



مدرسایان شریف

فصل اول

«مبانی و قضایای اولیه مدارهای الکتریکی و قضایای تونن و نورتن»

جریان

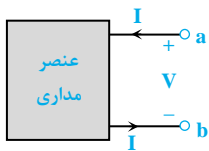
حرکت الکترون‌ها در یک مسیر مشخص، باعث ایجاد جریان الکتریکی می‌شود. به طور خلاصه مقدار بار جابجا شده در واحد زمان را جریان می‌نامند. در صورتی که dq مقدار بار مشخصی باشد که در زمان dt از سطح مقطع فرضی یک رسانا عبور می‌کند، جریان الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

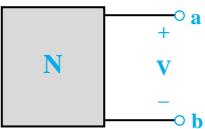
حال اگر زمان حرکت بارها از t_1 تا t_2 در نظر گرفته شود، مقدار بار جابجا شده در این بازه زمانی برابر $q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$ خواهد بود. یکای جریان در سیستم SI، آمپر (A) است و یک آمپر جریان، طبق تعریف، معادل با جابجایی باری به اندازه یک کولن در هر ثانیه می‌باشد. در صورتی که جهت و اندازه جریان با زمان تغییر نکند، جریان فوق را جریان مستقیم (DC) می‌نامند و مقدار آن را با $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ نمایش می‌دهند.

ولتاژ

قبل از تعریف ولتاژ، عنصر مداری را به صورت یک جسم که دارای دو پایانه است، تعریف می‌کنیم. مطابق شکل مقابل فرض می‌کنیم جریان I به پایانه a عنصر مداری وارد شود و پس از گذشتن از آن، از پایانه b خارج شود. جهت برقرار ساختن چنین جریانی باید مقداری انرژی مصرف کنیم (کار انجام دهیم). طبق تعریف ولتاژ دو سر یک عنصر مداری، انرژی مورد نیاز برای جابجایی بار مثبت ۱ کولن از یک پایانه تا پایانه دیگر (a تا b) می‌باشد. یکای ولتاژ، ولت (V) است.



تذکره ۱: در تعریف ولتاژ، پلاریته آن بسیار مهم است. اگر یک شبکه با پایانه‌های a و b موجود باشد، برای بدست آوردن ولتاژ بین پایانه‌ها، ولتاژ پایانه مثبت منهای ولتاژ پایانه منفی می‌شود، لذا داریم:

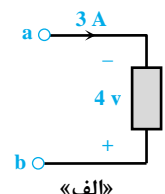
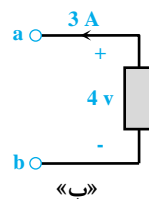
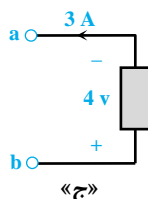
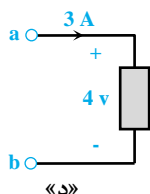


$$V = V_a - V_b = V_{ab} = -V_{ba}$$

تذکره ۲: رابطه ولتاژ برحسب انرژی به صورت $V = \frac{W}{q}$ می‌باشد که W انرژی مورد نیاز برای جابجایی بار q در دو سر عنصر مداری است.

توان

توان در واقع آهنگ مصرف انرژی است. تعریف توان جذب شده و یا تولید شده توسط هر عنصر مداری برحسب ولتاژ و جریان آن، حتماً باید با مشخص شدن جهت جریان و پلاریته ولتاژ دو سر آن صورت گیرد. رابطه توان در هر عنصر که ولتاژ دو سر آن V و جریان عبوری از آن I است، به صورت $P = V \cdot I$ تعریف می‌گردد. واحد توان ژول بر ثانیه و یا همان وات (w) است. بعضی عناصر مداری توان مصرف می‌کنند که به آنها عناصر غیرفعال یا پسیو می‌گوییم (مانند مقاومت) و بعضی عناصر، توان تولید می‌کنند که به آنها عناصر فعال یا اکتیو می‌گوییم (مانند منابع ولتاژ و جریان مستقل، البته گاهی اوقات این عناصر هم به صورت مصرف کننده عمل می‌کنند). اگر مقدار توان در محاسبات عددی منفی شود، می‌گوییم آن عنصر توان تولید می‌کند و اگر مقدار توان مثبت بدست آید، می‌گوییم آن عنصر توان جذب (تلف) می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید:



در شکل‌های «الف» و «ب» عناصر توان تولید می‌کنند ($P = -4 \times 3 = -12 \text{ W}$) و در شکل‌های «ج» و «د» عناصر توان تلف می‌کنند ($P = +4 \times 3 = +12 \text{ W}$).

نکته ۱: هرگاه جریان به ترمینال مثبت (منظور ترمینال ولتاژ عنصر است) المان مداری وارد و یا از ترمینال منفی آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P = +V \cdot I$ در نظر گرفته می‌شود و هرگاه جریان به ترمینال منفی المان مداری وارد و یا از ترمینال مثبت آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P = -V \cdot I$ بیان می‌گردد.

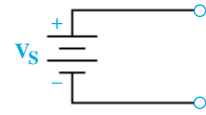
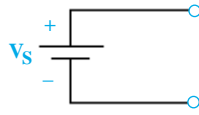
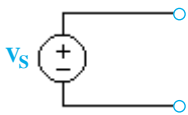
تذکره ۳: توان هر عنصر مداری برحسب انرژی به صورت $P = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ نیز تعریف می‌شود.

قضیه پایستگی توان

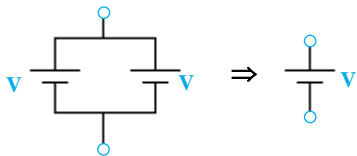
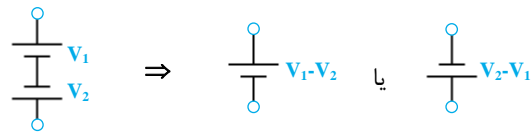
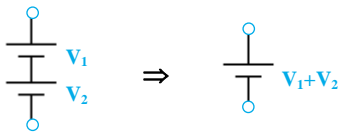
طبق قضیه پایستگی توان، مجموع توان مصرفی عناصر مختلف مدار، برابر صفر است. به عبارت دیگر مجموع توان تولیدی عناصر اکتیو مدار برابر مجموع توان مصرفی عناصر پسیو مدار است. دقت داشته باشید اگر توان مصرفی مداری مورد سؤال باشد بطور پیش فرض باید مجموع توان مصرفی عناصر پسیو مدار را محاسبه و به عنوان پاسخ در نظر گرفت.

منبع ولتاژ مستقل (نابسته)

منبع ولتاژ مستقل یا نابسته اولین عنصر مداری است که بررسی می‌کنیم و معمولاً تولیدکننده توان می‌باشد. در تحلیل مدارهای الکتریکی منابع ولتاژ مستقل اغلب بصورت ایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند. مقدار ولتاژ یک منبع ولتاژ مستقل ایده‌آل، صرف‌نظر از جریان آن عددی ثابت است و توان تولیدی آن محدودیتی ندارد. منابع ولتاژ مستقل DC را به یکی از سه صورت زیر نمایش می‌دهیم و باید توجه شود که چون منبع ولتاژ معمولاً تأمین‌کننده توان مصرفی مدار است، معمولاً جریان از پایانه مثبت آن خارج می‌شود تا طبق تعریف توان، مقدار توان منبع ولتاژ عددی منفی بدست آید.

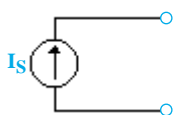


تذکره ۴: در صورت سری شدن دو منبع ولتاژ مستقل در صورتی که پلاریته‌های غیرهمنام در کنار هم باشند، دو منبع با یکدیگر جمع و در غیر این صورت دو منبع از یکدیگر کم می‌شوند.



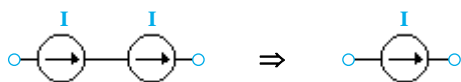
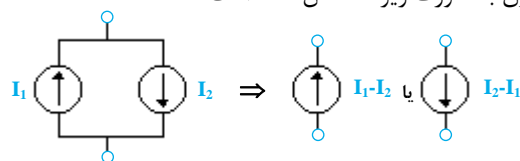
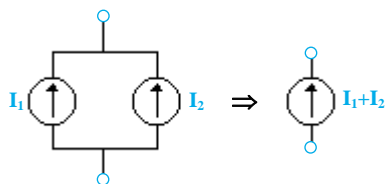
تذکره ۵: موازی شدن دو منبع ولتاژ مستقل با مقادیر مختلف از نظر تئوری مدارهای الکتریکی غیرمجاز و غلط است و این مورد فقط در صورت یکی بودن مقادیر و پلاریته آنها امکان‌پذیر است و معادل آنها به صورت مقابل بدست می‌آید:

منبع جریان مستقل (نابسته)



دومین عنصر مداری که تعریف می‌کنیم، منبع جریان مستقل یا نابسته است. این منبع نیز مستقل از ولتاژ دو سر خود، جریان ثابتی دارد. معمولاً منبع جریان مستقل هم مثل منبع ولتاژ مستقل در تحلیل مدارهای الکتریکی، ایده‌آل در نظر گرفته می‌شود و از لحاظ تئوری، می‌تواند توان نامحدودی تولید کند. منبع جریان مستقل DC را به شکل مقابل نمایش می‌دهیم:

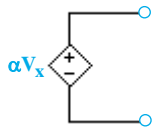
تذکره ۶: در صورت موازی شدن دو یا چند منبع جریان مستقل، اگر منابع جریان هم‌جهت باشند، با هم جمع می‌شوند و در غیر این صورت از هم کم خواهند شد. موارد فوق به صورت زیر مشخص شده است:



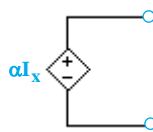
تذکره ۷: لازم به ذکر است که برآیند دو منبع جریان سری با مقادیر و جهت‌های یکسان، برابر با یکی از آنها بوده و در صورت مساوی نبودن مقادیر یا جهت آنها، سری کردن آنها غلط است.

منابع جریان و ولتاژ وابسته (کنترل شونده)

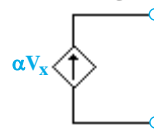
دو منبع تأمین‌کننده انرژی که قبلاً بررسی شد، منابع مستقل بودند و جریان و یا ولتاژ آنها به هیچ نقطه‌ای از مدار بستگی نداشت. اما منابع ولتاژ و جریان وابسته نیز در ترکیب مدارها کاربرد دارند و مقادیر ولتاژ یا جریان این منابع، به جریان یا ولتاژ یک عنصر دیگر از مدار بستگی دارد. منابع وابسته برای این که با منابع مستقل اشتباه نشوند، به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.



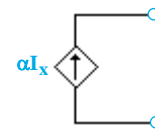
(منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ)



(منبع ولتاژ وابسته به جریان)



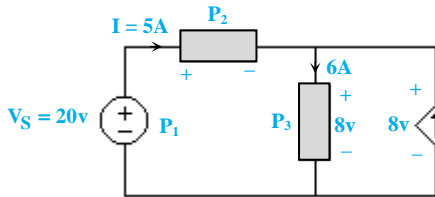
(منبع جریان وابسته به ولتاژ)



(منبع جریان وابسته به جریان)

مثال ۱: در مدار شکل زیر توان هر یک از عناصر را پیدا کنید.

پاسخ:



$$\begin{cases} P_1 = -20 \times 5 = -100 \text{ W} & , & P_2 = 12 \times 5 = 60 \text{ W} \\ P_3 = 8 \times 6 = 48 \text{ W} & , & P_4 = (-8)(0.2I) = -8 \times 0.2 \times 5 = -8 \text{ W} \end{cases}$$

منبع ولتاژ مستقل و منبع جریان وابسته هر کدام به ترتیب ۱۰۰ و ۸ وات توان تولید و دو عنصر مداری دیگر هر دو توان مصرف می‌کنند. توجه شود که اندازه مجموع توان تولید شده با اندازه مجموع توان مصرفی برابر است. بنابراین جمع توان‌ها در یک شبکه صفر است.

مقاومت و قانون اهم

طبق قانون اهم هرگاه دمای یک رسانای فلزی ثابت باشد، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر رسانا به شدت جریانی که از آن عبور می‌کند، مقدار ثابتی است که این نسبت را مقاومت الکتریکی رسانا می‌نامیم. مقاومت از جمله عناصر غیرفعال (پسیو) مدار است. یکای مقاومت الکتریکی در SI، ولت بر آمپر است که اهم نامیده شده و با Ω نشان داده می‌شود.

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \text{قانون اهم}$$

با توجه به قانون اهم، جریان یک مقاومت و توان مصرفی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:



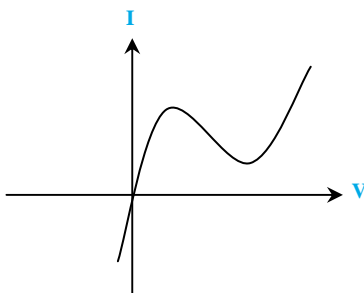
$$V = V_A - V_B, \quad I = \frac{V}{R}, \quad P = V \cdot I = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

توجه کنید در صورتی که $R > 0$ باشد، توان مقاومت همواره مثبت خواهد بود که با مفهوم مصرف‌کننده بودن مقاومت همخوانی دارد.

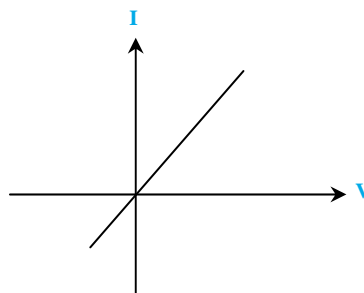
انواع مقاومت‌ها

رابطه‌ای که در قسمت قبل تحت عنوان قانون اهم برای ولتاژ و جریان یک مقاومت بیان شد، مختص مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان است. اما مقاومت‌ها انواع دیگری نیز دارند که در آنها صورت کلی رابطه ولتاژ - جریان ممکن است متفاوت باشد.

مقاومت‌های خطی و غیر خطی



مشخصه ولتاژ - جریان یک دیود تونلی



مشخصه ولتاژ - جریان یک مقاومت معمولی

مقاومت‌ها را بسته به این که رابطه لحظه‌ای ولتاژ - جریان آنها خطی (به شکل کلی $V(t) = R(t)I(t)$) و یا غیر خطی (به شکل کلی $V(t) = F(I, t)$) باشد، می‌توان به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم نمود. در واقع اگر مشخصه ولتاژ - جریان مقاومت را ترسیم کنیم، مقاومتی که شیب مشخصه در آن ثابت است، مقاومتی خطی بوده و مقاومتی که شیب مشخصه در آن متغیر است، مقاومت غیر خطی نامیده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان یک مقاومت معمولی و یک دیود تونلی را با مشخصه‌های ولتاژ - جریان روبرو در نظر گرفت:

شیب مشخصه ولتاژ - جریان در مقاومت معمولی ثابت و در دیود تونلی متغیر است؛ پس مقاومت معمولی یک مقاومت خطی و دیود تونلی یک مقاومت غیر خطی است.

مقاومت‌های تغییرپذیر با زمان و تغییرناپذیر با زمان

اگر مشخصه ولتاژ- جریان مقاومت با زمان تغییر کند، آن را مقاومت تغییرپذیر با زمان (یا متغیر با زمان) و در غیر این صورت آن را مقاومت تغییرناپذیر با زمان (یا نامتغیر با زمان) می‌نامند. رابطه ولتاژ - جریان یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان به شکل $V(t) = R(t)I(t)$ می‌باشد و این یعنی مشخصه ولتاژ - جریان به شکل یک خط راست بوده که شیب آن با زمان تغییر می‌کند.

مقاومت‌های پسیو و اکتیو

اگر مشخصه ولتاژ- جریان یک مقاومت در ربع اول و سوم باشد، مقاومت پسیو و مصرف‌کننده‌ی توان است و اگر مشخصه ولتاژ - جریان یک مقاومت در ربع دوم و چهارم باشد، مقاومت اکتیو و تولیدکننده‌ی توان است. در مقاومت‌های خطی، پسیو بودن معادل با مثبت بودن R و اکتیو بودن معادل با منفی بودن R می‌باشد. بحث کامل‌تر در مورد انواع مقاومت‌ها در فصل دوازدهم از کتاب مدار (۲) ارائه خواهد شد. لازم به ذکر است که در سؤالات کنکور، تمام مقاومت‌ها بطور پیش‌فرض مقاومت‌های خطی، تغییرناپذیر با زمان و پسیو می‌باشند.

مفاهیم اتصال کوتاه، مدار باز و کلید

در اینجا به معرفی چند مفهوم بسیار مصطلح در بحث مدارهای الکتریکی می‌پردازیم:

اتصال کوتاه: اگر دو نقطه در یک مدار الکتریکی توسط مقاومتی با مقدار صفر اهم (یا در اصطلاح فیزیکی با سیم) به هم متصل شده باشند، اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه اتصال کوتاه هستند. اختلاف ولتاژ دو نقطه اتصال کوتاه همواره برابر صفر است.

مدار باز: اگر بین دو نقطه از یک مدار الکتریکی هیچ مسیری برای برقراری جریان وجود نداشته باشد (یا به بیان دیگر دو نقطه صرفاً از طریق یک مقاومت با مقدار بی‌نهایت اهم به هم متصل باشند) اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه مدار باز هستند. جریان الکتریکی میان دو نقطه مدار باز همواره برابر صفر است.

کلید: کلید یک ابزار الکتریکی است که وضعیت اتصال میان دو نقطه را از حالت مدار باز به حالت اتصال کوتاه تغییر می‌دهد و بالعکس. در بحث مدارهای الکتریکی معمولاً کلیدها را ایده‌آل در نظر می‌گیرند. یک کلید ایده‌آل می‌تواند در زمان صفر ثانیه و به صورت آنی تغییر وضعیت دهد و مقاومت معادل آن در حالت اتصال کوتاه برابر صفر و در حالت مدار باز برابر بی‌نهایت است.

آمپر متر و ولت متر

آمپر متر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری جریان در مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. آمپر متر را در مدار به صورت سری با عنصری که می‌خواهند جریان آن را مشخص کنند، قرار می‌دهند. لازم به ذکر است که آمپر مترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی صفر هستند. (مانند اتصال کوتاه)

ولت متر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری ولتاژ در مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولت متر را به صورت موازی با عنصری که می‌خواهند ولتاژ دو سر آن را بسنجند، قرار می‌دهند. ولت مترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی بینهایت هستند. (مانند مدار باز)

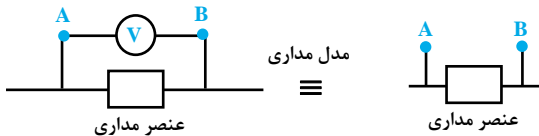
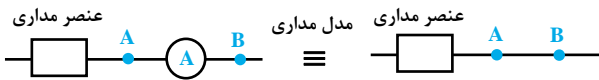
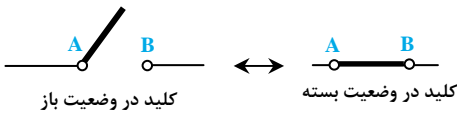
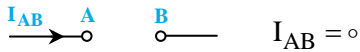
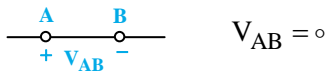
مدارهای خطی و مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)

مدارهای خطی، مدارهایی هستند که تمام عناصر آنها خطی است و مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) مدارهایی هستند که تمام عناصر آنها خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشد؛ در این راستا باید نکات مهم زیر را در نظر داشت:

۱- خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن عناصر در حالت کلی با توجه به مشخصه ولتاژ - جریان آنها تعریف می‌شود (مشابه بحثی که برای مقاومت‌ها انجام گرفت). در مورد منابع وابسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن با توجه به رابطه توصیف‌کننده متغیر خروجی منبع تعریف می‌شود. مثلاً در مورد یک منبع ولتاژ وابسته به جریان، اگر ولتاژ دو سر منبع به صورت $V = \alpha I_x$ باشد (که در آن α مقداری ثابت است)، در این صورت منبع وابسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.

