



# مدرس‌ان شریف

## فصل اول

### « اصول طراحی اجزای ماشین »

در این فصل به اصول طراحی قطعات ماشین پرداخته می‌شود. طراحی اجزاء و قطعات ماشین می‌بایستی منطبق بر اصول علمی و عملی و با لحاظ نمودن ضریب اطمینان انجام گردد تا قطعه و مکانیزم به دست آمده قابلیت استفاده مطمئن را داشته باشد. بارگذاری روی هر قطعه یا سیستم می‌تواند به صورت ایستا یا خستگی باشد. طراحی اجزای ماشین برای هر یک از انواع این بارگذاری‌ها دارای اصول مشخصی می‌باشد که در این فصل ابتدا به طراحی اجزای ماشین تحت اثر انواع بارگذاری‌های استاتیکی (بخش اول) و سپس به روش‌های طراحی اجزای ماشین تحت اثر بارگذاری‌های دینامیکی (بخش دوم) پرداخته می‌شود.

#### بخش اول: طراحی استاتیکی اجزا

#### مقدماتی از مقاومت مصالح کاربردی

##### الف) تنش با توزیع یکنواخت

در طراحی، اغلب تنش با توزیع یکنواخت فرض می‌گردد، با توجه به نحوه و چگونگی اعمال بار خارجی بر جسم مورد بررسی در بارگذاری‌ها، این تنش‌ها به نام‌های کششی، فشاری یا برشی خالص خوانده می‌شوند. فرض یکنواختی تنش به این معناست که اگر قطعه را به دو قسمت تقسیم کنیم، اثر تنش با نیروی یکنواخت گسترده‌ای به اندازه  $\sigma \cdot A$  جایگزین می‌شود که به ابتدای قسمت قطع شده اعمال می‌شود. بنابراین به تنش  $\sigma$ ، تنش یکنواخت گسترده گفته شده و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

در صورتی می‌توان تنش را با توزیع یکنواخت فرض کرد که موارد زیر رعایت شود:

- ۱- قطعه مستقیم و از ماده همگن باشد.
- ۲- خط اثر نیرو بر مرکز سطح مقطع منطبق باشد.
- ۳- قسمت تحت بررسی از دو سر میله و از هر ناپیوستگی یا تغییر ناگهانی در مقطع و محل اعمال نیروها دور باشد.

##### ب) کرنش کشسان (کرنش الاستیک)

وقتی قطعه مستقیمی تحت بار محوری و کششی قرار گیرد، طول آن افزایش می‌یابد. نسبت افزایش طول به طول واحد، کرنش محوری نامیده می‌شود. بر

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

اساس تعریف فوق، کرنش محوری (عمودی) از رابطه مقابل محاسبه می‌گردد:

$\delta$  افزایش طول کلی (کرنش کلی) میله در طول  $L$  است.

کرنش برشی ( $\gamma$ )، تغییر در زاویه قائم المان، زمانی که قطعه تحت تنش برشی قرار گرفته است، می‌باشد. خاصیت کشسانی ماده، خاصیتی است که آن را قادر می‌سازد پس از برداشتن بار، شکل و اندازه اولیه خود را باز یابد. **قانون هوک** بیان می‌کند که در محدوده الاستیک، تنش در هر ماده با کرنش متناظر آن متناسب است. یک ماده کشسان لزوماً از قانون هوک پیروی نمی‌کند، چون ممکن است برخی مواد بدون در نظر گرفتن شرط حدی (متناسب بودن تنش با کرنش)، به شکل اولیه خود باز گردند. از طرف دیگر، ماده‌ای که از قانون هوک پیروی می‌کند کشسان است. طبق قانون هوک برای تنش‌های محوری و برشی، می‌توان نوشت:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{و} \quad \tau = G \cdot \gamma$$

$E$  و  $G$  ثابت‌های تناسب‌اند. چون کرنش‌ها اعدادی بدون واحد (یکا) هستند، لذا یکاهای  $E$  و  $G$  همان یکاهای تنش‌اند. ثابت  $E$  مدول کشسانی و ثابت  $G$  مدول کشسانی برشی و گاهی مدول صلابت نامیده می‌شود.  $E$  و  $G$  اعدادی هستند که نشان‌دهنده سفتی یا صلابت ماده می‌باشند، این دو ثابت نشان‌دهنده خواص اصلی ماده‌اند.

باجایگذاری  $\sigma = F/A$  و  $\varepsilon = \delta/L$  در رابطه هوک و مرتب کردن آن، معادله تغییر شکل کلی میله تحت بار محوری کششی یا فشاری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$$

آزمایش‌ها نشان می‌دهند وقتی ماده‌ای تحت کشش قرار می‌گیرد، نه تنها کرنش محوری خواهد داشت بلکه کرنش عرضی نیز دارد. پواسون نشان داد که این دو کرنش در گستره‌ای که قانون هوک حاکم است (محدوده الاستیک) با یکدیگر متناسب‌اند. نسبت این دو کرنش به ترتیب زیر بیان می‌شود:

$$\nu = \frac{\text{کرنش عرضی}}{\text{کرنش محوری}}$$

که نسبت **پواسون** نام دارد. روابط مشابهی برای بارگذاری فشاری به کار می‌روند، با این تفاوت که در این مورد انبساط جانبی صورت می‌گیرد.

می‌توان نشان داد که برای ماده خطی، ایزوتروپیک و همگن سه ثابت کشسان با یکدیگر به صورت روبه‌رو در ارتباطند:

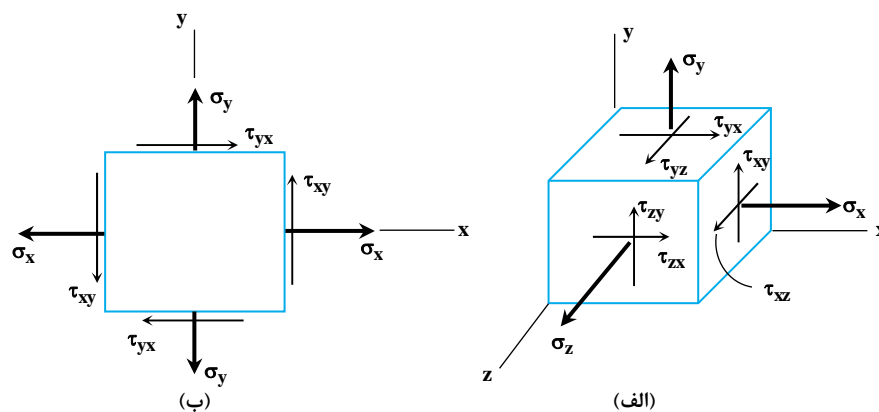
$$E = 2G(1 + \nu)$$

### پ) تحلیل تنش

همان‌گونه که می‌دانید اعمال بارهای خارجی باعث ایجاد تنش‌های داخلی در قطعه می‌شوند. هدف این بحث معرفی این تنش‌هاست.

شکل زیر (الف) یک المان سه بعدی را با سه تنش عمودی  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  و شش تنش برشی  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{yx}$ ،  $\tau_{yz}$ ،  $\tau_{zy}$ ،  $\tau_{zx}$  و  $\tau_{xz}$  که همگی مثبت می‌باشند، نشان می‌دهد. این المان تعادل استاتیکی دارد، لذا:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{cases}$$



شکل ۱. وضعیت یک المان و تنش‌های وارد به آن

تنش‌های عمودی رو به خارج و تنش‌های برشی که در جهت مثبت محور مختصات به المان اثر می‌کنند مثبت در نظر گرفته می‌شوند. اولین زیرنماد هر مؤلفه تنش برشی، نشان‌دهنده محور عمود بر وجهی از جزء است که این مؤلفه در آن قرار دارد، دومین زیرنماد نشانگر محوری است که مؤلفه تنش برشی با آن موازی است. وجوه منفی جزء، دارای تنش‌های برشی در جهت مخالفاند که این تنش‌ها نیز مثبت در نظر گرفته می‌شوند.

در شکل فوق (ب) حالتی از تنش دو محوری یا صفحه‌ای نشان داده شده است. در این حالت فقط تنش‌های عمودی مثبت یا منفی در نظر گرفته می‌شوند. علامت مؤلفه‌های تنش برشی با حرکت عقربه‌های ساعت مشخص می‌شود. به این ترتیب در شکل،  $\tau_{xy}$  پادساعتگرد (CCW) و منفی و  $\tau_{yx}$  ساعتگرد (CW) و مثبت می‌باشد.



### ت) تنش‌های اصلی در بارگذاری دو محوری (صفحه‌ای)

فرض کنید که یک المان سه بعدی را صفحه مایلی که با محور  $y$  زاویه  $\phi$  می‌سازد قطع کند. بر این مقطع تنش‌های  $\sigma$  و  $\tau$  وارد می‌شوند که با جمع نیروهای حاصل از مؤلفه‌های تنش و مساوی صفر قرار دادن آنها، تنش‌های  $\sigma$  و  $\tau$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi$$

با مشتق‌گیری از رابطه اول نسبت به  $\phi$  و برابر صفر قرار دادن آن نتیجه مقابل به دست می‌آید:

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

معادله فوق دو مقدار ویژه برای زاویه  $2\phi$  تعریف می‌کند؛ یکی تنش عمودی بیشینه (ماکزیمم)  $\sigma_1$  و دیگری تنش عمودی کمینه (مینیمم)  $\sigma_2$ ، که این دو تنش، تنش‌های اصلی و جهت‌های آن جهات اصلی نامیده می‌شوند. زاویه بین جهات اصلی  $90^\circ$  است. مقدار این تنش‌های اصلی که در جهات اصلی به وجود می‌آیند برابر است با:

$$\sigma_1 \text{ و } \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

با مشتق‌گیری از رابطه تنش برشی نسبت به  $\phi$  در صفحه مایل و برابر صفر قرار دادن آن خواهیم داشت:

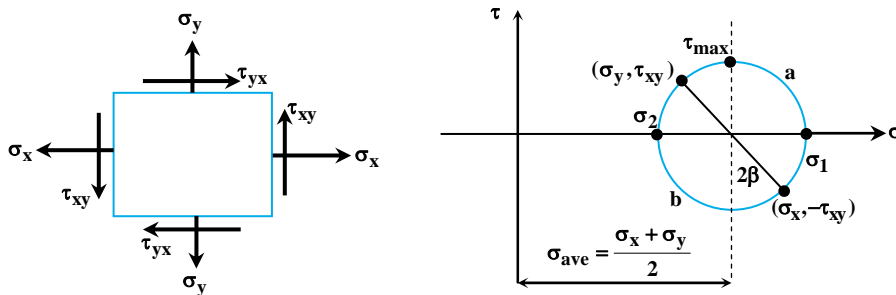
$$\tan 2\phi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

از رابطه فوق دو مقدار برای  $2\phi$  به دست می‌آید که در آن زوایا، تنش‌های برشی ( $\tau$ ) به مقدار ماکزیمم (حداکثر) خود می‌رسند. این دو مقدار ماکزیمم (حداکثر) تنش‌های برشی برابرند با:

$$\tau_1 \text{ و } \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

### ث) دایره موهر

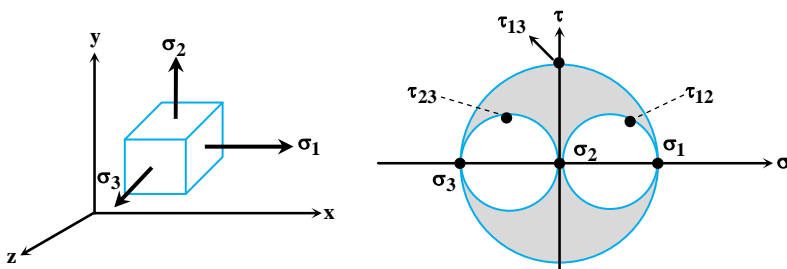
دایره موهر یک روش ترسیمی برای تعیین مقادیر تنش‌های اصلی و حداکثر تنش برشی است. دایره موهر در تنش دو بعدی که روابط آن در قسمت قبل بیان شد مطابق شکل زیر ترسیم می‌شود، برای کار با دایره موهر، المانی را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم.



شکل ۳. نحوه ترسیم دایره موهر در تنش دو محوری

توجه داشته باشید که علامت تنش قائم کششی مثبت و علامت تنش قائم فشاری منفی در نظر گرفته می‌شود، همچنین در دایره موهر در صورتی که  $\tau$  المان را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند، علامت آن مثبت و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند، علامت آن منفی در نظر گرفته می‌شود.

هنگام رسم دایره موهر در تنش سه محوری که شامل سه دایره مماس با هم می‌باشند، تنش‌های اصلی  $\sigma_N$  و  $\tau_N$  طوری مرتب می‌شوند که داشته باشیم:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . برای هر صفحه موردنظر که المان را قطع می‌کند، مختصات تنش  $\sigma_N$  و  $\tau_N$  همواره در ناحیه سایه‌دار قرار می‌گیرد.



شکل ۴. دواير موهر در تنش سه محوری

مطابق شکل باید توجه کرد که اگر مقادیر تنش‌های اصلی در یک المان سه بعدی مشخص باشند ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) در آن صورت مقدار تنش برشی

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad \text{حداکثر (مطلق) در این المان برابر است با:}$$

در حالت عمومی تنش سه بعدی (تنش سه محوری)، یک المان شش وجهی، سه جهت اصلی و سه تنش اصلی ( $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$ ) وجود دارد.

برای مشخص کردن تنش سه بعدی به شش مؤلفه تنش نیاز می‌باشد. از حل معادله درجه سوم زیر می‌توان به آن‌ها دست یافت:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0$$

با حل معادله فوق برای حالت مشخصی از تنش، می‌توان تنش‌های اصلی را به دست آورد.

### ج) روابط تنش - کرنش

روش‌های تجربی زیادی وجود دارند که از آن‌ها می‌توان برای اندازه‌گیری کرنش استفاده کرد. بنابراین، اگر رابطه بین تنش و کرنش شناخته شود، تنش در یک نقطه پس از اندازه‌گیری کرنش آن محاسبه می‌شود. کرنش‌های اصلی، کرنش‌هایی هستند که در جهت تنش‌ها ایجاد می‌شوند، کرنش‌های برشی دقیقاً مانند تنش‌های برشی بر روی وجوهی از اجزاء که در امتداد جهت‌های اصلی قرار گرفته‌اند صفر می‌باشند. با استفاده از رابطه پواسون سه کرنش اصلی مربوط به حالت تنش تک محوری عبارتند از:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1$$

از علامت منفی، برای نمایش کرنش‌های فشاری استفاده می‌شود. توجه کنید، در حالتی که تنش تک محوری می‌باشد، کرنش سه محوری است.

### چ) تنش دو محوری

برای تنش دو محوری،  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  مقادیر مشخص و  $\sigma_3$  صفر در نظر گرفته می‌شوند. کرنش‌های اصلی با استفاده از رابطه هوک و به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$$

روابط فوق کرنش‌های اصلی را بر حسب تنش‌های اصلی نشان می‌دهند. ولی حالت معمول بر عکس است. برای یافتن  $\sigma_1$ ،  $\nu$  در  $\varepsilon_3$  ضرب و دو معادله اول با یکدیگر جمع می‌شوند، لذا:

$$\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} + \frac{\nu\sigma_2}{E} - \frac{\nu^2\sigma_1}{E} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{E(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3)}{1 - \nu^2} \\ \sigma_2 = \frac{E(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)}{1 - \nu^2} \end{cases}$$

برای حل این معادله به خاطر داشته باشید که تنش یا کرنش کششی با علامت مثبت و تنش یا کرنش فشاری با علامت منفی در نظر گرفته می‌شوند.

### ح) تنش سه محوری

به حالتی از تنش که در آن هیچ‌کدام از تنش‌های اصلی صفر نباشند، تنش سه محوری می‌گویند. در این مورد، کرنش‌های اصلی عبارتند از:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$$

ضمناً تنش‌های اصلی بر حسب کرنش‌ها عبارتند از:

$$\sigma_1 = \frac{E\varepsilon_1(1 - \nu) + \nu E(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}, \quad \sigma_2 = \frac{E\varepsilon_2(1 - \nu) + \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}, \quad \sigma_3 = \frac{E\varepsilon_3(1 - \nu) + \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1 - \nu - 2\nu^2}$$

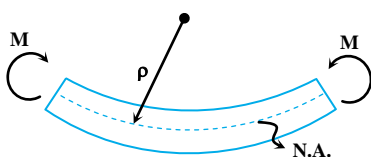
### خ) تنش‌های عمودی در خمش

شکل مقابل قسمتی از تیری را نشان می‌دهد که گشتاور خمشی (مثبت)  $M$  بر آن اعمال می‌شود. محور  $y$ ، محور تقارن است. محور  $x$  بر محور خنثی تیر منطبق است و صفحه  $xz$  که شامل تمام محورهای خنثی مقطع‌ها است، صفحه خنثی نامیده می‌شود. اجزای تیر که بر این صفحه منطبق‌اند، دارای کرنش صفر هستند.

اعمال گشتاور مثبت، باعث خم شدن سطح فوقانی تیر به سمت پایین و انحنای محور خنثی می‌شود، اگر

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

شعاع انحنای محور خنثی را  $\rho$  در نظر بگیریم، با توجه به تعریف انحنای داریم:



شکل ۵. تیر تحت بار خمشی خالص

E مدول یانگ و I گشتاور دوم سطح حول محور خنثی می‌باشند.

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

تنش خمشی حاصل در یک تیر، تحت تأثیر بار خمشی عبارت است از:

تنش خمشی  $\sigma$ ، با فاصله  $y$  از محور خنثی و گشتاور خمشی  $M$  نسبت مستقیم دارد.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I/C} \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{M}{S}$$

ضمناً ماکزیمم تنش خمشی از روابط روبه‌رو به دست می‌آید:

$S = I/C$  را مدول مقطع (اساس مقطع) می‌نامند و در آن  $C$  بیشترین فاصله ( $y$ ) از محور خنثی می‌باشد.

### د) تنش‌های برشی در تیرها

شکل زیر تیری با مقطع ثابت را نشان می‌دهد که در معرض نیروی برشی  $V$  و گشتاور خمشی  $M$  قرار گرفته است. همان‌گونه که از استاتیک می‌دانید، نیروی برشی و گشتاور خمشی به صورت معادله زیر ارتباط دارند:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

در نقطه‌ای از طول تیر، مقطع عرضی به طول  $dx$  را به فاصله  $y_1$  بالای محور خنثی برش می‌دهیم (در شکل نشان داده شده است). گشتاور  $M$  تنش عمودی ( $\sigma$ ) را ایجاد می‌کند. این تنش‌ها، نیروهای عمودی را بر وجوه قائم جزء ایجاد می‌کنند که باعث به وجود آمدن نیروی برشی می‌شود، این نیروی برشی، تنش برشی ( $\tau$ ) را در تیر پدید می‌آورد. مقدار تنش برشی حاصل از اثر گشتاور خمشی در چنین تیری برابر است با:

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t}, \quad Q = \int_{y_1}^c y_1 dA, \quad I = \iint y^2 \cdot dA$$

در هنگام استفاده از این رابطه، توجه کنید که  $t$  طول خطوط برش زده می‌باشد. همچنین  $I$  گشتاور دوم مساحت تمام مقطع نسبت به محور خنثی و  $Q$  گشتاور اول سطح فرضی جدا شده می‌باشد.

### د) بارگذاری پیچشی

هر بردار گشتاوری که هم‌راستا با محور یک جزء مکانیکی باشد بردار گشتاور پیچشی نامیده می‌شود، زیرا این گشتاور باعث پیچیدن آن جزء، حول محور  $X$  می‌شود. به میله‌ای که تحت چنین گشتاوری قرار گیرد، میله تحت پیچش گویند.

همان‌طور که در شکل زیر نشان داده شده است، گشتاور پیچشی ( $T$ ) وارد به میله می‌تواند با رسم پیکان‌هایی بر روی سطح میله برای نشان دادن جهت یا با رسم بردارهای پیچشی در امتداد محور پیچش میله، مشخص شود.

مقدار زاویه پیچشی شفت (میله با مقطع دایره‌ای توپر) برابر است با:

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

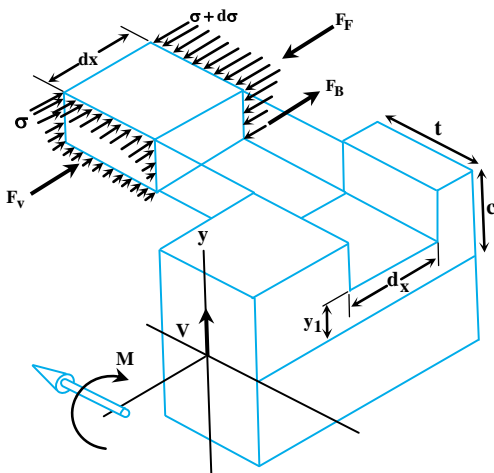
که در آن،  $T$  گشتاور پیچشی،  $L$  طول شفت،  $G$  مدول صلابت و  $J$  گشتاور دوم قطبی سطح می‌باشند.

برای میله گرد و توپر، تنش برشی در مرکز سطح مقطع صفر و بر روی سطح بیرونی آن بیشینه (ماکزیمم) است. توزیع این تنش برشی با شعاع  $\rho$  متناسب است و مقدار این تنش برشی برابر است با:

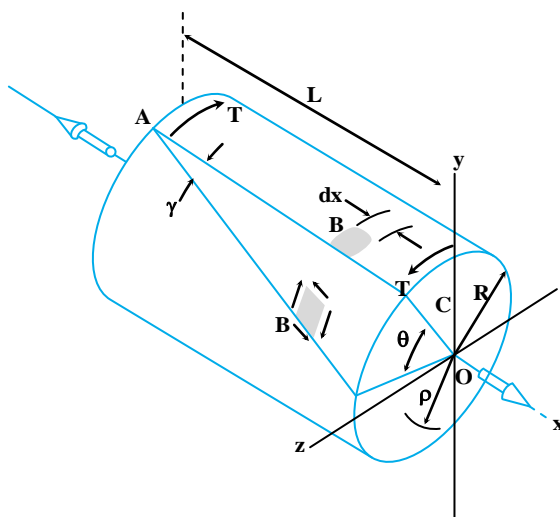
$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

چنانچه شعاع سطحی بیرونی را با  $R$  نشان دهیم، داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot R}{J}$$



شکل ۶. امان تحت تأثیر نیروی برشی و گشتاور خمشی



شکل ۷. شفت تحت اثر بارگذاری پیچشی

معادله فوق فقط برای قطعات با مقطع دایره کاربرد دارد. ضمناً برای مقطع دایره توپر، گشتاور قطبی سطح (J)، عبارت است از:

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

d قطر میله است. برای مقطع دایره تو خالی (J) از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$J = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4)$$

که در آن،  $d_i$  قطر درونی و  $d_o$  قطر خارجی می‌باشند.

روابط محاسبه میزان توان قابل انتقال توسط یک شفت تحت اثر بارگذاری پیچشی عبارتند از:

$$H = T\omega = \frac{2\pi nT}{60} \quad \text{و} \quad T = 9.55 \frac{H}{n}$$

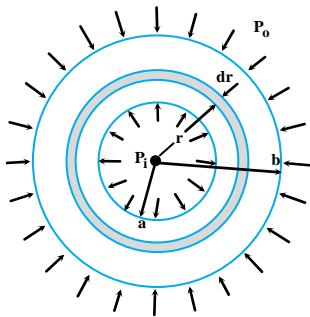
که در آن، H توان قابل انتقال بر حسب وات (W)، T گشتاور پیچشی بر حسب نیوتن متر (N.m)،  $\omega$  سرعت زاویه‌ای محور بر حسب رادیان بر ثانیه و  $n$  سرعت چرخش محور بر حسب دور بر دقیقه (Rpm) می‌باشند.

### (ر) تنش در استوانه‌ها و مخازن جدار ضخیم

مخزن‌های تحت فشار استوانه‌ای، سیلندرهای هیدرولیک، لوله‌های توپ و لوله‌های انتقال مایعات در فشارهای بالا به عنوان نمونه‌هایی از مخازن تحت فشار استوانه‌ای می‌باشند که دارای تنش‌های مماسی و شعاعی هستند. در تعیین تنش شعاعی ( $\sigma_r$ ) و تنش مماسی ( $\sigma_t$ )، فرض می‌کنیم طولی شدن طولی دور تا دور محیط استوانه ثابت است. به عبارت دیگر، مقطع عمودی استوانه پس از تنش گذاری، مسطح باقی می‌ماند.

شعاع درونی استوانه را با a، شعاع بیرونی را با b، فشار درونی را با  $P_i$  و فشار بیرونی را با  $P_o$  مشخص می‌کنیم. حال می‌توان نشان داد که مقادیر تنش‌های مماسی و شعاعی برابرند با:

$$\sigma_t = \frac{P_i a^2 - P_o b^2 - a^2 b^2 (P_o - P_i) / r^2}{b^2 - a^2} \quad , \quad \sigma_r = \frac{P_i a^2 - P_o b^2 + a^2 b^2 (P_o - P_i) / r^2}{b^2 - a^2}$$

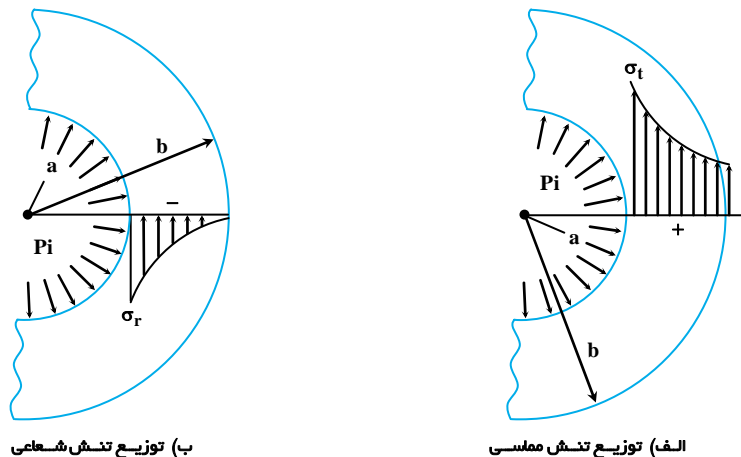


شکل ۸. مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار

شکل روبه‌رو، استوانه‌ای را که تحت هر دو فشار درونی و بیرونی قرار گرفته است نمایش می‌دهد. در معادله‌های بالا، تنش‌های مثبت، کششی و تنش‌های منفی، فشاری‌اند. تنش‌های فوق برای زمانی که فشار بیرونی مخزن صفر می‌باشد، ( $P_o = 0$ ) عبارتند از:

$$\sigma_t = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad , \quad \sigma_r = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

ضمناً در چنین مخازنی توزیع تنش‌های شعاعی و مماسی، با فرض فشار خارجی صفر ( $P_o = 0$ )، به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۹. توزیع تنش‌های شعاعی و مماسی در دیواره مخازن جدار ضخیم

شکل ۹. توزیع تنش‌های مماسی و شعاعی در دیواره مخازن جدار ضخیم

تنش‌های سطح بیرونی استوانه‌ای که فقط تحت فشار بیرونی قرار گرفته ( $P_i = 0$ ) به روش مشابه و به صورت زیر به دست می‌آید:

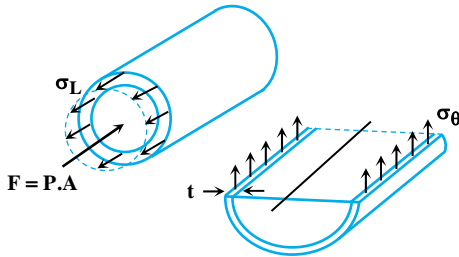
$$\sigma_t = -P_o \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_r = -P_o$$

در چنین مخازنی تنش‌های طولی زمانی به وجود می‌آیند که واکنش‌های دو سر مخزن در برابر فشار، توسط خود مخزن تحمل شوند. مقدار این تنش به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$\sigma_L = \frac{P_i a^2}{b^2 - a^2}$$

باید توجه داشت که روابط محاسبه انواع تنش در مخازن تحت فشار، فقط برای مقاطع با فاصله زیاد از دو سر مخزن به کار می‌رود.

### (ز) مخازن جدار نازک



شکل ۱۰. شماتیک یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک

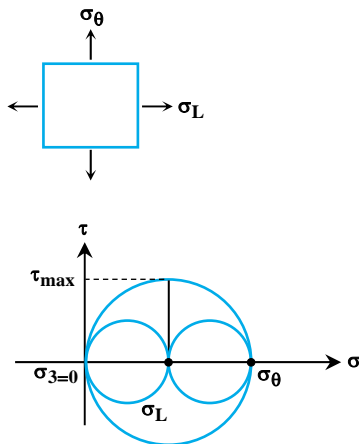
مخازنی که ضخامت دیوار یا گوشت دیواره‌شان از  $\frac{1}{10}$  قطر متوسط یا  $\frac{1}{20}$  شعاع متوسط آن‌ها کمتر است، تحت عنوان مخازن جدار نازک طبقه‌بندی می‌شوند. تنش‌ها در مخازن استوانه‌ای جدار نازک که تحت فشار ثابت  $P$  قرار دارند در دو جهت طولی و محیطی تجزیه می‌شوند. با توجه به اشکال روبه‌رو برای به دست آوردن این تنش‌ها مخزن را در جهت هر یک از محورهای طولی یا محیطی برش زده و تنش‌های حاصله از رابطه تعادل نیروها به دست می‌آیند که در آن:

$r$  و  $D$  به ترتیب شعاع و قطر متوسط،  $P$  فشار داخلی (یکنواخت) و  $t$  ضخامت پوسته می‌باشند. مقدار این تنش‌ها برحسب پارامترهای طراحی مخزن عبارتند از:

$$\sigma_L = \frac{P\pi r^2}{2\pi r t} = \frac{P \cdot r}{2t} = \frac{P \cdot D}{4t}, \quad \sigma_\theta = \frac{PDL}{2tL} = \frac{P \cdot D}{2t} = \frac{P \cdot r}{t}$$

با مشاهده مقادیر این تنش‌ها می‌توان نتیجه گرفت که در مخازن جدار نازک استوانه‌ای، تنش طولی ( $\sigma_L$ ) همواره نصف تنش محیطی ( $\sigma_\theta$ ) (حلقوی) می‌باشد. در مخازن کروی با توجه به شکل متقارن آن‌ها، تنش‌ها در هر دو جهت دارای یک اندازه می‌باشند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_\theta = \sigma_L = \frac{P \cdot D}{4t} = \frac{P \cdot r}{2t}$$



شکل ۱۱. دوایر موهر برای تنش‌های اصلی نرمال و برشی مخزن استوانه‌ای

به دلیل برابری تنش‌ها، در المانی از سطح یک مخزن کروی محور طولی و محیطی قابل تفکیک نیستند. ضمناً تنش‌های مطرح شده تنش‌های اصلی هستند زیرا برش در این المان‌ها وجود ندارد. لازم به توضیح است که تنش‌های شعاعی مخزن در برابر این تنش‌ها ناچیز بوده و صفر فرض می‌شوند ( $\sigma_r \approx 0$ ).

با توجه به مطالب بالا، دایره موهر تنش برای یک المان از مخزن استوانه‌ای به شکل زیر می‌باشد:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta, \quad \sigma_2 = \sigma_L, \quad \sigma_3 = 0 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_\theta = \sigma_L$$

ضمناً:

با توجه به روابط فوق و معادله کلی هوک می‌توان کرنش در جهت‌های محیطی و طولی را به صورت زیر به دست آورد:

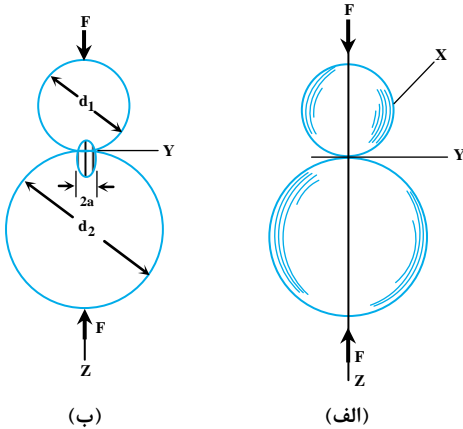
$$\epsilon_\theta = \frac{\delta D}{D} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_L) = \frac{P \cdot D}{2t \cdot E} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

$$\epsilon_L = \frac{\delta L}{L} = \frac{1}{E} (\sigma_L - \nu \sigma_\theta) = \frac{P \cdot D}{2t \cdot E} \left(\frac{1}{2} - \nu\right)$$

از آنجایی که همواره فشار داخلی مخزن از فشار بیرونی آن بیشتر فرض می‌شود، این کرنش‌ها کمیتی همواره مثبت می‌باشند.

**ژ) تنش‌های تماسی هر تیز**

اگر دو جسم با سطوح خمیده به هم فشار وارد کنند در این حالت، تماس نقطه‌ای یا خطی به تماس سطحی تبدیل می‌شود و تنش‌های گسترش یافته در دو جسم، سه بعدی خواهند شد. تنش تماسی در تماس بین چرخ قطار و ریل، بادامک و پیرو، دندانه‌های چرخ‌دنده‌های درگیر و یاتاقان‌های غلتشی حین کار ظاهر می‌شوند.



وقتی دو کره توپر به قطرهای  $d_1$  و  $d_2$  با نیروی  $F$  به هم فشار وارد کنند، سطح تماس دایره‌ای به شعاع  $a$  حاصل می‌شود، اگر  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  به ترتیب ثابت‌های کشسانی و نسبت‌های پواسون دو کره باشند شعاع  $a$  توسط معادله زیر به دست می‌آید:

$$a = \sqrt{\frac{3F}{8} \frac{[(1-\nu_1^2)/E_1] + [(1-\nu_2^2)/E_2]}{(1/d_1) + (1/d_2)}}$$

توزیع فشار در طول ناحیه تماس هر کره، نیم بیضوی می‌باشد. ماکزیمم فشار که در مرکز ناحیه تماس ایجاد می‌شود برابر است با:

$$P_{max} = \frac{3F}{2\pi a^2}$$

شکل ۱۲. ایجاد تنش‌های تماسی هر تیز در اثر تماس سطوح خمیده

معادلات فوق عمومی بوده و هنگام تماس یک کره با یک سطح صاف یا یک کره با سطح درونی کره دیگر نیز به کار می‌روند. برای یک سطح مسطح  $d = \infty$  در نظر گرفته می‌شود. برای سطح درونی، قطر به عنوان یک کمیت منفی فرض می‌گردد. تنش‌های بیشینه که بر روی محور  $Z$  ایجاد می‌شوند، تنش اصلی بوده و مقدار آن‌ها برابر است با:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y = -P_{max} \left[ (1 - \left| \frac{z}{a} \right| \tan^{-1} \frac{1}{\left| \frac{z}{a} \right|}) (1 + \nu) - \frac{1}{2(1 + \frac{z^2}{a^2})} \right], \quad \sigma_3 = \sigma_z = \frac{-P_{max}}{1 + \frac{z^2}{a^2}}$$

**س) استحکام استاتیکی**

برای یافتن مشخصه‌ها و استحکام‌های مختلف مواد از تست کشش که بر روی نمونه استاندارد انجام می‌گیرد، استفاده می‌شود. از قطر اولیه  $d_0$  و طول سنجه  $L_0$  که قبل از انجام آزمون ثبت می‌شوند، برای اندازه‌گیری کرنش‌ها استفاده می‌شود. سپس نمونه در دستگاه آزمون قرار می‌گیرد و به آهستگی تحت کشش بارگذاری می‌شود، در حالی که بار و کرنش مشاهده می‌شوند. در پایان آزمون یا در حین انجام آن، نتایج به صورت نمودار تنش - کرنش رسم می‌شوند.

نقطه  $P$  در شکل، حد تناسب نامیده می‌شود. این نقطه، نقطه‌ای است که در آن، منحنی شروع به انحراف از خط مستقیم می‌کند. نقطه  $E$ ، حد کشسانی نامیده می‌شود و تا این نقطه در قطعه تغییر شکل پلاستیک نداریم. قانون هوک که تناسب خطی تنش با کرنش را بیان می‌کند، فقط تا حد تناسب کاربرد دارد (نقطه  $P$ ).

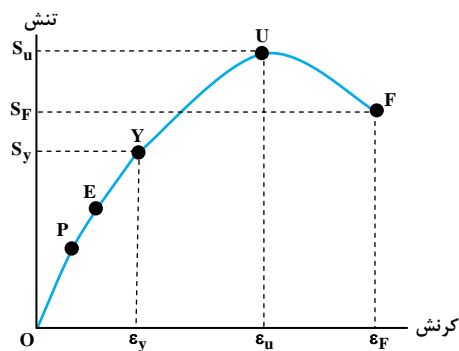
در حین آزمون کشش، بسیاری از مواد به نقطه‌ای می‌رسند که در آن کرنش به سرعت افزایش می‌یابد، بدون آن که تنش افزایش چندانی پیدا کند. این نقطه، نقطه حد تسلیم (نقطه  $Y$ ) نامیده می‌شود.

استحکام نهایی یا کششی ( $S_{U}$ ) به نقطه  $U$  گفته می‌شود و طبق تعریف حداکثر تنش قابل تحمل توسط قطعه قبل از شکسته شدن می‌باشد.

مواد مختلف دارای مقادیر مختلف  $S_U$  و  $S_Y$  هستند. مثلاً در مواد شکننده (مثل چدن‌ها) در واقع نقطه تسلیم وجود ندارد و  $S_Y \approx S_U$  و یا در برخی مواد مقدار  $S_{UT}$  (مقاومت نهایی کششی) به مراتب کمتر از  $S_{UC}$  (مقاومت نهایی فشاری) است (مانند بتن). مقادیر  $S_U$  و  $S_Y$  در جداول

استاندارد بر حسب واحد  $\frac{N}{mm^2}$  یا MPa ارائه می‌شوند.

ضمناً نقطه  $F$  محل شکست قطعه می‌باشد.



شکل ۱۳. دیاگرام تنش - کرنش نمونه فولادی



## ش) ضریب اطمینان

طبق تعریف، ضریب اطمینان در طراحی عبارت است از نسبت تنش تسلیم به تنش مجاز وارد بر قطعه  $\left( n = \frac{\sigma_{\text{تسلیم}}}{\sigma_{\text{all}}} \right)$ ، بسته به جنس قطعه مورد نظر، تنش نهایی نیز می‌تواند مدنظر قرار گیرد. مقدار تنش مجاز ( $\sigma_{\text{all}}$ ) نیز با توجه به جنس قطعه تعریف می‌شود. ضریب اطمینان در یک طراحی صحیح همواره عددی بزرگتر از یک در نظر گرفته می‌شود که سازه مورد نظر بتواند تحت شرایط بارگذاری غیرمعمول به صورت سالم باقی مانده و کارکرد خود را حفظ نماید.

در بخش‌های بعدی (بارگذاری‌های استاتیکی و دینامیکی) موارد کاربرد ضریب اطمینان در تحلیل تنش‌های وارد بر قطعات به صورت کامل‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرند. آن‌چه در خصوص ضریب اطمینان حائز اهمیت می‌باشد این است که ضریب اطمینان در یک ماشین فقط در یک نقطه خاص تعریف می‌گردد که در بسیاری از حالات هنگام طراحی یک سازه این مقادیر باید در چندین نقطه (موقعیت‌های حساس) محاسبه شوند. هنگامی که در یک بارگذاری تنش تسلیم ( $\sigma_y$ ) برابر با تنش مجاز ( $\sigma_{\text{all}}$ ) می‌شود، ضریب اطمینان برابر یک خواهد شد، در این حالت عملاً ایمنی وجود ندارد. علاوه بر ضریب اطمینان ضریب دیگری به نام «حد اطمینان» نیز در مسائل طراحی مطرح می‌گردد، که این ضریب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m = 1 - n \text{ (حد اطمینان)}$$

**کج مثال ۱:** قطعه‌ای با مقطع مستطیلی، تحت بار استاتیکی محوری-کششی  $5\text{KN}$  قرار گرفته است. اگر استحکام ماده  $300\text{MPa}$  و ضریب اطمینان طراحی آن  $n = 1/2$  فرض شود، ابعاد مقطع کدام است؟ (طول مقطع ۳ برابر عرض آن است).

$$\begin{cases} 2/2 \\ 6/6 \end{cases} \text{ (۴)}$$

$$\begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases} \text{ (۳)}$$

$$\begin{cases} 2/6 \\ 7/8 \end{cases} \text{ (۲)}$$

$$\begin{cases} 2/1 \\ 6/3 \end{cases} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه «۲» طبق تعریف، تنش نرمال برابر است با:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{F}{A} = \frac{5000}{(3b)b} \\ \sigma_{\text{مجاز}} = \frac{300 \times 10^6}{1/2} \end{cases} \Rightarrow \frac{300 \times 10^6}{1/2} = \frac{5000}{3b^2} \Rightarrow b = 0.0026\text{m} = 2/6\text{mm}$$

## ص) اثر گرما

اگر به صورت یکنواخت درجه حرارت جسمی زیاد شود کرنش‌های عمودی آن در سه جهت قطعه  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha \cdot \Delta T$  خواهند بود که در آن  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی و  $\Delta T$  تغییر درجهٔ گرماست. اگر دو سر میله‌ی راستی مقید و بدون امکان افزایش طول باشد با فرض تغییر یکنواخت گرما با قید دو سر، تنش بوجود آمده در قطعه  $\sigma = \epsilon \cdot E = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$  خواهد شد.

## ملاحظات در طراحی اجزای ماشین

طراحی، به معنای ارائه تمامی مشخصات فنی و جزئیات ساخت قطعات و سیستم‌های مکانیکی جهت برآورده شدن نیازی خاص می‌باشد. به منظور طراحی یک اتصال، یک قطعه و یا یک مکانیزم، باید مراحل پنج‌گانه زیر طی شوند:

الف) تشخیص نیاز

ب) تعریف صورت مسأله که حاوی تمامی مشخصات و اطلاعات ورودی لازم باشد.

پ) یافتن یک راه‌حل بهینه

ت) ارزیابی مرحله قبل، از نظر امکان اجرای طرح

ث) ارائه طرح با تمام جزئیات، مشخصات و ملاحظات فنی

اجزاء و قطعات ماشین معمولاً برای تحمل نیرو و یا گشتاور، مورد استفاده قرار می‌گیرند. بسیاری از این نیروها از نوع دینامیکی (متغیر و نوسانی) و گاهی بارگذاری‌ها به صورت استاتیکی (ایستا) می‌باشند. مکانیزم طراحی قطعات برای بارهای ایستا و متغیر کاملاً با یکدیگر متفاوت می‌باشد. یک بار ایستا می‌تواند بار خمشی، برشی، پیچشی، محوری فشاری یا کششی و یا ترکیبی از آن‌ها باشد. چنین نیروهایی معمولاً نوسان ندارند (ساکن هستند) یا نوسانات آن‌ها در طول زمان، کم می‌باشد. آنچه در این بخش به آن پرداخته می‌شود، طراحی قطعات جهت تحمل بارهای استاتیکی (ایستایی) و رسیدن به ابعاد بهینه می‌باشد.

**کلمه مثال ۲:** بر روی یک شفت با مقطع دایره‌ای توخالی (لوله‌ای) بارگذاری‌های پیچشی و خمشی به صورت ایستا اعمال شده است. در مورد محل حداکثر تنش اعمال شده کدام صحیح است؟

- ۱) تنش برشی حداکثر بر روی پوسته خارجی و تنش خمشی حداکثر بر روی پوسته خارجی به وجود می‌آیند.
- ۲) تنش برشی حداکثر بر روی پوسته داخلی و تنش خمشی حداکثر بر روی پوسته خارجی به وجود می‌آیند.
- ۳) تنش برشی حداکثر بر روی پوسته خارجی و تنش خمشی حداکثر بر روی مرکز مقطع به وجود می‌آیند.
- ۴) تنش برشی حداکثر بر روی پوسته داخلی و تنش خمشی حداکثر بر روی پوسته داخلی به وجود می‌آیند.

پاسخ: گزینه «۱» در اثر بارگذاری پیچشی، تنش برشی حداکثر بر روی پوسته خارجی لوله و در اثر بارگذاری خمشی نیز تنش خمشی حداکثر (فشاری و کششی) بر روی سطح خارجی لوله پدید می‌آید.

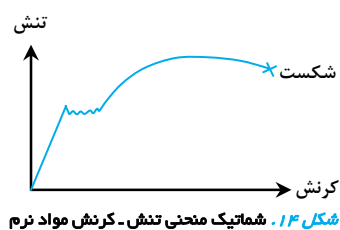
## انواع مواد

طراحی استاتیکی قطعات، بر اساس جنس آن‌ها صورت می‌پذیرد. لذا ابتدا لازم است تعریف جامعی از قطعات نرم و ترد به صورت زیر مطرح گردد.

### الف) اجسام نرم (داکتیل)

اجسام نرم معمولاً دارای مقاومت‌های تسلیم کششی و فشاری ( $S_{yc}$  و  $S_{yt}$ ) برابر و همچنین مقاومت‌های نهایی ( $S_{uc}$  و  $S_{ut}$ ) برابر می‌باشند، ضمن اینکه مقاومت‌های نهایی چنین جسمی از مقاومت‌های تسلیم آن بیشتر می‌باشند، به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} S_{yt} \approx |S_{yc}| \\ S_{ut} \approx |S_{uc}| \\ S_{ut} > S_{yt} \\ |S_{uc}| > |S_{yc}| \end{cases}$$



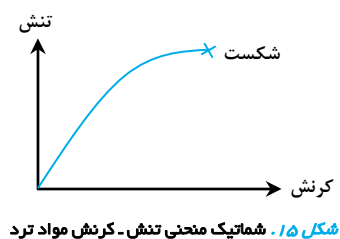
معیار طراحی استاتیکی مواد نرم، بررسی مقاومت حد تسلیم ( $S_y$ ) آن‌ها است.

منحنی تنش - کرنش این مواد به صورت روبه‌رو می‌باشد.

ضمناً اجسام نرم می‌توانند حداکثر در حدود ۵ درصد افزایش طول داشته باشند که این موضوع در مورد اجسام ترد صدق نمی‌کند ( $\epsilon_f \geq 0.05$ ).

### ب) اجسام ترد (شکننده)

اجسام ترد معمولاً دارای استحکام بیشتری در مقابل بارهای فشاری ( $S_{uc}$ ) و در مقایسه با بارهای کششی ( $S_{ut}$ ) می‌باشند و حد فاصل بین مقاومت تسلیم ( $S_y$ ) و مقاومت نهایی ( $S_{ul}$ ) آن‌ها بسیار کم و یا بعضاً صفر می‌باشد، به عبارت دیگر این مواد وارد منطقه پلاستیک نمی‌شوند و با ازدیاد بار اعمالی به آن‌ها، به طور ناگهانی می‌شکنند. در مواد ترد، قطعه تحت تأثیر کشش که باعث جدا شدن قطعه می‌شود، می‌شکند.



$$\begin{cases} S_{ut} < |S_{uc}| \\ S_{yt} \approx S_{ut} \\ |S_{yc}| \approx |S_{uc}| \end{cases}$$