مدرسان شریف

فصل اول

« آنالیز ترکیبی »

هدف کلی این فصل آشنایی با روش‌های شمارش (آنالیز ترکیبی) است.

انتظار می‌رود که پس از مطالعه این فصل شما دانشجوی عزیز

۱ـ با مفهوم آنالیز ترکیبی آشنا شده باشید.

۲ـ مفاهیم اصل ضرب و اصل جمع و اصل شمول و عدم شمول را یاد گرفته و تفاوت آنها را در به کارگیری مسائل تشخیص دهید.

۳ـ بتوانید جایگشت را توضیح داده و انواع جایگشت‌ها را بشناسید.

۴ـ بتوانید مفاهیم ترتیب و ترکیب را توضیح داده و تفاوت آنها را تشخیص دهید.

۵ـ بتوانید شباهت جایگشت و ترتیب را بیان کنید.

۶ـ روابط مهم ریاضی را که در غالب روابطی در ترکیبات آورده شده‌اند با اثباتشان بیان کنید.

۷ـ مدل‌هایی که تحت عنوان چیدمان مهره در جعبه بیان شده‌اند یاد گرفته، به مفاهیم آنها پی برده و بتوانید آنها را در غالب مثال‌های متنوع به کار گیرید.

۸ـ همه مفاهیم جایگشت، ترتیب و ترکیب را به صورت مدل مهره و جعبه بیان کنید.

مقدمه

آمار و احتمال به عنوان دو علم، مدل‌هایی را در اختیار قرار می‌دهند که برای مطالعه عدم حتمیت‌ها به کار می‌روند. رد یا پذیرش یک فرآورده یا محموله، وجود ارتباط بین دو متغیر، انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر به عنوان مدیرعامل، رئیس هیأت مدیره و منشی و ... همه مواردی از وجود عدم قطعیت هستند. بررسی اینگونه مسائل به شمارش تعداد حالات رخدادها مربوط می‌شود. در حقیقت بسیاری از مسائلی را که ما تحت عنوان عدم حتمیت یا همان احتمال مطرح می‌کنیم می‌توانیم با استفاده از اصول و قواعد شمارش (آنالیز ترکیبی) به سادگی بررسی کنیم. هدف اصلی این فصل بررسی این قواعد شامل اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت‌ها، ترکیب و ترتیب است که هریک قواعد خاص خود را داشته و در این‌جا با تأکید بیان می‌شود که در نظریه احتمال نقش اساسی ایفا می‌کنند. لذا به این منظور ابتدا هریک از اصول مطرح شده را بیان کرده، قوانین آنها را گفته و مثال‌های متنوعی ارائه خواهد شد.

قوانین شمارش

اصل ضرب (اصل اساسی شمارش): اگر عملی به n_1 طریق و برای هر نتیجه آن، عمل دوم به n_2 طریق و برای هر نتیجه از دو عمل اول و دوم، عمل سومی به n_3 طریق ... و عمل k ام به n_k طریق انجام شود. این k عمل با هم به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق انجام می‌پذیرد. به بیان دیگر فرض کنید عملی در k مرحله متوالی انجام پذیرد و مرحله i ام آن به n_i طریق قابل انجام باشد در این صورت، عمل گفته شده به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق می‌تواند انجام شود. لازم است که به این نکته توجه شود که آنچه در اصل ضرب بسیار حائز اهمیت است آن است که برای هر **نتیجه** از عمل یا عمل‌های قبلی، عمل دیگری انجام می‌شود.

مثال ۱: **سکه‌ای را دو بار (یا دو سکه را با هم) و تاسی را یک بار پرتاب می‌کنیم چند حالت ممکن است بوجود آید؟**

۱) ۱۲		۲) ۲۴		۳) ۳۶		۴) ۴۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» زمانی که سکه‌ای دو بار پرتاب می‌شود، این حالات می‌تواند به صورت {(شیر و شیر)، (خط و خط)، (شیر و خط)، (خط و شیر)} ظاهر شود. برای هر یک از این چهار عمل فوق تاس می‌تواند به یکی از شش طریق $\{1,2,3,4,5,6\}$ ظاهر شود. اکنون طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با $4 \times 6 = 24$.

مثال۲: با ارقام {۱,۲,۳,۴,۵} چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

الف) تکرار ارقام مجاز است.

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۵۰

ب) تکرار ارقام مجاز نیست.

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: یک عدد سه رقمی شامل انتخاب رقم صدگان ، رقم دهگان و رقم یکان است بنابراین:

الف) گزینه «۳» رقم صدگان می‌تواند یکی از ارقام گفته شده یعنی۱ تا ۵ را به ۵ حالت انتخاب کند **به ازای هر نتیجه این عمل**، مجدداً تعـداد ۵ نتیجـه بـرای دهگان و به **ازای هر نتیجه از رقم صدگان و دهگان** همان ۵ حالت برای جایگاه یکان وجود دارد چرا که تکرار ارقام مجاز است بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\underbrace{\overset{\text{صدگان}}{5}}_{\text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}} \times \underbrace{\overset{\text{دهگان}}{5}}_{\text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}} \times \underbrace{\overset{\text{یکان}}{5}}_{\text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}} = 125$$

ب) گزینه «۳» برای عمل اول (انتخاب رقم صدگان) ۵ حالت ممکن است (۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵) در عمل دوم (انتخاب رقم دهگـان) **بـه ازای هـر نتیجـه از عمل اول** چهار نتیجه ممکن است (چرا که تکرار مجاز نیست و رقمی که در صدگان قرار گرفته است اجازه‌ی تکرار ندارد) عمل سـوم (انتخـاب رقـم یکـان) **بـه ازای هر نتیجه از عمل اول و دوم**، سه نتیجه دارد چرا که ارقامی که در صدگان و دهگان قرار دارند اجازه تکرار ندارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\underbrace{\overset{\text{صدگان}}{5}}_{\text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}} \times \underbrace{\overset{\text{دهگان}}{4}}_{\text{به غیر از رقمی که در صدگان قرار گرفت}} \times \underbrace{\overset{\text{یکان}}{3}}_{\text{به غیر از رقمی که در صدگان و دهگان قرار گرفت}} = 60$$