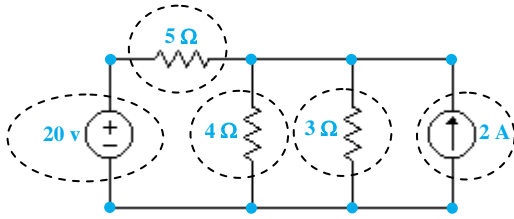
۲- در سنجش خطی و یا LTI بودن یک مدار الکتریکی، منابع تغذیه مستقل به طور کامل نادیده گرفته می‌شوند؛ علت این است که منابع تغذیه مستقل ماهیتاً مشابه یک متغیر ورودی برای یک سیستم یا یک تابع هستند. کاملاً مشخص است که خصوصیات ذاتی سیستم یا تابع مستقل از ورودی آن است و این یعنی نوع منبع تغذیه مستقل نباید در خصوصیات ذاتی مدار از جمله خطی و LTI بودن آن دخیل باشد.

دقت کنید از آنجایی که بسیاری از مباحث مدارهای الکتریکی تنها در مدارهای خطی و یا LTI کاربرد دارد، بنابراین تشخیص خطی یا LTI بودن یک مدار الکتریکی بسیار مهم می‌باشد.

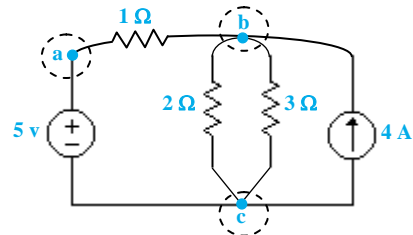


قوانین کیرشهف

قبل از بیان قوانین کیرشهف بهتر است ابتدا مفاهیم گره، شاخه و حلقه را تعریف کنیم. **گره** محل اتصال دو یا چند عنصر مداری می‌باشد (شکل الف) و **شاخه** می‌تواند شامل یک عنصر و دو گره مربوط به دو سر آن باشد، مانند یک منبع ولتاژ و یا یک مقاومت (شکل ب). هر مسیر بسته‌ای در یک مدار که گره شروع و گره خاتمه آن یکی باشد، یک **حلقه** نامیده می‌شود. (شکل ج)

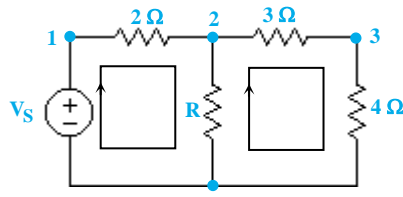


(شکل ب): مدار شامل پنج شاخه



(شکل الف): مدار شامل سه گره

با حرکت از گره (۱) به گره (۲) از طریق مقاومت ۲ اهم و از آنجا به گره (۴) و سپس بازگشت از طریق منبع ولتاژ به گره (۱)، یک حلقه بوجود می‌آید. به همین شکل حلقه دیگری نیز در سمت راست مدار داریم.

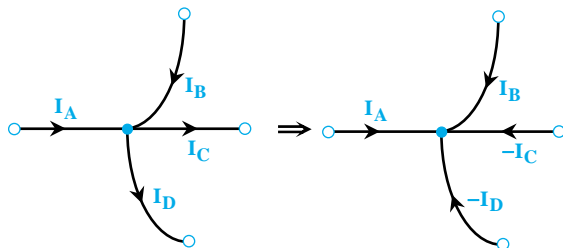


«شکل ج»

نکته ۲: در طی یک مسیر، برای تشکیل حلقه نباید از یک گره و یا یک عنصر خاص دو بار عبور کنیم.

قانون جریان کیرشهف (KCL)

طبق این قانون جمع جبری جریان‌هایی که به یک گره وارد می‌شوند، صفر است و یا به عبارت دیگر مجموع جریان‌های وارد شده به یک گره با مجموع جریان‌های خارج شده از آن برابر است. به عنوان مثال برای مدار روبرو می‌توان نوشت:

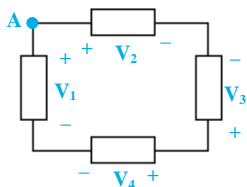


$$\begin{cases} I_A + I_B - I_C - I_D = 0 \\ \text{یا} \\ I_A + I_B = I_C + I_D \end{cases}$$

نکته ۳: توجه شود جریان‌هایی که به گره وارد می‌شوند را طبق قرارداد با علامت مثبت در نظر می‌گیریم و جریان‌هایی که از گره خارج می‌شوند را با علامت منفی لحاظ می‌کنیم. به هر ترتیب برای نوشتن KCL، علامت جریان‌های وارد شونده به یک گره همیشه مخالف جریان‌های خارج شونده از آن گره است.

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL)

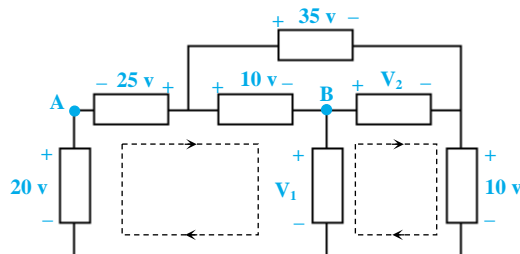
طبق این قانون جمع جبری ولتاژها در هر مسیر بسته‌ای از مدار صفر است. به عنوان مثال برای شکل روبرو داریم:



$$V_2 - V_3 + V_4 - V_1 = 0$$

نکته ۴: KVL را برای هر مداری در جهت‌های مختلف و با شروع از نقاط مختلف می‌توان نوشت. اما معمولاً حرکت در جهت ساعتگرد می‌تواند قراردادی شخصی باشد. برای مثال در شکل فوق شروع حرکت از نقطه A بوده و پس از حرکت در جهت ساعتگرد دوباره به نقطه A رسیده‌ایم و در طی این مسیر هر جا به عنصری برخوردیم، اگر از طرف مثبت وارد آن عنصر شدیم، ولتاژ آن را با علامت مثبت و اگر از طرف منفی وارد عنصر شدیم، آن را با علامت منفی لحاظ کردیم.

مثال ۲: در مدار شکل زیر مقدار $V_1 + V_2$ چند ولت است؟



- ۵۰ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۷۰ (۳)
- ۱۰ (۴)

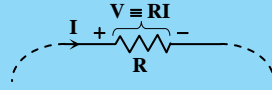
$$-25 + 10 + V_1 - 20 = 0 \Rightarrow V_1 = 35 \text{ V}$$

پاسخ: گزینه «۲» با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

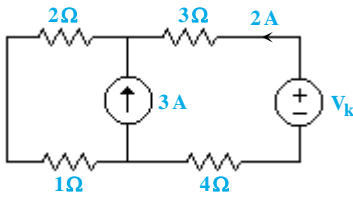
حال در ادامه با نوشتن KVL در حلقه سمت راست و جایگذاری V_1 از KVL حلقه سمت چپ داریم:

$$V_2 + 10 - V_1 = 0 \Rightarrow V_2 + 10 - 35 = 0 \Rightarrow V_2 = 25 \text{ V} \Rightarrow V_1 + V_2 = 60 \text{ V}$$

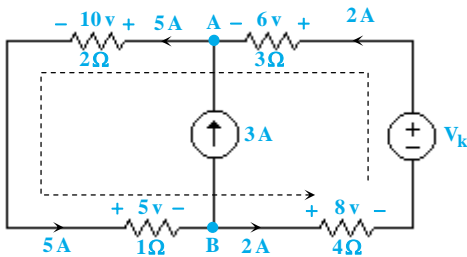
نکته ۵: در نوشتن معادلات KVL در یک حلقه بسته، پلاریته منبع ولتاژ (مستقل و وابسته) مشخص است. اما در مورد مقاومت‌ها اگر پلاریته آنها مشخص نبود، به این شکل قرارداد می‌کنیم که محل ورود جریان به مقاومت، پلاریته مثبت و محل خروج آن پلاریته منفی در نظر گرفته شود. واضح است اندازه افت ولتاژ روی مقاومت R که جریان I از آن عبور می‌کند، طبق قانون اهم به اندازه RI است. اگر به شکل زیر دقت کنید نکته را بهتر متوجه خواهید شد.



مثال ۳: در مدار زیر مقدار V_k چند ولت است؟



- ۲۹ (۱)
- ۳۹ (۲)
- ۲۹ (۳)
- ۳۹ (۴)



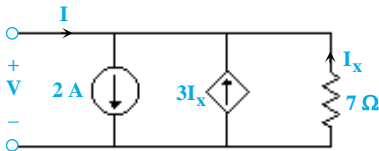
پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه V_k ، در مسیر منبع ولتاژ V_k به صورت نشان داده شده، رابطه KVL را می‌نویسیم. هدف از ارائه این مثال فقط بحث آموزش KVL است و علت انتخاب مسیر KVL به صورت نشان داده شده در شکل، در ادامه فصل به شما دانشجویان عزیز آموزش داده خواهد شد.

KCL(A): جریان مقاومت ۲ اهمی: $3 + 2 = 5 \text{ A}$

KCL(B): جریان مقاومت ۴ اهمی: $5 - 3 = 2 \text{ A}$

$$-V_k + 2 \times 3 + 5 \times 2 + 5 \times 1 + 2 \times 4 = 0 \Rightarrow V_k = 29 \text{ V}$$

با نوشتن KVL در حلقه نشان داده شده داریم:



مثال ۴: در مدار شکل زیر رابطه بین V و I کدام است؟

- (۱) $V = 2 - \frac{4}{7}I$
- (۲) $V = \frac{7}{4}I + 3/5$
- (۳) $V = 2 + \frac{4}{7}I$
- (۴) $V = \frac{7}{4}I - 3/5$

$$I = 2 - 3I_x - I_x = 2 - 4I_x$$

پاسخ: گزینه «۴» با نوشتن KCL در گره بالایی مدار داریم:

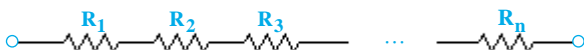
$$I = 2 - [4 \times (-\frac{V}{7})] = 2 + \frac{4}{7}V \Rightarrow V = \frac{7}{4}I - 3/5$$

از طرفی $I_x = -\frac{V}{7}$ می‌باشد، لذا داریم:

ترکیب مقاومت‌ها و ترکیب منابع

اتصال سری مقاومت‌ها

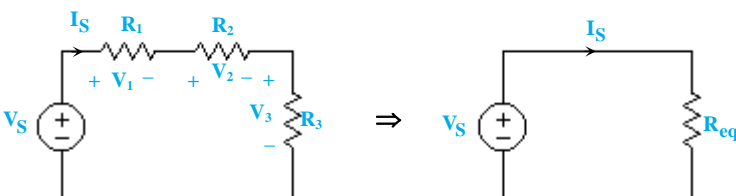
اگر n مقاومت را به صورت سری به یکدیگر متصل کنیم، مقاومت معادل آنها از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

در واقع مطابق شکل می‌توانیم مقاومت‌های سری را از مدار حذف کرده و به جای آنها یک مقاومت که معادل آنها است، قرار دهیم. توجه شود جریان

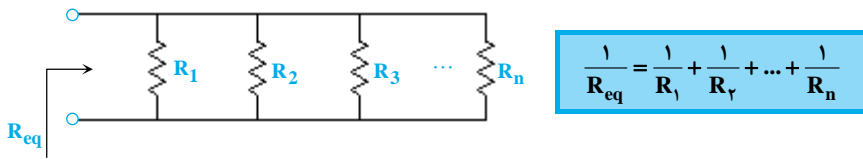
عناصری که به صورت سری به یکدیگر متصل می‌شوند، با هم برابر است.



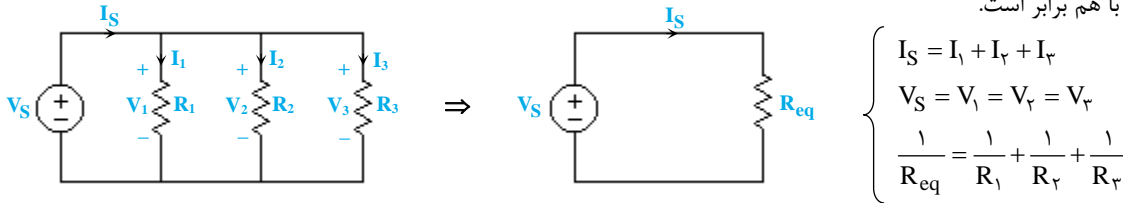
$$\begin{cases} I_S = I_{R_1} = I_{R_2} = I_{R_3} \\ V_S = V_1 + V_2 + V_3 \\ R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \end{cases}$$

اتصال موازی مقاومت‌ها

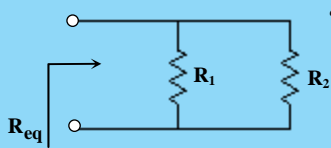
اگر n مقاومت را به صورت موازی به یکدیگر متصل کنیم، مقاومت معادل آنها از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:



در واقع مطابق شکل می‌توان مقادیر موازی را از مدار حذف کرد و به جای آنها مقاومت معادل را قرار داد. توجه شود ولتاژ عناصری که به صورت موازی به یکدیگر متصل می‌شوند، با هم برابر است.

