



# مدرس‌ان شریف

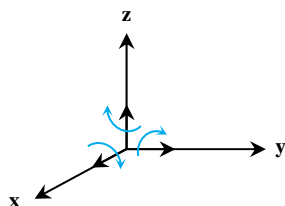
## فصل اول

### «کلیات، پایداری سازه‌ها، معینی و نامعینی»

#### مقدمه

سازه عبارت است از یک عضو یا مجموعه‌ای از اعضا که به منظور تحمل و انتقال نیرو به کار می‌رود. تحلیل سازه‌ها علمی است که نیروها را روی مجموعه‌های سازه‌ای بررسی می‌کند. به عبارت دیگر، تأثیر و نحوه انتقال نیروهای مؤثر به سازه‌ها که توسط اجزای سازه از نقاط تأثیر به تکیه‌گاه‌ها هدایت می‌گردند، توسط عاملی که تحلیل سازه نامیده می‌شود، مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد. قبل از هرگونه اقدام در ارتباط با تحلیل سازه‌ها، لازم است که در رابطه با مباحث مقدماتی و تعاریف، مطالبی بیان شود. در این فصل پس از بیان کلیات، در مورد روش بررسی پایداری سازه‌ها مطالبی بیان خواهد شد. در نهایت، در مورد روش تشخیص معین یا نامعین بودن یک سازه و تعیین درجات نامعینی سازه‌های نامعین صحبت خواهیم کرد.

#### درجات آزادی



در حالت کلی در فضای سه بعدی هر نقطه شش درجه آزادی دارد. درجات آزادی به معنای تعداد تغییرمکان‌ها و دوران‌های مستقل می‌باشد. شکل روبرو، گویای این مطلب است.

لازم به ذکر است که درجات آزادی در فضای دوبعدی سه درجه می‌باشند. در صفحه، دو تغییرمکان مستقل و یک دوران حول محور عمود بر صفحه قابل تعریف است. هدف اصلی استفاده از تکیه‌گاه‌های سازه‌ای، بستن یک یا چند درجه آزادی می‌باشد. بستن درجات آزادی در حالت کلی به صورت کامل یا ناقص صورت می‌گیرد که در این باره توضیح داده می‌شود. در ادامه به انواع تکیه‌گاه‌های به کار رفته در صفحه (فضای دوبعدی) خواهیم پرداخت.

#### انواع تکیه‌گاه‌ها

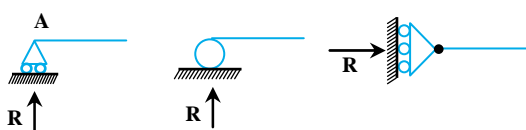
در قسمت قبل درجات آزادی تعریف شدند. برای بیان عدم حرکت در امتداد درجات آزادی از تکیه‌گاه‌ها استفاده می‌شود. استفاده از تکیه‌گاه باعث عدم حرکت در امتداد موردنظر و از طرف دیگر باعث ایجاد نیرو و یا گشتاور در امتداد و یا حول درجه آزادی موردنظر می‌شود. در ادامه انواع تکیه‌گاه‌ها تعریف شده و خصوصیاتشان بیان می‌شود.

#### تکیه‌گاه غلطکی (مفصلی متحرک): در این نوع تکیه‌گاه، یک درجه آزادی

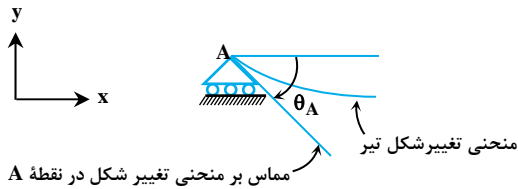
تغییرمکانی به طور کامل بسته می‌شود که بدین خاطر در جهت بسته شده واکنش تکیه‌گاهی به وجود می‌آید. واکنش تکیه‌گاهی در جهت عمود بر درجه آزادی بسته شده صفر بوده و امکان حرکت در این امتداد وجود دارد.

شکل مقابل حالت‌ها و نمادهای مختلف این تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.

این نوع تکیه‌گاه فقط یک حرکت انتقالی را می‌بندد و درجات آزادی دیگر باز هستند و امکان حرکت دارند.



به طور مثال در شکل زیر، در نقطه A خواهیم داشت:



$$\Delta_x \neq 0 : \text{تغییر مکان در جهت } x$$

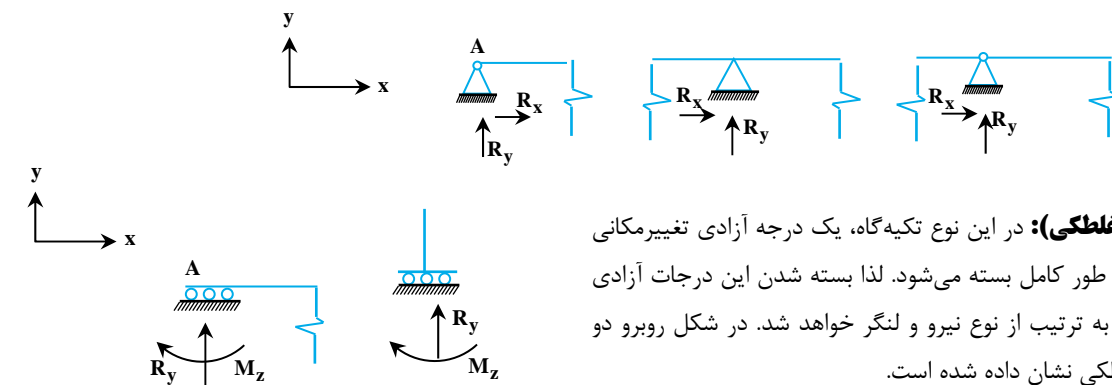
$$\Delta_y = 0 : \text{تغییر مکان در جهت } y$$

$$\theta_A \neq 0 : \text{دوران حول محور } Z$$

همان‌طور که گفته شد در تکیه‌گاه مفصلی متحرک، دوران آزاد می‌باشد. مقدار دوران یک نقطه از تیر، زاویه‌ای است که مماس بر منحنی تغییر شکل در آن نقطه با امتداد عضو می‌سازد. این مقدار در شکل فوق با  $\theta_A$  نشان داده شده است.