مثال۳: چند عدد سه رقمی وجود دارد؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۹۹۹ ۴) ۱۰۰۰

پاسخ: گزینه «۲» زمانی که ارقامی را مشخص نکرده به طور کلی ارقام {۰,۱,۲,...,۹} را در نظر می‌گیریم در اینجا چون شرطی گذاشته نشده است تکرار مجاز است. برای عمل اول (انتخاب عدد صدگان) ۹ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹) سپس **به ازای هر نتیجه از انتخاب اول** برای انتخاب عـدد صـدگان ۱۰ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹ به همراه صفر چرا که تکرار مجاز است)، برای انتخاب رقم یکان نیز **به ازای هر نتیجه از آزمایش اول و دوم** مجـدداً ۱۰ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹ به همراه صفر)

$$\underbrace{\overset{\text{صدگان}}{9}}_{\text{ارقام ۱ تا ۹ بدون صفر}} \times \underbrace{\overset{\text{دهگان}}{10}}_{\text{همه ارقام به همراه صفر}} \times \underbrace{\overset{\text{یکان}}{10}}_{\text{همه ارقام به همراه صفر}} = 900$$

نکته: در ساخت اعداد در بعضی از مواقع، مسأله شرایطی را بیان می‌کند مثل فرد یا زوج بودن عدد یا مضرب ...,۵,۴,۲ در این‌صورت ابتدا شرایط خواسته شده را ایجاد می‌کنیم مثلاً برای زوج و فرد بودن ابتدا باید شرایط یکان را مشخص کنیم و یا برای مضرب ۴ باید ابتدا شرایط یکان و دهگان را بررسی کنیم. لازم به ذکر است که پس از آن ابتدا تعداد حالات ممکن برای سمت چپ‌ترین رقم تعیین می‌شود و سپس تعداد حالات ارقام میانی شمرده می‌شود.

مثال۴: با ارقام {۰,۱,۲,۳,۴,۵} چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۴۸ ۲) ۷۵ ۳) ۱۸ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا شرط فرد بودن اعداد را اعمـال مـی‌کنـیم (انتخـاب رقـم یکان) که سه حالت برای آن وجود دارد (انتخاب ارقام ۱ یا ۳ یا ۵) سـپس در انتخـاب عدد صدگان به **ازای هر حالت از عمل اول** چهار حالت وجود دارد (همه‌ی ارقام به جز صفر و عددی که در یکان قرار گرفت) سـپس **به ازای نتایج یکان و صـدگان چهـار نتیجه** نیز برای دهگان وجود دارد (همه‌ی ارقام به جز عددی که در یکان و عددی کـه در صدگان قرار گرفت)

$$\underbrace{\overset{\text{صدگان}}{4}}_{\text{همه ارقام به جزء صفر و یکان}} \times \underbrace{\overset{\text{دهگان}}{4}}_{\text{همه ارقام به جزء یکان و صدگان}} \times \underbrace{\overset{\text{یکان}}{3}}_{\text{ارقام ۱ یا ۳ یا ۵}} = 48$$

مثال۵: چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

۱) ۱۲۵۶	۲) ۱۵۷۶	۳) ۱۸۰۰	۴) ۲۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید اعدادی مضرب ۵ هستند که رقم یکان آنها صفر یا ۵ باشد. پس برای یکان دو انتخاب (صفر یا ۵) وجود دارد در رقم هزارگان (عمل دوم) به ازای هر یک از انتخاب‌های عمل اول ۹ انتخاب داریم (توجه کنید در اینجا تکرار مجاز است چرا که در مسأله شرطی وجود ندارد) اکنون به ازای نتایج انتخاب‌های اول و دوم در عمل سوم (انتخاب صدگان) ۱۰ حالت همگن وجود دارد و در انتخاب دهگان نیز به ازای نتایج انتخاب‌های اول و دوم و سوم ۱۰ حالت همگن وجود دارد به جز صفر، ۹ انتخاب (ارقام ۱ تا ۹) برای مرتبه‌ی هزارگان و در رقم صدگان و دهگان ۱۰ انتخاب وجود دارد، (علاوه بر ارقام ۱ تا ۹، صفر نیز اضافه می‌شود) بنابراین تعداد اعداد چهار رقمی مضرب ۵ برابر است با:

$$\underbrace{\overset{\text{هزارگان}}{9}}_{\text{ارقام ۱ تا ۹ بدون صفر}}\times\underbrace{\overset{\text{صدگان}}{10}}_{\text{همه ارقام به همراه صفر}}\times\underbrace{\overset{\text{دهگان}}{10}}_{\text{همه ارقام به همراه صفر}}\times\underbrace{\overset{\text{یکان}}{2}}_{\text{۰ یا ۵ صفر}}=1800$$

مثال۶: با ارقام {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ } چند عدد شش رقمی که بر عدد ۳ بخش‌پذیر باشد، می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست)

۱) ۷۲۰	۲) ۴۸۰	۳) ۱۲۰	۴) ۵۲۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اعدادی بر ۳ بخش‌پذیرند که مجموع ارقام آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشند. با کمی دقت متوجه می‌شویم که حاصل جمع ارقام {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} بر ۳ بخش‌پذیرند بنابراین هر ترکیبی از آنها بسازیم عدد ۶ رقمی حاصل بر ۳ بخش‌پذیر است:

$$\underbrace{6}_{\text{ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶}}\times\underbrace{5}_{\text{همه ارقام به غیر از رقم قبلی}}\times\underbrace{4}_{\text{همه ارقام به جز دوتای قبلی}}\times\underbrace{3}_{\text{همه ارقام به جز سه‌تای قبلی}}\times\underbrace{2}_{\text{همه ارقام به جز چهار تای قبلی}}\times\underbrace{1}_{\text{عدد باقیمانده}}=720$$

مثال۷: با ارقام {۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت که بر عدد ۴ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۱۲۵	۲) ۲۱۵	۳) ۲۵۱	۴) ۵۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اعدادی بر ۴ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آنها (یکان و دهگان آنها) بر ۴ بخش‌پذیر باشد. مثلاً سمت راست عدد ۱۲ یا ۲۴ یا .... باشد بنابراین ابتدا حالاتی که بخش‌پذیری بر ۴ را ایجاد می‌کنند، شمارش می‌کنیم. با توجه به ارقام داده شده در صورت مسأله دو رقم اول می‌تواند ۱۲، ۲۴، ۳۲، ۴۴ و ۵۲ باشد (۵ حالت).

اکنون به ازای هر نتیجه از حالات گفته شده در هزارگان ۵ نتیجه و به ازای هر نتیجه از دو رقم اول و هزارگان مجدداً ۵ نتیجه در صدگان خواهیم داشت بنابراین، تعداد حالات به صورت مقابل می‌باشد:

$$\underbrace{\overset{\text{هزارگان}}{5}}_{\text{ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}}\times\underbrace{\overset{\text{صدگان}}{5}}_{\text{ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}}\times\overset{\text{دو رقم اول}}{\left.\begin{matrix}1&2\\2&4\\3&2\\4&4\\5&2\end{matrix}\right\}}\ \text{حالت}\ 5=5\times5\times5=125$$

مثال۸: چند عدد سه رقمی وجود دارد که حداقل یک رقم آن عدد یک باشد؟

۱) ۹۰	۲) ۲۸۰	۳) ۲۵۲	۴) ۶۴۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** برای شمارش این اعداد باید اعداد سه رقمی را شمارش کنیم که در آنها یک عدد ۱، مانند "۱۵۴" یا دو عدد ۱، مانند "۱۵۱" یا هر سه عدد ۱ باشند که فقط عدد ۱۱۱ می‌باشد (به عهده دانشجو).

روش دوم: می‌توانیم تعداد کل اعداد سه رقمی را از تعداد اعداد سه رقمی که رقم یک ندارند کم کنیم، باقی‌مانده اعداد سه رقمی می‌باشند که حداقل یک رقم آنها عدد ۱ است.

$$\overbrace{\underbrace{9}_{\text{همه ارقام به جز صفر}}\times\underbrace{10}_{\text{همه ارقام صفر تا ۹}}\times\underbrace{10}_{\text{همه ارقام صفر تا ۹}}}^{\text{کل سه رقمی‌ها}}-\overbrace{\underbrace{8}_{\text{همه ارقام به جز صفر و یک}}\times\underbrace{9}_{\text{همه ارقام به جز یک}}\times\underbrace{9}_{\text{همه ارقام به جز یک}}}^{\text{اعداد سه رقمی که ۱ ندارند}}=900-648=252$$

مثال ۹: **تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم. چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که ارقام یکان و صدگان آنها یکسان باشد؟**

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اولین بار که تاس را پرتاب می‌کنیم ۶ انتخاب برای ساختن صدگان خواهیم داشت (۱ تا ۶) در بار دوم باید رقم یکان مانند رقم صدگان باشد یعنی، بـه ازای هـر نتیجـه از عمـل اول فقط یک حالت برای یکان وجود دارد چرا که یکان باید مانند صدگان باشـد و در واقـع انتخـابی ندارد و در بار سوم مجدداً به ازای هر نتیجه از عمل اول و دوم مجدداً شش نتیجه داریم (۱ تا ۶).

$$\underbrace{۱}_{\text{مانند رقم صدگان}} \times \underbrace{۶}_{\text{ارقام ۱ تا ۶}} \times \underbrace{۶}_{\text{ارقام ۱ تا ۶}} = ۳۶$$

اصل جمع: فرض کنید عملی را بتوان به k روش انجام داد (این k روش موازی هستند) انجام هر روش به معنای انجام کامل آن عمل می‌باشـد و نـوع iام آن به n_i طریق انجام می‌شود. در این صورت عمل فوق کلاً به $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ طریق می‌تواند انجام شود. لازم به ذکر است که برخلاف اصل‌ضـرب که انجام کامل عمل مستلزم انجام همه مراحل است در اصل جمع انجام یکی از روش‌ها معادل انجام کامل عمل محسوب می‌شود. بنابراین انجام کامل عمل در اصل جمع به این معنی است که یا روش اول یا روش دوم یا ... یا روش kام و انجام کامل در اصل ضرب به مفهوم مرحله اول و مرحله دوم و ... و مرحلـه kام انجام می‌شود. با این توضیحات مشخص است که اصل ضرب با «و» و اصل جمع با «یا» همراه است.

مثال ۱۰: **به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانشجوی صنایع، ۴ دانشجوی الکترونیک و ۲ دانشجوی کامپیوتر کمیته‌ای ۲ نفری انتخاب کرد به طوری که اعضای کمیته هم رشته نباشند؟**

۱) ۲۶ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق اصل ضرب به ۱۲ = ۴ × ۳ طریق از رشته صنایع و رشته الکترونیک می‌تـوان دو دانـشجو انتخـاب کـرد، همچنـین از رشـته کامپیوتر و صنایع $۶ = ۲ \times ۳$ طریق و از رشته الکترونیک و کامپیوتر $۸ = ۲ \times ۴$ طریق می‌توان دانشجو انتخاب کرد. بنابراین طبق اصل جمـع کمیتـه دو نفره را به $۲۶ = ۱۲ + ۸ + ۶$ طریق می‌توان انتخاب کرد.

مثال ۱۱: **با ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟**

۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش غلط:** با یک نگاه ساده به نظر می‌رسد که مسأله مانند مسائل قبل باشد و انتخاب‌های ما به صورت زیر می‌باشد: برای انتخاب رقم یکان سه حالت وجود دارد(۰ یا ۲ یا ۴) در صدگان چهار حالت همه ارقام به جز صفر و در رقم دهگان نیز همه ارقام به جز یکـان و صـدگان، بنـابراین تعداد حالات دقیقاً مانند قبل برابر با $۴۸ = ۳ \times ۴ \times ۴$ می‌باشد ولی این جواب **غلط** است.

دلیل غلط بودن این جواب آن است که ما در انتخاب اول (انتخاب عدد یکان) سه نتیجه (ارقام ۰ یا ۲ یا ۴) را داریم. ولی در تعداد انتخاب‌های عمل دوم (انتخـاب عدد صدگان) به ازای هر یک از نتایج انتخاب اول چهار حالت نداریم. بلکه به ازای نتایج (۲ یا ۴) چهار حالت و به ازای نتیجه (۰) پنج حالـت در عمـل دوم داریـم. بنابراین باید مسأله را به دو قسمت تفکیک کنیم؛ قسمتی که در انتخاب اول ۲ یا ۴ انتخاب می‌شوند و در قسمت دیگر عدد صفر در انتخاب اول انتخاب می‌شود.

قسمت اول: در انتخاب رقم یکان عدد ۲ یا ۴ انتخاب شوند بنابراین به ازای این دو نتیجه انتخاب عدد صدگان، چهار نتیجه دارد (همه‌ی ارقام به جز صـفر) و در رقم دهگان نیز به ازای نتایج انتخاب‌های اول و دوم باز هم چهار نتیجه داریم:

$$\underbrace{\overset{\text{یکان}}{۲}}_{\text{۲ یا ۴}} \times \underbrace{\overset{\text{دهگان}}{۴}}_{\text{همه ارقام به جز یکان و صدگان}} \times \underbrace{\overset{\text{صدگان}}{۴}}_{\text{همه ارقام به جز صفر و یکان}} = ۳۲$$

قسمت دوم: اکنون فرض می‌کنیم در رقم یکان عدد صفر انتخاب شود به ازای این رقم ۵ انتخاب در عدد صدگان خواهیم داشت (همه ارقام ۱ تـا ۵) و در انتخاب رقم دهگان نیز به ازای نتایج انتخاب‌های اول و دوم چهار انتخاب داریم :

$$\underbrace{\overset{\text{یکان}}{۱}}_{\text{عدد صفر}} \times \underbrace{\overset{\text{دهگان}}{۴}}_{\text{همه ارقام به جز یکان و صدگان}} \times \underbrace{\overset{\text{صدگان}}{۵}}_{\text{همه ارقام به جز صفر}} = ۲۰$$

طبق اصل جمع تعداد حالات برابر است با: $۳۲ + ۲۰ = ۵۲$

مثال ۱۲: چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار مجاز نیست)

۱) ۷۲۹　　۲) ۱۵۰۰　　۳) ۹۵۲　　۴) ۱۲۴۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در انتخاب اول (انتخاب عدد یکان) دو نتیجه ممکن است (صفر یا ۵) ولی توجه کنید که در انتخاب دوم (انتخاب عدد هزارگان) به ازای نتیجه صفر در عمل اول نه حالت و به ازای نتیجهٔ ۵ در عمل اول هشت حالت وجود دارد چرا که تکرار مجاز نیست. پس باید مسأله را به دو قسمت تقسیم کنیم؛ یک قسمت صفر در یکان باشد و یک قسمت ۵ در یکان باشد (به تفاوت این مسأله با مسأله مشابهش توجه کنید.) اگر در رقم یکان صفر قرار گیرد، به ازای آن در انتخاب دوم ۹ نتیجه می‌توانیم داشته باشیم (ارقام ۱ تا ۹) و در انتخاب سوم (انتخاب عدد صدگان) به ازای انتخاب‌های اول و دوم ۸ نتیجه داریم و در انتخاب چهارم (انتخاب عدد دهگان) به ازای نتایج انتخاب‌های اول و دوم و سوم ۷ حالت داریم. بنابراین تعداد حالات این قسمت برابر است با:

$$\overset{\text{هزارگان}}{\underbrace{9}_{\text{همه ارقام به جز صفر}}} \times \overset{\text{صدگان}}{\underbrace{8}_{\text{همه ارقام به جز صفر و هزارگان}}} \times \overset{\text{دهگان}}{\underbrace{7}_{\text{همه ارقام به جز صفر و هزارگان و صدگان}}} \times \overset{\text{یکان}}{\underbrace{1}_{\text{عدد صفر}}} = 504$$

قسمت دوم: در انتخاب اول (انتخاب عدد یکان) عدد ۵ قرار می‌گیرد آنگاه به ازای این انتخاب در عمل دوم (انتخاب هزارگان) ۸ انتخاب داریم (ارقام ۱ تا ۹ به جز صفر و ۵ چرا که تکرار مجاز نیست) سپس در انتخاب سوم (انتخاب صدگان) به ازای انتخاب‌های اول و دوم ۸ انتخاب داریم و سپس در انتخاب چهارم (انتخاب دهگان) به ازای انتخاب‌های عمل اول و دوم و سوم ۷ نتیجه داریم:

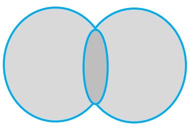
$$\overset{\text{هزارگان}}{\underbrace{8}_{\text{همه ارقام به جز صفر و عدد یکان}}} \times \overset{\text{صدگان}}{\underbrace{8}_{\text{همه ارقام به جز صفر و یکان و هزارگان}}} \times \overset{\text{دهگان}}{\underbrace{7}_{\text{همه ارقام به جز صفر و هزارگان و صدگان}}} \times \overset{\text{یکان}}{\underbrace{1}_{\text{عدد ۵}}} = 448$$

بنابراین طبق اصل جمع تعداد حالات برابر است با: $504 + 448 = 952$

اصل شمول و عدم شمول:

اگر عملی از روشی به n_1 طریق، از روش دیگر به n_2 طریق و از هر دو روش گفته شده به n_3 طریق امکان‌پذیر باشد آنگاه این عمل با حداقل یکی از دو روش به $n_1 + n_2 - n_3$ امکان‌پذیر می‌باشد. به بیان ساده‌تر فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشد و $N(A)$ تعداد اعضای مجموعه A و $N(B)$ تعداد اعضای مجموعه B باشد و $N(A \cap B)$ تعداد اعضای مشترک دو مجموعه باشند در این صورت:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$



برای محاسبه $N(A \cup B)$، $N(A \cap B)$ دوبار محاسبه می‌شود بنابراین، یک بار آن را کم می‌کنیم.

