مدرسان شریف

فصل اول

«مروری بر احتمالات و آمار مهندسی»

مقدمه

تذکر۱: در صورتی که درس آمار و احتمال را از کتاب آمار و احتمال مدرسان شریف و یا سایر مراجع معتبر به صورت موازی و یا پیش از شروع کردن درس کنترل کیفیت مطالعه نموده‌اید، و تسلط کافی روی مباحث درس آمار و احتمال دارید به صورت اکید توصیه می‌شود، مطالعه‌ی درس کنترل کیفیت از این کتاب را از فصل دوم شروع نمایید و در صورت نیاز به مطالعه‌ی سطحی و برخی از تمرینات تستی از این فصل اکتفا نمایید.

بخش اول: مروری بر احتمالات

به منظور آشنایی بیشتر با مفاهیم احتمالات به مثال زیر توجه کنید. فرض کنید به منظور ارزیابی عملکرد یک دستگاه تمام ۲۰ قطعه تولید شده توسط آن دستگاه را مورد ارزیابی قرار داده‌ایم. بررسی‌ها نشان داد که تعداد ۵ قطعه معیوب بوده است. حال سوال این است که احتمال خراب بودن یک قطعه تولیدی توسط این دستگاه به چه میزان است. از آن‌جا که در بین تولیدات ۵ قطعه خراب بوده است احتمال معیوب بودن یک قطعه از تقسیم عدد ۵ بر عدد ۲۰ حاصل خواهد شد. عدد ۲۰ کل وضعیت ممکن را به ما نشان می‌دهد و عدد ۵ در این مثال بیانگر حادثه و یا رخدادی است که ما به دنبال یافتن اثرات آن هستیم.
بنابراین به منظور یافتن احتمال یک رخداد و یا حادثه، بهترین روش شمارش تعداد دفعاتی است که آن حادثه رخ داده است. این امر به اصل شمارش معروف است. اصل شمارش می‌گوید اگر آزمایش ۱ بتواند یکی از m نتیجه ممکن را کسب نماید و برای هر نتیجه آن، n نتیجه ممکن برای آزمایش ۲ وجود داشته باشد، آن‌گاه برای دو آزمایش با هم، nm نتیجه ممکن وجود خواهد داشت.

مثال۱: چند تابع را می‌توان روی n نقطه تعریف کرد، اگر هر تابع بتواند فقط مقادیر ۰ و ۱ را داشته باشد؟

۱) $2^n - 1$　　۲) 2^{n-1}　　۳) 2^n　　۴) 2^{2n}

پاسخ: گزینه «۳» از آن‌جا که در هر یک از n نقطه دو حالت امکان‌پذیر خواهد بود، در نتیجه تعداد حالات کل برابر است با: $\underbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}_{n}=2^n$

جایگشت

فرض کنید می‌خواهیم ترتیب‌های متفاوت از حروف a، b و c را به دست آوریم. این سه حرف شش ترتیب abc، acb، bca، bac، cab و cba را ایجاد خواهند کرد. هر کدام از حالات فوق تشکیل یک ترکیب را می‌دهد در صورتی‌که همه آن شش ترکیب از سه حرف a، b و c تشکیل شده‌اند. این نوع تشکیل ترکیب را جایگشت می‌گویند. بنابراین جایگشت تعداد کل ترکیب‌های ممکن است که در آن ترتیب اعضا در ترکیب‌ها اهمیت دارد.
جایگشت را به دو صورت با تکرار و بدون تکرار اعضا می‌توان در نظر گرفت. در مثال فوق فرض کنید می‌خواهیم ترتیب‌های سه عضوی را بدون تکرار اعضا تشکیل دهیم. برای این منظور در عضو اول ترتیب ۳ عضو، در عضو دوم ترتیب ۲ عضو خواهیم داشت زیرا عضوی که در قسمت اول قرار گرفته است امکان تکرار آن در عضو دوم وجود ندارد. و در نهایت برای عضو سوم ترتیب فقط ۱ عضو خواهیم داشت و بنابراین تعداد ترتیب‌ها بدون تکرار اعضا ۶ = ۱ × ۲ × ۳ خواهد بود. برای بیان ساده‌تر این ترتیب‌ها از عبارت فاکتوریل به صورت !۳ استفاده می‌کنند.
اما در حالت ترتیب‌های ممکن با تکرار اعضا، تعداد کل ترتیب‌ها ۲۷ = ۳ × ۳ × ۳ خواهد بود زیرا در هر عضو ترتیب، ۳ عنصر خواهیم داشت. به عنوان مثال aaa و یا bbb نیز از ترتیب‌های ممکن خواهند بود.

مثال۲: چند ترتیب متفاوت از پرتاب توب در بازی بسکتبال که متشکل از ۹ بازیکن است وجود دارد؟

۱) $8!$ ۲) $9!$ ۳) $10!$ ۴) $2!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آن‌جا که در مسئله ذکر شده است ترتیب‌ها باید متفاوت باشند، این بدان معنی است که تکرار در اعضای ترتیب امکان‌پذیر نمی‌باشد و بنابراین تعداد کل ترتیب‌ها $9! = 362880$ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

تعداد جایگشت‌های n شیء که n_1 تا از آن‌ها مثل هم، n_2 تا از آن‌ها مثل هم، ... و n_r تای آن‌ها مثل هم هستند برابر است با:

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_r!} \qquad n_1 + n_2 + ... + n_r = n$$

باید توجه داشت که فرمول فوق تنها در حالتی‌که ترتیب اهمیت دارد، معتبر است. به منظور آشنایی بیشتر با کاربردهای این فرمول به مثال زیر توجه کنید:

مثال۳: چند علامت مختلف را که هر کدام شامل ۹ پرچم قرار گرفته در یک خط هستند به وسیله ۴ پرچم سفید، ۳ پرچم قرمز و ۲ پرچم آبی می‌توان تهیه نمود؟

۱) ۱۳۰۰ ۲) ۱۴۰۰ ۳) ۱۱۶۰ ۴) ۱۲۶۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تعداد حالت‌های ممکن برابر است با: $\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$

ترکیب

در ترکیب بر خلاف جایگشت، ترتیب اعضا مهم نیست. به عنوان مثال در ترتیب‌های ممکن از حروف a، b و c، ترتیب‌های abc، acb، bca، bac، cab و cba تنها تشکیل یک ترکیب را می‌دهند. زیرا در ترکیب تنها تعداد ترتیب‌های ۳ عضوی مهم است و این‌که هر عضو ترتیب در کجای ترتیب قرار گرفته است، اهمیتی ندارد. برای محاسبه تعداد ترکیب‌های ممکن r عضوی از یک مجموعه n عضوی از فرمول زیر استفاده می‌شود: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

مثال۴: از یک گروه متشکل از ۵ زن و ۷ مرد، چند شورای مختلف ۵ عضوی شامل ۲ زن و ۳ مرد می‌توان انتخاب نمود؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۵۵۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل مثال فوق باید تعداد حالات انتخاب ۲ زن از بین ۵ زن و تعداد حالات انتخاب ۳ مرد از بین ۷ مرد را تعیین نمود. از آن‌جا که در این مثال ترتیب قرار گرفتن مردها و یا زن‌ها در گروه‌های خود اهمیتی ندارد بنابراین می‌بایست تعداد ترکیب‌های مختلف را محاسبه نمود. بنابراین داریم:

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = 350$$

◆ ◆ ◆ ◆

در حالتی‌که ترتیب اعضا در یک دنباله حائز اهمیت باشد آن‌گاه همواره تساوی زیر برقرار خواهد بود: $1 \le r \le n$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

تساوی زیر به قضیه دو جمله‌ای معروف است که کاربرد وسیعی در زمینه تحلیل‌های آماری چند جمله‌ای دارد. به منظور فهم بهتر رابطه فوق به مثال زیر توجه کنید:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

مثال۵: در معادله $(x+y)^5$ ضریب عبارت x^2y^3 کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به قضیه دو جمله‌ای از آن‌جا که $k = 2$ است. بنابراین ضریب عبارت فوق برابر ۱۰ خواهد بود زیرا: $\binom{5}{2} = 10$

تساوی زیر به قضیه چند جمله‌ای معروف است که در ادامه کاربرد آن در قالب یک مثال بیان شده است:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, ..., n_r) \\ n_1 + n_2 + ... + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_r}$$

مثال۶: در معادله $(x+y+z)^{5}$ ضریب عبارت $x^{2}y^{2}z$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به قضیه چند جمله‌ای داریم:

$$\left.\begin{matrix} n_1=2 \\ n_2=2 \\ n_3=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \binom{5}{2,2,1}=\frac{5!}{2!2!1!}=30$$

تعداد $\binom{n-1}{r-1}$ بردار متمایز r عنصری با عناصر **صحیح مثبت** $(x_i>0)$ و $x_i (i=1,2,...,r)$ و با شرط $x_1+x_2+...+x_r=n$ وجود دارد.

تعداد $\binom{n+r-1}{r-1}$ بردار متمایز r عنصری با عناصر **صحیح غیر منفی** x_i $(x_i>=0)$ و با شرط $(i=1,2,...,r)$ $x_1+x_2+...+x_r=n$ وجود دارد.

مثال ۷، نمونه‌ای بسیار خوب از کاربرد ترکیب در تعیین جواب‌های یک معادله است.

مثال۷: چند جواب متمایز غیر منفی برای معادله $x_1+x_2+x_3=3$ وجود دارد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۴» براساس آنچه قبلاً بیان شده، از آن‌جا که در این مثال تنها جواب‌های غیرمنفی مدنظر است بنابراین خواهیم داشت:

$$\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{3+3-1}{3-1}=60$$

احتمال و پیشامدها

همان‌طور که در مقدمه این فصل نیز اشاره شد، احتمال بیانگر تعداد دفعات وقوع یک رخداد و یا حادثه است. در ادامه این فصل به جای عبارت رخداد و یا حادثه از واژه پیشامد استفاده خواهد شد. اگر فرض کنید تعداد کل حالات ممکن برای یک آزمایش (عدد ۲۰ در مثال ذکر شده در مقدمه این فصل) عدد n باشد و تعداد دفعاتی که یک پیشامد مانند پیشامد E رخ داده است برابر $n(E)$ باشد (عدد ۵ در مثال بخش مقدمه برای قطعات معیوب: قطعه معیوب یک پیشامد است.) آن‌گاه احتمال رخداد پیشامد E به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n}$$

اشتراک دو پیشامد: اشتراک دو پیشامد E و F شامل همه نتایجی است که در هر دو پیشامد E و F وجود دارد و به صورت $E\cap F$ نشان داده می‌شود. به پیشامدهایی که اشتراک آن‌ها تهی باشد پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

مکمل پیشامد: مکمل پیشامد E که به صورت E^c نشان داده می‌شود شامل تمام حالات ممکن آزمایش خواهد بود که در پیشامد E نباشد. بنابراین پیشامدهای E و E^c ناسازگار خواهند بود، زیرا اشتراک آن‌ها تهی می‌باشد. بنابراین داریم: $P(E)+P(E^c)=1 \quad \Rightarrow \quad P(E^c)=1-P(E)$

برای دو پیشامد E و F، اگر همه نقاط E در F نیز باشند، گوییم F شامل E است و به صورت $E\subset F$ (E زیر مجموعه‌ای از F) نمایش می‌دهیم (در نتیجه $P(E)\le P(F)$). همچنین دو پیشامد فوق یکسان هستند در صورتی‌که $E=F$ باشد.

اجتماع دو پیشامد: اجتماع دو پیشامد E و F را که به صورت $E\cup F$ نمایش می‌دهیم، شامل تمام اعضایی است که در E، یا در F و یا در هر دو باشد. احتمال رخداد اجتماع دو پیشامد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

احتمال شرطی

در برخی موارد احتمال رخداد یک پیشامد منوط به رخداد پیشامد دیگری است. به عنوان مثال ممکن است بخواهیم احتمال این‌که یک فرد سیگاری باشد به شرط آن‌که آن فرد دارای جنسیت مذکر باشد را محاسبه کنیم. در این مثال احتمال این‌که یک فرد سیگاری باشد به این‌که جنسیت او چه باشد مشروط شده است. برای درک بهتر این موضوع فرض کنید سه دستگاه یک کالا را تولید می‌کنند. کالایی را از بین تولیدات انتخاب کرده و متوجه شده‌ایم که آن کالا معیوب است. حال می‌خواهیم بدانیم که این کالای معیوب با چه احتمالی به دستگاه یک تعلق دارد. در این‌جا قسمتی که از آن اطلاع دقیق داریم جزء شرط قرار خواهد گرفت. در این مثال معیوب بودن کالا به عنوان شرط مسئله است زیرا می‌دانیم که کالا معیوب می‌باشد. از طرفی قسمتی که اطلاع دقیق در مورد آن نداریم و آن را با مقدار احتمالی تعیین می‌کنیم جزء قسمتی از مسئله خواهد بود که رخداد آن منوط به رخداد شرط می‌باشد.

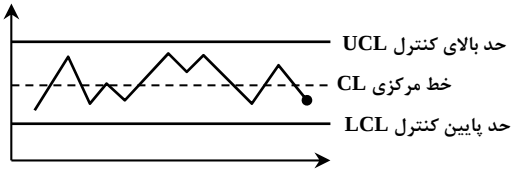
مثال۲۱: نمودار پارتو نموداری است که .... .

۱) علل مشکلات به وجود آمده را با فراوانی آن مقایسه کند.
۲) علل مشکلات به وجود آمده را با معلول مقایسه کند.
۳) ۲۰ درصد علل مشکلات به وجود آمده را بررسی می‌کند.
۴) ۸۰ درصد علل مشکلات به وجود آمده را بررسی می‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که در نمودار بالا مشاهده می‌کنید نمودار پارتو نموداری است که علل مشکلات به وجود آمده را با فراوانی آن مقایسه کند.

۷ـ نمودار کنترل: نمودارهای کنترل به طور مفصل در فصل آینده توضیح داده خواهند شد، با این حال آشنایی اجمالی با مفاهیم نمودارهای کنترل در این فصل خالی از لطف نمی‌باشد. به مجموعه‌ای از عناصر تولید که شامل مواد اولیه، روش‌ها، نیروی انسانی و ماشین آلات می‌باشد، فرایند می‌گویند. به منظور حفظ استانداردها، ایجاد و نگه داشتن مشخصه‌های تولید، روش‌ها و تدابیری به کار گرفته می‌شود که به آن‌ها **کنترل** می‌گویند. نمودار کنترل نموداری است که در آن اطلاعات به دست آمده از فرایند تولید با حدود کنترل مقایسه می‌شود تا بتوانیم وضعیت تولید را از نظر کیفیت کنترل نماییم. با این حال وجود تغییر و انحراف از میانگین در هر فرایند اجتناب‌ناپذیر است. انحرافات فرایند تولید به طور کلی به دو دسته‌ی **انحرافات تصادفی** و **انحرافات با دلیل** تقسیم می‌شوند.

منظور از انحرافات تصادفی تغییرات ناشی از عوامل غیرقابل کنترل است که بسیار جزئی می‌باشند. البته شاید این انحرافات از عواملی پدید بیایند که کنترل آن‌ها مقرون به صرفه نمی‌باشد. مثلاً تفاوت‌های جزئی در مواد اولیه می‌تواند عامل انحرافات جزئی در تولید باشد. منظور از انحرافات با دلیل تغییرات ناشی از عوامل قابل کنترل است، که معمولاً تأثیر قابل ملاحظه‌ای روی تولید می‌گذارند، مثلاً مواد اولیه‌ی نامرغوب می‌تواند تأثیر زیادی روی تولید بگذارد.



فرایندی که در آن انحرافات با دلیل وجود دارد خارج از کنترل آماری است و فرایندی که در آن فقط انحرافات تصادفی وجود دارد، تحت کنترل آماری می‌باشد. نمودارهای کنترل می‌توانند بین انحرافات تصادفی و با دلیل تمایز ایجاد کنند. شکل مقابل یک نمودار کنترل را نشان می‌دهد که در آن فرایند تحت کنترل آماری می‌باشد.

اهمیت استفاده از نمودارهای کنترلی موارد زیر خواهد بود:

نمودارهای کنترل فنون اثبات شده‌ای برای بهبود کارایی می‌باشند: از آنجا که استفاده این نمودارها باعث کاهش ضایعات و دوباره‌کاری‌ها می‌گردد، در نتیجه کارایی فرایند نیز افزایش می‌یابد.

نمودارهای کنترل به طور مؤثر از تولید اقلام معیوب جلوگیری می‌کنند: نمودارهای کنترل به تحت کنترل نگه داشتن فرایند کمک نموده و با این کار از تولید اقلام معیوب جلوگیری می‌کنند.

نمودارهای کنترل از تنظیم‌های غیرضروری فرایند جلوگیری می‌کنند.

از این نمودارها اطلاعات مؤثری جهت تنظیم صحیح فرایند به دست می‌آید.

از نمودارهای کنترل اطلاعات مفیدی جهت محاسبه‌ی کارایی فرایند به دست می‌آید.

تست‌های تألیفی فصل دوم

۱ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر برای داده‌های کیفی مناسب است؟

۱) نمودار هیستوگرام ۲) نمودار مسطح
۳) نمودار پارتو ۴) نمودار هیستوگرام با چولگی منفی

۲ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر جزء ابزارهای آماری کنترل کیفیت نمی‌باشد؟

۱) نمودار پراکندگی ۲) نمودار علت و معلولی ۳) نمودار زنگوله‌ای ۴) نمودار هیستوگرام

۳ـ کدام نمودار کنترلر کیفی را در شناخت بهتر جزئیات فرایندهای بحرانی یاری می‌رساند؟

۱) نمودار پراکندگی ۲) نمودار جریان ۳) نمودار راداری ۴) نمودار پارتو

۴ـ بهترین نمودار به منظور تشخیص علل مبهم در بروز عیب و نقص در تولید محصولات کدام است؟

۱) نمودار پراکندگی ۲) نمودار پارتو ۳) نمودار علت و معلولی ۴) نمودار کنترلی

۵ـ جلسات طوفان فکری در ترسیم کدام نمودار نقش بسزایی ایفا می‌کند؟

۱) نمودار کنترلی ۲) نمودار پراکندگی ۳) نمودار پارتو ۴) نمودار علت و معلولی

۶ـ کدام‌یک از موارد زیر در نمودار کنترلی بیانگر خارج از کنترل بودن فرایند است؟

۱) شش نقطه متوالی در نمودار در حال افزایش باشند. ۲) شش نقطه متوالی در نمودار در حال کاهش باشند.
۳) ۹ نقطه متوالی در یک طرف خط مرکز (میانگین) قرار گیرد. ۴) وجود نقطه‌ای در خارج از مرزهای کنترلی

۷ـ در نمودارهای کنترلی در صورتی‌که شش نقطه متوالی در نمودار در حال افزایش یا کاهش باشند یا ۹ نقطه متوالی در یک طرف خط مرکز (میانگین) قرار گیرد به این معنا خواهد بود که ..... .

۱) فرایند تحت کنترل است. ۲) فرایند خارج از کنترل است.
۳) انحرافات با دلیل وارد فرایند شده است. ۴) انحرافات تصادفی وارد فرایند شده است.

۸ـ کدام‌یک در مورد انحرافات تصادفی و انحرافات با دلیل درست است؟

۱) انحرافات با دلیل قابل تشخیص نیستند. ۲) انحرافات تصادفی قابل تشخیص هستند.
۳) انحرافات تصادفی اثر غیرقابل پیش بینی بر فرایند دارند. ۴) انحرافات با دلیل اثر غیرقابل پیش‌بینی بر فرایند دارند.

۹ـ نمودارهای کنترلی ..... .

۱) از تولید اقلام سالم جلوگیری‌کنند. ۲) از تنظیم‌های غیر ضروری فرایند جلوگیری نمی‌کنند.
۳) اطلاعات موثری جهت تنظیم صحیح فرایند بدست می‌دهند. ۴) اطلاعاتی درباره کارائی فرایند بدست نمی‌دهند.

۱۰ـ یک تولیدکننده قطعات اتومبیل بنا دارد تا مشکلات کیفی محصول خود را مورد بررسی قرار دهد. در بدایت کار مدیر کارخانه تیم کنترل کیفیتی به صورت ترکیبی از متخصصین فنی، تولید و مسئول تیم کنترل کیفی تشکیل داده است. قبل از هرگونه نمونه برداری از خط تولید جلسه‌ای با عنوان جلسه توفان فکری برای دسته‌بندی عللی که ممکن است موجب نقص در محصول شوند تشکیل شده است. به نظر شما کدام ابزار کنترل کیفیت برای جمع بندی نظرات مطرح شده در این جلسه مفید است؟

۱) نمودار پارتو ۲) نمودار پراکنش ۳) نمودار استخوان ماهی ۴) نمودار کنترل

۱۱ـ تیم کنترل کیفی مورد اشاره قرار گرفته در سؤال ۱۰ در مورد اثرگذاری یا عدم اثرگذاری یک میزان جریان برق در کیفیت عملیات جوشکاری انجام گرفته در محصول خود با تردید مواجه شده است کدام ابزار کنترل کیفی را برای کشف وجود یا عدم وجود این رابطه (به شکل کلی) پیشنهاد می‌کنید؟

۱) هیستوگرام ۲) نمودار پراکنش ۳) نمودار کنترل ۴) نمودار استخوان ماهی

۱۲ـ تیم کنترل کیفیت سؤال ۱۰ پس از جلسات مکرر به این نتیجه رسید که فشار دستگاه پرس به عنوان یک عامل مهم در کیفیت محصول تولیدی مؤثر است. بنابراین بنا دارد از نمودار کنترل به منظور کنترل این متغیر استفاده نماید اما از نحوه توزیع آماری این متغیر هیچ گونه اطلاعی در دست ندارد پیش از استفاده از نمودار کنترل چه ابزار کنترل کیفی را به منظور افزایش دانش تیمی‌نسبت به این توزیع پیشنهاد می‌کنید؟

۱) هیستوگرام ۲) نمودار پراکنش ۳) نمودار پارتو ۴) نمودار استخوان ماهی

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل دوم

۱ـ گزینه «۳» در نمودار پارتو تعداد دفعات رخداد یک مشخصه (کیفی و یا کمی) مورد توجه است.

۲ـ گزینه «۳» نمودار زنگوله‌ای جزئی از ابزارهای کنترل کیفیت نیست.

۳ـ گزینه «۲» نمودار جریان، کنترلر کیفی را در شناخت بهتر جزئیات فرایندهای بحرانی یاری می‌رساند.

۴ـ گزینه «۳» نمودار علت و معلولی از مهم‌ترین نمودارها در کشف علت و یا علل وقوع یک عیب و یا نقص است.

۵ـ گزینه «۴» جلسات طوفان فکری از مهم‌ترین گام‌های به منظور شناسایی علت و یا علل وقوع نقص می‌باشد که در ترسیم نمودار علت و معلول نقش بسزایی دارد.

۶ـ گزینه «۴» یکی از مواردی که بیانگر خارج از کنترل بودن فرایند در نمودار کنترلی می‌باشد، وجود نقطه‌ای در خارج از مرزهای کنترلی است. سایر گزینه‌ها نادرست می‌باشد.

۷ـ گزینه «۳» در نمودارهای کنترلی در صورتی‌که شش نقطه متوالی در نمودار در حال افزایش یا کاهش باشند یا ۹ نقطه متوالی در یک طرف خط مرکز (میانگین) قرار گیرد به این معنا خواهد بود که انحرافات با دلیل وارد فرایند شده است.

۸ـ گزینه «۳» انحرافات تصادفی اثر غیرقابل پیش‌بینی بر فرایند دارند، زیرا غیر قابل کنترل هستند و از این رو باید نادیده گرفته شوند.

۹ـ گزینه «۳» نمودارهای کنترل اطلاعات موثری جهت تنظیم صحیح فرایند به دست دهند. از طرفی نمودارهای کنترل مانع تولید اقلام سالم نشده و از تنظیم‌های غیر ضروری فرایند جلوگیری‌کنند. با استفاده از این نمودارها اطلاعاتی درباره کارایی فرایند بدست می‌آوریم.

۱۰ـ گزینه «۳» باید از نمودار استخوان ماهی استفاده کرد؛ نمودار استخوان ماهی به منظور دسته‌بندی علل بوجود آورنده نقص‌ها در محصول مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱۱ـ گزینه «۲» نمودار پراکنش برای این سطوح مناسب است؛ زیرا نمودار پراکنش به منظور بررسی اثرگذاری یک عامل در کیفیت محصول می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۱۲ـ گزینه «۱» هیستوگرام توصیفی از توزیع آماری داده‌ها ارائه می‌دهد. به این دلیل که هیستوگرام، توصیفی از توزیع آماری داده‌ها ارائه می‌دهد مناسب است.

۱۳ـ گزینه «۱» نمودار پارتو که به نمودار ۸۰–۲۰ نیز معروف است می‌تواند به منظور دسته‌بندی عوامل مؤثر بر کیفیت برحسب میزان اثرگذاریشان مورد استفاده قرارگیرد.

۱۴ـ گزینه «۴» تعاریف ارائه شده برای کیفیت، مکمل یکدیگر هستند و منافاتی با یکدیگر ندارند.

۱۵ـ گزینه «۴» تعاریف برای مفهوم کیفیت یک محصول عبارتند از: برآورده کردن نیازهای مخاطب آن محصول است ـ شایستگی آن محصول جهت استفاده است ـ عکس پراکندگی آن محصول از مشخصات طراحی است.

۱۶ـ گزینه «۱»

۱۷ـ گزینه «۱» کنترل کیفیت تمامی مراحل قبل و پس از تولید را دربر می‌گیرد.

۱۸ـ گزینه «۳» گزینه‌ی سوم تعریف صحیح واژه‌ی کنترل است.

انتخاب اندازه‌ی نمونه و فراوانی نمونه‌گیری

از دیدگاه کتاب مونتگومری، در طراحی یک نمودار کنترل، اندازه‌ی نمونه و فراوانی یا دفعات نمونه‌گیری باید مشخص باشد به طور کلی اندازه نمونه‌های بزرگ سرعت پی‌بردن به وجود تغییرات را در فرایند افزایش می‌دهند. در واقع بسته به میزان بزرگی تغییری که در صورت بروز آن، می‌خواهیم آن را متوجه شویم (دقت مورد نظر)، اگر اندازه‌ی این تغییرات نسبتاً زیاد باشد، آن‌گاه اندازه‌ی نمونه‌ی مورد نیاز کوچک‌تر از اندازه‌ی نمونه‌ای خواهد بود که برای پی‌بردن به وجود تغییرات کوچک مورد نیاز است. یعنی با افزایش اندازه‌ی نمونه (n)، خطای نوع $II\,(\beta)$ کاهش می‌یابد و با کاهش n، خطای نوع $II\,(\beta)$ افزایش می‌یابد.
یکی از روش‌های به دست آوردن اندازه‌ی نمونه (n) در مسائل محاسباتی، در صورت مشخص بودن α و β استفاده از فرمول زیر است:

$$n \cong \frac{(Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_{\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

که در رابطه‌ی فوق σ انحراف معیار فرایند و δ، اندازه‌ی شیفت از میانگین بر حسب واحد انحراف معیار می‌باشد. نیاز به ذکر است که روش‌های متعدد دیگری نیز برای یافتن اندازه‌ی نمونه وجود دارند، که در بعضی از سؤالات ممکن است راه گشاتر از فرمول فوق باشند و سعی شده در تست‌های این فصل و فصول آتی پوشش داده شوند. به خواننده توصیه می‌شود، از هیچ کدام از فرمول‌های معرفی شده در این کتاب چشم نپوشد و هر فرمول را با اجزای آن به صورت شایسته تحلیل نماید، زیرا رویکرد کنکور سراسری در این درس به گونه‌ای نیست که بتوان بدون تسلط روی تمامی فرمول‌ها و اجزا و روابط مرتبط با آن‌ها، به موفقیت موردنظر نایل آمد.

مثال۹: اثرات افزایش اندازه‌ی نمونه در کدام گزینه به درستی بیان شده است؟

۱) موجب افزایش دقت، افزایش خطای β، تنگ‌تر شدن حدود کنترل　　۲) موجب افزایش دقت، افزایش خطای β، بازتر شدن حدود کنترل
۳) موجب افزایش دقت، کاهش خطای β، تنگ‌تر شدن حدود کنترل　　۴) موجب کاهش دقت، کاهش خطای β، تنگ‌تر شدن حدود کنترل

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

مثال۱۰: در یک نمودار کنترل مقدرا خطای نوع I برابر ۰/۰۵ فرض می‌شود، اگر بخواهیم، تغییرات به اندازه‌ی 2σ به سمت بالا را با احتمال ۹۷/۵% کشف کنیم، چه اندازه نمونه‌هایی در هر زیر گروه لازم است؟ $(Z_{0/0135} \cong 2/21$, $Z_{0/05} \cong 1/645$, $Z_{0/025} \cong 2)$

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲/۵　　۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در صورت سؤال ذکر شده است، تغییرات به سمت بالا، پس فرض سؤال یک طرفه است، در نتیجه در فرمول n، از Z_{α} استفاده می‌کنیم، با توجه به داده‌های سؤال:

$$n = \frac{(Z_{\alpha} + Z_{\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} = \frac{(2+2)^2 \sigma^2}{(2\sigma)^2} = 4$$

تعیین فراوانی نمونه‌گیری

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فراوانی نمونه‌گیری (m) نیز باید مشخص شود. ایده‌آل‌ترین حالت این است که، اندازه‌ی نمونه‌های بزرگ در فواصل زمانی کوتاه تعیین گردند، ولی معمولاً چنین کاری صرفه‌ی اقتصادی ندارد. به صورت کلی یا باید، از اندازه نمونه‌های کوچک در فواصل زمانی کوتاه و یا از اندازه نمونه‌های بزرگ در فواصل زمانی طولانی استفاده نمود، از دیدگاه مفهومی بسنده به سطور فوق کفایت می‌کند، زیرا، یک حالت استاندارد و قطعی در این رابطه در هیچ منبعی ارائه نشده است.
یک روش محاسباتی برای تعیین اندازه‌ی نمونه و فراوانی نمونه‌گیری استفاده از متوسط طول دنباله (ARL) است. طول دنباله (RL) تعداد نقاطی است که روی نمودار کنترل رسم می‌شوند تا یک نقطه خارج از حدود کنترل بیفتد. طول دنباله دارای توزیع هندسی از نوع آزمایش است. متوسط طول دنباله نیز برابر با متوسط توزیع هندسی از نوع آزمایش می‌باشد. لذا متوسط طول دنباله برابر با متوسط تعداد مشاهداتی است که روی نمودار کنترل رسم می‌شود تا یک نقطه خارج از حدود کنترل بیفتد. برای محاسبه‌ی ARL از رابطه‌ی $ARL = \frac{1}{P}$ استفاده می‌شود، در این رابطه P احتمال رسم یک نقطه خارج از حدود کنترل است، در نتیجه داریم:

$ARL \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = ARL_0 & \text{زمانی که فرایند تحت کنترل است.} \\ \frac{1}{1-\beta} = ARL_1 & \text{زمانی که فرایند خارج کنترل است.} \end{cases}$

اگر فاصله‌ی بین دوبار نمونه‌گیری ثابت و برابر h باشد، متوسط زمان تا هشدار (ATS) از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$ATS = ARL \times h$$

به عنوان مثال فرض کنید، وقتی فرایند خارج از کنترل است، ARL_1 یک نمودار کنترل برابر ۱ و فاصله بین دوبار نمونه‌گیری $h = 2$ باشد. در این صورت $ATS = 2$ خواهد شد. حال اگر بخواهیم ATS را به یک ساعت کاهش دهیم، یا باید فاصله بین دوبار نمونه‌گیری را به ۱ ساعت تغییر دهیم و یا اندازه‌ی نمونه را به گونه‌ای زیاد کنیم که با کاهش β، $ARL = 1$ شود.

شاید در برخی مواقع محاسبه‌ی ARL برحسب **تعداد محصولات** مورد نیاز تا پی بردن به وجود یک تغییر در فرایند مورد نظر باشد. در این صورت از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌شود: $I = n \times ARL$

نیاز به ذکر است، در سؤالات کنکور سراسری سال ۹۱ از واژه‌ی تسلسل به جای دنباله استفاده گردیده بود.

مثال۱۱: با توجه به تعریف طول دنباله، توزیع احتمال مناسب برای طول دنباله در کدام گزینه آمده است؟ همچنین اگر میانگین طول دنباله برابر ۱۰ باشد، واریانس آن چقدر است؟

۱) پوآسون، ۹۰۰ ۲) هندسی، ۹۰ ۳) هندسی، ۹۰۰ ۴) پوآسون، ۹۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طول دنباله در واقع تعداد آزمایشات لازم، جهت رسیدن به اولین موفقیت است، که از توزیع هندسی پیروی می‌کند. میانگین و واریانس توزیع هندسی با پارامتر p به ترتیب $\frac{1}{p}$، $\frac{1-p}{p^2}$ است، در نتیجه، با توجه به این که میانگین توزیع برابر ۱۰ ذکر شده است، داریم:

$$E(RL) = \frac{1}{p} = 10 \Rightarrow p = \frac{1}{10} \Rightarrow Var(RL) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}} = 90$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۲: در حالت خارج از کنترل، برای مقدار شاخص ATS (متوسط زمان تا اولین هشدار) کدام گزینه مناسب‌تر است، و چه راه‌کارهایی برای نیل به این مقدار وجود دارد؟

۱) باید ATS حتی‌الامکان کم باشد و می‌توان با کمتر کردن فواصل نمونه‌گیری و یا کاهش اندازه‌ی نمونه به این مقصود رسید.

۲) باید ATS، حتی‌الامکان زیاد باشد و می‌توان با کمتر کردن فواصل نمونه‌گیری یا کاهش خطای β به این مقصود رسید.

۳) باید ATS، حتی‌الامکان کم باشد و می‌توان با زیاد کردن اندازه‌ی نمونه یا بیشتر کردن تعداد نمونه‌گیری در یک زمان مشخص به این مقصود رسید.

۴) باید ATS، حتی‌الامکان زیاد باشد و می‌تواند با کاهش اندازه‌ی نمونه یا افزایش تعداد نمونه‌گیری به این مقصود رسید.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در حالت خارج از کنترل بهتر است ATS تا حد امکان کم باشد، یعنی در زودترین زمان ممکن هشدار خارج از کنترل بودن اعلام شود. برای این منظور می‌توان فواصل نمونه‌گیری را کاهش داد، خطای β و یا با افزایش اندازه‌ی نمونه خطای نوع دوم را کاهش داد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۳: چنانچه ARL_1 برای یک نمودار کنترل و به ازای یک شیفت خاص برابر ۴ باشد، احتمال پی بردن به وجود این تغییر، تا قبل از نمونه‌گیری سوم را محاسبه کنید.

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{7}{16}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» احتمال کشف تغییر تا قبل از نمونه‌ی سوم. معادل احتمال کشف تغییر حداکثر به وسیله‌ی نمونه‌ی دوم است. با توجه به فرمول ARL_1 و استفاده از تکنیک‌های درس احتمال داریم:

$$ARL_1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{1-\beta} = 4 \Rightarrow 1-\beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = \frac{3}{4}$$

$$p \text{ (کشف تغییر تا قبل از نمونه‌ی سوم)} = (1-\beta) + \beta(1-\beta) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

مثال۱۴: فرض کنید شاخص ATS را برای فرایندی مقدار ثابت L در نظر گرفته‌ایم، با فرض این که فاصله‌ی بین دو نمونه‌گیری h باشد و فرایند در حالت تحت کنترل قرار داشته باشد، مقدار خطای α را به صورت پارامتری تعیین کنید.

۱) $\frac{h}{L}$ ۲) $\frac{L}{h}$ ۳) $\frac{L-h}{L}$ ۴) $\frac{L}{L-h}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» وقتی فرایند تحت کنترل است، با شاخص $ARL_{\circ}=\frac{1}{\alpha}$، سروکار داریم، متوسط فازی تا اولین هشدار نیز به صورت مستقیم با $ARL_{\circ}$ طبق رابطه‌ی زیر در ارتباط است، پس:

$$ATS = ARL_{\circ}\times h = \frac{1}{\alpha}\times h \Rightarrow L = \frac{1}{\alpha}\times h \Rightarrow \alpha = \frac{h}{L}$$

نیاز به ذکر است، مبحث شاخص‌های ARL و ATS، جاذبه‌ی زیادی برای طراحان تست درس کنترل کیفیت دارد و در سال‌های اخیر مورد توجه طراحان کنکور سراسری نیز بوده است. در این جا به جهت آن که شاید ذکر تعداد بیشتری مثال از حوصله‌ی این مبحث خارج است، تست‌های بسیار متنوع دیگری را در قسمت تست‌های تألیفی این فصل و فصل آینده گنجانده‌ایم که تسلط و تمرین روی تک‌تک این تست‌ها به خواننده توصیه می‌شود.

از دیگر مباحث مربوط به نمودارهای کنترل بحث تجزیه و تحلیل کارایی فرایند می‌باشد، که به دلیل آن که نیاز است، آشنایی نسبی با انواع نمودارهای کنترل قبل از فراگیری این مبحث به وجود آمده باشد، از ذکر این سرفصل، در این فصل چشم‌پوشی می‌نماییم و مطالب مربوط به آن را در فصول نمودارهای کنترل متغیر و وصفی مطرح خواهیم نمود.

انتخاب استراتژی نمونه‌گیری (زیر گروه‌های منطقی)

در مبحث قبل در مورد نحوه‌ی تعیین اندازه‌ی نمونه و فراوانی نمونه‌گیری (فاصله‌ی بین دو نمونه‌گیری) صحبت کردیم، حال سؤال این‌جاست که، اعضای هر نمونه (داده‌ها) با چه روی‌کرد و فاصله‌ی زمانی نمونه‌گیری شوند،به طور کلی، این موضوع به این معناست که **زیرگروه‌ها یا نمونه‌ها** باید طوری انتخاب شوند تا در صورت وجود خطاهای با دلیل، اختلاف بین زیرگروه‌ها یا نمونه‌ها (یعنی اختلاف بین دو یا چند نمونه) حداکثر و اختلاف درون داده‌های زیرگروه‌ها (نمونه‌ها) حداقل شود. معمولاً برای نمونه‌گیری از فرایندها (تهیه‌ی زیرگروه‌های منطقی) دو رویکرد وجود دارد، فرض کنید طراحی سیستم به گونه‌ای است که قرار است، در هر ساعت ۵ نمونه از فرایند برداشته شود. رویکرد اول بر این اساس است که در یک مقطع از زمان هر ۵ نمونه را برداریم و نتیجه را روی نمودار کنترل رسم کنیم و رویکرد دوم بر این مبناست که هر ۱۲ دقیقه یک نمونه برداریم. به عبارت دیگر ۵ نمونه را در طول ۱ ساعت برداریم.

مزایا و معایب و شرح کلی هر کدام از این رویکردها به صورت زیر خلاصه می‌شود:

در روش اول یا در واقع زیر گروه‌های نوع ۱:

- نمونه شامل واحدهایی است که به طور همزمان (یا از لحاظ زمانی خیلی نزدیک به هم) تولید شده‌اند.
- شانس ایجاد تغییرات در داخل هر نمونه حداقل و شانس ایجاد تغییرات بین گروه‌ها اگر خطاهای با دلیل وجود داشته باشند حداکثر می‌شود.
- این روش اساساً، تصویری از فرایند در هر مقطعی که نمونه تهیه می‌گردد فراهم می‌سازد.
- کاربرد این روش زمانی است که بخواهیم از نمودارهای کنترل، برای پی بردن به وجود تغییرات در فرایند استفاده کنیم.
- این روش باعث می‌گردد، تا بتوان تخمین بهتری برای انحراف معیار فرایند، زمانی که نمودارهای کنترل برای متغیرها استفاده می‌شود به دست آورد.

در روش دوم یا در واقع زیر گروه‌های نوع ۲:

- هر نمونه به عنوان نماینده‌ای از کلیه‌ی واحدهایی که از زمان تهیه‌ی آخرین نمونه تا به حال تولید شده‌اند، در نظر گرفته می‌شود.
- اساساً هر زیر گروه، یک نمونه‌ی تصادفی از کلیه‌ی خروجی‌های فرایند در طول فاصله‌ی نمونه‌گیری است.
- کاربرد این روش غالباً برای زمانی است که می‌خواهیم از نمودارهای کنترل به منظور تصمیم‌گیری در مورد پذیرش یا رد، کلیه‌ی اقلام تولید شده که از زمان آخرین نمونه تا به حال تولید شده‌اند، تصمیم‌گیری کرد.

- اگر فرایند در فاصله‌ی بین دو نمونه‌گیری از حالت کنترل به حالت خارج از کنترل و مجدداً به حالت کنترل برگردد، این رویکرد (روش دوم) مناسب‌تر است.

فصل ششم

«نمودارهای کنترل جمع تجمعی و میانگین متحرک موزون نمایی»

یکی از ضعف‌های اصلی نمودارهای شوهارت استفاده از اطلاعات موجود در آخرین نمونه مشاهده شده و نادیده گرفتن اطلاعات موجود در سایر نمونه‌ها است. این ویژگی باعث می‌شود که نمودارهای کنترل شوهارت از حساسیت لازم جهت تشخیص شیفت‌های کمتر از $1/5\sigma$ برخوردار نباشد.
می‌توان برای رفع این مشکل نمودارهای شوهارت از حدود هشدار یا قوانین حساس سازی بهره جست ولی این کارها نیز باعث می‌شود که طول تسلسل در حالت تحت کنترل به شدت کاهش یابد که مطلوب نیست. به عنوان یک راه‌حل مناسب می‌توان از نمودارهای تجمعی (cusum) و نمودار میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) استفاده کرد. که در این فصل به این دو نمودار کنترل می‌پردازیم:

نمودار جمع تجمعی cusum

این نمودار با کمک استفاده از اطلاعات نمونه‌های قبلی و نمونه فعلی می‌تواند تغییرات کوچک‌تر از $1/5\sigma$ را به خوبی شناسایی کند. آماره‌ای که روی این نمودار رسم می‌شود برابر جمع تجمعی انحرافات میانگین نمونه‌هایی قبلی و نمونه جدید از مقدار هدف، است.

مقدار هدف $= \mu_0$ جمع انحرافات میانگین نمونه‌ها تا نمونه i ام از مقدار هدف : C_i

میانگین نمونه i ام $= \bar{X}_j$

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} \left(| \bar{X}_j - \mu_0 | \right)$$

نکته ۱: نمودارهای جمع تجمعی هنگامی که $n=1$ است کارایی بسیار خوبی دارند.

همان طور که از تعریف C_i بر می‌آیند هنگامی که فرایند تحت کنترل است و میانگین آن برابر μ_0 (مقدار هدف) است، C_i یک فرایند با میانگین صفر است که گاهی مثبت و گاهی منفی خواهد بود. ولی اگر $\mu > \mu_0$ شود باعث خواهد شد که C_iها یک رشد صعودی از خودشان نشان دهند و اگر $\mu < \mu_0$ شود باعث می‌گردد که C_iها دارای یک روند نزولی شوند، پس می‌توان گفت هرگاه روندی صعودی یا نزولی در C_iها دیده شد، فرایند از کنترل خارج می‌شود.
نمودارهای جمع تجمعی دو روش کنترل دارند:

۱- روش جدولی یا الگوریتمی

۲- روس ماسک V

روش جمع تجمعی جدولی یا الگوریتمی برای پایش میانگین فرایند

در این روش از دو آماره C_i^+ (برای جمع انحرافات بالای μ_0) و $\bar{C}_i$ (برای جمع انحرافات زیر μ_0) استفاده می‌شود

$$C_i^+ = \text{Max}\left\{0, \bar{X}_i - (\mu_0 + k) + C_{i-1}^+\right\}$$

$$C_i^- = \text{Max}\left\{0, (\mu_0 + k) - \bar{X}_i + C_{i-1}^+\right\}$$

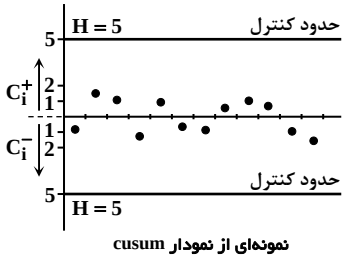
که در آن μ_0 مقدار هدف و x_i مقدار مشخصه کیفی نمونه اخیر و C_{i-1} مقدار جمع تجمعی انحرافات گذشته است. اما k را **مقدار مرجع یا کمکی** می‌گویند.
k در واقع آن مقداری است که اگر میانگین نمونه از مقدار هدف به اندازه آن منحرف شد جزء انحرافات C_i به حساب نمی‌آید به همین دلیل به k مقدار مجاز می‌گویند. معمولاً مقدار k به آن انحرافی که مایل هستیم پیدا کنیم. وابسته است و به صورت رابطه مقابل محاسبه می‌شود: $k = \frac{|\mu_0 - \mu_1|}{2}$

که در آن μ_1 مقداری است که مایلیم نمودارهای جمع تجمعی برای مقادیر بیشتر از آن حالت خارج از کنترل را نشان دهند:

$$\mu_1=\mu_0+\delta\sigma \Rightarrow k=\frac{|\mu_0-\mu_0-\delta\sigma|}{2}=\frac{\delta}{2}\sigma$$

تذکر ۱: از روابط C_i^+ و C_i^- دیده می‌شود که این دو مقدار تنها مقادیر انحراف از هدف بیشتر از k را جمع می‌کنند.

نحوه کار جمع تجمعی جدولی به این صورت است که ابتدا برای هر نمونه که می‌گیریم C_i^+ و C_i^- را محاسبه می‌کنیم (که همواره یکی صفر است و دیگری مثبت) و بعد از نمودار استفاده می‌کنیم، که در بالای خط مرکز مقادیر C_i^+ و در زیر خط مرکز C_i^- رسم می‌شوند، برای هر کدام از یک حد کنترل H استفاده می‌شود، به محض عبور هر کدام از C_i^+ها و C_i^-ها از حد کنترل فرایند خارج از کنترل اعلام می‌شود.



نمونه‌ای از نمودار cusum

تذکر ۲: معمولاً $H=h\sigma_{\bar{x}_i}$ محاسبه می‌گردد که در آن ۴ یا $h=5$ است

نکته ۲: اگر نقطه‌ای خارج از حد قرار گرفت فرایند خارج از کنترل است و باید اقدام اصلاحی انجام شود و دوباره فرایند از سر گرفته شود و جمع تجمعی را مجدداً از صفر شروع کرد.

نکته ۳: وقتی نمودار cusum برای نمونه‌های تکی $(n=1)$ استفاده می‌شوند باید در روابط C_i^+ و C_i^- به جای $\bar{X}_i$ همان X_i را قرار داد.

نحوه تعیین K و H در نمودارهای cusum

در واقع تعیین K و H در نمودارهای جمع تجمعی به معنای طراحی آن‌ها است. این مقادیر به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که متوسط طول تسلسل (ARL) نمودارها خوب باشد. (ARL_0 تا حد ممکن زیاد و ARL_1 تا حد ممکن کم باشد)

ابتدا پارامترهای H و K را به صورت $H=h\sigma_{\bar{x}_i}$ و $K=k\sigma_{\bar{x}_i}$ تعریف می‌کنند. که در آن h معمولاً ۵ یا ۴ هست و $k=\frac{1}{2}\delta$ که δ مقدار شیفت موردنظر بر حسب σ است که علاقه داریم تشخیص داده شود.

نکات:

۴: افزایش k باعث می‌شود خطای نوع یک (α) به خوبی کاهش یابد، زیرا k تلورانس انحراف از μ_0 است که با افزایش آن مقادیر C_i^+ و C_i^- کمتر می‌شود و احتمال داخل حدود کنترل افتادن آن‌ها بیشتر می‌شود.

۵: با توجه به مفاهیم نکته بالا، افزایش k باعث افزایش ARL_0 می‌شود.

۶: افزایش مقدار H باعث بیشتر شدن فاصله حدود کنترل می‌شود و باعث افزایش β(خطای نوع دوم) که باعث افزایش ARL_1 خواهد شد.

تخمین میانگین جدید

یکی از مزایای نمودارهای cusum این است که می‌توان هنگامی که فرایند از مقدار هدف منحرف شده است را به راحتی تشخیص داد. در واقع هرگاه که C_i از حدود H خارج شد کافی است تعداد نمونه‌ها را تا جایی که برای اولین بار (در این روند) C_i مخالف صفر شده است، شمارش کنیم. این عدد نشان می‌دهد که چند نمونه قبل میانگین تغییر کرده بوده است به این منظور دو شمارنده N_i^+ و N_i^- را با تعاریف زیر، تعریف می‌کنیم:

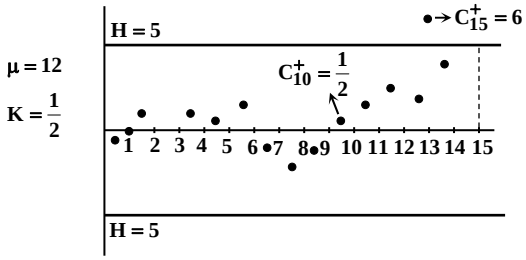
N_i^+ = تعداد نمونه‌های متوالی که $C_j^+>0$ دارند تا نمونه iام

N_i^- = تعداد نمونه‌های متوالی که $C_j^->0$ دارند تا نمونه iام

با کمک این دو شمارنده اگر نمونه I خارج از حدود افتاده باشد برای تخمین μ جدید فرایند داریم:

$$\hat{\mu}=\begin{cases}\mu_0+k+\dfrac{C_i^+}{N_i^+} & \text{اگر } C_i^+>H\\ \mu_0-k+\dfrac{C_i^-}{N_i^-} & \text{اگر } C_i^->H\end{cases}$$

مثال۱: شکل زیر یک نمودار کنترل cusum است کـه در نمونـه ۱۵ ام فرایند خارج از کنترل اعلام شده تخمین μ جدید چند است؟



روند در cusum

در شکل بالا نمونه ۱۵ از حد کنترل بالا خارج شده است و روندی که این نمونه در آن قرار دارد از نمونه ۱۰شروع شـده کـه بـرای اولـین بـار C_i^+ در آن مثبت شده است پس $N_{15}^{+}=۶$ است.

$$\mu_{\text{جدید}}^{۸} = \mu_{\circ} + k + \frac{C_i^+}{N_i^+} = ۱۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۶}{۶} = ۱۳/۵$$

نکته ۷: برای آن که بتوان واکنش اولیه سریع یا آغاز سریع (FIR) در ابتدای نمونه‌گیری و رسم نمودار با سرعت بیشتری، انحرافات از مقدار هدف را تشخیص داد به جای این‌که C_i^+ و C_i^- از مقدار صفر شروع شوند از مقداری که معمولاً برابر $\frac{H}{۲}$ است شروع می‌شوند.

تذکر ۳: اگر فرایند تحت کنترل باشد مقدار اولیه (FIR) به سرعت به صفر میل می‌کند ولی اگر فرایند تحـت کنتـرل نباشـد بـا سـرعت بیشـتری نمودار حالت خارج را نشان می‌دهد.

نکته ۸: از نمودارهای cusum می‌توان برای کنترل تغییر پذیری نیز استفاده کرد. (بیان روابط این مطلب خارج از محدوده کتاب است)

نکته ۹: نمودار جمع تجمعی استاندارد نیز وجود دارد که آماره آن $y_i = \frac{x_i - \mu_{\circ}}{\sigma}$ است و

$$C_i^+ = \max\left\{\circ, \bar{y}_i - k + C_{i-۱}^-\right\} \qquad C_i^- = \max\left\{\circ, k - \bar{y}_i + C_{i-۱}^-\right\}$$

نکته ۱۰: می‌توان از نمودار جمع تجمعی و شوهارت در کنار هم استفاده کرد تا هم شیفت‌های کوچک و هم شیفت‌های بزرگ به راحتی کشف شوند.

نکته ۱۱: نمودارهای cusum بر خلاف اینکه می‌توانند شیفت‌های کوچک را کشف کنند توانایی اندکی در کشف شیفت‌های بزرگ دارند.

نکته ۱۲: در نمودارهای cusum نمی‌توان از قوانین حساس‌سازی استفاده کرد زیرا C_iها در آن مستقل نیستند و به نمونه‌های گذشته وابستگی دارند.

V ماسک

به جای روش تجمعی جدولی، می‌توان از V ماسک استفاده کرد. آماره جمع تجمعی در V ماسک به صورت زیر است:

$$C_i = \sum_{j=۱}^{i} y_i = y_i + C_{i-۱}$$

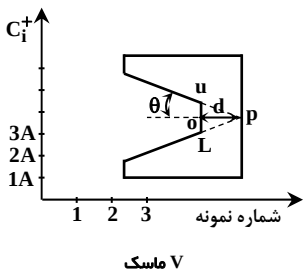
که در آن y_i مشاهده استاندارد شده یا $y_i = \frac{x_i - \mu_{\circ}}{\sigma}$ است. روش تصمیم به این صورت است که ابتدا ماسک V (که روش ترسیم آن در شکل نشان داده شده) بر روی نمودار کنترل cusum به طوری قرار گیرد که نقطه O بر آخرین مقدار C_i منطبق و خط OP موازی محور افقی باشد. اگر کلیه جمع‌های تجمعی گذشته $c_۱, c_۲, \ldots, c_i$ بین دو بازوی ماسک V قرار گیرند آنگاه فرایند **تحت کنترل** است. عملکرد ماسک V بر اساس فاصله d و زاویه θ، تعیین می‌شود.

نتایج جمع تجمعی جدولی و روش ماسک V با یکدیگر یکسان خواهند بود اگر:

$$k = A\tan(\theta) \Rightarrow \theta = \text{Arc}\tan(\frac{k}{A})$$

$$H = A\,d\tan(\theta) = dk \Rightarrow d = \frac{H}{k}$$

که A در این روابط، فاصله دو نقطه متوالی محور عمودی است.



V ماسک

مقایسه طرح‌های یکبار نمونه‌گیری و جفت نمونه‌گیری

۱ـ برترین مزیت یک طرح جفت نمونه‌گیری امکان کاهش تعداد کل بازرسی‌ها است؛ به این معنا که اگر در نمونه اول بتوان برای انباشته تصمیم‌گیری کرد دیگر نیازی به برداشتن نمونه دوم نیست یا از بازرسی کوتاه‌شده استفاده شود به نحوی که قبل از پایان گرفتن، تمام نمونه دوم انباشته رد شود.

۲ـ مزیت دیگر روش جفت نمونه‌گیری، برتری روحی است بدین صورت که اگر انباشته در مرحله اول پذیرفته نشد می‌تواند یک شانس دیگر داشته باشد؛ قابل ذکر است که در واقع هیچ تفاوتی بین طرح یکبار نمونه‌گیری یا جفت نمونه‌گیری از این لحاظ وجود ندارد (یعنی برتری واقعی‌ای وجود ندارد).

۳ـ عیب طرح جفت نمونه‌گیری این است که از لحاظ اجزاء و آموزش به کارکنان پیچیده تر است و هزینه بیشتری دارد و گاهی باعث زیاد شدن خطاهای بازرسی می‌گردد.

۴ـ برخی اوقات این امکان وجود دارد که تعداد واحدهای بازرسی شده در طرح جفت نمونه‌گیری بیشتر از طرح یک‌بار نمونه‌گیری شود.

تذکر۵: در طرح‌های جفت نمونه‌گیری مجموع نمونه‌ها $(n_1 + n_2)$ بزرگ‌تر مساوی اندازه نمونه (n) طرح یکبار نمونه‌گیری با ریسک‌های معادل است.

اکنون می توانیم به معرفی شاخص های انتخاب طرح ها بپردازیم ، ولی پیش از آن نیاز است که خواننده باید با برخی نکات تحلیلی که به صورت کلی برای پاسخ گویی به تست های تمامی بخش هایی که در ادامه معرفی می کنیم آشنایی داشته باشد:

چند نکته اساسی برای پاسخ گفتن به سؤالاتی که اثرات تغییر پارامتری را بر روی پارامترهای دیگر بررسی می‌کند:

ممکن است این موارد مستقیماً سؤال نشوند اما پیش‌زمینه پاسخ‌گویی به سؤالات پارامتری کنکور می‌باشد.

* افزایش اندازه انباشته (N) هیچ تأثیری بر روی P_a ندارد.
* اگر P_a را به α و β تفکیک کنیم ، می‌دانیم برای($P = 0 \Leftarrow P_a = \alpha$) و برای سایر مقادیر P $(P_a = \beta)$.
* افزایش اندازه نمونه (n) باعث کاهش β می‌شود.
* افزایش اندازه نمونه (n) هیچ تأثیری بر روی α ندارد.
* افزایش عدد پذیرش (طرح یکبار نمونه‌گیری) P_a را افزایش می‌دهد.

معیار و شاخص های انتخاب طرح ها

برای آنکه بتوان بین طرح‌های مختلف نمونه‌گیری، یک طرح مناسب را انتخاب کرد شاخص‌هایی جهت مقایسه تعریف می‌کنند.

۱ـ متوسط تعداد نمونه ASN

در طرح‌های یک‌بار نمونه گیری همواره اندازه نمونه n ثابت است ولی در طرح جفت نمونه‌گیری اگر توسط نمونه اول تصمیم‌گیری کنیم n_1 تا نمونه گرفته‌ایم و اگر توسط نمونه اول نتوانیم تصمیم بگیریم $n_1 + n_2$ عدد نمونه خواهیم گرفت. پس در طرح جفت نمونه‌گیری داریم:

$$ASN = n_1 P_I + (n_1 + n_2)(1 - P_I)$$

که در این رابطه P_I یعنی احتمال تصمیم‌گیری توسط نمونه اول

$P_I = P$ (پذیرش انباشته توسط نمونه اول) $+ P$ (رد انباشته توسط نمونه اول)

$= P(d_1 > c_2) + P(d_1 \le c_1)$

که با تقریب مناسبی می توان برای محاسبه احتمال از جدول توزیع تجمعی پواسون بهره گرفت.

در طرح‌های جفت نمونه‌گیری گاهی مفهومی به نام بازرسی کوتاه شده به کار می‌رود که باعث تغییرمقدار ASN می شود. در زیر به این مفهوم اشاره می‌شود.

تعریف بازرسی کوتاه شده:

اگر نمونه دوم را تنها تا جایی ادامه دهیم که تعداد معیوب‌های کل $(d_1 + d_2)$ از c_2 بیشتر شود به آن بازرسی کوتاه شده می‌گویند. یعنی هر عضو نمونه دوم را در هنگام برداشت از انباشته بررسی می‌کنیم و اگر معیوب بود به عدد d_1 یک واحد می‌افزاییم هرگاه تعداد کل معیوب ها بیشتر از c_2 شد از نمونه‌برداری دست می‌کشیم.

نکته ۱۶: رابطه ASN برای طرح جفت نمونه‌گیری با بازرسی کوتاه شده

$$ASN = n_1 + \sum_{j=c_1+1}^{c_2} P(n_1, j)\left[n_1 P_L(n_2, c_2 - j) + \frac{c_2 - j + 1}{p} p_m(n_2 + 1, c_2 - j + 2) \right]$$

$P(n_1, j)$ احتمال مشاهده j واحد معیوب در n_1 واحد نمونه

$P_L(n_2, c_2 - j)$ احتمال $c_2 - j$ واحد یا کمتر معیوب در نمونه n_2 تایی

$P_m(n_2 + 1, c_2 - j + 2)$ احتمال مشاهده $c_2 - j + 2$ واحد معیوب در نمونه به اندازه $n_2 + 1$

مثال۵: اگر طرح جفت نمونه‌گیری $(n_۱ = ۵, n_۲ = ۱۰, c_۱ = ۲, c_۲ = ۴)$ را برای انباشته‌ای پیاده کنیم درصورتی‌که احتمال گرفتن نمونه دوم ۰/۳ باشد مقدار ASN را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$ASN = P^I n_۱ + (۱ - P^I)(n_۱ + n_۲) = ۰/۷ \times ۵ + ۰/۳ \times ۱۵ = ۸$$

$$P^I = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

دیده می‌شود که مقادیر $c_۱, c_۲$ کاملاً بلا استفاده‌اند.

در سؤال بالا اگر نسبت اقلام معیوب ۰/۲ باشد ASN چه قدر است؟

پاسخ:

$$P(\text{پذیرش توسط نمونه اول}) + P(\text{رد توسط نمونه اول}) = P(d_۱ \le ۲) + P(d_۱ = ۵)$$

$$= \binom{۵}{۰}(۰/۲)(۰/۸)^۵ \binom{۵}{۱}(۰/۲)^۱(۰/۸)^۴ + \binom{۵}{۲}(۰/۲)^۲(۰/۸)^۳ + \binom{۵}{۵}(۰/۲)^۵ = ۰/۹۴۲$$

$$ASN = ۰/۹۴ \times ۵ + ۰/۰۶ \times ۱۰ = ۵/۳$$

روش دوم استفاده از توزیع پواسون با $\lambda = ۱$ و جدول توزیع تجمعی آن در پیوست است.

$$P(d_۱ \le ۲) + \frac{e^{-۱}۵}{۵!} = ۰/۹۱۹ + ۰/۰۰۳ = ۰/۹۲۲$$

$$ASN = ۰/۹۲ \times ۵ + ۰/۰۸ \times ۱۰ = ۵/۴$$

که تفاوت چندانی در جواب آخر دیده نمی‌شود.

نکته۱۷:

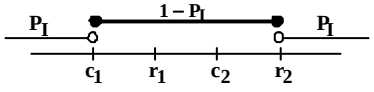
بررسی اثر افزایش یا کاهش متغیرها بر شاخص ASN:

همان‌طور که پیش از این ذکر گردید متوسط تعداد نمونه‌ها (ASN) از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

طرح‌های یکبار نمونه‌گیری $\Leftarrow \mathbf{ASN = n}$

طرح‌های جفت نمونه‌گیری $\leftarrow \mathbf{ASN = n_۱ + n_۲ + (۱ - P_I)}$

احتمال تصمیم‌گیری به وسیله نمونه اول



با توجه به رابطه‌ی ASN می‌توان نکات زیر را در رابطه با اثر تغییرات سایر پارامترها بر شاخص ASN ارائه داد:

* زمانی تصمیم‌گیری به وسیله نمونه اول انجام می‌شود که تعداد ناسالم در نمونه اول کوچکتر مساوی $c_۱$ یا بزرگتر مساوی $r_۲$ باشد.
* در یک طرح یکبار نمونه‌گیری با افزایش اندازه نمونه، ASN افزایش می‌یابد .
* در طرح‌های جفت نمونه‌گیری و یکبار نمونه‌گیری افزایش اندازه انباشته هیچ تأثیری بر ASN ندارد.
* می‌توانیم فضای P_I و $(۱ - P_I)$ را به صورت شکل فوق مشخص کنیم. (با فرض $r_۱ < c_۲$).

به دلیل داشتن این شکل می‌توان به سؤالات مربوط به اثر تغییرات $c_۱, c_۲, r_۱, r_۲$، بر روی ASN پاسخ داد.

به عنوان مثال همان گونه که از شکل پیداست با افزایش $r_۲$، P_I کاهش می‌یابد و در نتیجه $(۱ - P_I)$ افزایش می‌یابد، با توجه به رابطه ASN می‌توان نتیجه گرفت که ASN افزایش می‌یابد:

$$ASN \uparrow \Leftarrow (۱ - P_I) \uparrow \leftarrow \downarrow P_I \Leftarrow r_۲ \uparrow$$

$$r_۲ \uparrow \Rightarrow P_I \downarrow \Rightarrow (۱ - P_I) \uparrow \Rightarrow ASN \uparrow$$

مقایسه ASN در طرح‌های مختلف

برای مقایسه طرح‌های مختلف از نمودار ASN بر اساس مقدار P (نسبت اقلام معیوب) استفاده می‌شود. به نمودار مقابل دقت کنید: