مدرسان شریف

فصل اول

«آنالیز ترکیبی و احتمال»

درسنامه (۱): آنالیز ترکیبی

همانطور که از عنوان اولیه فصل در بالا مشخص است در این فصل راجع به روش‌های شمارش کردن صحبت خواهیم کرد. اما روش‌های شمارش به چه مفهوم‌اند؟ کاربرد آن‌ها چیست؟ شامل چه مسائلی می‌شوند؟ در پاسخ به این سؤالات می‌توان گفت در بسیاری از اوقات رویدادهایی وجود دارند که در وقوع آن‌ها حالت‌های بسیار زیادی ممکن است ایجاد شود، به طور مثال در ۳ بار پرتاب یک تاس حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

$\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۱,۳),\ldots\}$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که تعداد حالات ایجاد شده بسیار زیاد است و نمی‌توانیم آنها را به صورت مستقیم شمارش کنیم و یا اگر هم بتوانیم، شمارش کردن حالت‌های آن‌ها بسیار وقت‌گیر و پیچیده است. در این شرایط، اصولی طراحی شده است که بتوان این حالات را به راحتی و بسیار سریع شمارش کرد. اما شاید اکنون این سؤال در ذهن شما ایجاد شود که کاربرد و دانستن نتایج این رویداد و شمارش حالات نتایج آن در چه مسائلی کاربرد دارد و اصولاً فهمیدن این مطلب در کجا سودمند است؟ در پاسخ به این سؤال نیز می‌توان گفت که ما برای محاسبه احتمالات، که امروزه نقش بسیار مهمی را در علوم مهندسی بازی می‌کنند، نیاز به دانستن تعداد حالات رویدادها داریم که در بخش دوم این فصل به تفصیل به آن خواهیم پرداخت. بنابراین این فصل به دو بخش روش‌های شمارش (که به آنها آنالیز ترکیبی نیز گفته می‌شود) و احتمالات تقسیم شده است که در ابتدا اصول شمارش بیان می‌شوند و در بخش بعدی به محاسبه احتمالات و کاربرد روش‌های شمارش در محاسبه آنها خواهیم پرداخت. روش‌های شمارش به طور کلی به پنج روش **اصل‌ضرب**، **اصل جمع**، **جایگشت**، **ترتیب و ترکیب** تقسیم شده‌اند که در ادامه به بحث و بررسی بر روی آن‌ها خواهیم پرداخت.

قوانین شمارش

اصل ضرب (اصل اساسی شمارش)

❖ **تعریف:** اصل شمارش زیر، مبنای همه روش‌های شمارش به حساب می‌آید. به زبان ساده، این اصل می‌گوید اگر آزمایشی (عملی) بتواند m نتیجه ممکن داشته باشد و آزمایش دیگر n نتیجه ممکن، آنگاه دو آزمایش توأماً می‌توانند mn نتیجه ممکن داشته باشند.

اصل اساسی شمارش

❖ **تعریف:** فرض کنید دو آزمایش باید اجرا شوند. اگر آزمایش ۱ بتواند یکی از m نتیجه ممکن را کسب نماید و برای هر نتیجه آن، n نتیجه ممکن برای آزمایش ۲ وجود داشته باشد؛ آنگاه برای دو آزمایش با هم، mn نتیجه ممکن وجود خواهد داشت.

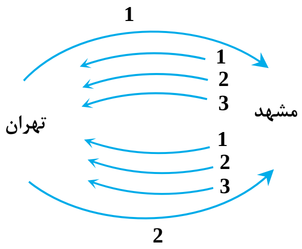
مثال ۱: جامعه‌ای کوچک متشکل از ۱۰ مادر است که هر کدام ۳ فرزند دارند. اگر بخواهیم یکی از مادران و یکی از فرزندانش را به عنوان مادر و فرزند نمونه سال انتخاب کنیم، چند حالت ممکن وجود دارد؟

☑ **پاسخ:** با انتخاب یکی از مادران به عنوان نتیجه آزمایش اول و انتخاب یکی از فرزندان وی به عنوان نتیجه آزمایش دوم، بر طبق اصل اساسی شمارش، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر با $۱۰\times۳=۳۰$ است.

وقتی که بیش از دو آزمایش انجام گیرد. اصل اساسی به صورت زیر قابل تعمیم است.

❖ **تعریف:** اگر r آزمایش انجام گیرد، به طوری که اولین آزمایش n_1 نتیجه ممکن داشته باشد و برای هر نتیجه آزمایش اول، n_2 نتیجه ممکن برای آزمایش دوم و برای هر نتیجه از دو آزمایش اول و دوم، n_3 نتیجه ممکن برای آزمایش سوم و ... وجود داشته باشد؛ آنگاه $n_1\times n_2\times\ldots\times n_r$ نتیجه ممکن برای r آزمایش وجود خواهد داشت. برای فهم بهتر این تعریف بسیار مهم لطفاً به مثال‌های بعد توجه کنید:

مثال ۲: برای رفتن از تهران به مشهد ۲ مسیر رفت و برای برگشت به ازای هر مسیر رفت ۳ مسیر برگشت وجود دارد. به چند طریق می‌توان از طریق تهران به مشهد رفت و برگشت کرد؟



☑ **پاسخ:** با توجه به اصل ضرب گفته شده برای رفتن از تهران به مشهد دو مسیر رفت و به ازای هر مسیر رفت ۳ مسیر برگشت وجود دارد. بنابراین بـه $۲\times۳=۶$ حالت می‌توان از تهران به مشهد رفت و برگشت کرد. بـدین ترتیـب، کـل مسیرهای رفت و برگشت با کمک اصل ضرب شمرده شد.

مثال ۳: با حروف کلمه «تهران» چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت؟

الف) اگر تکرار حروف مجاز باشد.