این بیان برای سه مجموعه A و B و C نیز صحیح است:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

و برای K مجموعه $A_1, A_2, \ldots, A_k$ نیز صحیح است:

$$N\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} N(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{k+1} (A_1 \cap A_2 \ldots A_k)$$

مثال ۱۳: در مجموعه‌ی $s = \{1, 2, \cdots 900\}$ چند عدد وجود دارد که بر اعداد ۴ یا ۵ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۲۲۵　　۲) ۳۰۰　　۳) ۳۶۰　　۴) ۴۰۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ مجموعه اعدادی که بر k بخش‌پذیر باشند برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$ ([ ] علامت جزء صحیح است)

بنابراین اگر در اینجا A مجموعه‌ی اعدادی باشد که بر ۴ بخش‌پذیر و B مجموعه اعدادی باشد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$|A| = \left[\frac{900}{4}\right] = 225 \quad , \quad |B| = \left[\frac{900}{5}\right] = 180$$

اکنون برای آن‌که اعدادی را شمارش کنیم که هم بر ۴ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشند باید بین ۴ و ۵ ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) بگیریم و در این صورت خواهیم داشت: $|A\cap B|=\left[\frac{۹۰۰}{۲۰}\right]=۴۵$

اکنون طبق اصل شمول و عدم شمول خواهیم داشت: $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)=۲۲۵+۱۸۰-۴۵=۳۶۰$

مثال ۱۴: در مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,\dots,۹۰۰\}$ چند عدد وجود دارد که بر اعداد ۴ و ۵ و ۶ بخش‌پذیر نیستند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۱۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۴۸۰

پاسخ: گزینه «۴» از روش مکمل استفاده می‌کنیم، مکمل سؤال آن است که:

$۹۰۰-N(A\cup B\cup C)=$ اعدادی که بر ۴ یا ۵ یا ۶ بخش‌پذیر هستند − کل اعداد مجموعه S

فرض کنید در اینجا A و B و C به ترتیب مجموعه اعدادی در S هستند که بر ۴، بر ۵ و بر ۶ بخش‌پذیر هستند:

$|A|=\left[\frac{۹۰۰}{۴}\right]=۲۲۵ \qquad |B|=\left[\frac{۹۰۰}{۵}\right]=۱۸۰ \qquad |C|=\left[\frac{۹۰۰}{۶}\right]=۱۵۰$

توجه کنید که برای اشتراک دو به دو باید بین آنها ک.م.م بگیریم، در نتیجه داریم:

$|A\cap B|=\left[\frac{۹۰۰}{۲۰}\right]=۴۵ \;,\; |A\cap C|=\left[\frac{۹۰۰}{۱۲}\right]=۷۵ \;,\; |B\cap C|=\left[\frac{۹۰۰}{۳۰}\right]=۳۰ \quad |A\cap B\cap C|=\left[\frac{۹۰۰}{۶۰}\right]=۱۵$

بنابراین طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$N(A\cup B\cup C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(A\cap C)-N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C)=$$
$$۲۲۵+۱۸۰+۱۵۰-۴۵-۷۵-۳۰+۱۵=۴۲۰$$

اکنون طبق روش مکمل داریم: $-N(A\cup B\cup C)=۹۰۰-۴۲۰=۴۸۰$ کل اعداد

جایگشت یا ترتیب

به هر حالتی که اشیاء یا اعضای یک مجموعه در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند یک ترتیب یا جایگشت گفته می‌شود. در بسیاری از مباحث نظریه احتمال تعداد حالات یا جایگشت‌هایی که گروهی از اشیاء یا اعضا درکنار یکدیگر قرار می‌گیرند، مورد توجه است. در این بخش، روش‌های مختلفی برای شمارش تعداد جایگشت‌ها در شرایط متفاوت ارائه می‌شود. جایگشت‌های مهمی که در این قسمت وجود دارد عبارتند از:

۱ـ جایگشت خطی ۲ـ جایگشت دایره‌ای یا دوری ۳ـ جایگشت یک در میان ۴ـ جایگشت با تکرار

که در ادامه به ترتیب توضیح داده خواهند شد و برای هر مورد مثال‌هایی ارائه خواهد شد.

جایگشت خطی: اگر n عضو متمایز را بخواهیم در کنار یکدیگر در یک خط (صف) قرار دهیم تعداد جایگشت‌های مختلف این عناصر برابر است با:

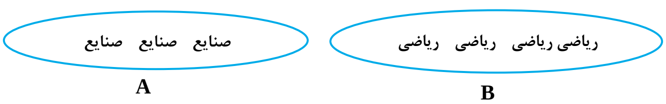
$$\mathbf{n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\dots(۲)\times(۱)=n!}$$

مثلاً ۴ نفر را به $۱\times۲\times۳\times۴=۴!$ طریق می‌توان در یک صف مرتب کرد.

مثال ۱۵: به چند طریق می‌توان ۳ دانشجوی رشته صنایع و ۴ دانشجوی رشته ریاضی را در کنار یکدیگر در یک صف مرتب کرد به طوری که دانشجویان هم رشته در کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۸۸

پاسخ: گزینه «۴» ۳ دانشجوی رشته صنایع را یک گروه (A) و ۴ دانشجوی رشته ریاضی را گروهی دیگر (B) فرض می‌کنیم. اکنون این دو گروه !۲ طریق جابجایی دارند، اما در بین گروه دانشجویان صنایع !۳ و گروه دانشجویان ریاضی !۴ جایگشت وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $۲!\times۴!\times۳!=۲۸۸$



مثال ۱۶: به چند طریق می‌توان ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه را در یک خط مرتب کرد به طوری که مهره‌های سفید در کنار یکدیگر باشند؟ (همه مهره‌ها متمایزند)

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مهره‌های سفید را یک گروه فرض می‌کنیم بنابراین اکنون ۴ مهره داریم با $۴!$ جایگشت، اما خود مهره‌های سفید نیز به $۲!$ طریق جابجایی دارند بنابراین تعداد حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $۴! \times ۲! = ۴۸$

مثال ۱۷: **به چند طریق می‌توان ۴ فوتبالیست و ۴ والیبالیست را در یک صف مرتب کرد به طوری که فوتبالیست‌ها در کنار یکدیگر و در سمت چپ والیبالیست‌ها قرار گیرند؟**

۱) $۲\times(۴!)^۲$ ۲) $(۴!)^۲$ ۳) $۴!$ ۴) $\frac{۴!}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ۴ فوتبالیست را یک دسته اختیار می‌کنیم، اما توجه کنید که فوتبالیست‌ها باید در سمت چپ والیبالیست‌ها قرار گیرند. بنابراین فقط $۴!$ جایگشت برای والیبالیست‌ها و $۴!$ جایگشت برای فوتبالیست‌ها داریم. توجه کنید که در این مسأله فوتبالیست‌ها در سمت چپ والیبالیست‌ها قرار دارند بنابراین $۴!\times۴!$ در $۲!$ ضرب نمی‌شود. بنابراین تعداد حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $۴!\times ۴! = (۴!)^۲$

مثال ۱۸: **شخصی با ۵ نفر از دوستانش وارد اتاق می‌شود اگر خودش نشست، بقیه به چند صورت می‌توانند در کنار او (در یک ردیف) بنشینند؟**

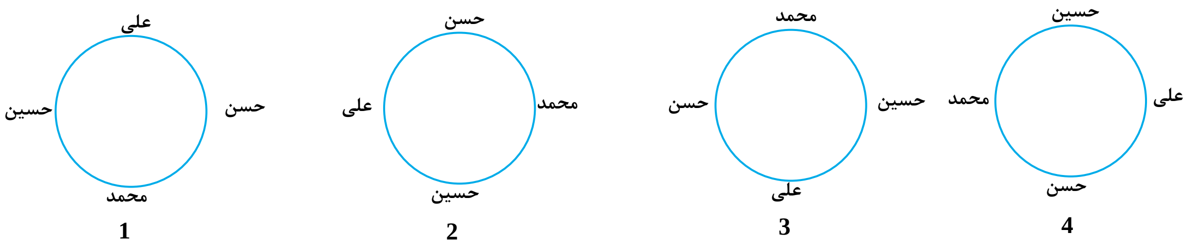
۱) $۵!$ ۲) $۶!$ ۳) $۴!$ ۴) $۷!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای خود شخص ۶ حالت نشستن و برای ۵ نفر دوستانش $۵!$ طریق جایگشت داریم، بنابراین: تعداد کل حالات $= ۶\times۵! = ۶!$

جایگشت دایره‌ای (دوری): تعداد حالاتی که می‌توان n عنصر متمایز را به صورت دایره‌ای در کنار یکدیگر قرار داد برابر است با: $(n-۱)!$

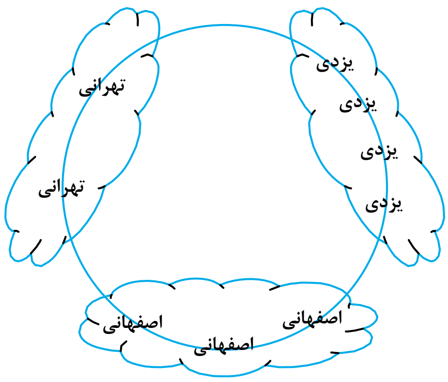
مثلاً ۵ نفر را به $(۵-۱)! = ۴!$ طریق می‌توان دور یک میز گرد مرتب کرد.

چرا؟ در جایگشت دایره‌ای برخلاف جایگشت خطی **مدل قرار گرفتن** مهم است، **محل قرار گرفتن** مهم نیست. به طور مثال فرض کنید علی، محمد، حسین و حسن می‌خواهند دور یک میز گرد بنشینند. با توجه به این‌که گفته شد مدل قرار گرفتن مهم است حالات زیر یکسان است چرا که همواره حسین بعد از علی، محمد بعد از حسین، حسن بعد از محمد و علی بعد از حسن قرار دارد. و این نشان می‌دهد که فقط جای افراد تغییر کرده است و شیوه نشستن آنها با توجه به مطلب گفته شده یکی است.



بنابراین برای برطرف کردن این مشکل می‌توانیم یک عضو را مبدأ فرض کنیم و بقیه را مانند حالت خطی نسبت به مبدأ جابه‌جا کنیم یعنی، از چهار نفر یک نفر ثابت و سه نفر دیگر نسبت به این فرد به $۳!$ طریق جابجا می‌شوند و در مورد تعمیم این موضوع می‌توان گفت یک نفر ثابت و $n-۱$ نفر دیگر نسبت به این فرد ثابت جابه‌جا می‌شوند که برابر با $(n-۱)!$ است.

مثال ۱۹: **به چند طریق می‌توان ۲ تهرانی، ۳ اصفهانی و ۴ یزدی را دور یک میز گرد مرتب کرد به طوری که همشهری‌ها پهلوی یکدیگر قرار بگیرند؟**



☑ **پاسخ:** ابتدا تهرانی‌ها ، اصفهانی‌ها و یزدی‌ها را به صورت گروهی فرض می‌کنیم. اکنون این ۳ گروه به $۲!$ طریق مختلف دور میز مرتب می‌شوند. اما مابین خود گروه‌ها نیز جایگشت داریم. برای تهرانی‌ها $۲!$ برای اصفهانی‌ها $۳!$ و برای یزدی‌ها $۴!$ جایگشت وجود دارد. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{۴!}_{\text{یزدی‌ها}}\times\underbrace{۳!}_{\text{اصفهانی‌ها}}\times\underbrace{۲!}_{\text{تهرانی‌ها}}\times\underbrace{(۳-۱)!}_{\text{بین گروه‌ها}}$$

مثال ۲۰: ۶ نفر برای نشستن دور یک میز گرد وارد اتاقی می‌شوند، به چند طریق ممکن است فرد خاصی در جای ثابتی بنشیند؟

۱) $6 \times 5!$ ۲) $6!$ ۳) $5!$ ۴) $4!$

پاسخ: گزینه «۳» هر گاه کلمه‌ی خاص گفته می‌شود به مفهوم آن است که عنصر یا فرد مورد نظر معلوم است و هیچ انتخابی برای او نداریم یعنی، در اینجا ابتدا فرد خاص باید در جای ثابت تعیین شده بنشیند (فقط یک حالت). اکنون ۵ نفر دیگر دور دایره می‌توانند به $5!$ حالت جابه‌جا شوند در اینجا شاید این ایده **غلط** مطرح شود که ۵ نفر به $4!$ حالت دور یک میز گرد مرتب می‌شوند ولی باید گفت که پس از نشستن فرد خاص در جایگاه، این شخص به عنوان مبدأ در نظر گرفته می‌شود و بقیه افراد نسبت به این فرد جابجا می‌شوند.

جایگشت یک در میان: اگر بخواهیم m عنصر از یک گروه مثلاً $(x_1, x_2, ..., x_n)$ و n عنصر از گروهی دیگر را مثلاً $(y_1, y_2, ..., y_n)$ به صورت یک در میان در یک خط مرتب کنیم دو حالت وجود دارد:

اگر $m = n \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= 2 \times m! \times n!$

اگر $m = n$ باشد ابتدا گروه اول را به $m!$ طریق می‌توان مرتب کرد به عنوان مثال یکی از حالت‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد:

$\square x_1 \square x_2 \square x_3 \square ... \square x_m \square$

بنابراین با توجه به اینکه $m = n$ است، $n+1$ مکان برای اعضای گروه دوم ایجاد می‌شود که n مکان متوالی آن لازم است با $(y_1, y_2, ..., y_n)$ پر شود. که خودش دو حالت دارد؛ حالت اول از سمت چپ شروع به پر شدن کند و $n!$ حالت دارد و حالت دوم از سمت راست شروع به پر شدن کند و $n!$ حالت دارد بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{m! \times n!}_{\substack{\text{ترتیب گروه اول و} \\ \text{گروه دوم از چپ}}} + \underbrace{m! \times n!}_{\substack{\text{ترتیب گروه اول و} \\ \text{گروه دوم از راست}}} = 2 \times m! \times n!$$

برای حالت $m = n + 1$ نیز با استدلالی مشابه به نتیجه خواهیم رسید.

اگر $m = n + 1 \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= m! \times n!$

توجه کنید که غیر از دو حالت گفته شده در بالا نمی‌توان جایگشت یک در میان خطی به وجود آورد. مثالهای زیر نشان‌دهنده این مطلب می‌باشند.

مثال ۲۱: در یک مهدکودک ۱۰ پسر و ۱۰ دختر را به صورت تصادفی روی صندلی‌های یک ردیف می‌نشانیم. چند حالت وجود دارد اگر بخواهیم کودکانی که در کنار یکدیگر نشسته‌اند، جنسیت یکسانی نداشته باشند؟

۱) $2 \times (10!)^2$ ۲) $10! \times 10!$ ۳) $10!$ ۴) $\frac{10!}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» در اینجا با جایگشت یک در میان روبرو هستیم تعداد دو گروه برابر است. ابتدا دو حالت وجود دارد که از کدام گروه شروع کنیم (پسر یا دختر) سپس برای هر گروه $10!$ جایگشت وجود دارد پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$2 \times 10! \times 10! = 2 \times (10!)^2$

مثال ۲۲: به چند طریق می‌توان ۳ پسر بچه و ۲ دختر بچه را به صورت یک در میان در یک صف مرتب کرد؟

۱) $2 \times 3! \times 2!$ ۲) $3! \times 2!$ ۳) $2 \times (3!)^2$ ۴) $2 \times (2!)^2$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید از گروه پسر بچه‌ها شروع کنیم تا بتوانیم حالت یک در میان ایجاد کنیم. (پسر دختر پسر دختر پسر) در اینجا مانند قبل ۲ حالت وجود ندارد. اکنون پسرها به $3!$ طریق و دخترها به $2!$ طریق جایگشت دارند. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$3! \times 2!$

مثال ۲۳: می‌خواهیم m نفر مرد و m نفر زن را دور یک میز گرد مرتب کنیم به طوری که هیچ دو فرد مجاور از یک جنس نباشند. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱) $(m-1)! \times (m-1)!$ ۲) $(m! \times m!)$ ۳) $(m-1)! \times m!$ ۴) $(m-1) \times m!$

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که برای چنین جایگشتی باید تعداد دو گروه برابر باشند. ابتدا مردها به $(m-1)!$ دور دایره مرتب می‌شوند. اکنون دقت کنید که در بین آنها m جایگاه وجود دارد که به $m!$ می‌توان زن‌ها را در این جایگاه‌ها چیدمان کرد.

جایگشت با تکرار: تعداد جایگشت‌های مختلف n عنصر که n_1 تای آن از نوع اول ، n_2 تای آن از نوع دوم و ... و n_k تای آن از نوع k اُم می‌باشد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\ldots n_k!}\quad ;\quad n_1+n_2+\ldots+n_k=n$$

در این مدل جایگشت حالت‌هایی به وجود می‌آید که تکراری هستند و در شمارش آنها حالت‌های اضافه شمرده می‌شود، با کمک رابطه بالا این حالت‌های اضافی از بین می‌رود.

مثال ۲۴: با حروف کلمه Statistics چند کلمه ۱۰ حرفی مختلف می‌توان ساخت؟

۱) $\frac{10!}{3!}$ ۲) $\frac{10!}{6!}$ ۳) $\frac{10!}{72}$ ۴) $\frac{10!}{18!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» کلمه شامل ۱۰ حرف مختلف است پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر با $10!$ است اما در اینجا حالت‌های تکراری داریم، مثلاً زمانی که جای "S" با سه تکرار یا "t" با سه تکرار یا "i" با دو تکرار عوض می‌شود،جایگشت جدیدی به وجود نمی‌آید بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{10!}{3!\times 3!\times 2!}=\frac{10!}{72}$$

مثال ۲۵: با ارقام ۶،۶، ۳،۳، ۲ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۰ ۴) ۳۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با این ارقام، اعداد ۵ رقمی می‌توان ساخت ولی توجه کنید که دو تا ۶ و دو تا ۳ مشابه‌اند، بنابراین طبق جایگشت با تکرار تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{5!}{2!\times 2!}=\frac{120}{4}=30$$

مثال ۲۶: ارقام ۵ ,۵ ,۳ ,۲ ,۲ ,۲ ,۱ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم چند عدد ۷ رقمی می‌توان ساخت که مضرب ۴ باشند؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانیم اعدادی بر ۴ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آنها (یکان و دهگان آنها) بر ۴ بخش‌پذیر باشد. با کمی دقت متوجه می‌شویم که باید دو رقم سمت راست ۱۲، ۳۲ و ۵۲ باشد چرا که فقط این ۳ عدد در بین این ارقام اعدادی را تولید می‌کنند که بر ۴ بخش‌پذیرند.

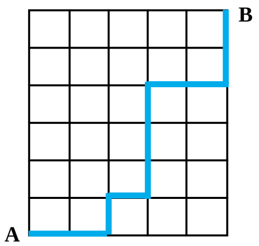
این ۵ رقم شامل دوتا عدد ۵ دو تا ۲ و یک ۳ (۳ ،۵،۵ ،۲،۲) — $\frac{5!}{2!\times 2!}$ × عدد ۱ و ۲ به صورت ۲ ۱ — ۱ $=30$

این ۵ رقم شامل دوتا عدد ۵ دو تا ۲ و یک عدد ۱ (۱ ،۵،۵ ،۲،۲) — $\frac{5!}{2!\times 2!}$ × عدد ۳ و ۲ به صورت ۲ ۳ — ۱ $=30$

این ۵ رقم شامل دوتا عدد ۲ یک ۳ و یک عدد ۱ و یک عدد ۵ (۵ ،۳ ،۲ ،۲ ،۱) — $\frac{5!}{2!}$ × عدد ۵ و ۲ به صورت ۲ ۵ — ۱ $=60$

$$\Rightarrow 30+30+60=120$$

مثال ۲۷: شخصی با حرکت‌های قائم و افقی (به سمت بالا و جلو) می‌خواهد از A به B برود، به چند طریق می‌تواند این عمل را انجام دهد؟ (اول قائم بعد افقی یا بالعکس، خط پررنگ یک مثال از A به B رسیدن است).



۱) ۴۰۰
۲) ۵۶۰
۳) ۵۰۰
۴) ۴۶۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای رفتن از A به B باید به طور کلی ۱۱ حرکت انجام دهیم که شامل ۵ حرکت به سمت راست و ۶ حرکت به بالا (مشابه) می‌باشد مثلاً اگر حرکات به بالا را به صورت U و حرکت به راست را با R نشان دهیم در این صورت یک حرکت نشان داده شده RRURUUURRUU باشد بنابراین کل حرکات جایگشت‌هایی از این حرکت‌ها می‌باشد. بنابراین طبق رابطه جایگشت با تکرار خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{(۵+۶)!}{۵!۶!} = ۴۶۲$$

ترتیب (جایگشت r شیء از n شیء)

تعداد حالاتی که می‌توان r شیء از nشیء متمایز را به ترتیب انتخاب و در کنار یکدیگر مرتب نمود ترتیب نام دارد.
بنابراین توجه کنید که ترتیب r شیء از nشیء جایگشت خطی r شیء با ترتیب است.

الف ــ اگر تکرار اشیاء مجاز نباشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$P_n^r = n\times n-۱\times n-۲\times \ldots \times (n-(r-۱)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

توجه کنید زمانی که r جایگاه به ترتیب انتخاب می‌شوند در $n-r$ جایگاه باقیمانده ترتیب مهم نیست بنابراین در مخرج کسر قرار می‌گیرد تا حالات آن شمرده نشود.

ب ــ اگر تکرار اشیاء مجاز باشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$P_n^r = \underbrace{n\times n\times n\times \ldots \times n}_{\text{r دفعه}} = n^r$$

به عنوان یک مثال، فرض کنید می‌خواهید با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ برای کامپیوتر خود رمزهای ۲تایی بدون تکرار بسازید. همانطور که می‌دانید حالت قرار گرفتن این رمزها می‌تواند به صورت (۲و۱)، (۳و۱)، (۴و۱)، (۵و۱) و ... باشد، اما توجه کنید که با تغییر جایگاه رمزهای گفته شده (۱و۲)، (۱و۳)، (۱و۴)، (۱و۵) و ... حالت‌های جدیدی به وجود می‌آید و این به مفهوم در نظر گرفتن ترتیب است.

مثال ۲۸: به چند طریق می‌توان در بین ۵ نفر ، جوایز اول و دوم و سوم تقسیم شود؟

☑ **پاسخ:** انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر که می‌توان ترتیب دادن جوایز به آنها را تغییر داد.

$$P_۵^۳ = ۵\times ۴\times ۳ = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۶۰$$

مثال ۲۹: برای باز کردن یک قفل مرکزی ، انتخاب ۴ عدد از اعداد یک رقمی و بدون تکرار نیاز است. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۴ ۴) ۶۱۵۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» انتخاب ۴ رقم از ارقام $\{۰,۱,۲,\ldots,۹\}$ که در اینجا باید ترتیب رعایت شود. چرا که هر رقمی که مؤثر نبود آن را کنار می‌گذاریم مانند جایگشت بدون تکرار :

$$P_{۱۰}^۴ = ۱۰\times ۹\times ۸\times ۷ = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!} = ۵۰۴۰$$

مثال ۳۰: با حروف کلمه‌ی شریف چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) $\frac{۴!}{۲!}$ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) $\frac{۴!}{۳!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌خواهیم کلمه سه حرفی بسازیم. به راحتی می‌توان تشخیص داد که اگر یک سه‌تایی از حروف انتخاب کنیم با جابجایی همین سه حروف کلمه‌ی جدیدی به وجود می‌آید و این به مفهوم آن است که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم است.

$$P_۴^۳ = ۴\times ۳\times ۲ = \frac{۴!}{(۴-۳)!} = ۲۴$$