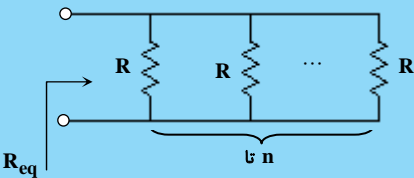


نکته ۶: حالت خاصی از موازی کردن مقاومت‌ها وقتی است که دو مقاومت با یکدیگر موازی شده باشند، که به دلیل کاربرد زیاد در مسائل بهتر است به خاطر سپرده شود.



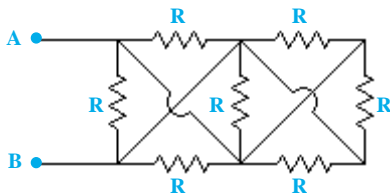
$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

نکته ۷: اگر n مقاومت R اهمی را موازی کنیم، مقاومت معادل برابر $\frac{R}{n}$ خواهد بود:

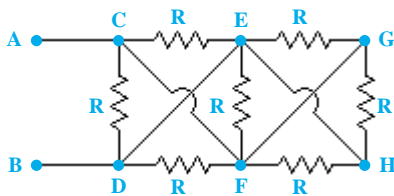


$$R_{eq} = \frac{R}{n}$$

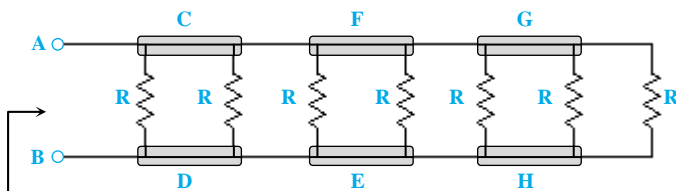
مثال ۵: در مدار زیر در صورتی که $R = 7\Omega$ باشد، مقاومت معادل از دیدگاه (A, B) برحسب اهم کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) $\frac{2}{7}$
- (۳) $\frac{2}{7}$
- (۴) ۷



پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه نقاط E, H و D با اتصال کوتاه به یکدیگر وصل هستند و علاوه بر این نقاط C, F و G نیز اتصال کوتاه و هم‌پتانسیل هستند، می‌توان شکل مدار را به صورت زیر در نظر گرفت. حال داریم:



$$R_{eq} = R \parallel R \parallel R \parallel R \parallel R \parallel R \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{7}$$

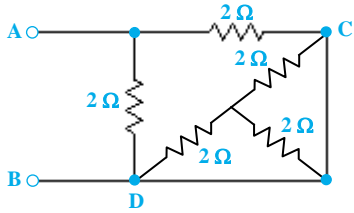
$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{7}{7} = 1\Omega$$

نکته ۸: برای پیدا کردن مقاومت معادل دو مقاومت موازی که یکی از آنها برابر R_1 و دیگری n برابر R_1 است ($R_2 = nR_1$)، می‌توانیم از روش کوتاه زیر کمک بگیریم:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \times nR_1}{R_1 + nR_1} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1}{n+1}$$

نکته ۹: $G = \frac{1}{R}$ را رسانایی (کندوکنانس) می‌نامیم و برحسب مِهُو (\mathcal{O}) بیان می‌کنیم. البته در بعضی کتب رسانایی برحسب زیمنس (S) نیز بیان شده است.

داوطلبان گرامی دقت داشته باشند از آنجایی که گاهی در تست‌های کنکور به جای مقدار مقاومت‌ها برحسب اهم (Ω)، مقدار رسانایی مقاومت‌ها برحسب مِهُو (\mathcal{O}) در شکل مدار مشخص می‌گردد، لذا توصیه می‌شود قبل از حل تست، واحد عناصر مدار از جمله مقاومت‌ها به طور دقیق مورد توجه قرار گیرد.



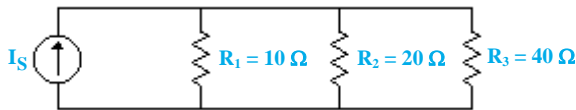
مثال ۶: مقاومت معادل در شکل روبرو از دو پایانه A و B چند اهم است؟

- ۱ (۱)
- ۱/۳۳ (۲)
- ۱/۴ (۳)
- ۲ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» با دقت در شکل مدار مشاهده می‌شود که مقاومت‌های ۲ اهمی شاخه بالا و سمت چپ مدار با هم موازی هستند (به علت اتصال کوتاه بودن نقاط C و D، مقاومت‌های شاخه مثلثی شکل در واقع اتصال کوتاه شده‌اند). حال داریم:

$$R_{AB} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1 \Omega$$

مثال ۷: در شکل مقابل توان مصرفی در مقاومت R_3 برابر ۵۰۰ وات است. جریان مقاومت R_3 چند آمپر است؟



- ۲/۵ (۱)
- ۵ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۶۲/۵ (۴)

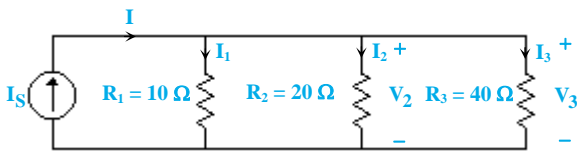
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا ولتاژ مقاومت R_3 را با توجه به این که توان تلف شده در آن معلوم است، محاسبه می‌کنیم:

$$P_{R_3} = \frac{(V_3)^2}{R_3} \Rightarrow 500 = \frac{(V_3)^2}{40} \Rightarrow V_3 = 100V$$

حال با استفاده از این نکته که ولتاژ دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است، می‌توان

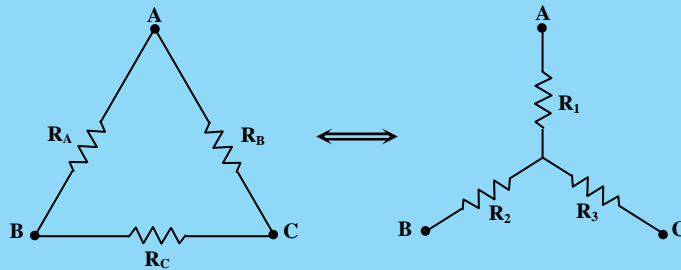
$$V_3 = V_2 \Rightarrow I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{100}{40} = 2.5A$$

جریان I_3 را حساب کرد:



تبدیل ستاره به مثلث و بالعکس

در صورتی که در یک شبکه پس از ساده‌سازی مدار و ترکیب مقاومت‌های سری و موازی، شبکه از حالت خاصی ساده‌تر نشود، می‌توان برای ساده‌سازی بیشتر شبکه از قانون تبدیل ستاره به مثلث استفاده نمود. لازم به ذکر است که این قانون در هر حالت و همه جا برای ساده‌سازی مدار کاربرد دارد.



حاصل ضرب دوی تمام مقاومت‌های اتصال ستاره بر روی مقاومت شاخه‌ی مقابل

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}$$

«تبدیل ستاره به مثلث»

حاصل ضرب دو مقاومت کناری در اتصال مثلث تقسیم بر مجموع مقاومت‌ها

$$R_1 = \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

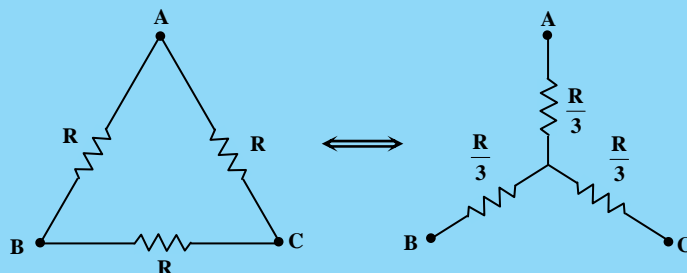
$$R_2 = \frac{R_A \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

«تبدیل مثلث به ستاره»

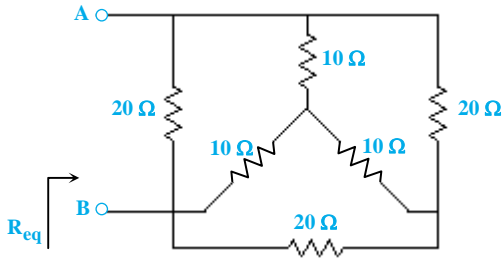
قانون تبدیل ستاره به مثلث را می‌توانید به آسانی به خاطر بسپارید.

در صورتی که $R_A = R_B = R_C = R_\Delta = 3R_\lambda$ باشد، آنگاه $R_\lambda = R_1 = R_2 = R_3$ می‌باشد:





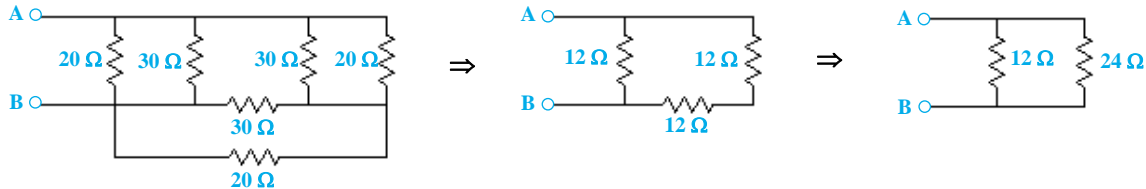
مثال ۸: مقاومت معادل دیده شده از دو نقطه A و B مدار مقابل، چند اهم است؟



- ۴ (۱)
- ۸ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۶ (۴)

$$R_{\Delta} = 3R_{\lambda} = 3 \times 10 = 30 \Omega$$

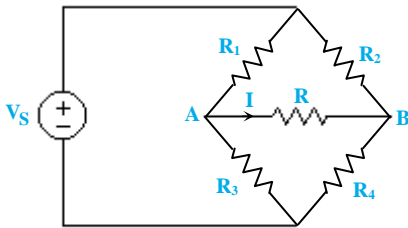
پاسخ: گزینه «۲» با تبدیل اتصال ستاره داخلی به اتصال مثلث و ساده‌سازی مدار داریم:



$$R_{AB} = 12 \parallel 24 = 8 \Omega$$

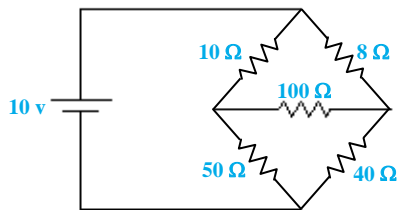
پل وتستون

مدار شکل مقابل یک پل وتستون است و در صورتی که در این مدار $V_A = V_B$ باشد، آنگاه از مقاومت R هیچ جریانی عبور نخواهد کرد و در این حالت پل وتستون را پل متعادل می‌نامند. جهت برقراری تساوی $V_A = V_B$ باید شرط زیر برقرار باشد:



$$R_1 R_2 = R_3 R_4$$

هرگاه تساوی بالا برقرار باشد، آنگاه $V_{AB} = 0$ و $I_{AB} = 0$ خواهد بود. در این حالت مقاومت R مدار باز شده و از مدار خارج می‌شود.

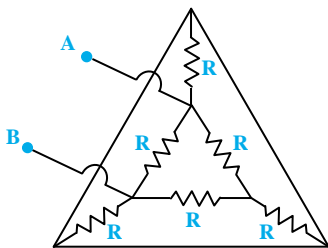


مثال ۹: در مدار مقابل جریان عبوری از مقاومت 100Ω چند میلی آمپر است؟

- ۰ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۲۰ (۳)
- ۳۰ (۴)

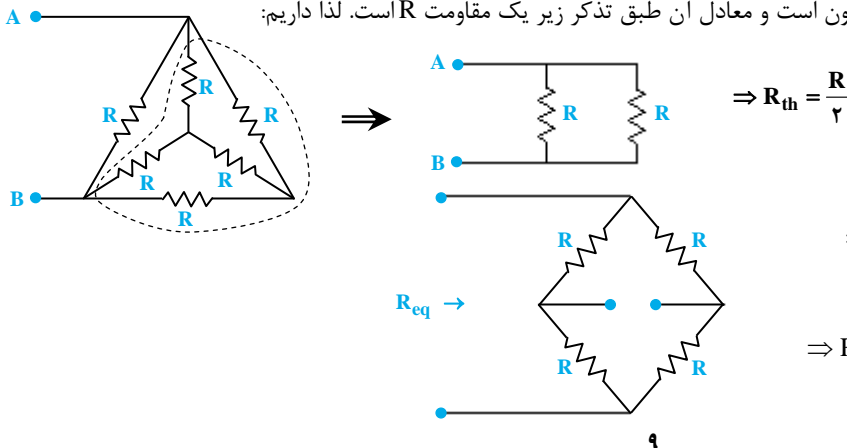
پاسخ: گزینه «۱» مدار یک پل وتستون در حال تعادل است ($40 \times 10 = 50 \times 8$) و جریان عبوری از مقاومت 100 اهم صفر است.