### تکیه‌گاه مفصلی ثابت

در این نوع تکیه‌گاه، دو درجه آزادی تغییر مکانی در نقطه مورد نظر بسته می‌شود و تنها دوران در تکیه‌گاه آزاد می‌باشد. پس در این حالت دو واکنش تکیه‌گاهی در امتداد درجات آزادی بسته شده به وجود می‌آید که از جنس نیرو است. به طور کلی هرگاه درجات آزادی انتقالی بسته شوند، واکنش تکیه‌گاهی به وجود آمده از جنس نیرو و هرگاه درجات آزادی دورانی بسته شوند، واکنش تکیه‌گاهی به وجود آمده از جنس لنگر (نیرو در فاصله) خواهد بود. شکل زیر حالت‌های مختلف ممکن برای تکیه‌گاه مفصلی را نشان می‌دهد.



### تکیه‌گاه دو غلطکی (گیردار غلطکی): در این نوع تکیه‌گاه، یک درجه آزادی تغییر مکانی

و یک درجه آزادی دورانی به طور کامل بسته می‌شود. لذا بسته شدن این درجات آزادی باعث ایجاد عکس‌العمل‌هایی به ترتیب از نوع نیرو و لنگر خواهد شد. در شکل روبرو دو نوع استفاده از تکیه‌گاه دو غلطکی نشان داده شده است.

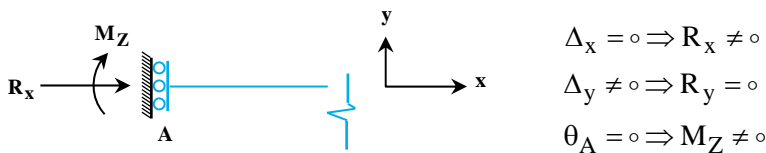
تکیه‌گاه نشان داده شده در شکل فوق، به نام تکیه‌گاه انتقال آزاد هم معروف است. در تکیه‌گاه شکل فوق، داریم:

$$\Delta_x \neq 0 \Rightarrow \text{واکنش تکیه‌گاهی در جهت } x = R_x = 0$$

$$\Delta_y = 0 \Rightarrow \text{واکنش تکیه‌گاهی در جهت } y = R_y \neq 0$$

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \text{واکنش از نوع لنگر} = M_z \neq 0$$

نوع دیگری از تکیه‌گاه دو غلطکی معروف به تکیه‌گاه برش آزاد می‌باشد که در شکل زیر نشان داده شده است. در حقیقت این مورد همان دوران یافته حالت سمت راست شکل قبلی است که به منظور آشنایی بیشتر ارائه شده است.



$$\Delta_x = 0 \Rightarrow R_x \neq 0$$

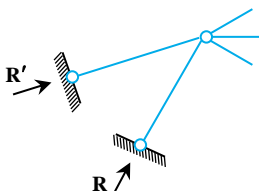
$$\Delta_y \neq 0 \Rightarrow R_y = 0$$

$$\theta_A = 0 \Rightarrow M_z \neq 0$$

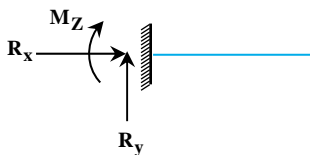
پس در حالت کلی برای این نوع تکیه‌گاه، دو نوع واکنش تکیه‌گاهی تعریف می‌شود، که در اشکال قبل نشان داده شده است.  $\Delta_y \neq 0$  به معنای آزاد بودن تغییر مکان در جهت  $y$  می‌باشد؛ زیرا تکیه‌گاه برش آزاد در برابر این نوع حرکت مقاومتی ندارد و واکنش نیرویی در جهت  $y$  برابر صفر خواهد شد ( $R_y = 0$ ).  $\Delta_x = 0$  به معنای بسته شدن درجه آزادی تغییر مکانی در جهت  $x$  است که باعث ایجاد یک واکنش تکیه‌گاهی در آن جهت خواهد شد ( $R_x \neq 0$ ).  $\theta_A = 0$  به معنای صفر بودن دوران نقطه  $A$  می‌باشد و در نتیجه درجه آزادی دورانی در نقطه  $A$  صفر خواهد بود، که این امر باعث ایجاد واکنش تکیه‌گاهی از نوع لنگر حول محور عمود بر صفحه ( $Z$ ) در این تکیه‌گاه می‌گردد.

### تکیه‌گاه میله‌ای

با استفاده از دو میله ناموازی و اتصال آنها به یکدیگر و به نقطه‌های ثابت (مطابق شکل روبرو) می‌توان نوع دیگری از تکیه‌گاه را تشکیل داد. در فصل مربوط به خرپاها، این مطلب بیان خواهد شد که اگر عضوی مطابق شکل مقابل قرار گیرد، فقط نیرویی در امتداد عضو ایجاد خواهد شد. در نتیجه در این نوع تکیه‌گاه، واکنش در امتداد میله خواهد بود. شکل روبرو نمونه‌ای از این تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.



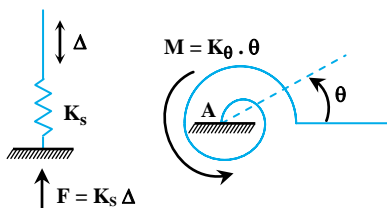
## تکیه‌گاه گیردار



اگر هر سه درجه آزادی موجود در صفحه (دو انتقالی و یک دورانی) را ببندیم، سه واکنش تکیه‌گاهی خواهیم داشت. به این تکیه‌گاه، اصطلاحاً گیردار گفته می‌شود. در شکل روبرو این تکیه‌گاه نشان داده شده است. در این شکل انتقال درجات  $X$ ,  $Y$  و همچنین دوران حول محور عمود بر صفحه صفر است و در نتیجه مطابق شکل واکنش‌های تکیه‌گاهی به وجود خواهد آمد.

## تکیه‌گاه نیمه گیردار

تکیه‌گاه‌هایی که تاکنون مطرح شد درجات آزادی را به طور کامل می‌بستند. امکان دارد در تکیه‌گاه‌ها درجه آزادی موردنظر به طور کامل در مقابل حرکت بسته نشده باشد و امکان مقدار مشخصی حرکت در آن نقطه داده شده باشد. در این حالت اصطلاحاً تکیه‌گاه نیمه‌گیردار به وجود می‌آید. در نظر بگیرید که در یک جهت خاص، یک فنر قرار داده شود. این فنر حرکت را به طور کامل نمی‌بندد، اما آن را محدود می‌کند. ثابت می‌شود که حرکت در این حالت متناسب است با نیروی اعمال شده در آن جهت. در نتیجه اگر درجه آزادی طوری بسته شود، که عکس‌العمل نیرویی به وجود آمده، متناسب با تغییر مکان ایجاد شده و یا عکس‌العمل لنگری حاصله متناسب با دوران ایجاد شده باشد، درجه آزادی ناقص بسته شده است. شکل روبرو دو نوع تکیه‌گاه از این دست را که به تکیه‌گاه‌های فنری معروفاند نشان می‌دهد. فرض بر این است که رفتار این فنرها الاستیک خطی است.

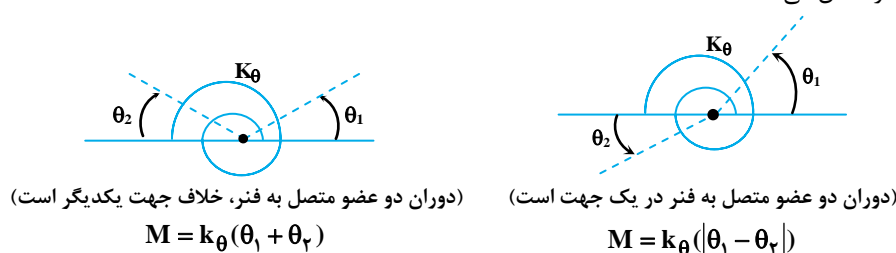


در حالت الاستیک خطی فرض می‌شود که بعد از برداشتن نیروهای وارده، فنر به حالت اولیه خود باز می‌گردد.

در قسمت راست شکل فوق لنگری در جهت مثلثاتی به فنر پیچشی  $A$  وارد شده است. با توجه به رابطه خطی در فنرها، در این حالت فنر با لنگری معادل  $K_\theta \theta$  که برابر همان لنگر اعمال شده است در خلاف جهت با آن مقابله می‌کند. چرخش متناسب با لنگر وارد شده است. همچنین نیروی انتقالی  $F$  متناسب است با جابه‌جایی انتقالی  $\Delta$ . نسبت تناسب در این حالت همان ثابت فنر انتقالی است. ثابت فنر انتقالی را معمولاً با اندیس  $S$  ( $K_S$ ) و ثابت فنر چرخشی را با اندیس  $\theta$  ( $K_\theta$ ) مشخص می‌کنند.

یکی از موارد کاربرد این مدل تکیه‌گاهی، مدل‌سازی رفتار خاک و پی است. در سازه‌های قابی اگر اتصالات توانایی انتقال لنگر را نداشته باشند، صلب در نظر گرفته می‌شوند و بالعکس اگر توانایی انتقال لنگر وجود نداشته باشد، مفصلی خواهند بود. در مواردی که اتصال قسمتی از لنگر را منتقل می‌کند، آن را «نیمه صلب» می‌گویند. در این حالت نیز از فنرهای الاستیک دورانی برای مدل‌سازی استفاده می‌شود.

در ترسیم فنر پیچشی، باید یک سر فنر به یک عضو و سر دیگر فنر به یک عضو دیگر متصل باشد و این دو عضو حتماً به هم مفصل خمشی شده باشند. اگر تغییر شکل سیستم به گونه‌ای باشد که دو عضو در خلاف جهت یکدیگر دوران کنند، از حاصل جمع دوران‌های دو عضو، برای محاسبه لنگر به وجود آمده در فنر استفاده می‌شود. در صورتی که دو عضو در یک جهت دوران کنند از قدر مطلق تفاضل دوران‌ها برای محاسبه لنگر به وجود آمده در فنر استفاده می‌شود. شکل زیر این دو حالت را نشان می‌دهد.

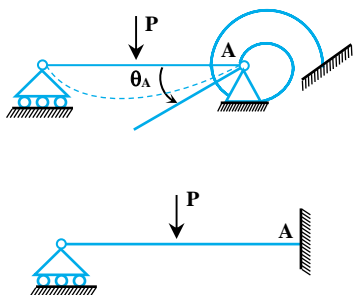


**تذکره:** واحد دوران در روابط این بخش رادیان می‌باشد. ( $\theta_1, \theta_2$ )

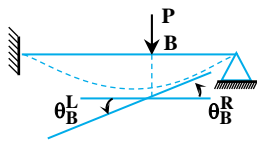
همانطور که قبلاً اشاره شد طبق شکل روبرو لنگر مقاوم متناسب با دوران ایجاد شده در نقطه  $A$  خواهد بود ( $M = K_\theta \theta_A$ ). لنگر مقاوم ایجاد شده در فنر پیچشی نیز در جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود.

حال اگر سختی فنر پیچشی به سمت بی‌نهایت میل کند طبق رابطه  $\theta_A = \frac{M}{K_\theta}$ ، با فرض مخالف صفر

بودن  $M, \theta_A$  به سمت صفر میل خواهد کرد که در این حالت تکیه‌گاه مفصلی  $A$ ، به تکیه‌گاه گیردار تبدیل می‌شود. (شکل روبرو). پس می‌توان گفت که تکیه‌گاه گیردار مانند یک تکیه‌گاه نیمه‌گیردار با فنر با سختی بی‌نهایت است.

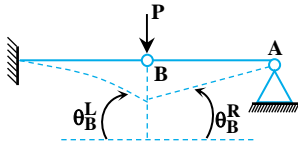


در ادامه برای درک بهتر عملکرد فنر پیچشی و تفاوت آن با اتصال صلب و مفصلی سه حالت در نظر گرفته می‌شود:



$$\theta_B^L = \theta_B^R$$

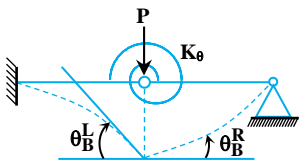
۱- بررسی اتصال صلب: اگر تیری مانند شکل مقابل در نظر بگیریم، به عنوان مثال عضو در زیر بار پیوسته است و می‌توان گفت اتصال زیر بار متمرکز صلب است و در منحنی خط چین تغییر شکل یافته تیر، پیوستگی وجود دارد. شیب چپ و راست هر نقطه از منحنی تغییر شکل در تمام نقاط از جمله زیر بار متمرکز با یکدیگر برابر می‌باشد.



$$\theta_B^L \neq \theta_B^R$$

۲- بررسی اتصال مفصلی: در این حالت در محل مفصل خمشی B دوران دو طرف مفصل خمشی با هم متفاوت می‌باشد. در حالت کلی هم به لحاظ مقدار عددی و هم به لحاظ جهت در دو طرف مفصل خمشی در منحنی تغییر شکل تیر تغییراتی داریم. جابه‌جایی دو طرف مفصل با یکدیگر برابر بوده اما شیب دو طرف مساوی نیست.