۱) ۶۰۰ ۲) ۶۲۵ ۳) ۷۰۵ ۴) ۱۲۰

ب) اگر تکرار حروف مجاز نباشد.

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۶۱۰

☑ **پاسخ:** الف: گزینه «۲» کلمه «تهران» ۵ حرف مختلف دارد، برای هر حرف کلمه چهار حرفی مورد نظر ۵ انتخاب وجود دارد. بنابراین طبـق اصـل ضـرب تعداد حالات برابر است با: (توجه کنید که در اینجا تکرار حروف مجاز است یعنی در هرجایگاه می‌توانیم از ۵ حرف کلمه «تهران» استفاده کنیم.)

$۵\times۵\times۵\times۵=۶۲۵$

ب : گزینه «۱» چون تکرار حروف مجاز نیست برای حرف اول کلمه چهار حرفی مورد نظر، ۵ انتخاب داریم؛ یعنی حروف «ت»، «هـ»، «ر»، «الـف» و «ن» برای حرف دوم آن ۴ انتخاب (یک حرف را حذف می‌کنیم) برای حرف سوم آن ۳ انتخاب و برای حرف چهارم آن ۲ انتخاب وجود دارد، بنابراین تعـداد کـل حالات برابر است با: $۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$

مثال ۴: با ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

الف) تکرار ارقام مجاز است.

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۵۰

ب) تکرار ارقام مجاز نیست.

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰۰

☑ **پاسخ:** نوشتن یک عدد سه رقمی شامل انتخاب رقم صدگان ، رقم دهگان و رقم یکان است بنابراین:

الف) گزینه «۳» توجه کنید که تکرار مجاز است پس رقم صدگان می‌تواند یکی از ارقام ۱ تا ۵ به ۵ طریق و رقم دهگان نیز مانند رقم صدگان به ۵ طریق و رقم یکان نیز به ۵ طریق می‌تواند از بین ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ انتخاب داشته باشد. بنابراین طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$۵\times۵\times۵=۱۲۵$

ب) گزینه «۳» رقم صدگان یکی از ارقام ۱ تا ۵ به ۵ طریق، رقم دهگان به ۴ طریق (ارقام باقیمانده) و رقم یکان به ۳ طریق ارقام باقیمانده پـس از حـذف رقـم دهگان و صدگان می‌تواند انتخاب شود. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با:

$۵\times۴\times۳=۶۰$

مثال ۵: با ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۲۲ ۲) ۷۵ ۳) ۶۰ ۴) ۴۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در اینجا ابتدا رقم یکان به ۳ طریق (ارقام ۱ یا ۳ یا ۵) انتخاب می‌شود، چرا که می‌خواهیم عدد ساخته شده فرد باشد سپس بـه غیر از صفر و عدد انتخاب شده در رقم یکان رقم صدگان می‌تواند انتخاب شود (۴ طریق) و در رقم دهگان نیز به غیر از رقم یکان و صدگان بـه عـلاوه عـدد صفر به ۴ طریق ممکن است اعداد باقیمانده انتخاب شوند بنابراین تعداد حالات طبق اصل ضرب برابر است با:

$۴\times۴\times۳=۴۸$

مثال۶: چند عدد سه رقمی وجود دارد؟

۱) ۸۰۰　۲) ۹۰۰　۳) ۹۹۹　۴) ۱۰۰۰

پاسخ: گزینه «۲» به طور کلی زمانی که ارقامی را مشخص نکرده باشند ارقام $\{0,1,2,...,9\}$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا چون تکرار مجاز است، ابتدا در رقم صدگان ۹ انتخاب به جز عدد صفر داریم و در رقم دهگان و یکان علاوه بر ۹ رقم گفته شده صفر نیز اضافه می‌شود: $9\times10\times10=900$

توجه: هرگاه مجموعهٔ ارقام مشخص نشده باشد، مجموعهٔ ارقام را $\{0,1,2,...,9\}$ در نظر می‌گیریم.

مثال۷: چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

۱) ۱۲۵۶　۲) ۱۵۷۶　۳) ۱۸۰۰　۴) ۲۰۰۰

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید اعدادی مضرب ۵ هستند که رقم یکان آنها صفر یا ۵ باشد. پس برای یکان دو انتخاب (۰ یا ۵)، برای هزارگان به جز صفر، ۹ انتخاب (ارقام ۱ تا ۹) و در رقم صدگان و دهگان ۱۰ انتخاب داریم، (علاوه بر ارقام ۱ تا ۹، صفر نیز اضافه می‌شود)، چرا که اشاره‌ای به غیر مجاز بودن نشده است و تکرار مجاز است؛ بنابراین تعداد اعداد چهار رقمی مضرب ۵ برابر است با: $9\times10\times10\times2=1800$

اصل جمع

❖ **تعریف:** فرض کنید کاری را بتوان با دو عمل A یا B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام شوند و همزمان رخ دادن این دو عمل ممکن نباشد، آنگاه این کار به $m+n$ طریق انجام می‌پذیرد. در واقع تفاوت این تعریف با تعریف اصل ضرب در آن است که در اینجا عمل‌ها موازی انجام می‌شوند در حالی که در اصل ضرب در راستای یکدیگر بودند به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال۸ : به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانشجوی صنایع، ۴ دانشجوی الکترونیک و ۲ دانشجوی کامپیوتر، کمیته‌ای ۲ نفری انتخاب کرد به طوری که اعضای کمیته هم رشته نباشند؟

۱) ۲۶　۲) ۶　۳) ۸　۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۱» طبق اصل ضرب به $12 = 4\times3$ طریق از رشته صنایع و رشته الکترونیک می‌توان دو دانشجو انتخاب کرد. از رشته کامپیوتر و صنایع $6 = 3\times2$ طریق و از رشته الکترونیک و کامپیوتر به $8 = 2\times4$ طریق بنابراین طبق اصل جمع، کمیته دو نفره را به $26 = 6+8+12$ طریق می‌توان انتخاب کرد.

مثال۹: از بین ارقام $\{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام و بزرگتر از ۴۱۰ می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۵۰۴　۲) ۵۶۷　۳) ۷۲۰　۴) ۲۷۲

پاسخ: گزینه «۴» توجه کنید که باید اعداد را به تفکیک شمارش کنیم. در مرحله‌ی اول عدد چهار را در صدگان و عدد یک را در دهگان قرار می‌دهیم (می‌خواهیم اعداد ...۴۱۱ را شمارش کنیم) حال برای این که عدد سه رقمی بزرگتر از ۴۱۰ باشد تمام اعداد را می‌توانیم در یکان قرار دهیم، به جز صفر و اعداد انتخاب شده در دهگان و صدگان که در این صورت ۶ حالت وجود دارد، شامل ارقام $\{2,3,5,6,7,9\}$

$$\underset{\text{عدد ۴}}{\frac{1}{}}\times\underset{\text{عدد یک}}{\frac{1}{}}\times\underset{\text{هر عددی به جز صفر و اعداد صدگان و دهگان}}{\frac{6}{}}=6$$

در این مرحله اعداد ۴۱۰ تا ۴۱۹ را شمردیم.

در مرحله بعد تعداد اعداد بزرگتر از ۴۱۹ تا ۴۹۹ را محاسبه می‌کنیم. برای این کار عدد ۴ را در صدگان قرار می‌دهیم سپس به جز صفر و یک هر عددی را در دهگان می‌توانیم قرار دهیم. و همین‌طور برای یکان.

$$\underset{\text{عدد ۴}}{\frac{1}{}}\times\underset{\text{به جز صفر و یک و عدد انتخاب شده در صدگان}}{\frac{6}{}}\times\underset{\text{بقیه‌ی اعداد}}{\frac{7}{}}=42$$

در مرحله سوم تعداد اعداد بزرگتر و مساوی ۵۰۰ را محاسبه می‌کنیم.

$$\underset{\text{اعداد ۵ و بیشتر}}{\frac{4}{}}\times8\times7=224$$

چرا باید در حل این سؤال حالت‌ها را تفکیک می‌کردیم؟ اگر بخواهیم هر سه مرحله را در یک مرحله انجام دهیم، حالاتی اضافه یا کم شمرده می‌شوند! در صدگان هر عدد بزرگتر از ۵ را می‌توان قرار داد که برابر ۴ حالت است. سپس برای دهگان و یکان با توجه به عدم تکرار ارقام تعداد حالات را محاسبه می‌کنیم، در نهایت با استفاده از اصل جمع داریم:

مثلاً اگر در صدگان اعداد بزرگتر از ۴ قرار گیرد و ما بی‌توجه در دهگان، ارقام دیگر مثلاً صفر را قرار دهیم شرط بزرگتر از ۴۱۰ یا بدون تکرار بودن نقض می‌شود مثلاً عدد ۴۰۶ یا عدد ۵۵۲ را شمارش کرده‌ایم که هر دو این اعداد باعث نقض صورت مسئله می‌شوند. $\text{کل حالات} = 224+42+6=272$

مثال۱۰: چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار)

۱) ۱۸۸۰ ۲) ۲۰۲۰ ۳) ۱۷۹۲ ۴) ۲۲۹۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در حالتی که صفر در مجموعه‌ی اعداد وجود دارد و در مطلوب مسئله (زوج بودن) تأثیرگذار است، مسئله را در دو حالت زیر حل می‌کنیم.

مرحله‌ی اول: حالتی را در نظر می‌گیریم که صفر در یکان قرار نگیرد. توجه کنید که کلیه ارقام $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ در نظر گرفته شده است: که در این صورت برای زوج بودن عدد ۴ حالت برای یکان وجود دارد: ارقام $\{2,4,6,8\}$ توجه کنید که صفر در هزارگان نمی‌تواند قرار گیرد. بنابراین ارقام باقیمانده بین صفر تا ۹ یکی برای یکان حذف شده و صفر هم که در هزارگان قرار نمی‌گیرد (۸ حالت) ولی در انتخاب صدگان و دهگان می‌تواند صفر قرار گیرد.

هزارگان صدگان دهگان یکان

$8 \times 8 \times 7 \times 4 = 1792$

مرحله دوم: حالتی را در نظر می‌گیریم که فقط صفر در یکان باشد (۱ حالت) پس بقیه ارقام ۱ تا ۹ می‌توانند در هزارگان قرار گیرند و ۸ حالت برای صدگان و ۷ حالت برای دهگان چرا که تکرار مجاز نیست.

هزارگان صدگان دهگان یکان

$9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$

طبق اصل جمع برای کل حالت مجموع حالات اول و دوم برابر است با:

$1792 + 504 = \boxed{2296}$

تبدیل یا جایگشت

حالاتی را که می‌توان اشیاء یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد جایگشت یا تبدیل گویند. به عنوان مثال دو عضو A و B دو جایگشت به صورت AB و BA دارند. یا مثلاً A و B و C دارای جایگشت‌های ABC و ACB و BAC و BCA و CAB و CBA دارند.

جایگشت‌های مهم عبارتند از:

جایگشت خطی، جایگشت دایره‌ای، جایگشت یک در میان، جایگشت با تکرار که در ادامه به توضیح آنها خواهیم پرداخت.

