مدرسان شریف

فصل اول

« مقدمه‌ای بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها »

مقدمه

اولین هدف تجزیه و تحلیل سیستم این است که زبان مناسبی را پیدا کنیم که با استفاده از آن بتوانیم سیستم را توصیف کرده و مجموعه‌ای از ابزارهای ریاضی را برای تحلیل آن ارائه دهیم. سیستم اصولاً با سیگنال‌های ورودی و خروجی مشخصی توصیف می‌شود، به همین دلیل است که تجزیه و تحلیل سیستم به «سیگنال و سیستم» هم مشهور شده است. به تعبیر ساده، هر دنباله‌ای از اطلاعات را که بتوان با توابع ریاضی مدل کرد، سیگنال می‌نامیم. در واقع سیگنال یک نوع خبر است که مجموعه اطلاعاتی را به ما می‌دهد. توجه داشته باشیم، تعریفی که ارائه داده‌ایم به این معنی نیست که یک سیگنال لزوماً الکتریکی است، بلکه این تعریف را می‌توانیم در تمام حوزه‌های مهندسی یا علوم به کار ببریم، مانند سیگنال صوتی، تصویری و ... .

به این ترتیب، هر مبدلی از اطلاعات را به عنوان یک سیستم در نظر می‌گیریم و نحوه ارتباط ورودی و خروجی آن را با یک تابع ریاضی نشان می‌دهیم. اگر با سیستم‌هایی که دانش غیرمهندسی دارند سروکار داشته باشیم، سیستم‌ها را با روابط توصیفی بیان می‌کنیم. به همین خاطر، تعاریف سیگنال و سیستم بسیار جامع می‌باشند.

مهم‌ترین کاربرد تئوری سیگنال و سیستم را می‌توان «آنالیز» و «سنتز» دانست.

آنالیز به این معنی است که مدلی از سیستم پیدا کنیم که با داشتن ورودی سیستم بتوانیم خروجی آن را پیش‌بینی کنیم و به خصوصیات سیستم پی ببریم. معادل دیگر آنالیز، «شبیه‌سازی یا مدل‌سازی مستقیم» است. برای مثال، یک مدار الکتریکی را در نظر می‌گیریم. با داشتن تابع تبدیل یا انتقال ورودی به خروجی این مدار، می‌توانیم به ازای هر ورودی دلخواه که به مدار داده‌ایم، خروجی آن را محاسبه کنیم و به این ترتیب، رفتار سیستم را در برابر ورودی‌های مختلف مشخص کنیم.

سنتز به این معنی است که با استفاده از اجزای مناسب، سیستمی را طراحی کنیم که بتواند در برابر ورودی‌های مختلفی که به آن می‌دهیم، عکس‌العمل موردنظر ما را (با توجه به هدفمان از طراحی) داشته باشد.

با بهره‌گیری از تئوری سیگنال می‌توانیم:

۱ـ رفتار سیستم را نسبت به ورودی‌های مختلف بررسی کنیم.

۲ـ سیستم‌هایی را برای پردازش سیگنال طراحی کنیم.

۳ـ اطلاعات خاصی را که موردنظرمان است از سیگنال‌ها استخراج کنیم.

۴ـ سیگنال‌ها را با خصوصیات ویژه‌ای طراحی کنیم.

۵ـ مشخصه‌های یک سیستم را اصلاح و کنترل کنیم.

سیگنال‌ها

در این کتاب با انواع مختلفی از سیگنال‌ها و خواص آن‌ها سر و کار داریم. در این فصل به معرفی این سیگنال‌ها و خصوصیات کلی آنها خواهیم پرداخت و در فصل‌های آینده برای آنها سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z تعریف می‌کنیم.

مفهوم سیگنال: به هر تابع یا دنباله‌ای که شامل یک سری اطلاعات درباره رفتار یا ماهیّت یک پدیده‌ی فیزیکی باشد، یک سیگنال می‌گوییم. معمولاً سیگنال را با یک حرف کوچک انگلیسی نشان می‌دهند.

مثلاً تابعی که اندازه ولتاژ یک نقطه مشخص از یک مدار را برحسب زمان نشان می‌دهد، یک سیگنال الکتریکی است که آن را با $v(t)$ نشان می‌دهیم.

به متغیر مستقل یا تابعی از متغیر مستقل که در داخل پرانتز باشد و جلوی سیگنال قرار بگیرد، «آرگومان سیگنال» می‌گوییم. (مانند t در مثال بالا)

انواع سیگنال‌ها : در اینجا سعی می‌کنیم سیگنال‌ها را از دیدگاه‌های متفاوت دسته‌بندی کنیم:

۱) سیگنال تک‌بعدی و چندبعدی: یک سیگنال می‌تواند یک، دو و یا چند متغیر مستقل داشته باشد. به این متغیرهای مستقل، «بُعد سیگنال» می‌گوییم.

برای این که بدانیم یک سیگنال چند بعدی است، باید تعداد آرگومان‌های آن را بشماریم. البته باید دقت کنیم که آرگومان‌ها به یکدیگر وابسته نباشند.

به سیگنال‌هایی که فقط یک متغیر مستقل دارند، تک‌بعدی و به سیگنال‌هایی که بیش از یک متغیر مستقل دارند، چندبعدی می‌گوییم.

مثال ۱: سیگنال‌های $x(t)$ ، $x(t_۱,t_۲)$ و $\begin{cases} x(t_۱,t_۲,t_۳) \\ t_۱+t_۲=۲ \end{cases}$ چند بعدی‌اند؟

۱) به ترتیب ۱، ۲ و ۳ بعدی ۲) به ترتیب ۱، ۲ و ۲ بعدی ۳) به ترتیب ۱، ۲ و ۱ بعدی ۴) همگی ۲ بعدی

پاسخ: گزینه «۲» $x(t)$ تک بعدی و $x(t_۱,t_۲)$ دو بعدی است.

در مورد $x(t_۱,t_۲,t_۳)$، از آن‌جا که $t_۱$ و $t_۲$ به یکدیگر وابسته هستند $(t_۱+t_۲=۲)$، یکی از آن‌ها را به عنوان متغیر مستقل در نظر می‌گیریم که به همراه $t_۳$ یک سیگنال دو بعدی را تشکیل می‌دهند.

$x(t_۱,t_۲,...,t_n) \to$ سیگنال n بعدی

اگر برای رسم یک سیگنال، n را به عنوان بعد سیگنال در نظر بگیریم؛ برای این که بتوانیم دامنه‌ی سیگنال را هم نشان بدهیم به فضای $n+۱$ بعدی نیاز داریم. مثلاً برای رسم یک سیگنال تک‌بعدی به فضای دوبعدی نیاز داریم (یعنی یک صفحه). در این فصل فقط با سیگنال‌های تک بعدی سروکار داریم.

مثال ۲: کدام‌یک از سیگنال‌های زیر تک‌بعدی است؟

۱) سیگنال صحبت ۲) سیگنال تصویر ۳) هر دو سیگنال تک بعدی هستند. ۴) هر دو سیگنال دو بعدی هستند.

پاسخ: گزینه «۱» سیگنال صحبت، سیگنالی است که مقدار بلندی صدا را برحسب زمان نشان می‌دهد $V(t)=f(t)$، پس این سیگنال تک بعدی است و متغیر مستقل آن زمان می‌باشد.

سیگنال تصویر، تابعی است که در ساده‌ترین حالت (تصویر سیاه و سفید) اندازه‌ی روشنایی هر پیکسل از تصویر را برحسب مختصات طول و عرض آن پیکسل در صفحه‌ی نمایش نشان می‌دهد $I(x,y)=f(x,y)$. پس این سیگنال، یک سیگنال دوبعدی است، چرا که دو متغیر مستقل (طول و عرض) دارد.

۲) سیگنال زمانی و مکانی

سیگنال زمانی: به سیگنالی که متغیر مستقل آن از جنس زمان باشد، سیگنال زمانی می‌گوییم. مانند سیگنال صحبت $x(t)$

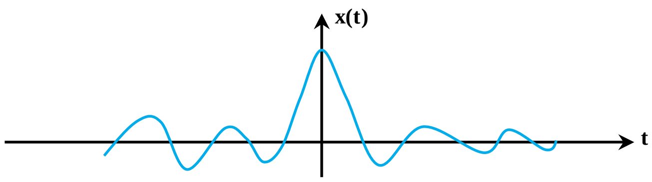
سیگنال مکانی: به سیگنالی که متغیر مستقل آن از جنس مکان باشد، سیگنال مکانی می‌گوییم. مانند سیگنال تصویر $f(x,y)$

توجه داشته باشید که در سرتاسر این کتاب ما فقط به سیگنال‌های زمانی می‌پردازیم.

۳) سیگنال زمان پیوسته CT(Continuous Time) و زمان گسسته DT(Discrete Time): در این تقسیم‌بندی، به گسسته یا پیوسته بودن متغیر مستقل مربوط به هر سیگنال، توجه کرده‌ایم.

سیگنال زمان پیوسته (CT): متغیر مستقل در سیگنال زمان پیوسته، مقادیر پیوسته دارد. مثلاً اگر در سیگنال‌های زمانی، متغیر مستقل زمان را به‌صورت پیوسته در نظر بگیریم، یک سیگنال زمان پیوسته داریم. برای مثال، سیگنال صحبت یک سیگنال زمان پیوسته است که تابع آن مقدار بلندی صدا را برحسب هر لحظه از زمان نشان می‌دهد و زمان یک متغیر پیوسته است که هر عددی می‌تواند باشد و جزء اعداد حقیقی به حساب می‌آید. معمولاً سیگنال‌های زمان پیوسته را با متغیر مستقل t نشان می‌دهیم، مانند: $x(t)$.

شکل زیر یک سیگنال زمان پیوسته را نشان می‌دهد، زیرا زمان دارای مقادیر پیوسته است.



همان‌طور که در شکل می‌بینیم، t هر مقداری می‌تواند داشته باشد و $x(t)$ در هر لحظه از زمان، مشخص است. $t \in \mathbb{R}$

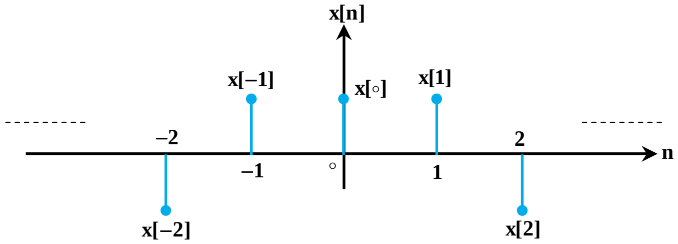
سیگنال زمان گسسته (DT): سیگنال‌های زمان گسسته تنها در زمان‌های گسسته تعریف می‌شوند. در واقع متغیر مستقل این سیگنال‌ها فقط مجموعه‌ای از مقادیر صحیح را اختیار می‌کند. یعنی nها باید صحیح باشند، ولی $x[n]$ها ($x[n]$ دامنه به ازای هر n) می‌توانند هر مقداری را بپذیرند.

$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x[n] \in \mathbb{C}$

مثلاً اگر در سیگنال زمانی، زمان که متغیر مستقل است، گسسته باشد؛ یک سیگنال زمان گسسته خواهیم داشت. برای مثال، اندازه سیگنال صحبت در لحظات خاص، یک سیگنال زمان گسسته است. معمولاً سیگنال‌های زمان گسسته را با متغیر گسسته n نشان می‌دهیم، مانند $x[n]$.

سیگنال‌های گسسته به دو صورت به دست می‌آیند؛ یا این‌که خود ماهیتاً گسسته هستند، برای مثال اطلاعاتی که مربوط به تعداد افراد، آمارگیری و جمعیت است، یا این‌که این سیگنال‌ها با برداشتن نقاطی از یک سیگنال پیوسته به دست می‌آیند که اصطلاحاً می‌گوییم، سیگنال گسسته از نمونه‌برداری از سیگنال پیوسته به دست آمده است. در اینجا برای ما فرقی نمی‌کند که سیگنالِ گسسته ماهیتاً گسسته بوده یا حاصل نمونه‌برداری از سیگنال پیوسته است.

شکل زیر یک سیگنال زمان گسسته را نشان می‌دهد.



همان‌طور که در شکل می‌بینیم در سیگنال زمان گسسته $x[n]$، متغیر مستقل که همان n است، مقادیر گسسته (اعداد صحیح) دارد و $x[n]$ نیز فقط در آن لحظات نشان داده شده است.

در حالت کلی در سیگنال‌های زمان گسسته، مقدار سیگنال در هر لحظه، یک کمیت مختلط است. اما بعضی از سیگنال‌های زمان گسسته هم هستند که مقدار $x[n]$ها در آن‌ها صحیح (گسسته) است، به این سیگنال‌ها، سیگنال‌های **دیجیتال** می‌گوییم. $n \in \mathbb{Z} \rightarrow x[n] \in \mathbb{Z}$

مثال ۳: کدام‌یک از سیگنال‌های زیر گسسته است؟

۱) شاخص هفتگی بازار سهام		۲) فشار جوی تابعی از ارتفاع		۳) درآمد متوسط خانوار		۴) گزینه ۱ و ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» شاخص هفتگی بازار سهام همان‌طور که از اسمش پیداست هفته‌ای یک بار اعلام می‌شود و لذا زمان که متغیر مستقل آن است ضریبی از یک هفته می‌باشد و متغیری گسسته است.

درآمد متوسط خانوار هم به صورت سالیانه محاسبه می‌شود و بنابراین متغیر زمان در اینجا هم گسسته است.

می‌دانیم که ارتفاع یک کمیت پیوسته است که می‌تواند هر مقداری داشته باشد، بنابراین فشار جو که تابعی از ارتفاع است، یک سیگنال پیوسته می‌باشد.

---

۴) سیگنال حقیقی و سیگنال مختلط: این تقسیم‌بندی به تابع تعریف‌کننده سیگنال (یا متغیر وابسته) بستگی دارد. یعنی اگر سیگنال $x(t)$ به صورت $x(t) = f(t)$ باشد، حقیقی یا مختلط بودن سیگنال به $f(t)$ بستگی دارد. اگر تابع تبدیل‌کننده $f(t)$ حقیقی باشد و مقدار سیگنال هم حقیقی شود، آن سیگنال یک سیگنال حقیقی است. برای مثال $x(t) = \cos(t)$ یک سیگنال حقیقی است. زیرا $\cos(t)$ یک تابع تبدیل‌کننده حقیقی است و مقدار آن در تمام زمان‌ها حقیقی است.

اما اگر تابع تبدیل‌کننده مختلط باشد و مقدار سیگنال هم مختلط شود، آن سیگنال یک سیگنال مختلط است. برای مثال $x(t) = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ یک سیگنال مختلط است، زیرا $e^{j\omega t}$ یک تابع تبدیل‌کننده مختلط است و مقدار سیگنال به ازای هر مقداری از t، مختلط می‌باشد.

نمایش دکارتی یک سیگنال مختلط: سیگنال‌های مختلط $x(t)$ را معمولاً براساس دو مؤلفه حقیقی $a(t)$ و موهومی $b(t)$ به صورت زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

$$x(t) = a(t) + jb(t) \quad , \quad a(t) = \mathrm{Re}[x(t)] \quad , \quad b(t) = \mathrm{Im}[x(t)]$$

در صورتی که سیگنال $x^*(t)$ را مزدوج سیگنال $x(t)$ بنامیم و به صورت $x^*(t) = a(t) - jb(t)$ تعریف کنیم، به روابط زیر می‌رسیم.

$$\boxed{\mathrm{Re}[x(t)] = \frac{x(t) + x^*(t)}{۲} \quad , \quad \mathrm{Im}[x(t)] = \frac{x(t) - x^*(t)}{۲j}}$$

نمایش قطبی یک سیگنال مختلط: یک روش دیگر برای نمایش سیگنال‌های مختلط، استفاده از مؤلفه‌ی دامنه $(r(t))$ و مؤلفه‌ی فاز $(\theta(t))$ به صورت زیر است:

$$x(t) = r(t)e^{j\theta(t)} \quad , \quad r(t) = |x(t)| \quad , \quad \theta(t) = \measuredangle x(t)$$

در این صورت مزدوج سیگنال $x(t)$ را می‌توانیم به صورت $x^*(t) = r(t)e^{-j\theta(t)}$ به دست آوریم و برای محاسبه مؤلفه دامنه از عبارت زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{|x(t)|^۲ = x(t).x^*(t)}$$

برای محاسبه اندازه و فاز سیگنال هم مانند اعداد مختلط می‌توانیم از روابط زیر برحسب قسمت حقیقی و موهومی سیگنال استفاده کنیم.

$$|x(t)| = r(t) = \sqrt{a^۲(t) + b^۲(t)} \;,\; \measuredangle x(t) = \theta(t) = \mathrm{Arc}\tan[\frac{b(t)}{a(t)}]$$

فاز سیگنال حقیقی: اگر در یک سیگنال مختلط، $b(t)=0$ باشد، $x(t)=a(t)$ می‌شود که یک سیگنال حقیقی است. بنابراین فاز سیگنال حقیقی برابر است با:

$$\measuredangle x(t)=\text{Arc}\tan[\frac{b(t)}{a(t)}]=\text{Arc}\tan[\frac{0}{a(t)}]=\text{Arc}\tan[0]=0 \quad \text{or} \quad \pi$$

فاز سیگنال موهومی: اگر در یک سیگنال مختلط، $a(t)=0$ باشد، $x(t)=jb(t)$ می‌شود که یک سیگنال موهومی (یا موهومی محض) است.

بنابراین فاز سیگنال موهومی برابر است با:

$$\measuredangle x(t)=\text{Arc}\tan[\frac{b(t)}{a(t)}]=\text{Arc}\tan[\frac{b(t)}{0}]=\text{Arc}\tan[\infty]=\frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad -\frac{\pi}{2}$$

۵) سیگنال انرژی و توان (قدرت) : قبل از معرفی این سیگنال‌ها، باید چند تعریف را مرور کنیم:

توان لحظه‌ای سیگنال: $p(t)$ توان لحظه‌ای سیگنال $x(t)$ می‌باشد که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\boxed{p(t)=|x(t)|^2}$$

منظور از $|x(t)|$ اندازه سیگنال $x(t)$ است و این سیگنال ممکن است مختلط هم باشد.

انرژی سیگنال: انرژی کل سیگنال زمان پیوسته (CT) در بازه زمانی $t_1<t<t_2$، برابر است با:

$$E(t)=\int_{t_1}^{t_2}p(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt$$

اگر انرژی سیگنال را به بازه زمانی $(-\infty,+\infty)$ تعمیم دهیم، انرژی کل E_∞ به دست می‌آید. در این حالت، حدود انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌شود. یعنی انرژی کل سیگنال CT برابر است با:

$$\boxed{E_\infty=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt}$$

به همین ترتیب انرژی سیگنال DT نیز در بازه $n_1\le n\le n_2$ برابر است با:

$$\boxed{E[n]=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2}$$

و انرژی کل آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2}$$

نکته۱: در سیگنال‌های گسسته به جای انتگرال، از مجموع استفاده می‌کنیم.

توان متوسط سیگنال: برای این که بتوانیم توان متوسط یک سیگنال را در یک بازه‌ی زمانی مشخص محاسبه کنیم، کافی است انرژی محاسبه شده سیگنال در بازه زمانی مشخص را بر طول آن بازه زمانی تقسیم کنیم:

$$\boxed{CT: p(t_1,t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt \qquad DT: p(n_1,n_2)=\frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2}$$

در سیگنال زمان گسسته، تعداد نقاط بین n_1 تا n_2 برابر با n_2-n_1+1 است. برای همین است که انرژی را بر این عدد تقسیم می‌کنیم.

توان متوسط کل: اگر توان متوسط را در یک بازه‌ی زمانی نامحدود از $-\infty$ تا $+\infty$ محاسبه کنیم به آن «توان متوسط کل» می‌گوییم:

$$\boxed{CT: P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{E_\infty}{2T} \qquad DT: P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{E_\infty}{2N+1}}$$

سیگنال‌ها را براساس مقدار انرژی و توان کل آن‌ها به سه دسته تقسیم می‌کنیم:

۱ــ سیگنال انرژی: سیگنالی که انرژی کل محدود دارد. $(E_\infty<\infty)$

۲ــ سیگنال توان: سیگنالی که توان کل محدود دارد. $(P_\infty<\infty)$

۳ــ سیگنال نه توان نه انرژی: سیگنالی است که هم $E_\infty=\infty$ و هم $P_\infty=\infty$ دارد، یعنی توان و انرژی محدود ندارد. چنین سیگنال‌هایی در کاربردهای مهندسی مطلوب نیستند.

نکته۲: تمام سیگنال‌های متناوب و محدود (غیرصفر) از نوع توان هستند و توان کل آن‌ها با توان روی یک دوره آن سیگنال برابر است. یعنی:

$$CT: P_\infty = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt$$

T دوره تناوب سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ و N دوره تناوب سیگنال زمان گسسته $x[n]$ است. مجموع روی یک دوره تناوب را با نماد $\sum\limits_{K=<N>}$ نشان می‌دهیم.

$$DT: P_\infty = \frac{1}{N}\sum_{K=<N>} |x[n]|^2$$

تذکر۱: روابط ارائه شده برای انرژی و توان، لزوماً معنی فیزیکی ندارند و ممکن است انرژی فیزیکی را به دست ندهند.

نکته۳: انرژی کل یک سیگنال دوره (زمان) محدود و کراندار، محدود است. بنابراین توان کل آن برابر صفر است.

$$\boxed{E_\infty < \infty \quad , \quad P_\infty = 0}$$

این نکته را می‌توانیم با استفاده از فرمول‌های انرژی و توان اثبات کنیم.

نکته۴: اگر یک سیگنال از چند بازه‌ی زمانی جداگانه تشکیل شده باشد، برای محاسبه انرژی یا توان کل، می‌توانیم انرژی یا توان هر قسمت را محاسبه و در آخر آن‌ها را با هم جمع کنیم.

E_i انرژی کل هر قسمت از سیگنال $x(t)$:	$E\{x(t)\} = \sum\limits_i E_i$
P_i توان کل هر قسمت از سیگنال $x(t)$:	$P\{x(t)\} = \sum\limits_i P_i$

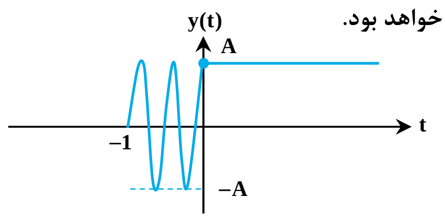
این نکته را نیز می‌توانیم توسط فرمول‌های انرژی و توان اثبات کنیم.

نکته۵: از نکات ۳ و ۴ به این نتیجه می‌رسیم که اگر دو سیگنال مختلف، فقط در یک قسمت کراندار با دوره زمانی محدود با هم تفاوت داشته باشند، توان کل آن‌ها یکسان است؛ زیرا با توجه به نکته ۳ توان کل هر قسمت کراندار با دوره زمانی محدود برابر صفر است، از این رو تأثیری در توان کل سیگنال ندارد.

اگر سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ فقط در یک قسمت کراندار و دوره محدود با هم متفاوت باشند، داریم:

$$\boxed{P\{x(t)\} = P\{y(t)\}}$$

مثال۴: سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ که در زیر نمایش داده شده‌اند در همه‌ی نقاط، جز بازه‌ی $[-1,0)$ با هم برابر هستند پس توان کل آن‌ها با هم برابر و با $P = \frac{A^2}{2}$ مساوی خواهد بود.



مثال۵: هر سیگنالی با دوره زمانی محدود و دامنه‌ی محدود:

۱) لزوماً انرژی است. ۲) لزوماً توان است. ۳) ممکن است انرژی باشد. ۴) ممکن است توان باشد.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این‌که یک سیگنال زمان محدود، فقط در یک بازه زمانی محدود مقدار دارد و همان‌طور که در صورت سؤال گفته شد، در این بازه دامنه‌ی سیگنال هم محدود است پس حتماً E_∞ یک مقدار محدود دارد و لزوماً یک سیگنال انرژی است، مثلاً اگر اندازه سیگنال در بازه محدود را برابر با ماکزیمم اندازه سیگنال در نظر بگیریم، داریم:

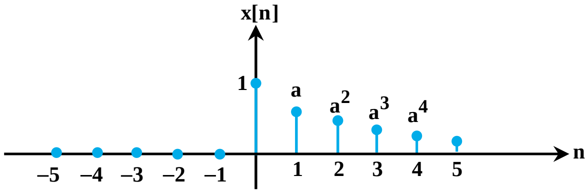
$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt \le \int_{t_1}^{t_2} |x_{max}|^2\, dt = (t_2 - t_1)|x_{max}|^2$$

در نتیجه $E_\infty < \infty$ است و سیگنال لزوماً از نوع انرژی است.

مثال ۶: انرژی کل سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به شکل مقابل برابر است با:

$$x[n]=\begin{cases} a^n & , n\geq 0 \; , \; |a|<1 \\ 0 & , n<0 \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{|a|}$ ۲) $\frac{1}{1-|a|^2}$ ۳) $1-|a|^2$ ۴) $|a|^2$



پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تعریف انرژی کل داریم:

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$$

تابع $x[n]$ یک تابع دو ضابطه‌ای می‌باشد که باید آن را به فرم زیر بنویسیم:

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{-1}|0|^2+\sum_{n=0}^{\infty}|a^n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a^n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a^2|^n=\frac{1}{1-|a^2|}=\frac{1}{1-|a|^2}$$

مثال ۷: سیگنال $|a|<1$, $x[n]=a^n$ یک سیگنال ....است.

۱) انرژی ۲) توان ۳) نه توان و نه انرژی ۴) ممکن است توان باشد.

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا انرژی کل سیگنال را محاسبه می‌کنیم:

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a^n|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a^2|^n$$

برای محاسبه بهتر است که مجموع را به دو قسمت مجزا تقسیم کنیم چرا که طریقه‌ی محاسبه $\sum_{n=0}^{\infty}|a^2|^n$ را می‌دانیم.

$$E_\infty=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}|a^2|^n}_{\text{قسمت اول}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}|a^2|^n}_{\text{قسمت دوم}}$$

ابتدا مجموع قسمت اول را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}|a^2|^n=\sum_{n=1}^{\infty}|a^2|^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|a^2|}\right)^n$$

چون $|a|<1$ است، پس $|a|^2<1$ و $\frac{1}{|a|^2}>1$ خواهد بود. بنابراین جملات سری، بزرگتر از یک هستند و سری را نامحدود می‌کنند، پس $E_\infty=\infty$ می‌شود و سیگنال از نوع انرژی نیست. از این‌رو نیازی به محاسبه مجموع قسمت دوم هم نداریم.

با توجه به تعریف توان متوسط کل داریم:

$$P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}(|a|^2)^n=\underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{0}(|a|^2)^n}_{\text{قسمت اول}}+\underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=1}^{N}(|a|^2)^n}_{\text{قسمت دوم}}$$

از آنجا که $|a|<1$ و $|a^2|<1$ است، پس قسمت دوم عبارت بالا مقدار محدودی دارد که با افزایش N $(N\to\infty)$ به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین مقدار قسمت دوم برابر صفر است. برای محاسبه‌ی قسمت اول از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{0}(|a|^2)^n=\lim\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}(|a^2|)^{-n}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}(|a|^{-2})^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\;\frac{1-|a|^{-2N}}{1-|a|^{-2}}\;\underset{N}{\overset{\text{هوپیتال}}{\underset{\text{نسبت به}}{=}}}\;\lim_{N\to\infty}\frac{+2|a|^{-2N}\ln|a|}{2(1-|a|^{-2})}=\infty$$

یادآوری هوپیتال: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$

پس $P_\infty=\infty$ است و گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۸: سیگنال $x(t)=\sin t$ از چه نوعی است؟

پاسخ: ابتدا انرژی سیگنال $x(t)$ را محاسبه می‌کنیم. طبق تعریف داریم:

$$E_\infty=\int_{-\infty}^{+\infty}|\sin t|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{2}[t-\frac{1}{2}\sin 2t]_{-\infty}^{+\infty}=\infty-\frac{1}{4}[\sin(\infty)-\sin(-\infty)]$$

با توجه به این‌که $|\sin t|\le 1$ است، پس $E_\infty=\infty$ می‌شود.

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\sin^2 t\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\frac{1}{2}[1-\cos 2t]dt$$

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}[t-\frac{1}{2}\sin 2t]_{-T}^{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}[2T-\underbrace{\frac{1}{2}(\sin 2T+\sin 2T)}_{\text{دارای مقدار محدود}}]=\lim_{T\to\infty}\frac{2T}{4T}+0=\frac{1}{2}$$

$P_\infty=\frac{1}{2}$ است، پس $x(t)$ از جنس سیگنال توان می‌باشد.

نکته ۶: سیگنالی به فرم $x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ یک سیگنال توان با توان $P_\infty=\frac{A^2}{2}$ است.

مثال ۹: کدام‌یک از سیگنال‌های زیر نه انرژی است و نه توان؟

۱) $x(t)=t$ ۲) $x(t)=e^t$ ۳) $x(n)=n^{10}$ ۴) هر سه مورد

پاسخ: گزینه «۴» برای پیدا کردن جواب، کافی است توان سیگنال را بررسی کنیم، اگر توان بی‌نهایت باشد، سیگنال نه توان است نه انرژی.

$$1)\ x(t)=t\to P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|t|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}[\frac{2T^3}{3}]=\infty$$

$$2)\ x(t)=e^t\to P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|e^t|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{2t}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}[e^{2T}-e^{-2T}]=\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{e^{2T}}{4T}}_{\text{قسمت اول}}-\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\frac{1}{e^{2T}}}_{\text{قسمت دوم}}$$

برای رفع ابهام قسمت اول از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{e^{2T}}{4T}\ \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\ \lim_{T\to\infty}\frac{2e^{2T}}{4}=\infty\Rightarrow P_\infty=\infty$$

$$3)\ x[n]=n^{10}\ \Rightarrow P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}n^{20}\ge\lim_{N\to\infty}\frac{N^{20}}{2N+1}=\infty$$

بنابراین هر سه سیگنال، نه انرژی هستند و نه توان.

مثال ۱۰: اگر سیگنال $x_1(t)$ یک سیگنال توان با توان P_1 ، سیگنال $x_2(t)$ یک سیگنال توان با توان P_2 باشد، کدام گزینه در مورد توان سیگنال $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$ حتماً صحیح است؟

۱) $P=P_1+P_2$ ۲) $P\ge P_1+P_2$ ۳) $P\le P_1+P_2$ ۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۴»

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(x_1(t)+x_2(t))^2dt=\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_1^2(t)dt+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_2^2(t)dt$$

$$+\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_1(t)x_2(t)dt]=P_1+P_2+\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_1(t)x_2(t)dt}_{A}$$

با توجه به اینکه A می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. بنابراین هیچ‌کدام از گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ نمی‌توانند حتماً صحیح باشند.

مثال ۱۱: **توان سیگنال** $x(t)=\begin{cases}A\cos(\omega_0 t+\phi) & ; \ t\ge 0\\ 0 & ; \ t<0\end{cases}$ **عبارت است از:**

۱) A^2 ۲) $\frac{A^2}{2}$ ۳) $\frac{A^2}{4}$ ۴) $2A^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این سیگنال برخلاف سیگنال $A\cos(\omega_0 t+\phi)$ متناوب نیست. به این خاطر که فقط برای مقادیر $t\ge 0$ تعریف شده است و برای $t<0$ مقدار صفر دارد. طبق تعریف توان داریم:

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$$

حدود انتگرال را در زمان‌های منفی و مثبت تفکیک می‌کنیم:

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{0}0\,dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{0}^{T}A^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T\frac{A^2}{2}[1+\cos 2(\omega_0 t+\phi)]dt=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}[t+\frac{1}{2}\sin 2(\omega_0 t+\phi)]_0^T$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}[T+\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2(\omega_0 T+\phi)-\frac{1}{2}\sin 2\phi}_{\text{مقدار این انتگرال محدود است.}}]=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2T}{4T}=\frac{A^2}{4}$$

مثال ۱۲: **کدام یک از گزینه‌های زیر، نوع سیگنال زیر را نشان می‌دهد؟**

$$x[n]=e^{j(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{3})-n}$$

۱) انرژی ۲) توان ۳) نه توان و نه انرژی ۴) ممکن است توان باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا انرژی سیگنال را محاسبه می‌کنیم.

$$x[n]=e^{j(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{3})-n}\Rightarrow E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|e^{j(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{3})-n}|^2$$

همان‌طور که می‌دانید اعداد مختلط دارای یک اندازه (r) و یک زاویه (θ) هستند که آن‌ها را به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم: $x+jy=re^{j\theta}$

اگر عبارت بالا را با فرم کلی یک عدد مختلط مقایسه کنیم متوجه می‌شویم که $|e^{j(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{3})-n}|=\underbrace{|e^{j(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{3})}|}_{=1}.|e^{-n}|=e^{-n}$ می‌باشد. بنابراین:

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}e^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\infty$$

پس سیگنال از نوع انرژی نمی‌باشد. در ادامه توان را محاسبه می‌کنیم.

$$P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}e^{-n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}[\sum_{n=-N}^{0}e^{-n}+\underbrace{\sum_{n=1}^{N}e^{-n}}_{\text{مقدار محدود دارد.}}]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\frac{e^N-1}{e-1}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\frac{e^N}{2}=\infty$$

پس سیگنال نه از نوع انرژی است و نه از نوع توان. باید اشاره کنیم که در اینجا برای درک بهتر مطلب، مراحل حل مسأله را با جزئیات بیان کردیم، اما در کنکور، شما باید از لحاظ توانایی ریاضی بتوانید این تحلیل‌ها را به صورت ذهنی انجام دهید.

تبدیل سیگنال‌ها

در تبدیل یا پردازش سیگنال‌ها، دو نوع تبدیل رایج است. بعضی از تبدیلات روی متغیر وابسته $(y(t), x(t))$ و سایر آن‌ها روی متغیر مستقل (t) اثر می‌کنند. به عنوان نمونه‌ای از تبدیلات متغیر وابسته می‌توانیم به مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری سیگنال‌های پیوسته و جمع یا تفریق دو سیگنال و ضرب سیگنال در یک اسکالر اشاره کنیم. در این تبدیلات فقط مقدار سیگنال (دامنه تابع) تغییر می‌کند و محور زمان تغییری نمی‌کند.

اما تبدیلات متغیر مستقل روی محور زمانی تأثیر دارند و معمولاً از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. به همین دلیل در ادامه این بخش، انواع این تبدیلات را معرفی خواهیم کرد.

به طور معمول، دو نوع تبدیل روی سیگنال وجود دارد.

تبدیل نوع اول: تبدیل بر روی آرگومان سیگنال انجام می‌گیرد. محور زمان در طی این نوع تبدیل تغییر می‌کند ولی دامنه سیگنال بدون تغییر باقی می‌ماند. معمولاً این نوع پردازش اهمیت زیادی دارد.

تبدیل نوع دوم: تبدیل بر روی خود سیگنال انجام می‌شود و مقدار و دامنه سیگنال تغییر می‌کند، ولی محور زمان تغییری نمی‌کند. این نوع تبدیل در اثر مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری سیگنال پیوسته و جمع یا تفریق دو سیگنال و ضرب سیگنال در یک اسکالر انجام می‌شود.

در ادامه انواع تبدیلات نوع اول را بررسی می‌کنیم.

۱) انتقال زمانی (تأخیر یا پیشی): اگر t را به $t-t_0$ و n را به $n-n_0$ تبدیل کنیم، دو سیگنال مشابه خواهیم داشت که نسبت به هم جابه‌جا شده‌اند، به عبارت دیگر روی محور زمان انتقال پیدا کرده‌اند.

$$\boxed{\begin{matrix} t \to t-t_0 \\ n \to n-n_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x(t) \to x(t-t_0) \\ x[n] \to x[n-n_0] \end{matrix}}$$

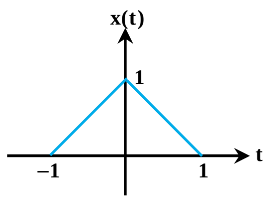
این جابه‌جایی دو حالت دارد:

الف) اگر $t_0<0$ $(n_0<0)$ باشد، آن‌گاه سیگنال $x(t-t_0)$ $(x[n-n_0])$ نسبت به سیگنال $x(t)$ $(x[n])$ به اندازه t_0 (n_0) به سمت چپ منتقل می‌شود. این حالت را پیشی گرفتن سیگنال $x(t-t_0)$ $(x[n-n_0])$ نسبت به $x(t)$ $(x[n])$ می‌گویند.

ب) اگر $t_0>0$ $(n_0>0)$ باشد، آن‌گاه سیگنال $x(t-t_0)$ $(x[n-n_0])$ نسبت به سیگنال $x(t)$ $(x[n])$ به اندازه t_0 (n_0) به سمت راست منتقل می‌شود. این حالت را تأخیر یافته $x(t)$ $(x[n])$ می‌گویند.

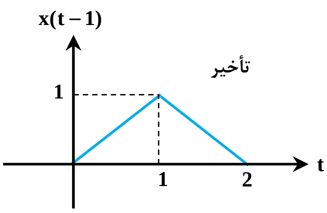
تذکر۲: انتقال زمانی برای سیگنال‌های زمان گسسته، باید یک عدد صحیح باشد، یعنی $n_0 \in \mathbb{Z}$ باشد.

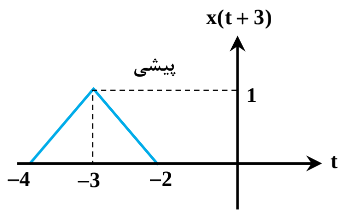
مثال۱۳: فرض کنید $x(t)$ به شکل مقابل باشد. $x(t-1)$ و $x(t+3)$ را به‌دست آورید.



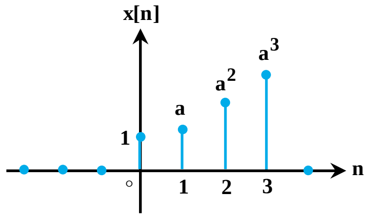
پاسخ: برای رسم $x(t-1)$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

ابتدا باید محور زمان را با مقدار ریشه آرگومان (که عدد ۱+ است) جمع کنیم. در این حالت، همانند شکل سمت چپ، عدد ۱- روی محور زمان سیگنال $x(t)$ (با دامنه صفر) به عدد صفر روی محور زمان سیگنال $x(t-1)$ با همان دامنه تبدیل می‌شود. قدم بعدی جمع عدد صفر روی محور زمان سیگنال $x(t)$ با دامنه یک با عدد ۱+ می‌باشد که به عدد ۱ روی محور زمان $x(t-1)$ با دامنه ۱ تبدیل می‌شود. برای عدد ۱ روی محور زمان سیگنال $x(t)$ هم به همین ترتیب عمل می‌کنیم، سپس ۳ نقطه به دست آمده را طوری به یکدیگر متصل می‌کنیم که شبیه سیگنال $x(t)$ شود. راه دیگر این است که کل شکل $x(t)$ را یک واحد به سمت راست بکشیم. برای رسم $x(t+3)$ هم محور زمان را با حفظ دامنه، با مقدار ۳- جمع می‌کنیم.

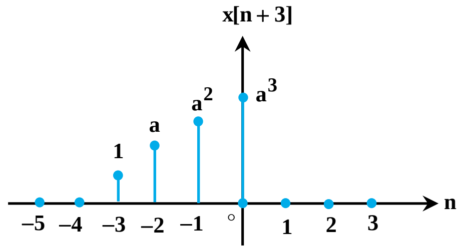


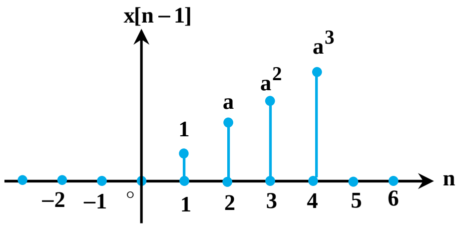


مثال ۱۴: شکل زیر $x[n]$ را نشان می‌دهد. $x[n-1]$ و $x[n+3]$ را رسم کنید.



پاسخ: $x[n-1]$ یک واحد تأخیر و $x[n+3]$ سه واحد پیشی نسبت به $x[n]$ دارند.



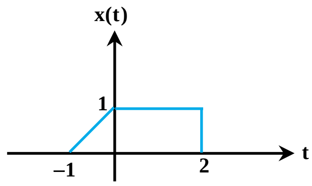


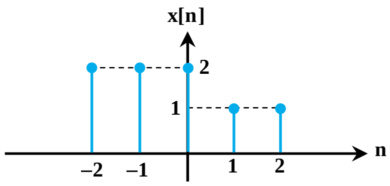
۲) معکوس شدن زمان (قرینگی نسبت به محور عرض‌ها): با تبدیل t به $-t$ یا n به $-n$، سیگنال نسبت به محور عمودی ($t=0$ یا $n=0$) قرینه خواهد شد.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} t \to -t & \Rightarrow & x(t) \to x(-t) \\ n \to -n & & x[n] \to x[-n] \end{array}}$$

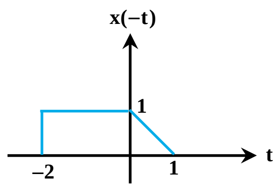
برای این که معکوس زمانی یک سیگنال را به دست بیاوریم کافی است قرینه سیگنال نسبت به محور عمودی را رسم کنیم.

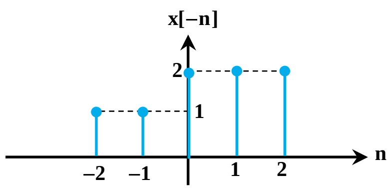
مثال ۱۵: $x(t)$ و $x[n]$ سیگنال‌هایی به صورت زیر هستند. $x(-t)$ و $x[-n]$ را به دست آورید.





پاسخ: با توجه به معکوس شدن زمان، کافی است قرینه‌ی سیگنال‌های $x(t)$ و $x[n]$ را نسبت به محور عمودی رسم کنیم.





۳) مقیاس‌دهی زمانی: وقتی که t به αt و n به αn تبدیل شود، سیگنال در طول محور زمان فشرده یا گسترده می‌شود.

$$\boxed{\begin{array}{llcl} t \to \alpha t & \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 & \Rightarrow & x(t) \to x(\alpha t) \\ n \to \alpha n & \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 0 & & x[n] \to x[\alpha n] \end{array}}$$

با توجه به مقادیر α، حالت‌های مختلفی داریم:

۱ـ اگر $|\alpha|<1$ باشد، سیگنال $x(t)$ را به اندازه $\frac{1}{|\alpha|}$ به‌صورت خطی باز می‌کنیم (گسترده می‌کنیم).

۲ـ اگر $|\alpha|>1$ باشد، سیگنال $x(t)$ را به اندازه $\frac{1}{|\alpha|}$ به‌صورت خطی فشرده می‌کنیم.

در واقع در مقیاس‌دهی زمانی، هر نقطه $(t_0, x(t_0))$ در سیگنال $x(t)$، به نقطه $(\frac{t_0}{\alpha}, x(t_0))$ در $x(\alpha t)$ نگاشت می‌شود، بنابراین برای به دست آوردن سیگنال $x(\alpha t)$ یا $x[\alpha n]$ کافی است محور زمان را در $\frac{1}{\alpha}$ ضرب کنیم. برای به دست آوردن سیگنال $x(\frac{t}{\alpha})$ هم، تنها باید محور زمان را در α ضرب کنیم.