به دلیل اینکه دو طرف عضو AB مفصل وجود دارد، این عضو رفتار خرابایی دارد. به دلیل رفتار خرابایی المان AB، این عضو از بار P سهمی نمی‌برد و به صورت خط مستقیم صلب‌گونه تغییر شکل می‌دهد.



$$\begin{cases} \theta_B^L \neq \theta_B^R \\ |\theta_B^R| + |\theta_B^L| = \frac{M_s}{K_\theta} \end{cases}$$

۳- اتصال با فنر پیچشی: اگر دو طرف مفصل خمشی B، فنر پیچشی به کار رود، باز هم منحنی تغییر شکل تیر در دو طرف مفصل خمشی B ناپیوسته بوده و رابطه روبرو بین دوران‌های دو عضو در B و لنگر مقاوم فنر برقرار می‌باشد.

دوران‌های دو طرف فنر پیچشی در این شکل با هم متفاوت و مختلف‌الجهت هستند و جمع دوران دو طرف B با لنگر مقاوم فنر متناسب است.

به عبارت دیگر چنانچه جهت دوران مثبت را جهت مثلثاتی در نظر بگیریم،  $\theta_B^L$  به لحاظ علامتی، منفی خواهد بود و نهایتاً مقدارهای عددی  $\theta_B^L$  و  $\theta_B^R$  در این تیر با هم جمع می‌شوند. این موضوع در شکل در حالتی که دوران‌ها مخالف یکدیگر هستند مشهود می‌باشد. حال اگر سختی فنر به سمت بی‌نهایت میل کند، طرف راست معادله به سمت صفر میل کرده و شیب دو طرف برابر می‌شود، که نشانه اتصال صلب خواهد بود.

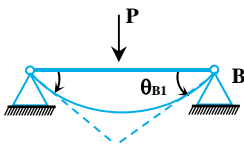
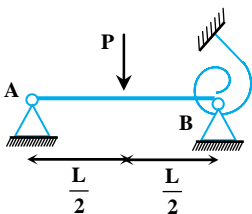
نکته مثال ۱: عکس‌العمل قائم کدام تکیه‌گاه بیشتر است؟ ( $EI = \text{const}$ )

B (۱)

A (۲)

(۳) برابر هستند.

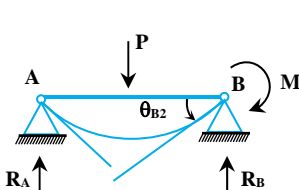
(۴) به سختی فنر ربط دارد.



پاسخ: گزینه «۱» اگر فنر وجود نداشت تیر در نقطه B،

مطابق شکل روبرو در جهت مثلثاتی دوران می‌کرد.

حال که فنر پیچشی در B وجود دارد، در برابر دوران نقطه B مقاومت می‌کند و بسته به سختی فنر، دوران B را کم می‌کند. پس می‌توان با یک لنگر متمرکز اثر فنر پیچشی را در B نشان داد که باید دوران B را کم کند. پس جهت لنگر مقاوم فنر به صورت شکل زیر نشان داده می‌شود.

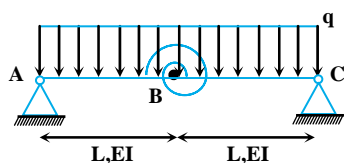


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{-PL}{2} - M + LR_B = 0 \Rightarrow R_B = \frac{M}{L} + \frac{P}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P = 0 \Rightarrow R_A = \frac{P}{2} - \frac{M}{L}$$

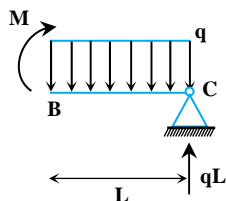
همان‌طور که مشخص است  $R_B > R_A$  است و گزینه ۱ صحیح است.

**مثال ۲:** اگر سختی فنر پیچشی  $\frac{2EI}{L}$  باشد، مقدار تغییر زاویه در دو طرف تیر در نقطه B پس از بارگذاری چقدر است؟



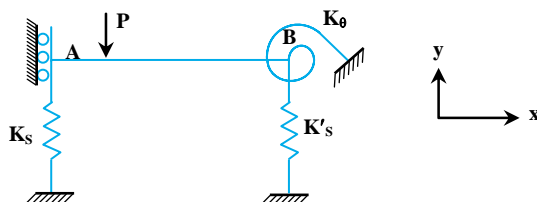
$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{qL^3}{2EI} \\ (2) \quad & \frac{qL^3}{4EI} \\ (3) \quad & \frac{qL^3}{EI} \\ (4) \quad & \frac{2qL^3}{EI} \end{aligned}$$

**پاسخ:** گزینه «۲» در این موارد باید لنگر در محل فنر حساب شود و سپس براساس رابطه بین لنگر و سختی فنر پیچشی، مقدار دوران در نقطه B حساب شود. در مورد محاسبه لنگر در یک سازه در فصل‌های بعدی مطالب بیشتری گفته می‌شود. اگر مقطعی در نقطه B در نظر گرفته و سمت چپ آن را کنار بگذاریم، خواهیم داشت:

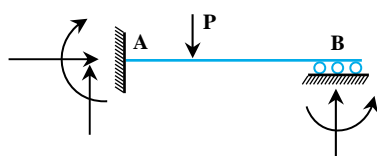


$$\begin{aligned} + \sum M_B = 0 & \Rightarrow -\frac{qL^2}{2} + qL^2 - M = 0 \Rightarrow M = \frac{qL^2}{2} \\ M = k\Delta\theta & \Rightarrow \frac{qL^2}{2} = \frac{2EI}{L}\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{qL^3}{4EI} \end{aligned}$$

**مثال ۳:** اگر سختی فنرها به سمت بی‌نهایت میل کند، تیر زیر به چه فرم، مدل خواهد شد؟



**پاسخ:** با میل کردن سختی هر فنر در یک گره، می‌توان گفت که آن درجه آزادی در آن گره حالت گیردار پیدا می‌کند. پس برای حل این گونه مسائل کافی است فنر را حذف کرده و آن درجه را گیردار کنیم. با میل کردن سختی فنر انتقالی در نقطه A به سمت بی‌نهایت، درجه آزادی این نقطه در راستای y بسته شده و یک واکنش نیرویی قائم ایجاد می‌شود. تکیه‌گاه برش آزاد هم در راستای x واکنش نیرویی و یک واکنش لنگری دارد که با ترکیب واکنش نیرویی قائم، عملاً دو واکنش نیرویی و یک واکنش لنگری داریم. پس در نقطه A تکیه‌گاه گیردار خواهیم داشت. در نقطه B نیز با میل کردن سختی فنر خطی به بی‌نهایت، درجه آزادی انتقالی در راستای y صفر شده و در نتیجه واکنش نیرویی خواهیم داشت. با میل کردن سختی فنر پیچشی به بی‌نهایت، واکنشی از نوع گشتاوری پدید می‌آید که در حقیقت، از بسته شدن درجه آزادی دورانی فنر پیچشی حاصل شده است.



پس در نقطه B، تکیه‌گاه دوغلتکی از نوع انتقال آزاد داریم. در شکل مقابل، مدل تیر پس از میل کردن سختی فنرها به بی‌نهایت نشان داده شده است.

## پایداری سازه‌ها

پایداری سازه به حالتی گفته می‌شود که نیروهای سازه در حال تعادل بوده و سازه حالت ساکن دارد. تعادل سازه در حالت‌های یک، دو و سه بعدی قابل بررسی است. در فضای دوبعدی یک سازه وقتی در حال تعادل و یا پایدار است که سه معادله زیر که معادلات تعادل نامیده می‌شوند، برقرار باشند:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M = 0$$

پایداری یک سازه در دو قسمت بررسی می‌شود. اول اینکه سازه مدنظر باید تحت هر نوع بارگذاری خارجی در حال تعادل باشد. دوم اینکه علاوه بر تعادل کلی، باید با بررسی تمام اجزای داخلی ثابت شود که سازه به لحاظ داخلی نیز پایدار است و این که هریک از اجزای آن نسبت به هم بدون حرکت باشند. سازه‌ای که در حال تعادل و پایدار نباشد، اصطلاحاً ناپایدار خوانده می‌شود. بسته به حالت سازه، انواع ناپایداری می‌تواند اتفاق بیفتد.

### انواع ناپایداری

۱- **ناپایداری ایستایی:** اگر درجه نامعینی سازه‌ای منفی شود و اصطلاحاً قید لازم برای حفظ تعادل وجود نداشته باشد، سازه ناپایداری ایستایی تلقی می‌شود. ناپایداری ایستایی می‌تواند در دو شکل داخلی (به لحاظ تأمین قیدهای داخلی) و یا خارجی (به لحاظ کمبود واکنش‌های تکیه‌گاهی) اتفاق بیفتد. شکل زیر نمونه‌ای از سازه با ناپایداری ایستایی است.

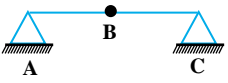
سازه دارای درجه نامعینی ۱- بوده و ناپایدار است.

(در مورد بحث نامعینی در مباحث آتی خواهید خواند.)



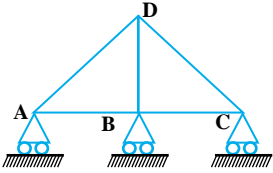
۲- ناپایداری هندسی داخلی: در این حالت درجه نامعینی مثبت یا صفر است اما هندسه

داخلی به گونه‌ای است که پایداری تأمین نمی‌شود. به طور مثال در شکل روبرو سازه ناپایدار است. (یک نیروی قائم در B می‌تواند پایداری را به هم بزند.)

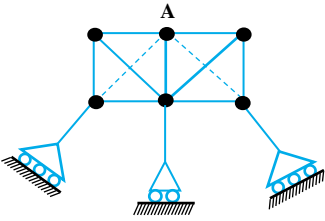


۳- ناپایداری هندسی خارجی: این حالت به دلیل وضعیت نامناسب تکیه‌گاه‌ها اتفاق می‌افتد که دو حالت دارد:

الف) وقتی تمام عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی موازی هستند در این حال سازه در جهت عمود بر واکنش‌ها می‌تواند حرکت کند. (مانند شکل روبرو)



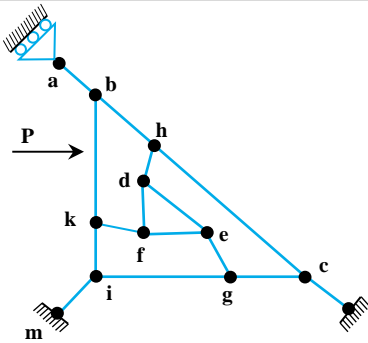
ب) وقتی تمام عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از یک نقطه بگذرند. در این حال سازه به لحاظ چرخش حول نقطه تقارب ناپایدار است و اگر امتداد بار خارجی از مرکز تقارب نگذرد، سازه حول آن نقطه می‌چرخد. شکل مقابل نمونه‌ای از سازه با این نوع ناپایداری را نشان می‌دهد. در شکل مقابل سه واکنش تکیه‌گاهی در نقطه A همدیگر را قطع می‌کنند و متقارب هستند.



**نتیجه مهم:** می‌توان گفت وقتی یک سازه پایدار است که اولاً درجه نامعینی آن منفی نباشد و ثانیاً ناپایداری هندسی داخلی نداشته باشد و واکنش‌های تکیه‌گاهی آن موازی یا متقارب نباشند.

پس به طور کلی می‌توان گفت شرط پایداری خارجی سازه در فضای دوبعدی این است که سه واکنش تکیه‌گاهی غیرموازی و غیرمتقارب داشته باشیم. این شرط در فضای سه‌بعدی به شش واکنش غیرموازی و غیرمتقارب تبدیل می‌شود.

**مثال ۴:** بار P در کدام نقطه وارد شود تا سیستم شکل زیر تحت بارگذاری پایدار باشد؟



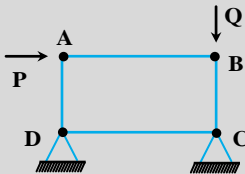
پاسخ: واکنش‌های تکیه‌گاهی همدیگر را در تقاطع امتداد پاره خط mi و ac قطع می‌کنند.

بار P باید از محل برخورد واکنش‌های تکیه‌گاهی بگذرد تا در این حالت سازه پایدار باشد.

**تذکره ۲:** اگر در بحث پایداری، یک دسته نیرو یا یک نیرو یافت شود که سیستم تحت آن بارگذاری، ناپایدار شود، می‌توان گفت که به طور کلی سیستم ناپایدار است.

برای یک سیستم پایدار، نیروهای داخلی اعضا از هر روشی که حساب شود، منحصر به فرد هستند.

طبق تذکره قبل مثلاً برای عضو AB در خرپای زیر، عدد منحصر به فردی (با نوشتن معادله تعادل در A و B) به دست نمی‌آید و در نتیجه سیستم ناپایدار است.

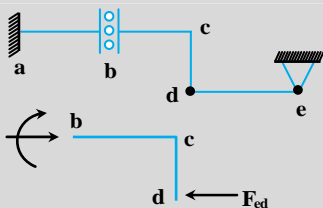


$$\text{در گره A} \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = -P$$

$$\text{در گره B} \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

ناپایداری قسمتی از یک سازه به منزله ناپایداری کل سیستم سازه است.

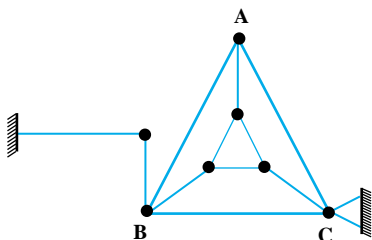
برای مثال در بررسی پایداری سازه‌ی روبرو اگر قطعه bcd را جداگانه در نظر بگیریم:



قطعه de دو سر مفصل است که فقط نیروی محوری در امتداد de را منتقل می‌کند و در ناپیوستگی b، نیروی محوری و لنگر خمشی منتقل می‌شود. حال با کمی دقت متوجه می‌شویم که قطعه bcd تحمل بار قائم در d را ندارد و ناپایدار است و در نتیجه طبق تذکره قبل کل سازه ناپایدار است.

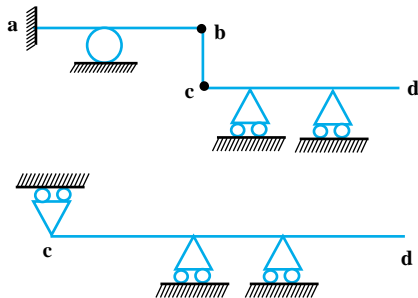


**مثال ۵:** پایداری سازه مقابل را بررسی کنید. (قسمت ABC متقارن می‌باشد).



**پاسخ:** به دلیل تقارن سازه ABC، سه میله‌ای که دو خرپای ساده را به هم متصل می‌کنند متقارب هستند و این ناحیه از کل سازه ناپایدار می‌باشد که به این ناپایداری، ناپایداری هندسی می‌گوئیم.

**مثال ۶:** حالت پایداری سیستم مقابل را بررسی کنید.



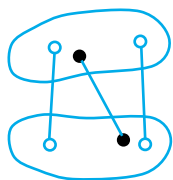
**پاسخ:** برای بررسی پایداری سازه، قطعه cd را جدا می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که این قطعه تحمل بارهای افقی را ندارد و در نتیجه این قطعه ناپایدار و کل سیستم ناپایدار است. (میله cb خرابایی است و فقط نیروی محوری را منتقل می‌کند).

## بررسی پایداری نسبی سازه‌های دوبعدی

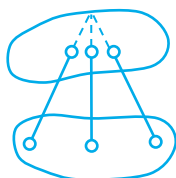
برای بررسی پایداری بعضی از سازه‌ها می‌توان از تفکیک سازه به سازه‌های کوچکتر استفاده کرد. در این حالت پس از تفکیک سازه اصلی، پایداری هر یک از سازه‌های کوچکتر بررسی می‌شود و در صورت پایدار بودن، وضعیت هر یک نسبت به دیگری بررسی می‌شود. مطالب بیان شده در این قسمت به بررسی وضعیت پایدار دو جسم و یا سه جسم نسبت به هم می‌پردازد. این مطالب کمک می‌کند تا تشخیص پایداری سازه به نحو بهتری انجام شود. در این قسمت به این موضوع پرداخته می‌شود که در فضای دوبعدی چند سازه مختلف چگونه به هم متصل شوند که سازه جدید حالت پایدار داشته باشد. این مبحث با مفاهیم معادلات تعادل قابل بیان است که در ادامه ارائه می‌شود. این قسمت برای حالت‌های مختلف و برای اتصال دو یا سه سازه مطرح می‌شود.

### پایداری نسبی دو سازه

۱- اگر دو سازه پایدار حداقل به وسیله سه میله غیرمتقارب و غیرموازی به هم وصل شوند، یک مجموعه پایدار را به وجود می‌آورند. حالت اتصال دو سازه پایدار با سه میله موازی به معنای تقارب این سه میله در بی‌نهایت است که ناپایداری سیستم را به همراه دارد.



اتصال پایدار دو جسم پایدار



اتصال ناپایدار دو سازه پایدار

۲- حالت دیگری از اتصال پایدار بین دو سیستم پایدار توسط یک مفصل مشترک و یک میله می‌باشد، به شرطی که امتداد میله از مفصل مشترک نگذرد. اشکال روبرو این مطلب را نشان می‌دهند.

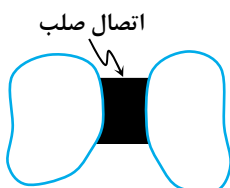


اتصال پایدار



اتصال ناپایدار

۳- از دیگر حالات اتصال دو سازه پایدار و تشکیل یک سازه واحد پایدار، این است که دو جسم به کمک یک اتصال صلب به هم متصل شوند.

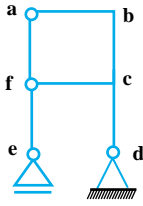


اتصال صلب

**تذکر ۳:** اگر اتصال دو جسم پایدار با استفاده از یکی از سه روش مطرح شده (با توجه به محدودیت‌ها) صورت گرفته باشد می‌گوییم ترکیب پایدار است.

سازه حتماً پایدار = حداقل ۳ مجهول تکیه‌گاهی مناسب + ترکیب پایدار

**مثال ۷:** پایداری قاب روبرو را بررسی نمایید.



**پاسخ:** سازه به لحاظ تعداد و نوع تکیه‌گاه مشکلی ندارد و به لحاظ خارجی پایدار است. قطعه‌ی  $abcfg$  که قطعه‌ی پایداری است با میله‌های  $af$  و  $ef$  که در فضای دو بعدی المان‌های پایدار هستند به واسطه‌ی سه مفصل  $a$  و  $b$  و  $c$  به یکدیگر متصل شده‌اند. این مفاصل در یک راستا بوده و باعث ناپایداری داخلی و در مجموع ناپایداری سازه می‌شوند.

**نکته ۱:** وجود عضو  $fe$  دو نیرویی در هر سازه‌ای باعث ناپایداری می‌شود چون این عضو قادر به تحمل نیروی افقی نمی‌باشد.

### پایداری نسبی ۳ سازه پایدار

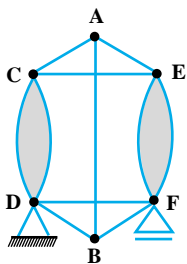
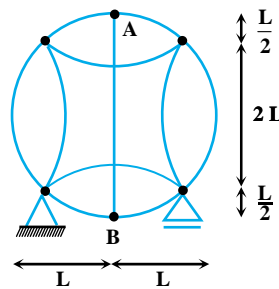
یک مدل اتصال سه سازه پایدار وقتی حاصل می‌شود که با ۳ مفصل غیرواقع بر یک راستا به هم متصل شده باشند. قسمت اول شکل روبرو گویای این مطلب است.

مدل دیگر اتصال سه جسم پایدار و تشکیل یک سیستم پایدار این است که هر یک از مفاصل مطرح شده، با دو میله جایگزین شود. (قسمت دوم شکل مقابل)؛ در این صورت، اگر محل‌های برخورد دو به دوی این میله‌ها (مفصل موهومی) بر یک راستا نباشند، سازه‌ها نسبت به هم پایدار خواهند بود. اگر نقاط برخورد دوبه‌دوی میله‌ها در یک راستا باشند، سازه ناپایدار آبی تلقی می‌شود؛ از حالات ناپایداری اتصال سه جسم پایدار، این است که سه جسم با ۶ میله به هم وصل شوند، که دو به دو با هم موازی هستند. این نوع اتصال باعث قرارگیری سه مفصل موهومی در یک راستا در بی‌نهایت می‌باشد.

مفاصل موهومی  $a$  و  $b$  و  $c$  در شکل قبلی در یک راستا واقع نمی‌باشند و در نتیجه سیستم پایداری را با میله‌ها به وجود آورده‌اند.

نحوه دیگر اتصال سه جسم پایدار، اتصال آنها به کمک اتصالات صلب است که دوبه‌دو با یکدیگر اتصال صلب داشته باشند. هر اتصال صلب توانایی تحمل نیروی برشی، محوری و گشتاور خمشی را دارد. اگر اتصال سه جسم پایدار مطابق حالات مطرح شده در قبل باشد (با توجه به محدودیت‌ها) می‌توان گفت که سیستم پایدار است. اگر اتصال سه سیستم غیر از این موارد بود، دلیلی برای ناپایداری سیستم نداریم و باید با روش‌های دیگری پایداری سیستم بررسی شود.

**مثال ۸:** پایداری سازه‌ی زیر را بررسی کنید.



**پاسخ: روش اول:** همواره یک المان خمیده دو سر مفصل را به شرط عدم بارگذاری روی آن می‌توان با یک

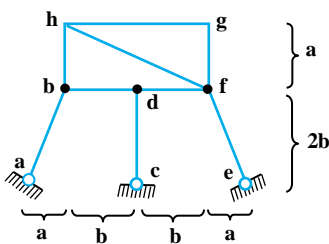
میله دو سر مفصل جایگزین کرد. پس می‌توان سازه را به صورت شکل روبرو مدل کرد.

المان  $AC$  با توجه به تقارن سازه با  $BF$  و المان  $AE$  با  $BD$  و المان  $CE$  با  $DF$  موازی هستند و سه جسم پایدار  $AB$  و  $EF$  و  $CD$  (قسمت هاشورخورده) با ۶ میله که دوبه‌دو با هم موازی هستند به هم وصل شده‌اند؛ پس سیستم ناپایدار است و نیرویی برای  $AB$  تعریف نمی‌شود. ۶ میله دو به دو موازی، تشکیل ۳ مفصل موهومی در بی‌نهایت خواهند داد که به لحاظ تئوری در یک راستا قرار داشته و سازه را ناپایدار می‌کند.

**روش دوم:** اجسام  $ACE$  و  $DBF$  توسط سه میله موازی ( $AB, EF, CD$ ) به هم متصل شده‌اند که طبق نکات ارائه شده در مبحث پایداری و اتصال دو جسم به راحتی می‌توان گفت که این ترکیب ناپایدار است.

**تذکره ۴:** اجسامی مانند  $EF$  و  $CD$  را می‌توان در تحلیل به صورت میله در نظر گرفت.



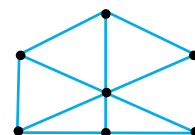
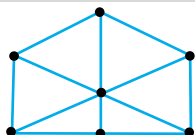


کج مثال ۹: وضعیت پایداری قاب را بررسی نمایید.

پاسخ:  در این سیستم، ۳ واکنش تکیه‌گاهی وجود دارد ولی با توجه به هندسه قاب، این عکس‌العمل‌ها متقارب هستند و طبق مباحث قبل، تقارب عکس‌العمل‌های سازه، ناپایداری قاب را به فرم ناپایداری خارجی ایجاد می‌کند. لازم به ذکر است، این قاب تحت بار منفردی که از محل تقاطع امتداد خطوط  $ab$  و  $cd$  و  $ef$  می‌گذرد، پایدار خواهد بود.

اگر برای یک سازه نامعین استاتیکی بتوان حداقل یک سازه معین استاتیکی پایدار استخراج کرد، سازه نامعین اولیه پایدار خواهد بود. این امر با حذف المانی از سازه و یا حذف درجه آزادی خاصی در سیستم و یا هر دوی این موارد در سازه نامعین امکان‌پذیر می‌باشد.

کج مثال ۱۰: آیا سازه زیر پایدار است؟

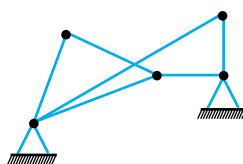


پاسخ:  اگر یک میله از خرپای آزاد به صورت زیر حذف کنیم سازه‌ی زیر به دست می‌آید.

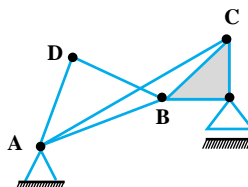
سازه بالا، از روش مثلث به مثلث به وجود آمده است و سیستم پایدار و معین (چون به روش مثلث به مثلث به دست آمده) است. پس سازه نامعین اصلی هم پایدار است. روش مثلث به مثلث، در تحلیل خرپاها به آن پرداخته می‌شود، ولی به این صورت است که خرپایی که از این روش به دست آید پایدار است.

اگر در یک سازه معین و پایدار بتوان با حذف یا اضافه یک المان یا حذف و اضافه کردن یک درجه آزادی خاص سازه معین دیگری به وجود آورد، سازه جدید حتماً پایدار است.

کج مثال ۱۱: پایداری سازه زیر را بررسی نمایید.



پاسخ:  اگر خرپایی به صورت زیر در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



خرپای به دست آمده از روش مثلث به مثلث به وجود آمده است. به عبارت دیگر اگر مثلث پایدار هاشورزده را در نظر بگیریم، خرپا با دو میله  $CA$  و  $BA$  به مفصل  $A$  متصل شده است و در ادامه با دو میله  $AD$  و  $BD$  به مفصل  $D$  گسترش می‌یابد. پس از نظر داخلی خرپا پایدار است. در روش مثلث به مثلث، چون به میله اضافی برخورد نکردیم، سازه از نظر داخلی معین است و چون ۳ واکنش تکیه‌گاهی دارد، به لحاظ خارجی هم معین است. به دلیل متقارب نبودن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، خرپا به لحاظ خارجی پایدار است. پس در مجموع خرپای مطرح شده معین و پایدار است. حال اگر میله  $BC$  را حذف کنیم و درجه آزادی انتقالی تکیه‌گاه مفصل متحرک را نیز ببندیم، خرپای صورت سؤال به وجود می‌آید. به دلیل معین بودن، این خرپا حتماً پایدار می‌باشد.

## عضوهای خاص

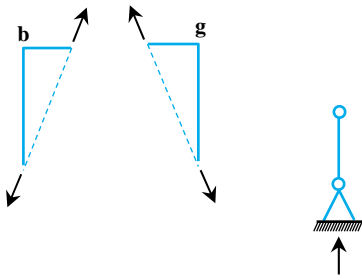
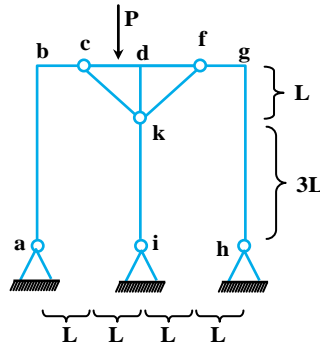
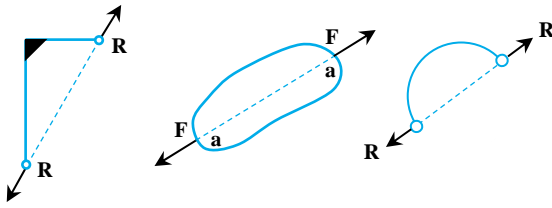
در بعضی موارد، بعضی از اعضای یک سازه به گونه‌ای هستند که می‌توان حدس زد که امتداد نیروها به چه صورتی است و به این طریق قضاوت بهتری از رفتار المان داریم و می‌توانیم از تعداد مجهولات کم کنیم. در ادامه عضوهای دو نیرویی و سه نیرویی توضیح داده می‌شوند که جزء موارد خاص هستند که می‌توانند در بررسی تعادل و پایداری، نامعینی و تعیین کنش‌های موجود در سازه مورد استفاده قرار گیرند.

## عضو دو نیرویی

سیستمی را در نظر بگیرید که فقط تحت اثر دو نیرو واقع شده باشد. شرط لازم و کافی برای تعادل این سیستم، این است که دو نیرو هم‌راستا، برابر و مختلف‌الجهت باشند. عضو خرابایی حالت خاصی از عضو دو نیرویی می‌باشد.

اعضای یکپارچه‌ای که در دو انتها دارای مفصل هستند و در هیچ نقطه به جز دو سر عضو نیرو وارد نمی‌شود، جزء عضوهای دو نیرویی هستند. در این حالت می‌توان گفت که برای تعادل دو نیروی مساوی در امتداد خط واصل دو نقطه انتهایی عضو و به صورت مختلف‌الجهت نیاز است.

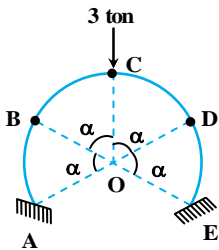
**مثال ۱۲:** واکنش قائم تکیه‌گاه  $a$  چقدر است؟ ( $P$  در وسط  $cd$  وارد شده است.)



پاسخ: اعضای  $abc$  و  $fg$  دو نیرویی هستند و امتداد این نیروها مطابق شکل است.

عضو  $ki$  هم یک عضو دو سر مفصل است و واکنش تکیه‌گاه  $i$  به صورت روبرو است: این ۳ واکنش بنا به تقارن سازه همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و سیستم ناپایداری ایجاد می‌کنند؛ در نتیجه واکنش قائم تکیه‌گاه  $a$ ، محاسبه نمی‌شود. اگر  $P$  از محل تقاطع عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی می‌گذشت، سازه تحت این بارگذاری پایدار بود.

**مثال ۱۳:** قابی به صورت دایره به شعاع  $2\text{ m}$  مفروض است. اگر  $\alpha$  برابر با  $6^\circ$  باشد، میزان لنگر خمشی تکیه‌گاه  $A$  چقدر است؟



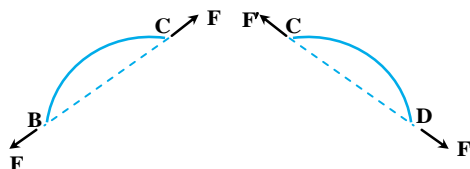
$$3\sqrt{3} \text{ ton.m (1)}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ton.m (2)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ ton.m (3)}$$

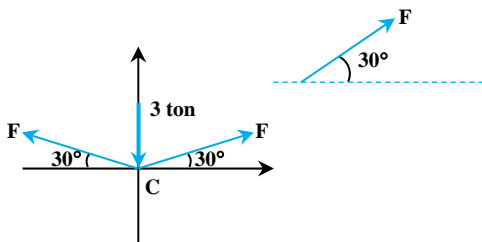
$$1 \text{ ton.m (4)}$$

پاسخ: گزینه «۱» به دلیل وجود مفصل در دو انتها، اعضای  $BC$  و  $CD$ ، دونیرویی هستند، پس داریم:



با توجه به تقارن سازه  $F = F'$  می‌باشد. حال با نوشتن تعادل قائم در گره  $C$  داریم:

(دقت شود که مثلث  $OBC$  متساوی‌الساقین است. زاویه  $F$  با افق  $30^\circ$  می‌باشد.)



$$C \text{ در گره } \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} + \frac{F'}{2} = 3 \text{ ton}, F = F' \Rightarrow F = 3 \text{ ton}$$