) ۷۰٪ (۳) ۷۲٪ (۴) ۲۸٪

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: اگر فرض کنیم X قیمت اصلی بدون تخفیف در نظر گرفته شود، آن‌گاه دو تخفیف متوالی ۱۰٪ و ۲۰٪ قیمت X را به شکل زیر تغییر می‌دهد:

$$X - \frac{10}{100}X = \frac{9}{10}X \xrightarrow{\text{تخفیف } 20\%} \frac{9}{10}X - \frac{20}{100} \left(\frac{9}{10}X\right) = \frac{90-18}{100}X = \frac{72}{100}X$$

قیمت برابر $\frac{72}{100}X$ شده و این یعنی ۲۸٪ تخفیف داده شده است.

روش دوم: البته با توجه به نکته فوق به راحتی معلوم است تخفیف‌های متوالی ۱۰٪ و ۲۰٪، از تخفیف $(10+20)\%$ یعنی ۳۰٪ کمتر هستند، لذا گزینه (۴) جواب است. البته گزینه‌ها به منظور استفاده تستی از نکته‌ی فوق طراحی شده بود. اگر یکی از گزینه‌ها مثلاً ۲۵٪ بود، باید از همان روش اول تست را حل می‌کردیم.

مثال ۲۰: کالایی سه مرتبه متوالی مشمول ۱۰ درصد، ۲۰ درصد و ۳۰ درصد تخفیف شده است، قیمت این کالا چند درصد ارزان شده است؟

- (۱) ۵۰/۴ (۲) ۶۰ (۳) ۴۹/۶ (۴) ۴۰

پاسخ: گزینه «۳» قیمت کالا در سه مرحله شامل تخفیف می‌شود، لذا قیمت نهایی کالا پس از سه تخفیف به صورت زیر می‌شود:

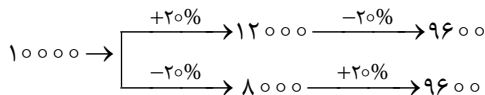
$$\frac{90}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{70}{100} = 50/4\%$$

$$100 - 50/4 = 49/6\%$$

اگر قیمت کالا را از ۱۰۰ کم کنیم، درصد ارزان شده‌ی کالا به دست می‌آید:

توضیح: در این تست مشاهده می‌شود که از روش تستی مطرح شده در سؤال قبلی نمی‌توان استفاده کرد، که دلیل آن نزدیک بودن گزینه‌ها به هم می‌باشد.

نکته ۳: اگر عددی **a درصد افزایش** یابد و بعد عدد حاصل، **a درصد کاهش** یابد، مقدار آن برابر است با زمانی که این عدد ابتدا **a درصد کاهش** و سپس **a درصد افزایش** پیدا کند. یعنی تغییر ترتیب کاهش یا افزایش در مقدار نهایی تأثیر ندارد.



نکته ۴: اگر عددی مانند X، **a درصد افزایش** پیدا کند و عدد حاصله را بلافاصله **a درصد کاهش** دهیم، به عدد اولیه (یعنی همان X) **نخواهیم رسید**.

$$100 \xrightarrow{+20\%} 120, \quad 120 \xrightarrow{-20\%} 96$$

نکته ۵: اگر عددی مانند X، **a درصد کاهش** پیدا کند و بلافاصله به عددی که به دست آمده **a درصد اضافه** کنیم، به عدد اولیه **نخواهیم رسید**.

$$100 \xrightarrow{-20\%} 80, \quad 80 \xrightarrow{+20\%} 96$$

نتیجه‌ی اخلاقی: همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هر دو حالت عدد ۱۰۰ به ۹۶ تبدیل شده و با اینکه درصد افزایش و کاهش با هم یکی است (۲۰٪) عدد اصلی کاهش می‌یابد.

مثال ۲۱: آقای A مالک خانه‌ای به ارزش ۱۰۰۰۰ دلار است. او خانه را با ۱۰٪ سود به آقای B می‌فروشد. آقای B خانه را با ۱۰٪ زیان به آقای A بازپس می‌دهد. آقای A در این داد و ستد

- (۱) نه سود می‌کند نه زیان. (۲) ۱۰۰۰ دلار سود می‌کند. (۳) ۱۱۰۰ دلار سود می‌کند. (۴) ۹۰۰ دلار زیان می‌کند.

$$10000 \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 10000 \times 1/1 = 11000$$

پاسخ: گزینه «۳» مبلغی که در فروش اول به شخص A می‌رسد با احتساب ۱۰٪ سود:

وقتی شخص B خانه خریداری شده را با ۱۰٪ زیان به شخص A پس می‌دهد، کل مبلغی که دریافت می‌کند ۹۹۰۰ دلار است.

$$11000 \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 11000 \times 9/10 = 9900$$

$$11000 - 9900 = 1100$$

مبلغی که شخص A در این معامله سود برده است:

کلمه مثال ۲۲: سرشماری سالانه نشان می‌دهد که در شهری تغییر جمعیت طی چهارسال متوالی به این ترتیب بوده است: ۲۵٪ افزایش، ۲۵٪ افزایش، ۲۵٪ کاهش، و ۲۵٪ کاهش، درصد تغییر جمعیت این شهر در این چهارسال به کدامین عدد زیر نزدیک‌تر است؟

- (۱) ۱۲ درصد کاهش (۲) ۸ درصد کاهش (۳) ۸ درصد افزایش (۴) ۱۲ درصد افزایش

پاسخ: گزینه «۱» اگر جمعیت اولیه X باشد، شرایط زیر را داریم:

سال اول: جمعیت بعد از ۱ سال $1/25X$ می‌شود.

سال دوم: جمعیت بعد از ۲ سال $1/25 \times 1/25X$ می‌شود.

سال سوم: جمعیت بعد از ۳ سال $1/25 \times 1/25 \times 0/75X$ می‌شود. (۰/۲۵ کاهش)

سال چهارم: جمعیت بعد از ۴ سال $1/25 \times 1/25 \times 0/75 \times 0/75X$ می‌شود. (۰/۲۵ کاهش)

لذا درصد کل تغییر جمعیت برابر با مقدار مقابل است:

$$\frac{1/25 \times 1/25 \times 0/75 \times 0/75X - X}{X} \times 100 = \frac{0/88X - X}{X} \times 100 = -12$$

تذکر: علامت منفی نشان دهنده‌ی کاهش جمعیت است.

توضیح: البته با توجه به «نتیجه‌ی اخلاقی»، در این تست می‌توان به راحتی فهمید که قطعاً با کاهش جمعیت روبه‌رو خواهیم بود و اگر در آزمونی طراح کمی تست را خوب طرح نکرده باشد، بدون حل می‌شود به آن تست پاسخ داد. البته در این تست هم قطعاً بلافاصله گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند و اگر حل سؤال را بلد نبودید و از گروه عاشقان خوش‌شانس شیر یا خط بودید! می‌توانستید گزینه (۱) را بدون حل با خوش‌شانسی انتخاب کنید!!! دقت کنید این موضوع در مثال قبل نیز به کار شما می‌آید و از همان ابتدا گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند.

کلمه مثال ۲۳: اگر ۹۹٪ هندوانه آب و ۱٪ آن ماده‌ی هندوانه باشد و ما ۱۰۰ کیلوگرم هندوانه بخریم و آن را برای مدتی در آفتاب قرار دهیم، زمانی که مقدار آب آن‌ها به ۹۸٪ رسیده باشد، وزن کل هندوانه‌ها چند کیلوگرم است؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۱۰۰ (۳) ۵۰ (۴) ۴۹

پاسخ: گزینه «۳» یک سؤال ساده اما کمی جالب! احتمال این که دانشجویان بی‌دقت، سریع گزینه (۱) را انتخاب کنند، زیاد است! در صورت سؤال گفته شده: ۱/۱۰ هندوانه، ماده‌ی هندوانه است. بنابراین از ۱۰۰ کیلوگرم هندوانه، ۱ کیلوگرم آن «ماده‌ی هندوانه» است. پس از این که این هندوانه‌ها در آفتاب قرار گیرند، قطعاً به «ماده‌ی هندوانه» اضافه و یا از آن کم نخواهد شد! از طرفی گفته شده؛ وقتی جلوی آفتاب قرار بگیرند، مقدار آب ۹۸٪ وزن کل هندوانه‌هاست. این یعنی ۲٪ آن ماده‌ی هندوانه است. پس داریم:

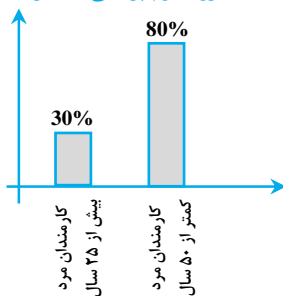
$$\frac{2}{100} = \frac{100 \times 1}{\text{وزن هندوانه}} \Rightarrow \text{وزن هندوانه} = 1 \text{ (kg)} = 5 \text{ kg}$$

سوالات نموداری درصد

برخی از سوالات درصد در آزمون‌های استعداد تحصیلی، به صورت جداول و نمودارهای مختلف طرح می‌شود، که با دقت و تمرکز به راحتی می‌توان به آن‌ها پاسخ داد.

کلمه مثال ۲۴: نمودار زیر، آماری از کارمندان مرد یک اداره را نشان می‌دهد. اگر ۴۰ درصد از کارمندان مرد و ۲۰ درصد از کارمندان مرد بالای ۵۰ سال، فوتبال بازی کنند، چند درصد از کارمندان مرد در این اداره که فوتبال بازی می‌کنند، زیر ۵۰ سال سن دارند؟

(گروه علوم پزشکی - دکتری ۹۰)

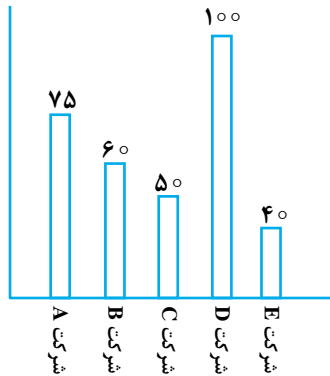


- (۱) ۰
(۲) ۷۰
(۳) ۸۰
(۴) ۹۰

پاسخ: گزینه «۴» ۲۰ درصد از کارمندان بالای ۵۰ سال سن دارند که ۲۰ درصد آنها فوتبال بازی می‌کنند، یعنی $\frac{20}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{4}{100}$ کل کارمندان

با توجه به این که ۴۰٪ از کارمندان مرد فوتبال بازی می‌کنند، نسبت مردانی که فوتبال بازی می‌کنند و بالای ۵۰ سال سن دارند از کل مردانی که فوتبال بازی می‌کنند برابر است با $10\% = \frac{4}{40}$. بنابراین ۹۰ درصد از کسانی که فوتبال بازی می‌کنند، زیر ۵۰ سال سن دارند.

مثال ۲۵: نمودار زیر، تعداد کارمندان پنج شرکت A، B، C، D و E و جدول زیر، نسبت کارمندان زن به مرد را در این شرکت‌ها نشان می‌دهد. (گروه هنر - دکتری ۹۳)



نسبت زن به مرد	نام شرکت
۲ به ۳	A
۷ به ۵	B
۳ به ۷	C
۲ به ۳	D
۳ به ۵	E

۱- تقریباً چند درصد از کارمندان شرکت‌های B و D، زن هستند؟

۵۳/۱ (۴)

۵۴/۵ (۳)

۴۵/۵ (۲)

۴۶/۹ (۱)

۲- تقریباً چند درصد از کارمندان مرد، در شرکت‌های A و E کار می‌کنند؟

۴۴/۲ (۴)

۳۳/۳ (۳)

۷۱/۹ (۲)

۳۶/۸ (۱)

با توجه به نمودارها و جدول، می‌توانیم تعداد زن‌ها و مردها را در هر شرکت به صورت زیر بدست آوریم:

شرکت	مرد	زن
A = ۷۵	۳۰	۴۵
B = ۶۰	۳۵	۲۵
C = ۵۰	۱۵	۳۵
D = ۱۰۰	۴۰	۶۰
E = ۴۰	۱۵	۲۵

$$\text{تعداد کارمندان مرد شرکت A} = \frac{2}{5} \times 75 = 30, \quad \text{تعداد کارمندان زن شرکت A} = \frac{3}{5} \times 75 = 45$$

$$\text{تعداد کارمندان مرد شرکت B} = \frac{7}{12} \times 60 = 35, \quad \text{تعداد کارمندان زن شرکت B} = \frac{5}{12} \times 60 = 25$$

$$\text{تعداد کارمندان مرد شرکت C} = \frac{3}{10} \times 50 = 15, \quad \text{تعداد کارمندان زن شرکت C} = \frac{7}{10} \times 50 = 35$$

$$\text{تعداد کارمندان مرد شرکت D} = \frac{2}{5} \times 100 = 40, \quad \text{تعداد کارمندان زن شرکت D} = \frac{3}{5} \times 100 = 60$$

$$\text{تعداد کارمندان مرد شرکت E} = \frac{3}{8} \times 40 = 15, \quad \text{تعداد کارمندان زن شرکت E} = \frac{5}{8} \times 40 = 25$$

پاسخ:

$$\frac{\text{کل زن‌ها در شرکت B و D}}{\text{کل کارمندان B و D}} = \frac{25 + 60}{160} = 53/100$$

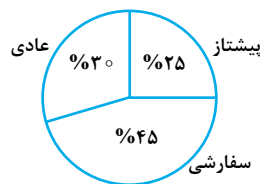
۱- گزینه «۴»

$$\frac{\text{کل مردها در شرکت A و E}}{\text{کل مردها}} = \frac{30 + 15}{135} = 33/100$$

۲- گزینه «۳»

مثال ۲۶: تعداد محمولات پستی سه منطقه، به تفکیک نوع محموله در یک دوره زمانی مشخص، طبق جدول زیر می‌باشد. اطلاعات مربوط به دو مورد در جدول، در دست نیست. همچنین نمودار دایره‌ای زیر، نشان می‌دهد که درصد هر کدام از انواع محموله‌ها نسبت به کل محموله‌ها چند درصد است. (گروه زبان - دکتری ۹۳)

منطقه	پیشتاز	سفارشی	عادی
منطقه ۱	۴۲۰	۶۳۰	۳۷۰
منطقه ۲	۵۰۵		۵۰۵
منطقه ۳	۱۰۵	۲۸۰	



۱- کل محموله‌های پستی منطقه ۳، چند محموله است؟

۷۴۶ (۴)

۸۶۴ (۳)

۹۷۹ (۲)

۷۶۴ (۱)

۲- تقریباً چند درصد از محموله‌های منطقه ۲، از نوع سفارشی بوده است؟

۵۲/۲ (۴)

۴۶/۶ (۳)

۴۴/۶ (۲)

۴۸/۳ (۱)

پاسخ:

۱- گزینه «۴» از آنجا که ستون مربوط به محموله‌های پیشتاز کامل است از این داده‌ها برای به دست آوردن مجهولات استفاده می‌کنیم.

$$1030 = 420 + 505 + 105$$

فرض کنیم تعداد کل محمولات پستی X باشد. با توجه به نمودار دایره‌ای $\frac{25}{100}X = 1030$ به عبارتی $\frac{1}{4}X = 1030$ پس $X = 4120$.

اکنون می‌توانیم تعداد محموله‌های عادی را حساب کنیم. $\frac{30}{100}X = \frac{3}{10}(4120) = 3 \times 412 = 1236$ تعداد محموله‌های عادی

تعداد کل محموله‌های عادی ۱۲۳۶ است از این تعداد ۳۷۰ تا مربوط به منطقه یک و ۵۰۵ تا مربوط به منطقه ۲ است، پس داریم:

$$361 = 1236 - 370 - 505$$

اکنون تعداد کل محموله‌های منطقه ۳ قابل محاسبه است:

$$746 = 105 + 280 + 361$$

۲- گزینه «۱» در حل تست قبل متوجه شدیم تعداد کل محموله‌های پستی $X = 4120$ است. از این تعداد، ۱۰۳۰ محموله پیشتاز و ۱۲۳۶ محموله عادی هستند بنابراین داریم:

$$1854 = 4120 - 1030 - 1236$$

بنابراین با توجه به داده‌های ستون محموله‌های سفارشی خواهیم داشت:

$$944 = 1854 - 630 - 280$$

$$1954 = 505 + 944 + 505$$

حال می‌توان تعداد کل محموله‌های منطقه ۲ را نیز حساب کرد.

بنابراین:

$$\frac{944}{1954} \times 100 = \frac{472}{977} \times 100 \approx 48/3$$

مثال ۲۷: یک ناشر، تعدادی کتاب در ۴ حوزه اقتصاد، فلسفه، منطق و حسابداری را به کتابخانه دو دانشگاه A و B هدیه می‌دهد. مجموع تعداد کتاب‌های اهدایی توسط این ناشر به هر دو دانشگاه، برابر است. نمودار سمت راست، درصد تعداد کتاب‌های اهدایی در هر حوزه به کل کتاب‌های اهدایی را نشان می‌دهد و جدول ناقص سمت چپ، نسبت کتاب‌های اهدایی به دانشگاه B در هر حوزه به کل کتاب‌های اهدایی توسط این ناشر در همان حوزه را نشان می‌دهد.

(گروه علوم انسانی - دکتری ۹۷)

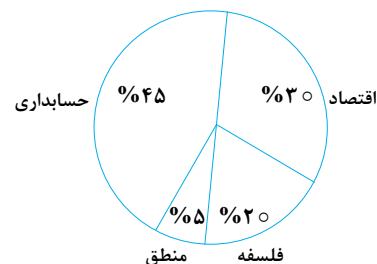
«نسبت کتاب‌های اهدایی به دانشگاه B در هر حوزه، به کل

کتاب‌های اهدایی در همان حوزه»

«درصد تعداد کتاب‌های اهدایی در هر حوزه به کل

کتاب‌های اهدایی در همان حوزه به دو دانشگاه»

حوزه	اقتصاد	فلسفه	منطق	حسابداری
نسبت	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	



۱- اگر دانشگاه A، ۱۴ کتاب در حوزه اقتصاد از ناشر هدیه گرفته باشد، دانشگاه B، مجموعاً چند کتاب از این ناشر هدیه گرفته است؟

۵۶ (۴)

۴۰ (۳)

۲۴ (۲)

۱۰ (۱)

۲- کتاب‌های اهدایی در حوزه فلسفه به دانشگاه A، تقریباً چند درصد از مجموع کتاب‌های اهدایی به دانشگاه A در حوزه‌های فلسفه و حسابداری است؟

۱۷ (۴)

۲۵ (۳)

۳۳ (۲)

۴۳ (۱)

پاسخ: نمودار سمت راست درصد کتاب‌های هر حوزه به کل کتاب‌ها را نشان می‌دهد. یعنی به‌عنوان مثال ۳۰٪ از کل کتاب‌های اهدایی، در حوزه

اقتصادی بوده است. جدول سمت چپ را می‌توانیم به این صورت کامل کنیم که مثلاً اگر $\frac{5}{12}$ کل کتاب‌های اقتصاد به دانشگاه B رفته باشد، پس $\frac{7}{12}$ آن به

دانشگاه A رفته است.

به همین ترتیب داریم:

حوزه	اقتصاد	فلسفه	منطق	حسابداری
دانشکده B \Leftarrow	نسبت $\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$?
دانشکده A \Leftarrow	نسبت $\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$?

$$\frac{7}{12} \times \text{اقتصاد} = 14 \Rightarrow \text{اقتصاد} = 24$$

۱- گزینه «۳» اگر دانشکده A، ۱۴ کتاب اقتصاد هدیه بگیرد، آنگاه:

$$\frac{30}{100} \times \text{کل} = 24 \Rightarrow \text{کل} = 80$$

با توجه به نمودار سمت راست که ۳۰٪ کل کتابها اقتصاد است، داریم:

چون به هر دو دانشگاه تعداد مساوی کتاب اهدا شده است، پس سهم دانشگاه B باید ۴۰ کتاب باشد.

۲- گزینه «۴» فرض کنیم در کل ۱۰۰ عدد کتاب به دانشکدهها اهدا شده باشد، آنگاه تعداد کتاب در حوزههای اقتصاد، فلسفه، منطق و حسابداری به ترتیب ۳۰، ۲۰، ۵ و ۴۵ می باشد (با توجه به نمودار سمت راست). اکنون با کمک جدول می توانیم تعداد کتابهای هر حوزه را در هر دانشگاه مشخص کنیم:

حسابداری	منطق	فلسفه	اقتصاد	
۲۰	$\frac{1}{2} \times 5 = 2/5$	$\frac{3}{4} \times 20 = 15$	$\frac{5}{12} \times 30 = 12/5$	دانشکده B \Leftarrow
۲۵	۲/۵	۵	۱۷/۵	دانشکده A \Leftarrow

$$B \text{ سهم دانشکده} = 12/5 + 15 + 2/5 = 30$$

$$A \text{ سهم دانشکده} = 17/5 + 5 + 2/5 = 25$$

اکنون ۴۵ کتاب حسابداری باید طوری بین A و B تقسیم شود که تعداد کتابهای هر کدام باهم برابر باشد. با توجه به اینکه A و B به ترتیب ۲۵ و ۳۰ کتاب در هر سه حوزه (به جز حسابداری) دریافت کرده اند، پس باید به دانشکده B، ۲۰ عدد کتاب حسابداری برسد و به دانشکده A نیز ۲۵ عدد.

$$\begin{cases} A \text{ فلسفه دانشگاه} = \frac{1}{4} \times 20 = 5 \\ A \text{ حسابداری دانشگاه} = 25 \end{cases} \Rightarrow \text{مطلوب سؤال} = \frac{A \text{ فلسفه}}{A \text{ فلسفه و حسابداری}} = \frac{5}{30} = 16/66 \approx 17\%$$

مثال ۲۸: مزرعه‌ای دارای سه محصول X، Y و Z است. جدول «الف»، مقدار محصولات برداشت شده در این مزرعه را برحسب تن در فصل تابستان و جدول «ب»، درصد تغییر مقدار محصولات برداشت شده‌ی این مزرعه را در فصل تابستان نسبت به فصل بهار و در فصل پاییز نسبت به فصل تابستان نشان می‌دهد.

(گروه هنر - دکتری ۹۵)

جدول «ب» - درصد تغییر مقدار محصولات برداشت شده در فصل تابستان نسبت به فصل بهار و در فصل پاییز نسبت به فصل تابستان		
نوع محصول	درصد تغییر مقدار محصول برداشت شده‌ی تابستان نسبت به بهار	درصد تغییر مقدار محصول برداشت شده‌ی پاییز نسبت به تابستان
X	۲۰ درصد افزایش	۴۰ درصد کاهش
Y	۶۰ درصد کاهش	۲۰ درصد کاهش
Z	۷۵ درصد کاهش	۵۰ درصد افزایش

جدول «الف» - مقدار محصول برداشت شده در فصل تابستان (برحسب تن)	
نوع محصول	مقدار محصول برداشت شده (برحسب تن)
X	۱۲
Y	۱۶
Z	۱۰

۱- از این مزرعه در فصل بهار، چند تن محصول Y، بیشتر از محصول X برداشت شده است؟

- ۱) ۱۲/۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳۰

۲- تقریباً چند درصد از کل محصولات برداشت شده از این مزرعه در فصل پاییز، محصول Z بوده است؟

- ۱) ۴۳ (۲) ۴۰ (۳) ۳۳ (۴) ۲۰