مثال ۱۰: مقدار مقاومت معادل از دو سر A و B کدام است؟



- $\frac{R}{3}$ (۱)
- $\frac{2R}{3}$ (۲)
- $\frac{R}{4}$ (۳)
- $\frac{R}{2}$ (۴)

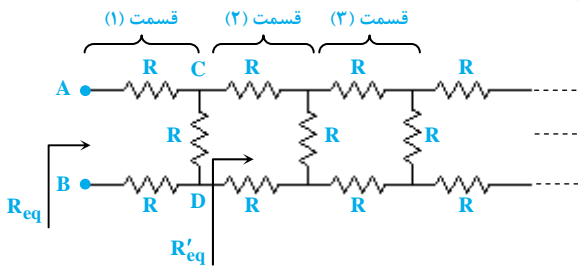
پاسخ: گزینه «۴» با انتقال سه مقاومت R در اطراف مثلث که به صورت ستاره به هم متصل هستند، به درون مثلث، مدار به صورت زیر ساده خواهد شد. حال قسمت مشخص شده روی شکل یک پل وتستون است و معادل آن طبق تذکر زیر یک مقاومت R است. لذا داریم:



تذکر: علت این که معادل پل وتستون مقاومت R است:

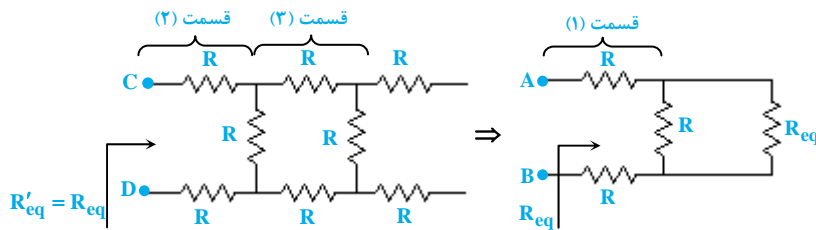
$$\Rightarrow R_{eq} = (R + R) \parallel (R + R) = 2R \parallel 2R = R$$

روش بدست آوردن مقاومت معادل در شبکه‌های نامتناهی از یک طرف



برای بدست آوردن مقاومت معادل در صورتی که شبکه از یک سمت نامتناهی بوده و همچنین از چند قسمت یکسان تشکیل شده باشد، باید سعی کرد که رابطه‌ای بین R_{eq} از دو سر شبکه و مقاومت معادل آن از بخش‌های دیگر مدار، برقرار کرد. برای مشخص شدن روش مذکور به ارائه یک مثال می‌پردازیم. برای مثال فرض کنیم که مقاومت معادل از دو پایانه B و A در مدار روبرو خواسته شده باشد.

در این مثال دیده می‌شود که شبکه از سمت راست نامتناهی است و همچنین از چند قسمت که هر کدام از ترکیب ۳ مقاومت تشکیل شده‌اند، ایجاد شده است. با توجه به نامتناهی بودن تعداد قسمت‌ها در صورت حذف قسمت (۱)، مقاومت معادل از دو پایانه C و D همان R_{eq} دیده شده از دو سر B و A است. یا به عبارتی $R_{eq} = R'_{eq}$ است. بنابراین مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



$$R_{eq} = R + (R \parallel R_{eq}) + R$$

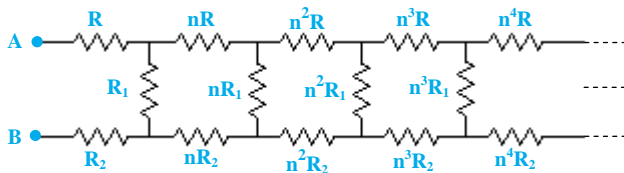
$$\Rightarrow R_{eq} = 2R + \frac{R \cdot R_{eq}}{R + R_{eq}}$$

$$\Rightarrow R_{eq}^2 + (-2R)R_{eq} - 2R^2 = 0$$

از حل معادله درجه دوم بالا بر حسب R، مقادیر $2/73R$ و $-5/73R$ برای R_{eq} بدست می‌آید که مسلماً تنها جواب مثبت یعنی $2/73R$ قابل قبول است.

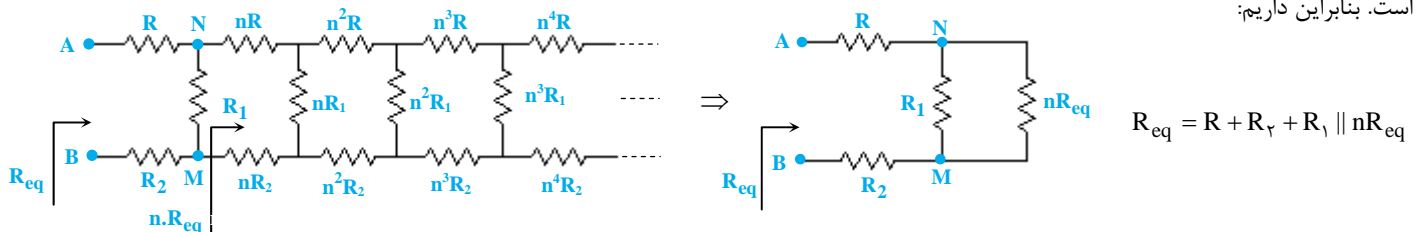
نکته ۱۰: در صورتی که در یک شبکه شامل مقاومت‌های خطی، تمام مقاومت‌ها n برابر شوند، آنگاه مقاومت معادل از دو سر A و B در هر قسمت از شبکه نیز n برابر می‌شود.

مثال ۱۱: در مدار زیر R_{eq} از دو سر B و A بر حسب کدام اهم است؟ ($n=2$, $R=1/5$, $R_1=1$, $R_2=2/5$)



- ۴/۹ (۱)
- ۵/۳ (۲)
- ۴/۱ (۳)
- ۴/۴۵ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این مدار باید به این نکته توجه شود که اگر در شبکه‌ای تمام مقاومت‌ها در عدد n ضرب شوند، مقاومت معادل از دو سر آن شبکه نیز در عدد n ضرب می‌شود. لذا برای مدار فوق می‌توان فرض کرد که مقاومت معادل از دو سر N و M، n برابر مقاومت معادل از دو سر A و B است. بنابراین داریم:



بنابراین برای محاسبه R_{eq} باید معادله درجه دوم زیر را حل کنیم. این معادله دارای یک پاسخ مثبت و یک پاسخ منفی بوده و بدیهی است تنها پاسخ مثبت

$$R_{eq} = R + R_2 + \frac{R_1 \times nR_{eq}}{R_1 + nR_{eq}}$$

آن مورد قبول می‌باشد.

$$R_{eq} = 4 + \frac{2R_{eq}}{1 + 2R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} \approx 4/9 \Omega$$

حال با جایگذاری مقادیر n، R_1 ، R و R_2 در رابطه فوق داریم: