



آزمون (۱)

۱- گزینه «۳» تابع داده شده را به فرم زیر بازنویسی کرده و سپس تبدیل لاپلاس آن را محاسبه می‌نماییم:

$$f(t) = (e^{at} - e^{-at})^\gamma = e^{\gamma at} - \gamma e^{at} \cdot e^{-at} + e^{-\gamma at} = e^{\gamma at} + e^{-\gamma at} - \gamma$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} F(s) = L[(e^{at} - e^{-at})^\gamma] = L[e^{\gamma at}] + L[e^{-\gamma at}] - \gamma L[1]$$

$$F(s) = \frac{1}{s - \gamma a} + \frac{1}{s + \gamma a} - \frac{\gamma}{s} = \frac{s(s + \gamma a) + s(s - \gamma a) - \gamma(s - \gamma a)(s + \gamma a)}{s(s^2 - \gamma a^2)} = \frac{s^2 + \gamma a s + s^2 - \gamma a s - \gamma(s^2 - \gamma a^2)}{s(s^2 - \gamma a^2)} = \frac{\lambda a^2}{s(s^2 - \gamma a^2)}$$

۲- گزینه «۱» طبق قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس داریم:

$$L\left[\frac{\sin \alpha x}{x}\right] = \int_s^\infty L[\sin \alpha x] ds = \int_s^\infty \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} ds = \tan^{-1} \frac{s}{\alpha} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{\alpha}$$

۳- گزینه «۲» عبارت داده شده را بازنویسی کرده و سپس لاپلاس معکوس آن را محاسبه می‌نماییم:

$$L^{-1}\left[\frac{6s - 4}{s^2 - 4s - 12}\right] = L^{-1}\left[\frac{6s - 4}{(s - 2)^2 - 4 - 12}\right] = L^{-1}\left[\frac{6s - 4}{(s - 2)^2 - 16}\right] = L^{-1}\left[\frac{6(s - 2 + 2) - 4}{(s - 2)^2 - 16}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{6s - 4}{s^2 - 4s - 12}\right] = L^{-1}\left[\frac{6(s - 2) + 8}{(s - 2)^2 - 16}\right] \xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} L^{-1}[F(s)]}$$

$$L^{-1}\left[\frac{6(s - 2) + 8}{(s - 2)^2 - 16}\right] = e^{2t} L^{-1}\left[\frac{6s + 8}{s^2 - 16}\right] = e^{2t} (6L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - 16}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{4}{s^2 - 16}\right]) = e^{2t} (6 \cosh 4t + 2 \sin 4t)$$

۴- گزینه «۱» از خواص تابع \ln استفاده کرده و تابع صورت مسأله را به فرم $\ln s - \frac{1}{\gamma} \ln(s^2 - 9)$ بازنویسی می‌کنیم. طبق نکته گفته شده در کتاب، در

مواجهه با تبدیل معکوس توابع \ln ، باید از قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. پس داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{t} L^{-1}[F'(s)]} f(t) = L^{-1}\left[\ln s - \frac{1}{\gamma} \ln(s^2 - 9)\right] = -\frac{1}{t} L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 - 9}\right] = -\frac{1}{t} (L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - 9}\right])$$

$$f(t) = -\frac{1}{t} (1 - \cosh 4t) = \frac{\cosh 4t - 1}{t}$$

۵- گزینه «۲» بنابر تعریف تبدیل لاپلاس $L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ ، در نتیجه داریم:

$$I = \int_0^\infty e^{-4t} \sin^2(4t) dt = L[\sin^2(4t)] \Big|_{s=4} \xrightarrow{\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} L\left[\frac{1 - \cos(8t)}{2}\right] = \frac{1}{2} L[1] - \frac{1}{2} L[\cos(8t)] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 64}\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \frac{s^2 + 64 - s^2}{s(s^2 + 64)} \Big|_{s=4} = \frac{64}{s(s^2 + 64)} \Big|_{s=4} \Rightarrow I = \frac{64}{4(16 + 64)} = \frac{1}{16}$$

۶- گزینه «۱» از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right] + L[y] = L[1] \xrightarrow{L[f''] = s^2 L[f] - sf'(0) - f''(0)} s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + L[y] = \frac{1}{s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1, y'(0)=0} (s^2 + 1)L[y] = s + \frac{1}{s} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } s^2 + 1} L[y] = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s(s^2 + 1)} \Rightarrow Y(s) = L[y] = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s}$$

۷- گزینه «۱» از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم و از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع کمک می‌گیریم:

$$L[y''] - L[y] = 2L[\delta(t - 1)] \xrightarrow{L[f''] = s^2 L[f] - sy'(0) - y''(0)} s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) - L[y] = 2e^{-s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1, y'(0)=0} s^2 L[y] - s - L[y] = 2e^{-s} \Rightarrow L[y](s^2 - 1) = s + 2e^{-s} \Rightarrow L[y] = \frac{s + 2e^{-s}}{s^2 - 1}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - 1} + 2\frac{e^{-s}}{s^2 - 1}\right] \xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F(s)] = u_a(t)L^{-1}[F(s)] \Big|_{t \rightarrow t-a}}$$

$$y(t) = \cosh t + 2u_1(t) L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 1}\right] \Big|_{t \rightarrow t-1} = \cosh t + 2u_1(t) \sinh(t - 1)$$

۸- گزینه «۲» با نوشتن انتگرال داده شده با کمی جابه‌جایی داریم:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\nu t} \left(\int_0^t x^{\nu} \sin(t-x) dx \right) dt \xrightarrow{L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt} I = L \left[\int_0^t x^{\nu} \sin(t-x) dx \right]_{s=\nu}$$

با توجه به تعریف ضرب پیچشی خواهیم داشت:

$$\frac{L \left[\int_0^t f(x) g(t-x) dx = f * g \right]}{L[f * g] = L[f]L[g]} \rightarrow I = L[t^{\nu} * \sin t]_{s=\nu} \xrightarrow{L[f * g] = L[f]L[g]} I = (L[t^{\nu}]L[\sin t])_{s=\nu}$$

$$I = \left(\frac{\nu}{s^{\nu}} \cdot \frac{1}{s^{\nu} + 1} \right)_{s=\nu} = \frac{\nu}{\nu^{\nu}} \times \frac{1}{\nu + 1} = \frac{1}{\nu^{\nu+1}}$$

۹- گزینه «۱» بنا بر تعریف ضرب پیچشی داریم:

$$f(t) = \int_0^t (t-x)^{\nu} \sin \nu x dx = t^{\nu} * \sin \nu t \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} L[f(t)] = L[t^{\nu} * \sin \nu t]$$

$$\frac{L[f * g] = L[f]L[g]}{L[f * g] = L[f]L[g]} \rightarrow L[f(t)] = L[t^{\nu}]L[\sin \nu t] = \frac{\nu!}{s^{\nu}} \cdot \frac{\nu}{s^{\nu} + \nu} = \frac{\nu!}{s^{\nu} (s^{\nu} + \nu)}$$

۱۰- گزینه «۲» با انتقال جمله e^t به داخل انتگرال داریم:

$$F(s) = L \left[\int_0^t e^{t-u} y(u) dy \right] = L[e^t * y(t)] \xrightarrow{L[f * g] = L[f]L[g]} F(s) = L[e^t]L[y(t)] = \frac{Y(s)}{s-1}$$

۱۱- گزینه «۱» ابتدا از $f(t)$ تبدیل لاپلاس گرفته و سپس از خواص تبدیل لاپلاس پیچش استفاده می‌کنیم:

$$L[f(t)] = L[t * t * t] \xrightarrow{L[f * g] = L[f]L[g]} L[f(t)] = L[t]L[t]L[t] = (L[t])^{\nu}$$

$$\frac{L[t] = \frac{1}{s^{\nu}}}{L[t] = \frac{1}{s^{\nu}}} \rightarrow L[f(t)] = \left(\frac{1}{s^{\nu}} \right)^{\nu} = \frac{1}{s^{\nu^2}} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} f(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\nu^2}} \right] = \frac{t^{\nu^2}}{\nu!}$$

۱۲- گزینه «۳» از معادله داده شده، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L \left[\frac{dy}{dt} \right] + L \left[\int_0^t y(t) dt \right] = L[1] \xrightarrow{\begin{matrix} L \left[\frac{dy}{dt} \right] = sL[y] - y(0) \\ L \left[\int_0^t y(t) dt \right] = \frac{L[y]}{s} \end{matrix}} sL[y] - y(0) + \frac{L[y]}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\left(s + \frac{1}{s} \right) L[y] = y(0) + \frac{1}{s} \xrightarrow{y(0)=1} \frac{s^{\nu} + 1}{s} L[y] = 1 + \frac{1}{s} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s}{s^{\nu} + 1}} L[y] = \frac{s}{s^{\nu} + 1} + \frac{1}{s^{\nu} + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t) = L^{-1} \left[\frac{s}{s^{\nu} + 1} \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\nu} + 1} \right] = \cos t + \sin t$$

۱۳- گزینه «۲» با به‌کارگیری رابطه انتگرالی داده شده داریم:

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-\nu s}} \int_0^1 t e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-\nu s}} \left(-\frac{(st+1)e^{-st}}{s^{\nu}} \right) \Big|_0^1 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^{\nu}(1 - e^{-\nu s})} (1 - (s+1)e^{-s}) = \frac{1 - (s+1)e^{-s}}{s^{\nu}(1 - e^{-\nu s})}$$

۱۴- گزینه «۱» می‌دانیم که ضرب پیچشی $f * g$ را می‌توان به فرم انتگرالی $\int_0^t f(t-x)g(x) dx$ نوشت. از مقایسه این فرم نمایش پیچش با جمله

انتگرالی معادله بی می‌بریم که $\int_0^t (t-x)y(x) dx = t * y(t)$. حالا ضمن جایگذاری $t * y(t)$ در معادله، از طرفین تساوی تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$y(t) + t * y(t) = \sin \nu t \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} L[y(t)] + L[t * y(t)] = L[\sin \nu t]$$

$$\frac{L[f * g] = L[f]L[g]}{L[f * g] = L[f]L[g]} \rightarrow Y(s) + L[t]L[y(t)] = \frac{\nu}{s^{\nu} + \nu} \Rightarrow Y(s) + \frac{1}{s^{\nu}} Y(s) = \frac{\nu}{s^{\nu} + \nu}$$

$$\Rightarrow Y(s) \left(1 + \frac{1}{s^{\nu}} \right) = \frac{\nu}{s^{\nu} + \nu} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s^{\nu}}{s^{\nu} + \nu}} Y(s) (s^{\nu} + 1) = \frac{\nu s^{\nu}}{s^{\nu} + \nu} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } s^{\nu} + 1} Y(s) = \frac{\nu s^{\nu}}{(s^{\nu} + 1)(s^{\nu} + \nu)}$$

$$\frac{\nu s^{\nu}}{(s^{\nu} + 1)(s^{\nu} + \nu)} = \frac{As + B}{s^{\nu} + 1} + \frac{Cs + D}{s^{\nu} + \nu}$$

حالا باید $Y(s)$ را به کسرهای جزئی تجزیه کنیم، برای این منظور داریم:

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \frac{\nu s^{\nu}}{(s^{\nu} + 1)(s^{\nu} + \nu)} = \frac{(As + B)(s^{\nu} + \nu) + (Cs + D)(s^{\nu} + 1)}{(s^{\nu} + 1)(s^{\nu} + \nu)} = \frac{(A + C)s^{\nu} + (B + D)s^{\nu} + (\nu A + C)s + (\nu B + D)}{(s^{\nu} + 1)(s^{\nu} + \nu)}$$



حالا با مقایسه صورت کسرهای طرفین تساوی داریم:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=2 \\ 4A+C=0 \\ 4B+D=0 \end{cases} \Rightarrow A=0, B=-\frac{2}{3}, C=0, D=\frac{4}{3} \Rightarrow Y(s) = \frac{-\frac{2}{3}}{s^2+1} + \frac{\frac{4}{3}}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t) = L^{-1}\left[\frac{-\frac{2}{3}}{s^2+1} + \frac{\frac{4}{3}}{s^2+4}\right] = -\frac{2}{3}\sin t + \frac{4}{3} \frac{\sin 2t}{2} = -\frac{2}{3}\sin t + \frac{2}{3}\sin 2t$$

۱۵- گزینه «۳» از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y(t)] = L[1] + L\left[\int_0^t y(x)\sin(t-x)dx\right] \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} + L[y(t)] * L[\sin t] \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} + Y(s) \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{s^2}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right] = 1 + \frac{t^2}{2}$$

۱۶- گزینه «۱» با توجه به قضیه مقدار نهایی در لاپلاس داریم: $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$. پس می‌توان نوشت:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 \circ (s+1)}{s(s^2+2s+2)} = 1 \circ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s^2+2s+2} = 1 \circ \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۷- گزینه «۳» طبق قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع داریم:

$$\xrightarrow{L[f'] = sL[f] - f(0)} L[s'(t-\pi)] = sL[\delta(t-\pi)] - \delta(0-\pi) \xrightarrow{t \neq a \Rightarrow \delta(t-a)=0} L[\delta'(t-\pi)] = se^{-\pi s} - 0 = se^{-\pi s}$$

۱۸- گزینه «۴» انتگرال خواسته شده برابر با تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin ax}{x}$ به ازای $s=0$ است:

$$L\left[\frac{\sin ax}{x}\right] = \int_s^\infty L[\sin ax] dx = \int_s^\infty \frac{a}{s^2+a^2} dx = \text{tg}^{-1} \frac{s}{a} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} \left(\frac{s}{a}\right) \xrightarrow{s=0} \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

۱۹- گزینه «۱» به کمک قضیه دوم انتقال داریم $(L^{-1}[e^{-as}F(s)] = u_a(t)L^{-1}[F(s)] \Big|_{t \rightarrow t-a}$

$$g(t) = L^{-1}\left[e^{-fs} \left(\frac{2}{s} + \frac{\Delta}{s}\right)\right] = u_f(t)L^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{\Delta}{s}\right] \Big|_{t \rightarrow t-f} = u_f(t)(2t+\Delta) \Big|_{t \rightarrow t-f}$$

$$\Rightarrow g(t) = u_f(t)(2(t-f)+\Delta) = u_f(t)(2t-3) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 4 \\ 2t-3 & t > 4 \end{cases}$$

۲۰- گزینه «۱» انتگرال سمت راست تساوی، ضرب پیچشی $y(t) * \sin t$ است. بنابراین معادله به صورت $y(t) = t^2 + y(t) * \sin t$ قابل نوشتن است.

حالا از طرفین معادله جدید تبدیل لاپلاس گرفته و توجه داریم که $L[f * g] = L[f]L[g]$.

$$L[y(t)] = L[t^2] + L[y(t)]L[\sin t] \Rightarrow L[y(t)] = \frac{2}{s^3} + L[y] \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L[y(t)]\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow L[y(t)] \left(\frac{s^2+1-1}{s^2+1}\right) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow \frac{s^2}{s^2+1}L[y(t)] = \frac{2}{s^3} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s^2+1}{s^2}} L[y(t)] = \frac{2(s^2+1)}{s^5}$$

$$\Rightarrow L[y(t)] = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5} \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}\right] = \frac{2t^2}{2} + \frac{2t^4}{4!} \Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}$$

آزمون (۲)

۱- گزینه «۳» می‌دانیم که تبدیل لاپلاس تابع $\sin t$ برابر $\frac{1}{s^2+1}$ است. همچنین از قضیه اول انتقال، $L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$ ؛ تبدیل لاپلاس $e^{at} \sin t$ نیز برابر $\frac{1}{(s-a)^2+1}$ است. حالا این دو عبارت را برابر هم قرار می‌دهیم و داریم:

$$\frac{1}{(s-a)^2+1} = \frac{1}{s^2-2as+a^2+1} = \frac{1}{s^2-6s+b} \Rightarrow \begin{cases} -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ a^2+1 = b \xrightarrow{a=3} b = 10 \end{cases}$$

۲- گزینه «۳» ضابطه تابع $f(t)$ به صورت زیر است:

$$f(t) = \begin{cases} -t+2 & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ -1 & 2 < t < 3 \\ 3 & t > 3 \end{cases} = (-t+2)(1-u_1) + (u_1-u_2) - (u_2-u_3) + 3u_3 \Rightarrow f(t) = 2 + (t-1)u_1 - 2u_2 + 4u_3 - t$$

تبدیل لاپلاس می‌گیریم $L[f(t)] = L[2 + (t-1)u_1 - 2u_2 + 4u_3 - t] = 2L[1] + L[u_1(t-1)] - 2L[u_2] + 4L[u_3] - L[t]$

$L[u_a(t)f(t)] = e^{-as}L[f(t+a)] \rightarrow L[f(t)] = \frac{2}{s} + e^{-s}L[t] - 2\frac{e^{-2s}}{s} + 4\frac{e^{-3s}}{s} - \frac{1}{s^2} \Rightarrow L[f(t)] = \frac{2}{s} + e^{-s}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{4}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s^2}$

۳- گزینه «۱» ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم و سپس تبدیل معکوس می‌گیریم:

طرفین ضریب $s^2(s^2+1)$ $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^2+1} + \frac{Ds+E}{s^2+1} \xrightarrow{\text{طرفین ضریب } s^2(s^2+1)} 1 = As^2(s^2+1) + Bs(s^2+1) + C(s^2+1) + (Ds+E)s^2$

$$\Rightarrow 1 = (A+D)s^4 + (B+E)s^3 + (A+C)s^2 + Bs + C$$

حالا ضرایب s^0 تا s^4 را در دو طرف تساوی برابر قرار داده و ثابت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} s^0 \Rightarrow C = 1 \\ s^1 \Rightarrow B = 0 \\ s^2 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow A = -C \xrightarrow{C=1} A = -1 \Rightarrow \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} \\ s^3 \Rightarrow B + E = 0 \Rightarrow B = -E \xrightarrow{B=0} E = 0 \\ s^4 \Rightarrow A + D = 0 \Rightarrow A = -D \xrightarrow{A=-1} D = 1 \end{cases}$$

لاپلاس معکوس می‌گیریم $L^{-1}\left[\frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1}\right] = -L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = -1 + \frac{t}{2} + \cos t$

۴- گزینه «۴» کسر داده شده را ساده می‌کنیم (چون دلتای مخرج کوچک‌تر از صفر است $(0 < -4 = -20 - 16)$ ، باید مخرج را به صورت مربع کامل بنویسیم):

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{(s^2 + 4s + 5)^2} = \frac{(s+1)(s+3)}{((s+2)^2+1)^2} = \frac{(s+2-2+1) + (s+2+1)}{((s+2)^2+1)^2}$$

لاپلاس معکوس می‌گیریم $\Rightarrow F(s) = \frac{((s+2)-1)(s+2+1)}{((s+2)^2+1)^2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} f(t) = L^{-1}\left[\frac{(s+2)-1}{(s+2)^2+1} \times \frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+1}\right]$

$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}L^{-1}[F(s)] \rightarrow f(t) = e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+1} \times \frac{s+1}{s^2+1}\right] = e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right]$

عبارت درون پرانتز برابر $-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$ است. از طرفی طبق قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس داریم:

$L^{-1}[F'(s)] = -tL^{-1}[F(s)] \rightarrow f(t) = e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right] = e^{-2t}(-tL^{-1}\left[\frac{-s}{s^2+1}\right]) = te^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \Rightarrow f(t) = te^{-2t} \cos t$



۵- گزینه «۴» می‌دانیم که طبق قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع، $L[f'''] = s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$ است.

در صورت حدگیری از طرفین تساوی به‌ازای $s \rightarrow \infty$ به $\lim_{s \rightarrow \infty} L[f'''] = \lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0))$ می‌رسیم که مطابق با آنچه که در درسنامه دوم گفته شد، سمت چپ تساوی برابر صفر است و با ساده‌سازی سمت راست آن داریم:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)) = 0 \Rightarrow f''(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf'(0))$$

حالا باید $f(0)$ و $f'(0)$ را محاسبه نماییم:

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2(s-4)} = 0 \\ f'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 L[f] - sf(0)) \xrightarrow{f(0)=0} f'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 L[f] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{1}{s^2(s-4)} = 0 \end{cases}$$

بنابراین رابطه $f''(0)$ به $f''(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 L[f]$ ساده می‌شود. در نتیجه با محاسبه این حد، به $f''(0)$ دست پیدا می‌کنیم:

$$f''(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 \frac{1}{s^2(s-4)} = 1$$

۶- گزینه «۱» با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ ، انتگرال مفروض برابر است با:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \frac{e^t - \cos t}{t} dt = L\left[\frac{e^t - \cos t}{t}\right]_{s=\gamma} \xrightarrow{L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} L[f(t)] ds} I = \left(\int_s^{\infty} L[e^t - \cos t] ds\right)_{s=\gamma}$$

$$I = \left(\int_s^{\infty} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1}\right) ds\right)_{s=\gamma} = \left([\ln(s-1)] - \frac{1}{2} \ln(s^2+1)\right)_{s=\gamma}^{\infty} = -\ln \frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}} \Big|_{s=\gamma} = -\ln \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Rightarrow I = \ln \sqrt{\Delta} = \ln \Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \Delta$$

۷- گزینه «۲» اگر تبدیل لاپلاس y را به صورت $\int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt$ تعریف کنیم، انتگرال $\int_0^{\infty} y(t) dt$ همان $L[y(t)]|_{s=0}$ است. از معادله داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y''] + L[y'] + \gamma L[y] = L[(\gamma + \sin t) \delta(t - \frac{\pi}{\gamma})] \quad \begin{cases} L[y''] = s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) \\ L[y'] = sL[y] - y(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + sL[y] - y(0) + \gamma L[y] = e^{-\frac{\pi}{\gamma} s} (\gamma + \sin \frac{\pi}{\gamma})$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=1} (s^2 + s + \gamma)L[y] - s - \gamma = \gamma e^{-\frac{\pi}{\gamma} s} \Rightarrow L[y] = \frac{s + \gamma + \gamma e^{-\frac{\pi}{\gamma} s}}{s^2 + s + \gamma}$$

حالا در $L[y]$ به s مقدار صفر می‌دهیم:

$$\int_0^{\infty} y(t) dt = \frac{\gamma + \gamma}{\gamma} = \frac{\Delta}{\gamma}$$

۸- گزینه «۲» با توجه به اینکه $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است، پس انتگرال خواسته شده تبدیل لاپلاس $\Delta y(t)$ به‌ازای $s=1$ است. با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله دیفرانسیل داریم:

$$y'' + \gamma y' + \gamma y = t(1 - u_{\pi}(t)) \Rightarrow L[y''] + \gamma L[y'] + \gamma L[y] = L[t(1 - u_{\pi}(t))]$$

از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع، $L[y''] = s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)$ و $L[y'] = sL[y] - y(0)$ می‌باشد که با توجه به شرایط اولیه داده شده، $L[y''] = s^2 L[y] - s$ و $L[y'] = sL[y] - 1$ حاصل می‌شوند. با قرار دادن این دو در تساوی فوق داریم:

$$s^2 L[y] - s + \gamma sL[y] - \gamma + \gamma L[y] = \frac{1}{s^2} - L[tu_{\pi}(t)] \xrightarrow{L[u_a(t)f(t)] = e^{-as} L[f(t+a)]} (s^2 + \gamma s + \gamma)L[y] - s - \gamma = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s} L[t + \pi]$$

$$\Rightarrow (s^2 + \gamma s + \gamma)L[y] = \frac{1}{s^2} + s + \gamma - e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right) \xrightarrow{\text{جایگذاری } s=1} \Delta L[y] = 1 + 1 + \gamma - e^{-\pi} (1 + \pi) = \gamma - e^{-\pi} (1 + \pi)$$

۹- گزینه «۲» با کمی ساده‌سازی انتگرال داخلی را به فرم ضرب پیچشی نوشته و داریم:

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^x e^{\epsilon(x-t)} \cdot e^{-\Delta x} \sin t \, dt \, dx = \int_0^{\infty} e^{-\Delta x} \left(\int_0^x e^{\epsilon(x-t)} \sin t \, dt \right) dx$$

$$\xrightarrow{f * g = \int_0^x f(x-t)g(t)dt} I = \int_0^{\infty} e^{-\Delta x} (e^{\epsilon x} * \sin x) \, dx \xrightarrow{\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt=F(s)} I = L[e^{\epsilon x} * \sin x] \Big|_{s=\Delta}$$

$$\xrightarrow{L[f * g] = L[f]L[g]} I = (L[e^{\epsilon x}]L[\sin x]) \Big|_{s=\Delta} = \left(\frac{1}{s-\epsilon} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right) \Big|_{s=\Delta} = -\frac{1}{\Delta+1} = -\frac{1}{\Delta}$$

۱۰- گزینه «۳» برای محاسبه تبدیل لاپلاس تابع مفروض به کمک قضایای تبدیل لاپلاس، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} L[f(t)] \, ds} L\left[\frac{\cos x - e^x}{x}\right] = \int_s^{\infty} L[\cos x - e^x] \, ds = \int_s^{\infty} \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1} \right) ds$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(s^2+1) - \ln(s-1) \right] \Big|_s^{\infty} = \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1} \Big|_s^{\infty} = 0 - \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1} = \ln \frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\xrightarrow{L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{L[f(t)]}{s}} L\left[\int_0^t \left(\frac{\cos x - e^x}{x} \right) dx\right] = \frac{1}{s} L\left[\frac{\cos x - e^x}{x}\right] = \frac{1}{s} \ln \frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}$$

۱۱- گزینه «۱» برای حل این سؤال از قضایای اول انتقال، تبدیل لاپلاس مشتقات تابع و تبدیل لاپلاس پیچش استفاده کرده و داریم:

$$F(s) = L\left[e^t \frac{d}{dt}(\sin t * \cos t)\right] \xrightarrow{L[e^{at}f(t)] = F(s-a)} F(s) = L\left[\frac{d}{dt}(\sin t * \cos t)\right] \Big|_{s \rightarrow s-1}$$

$$\xrightarrow{L[f'] = sL[f] - f(0)} F(s) = (sL[\sin t * \cos t] - \sin(0) * \cos(0)) \Big|_{s \rightarrow s-1}$$

$$\xrightarrow{\sin(0) * \cos(0) = 0} F(s) = (s-1)(L[\sin t * \cos t]) \Big|_{s \rightarrow s-1} \xrightarrow{L[f * g] = L[f]L[g]} F(s) = (s-1)(L[\sin t]L[\cos t]) \Big|_{s \rightarrow s-1}$$

$$= (s-1) \left(\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \right) \Big|_{s \rightarrow s-1} = (s-1) \frac{s-1}{((s-1)^2+1)^2} \Rightarrow F(s) = \frac{(s-1)^2}{[(s-1)^2+1]^2} = \frac{(s-1)^2}{s^2-2s+2}$$

۱۲- گزینه «۲» از معادله دیفرانسیل انتگرالی داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و داریم:

$$L[y'] + \tau L[y] + L\left[\int_0^x y(t)dt\right] = 0$$

از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع، $L[y'] = sL[y] - y(0)$ است که با فرض $y(0) = 1$ ، نتیجه $L[y'] = sL[y] - 1$ است. همچنین طبق قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال $L\left[\int_0^x y(t)dt\right] = \frac{L[y(x)]}{s}$ است. پس داریم:

$$sL[y] - 1 + \tau L[y] + \frac{L[y]}{s} = 0 \Rightarrow L[y] \left(s + \tau + \frac{1}{s} \right) = 1 \Rightarrow L[y] \left(\frac{s^2 + \tau s + 1}{s} \right) = 1 \Rightarrow L[y] = \frac{s}{s^2 + \tau s + 1} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

۱۳- گزینه «۱» این تابع متناوب با دوره تناوب $T = 4$ است و ضابطه آن در یک دوره تناوبش برابر $\begin{cases} \tau & 0 < t < \tau \\ -\tau & \tau < t < 4 \end{cases}$ است. حالا از رابطه تبدیل لاپلاس

توابع متناوب استفاده کرده و داریم:

$$\xrightarrow{F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st}f(t)dt} F(s) = \frac{1}{1-e^{-4s}} \left(\int_0^{\tau} \tau e^{-st} dt - \int_{\tau}^4 \tau e^{-st} dt \right)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{1-e^{-4s}} \left(\frac{\tau e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\tau} + \frac{\tau e^{-st}}{s} \Big|_{\tau}^4 \right) = \frac{1}{1-e^{-4s}} \left(\frac{\tau}{s} (1 - e^{-\tau s}) + \frac{\tau}{s} (e^{-4s} - e^{-\tau s}) \right)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\tau}{s(1-e^{-4s})} (1 - e^{-\tau s} + e^{-4s} - e^{-\tau s}) = \frac{\tau}{s(1-e^{-4s})} (1 - \tau e^{-\tau s} + e^{-4s})$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\tau}{s(1-e^{-4s})} (1 - e^{-\tau s})^2 \xrightarrow{1-e^{-4s} = (1+e^{-\tau s})(1-e^{-\tau s})} F(s) = \frac{\tau(1-e^{-\tau s})^2}{s(1+e^{-\tau s})(1-e^{-\tau s})} \Rightarrow F(s) = \frac{\tau(1-e^{-\tau s})}{s(1+e^{-\tau s})}$$



۱۴- گزینه «۲» با بازنویسی جمله انتگرالی $\int_0^t e^{-x} y(x) dx$ به فرم ضرب پیچشی $e^t * y(t)$ در معادله، از طرفین تساوی تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$y(t) + e^t * y(t) = \tau t - \tau \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} L[y(t)] + L[e^t * y(t)] = L[\tau t - \tau]$$

$$\xrightarrow{L[f * g] = L[f]L[g]} L[y(t)] + L[e^t]L[y(t)] = \tau L[t] - \tau L[1] \xrightarrow{L[y(t)] = Y(s)} Y(s) + \frac{1}{s-1} Y(s) = \frac{\tau}{s^2} - \frac{\tau}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s) \left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{\tau - \tau s}{s^2} \Rightarrow Y(s) \left(\frac{s-1+1}{s-1}\right) = \frac{\tau - \tau s}{s^2}$$

$$Y(s) \frac{s}{s-1} = \frac{\tau - \tau s}{s^2} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s-1}{s}} Y(s) = \frac{(\tau - \tau s)(s-1)}{s^2} = \frac{-\tau s^2 + \tau s + \tau s - \tau}{s^2} = -\frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s^2} - \frac{\tau}{s^3}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t) = L^{-1}\left[-\frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s^2} - \frac{\tau}{s^3}\right] = -\tau + \tau t - \frac{\tau t^2}{2} = -\tau + \tau t - \frac{\tau t^2}{2}$$

۱۵- گزینه «۲» از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[f(t)] = L[te^{-t}] + L\left[\int_0^t \alpha f(t-\alpha) e^{-\alpha} d\alpha\right] \Rightarrow F(s) = -\frac{d}{ds} L[e^{-t}] + L[f(t) * te^{-t}] \Rightarrow F(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1}\right) + F(s) L[te^{-t}]$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + F(s) \left(-\frac{d}{ds} L[e^{-t}]\right) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + F(s) \left(-\left(\frac{1}{s+1}\right)'\right)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + F(s) \left(-\frac{1}{(s+1)^2}\right) \Rightarrow F(s) \left(1 - \frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s^2 + 2s + 1 - 1}{(s+1)^2} F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow \frac{s(s+2)}{(s+1)^2} F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} f(t) = \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right] = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t})$$

۱۶- گزینه «۲» به کمک خواص کانولوشن داریم:

$$L^{-1}[FG] = L^{-1}[F] * L^{-1}[G] \rightarrow f(t) = L^{-1}[e^{-\tau s} \cot^{-1}(s+\tau)] = L^{-1}[e^{-\tau s}] * L^{-1}[\cot^{-1}(s+\tau)] = \delta_{\tau}(t) * L^{-1}[\cot^{-1}(s+\tau)]$$

$$L^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{t} L^{-1}[F'(s)] \rightarrow f(t) = \delta_{\tau}(t) * \left(-\frac{1}{t} L^{-1}\left[\frac{d}{ds} \cot^{-1}(s+\tau)\right]\right) = -\delta_{\tau}(t) * \left(\frac{1}{t} L^{-1}\left[\frac{-1}{(s+\tau)^2+1}\right]\right)$$

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} L^{-1}[F(s)] \rightarrow f(t) = -\delta_{\tau}(t) * \frac{e^{-\tau t}}{t} L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+1}\right] = -\delta_{\tau}(t) * \frac{e^{-\tau t}}{t} (-\sin t) \Rightarrow f(t) = \delta_{\tau}(t) * e^{-\tau t} \frac{\sin t}{t}$$

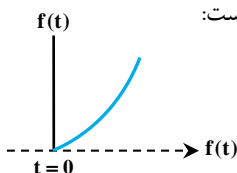
۱۷- گزینه «۳» از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 \circ s + 4}{s(s+1)(s^2 + 4s + \Delta)} = \frac{4}{1 \times (\Delta)} = \frac{4}{\Delta}$$

۱۸- گزینه «۳» به کمک نکات گفته شده در درسنامه دوم به محاسبه $f'(0)$ ، $f(0)$ و $f''(0)$ می‌پردازیم:

$$\left\{ \begin{aligned} f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{e^{-\pi s^2} + 1}{s^3} = 0 \\ f'(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 F(s) - s f(0)) \xrightarrow{f(0)=0} f'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{e^{-\pi s^2} + 1}{s^3} = 0 \\ f''(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0)) \xrightarrow{f(0)=f'(0)=0} f''(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 \frac{e^{-\pi s^2} + 1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow \infty} (1 + e^{-\pi s^2}) = 1 \end{aligned} \right.$$

بنابراین نمودار در مبدأ دارای تقعر رو به بالا و مینیمم نسبی است. یعنی $f(t)$ اکیداً صعودی است و شکل آن به صورت روبه‌رو است:



۱۹- گزینه «۲» از معادله دیفرانسیل اول نسبت به t مشتق گرفته و سپس معادله جدید را با معادله دوم از دستگاه جمع می‌کنیم:

$$x''' + 2y'' + y' = 1 - \cos t \xrightarrow{\text{جمع با معادله دوم}} x''' + x' + (2y'' + y') - (2y'' + y') = 1 - \cos t + \cos t \Rightarrow x''' + x' = 1$$

حالا باید از معادله، تبدیل لاپلاس گرفته و تبدیل لاپلاس مشتقات را برحسب لاپلاس X بنویسیم:

$$L[x'''] + L[x'] = L[1] \xrightarrow{\substack{L[x'] = sL[x] - x(0) \\ L[x'''] = s^3 L[x] - s^2 x(0) - sx'(0) - x''(0)}} s^3 L[x] - s^2 x(0) - sx'(0) - x''(0) + sL[x] - x(0) = \frac{1}{s}$$

$$\xrightarrow{x(0)=0, x'(0)=1} (s^3 + s)L[x] = \frac{1}{s} + sx''(0)$$

با جایگذاری $x''(0) = 0$ در معادله اول دستگاه داده شده، $x''(0) = 0$ به دست می‌آید.

$$s(s^2 + 1)L[x] = \frac{1}{s} + s \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } s(s^2 + 1)} L[x] = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow L[x] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

۲۰- گزینه «۱» با انتقال جمله e^{ft} به داخل انتگرال و ساده‌سازی داریم:

$$f(t) = \int_0^t e^{f(t-x)} \frac{\delta(x - \frac{\pi}{2}) \sin 3x}{x} dx \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx = f * g} f(t) = e^{ft} * \frac{\delta(x - \frac{\pi}{2}) \sin 3x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} L[f(t)] = L[e^{ft} * \frac{\delta(x - \frac{\pi}{2}) \sin 3x}{x}] \xrightarrow{L[f * g] = [f]L[g]} L[f(t)] = L[e^{ft}]L\left[\frac{\delta(x - \frac{\pi}{2}) \sin 3x}{x}\right]$$

$$\Rightarrow L[f(t)] = \frac{1}{s-f} L\left[\delta(x - \frac{\pi}{2}) \frac{\sin 3x}{x}\right] \xrightarrow{L[\delta_a(t)f(t)] = e^{-as}f(a)} L[f(t)] = \frac{1}{s-f} e^{-\frac{\pi}{2}s} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow L[f(t)] = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s-f}$$