جایگشت خطی: اگر n عضو متمایز را بخواهیم در کنار یکدیگر در یک خط (صف) قرار دهیم تعداد جایگشت‌های مختلف این عناصر برابر است با:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (2) \times (1) = n!$$

مثلاً ۴ نفر را به $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ طریق می‌توان در یک صف مرتب کرد.

مثال۱۱: به چند طریق می‌توان ۳ دانشجوی رشته کامپیوتر و ۴ دانشجوی رشته الکترونیک را در کنار یکدیگر در یک صف مرتب کرد به طوری که دانشجویان هم رشته در کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۸۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ۳ دانشجوی رشته کامپیوتر را یک گروه (A) و ۴ دانشجوی رشته الکترونیک را گروهی دیگر (B) فرض می‌کنیم.

c c c (A) e e e e (B)

اکنون این دو گروه به !۲ طریق جابجایی دارند، اما در بین خود دانشجویان کامپیوتر !۳ و گروه دانشجویان الکترونیک !۴ جایگشت (جابه‌جایی) وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underbrace{2!}_{\text{جابه‌جایی دو گروه}} \times \underbrace{3!}_{\text{خود دانشجویان کامپیوتر}} \times \underbrace{4!}_{\text{خود دانشجویان الکترونیک}} = 288$$

مثال۱۲: به چند طریق می‌توان ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه را در یک خط مرتب کرد به طوری که <u>مهره‌های سفید</u> در کنار یکدیگر باشند؟ (همه مهره‌ها متمایزند)

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» سفید: W سیاه: B مهره‌های سفید را یک گروه فرض می‌کنیم $\underset{1}{\text{W W}}\ \underset{2}{\text{B}}\ \underset{3}{\text{B}}\ \underset{4}{\text{B}}$ توجه کنید که به مهره‌های سیاه کاری نداریم؛ بنابراین اکنون ۴ مهره داریم با !۴ جایگشت اما خود مهره‌های سفید نیز به !۲ طریق جابجایی دارند بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{4!}_{\text{کل مهره‌ها}} \times \underbrace{2!}_{\text{جابه‌جایی مهره‌های سفید}} = 48$$

مثال ۱۳: به چند طریق می‌توان ۴ فوتبالیست و ۴ والیبالیست را در یک صف مرتب کرد به طوری که فوتبالیست‌ها در کنار یکدیگر و در سمت چپ والیبالیست‌ها قرار گیرند؟

۱) $2\times(4!)^2$ ۲) $(4!)^2$ ۳) $4!$ ۴) $\frac{4!}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ۴ فوتبالیست را یک دسته اختیار می‌کنیم اما توجه کنید که فوتبالیست‌ها باید در سمت چپ والیبالیست‌ها قرار گیرند در نتیجه لازم است والیبالیست‌ها نیز کنار یکدیگر قرار گیرند. بنابراین فقط $4!$ جایگشت برای والیبالیست‌ها و $4!$ جایگشت برای فوتبالیست‌ها داریم. پس تعداد حالات برابر است با: $4!\times 4!$

والیبالیست والیبالیست والیبالیست والیبالیست $\boxed{\text{فوتبالیست فوتبالیست فوتبالیست فوتبالیست}}$

مثال ۱۴: شخصی با ۵ نفر از دوستانش وارد اتاق می‌شود اگر خودش نشست بقیه به چند صورت می‌توانند در کنار او (در یک ردیف) بنشینند؟

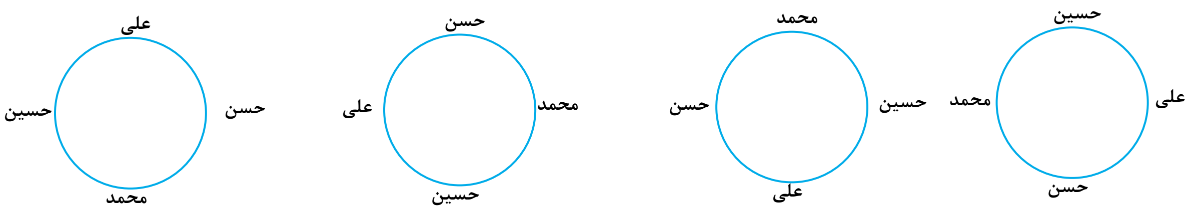
۱) $5!$ ۲) $6!$ ۳) $4!$ ۴) $7!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای خود شخص ۶ حالت نشستن و برای ۵ نفر دوستانش $5!$ طریق جایگشت داریم بنابراین: تعداد کل حالات $=6\times 5!=6!$

جایگشت دایره‌ای (دوری) : تعداد حالاتی که می‌توان n عنصر متمایز را به صورت دایره‌ای در کنار یکدیگر قرار داد برابر است با: $(n-1)!$

مثلاً ۵ نفر را به $(5-1)!=4!$ طریق می‌توان دور یک میز گرد مرتب کرد.

چرا؟ در جایگشت دایره‌ای برخلاف جایگشت خطی **مدل قرار گرفتن** مهم است، نه **محل قرار گرفتن**، به طور مثال فرض کنید علی، محمد، حسین و حسن می‌خواهند دور یک میز گرد بنشینند. با توجه به این‌که گفته شد مدل قرار گرفتن مهم است حالات زیر یکسان است؛ چرا که همواره حسین بعد از علی، محمد بعد از حسین، حسن بعد از محمد و علی بعد از حسن قرار دارد و این نشان می‌دهد که فقط جای افراد تغییر کرده است و شیوه نشستن آنها با توجه به مطلب گفته شده یکی است.



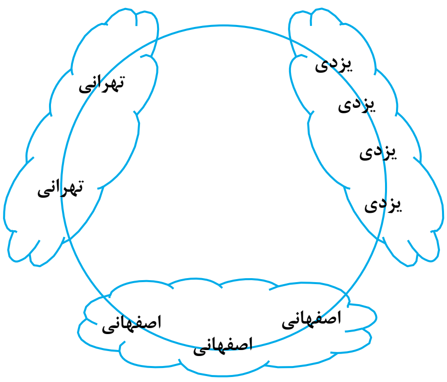
4 3 2 1

بنابراین برای برطرف کردن این مشکل می‌توانیم یک عضو را مبدأ فرض کنیم و بقیه را مانند حالت خطی نسبت به مبدأ جابه‌جا کنیم یعنی از چهار نفر یک نفر ثابت و سه نفر دیگر نسبت به این فرد به $3!$ طریق جابجا می‌شوند و در مورد تعمیم این موضوع می‌توان گفت یک نفر ثابت و $n-1$ نفر دیگر نسبت به این فرد ثابت جابه‌جا می‌شوند که برابر با $(n-1)!$ است.

مثال ۱۵: به چند طریق می‌توان ۲ تهرانی، ۳ اصفهانی و ۴ یزدی را دور یک میز گرد مرتب کرد به طوری که همشهری‌ها پهلوی یکدیگر قرار بگیرند؟

☑ **پاسخ:** ابتدا تهرانی‌ها ، اصفهانی‌ها و یزدی‌ها را به صورت گروهی فرض می‌کنیم اکنون این ۳ گروه به $2!$ طریق مختلف دور میز مرتب می‌شوند. اما مابین خود گروه‌ها نیز جایگشت داریم. برای تهرانی‌ها $2!$ برای اصفهانی‌ها $3!$ و برای یزدی‌ها $4!$ جایگشت وجود دارد. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{(3-1)!}_{\text{بین گروه‌ها}}\times\underbrace{2!}_{\text{تهرانی‌ها}}\times\underbrace{3!}_{\text{اصفهانی‌ها}}\times\underbrace{4!}_{\text{یزدی‌ها}}=576$$



مثال۱۶: **۶ نفر برای نشستن دور یک میز گرد وارد اتاقی می‌شوند. به چند طریق ممکن است فرد خاصی در جای ثابتی بنشینند؟**

۱) $6\times 5!$ ۲) $6!$ ۳) $5!$ ۴) $4!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هر گاه کلمه‌ی خاص گفته می‌شود به مفهوم آن است که عنصر یا فرد مورد نظر معلوم است و هیچ انتخابی برای او نداریم؛ یعنی در اینجا ابتدا فرد خاص باید در جای ثابت تعیین شده بنشیند (فقط یک حالت) اکنون ۵ نفر دیگر دور دایره می‌توانند به $5!$ حالت جابه‌جا شوند در اینجا شاید این ایده **غلط** مطرح شود که ۵ نفر به $4!$ حالت دور یک میز گرد مرتب می‌شوند ولی باید گفت که پس از نشستن فرد خاص در جایگاه این شخص به عنوان مبدأ در نظر گرفته می‌شود و بقیه افراد نسبت به این فرد جابجا می‌شوند.

جایگشت یک در میان: اگر بخواهیم m عنصر از یک گروه و n عنصر از گروهی دیگر را به صورت یک در میان در یک خط مرتب کنیم، دو حالت وجود دارد:

اگر $m=n \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=2\times m!\times n!$

اگر $m=n+1 \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=m!\times n!$

در واقع برای مرتب کردن جایگشت یک در میان یا باید تعداد دو گروه مساوی باشند یا اختلاف، یک نفر باشد.

مثال۱۷: **در یک مهدکودک، ۱۰ پسر و ۱۰ دختر را به صورت تصادفی روی صندلی‌های یک ردیف می‌نشانیم. چند حالت وجود دارد اگر بخواهیم کودکانی که در کنار یکدیگر نشسته‌اند جنسیت یکسانی نداشته باشند؟**

۱) $2\times(10!)^2$ ۲) $10!\times 10!$ ۳) $10!$ ۴) $\frac{10!}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در اینجا با جایگشت یک در میان روبه‌رو هستیم و تعداد دو گروه برابر است. ابتدا دو حالت وجود دارد که از کدام گروه شروع کنیم (پسر یا دختر) سپس برای هر گروه $10!$ جایگشت وجود دارد، پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $2\times 10!\times 10!=2\times(10!)^2$

مثال۱۸: **به چند طریق می‌توان ۳ پسر بچه و ۲ دختر بچه را به صورت یک در میان در یک صف مرتب کرد؟**

۱) $2\times 3!\times 2!$ ۲) $3!\times 2!$ ۳) $2\times(3!)^2$ ۴) $2\times(2!)^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید از گروه پسر بچه‌ها شروع کنیم تا بتوانیم حالت یک در میان ایجاد کنیم. (پسر دختر پسر دختر پسر) در اینجا مانند قبل ۲ حالت وجود ندارد. اکنون پسرها به $3!$ طریق و دخترها به $2!$ طریق جایگشت دارند. بنابراین تعداد حالات برابر است با: $3!\times 2!$

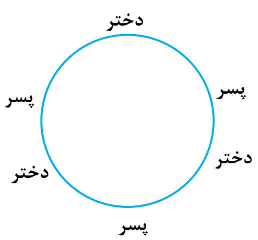
توجه: به طور کلی اگر بخواهیم n شیء از یک گروه و n شیء از گروهی دیگر را به صورت یک در میان دور یک دایره مرتب کنیم باید تعداد اعضای دو گروه برابر باشد و تعداد حالات برابر است با: $(n-1)!\times n!$

مثال۱۹: **به چند طریق می‌توان ۳ دختر و ۳ پسر را به صورت یک در میان دور یک میزگرد مرتب کرد؟**

۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا دخترها یا پسرها را دور میزگرد مرتب می‌کنیم: $(3-1)!$ اکنون گروه دیگر را در بین آنها که ۳ جایگاه وجود دارد قرار می‌دهیم: $3!$

بنابراین طبق اصل تعداد حالات برابر است با: $(3-1)!\times 3!=12$



جایگشت با تکرار: تعداد جایگشت‌های مختلف n عنصر که n_1 تای آن از نوع اول، n_2 تای آن از نوع دوم و ... و n_k تای آن از نوع kاُم می‌باشد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_k!}\quad ;\quad n_1+n_2+\ldots+n_k=n$$

مثال۲۰: با حروف کلمه «Statistics»چند کلمه ۱۰ حرفی مختلف می‌توان ساخت؟

۱) $\frac{10!}{3!}$ ۲) $\frac{10!}{6!}^{2}$ ۳) $\frac{10!}{72}$ ۴) $\frac{10!}{18}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» کلمه شامل ۱۰ حرف مختلف است پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر با !۱۰ است اما در اینجا حالت‌های تکراری داریم: SSS, ttt, ii مثلاً زمانی که جای ”S“ یا ”t“ یا ”i“ با حروف مشابه خود عوض می‌شود جایگشت جدیدی به وجود نمی‌آید؛ بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{10!}{3!\times 3!\times 2!}=\frac{10!}{72}$$

مثال۲۱: با ارقام ۱,۱,۱,۲,۲,۴,۴,۴ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

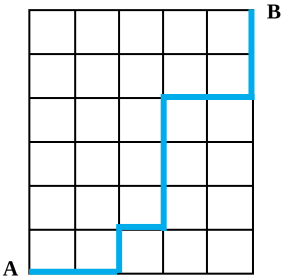
۱) ۲۵۰ ۲) ۳۵۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۵۵۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اعداد زوج را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم: آنهائی‌که یکان ۲ دارند و آنهائی‌که یکان ۴ دارند. اکنون اگر ۲ را در یکان قرار دهیم ۷ رقم باقیمانده $\{1,1,1,2,4,4,4\}$ یک جایگشت با تکرار ۷تایی می‌سازند و همچنین اگر عدد ۴ را در یکان قرار دهیم نیز همین‌طور اعداد باقیمانده $\{1,1,1,2,2,4,4\}$ یک جایگشت با تکرار می‌سازند.

$$\begin{cases}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{شامل ۳ تا یک، سه تا ۴ و یک رقم ۲}}\times\underbrace{1}_{2}: & \frac{7!}{3!\times 3!}\times 1=140\\[2ex] \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{شامل ۳ تا یک، دو تا دو و دو تا ۴}}\times\underbrace{1}_{4}: & \frac{7!}{3!\times 2!\times 2!}\times 1=210\end{cases}$$

اکنون طبق اصل جمع تعداد حالات برابر است با: $140+210=350$

مثال۲۲: شخصی با حرکت‌های قائم و افقی (به سمت بالا و جلو) می‌خواهد از A به B برود به چند طریق می‌تواند این عمل را انجام دهد (اول قائم بعد افقی یا برعکس، خط پررنگ یک مثال از A به B رسیدن است).



۱) ۴۰۰
۲) ۵۶۰
۳) ۵۰۰
۴) ۴۶۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» اگر U نشان دهنده یک مسیر عمودی رو به بالا و R نشان دهنده یک مسیر افقی رو به راست باشد بنابراین باید ۶ حرکت رو به بالا و ۵ حرکت رو به راست حرکت کنیم UUUUUURRRRR بنابراین کلیه جایگشت‌هایی که حروف تشکیل می‌دهند نشان دهنده مسیرهایی است که می‌توانیم از A به B برویم مثلاً یک جایگشت که با خط پررنگ به صورت RRURUUURRUU می‌باشد بنابراین کلیه جایگشت‌های U و R ها جایگشت با تکرار است.

$$\text{تعداد حالات}=\frac{(n+k)!}{n!k!}=\frac{(5+6)!}{5!6!}=\frac{11!}{5!6!}=\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times \cancel{6!}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times \cancel{6!}}=462$$

ترتیب

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء زمانی که ترتیب انتخاب یا قرار گرفتن r شیء در کنار یکدیگر مهم باشد «ترتیب» نام دارد.

این مفهوم مانند قرار گرفتن r مهره در n ظرف نیز تعبیر می‌شود.

الف ـ اگر تکرار اشیاء مجاز نباشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$P_n^r=\overset{\text{انتخاب اول}}{n}\ \overset{\text{انتخاب دوم}}{(n-1)}\ \overset{\text{انتخاب سوم}}{(n-2)}\cdots\overset{\text{انتخاب rام}}{(n-r+1)}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ب ـ اگر تکرار اشیاء مجاز باشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با : n^r

$$P_n^r = \underbrace{n}_{\text{انتخاب اول}} \times \underbrace{n}_{\text{انتخاب دوم}} \times \underbrace{n}_{\text{انتخاب سوم}} \times \cdots \times \underbrace{n}_{\text{انتخاب rام}} = n^r$$

مثال ۲۳: به چند طریق می‌توان در بین ۵ نفر، جوایز اول و دوم و سوم را تقسیم کرد؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۴» انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر که می‌توان ترتیب دادن جوایز به آنها را تغییر داد.

$$P_۵^۳ = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۶۰ \quad \text{یا} \quad ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

مثال ۲۴: برای باز کردن یک قفل مرکزی، انتخاب ۴ عدد مناسب از اعداد مختلف یک رقمی بدون تکرار نیاز است. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۴ ۴) ۶۱۵۴

پاسخ: گزینه «۱» انتخاب ۴ رقم از ارقام $\{۰,۱,۲,\dots,۹\}$ که در اینجا باید ترتیب و عدم تکرار رعایت شود. در واقع هر رقمی که مؤثر نبود آن را کنار می‌گذاریم:

$$P_{۱۰}^۴ = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!} = ۵۰۴۰$$

مثال ۲۵: می‌خواهیم در یک مدار به صورت خطی m مقاومت به شماره‌های ۱ تا m را به همراه n خازن به شماره‌های ۱ تا n قرار دهیم به طوری که هیچ دو مقاومتی کنار هم نباشند. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ $(n > m)$

۱) P_{n+1}^m ۲) P_{m+1}^n ۳) $n!\,P_{n+1}^m$ ۴) $n!\,P_{m+1}^n$

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید چون می‌خواهیم هیچ دو مقاومتی کنار هم نباشند ابتدا خازن‌ها را به صورت خطی مرتب می‌کنیم که تعداد حالات برابر است با $n!$ یک جایگشت خطی:

اما توجه کنید که در بین آنها $(n+1)$ جایگاه وجود دارد که مقاومت‌ها می‌توانند در آنجا قرار گیرند و هیچ دو مقاومتی کنار هم نباشند که در زیر با ✓ علامت زده شده است.

پس برای m تا مقاومت از $n+1$ جایگاه به ترتیب، انتخاب می‌کنیم P_{n+1}^m. اگر نمی‌دانید چرا با ترتیب انتخاب می‌کنیم باید بگوییم به دلیل آن که m مقاومت شماره‌های مختلفی $(۱,۲,\dots,m)$ دارند که با عوض شدن ترتیب آنها جایگشت جدیدی به وجود می‌آید بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالات} = \underbrace{n!}_{\text{برای خازن‌ها}} \times \underbrace{P_{n+1}^m}_{\text{برای مقاومت‌ها}}$$

ترکیب

اگر در انتخاب r شیء از n شیء ترتیب انتخاب یا ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار یکدیگر مهم نباشد در این صورت به حالات آن «ترکیب» گویند.

الف ـ اگر تکرار عناصر مجاز نباشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با :

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ب ـ اگر تکرار عناصر مجاز باشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با :

$$C_n^r = \binom{n+r-۱}{r}$$

مثال ۲۶: به چند طریق می‌توان از یک گروه ۱۲ نفره یک تیم حداقل ۱۰ نفره انتخاب کرد؟

۱) ۶۶ ۲) ۷۸ ۳) ۱۲ ۴) ۷۹

پاسخ: گزینه «۴» «یک تیم حداقل ۱۰ نفره» به مفهوم آن است که یا ۱۰ نفر از ۱۲ نفر یا ۱۱ نفر از ۱۲ نفر یا ۱۲ نفر از ۱۲ نفر انتخاب شوند، به کلمه‌ی «یا» دقت کنید، این کلمه یادآور اصل جمع می‌باشد.

$$\binom{۱۲}{۱۰} + \binom{۱۲}{۱۱} + \binom{۱۲}{۱۲} = \frac{۱۲!}{۱۰!۲!} + \frac{۱۲!}{۱۱!۱!} + \frac{۱۲!}{۱۲!۰!} = ۶۶ + ۱۲ + ۱ = ۷۹$$

مثال ۲۷: دانشجویی در یک امتحان بایستی به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ دهد. او به چند طریق می‌تواند سؤال‌ها را انتخاب کند، اگر لازم باشد به حداقل ۳ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ دهد؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۱۶۲

پاسخ: گزینه «۲» سؤال‌ها را به دو دسته ۵ سؤال اول و ۵ سؤال دوم تقسیم می‌کنیم. دانشجو می‌تواند حداقل به ۳ سؤال اول پاسخ دهد؛ یعنی ۳ سؤال از ۵ سؤال اول یا ۴ سؤال از ۵ سؤال اول یا او می‌تواند به همه ۵ سؤال اول پاسخ دهد و بقیه را از ۵ سؤال دوم جواب دهد.

$$\left(\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ سؤال از ۵ تای اول}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{۴ سؤال از ۵ تای دوم}}\right)\underset{\text{یا}}{+}\left(\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{۴ سؤال از ۵ تای اول}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ سؤال از ۵ تای دوم}}\right)\underset{\text{یا}}{+}\left(\underbrace{\binom{۵}{۵}}_{\text{۵ سؤال از ۵ تای اول}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲ سؤال از ۵ تای دوم}}\right)$$

در این مسئله به کاربرد «یا» و «و» دقت کنید.

$$=\left(\frac{۵!}{۳!\times ۲!}\times\frac{۵!}{۴!\times ۱!}\right)+\left(\frac{۵!}{۴!\times ۱!}\times\frac{۵!}{۳!\times ۲!}\right)+\left(\frac{۵!}{۵!\times ۰!}\times\frac{۵!}{۳!\times ۲!}\right)=(۱۰\times ۵)+(۵\times ۱۰)+(۱\times ۱۰)=۱۱۰$$

مثال ۲۸: الف ـ فردی ۸ دوست دارد که می‌خواهد ۵ نفر از آنها را به یک میهمانی دعوت کند. چند انتخاب وجود دارد اگر دو نفر از دوستان وی با هم اختلاف داشته باشند و نخواهند با هم در میهمانی شرکت کنند؟

۱) ۲۶ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینه «۲» **راه حل اول:** به طور کلی دوستان را به دو دسته ۶ نفره و ۲ نفره تقسیم می‌کنیم. دو نفری را که با یکدیگر اختلاف دارند در یک گروه قرار می‌دهیم، اکنون در راه‌حل اول از کل دسته‌ها ۵ نفر از دوستان را دعوت کرده و حالت‌هایی را که این دو نفر با هم در بین آنها هستند از آن کم می‌کنیم.

۶ نفر ۲ نفر

کل حالات منهای حالاتی که ۲ نفر با هم باشند: $\binom{۸}{۵}-\binom{۲}{۲}\binom{۶}{۳}=۳۶$

راه حل دوم: در این راه‌حل می‌توانیم هیچکدام از ۲ نفر را دعوت نکنیم و ۵ نفر مهمان را از دسته ۶ نفره و یا یک نفر را از دسته دو نفره انتخاب کرده و ۴ مهمان باقیمانده را از دسته ۶ نفره دعوت کنیم.

حالتی که هیچ‌کدام انتخاب نشود یا یکی از دو نفر انتخاب شود. $\binom{۲}{۰}\binom{۶}{۵}+\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۴}=۳۶$

ب: اگر دو دوست به شرط با هم بودن در میهمانی شرکت کنند چند حالت برای انتخاب آنها وجود دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۶ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه «۳» دو حالت وجود دارد.

حالت اول: حالتی که هر دو نفر دعوت شوند. $\binom{۲}{۲}\binom{۶}{۳}=۲۰$

حالت دوم: حالتی که هیچ‌کدام از دو نفر دعوت نشوند. $\binom{۲}{۰}\binom{۶}{۵}=۶$

$\Rightarrow ۲۰+۶=۲۶$

ج: اگر بخواهیم از بین ۸ نفر، یک نفر خاص حتماً دعوت شود. و یک نفر خاص دیگر دعوت نشود.

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه «۱» می‌خواهیم یک نفر خاص انتخاب شود. پس این یک نفر را کنار می‌گذاریم. همچنین یک نفر را هم می‌خواهیم که انتخاب نشود. پس این یک نفر را نیز از بین بقیه کنار می‌گذاریم. حال یک نفر را انتخاب کرده‌ایم و سپس ۴ نفر دیگر را از بین ۶ نفر باقی مانده انتخاب می‌کنیم.

$\binom{۱}{۱}\binom{۶}{۴}=۱۵$

۶ نفر ۱ نفر ۱ نفر

مثال ۲۹: یک رئیس، یک خزانه‌دار و یک منشی که افراد مختلفی هستند را از یک مجموعه ۱۰ نفری انتخاب می‌کنیم این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است اگر : الف ـ هیچ محدودیتی نباشد.

۱) ۶۷۲ ۲) ۷۲۰ ۳) ۳۸۴ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا ۳ نفر را برای این سه پست به $\binom{۱۰}{۳}$ طریق انتخاب کرده سپس به $۳!$ حالت این سه شغل را به آنها می‌دهیم:

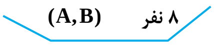
$$\binom{۱۰}{۳}\times ۳! = ۷۲۰$$

ب ـ A و B با هم انتخاب نشوند.

۱) ۳۸۴ ۲) ۶۷۲ ۳) ۴۵۲ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یا فقط A یا فقط B یا هیچکدام. یا، در روشی دیگر می‌توان گفت کل حالات (۷۲۰ نفر) منهای حالاتی که A و B با هم انتخاب شوند:

$$۷۲۰-\underbrace{\binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}}_{\text{A و B با هم انتخاب شوند}}\times ۳! = ۶۷۲ \quad ; \quad \left[\underbrace{\binom{۲}{۰}\binom{۸}{۳}}_{\text{هیچکدام از A و B انتخاب نشوند}}+\underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۸}{۲}}_{\text{فقط A یا فقط B}}\right]\times ۳! = ۶۷۲$$



ج ـ C و D با هم انتخاب شوند و یا هیچ‌کدام انتخاب نشوند.

۱) ۳۸۴ ۲) ۵۲۵ ۳) ۶۷۲ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\underbrace{\binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}}_{\text{C و D با هم و یکی از دیگران}}\times ۳! + \underbrace{\binom{۲}{۰}\binom{۸}{۳}}_{\text{هیچ‌کدام از C و D انتخاب نشوند}}\times ۳! = ۳۸۴$$

د ـ E حتماً انتخاب شود.

۱) ۱۱۲ ۲) ۲۱۶ ۳) ۳۲۲ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به ۱ حالت E را انتخاب کرده و ۲ نفر باقیمانده را از ۹ نفر دیگر انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۱}{۱}\binom{۹}{۲}\times ۳! = ۲۱۶$$

هـ ـ F فقط در صورتی که رئیس باشد انتخاب شود.

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۱۶ ۳) ۵۷۶ ۴) ۶۷۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» یعنی F یا انتخاب نشود یا اگر انتخاب شد رئیس است.

$$\binom{۱}{۰}\binom{۹}{۳}\times ۳! + \binom{۱}{۱}\binom{۹}{۲}\times ۲! = ۵۷۶$$

مثال ۳۰: به چند طریق ممکن است ارقام ۱,۱,۱,۲,۲,۴,۴,۴,۵,۵ را در کنار یکدیگر مرتب کرد به طوری‌که هیچ‌کدام از ارقام ۱ کنار یکدیگر قرار نگیرند؟

☑ **پاسخ:** ابتدا ارقام دیگر را بدون در نظر گرفتن "۱"ها در کنار یکدیگر مرتب می‌کنیم که با یک مسئله جایگشت با تکرار مواجه هستیم: (۲,۲,۴,۴,۴,۵,۵)

$$\frac{۷!}{۲!\times ۳!\times ۲!} = ۲۱۰$$

اکنون در بین آنها که ۸ جایگاه وجود دارد ارقام یک را قرار می‌دهیم. توجه کنید که انتخاب سه جایگاه از ۸ جایگاه برای قرار گرفتن یک‌ها است: $C_۸^۳$

بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{۷!}{۲!\times ۳!\times ۲!}\times C_۸^۳$$