



سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۹۹

سؤالات رشته‌ی MBA

۱- مکان هندسی تمام اعداد مختلطی مانند z که در شرط $\operatorname{Re}(z + \frac{1}{z} - \bar{z}) = \operatorname{Im}(\frac{-1}{i} + \frac{1}{z})$ صدق می‌کنند، کدام است؟

- (۱) نقاط روی یک دایره
(۲) نقاط واقع روی یک خط
(۳) نقاط روی یک دایره به استثنای یک نقطه از آن
(۴) نقاط واقع بر یک خط به استثنای یک نقطه از آن

۲- فرض کنید $f(x) = x^2 + ax + b$ که a و b اعدادی حقیقی‌اند. اگر $f(3 + 4i) = 0$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۳۱

۳- بازه همگرایی سری توانی زیر کدام است؟

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n(n^2+n+1)}$$

- (۱) $(-1, \frac{7}{3}]$ (۲) $[-1, \frac{7}{3}]$ (۳) $(-\frac{7}{3}, 1]$ (۴) $[-\frac{7}{3}, 1]$

۴- دو خودروی A و B از محل تقاطع دو جاده که عمود بر هم هستند شروع به حرکت می‌کنند. خودروی A با سرعت $\frac{1}{5} \frac{m}{s}$ به سمت شمال و

خودروی B با سرعت $\frac{2}{5} \frac{m}{s}$ به سمت شرق حرکت می‌کند. بعد از گذشت یک دقیقه فاصله بین دو خودروی A و B با چه سرعتی (برحسب $\frac{m}{s}$) افزایش می‌یابد؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{5}$

۵- فرض کنید $g(x) = \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \sin(t^2) dt$ باشد، مقدار $g(\sqrt{\pi})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) $\sqrt{2}$

۶- مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^3 x dx$$

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{24}$

۷- فرض کنید $a_n = \frac{(1399)^n}{n!}$ و $b_n = \frac{1}{(1399 + (-1))^n}$. سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ چگونه هستند؟

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا است.
(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا و همگرا است.
(۳) هر دو همگرا هستند.
(۴) هر دو واگرا هستند.

۸- مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۹- ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = \frac{1}{x}$ ، $y = x$ و $x = 2$ واقع در ربع اول صفحه مختصات را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟

- (۱) $\frac{10\pi}{6}$ (۲) $\frac{11\pi}{6}$ (۳) 2π (۴) $\frac{13\pi}{6}$

۱۰- مساحت رویه استوانه‌ای $r = 1 + \cos \theta$ در بازه $\theta \in [0, \pi]$ و $1 \leq z \leq 2$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) 4π (۴) 2π

۱۱- خط $y = 2x$ را در بازه $[0, 2]$ حول محور x ها دوران می‌دهیم، مساحت جانبی شکل حاصل کدام است؟

- (۱) $6\pi\sqrt{5}$ (۲) $12\pi\sqrt{5}$ (۳) $6\pi\sqrt{10}$ (۴) $12\pi\sqrt{10}$

۱۲- فرض کنید ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = \frac{1}{2x}$ ، $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = 5$ را حول محور y ها دوران داده‌ایم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 3π (۳) 2π (۴) π

۱۳- مقدار حد زیر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}(7^8 - 4^8)$ (۲) $\frac{1}{8}(7^8 - 3^8)$ (۳) $\frac{1}{24}(7^8 - 4^8)$ (۴) $\frac{1}{24}(7^8 - 3^8)$

۱۴- کدام گزینه در مورد $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^{1399}}}$ و $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{x^2} dx$ صحیح است؟

- (۱) هر دو واگرا هستند. (۲) هر دو همگرا هستند.
(۳) اولی همگرا و دومی واگرا است. (۴) اولی واگرا و دومی همگرا است.

۱۵- اولین چهار جمله سری توانی $f(x) = e^{-x^2}$ در همسایگی $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ (۲) $1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (۳) $1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}$ (۴) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

۱۶- اگر $A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x-y}$ و $B = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + |x| + |y|}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $A = B = 0$ (۲) $A = 0$ و B وجود ندارد. (۳) A وجود ندارد و $B = 0$. (۴) A و B وجود ندارند.

۱۷- فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ، چنانچه $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ باشد، مقدار $D_{\vec{v}} f(0, 0)$ (مشتق سویی تابع f در نقطه $(0, 0)$ در جهت بردار $(\vec{v})$ کدام است؟

- (۱) $0/55$ (۲) $0/45$ (۳) $0/35$ (۴) $0/25$

۱۸- خم حاصل از اشتراک رویه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $z = x^2 - y^2$ را در نظر بگیرید. انحنای این خم در نقطه $(1, 0, 1)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{15}$ (۲) 4 (۳) $\sqrt{17}$ (۴) $\sqrt{18}$

۱۹- کدامیک از صفحات زیر بر رویه $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 8$ در نقطه $(2, 3, 5)$ مماس است؟

- (۱) $y + z = 8$ (۲) $x + y = 5$ (۳) $x + 5y - 4z = -3$ (۴) $5x + 5y - 4z = 5$

۲۰- طول منحنی $r = 1 + \sin \theta$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 10 (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۲۱- فرض کنید $x = x(u, v)$ ، $y = y(u, v)$ ، $xu^2 + yv^2 = 4$ و $ux - 2vy = 0$ باشند. حاصل $\frac{\partial x}{\partial u}(2u^2 + uv)$ به ازای $v \neq 0$ کدام است؟

- (۱) $(u - 4v)y$ (۲) $(v - 4u)y$ (۳) $(u + 4v)x$ (۴) $(4u - v)x$

۲۲- مقدار انتگرال دوگانه زیر کدام است؟

- (۱) $1 - \sin 1$ (۲) $1 - \cos 1$ (۳) $\sin 1 + \cos 1$ (۴) 0

۲۳- مقدار $\iint_A \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$ روی ناحیه $A = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2})$ (۲) $\frac{\pi}{6}(\frac{3}{2} - 1)$ (۳) $\frac{\pi}{3}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2})$ (۴) $\frac{\pi}{3}(\frac{3}{2} - 1)$

۲۴- مساحت ناحیه محصور به درون $r = 3 \sin \theta$ و بیرون $r = 1 + \sin \theta$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{3\pi}{2}$

۲۵- فرض کنید $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $(0, 0)$ و $(1, 1)$ نقاط مینیمم موضعی هستند.
 (۲) $(0, 0)$ نقطه زینی و $(1, 1)$ نقطه ماکسیمم موضعی است.
 (۳) $(0, 0)$ نقطه مینیمم موضعی و $(1, 1)$ نقطه زینی است.
 (۴) $(0, 0)$ نقطه زینی و $(1, 1)$ نقطه مینیمم موضعی است.

۲۶- کمترین و بیشترین مقدار $f(x, y, z) = xy + 2z$ از بین نقاط مشترک صفحه $x + y + z = 0$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) 14 و -13 (۲) 14 و -12 (۳) 13 و -12 (۴) 13 و -12

۲۷- حجم ناحیه محصور به $z = 0$ و $z = 2 - x^2 - y^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) 4π

۲۸- فرض کنید C منحنی حاصل از تقاطع $z = x^2 + 4y^2$ و $z = 3x - 2y$ از نقطه $(0, 0, 0)$ به نقطه $(1, \frac{1}{2}, 2)$ باشد، مقدار $\int_C (y^2 \vec{i} + (2xy + e^{xz}) \vec{j} + 3ye^{xz} \vec{k}) \cdot d\vec{r}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(1 + e^6)$ (۲) $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + e^6)$ (۳) $\frac{1}{2}(2 + e^5)$ (۴) $\frac{1}{2}(2 + e^6)$

۲۹- حاصل $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ هرگاه $\vec{F}(x, y, z) = (3x + z^2, y^2 - \sin(x^2 z), xz + ye^{xz})$ ، سطح S رویه $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 3$ و $0 \leq z \leq 2$ و $\vec{n}$ بردار قائم رو به بیرون بر رویه S باشد، کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 23 (۳) 39 (۴) 42

۳۰- فرض کنید سطح S به صورت $\rho = 2 + 2\cos\phi$ که $0 \leq \phi \leq \pi$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ باشد. اگر $\vec{n}$ بردار قائم یکه برونسوی سطح S و

$\vec{F}(x, y, z) = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z)$ باشند، آنگاه $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 2π (۳) 4π (۴) 8π

۱- گزینه «۳» در این گونه سؤالات، کافی است که $z = x + iy$ را در نظر گرفته و مسأله را حل کنید. یعنی داریم:

$$z + \frac{1}{z} - \bar{z} = (x + iy) + \frac{1}{x + iy} - (x - iy) = 2iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \operatorname{Re}\left\{z + \frac{1}{z} - \bar{z}\right\} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{-1}{i} + \frac{1}{z} = i + \frac{1}{x + iy} = i + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \operatorname{Im}\left\{\frac{-1}{i} + \frac{1}{z}\right\} = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re}\left\{z + \frac{1}{z} - \bar{z}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{-1}{i} + \frac{1}{z}\right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

همان‌طور که می‌بینید، این مکان هندسی، مجموع نقاط روی یک دایره است؛ اما یک نکته مهم وجود دارد. در به‌دست آوردن این تساوی ما فرض کردیم که $x^2 + y^2 \neq 0$ است، یعنی مبدأ نباید جزء مکان هندسی ما باشد، در حالی که مبدأ در معادله این دایره صدق می‌کند؛ پس گزینه (۳) صحیح است.

۲- گزینه «۱» به راحتی با جایگذاری عدد مختلط در معادله داریم:

$$f(3 + 4i) = 0 \Rightarrow (3 + 4i)^2 + a(3 + 4i) + b = 0 \Rightarrow (3a + b - 7) + i(4a + 24) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + b - 7 = 0 \\ 4a + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 7 - 3a = 7 + 18 = 25 \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow a + b = 19$$

روش دوم: با توجه به اینکه a و b (ضرایب معادله) حقیقی هستند، پس علاوه بر $3 + 4i$ ، مزدوج آن، یعنی $3 - 4i$ هم ریشه‌ی معادله است. می‌دانیم که $-a$ برابر با جمع ریشه‌ها و b برابر با حاصلضرب ریشه‌هاست. پس a برابر با -6 و b برابر با 25 است، در نتیجه $a + b$ برابر با 19 است.

۳- گزینه «۲»

روش اول: با استفاده از آزمون ریشه سری‌های توانی خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\left| \frac{(3x - 2)^n}{\Delta^n (n^2 + n + 1)} \right|} < 1 \Rightarrow \left| \frac{3x - 2}{\Delta} \right| < 1 \Rightarrow -\Delta < 3x - 2 < \Delta \Rightarrow -3 < 3x < 7 \Rightarrow -1 < x < \frac{7}{3}$$

پس یکی از گزینه‌های (۱) و (۲) درست است. حال برای اینکه بفهمیم کدام صحیح است، کافی است فقط وضعیت سری در $x = -1$ را بررسی کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3 - 2)^n}{\Delta^n (n^2 + n + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n + 1}$$

سری داده‌شده متناوب است که در آن دنباله $\frac{1}{n^2 + n + 1}$ نزولی و همگرا به صفر است. پس این سری همگراست و گزینه (۲) صحیح است.

روش دوم: با توجه به اینکه در مخرج عامل n^2 داریم، پس داریم:

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = 2 > 1$$

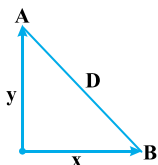
اختلاف درجه مخرج و صورت برابر با 2 است پس با در نظر گرفتن قوانین مقایسه‌ی p سری‌ها دو سر بازه همگرایی باید بسته باشد، پس گزینه‌های (۱) و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^n}{\Delta^n (n^2 + n + 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

(۳) حذف می‌شوند. حال به ازای $x = \frac{7}{3}$ داریم:

طبق سری p این سری چون $p = 2 > 1$ می‌باشد، همگراست، پس گزینه (۲) صحیح است.

۴- گزینه «۴» ابتدا مسیر حرکت دو اتومبیل و داده‌های مسأله را در شکل پیاده می‌کنیم.



$$\frac{dy}{dt} = 1/\Delta \frac{m}{s}, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \frac{m}{s}$$

$$D^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2D \frac{dD}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

حالا توجه کنید که ما مقادیر x و y و D را نداریم، اما می‌دانیم که بین سرعت و مسافت رابطه $x = V_B \Delta t$ و $y = V_A \Delta t$ برقرار است. پس داریم:

$$\begin{cases} x = 2 \times 60 = 120 \text{ m} \\ y = 1/\Delta \times 60 = 90 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow D = \sqrt{x^2 + y^2} = 150 \text{ m}$$

$$150 \cdot \frac{dD}{dt} = 120 \times 2 + 90 \times 1/\Delta = 240 + 135 = 375 \Rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{375}{150} = 2/\Delta$$

پس در نهایت داریم:



۵- گزینه «۱» از شکل پیچیده انتگرال نترسید. در واقع در این تابع یک‌بار از آن مشتق گرفته و سپس دوباره انتگرال گرفته شده؛ پس حاصل انتگرال همان تابع اولیه است. یعنی داریم:

$$g(x) = \int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dt} \sin(t^2) dt = \sin(t^2) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{x^2}{2}} = \sin(x^2) - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow g(\sqrt{\pi}) = \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶- گزینه «۴» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: آسان‌ترین راه برای حل این انتگرال کمک گرفتن از تابع بتا است. به این صورت که داریم:

$$2m-1=5 \Rightarrow m=3, \quad 2n-1=3 \Rightarrow n=2$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x dx = \frac{1}{2} \beta(m, n) = \frac{1}{2} \beta(3, 2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(3+2)} = \frac{1}{2} \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{24}$$

روش دوم: ابتدا در زیر انتگرال عامل $\cos^3 x$ را به صورت $\cos^2 x \cos x$ می‌نویسیم و سپس به جای $\cos^2 x$ قرا می‌دهیم $(1 - \sin^2 x)$ و داریم:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^5 x \cos x - \sin^3 x \cos x) dx$$

$$\frac{u = \sin x}{du = \cos x dx} \left(\frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^4 x}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{24} = \frac{1}{24}$$

۷- گزینه «۳» برای سری اول از هم‌ارزی $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$ کمک می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1399)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1399e)^n}{n^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(1399e)^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1399e}{n} = 0 < 1$$

پس این سری همگراست.

اما در مورد سری دوم، به نظر می‌رسد طراح محترم و یا تایپیست سؤال دچار یک اشتباه کوچک شده است. $(-1)^n + 1399$ همواره 1398 است و اصلاً شکل مبهم و پیچیده‌ای ندارد و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1398)^n}$ یک سری هندسی همگراست. ولی اگر منظور طراح $(-1)^n + 1399$ بوده است آن وقت یک سری به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1399 + (-1)^n}$$
 داریم که با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1399 + (-1)^n}$ مخالف صفر است، سری شرط لازم همگرایی را ندارد. ولی اگر در مخرج سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1399 + (-1)^n)^n}$$
 بوده باشد، سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1399 + (-1)^n)^n}$ است که با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(1399 + (-1)^n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1399 + (-1)^n} < 1$$

توجه کنید که حد فوق دو مقدار $\frac{1}{1398}$ یا $\frac{1}{1400}$ را خواهد داشت که در هر دو حالت از یک کوچک‌تر است، پس سری همگراست.

در این حالت که ممکن است غلط تایپی صورت گرفته باشد، بهتر است سؤال را به صورت داده شده حل کنید که یعنی هر دو سری همگراست و گزینه (۳) صحیح است.

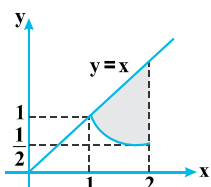
۸- گزینه «۱» برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $x^2 + 1 = t^2$ ($t > 0$) کمک می‌گیریم:

$$x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow x dx = t dt \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 \times x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int_1^2 \frac{(t^2 - 1)t dt}{\sqrt{t^2}} = \int_1^2 (t^2 - 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t\right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

۹- گزینه «۲» ناحیه موردنظر به صورت شکل مقابل است. با توجه به اینکه شکل توابع به صورت $y = f(x)$ و

دوران حول محور x هاست، از روش قرصی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

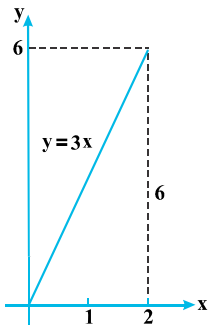
$$V = \pi \int_a^b [y_1^2 - y_2^2] dx = \pi \int_1^2 \left[x^2 - \frac{1}{x^2} \right] dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \pi \left[\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \right] = \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{11\pi}{6}$$



۱۰- گزینه «۲» برای محاسبه مساحت جسم تشکیل شده روی یک منحنی که قاعده آن منحنی داده شده و ارتفاع هر نقطه آن $f(x, y)$ باشد، از رابطه $S = \int_C f(x, y) ds$ استفاده می‌کنیم که در این سؤال $f(x, y) = 3 - 1 = 2$ یک مقدار ثابت است و ds برای مختصات قطبی برابر است با $\sqrt{r^2 + (r'_\theta)^2} d\theta$ پس داریم:

$$\begin{cases} r^2 = (1 + \cos \theta)^2 \\ r'_\theta = (-\sin \theta)^2 \end{cases} \Rightarrow r^2 + r'^2_\theta = 2 + 2 \cos \theta = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$S = \int_a^b 2 \sqrt{r^2 + r'^2_\theta} d\theta = \int_0^\pi 2 \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \left[8 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 8$$



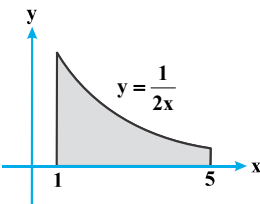
۱۱- گزینه «۴» ابتدا شکل نمودار را در نظر بگیرید. واضح است که از دوران این خط حول محور x یک مخروط حاصل می‌شود و برای محاسبه مساحت جانبی این مخروط نیازی نیست از روش انتگرال استفاده کنیم. می‌دانیم مساحت جانبی یک مخروط با یال L برابر $\pi r L$ است. در این سؤال داریم:

$$L = \sqrt{r^2 + h^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S = \pi r L = \pi(2\sqrt{10})(6) = 12\pi\sqrt{10}$$

اما اگر این فرمول را به‌خاطر ندارید، با استفاده از رابطه مساحت سطح حاصل از دوران حول محور x ها داریم:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$S = 2\pi \int_0^2 3x \sqrt{1 + (3)^2} dx = 6\pi \sqrt{10} \int_0^2 x dx = 3\pi \sqrt{10} x^2 \Big|_0^2 = 12\pi\sqrt{10}$$



۱۲- گزینه «۱» ابتدا ناحیه موردنظر را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل تابع، از هر دو روش قرصی و پوسته استوانه‌ای می‌توان استفاده کرد. با روش دوم داریم:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_1^5 x \times \frac{1}{2x} dx = \pi (x) \Big|_1^5 = \pi(5-1) = 4\pi$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{(f(n) + f(i))^\gamma}{n^\gamma} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{n^\gamma (f + \frac{f_i}{n})^\gamma}{n^\gamma} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f + \frac{f_i}{n})^\gamma$$

۱۳- گزینه «۳»

$$L = \int_0^1 (f + 3x)^\gamma dx = \frac{1}{\gamma+1} (f + 3x)^{\gamma+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\gamma+1} (\gamma^{\gamma+1} - f^{\gamma+1})$$

با فرض $f(\frac{i}{n}) = (f + \frac{f_i}{n})^\gamma$ این حد ریمان به انتگرال مقابل تبدیل می‌شود:

۱۴- گزینه «۲» انتگرال اول در هر دو سر آن ناسره است. پس با تبدیل آن به انتگرال $I = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^{1399}}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^{1399}}}}_{I_2}$ داریم:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow I_1 \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \text{همگرا است}$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow I_2 \sim \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^{1399}}}$$

در این انتگرال $P = \frac{1399}{2} > 1$ پس همگراست. در نتیجه انتگرال I در کل همگراست. برای انتگرال دوم از روش آزمون مقایسه داریم:

$$\left| \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2}$$

و چون انتگرال $\int_1^\infty \frac{2dx}{x^2}$ همگراست، پس این انتگرال نیز همگرای مطلق (یعنی همیشه همگرا) است.

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

۱۵- گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورن تابع e^u داریم:



۱۶- گزینه «۳» برای حد A، روی خط $y = x$ اصلاً حد تعریف نمی‌شود پس کلاً حد وجود ندارد. برای حد B نیز با فرض $y = mx$ داریم:

$$B = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{3|x|+|y|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+mx)^2}{3|x|+|mx|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2(1+m)^2}{|x|(3+|m|)} = 0$$

در واقع چون تنها ریشه مخرج همان مبدأ مختصات است و اختلاف درجه صورت و مخرج مثبت است، این حد روی هر مسیری صفر خواهد بود.

۱۷- گزینه «۲» با استفاده از تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_v f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h\frac{\sqrt{3}}{2}, 0+h\frac{1}{2}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h^4 \frac{9}{16} \times \frac{h}{2}}{\frac{9h^4}{16} + \frac{h^4}{16}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{9}{32} h^5}{\frac{10}{16} h^4} = \frac{9}{20} = 0.45$$

۱۸- گزینه «۳» خم داده‌شده را می‌توان به صورت $\vec{R}(t) = (\cos t, \sin t, \overbrace{\cos^2 t - \sin^2 t})$ تعریف کرد. برای منحنی‌های پارامتری، انحنای رابطه زیر

محاسبه می‌شود:

$$\kappa = \frac{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}$$

در این سؤال داریم:

$$\vec{R}(t) = (1, 0, 1) \Rightarrow t = 0$$

$$\vec{R}'(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin 2t) \rightarrow \vec{R}'(0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{R}''(t) = (-\cos t, -\sin t, -4\cos 2t) \rightarrow \vec{R}''(0) = (-1, 0, -4)$$

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4, 0, 1) \Rightarrow \kappa = \frac{|(-4, 0, 1)|}{|(0, 1, 0)|^3} = \frac{\sqrt{16+1}}{1} = \sqrt{17}$$

۱۹- گزینه «۱» بردار عمود بر صفحه مماس یک رویه، موازی بردار گرادیان در نقطه تماس است. پس داریم:

$$f(x, y, z) = 2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 - 8 = 0$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (4(x-2), 2(y-1), 2(z-3)) \Rightarrow \vec{\nabla} f(2, 3, 5) = (0, 4, 4) \parallel (0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow C: 0(x-2) + 1(y-3) + 1(z-5) = 0 \Rightarrow y + z = 8$$

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r_\theta^2} d\theta$$

۲۰- گزینه «۴» با توجه به رابطه طول منحنی‌های قطبی داریم:

$$r^2 + r_\theta^2 = (1 + \sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 2 + 2\sin \theta$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\sin \theta} d\theta$$

در این سؤال خواهیم داشت:

برای حل این انتگرال، از تغییر متغیر $\theta = \frac{\pi}{2} + t$ کمک می‌گیریم:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + t \Rightarrow d\theta = dt \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ \theta = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\sin(\frac{\pi}{2} + t)} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \frac{t}{2} dt = 4 \left[\sin \frac{t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4\sqrt{2}$$

۲۱- «هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست» ابتدا معادلات زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$F = xu^2 + yv^2 - 4 = 0$$

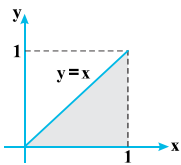
$$G = ux - 2vy = 0$$

اکنون از مشتق‌گیری ضمنی برای دو عبارت F و G داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2xu & v^2 \\ x & -2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u & -2v \end{vmatrix}} = -\frac{-4xuv - xv^2}{-2vu^2 - uv^2} = -\frac{4xu + xv}{2u^2 + uv} \Rightarrow (2u^2 + uv) \frac{\partial x}{\partial u} = -(4xu + xv) = -x(4u + v)$$

توجه: این سؤال در کلید نهایی سازمان سنجش حذف شد.

۲۲- گزینه «۲» این انتگرال با روش‌های حقیقی به این صورت قابل حل نیست. پس با توجه به اینکه تابع درون انتگرال فقط تابعی از X است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری خواهیم داشت:



$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx$$

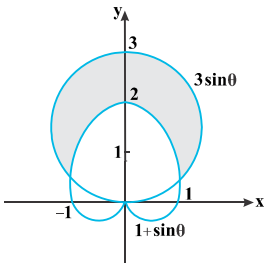
$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - 0) dx = \int_0^1 \sin x dx = -\cos x \Big|_0^1 = 1 - \cos 1$$

۲۳- گزینه «۱» با توجه به وجود عامل $x^2 + y^2$ از مختصات قطبی کمک می‌گیریم. در این صورت با توجه به $x, y \geq 0$ خواهیم داشت: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ و

نیز $4 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ معادل $1 \leq r \leq 2$ است. پس در کل داریم:

$$I = \iint_A \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_A \sqrt{1+r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 r \sqrt{1+r^2} dr = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$$

۲۴- گزینه «۱» ابتدا دو ناحیه را رسم می‌کنیم. با توجه به تقارن مسئله، کافی است مساحت در ناحیه اول را محاسبه کرده و پاسخ را دو برابر کنیم. حالا برای نقطه تقاطع در ربع اول داریم:



$$r \sin \theta = 1 + \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

حالا با توجه به فرمول مساحت در مختصات قطبی داریم:

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (r_2^2 - r_1^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ((3 \sin \theta)^2 - (1 + \sin \theta)^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 1) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [4(1 - \cos 2\theta) - 2 \sin \theta - 1] d\theta$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-4 \cos 2\theta - 2 \sin \theta + 3) d\theta = \frac{1}{2} (-2 \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 3\theta) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [(0 + 0 + 3\frac{\pi}{2}) - (-\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2} (\pi) = \frac{\pi}{2}$$

این عدد مساحت ناحیه‌ی واقع در نیمه اول شکل است و برای به دست آوردن مساحت کل، باید آن را ضربدر ۲ کنیم و داریم: $S = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ کل

۲۵- گزینه «۴» با مشتق‌گیری جزئی و پیدا کردن نقاط بحرانی داریم:

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \Rightarrow \begin{cases} A(0,0) \\ B(1,1) \end{cases}$$

حال با کمک مبین دلتا داریم:

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (12x)(6) - (-6)^2 = 72x - 36$$

$$\Delta_{(0,0)} = 0 - 36 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ نقطه زینی}$$

$$\Delta_{(1,1)} = 72 - 36 > 0 \xrightarrow{f_{xx}=12>0} (1,1) \text{ نقطه مینیمم موضعی}$$



۲۶- گزینه «۴» برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع با دو شرط داده شده، در صورت ممکن بهتر است یک شرط را حذف کنیم. برای این کار از قید اول نتیجه می‌شود $Z = -x - y$ که با جایگذاری در تابع و قید دوم داریم:

$$f(x, y) = xy + 2(-x - y) = xy - 2x - 2y$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 24 \Rightarrow g(x, y) = x^2 + y^2 + xy = 12$$

حالا مساله به پیدا کردن نقاط بحرانی یک تابع دو متغیره با یک قید تبدیل شده که با استفاده از روش ساده شده‌ی لاگرانژ داریم:

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{y-2}{2x+y} = \frac{x-2}{2y+x} \Rightarrow 2y^2 + yx - 4y - 2x = 2x^2 + yx - 4x - 2y$$

$$\Rightarrow y^2 - y = x^2 - x \Rightarrow (y - \frac{1}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \Rightarrow y = x & (1) \\ y - \frac{1}{2} = -(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = 1 - x & (2) \end{cases}$$

حالا با جایگذاری پاسخ‌های بدست آمده در قید $g(x, y)$ خواهیم داشت:

$$(1) \Rightarrow g(x) = x^2 + x^2 + x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = 2 \Rightarrow f(x, y) = -4 \\ x = -2 \rightarrow y = -2 \Rightarrow f(x, y) = 12 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow g(x) = x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 12 \Rightarrow x^2 - x = \underbrace{x(x-1)}_{-y} = 11 \Rightarrow xy = -11$$

$$\Rightarrow f(x, y) = xy - 2(x+y) = -11 - 2(1) = -13$$

با توجه به مقادیر بدست آمده واضح است که بیشترین مقدار ۱۲ و کمترین مقدار ۱۳- است.

۲۷- گزینه «۳» برای حل این سؤال از مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم. تصویر ناحیه بر صفحه xoy ، $2 - x^2 - y^2 = 0$ یا همان دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$

است. پس $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ از طرفی با توجه به سؤال واضح است که $0 \leq z \leq 2 - r^2$ ، پس داریم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) \, dr = 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{4} \right)_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(2-1) = 2\pi$$

۲۸- گزینه «۲» شکل نسبتاً طولانی تابع برداری، ما را به بررسی پایستار بودن آن سوق می‌دهد:

$$F(x, y, z) = (y^2, 2xy + e^{xz}, 3ye^{xz})$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy + e^{xz} & 3ye^{xz} \end{vmatrix} = (3e^{xz} - 3e^{xz}, 0, 2y - 2y) = \vec{0}$$

پس با توجه به مشتق‌پذیری تابع در تمام نقاط، میدان پایستار است و فقط کافیت تابع پتانسیل را محاسبه کنیم:

$$f(x, y, z) = \int y^2 dx + \int e^{xz} dy + \int 0 dz = y^2 x + ye^{xz} + c$$

$$I = f(x, y, z) \Big|_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},2)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^2 + c \right) - (0 + 0 + c) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + e^2 \right)$$

۲۹- گزینه «۳» با توجه به بسته بودن رویه، از قضیه دیورژانس کمک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= \iiint_D (\text{div } \vec{F}) \, dv = \iiint_D (3 + 2y + x) \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^2 (3 + 2y + x) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 (6y + 2y^2 + 2xy) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 (18 + 18 + 6x) \, dx = [36x + 3x^2]_0^1 = 36 + 3 = 39 \end{aligned}$$

۳۰- گزینه «۴» سؤال را به دو روش نکته‌ای و تشریحی جواب می‌دهیم:

روش اول: مطابق نکته متن کتاب داریم:

$$\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

برای میدان برداری سه نتیجه زیر را به خاطر بسپارید:

$$(1) \text{ دیورژانس } \vec{F} \text{ صفر است } (\operatorname{div} \vec{F} = 0)$$

(۲) شار برون‌سوی میدان $\vec{F}$ بر روی هر سطح بسته مانند S ، یعنی حاصل $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ ، به شرط این که مبدأ درون آن قرار گرفته باشد، برابر با 4π است.

توجه کنید که چون مؤلفه‌های میدان $\vec{F}$ در مبدأ مختصات ناپیوسته هستند، بنابراین شرایط استفاده از قضیه دیورژانس را نداریم که مثلاً بگوییم: چون $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ، پس شار عبوری از سطح بسته S برابر با صفر است!!

(۳) شار برون‌سوی میدان $\vec{F}$ برای هر سطح بسته‌ای مانند S ، یعنی حاصل $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ به شرط این که مبدأ درون آن قرار نگرفته باشد، برابر با صفر است (دقت کنید چون $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ و مبدأ درون این سطح قرار ندارد، پس می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم و بگوییم حاصل این انتگرال صفر است).

البته شرایط بالا در حالت کلی برای میدان برداری $\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^{2n} + y^{2n} + z^{2n})^{\frac{1}{n}}}$ با فرض این که n عددی طبیعی باشد، برقرار است. یعنی اگر مبدأ درون S

قرار نگرفته باشد، حاصل انتگرال صفر می‌شود و اگر مبدأ درون S باشد، حاصل انتگرال برابر با 4π که V حجم درون رویه‌ی $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$ است. بنابراین حاصل انتگرال با توجه به مطابقت با بند (۲) برابر 4π و به دلیل ضریب (۲) داده شده در صورت سؤال برابر $8\pi = 4\pi \times 2$ می‌شود.

روش دوم: اگر نکته را بلد نباشیم و بخواهیم از روش عادی مسئله را حل کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

برای میدان برداری داده شده $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ می‌باشد. اگرچه دیورژانس $\vec{F}$ صفر است و S یک سطح بسته است، اما نمی‌توان نتیجه گرفت که مقدار انتگرال سطح داده شده صفر باشد، زیرا $\vec{F}$ در مبدأ پیوسته نیست و سطح S مبدأ مختصات را درون خود دارد، پس می‌توانیم از این مطلب که دیورژانس $\vec{F}$ صفر است، استفاده کرده و به جای S هر سطح بسته‌ای که مبدأ را درون خود داشته باشد، در نظر بگیریم. فرض کنید S' سطح کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ باشد. از معادله $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ داریم:

$$\vec{n} ds = \frac{(2x, 2y, 2z)}{|2z|} dy dx = (x, y, z) \times \frac{1}{|z|} dy dx$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} ds = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dy dx = 2(a^2)^{-\frac{3}{2}} (a^2) \times \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx = \frac{2}{a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx$$

سطح S' از دو نیمکره S'_1 ($z \geq 0$)، S'_2 ($z \leq 0$) تشکیل می‌شود که تصویر هر کدام از آنها بر صفحه xoy ناحیه درون دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است و اگر این ناحیه را D بنامیم داریم:

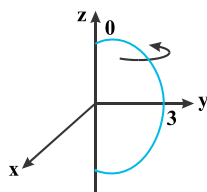
$$I_1 = \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \frac{2 dy dx}{a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r dr d\theta}{a\sqrt{a^2 - r^2}} = 2 \left(-\frac{1}{a} \right) \int_0^{2\pi} (-\sqrt{a^2 - r^2}) \Big|_0^a d\theta = \frac{2}{a} \int_0^{2\pi} a d\theta = 4\pi$$

به همین صورت هم، روی نیمکره S'_2 نیز داریم:

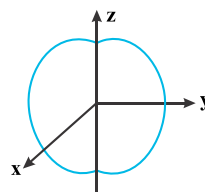
$$I_2 = \iint_{S'_2} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 4\pi$$

پس با جمع دو انتگرال بالا داریم:

توجه داشته باشید که رویه $\rho = 3 + 2\cos\varphi$ (برای $0 \leq \varphi \leq \pi$) به صورت زیر می‌باشد که با $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، این رویه مبدأ را در برمی‌گیرد.



$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



سوالات رشته‌ی عمران

۱- مقدار حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2 + \sqrt{1+x^4})^{\frac{1}{\ln x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) e (۳) $\frac{1}{e^2}$ (۴) e^2

۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{2+\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2}})$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) ۱ (۳) $\ln 2$ (۴) $2 \ln 2$

۳- مساحت محصور به دو منحنی $y = \ln x$ و $y = (\ln x)^2$ کدام است؟

- (۱) $e-1$ (۲) $e-2$ (۳) $3-e$ (۴) $4-e$

۴- اگر z یک عدد مختلط باشد به طوری که $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ ، آنگاه $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -3^{50} (۳) ۱ (۴) 3^{50}

۵- کدام مورد در ارتباط با سری $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{1+2+\dots+n})$ درست است؟

- (۱) همگرا بوده و مقدار آن برابر $\ln 3$ می‌باشد.
(۲) همگرا بوده و مقدار آن برابر $\ln 2$ می‌باشد.
(۳) همگرا بوده و مقدار آن برابر ۲ می‌باشد.
(۴) واگرا است.

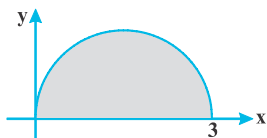
۶- کمترین فاصله بین کره $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 12 = 0$ و صفحه $2x - y + 2z + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۷- فرض کنید $f(x, y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y است به طوری که $f(x, 2x) = 1$ و $f_x(x, 2x) = x$ در این صورت $f_y(1, 2)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۸- حاصل $\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy$ که در آن D سطح نیم‌دایره نمایش داده شده در شکل زیر است، کدام است؟



- (۱) $3(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3})$ (۲) $3(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$

- (۳) $9(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3})$ (۴) $9(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$

۹- اگر منحنی C نیم‌دایره $0 \leq t \leq \pi$ باشد، مقدار $\int_C e^y dx + x e^y dy$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰- اگر D ناحیه محصور به بیضی‌گون $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ و بالای صفحه $z = 0$ باشد و $\vec{F} = (x + 4y^2)\vec{i} + (3y + 2x^2)\vec{j} + (-2z + 2y \cos x)\vec{k}$ ، حاصل

$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ که در آن S سطح محصورکننده D بوده و $\vec{n}$ بردار یک‌ه‌قائم برون‌سو باشد، کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 4π (۳) 8π (۴) 12π

۱- گزینه «۴» حالت مبهم $(\infty)^\infty$ می‌باشد که باید عبارت را مساوی A قرار دهیم و از دو طرف تساوی $\ln$ بگیریم و سپس رفع ابهام کنیم. ابتدا در عبارت داخل پرانتز از هم‌ارزی بی‌نهایت استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^x + x^x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^x)^{\frac{1}{\ln x}} \Rightarrow \ln A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{2x^x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x^x} = 2 \Rightarrow \ln A = 2 \Rightarrow A = e^2$$

۲- گزینه «۴» با استفاده از فرمول حد مجموع به کمک انتگرال معین، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i + \sqrt{i n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{\frac{i}{n} + \sqrt{\frac{i}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{\frac{i}{n} + \sqrt{\frac{i}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{\frac{i}{n} + \sqrt{\frac{i}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

$$\xrightarrow{u=\sqrt{x}, u^2=x, u^2 du=dx} \int \frac{2u du}{u^2 + u} = 2 \int \frac{u}{u(u+1)} du = 2 \int \frac{du}{1+u} = 2 \ln(1+u) = 2 \ln(1+\sqrt{x}) \Big|_0^1 = 2 \ln 2$$

۳- گزینه «۳» ابتدا باید محل تلاقی دو تابع را بیابیم.

$$(\ln x)^x = \ln x \Rightarrow (\ln x)^x - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x (\ln x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1, \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

$$S = \left| \int_a^b (y_2 - y_1) dx \right| = \int_1^e \ln x - (\ln x)^x dx = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e (\ln x)^x dx$$

پس سطح محصور بین دو تابع برابر است با:

برای محاسبه $\int_1^e (\ln x)^x dx$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} u = (\ln x)^x \Rightarrow du = x(\ln x)^{x-1} \frac{1}{x} dx \\ dx = dv \Rightarrow x = v \end{cases}$$

$$S = \int_1^e \ln x dx - \left((x(\ln x)^x) \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx \right) = -(e(\ln e)^x - 0) + \int_1^e x \ln x dx = -e + \int_1^e x \ln x dx = -e + \int_1^e \underbrace{(e \ln e - e^0 - 0 + 1)}_{=0} = -e$$

روش دیگر برای محاسبه حل انتگرال:

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt, \begin{cases} x=1 \rightarrow t = \ln 1 = 0 \\ x=e \rightarrow t = \ln e = 1 \end{cases}$$

با فرض $\ln x = t$ داریم:

$$S = \int_0^1 (t - t^x) e^t dt$$

اکنون داریم:

$$\begin{array}{r} t - t^x \quad | \quad e^t \\ 1 - t^x \quad | \quad e^t \\ \hline -t^x \quad | \quad e^t \\ \hline -t^x \quad | \quad e^t \\ \hline 0 \quad | \quad e^t \end{array}$$

با استفاده از جزء به جزء به روش جدول داریم:

$$S = ((t - t^x) e^t - (1 - t^x) e^t - t^x e^t) \Big|_0^1 = (0 + e - 2e - 0 + 1 + 2) = 3 - e$$

۴- گزینه «۱» ابتدا از معادله‌ی داده شده Z را به دست می‌آوریم و سپس حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم.

$$Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{3} \xrightarrow{\times Z} Z^2 - \sqrt{3}Z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{3})^2 - 4(1)(1) = -1$$

$$Z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1, \quad \text{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = e^{\frac{i\pi}{6}} \quad \text{با در نظر گرفتن } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \text{ داریم:}$$

$$Z^{100} + Z^{-100} = (e^{\frac{i\pi}{6}})^{100} + (e^{\frac{i\pi}{6}})^{-100} = e^{\frac{i50\pi}{3}} + e^{-\frac{i50\pi}{3}} = 2 \cos \frac{50\pi}{3} = 2 \cos(17\pi - \frac{\pi}{3}) = 2(-\cos \frac{\pi}{3}) = -2(\frac{1}{2}) = -1 \quad \text{پس داریم:}$$

توجه داشته باشید که با $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ نیز به جواب -1 می‌رسیم.

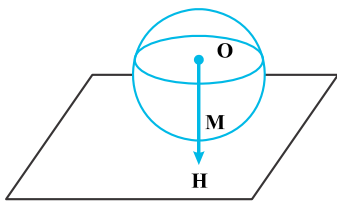
۵- گزینه «۱» با توجه به اینکه $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد، جمله‌ی عمومی سری را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+n-2}{n^2+n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) \end{aligned}$$

اکنون با توجه به اینکه دو جمله جلوی سری پشت سرهم هستند از قاعده سری تلسکوپی استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln(1) = -\ln 3$$

پس سری داده شده همگرا به عدد $-\ln 3$ می‌باشد.



۶- گزینه «۳» ابتدا معادله کره را به صورت استاندارد می‌نویسیم، تا بتوانیم با استفاده از فرمول

فاصله نقطه تا صفحه، فاصله‌ی صفحه تا مرکز کره را به دست آوریم.

$$x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 4 - 9 + 12 = 0$$

$$x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$$

$$OH = \frac{|2(0) - (-2) + 2(3) + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$$

مرکز کره $O(0, -2, 3)$ می‌باشد، حال داریم:

$$MH = 3 - 1 = 2 \quad \text{فاصله کمترین}$$

پس کمترین فاصله‌ی کره تا صفحه برابر است با:

۷- گزینه «۱» با استفاده از مشتق زنجیره‌ای توابع دو متغیره داریم:

$$f(x, y, z) = 1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=2}} f_x(1, 2) + 2f_y(1, 2) = 0 \xrightarrow{f_x(x, y, z) = x \Rightarrow f_x(1, 2) = 1} 1 + 2f_y(1, 2) = 0 \Rightarrow f_y(1, 2) = -\frac{1}{2}$$

۸- گزینه «۴» با توجه به وجود عامل $x^2 + y^2$ در تابع زیر انتگرال و همچنین با توجه به ناحیه انتگرال گیری که یک نیم دایره می باشد، از تغییر متغیر قطبی استفاده می کنیم و داریم:

$$(x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 - rx = 0$$

$$r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow r = 0, \quad r = 2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{9 - r^2} \, r \, dr \, d\theta \xrightarrow[u = 9 - r^2]{du = -2r \, dr} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} u^{\frac{1}{2}} \, du \, d\theta = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\frac{3}{2}} \, d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((9 - r^2)^{\frac{3}{2}})^{r \cos \theta} \, d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((9 - 4 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - (9)^{\frac{3}{2}}) \, d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9(\sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - 27) \, d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9 \sin^3 \theta - 27) \, d\theta = -9 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta - (\theta) \right)_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -9 \left((-\cos \theta) \right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3 \theta}{3} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} = -9 \left(0 + 1 + 0 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = -9 \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = 9 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

۹- گزینه «۱» ابتدا پایستار بودن میدان برداری داده شده را بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} P = e^y \\ Q = x e^y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y$$

چون میدان برداری پایستار است، باید تابع پتانسیل این میدان را به دست آوریم.

$$\int P \, dx + Q \, dy = \int e^y \, dx = x e^y$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \cos 0 = 1 \\ y = \sin 0 = 0 \end{cases}, \quad t = \pi \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \pi = -1 \\ y = \sin \pi = 0 \end{cases}$$

اکنون مقادیر به دست آمده x و y را در تابع پتانسیل قرار می دهیم.

$$f(x, y) = (x e^y) \bigg|_{(1,0)}^{(-1,0)} = (-e^0) - (e^0) = -2$$

۱۰- گزینه «۳» توجه داشته باشید که فضای داده شده بسته نیست، زیرا به صورت "بالای صفحه $z = 0$ " به آن اشاره شده. پس خود این صفحه بخشی از ناحیه نیست. در نتیجه اگر این صفحه را به ناحیه اضافه کنیم سطح بسته بوده و می توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد. یعنی داریم:

$$\begin{aligned} \iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds + \iiint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= \iiint_D \text{div}(\vec{F}) \, dv \\ \iiint_S \text{div}(\vec{F}) \, dv &= \iiint_D (1 + 2 - 2) \, dv = 2 \iiint_D dv \end{aligned}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi (2)(1) = \frac{4}{3} \pi \Rightarrow I = 2V = \frac{8}{3} \pi$$

در واقع انتگرال اخیر حجم نیمه ی بالایی بیضی گون مورد اشاره است که برابر است با:

حالا برای انتگرال صفحه ای که به ناحیه اضافه کردیم داریم:

$$\iiint_{z=0} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{z=0} (x + 2y^2, 2y + 2x^2, -2z + 2y \cos x) \cdot (0, 0, -1) \, ds = \iint_{z=0} (-2y \cos x) \, dx \, dy$$

توجه داشته باشید ناحیه ای که توسط بیضی گون روی این صفحه محدود می شود در واقع همان بیضی $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ است. این ناحیه نسبت به متغیر y

زوج است اما تابع زیر انتگرال نسبت به آن فرد است، پس حاصل انتگرال به دست آمده صفر خواهد بود و در کل داریم:

$$\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{8}{3} \pi - 0 = \frac{8}{3} \pi$$



سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱- اگر $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{1+z}{z-2}\right) > 1\}$ باشد، آنگاه A با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟ ($\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط است).

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - \frac{3}{4}i| > \frac{3}{4}\} \quad (2)$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - \frac{3}{4}i| < \frac{3}{4}\} \quad (1)$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + \frac{3}{4}i| > \frac{3}{4}\} \quad (4)$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + \frac{3}{4}i| < \frac{3}{4}\} \quad (3)$$

۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{5}{4}| + |(\frac{5}{4})^2| + \dots + |(\frac{5}{4})^n|}{(\frac{5}{4})^n}$ ، کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\infty \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

۳- اگر $A = \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$$\frac{1}{30} \leq A \leq \frac{1}{20\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{30\sqrt{2}} \leq A \leq \frac{1}{30} \quad (3)$$

$$\frac{1}{20\sqrt{2}} \leq A \leq \frac{1}{10} \quad (2)$$

$$\frac{1}{10} \leq A \leq \frac{2}{19} \quad (1)$$

۴- حجم شکل حاصل از دوران دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز $(4,0)$ حول محور y ها، کدام است؟

$$16\pi^2 \quad (4)$$

$$16\pi \quad (3)$$

$$32\pi^2 \quad (2)$$

$$32\pi \quad (1)$$

۵- اگر $b \geq a > 0$ باشد، آنگاه فاصله همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax+b)^n}{a^n + b^n}$ ، کدام است؟

$$\left(0, \frac{2b}{a}\right) \quad (4)$$

$$\left(\frac{-2b}{a}, 0\right) \quad (3)$$

$$\left(\frac{-1-2b}{a}, \frac{1-b}{a}\right) \quad (2)$$

$$\left(\frac{-1-b}{a}, \frac{1-b}{a}\right) \quad (1)$$

۶- خط قائم بر بیضی $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ با محورهای مختصات زاویه مساوی می‌سازد. اگر (a,b,c) نقطه‌گذرای خط قائم از بیضی‌گون باشد،

مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ ، کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۷- اگر $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} \sin(x^2+y^2)^t dx dy$ (ت > 0) باشد، $F'(t)$ ، کدام است؟

$$2\pi t \sin(t^t) \quad (4)$$

$$2\pi t \sin(t^t) \quad (3)$$

$$2\pi \sin(t^t) \quad (2)$$

$$2\pi \sin(t^t) \quad (1)$$

۸- فرض کنید C_1 منحنی بسته $x^2 + y^2 = 25$ در جهت مثلثاتی و C_2 منحنی بسته $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مقدار

$\int_{C_1 \cup C_2} x dy - y dx$ ، کدام است؟

$$19\pi \quad (4)$$

$$31\pi \quad (3)$$

$$36\pi \quad (2)$$

$$38\pi \quad (1)$$

۹- اگر S بخشی از رویه $z = 1 - x^2$ ، $0 \leq x \leq 1$ و $-2 \leq y \leq 2$ و C مرز این رویه در جهت مثبت و $\vec{F}(x,y,z) = (y,y,z)$ باشد، آنگاه مقدار $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ،

کدام است؟

$$-\frac{17}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{15}{4} \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (1)$$

۱۰- فرض کنید S سطح خارجی ناحیه‌ای باشد که توسط صفحه $z=0$ و رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ ، محصور شده است. اگر

$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + \cos(y^2 + z^2), y^2 + \sin(x^2 + z^2), x^2 + y^2)$ باشد، شار گذرا از سطح S توسط نیروی $\vec{F}$ کدام است؟

$$34\pi \quad (4)$$

$$32\pi \quad (3)$$

$$17\pi \quad (2)$$

$$16\pi \quad (1)$$

۱- گزینه «۱» با قراردادن $z = x + iy$ در مجموعه A و مشخص کردن قسمت IM این مجموعه داریم:

$$A = \frac{1 + (x + iy)}{2 - x - iy} \times \frac{(2 - x) + iy}{(2 - x) + iy} = \frac{2 - x + 2x - x^2 + iy + iyx + 2iy - ixy - y^2}{(2 - x)^2 - i^2 y^2}$$

$$Im(A) = \frac{2y}{(2 - x)^2 + y^2} > 1 \Rightarrow (2 - x)^2 + y^2 < 2y \Rightarrow (2 - x)^2 + y^2 - 2y < 0 \Rightarrow (2 - x)^2 + (y - 1)^2 < 1$$

اکنون در گزینه (۱) با قراردادن $z = x + iy$ و به دست آوردن اندازه عبارت داده شده داریم:

$$|x + iy - 2 - \frac{3}{2}i| < \frac{3}{2} \Rightarrow |(x - 2) + i(y - \frac{3}{2})| < \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2} < \frac{3}{2} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 < \frac{9}{4}$$

پس مجموعه A دقیقاً همان مجموعه گزینه (۱) می‌باشد.

$$x - 1 < [x] \leq x \Rightarrow x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2, \dots, x^n - 1 < [x^n] \leq x^n$$

۲- گزینه «۴» با استفاده از خواص جزء صحیح، داریم:

$$(x + x^2 + \dots + x^n) - n < [x] + [x^2] + \dots + [x^n] \leq x + x^2 + \dots + x^n$$

اکنون اگر طرفین نامساوی‌های فوق را با هم جمع کنیم، داریم:

حال می‌دانیم $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ مجموع جملات یک تصاعد هندسی و برابر $\frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$ است، با تقسیم رابطه‌های فوق بر x^n داریم:

$$\frac{x}{x - 1} \cdot \frac{x^n - 1}{x^n} - \frac{n}{x^n} < \frac{[x] + [x^2] + \dots + [x^n]}{x^n} \leq \frac{x}{x - 1} \cdot \frac{x^n - 1}{x^n}$$

اگر $x > 1$ باشد، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $\frac{n}{x^n} \rightarrow 0$ و $\frac{x^n - 1}{x^n} \rightarrow 1$ ، پس دو عبارت دو طرف نامساوی فوق به عدد $\frac{x}{x - 1}$ میل می‌کنند و بنابراین قضیه

فشرده‌گی، حاصل حد داده شده نیز برابر $\frac{x}{x - 1}$ می‌باشد. در این مثال چون $x = \frac{5}{2}$ است، داریم:

$$\text{حاصل حد} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$$

۳- گزینه «۴» در بازه مورد نظر داریم:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 & \xrightarrow{\text{به طرفین عدد ۸ را اضافه می‌کنیم}} 8 \leq 8 + x \leq 9 \xrightarrow{\text{از طرفین رادیکال می‌گیریم}} \sqrt{8} \leq \sqrt{8 + x} \leq 3 \\ & \xrightarrow{\text{عکس می‌کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود}} \frac{1}{\sqrt{8}} \geq \frac{1}{\sqrt{8 + x}} \geq \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^9} \frac{x^9}{3} \leq \frac{x^9}{\sqrt{8 + x}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{8}} \\ & \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \int_0^1 \frac{x^9}{3} dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{8 + x}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{8}} dx \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \left[\frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 \leq A \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10} - 0 \right) \leq A \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{10} - 0 \right) \Rightarrow \frac{1}{30} \leq A \leq \frac{1}{20\sqrt{2}}$$

۴- گزینه «۲»

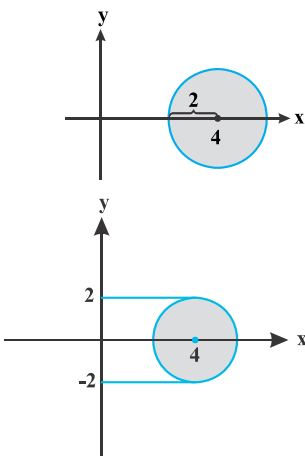
روش اول: با توجه به این که محور دوران، یعنی محور y ها، با دایره مورد نظر برخوردی ندارد از قضیه گلدن پاپوس برای محاسبه‌ی حجم استفاده کنیم. اگر فاصله نقطه P (مرکز ثقل دایره) تا محور دوران را با d نشان دهیم و S مساحت دایره باشد، حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V = 2\pi s d \Rightarrow V = 2\pi(4\pi)4 = 32\pi^2$$

روش دوم: اما اگر استفاده از قضیه به ذهن ما نرسید روش زیر حل سخت‌تر سؤال است:

ابتدا معادله دایره را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از روش دیسک، حجم حاصل از دوران را به دست می‌آوریم:

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (x - 4)^2 = 4 - y^2 \Rightarrow x - 4 = \pm \sqrt{4 - y^2} \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{4 - y^2}$$





حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b (x_2^2 - x_1^2) dy = \pi \int_{-r}^r ((\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - y^2})^2 - (\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - y^2})^2) dy = \pi \int_{-r}^r (1\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - y^2} + \epsilon - y^2) - (1\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - y^2} + \epsilon - y^2) dy$$

$$V = \pi \int_{-r}^r 1\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - y^2} dy \xrightarrow{\text{تابع زوج است}} 2\pi \int_0^r \sqrt{\epsilon^2 - y^2} dy$$

$$y = r \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow \theta = 0 \\ y = r \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow dy = r \cos \theta d\theta$$

$$V = r(2\pi\pi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\epsilon(1 - \sin^2 \theta)}}{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta = 2\pi\pi(\epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 2\pi\pi(\epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 2\pi\pi(\epsilon) \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi\pi^2$$

پس داریم:

۵- گزینه «۳» با استفاده از رابطه $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{R}$ باید شعاع همگرایی سری را به دست آوریم و سپس از روی آن، بازه همگرایی سری را بیابیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a(x + \frac{b}{a}))^n}{a^n + b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (x + \frac{b}{a})^n}{a^n + b^n}$$

پس $u_n = \frac{a^n}{a^n + b^n}$ می باشد که با توجه به اینکه $b \geq a > 0$ می باشد در مخرج کسر می توانیم از a^n در مقابل b^n صرف نظر کنیم و داریم:

$$u_n = \frac{a^n}{b^n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} \times \frac{b^n}{a^n} \right| = \frac{1}{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^n \times a}{b^n \times b} \times \frac{b^n}{a^n} \right| = \frac{a}{b} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{b}{a}$$

پس بازه همگرایی برابر است با:

$$\left| x + \frac{b}{a} \right| < R \Rightarrow \left| x + \frac{b}{a} \right| < \frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} < x + \frac{b}{a} < \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{-2b}{a} < x < 0$$

اکنون باید دو سر بازه را بررسی کنیم، به ازای $x = 0$ سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{a^n + b^n}$ در می آید که این سری حد جمله عمومی آن برابر یک و

مخالف صفر است، پس یک سری واگراست، پس گزینه (۳) صحیح است.

۶- گزینه «۱» ابتدا باید بردار گرادیان رویه را به دست آوریم:

$$f: x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

$$\vec{\nabla} f = (2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + \left(\frac{z}{2}\right)\vec{k}$$

با توجه به اینکه خط قائم بر رویه با محورهای مختصات زاویه های مساوی دارد، پس باید در بردار گرادیان مؤلفه های اول و دوم و سوم با هم برابر باشند،

پس داریم:

$$\begin{cases} 2x = 2y \Rightarrow x = y \\ 2x = \frac{z}{2} \Rightarrow z = 4x \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 + \frac{16x^2}{4} = 1 \Rightarrow 6x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$(a, b, c) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$$

پس داریم:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{16}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

در نتیجه حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ برابر است با:

۷- گزینه «۴» با توجه به اینکه ناحیه انتگرال گیری دایره‌ای به شعاع t می‌باشد، از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم و داریم:

$$F(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^t \sin(t^\varphi) t \, dt \, d\theta \Rightarrow F(t) = 2\pi \int_0^t t \sin(t^\varphi) \, dt \Rightarrow F'(t) = 2\pi t \sin(t^\varphi)$$

توجه داشته باشید که اگر از حاصل انتگرال مشتق بگیریم دوباره به خود تابع زیر انتگرال می‌رسیم.

۸- گزینه «۱» دقیقاً سؤال متن کتاب ریاضی (۲) مدرسان شریف است.

با توجه به تعمیم قضیه گرین، چون دو مسیر داده شده خلاف جهت هم هستند و مسیر بیرونی در جهت مثلثاتی است، می‌توانیم از قضیه گرین برای فضای بین دو منحنی استفاده کنیم و داریم:

$$I = \oint_{C_1 \cup C_2} -y \, dx + x \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (1 - (-1)) dA = 2 \iint_D dA$$

انتگرال به‌دست آمده، درواقع فضای بین دایره و بیضی می‌باشد، پس داریم:

$$I = 2 \times (\text{مساحت دایره} - \text{مساحت بیضی}) = 2 \times (25\pi - \pi(2)(3)) = 2(25\pi - 6\pi) = 2(19\pi) = 38\pi$$

توجه داشته باشید که مساحت بیضی برابر πab می‌باشد.

۹- گزینه «۲» با استفاده از نتیجه قضیه استوکس، برای ساده‌تر شدن حل، انتگرال را روی صفحه $z=0$ که مرز مشترک بین ناحیه‌ی داده شده و ناحیه S' که همان صفحه $z=0$ می‌باشد، به‌دست می‌آوریم.

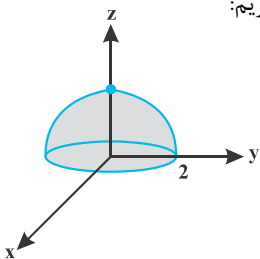
$$I = \iint_S \text{CurL}\vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{s} = \iint_{S'} \text{curL}\vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\text{CurL}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & y & z \end{vmatrix} = +\vec{k}(0-1) = -\vec{k}$$

$$I = \iint_{S'} (-\vec{k}) \cdot (\vec{k}) \, ds = \int_0^1 \int_{-\varphi}^{\varphi} (-1) \, dy \, dx = - \int_0^1 (y)_{-\varphi}^{\varphi} dx = -\varphi(x)_0^1 = -\varphi$$

بردار قائم صفحه $z=0$ نیز برابر $\vec{n} = \vec{k}$ می‌باشد، پس داریم:

۱۰- گزینه «۳» با توجه به اینکه ناحیه S یک سطح بسته می‌باشد، برای محاسبه شار از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم و داریم:



$$\text{شار} = \iint \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{s} = \iiint_V \text{div } \vec{F} \, dv$$

$$\text{شار} = \iiint_V (3x^2 + 3y^2) \, dv$$

از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\text{شار} = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2-r} r^2 \times r \, dz \, dr \, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} r^2 (z)_0^{2-r} \, dr \, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} r^2 (2-r) \, dr \, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} (2r^2 - r^3) \, dr \, d\theta$$

$$= 3 \times 2\pi \times \left(r^3 - \frac{r^4}{4} \right)_0^{\varphi} = 6\pi \times \left(16 - \frac{32}{4} \right) = 96\pi - 64\pi = 32\pi$$



سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱- اگر $a \in \mathbb{R}$ و $z = (\sin \frac{5\pi}{8} + i \cos \frac{5\pi}{8})^4$ ریشه معادله $z^2 + (a-2)z^2 + a^2z - 2a^2 - 1 = 0$ باشد، آنگاه کدام گزینه جواب دیگری از این معادله است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) 3 (۴) $-1+i$

۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^{\cot^2 x}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $e^{-\frac{1}{2}}$ (۳) $e^{-\frac{1}{6}}$ (۴) $e^{\frac{1}{3}}$

۳- تابع $f: [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \int_0^x \max\{\sin t, \cos t\} dt$ و $f(x) = \int_0^x \max\{\sin t, \cos t\} dt$ وارون پذیر است. مقدار $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2})$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) موجود نیست.

۴- فرض کنید دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $a_0 = 1$ و برای یک عدد حقیقی p جملات دنباله همگی در معادله $(n^2 + 2)a_{n+1} - (n^2 + 1)pa_n = 0$ صدق کنند. مجموعه همه مقادیر p که برای آن‌ها سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرایی مطلق است، کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۵- سری مک‌لورن تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ کدام است؟

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^{2n-1} (n-1)!} x^n$ (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^{2n} (n-1)!} x^n$ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} n!} x^n$ (۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n$

۶- مقدار $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1}$ کدام است؟

- (۱) $\ln(1 + \frac{1}{e})$ (۲) $\ln(1+e)$ (۳) $\text{Arc tg}(\sqrt{e})$ (۴) $\text{Arc tg}(e^{\frac{1}{2}})$

۷- حجم حاصل از دوران ناحیه بی‌کران واقع در ربع اول بین محور x ها و منحنی $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$ حول محور y ها کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) $\frac{\pi^2}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۸- کدام گزینه درباره اکستریم‌های نسبی تابع $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$ درست است؟

- (۱) مینیمم نسبی دارد، ولی ماکزیمم نسبی ندارد. (۲) ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد. (۳) ماکزیمم نسبی دارد، ولی مینیمم نسبی ندارد. (۴) اکستریم نسبی ندارد.

۹- مقدار $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin(\pi y^2) dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{3}{2\pi}$ (۴) $\frac{2}{3\pi}$

۱۰- کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} + y\vec{k}$ در جابه‌جایی یک ذره از نقطه $(1, 0, 2)$ به نقطه $(3, 4, 1)$ روی خم

$C: \vec{r}(t) = (2 - \cos^5 t, 4 \sin^{\frac{4}{3}} t, 1 + \cos^6 \frac{t}{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{109}{6}$ (۲) 40 (۳) $\frac{35}{3}$ (۴) 52

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۳» ابتدا باید مقدار z را به دست بیاوریم و با استفاده از آن و جایگذاری در معادله داده شده مقدار a را بیابیم.

$$z = (e^{i\frac{\Delta\pi}{\gamma}})^{\gamma} = e^{i\frac{\Delta\pi}{\gamma}} = \cos \frac{\Delta\pi}{\gamma} + i \sin \frac{\Delta\pi}{\gamma} = i$$

$$z = i \Rightarrow i^{\gamma} + (a - \gamma)i^{\gamma} + a^{\gamma}i - \gamma a^{\gamma} - 1 = 0 \Rightarrow -i - a + \gamma + a^{\gamma}i - \gamma a^{\gamma} - 1 = 0 \Rightarrow i(a^{\gamma} - 1) - \gamma a^{\gamma} - a + 1 = 0$$

$$a^{\gamma} - 1 = 0 \Rightarrow a^{\gamma} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

برای آن که تساوی فوق برقرار شود باید ضریب i مساوی صفر شود، پس داریم:

به ازای $a = 1$ ، قسمت دوم تساوی برقرار نمی‌باشد. پس $a = -1$ قابل قبول است.

$$z^{\gamma} - \gamma z^{\gamma} + z - \gamma = 0 \Rightarrow (z^{\gamma} + 1)(z - \gamma) = 0 \Rightarrow z = \gamma$$

۲- گزینه «۳» حالت مبهم $(1)^{\infty}$ می‌باشد، برای رفع ابهام از این حالت از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f)^g = \lim_{x \rightarrow a} e^{(f-1) \times g}$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\frac{\sin x}{x} - 1) \cot^{\gamma} x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\frac{\sin x - x}{x}) \times \frac{1}{\tan^{\gamma} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{(x - \frac{x^3}{6}) - x}{x} \times \frac{1}{x^{\gamma}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x^3}{x^{\gamma+1}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x^2}{x^{\gamma+1}}} = e^{-\frac{1}{\gamma}}$$

توجه داشته باشید که از هم‌ارزی‌های $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6!}$ و $\tan x \sim x + \frac{x^3}{3!}$ استفاده کرده‌ایم.

۳- گزینه «۲» با توجه به اینکه $f(x) = \int_0^x \max\{\sin t, \cos t\} dt$ می‌باشد، باید $f(x)$ را در دو بازه $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ، $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ به دست بیاوریم و داریم:

$$\text{اگر } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow f(x) = \int_0^x \cos t dt = (\sin t)_0^x = \sin x$$

$$\text{اگر } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^x \sin t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - (\cos x)_{\frac{\pi}{4}}^x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - \cos x$$

پس $f(x)$ به صورت معادله دوطرفه‌ای زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} - \cos x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x & ; 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \sin x & ; \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

پس داریم:

۴- گزینه «۱» $(n^{\gamma} + \gamma)a_{n+1} - (n^{\gamma} + 1)pa_n = 0 \Rightarrow (n^{\gamma} + \gamma)a_{n+1} = (n^{\gamma} + 1)pa_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n^{\gamma} + 1)}{n^{\gamma} + \gamma}p$

اکنون طبق آزمون نسبت برای همگرایی سری‌ها که باید $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ را بیابیم، داریم:

برای همگرا بودن باید $|p| < 1$ باشد، یعنی $-1 < p < 1$ باشد.

۵- گزینه «۴» ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{\gamma}}$ بازنویسی می‌کنیم و سپس با استفاده از بسط مک‌لورن

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots$$

تابع $f(x)$ را بسط می‌دهیم و سری معادل این بسط را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\gamma}x + \frac{-\frac{1}{\gamma}(-\frac{1}{\gamma}-1)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{\gamma}(-\frac{1}{\gamma}-1)(-\frac{1}{\gamma}-2)}{3!}x^3 + \dots = 1 - \frac{1}{\gamma}x + \frac{\gamma}{2}x^2 - \frac{15}{6\gamma}x^3 + \dots$$

حال با توجه به گزینه‌های داده شده سری معادل با این جملات به دست آمده را می‌یابیم که گزینه (۴) صحیح می‌باشد و جملات تولید شده توسط این سری دقیقاً همان جملات به دست آمده از بسط مک‌لورن تابع می‌باشد.



۶- گزینه «۱» صورت و مخرج کسر را در e^{-x} ضرب می‌کنیم تا بتوانیم u و du را در انتگرال ایجاد کنیم.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} \quad \frac{1 + e^{-x} = u}{-e^{-x} dx = du} - \int \frac{du}{u} = -\ln u = -(\ln(1 + e^{-x})) \Big|_1^{+\infty}$$

$$= -(\ln(1 + e^{-\infty}) - \ln(1 + e^{-1})) = -(0 - \ln(1 + \frac{1}{e})) = \ln(1 + \frac{1}{e})$$

۷- گزینه «۲» با توجه به اینکه تابع $f(x)$ را حول محور y ها دوران داده‌ایم، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم، که به صورت زیر است: (روی محور y ها $x=0$ می‌باشد).

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_0^{+\infty} x \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = 2\pi \int \frac{x dx}{(x^2)^2 + 1} \quad \frac{x^2 = u}{2x dx = du} \rightarrow$$

$$\pi \int \frac{du}{u^2 + 1} = \pi \operatorname{Arctan}(u) = \pi (\operatorname{Arctan}(x^2)) \Big|_0^{+\infty} = \pi (\operatorname{Arctan}(+\infty) - \operatorname{Arctan}(0)) = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

۸- گزینه «۳» باید مشتق تابع را نسبت به متغیرهای x و y جداگانه مساوی صفر قرار دهیم.

$$f_x = \frac{-1}{x^2} + y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$$

$$f_y = \frac{64}{y^2} + x = 0 \xrightarrow{y = \frac{1}{x^2}} \frac{64}{(\frac{1}{x^2})^2} + x = 0 \Rightarrow 64x^4 + x = 0 \Rightarrow x(64x^3 + 1) = 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^3 = \frac{-1}{64} \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

$$x = \frac{-1}{4} \Rightarrow y = 16$$

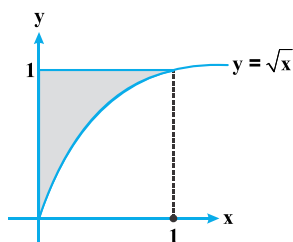
$$f_{xx} = \frac{2}{x^3} \xrightarrow{x = -\frac{1}{4}} \frac{2}{(-\frac{1}{4})^3} = -128, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = \frac{-128}{y^3} \xrightarrow{y=16} \frac{-128}{(16)^3} = \frac{-2^7}{2^{12}} = \frac{-1}{32}$$

اکنون Δ را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$\Delta = (-128) \left(\frac{-1}{32} \right) - (1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \xrightarrow{f_{xx} < 0} \text{ پس نقطه } \left(-\frac{1}{4}, 16 \right) \text{ نقطه اکسترمم از نوع ماکزیمم نسبی است.}$$

۹- گزینه «۴» با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری و با استفاده از قضیه فوبینی، جای المان‌های x و y را عوض می‌کنیم تا بتوانیم از تابع زیر انتگرال به راحتی انتگرال بگیریم.



$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} \sin(\pi y^2) dx dy = \int_0^1 \sin(\pi y^2) (x) \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 \sin(\pi y^2) dy$$

$$\xrightarrow{\pi y^2 = u} \frac{1}{3\pi} \int \sin u du = \frac{-1}{3\pi} (\cos u) = \frac{-1}{3\pi} (\cos \pi y^2) \Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{3\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{-1}{3\pi} (-1 - 1) = \frac{-1}{3\pi} (-2) = \frac{2}{3\pi}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 1$$

۱۰- گزینه «۲» ابتدا پایستار بودن میدان برداری را بررسی می‌کنیم:

پس میدان داده شده پایستار است و باید تابع پتانسیل آن را به دست آوریم.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int 2xy dx + \int z dy = (x^2 y + zy) \Big|_{(1,0,2)}^{(2,4,1)} = (36 + 4) - (0 + 0) = 40$$

سؤالات رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱- حاصل حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\cos x$ (۳) $\frac{\sin x}{x}$ (۴) $\frac{\tan x}{x}$

۲- ربع دایره $x^2 + y^2 = 9$ را در ربع اول صفحه مختصات در نظر بگیرید. مساحت حاصل از دوران این ربع دایره حول خط $x + y = 3$ چند برابر 9π است؟

- (۱) $\pi + 4$ (۲) $4 - \pi$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi + 4)$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}(4 - \pi)$

۳- طول قوس منحنی $4y^3 = 9x^2$ از نقطه $(0,0)$ تا $(2\sqrt{3}, 3)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{3}$ (۲) $\frac{14}{3}$ (۳) $\frac{16}{3}$ (۴) $\frac{17}{3}$

۴- اگر $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$ باشد، آنگاه حاصل $\iint_S (\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}) ds$ کدام است؟

- (۱) 96π (۲) 72π (۳) 48π (۴) 24π

۵- مقدار حجم قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = y$ که داخل استوانه $x^2 + y^2 = y$ قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$

۶- فرض کنید میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$ از سطح بسته مخروطی شکل S با معادله $\phi = \frac{\pi}{4}$ در مختصات کروی و صفحه $z = 2$ می‌گذرد. شار گذرا از سطح S کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{8\pi}{3}$ (۴) $\frac{8\pi}{3}$



پاسخنامه رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱- گزینه «۳» این سؤال دقیقاً مثال متن کتاب ریاضی (۱) میکرو مدرسان شریف می‌باشد.

$$\cos \frac{x}{\sqrt{k}} \cdot \sin \frac{x}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin 2\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \frac{x}{\sqrt{k-1}}$$

$$\cos \frac{x}{\sqrt{k}} \times \cos \frac{x}{\sqrt{k}} \times \cdots \times \cos \frac{x}{\sqrt{k-1}} \times \overbrace{\cos \frac{x}{\sqrt{k}} \times \sin \frac{x}{\sqrt{k}}}^{\sin \frac{x}{\sqrt{k}}} = \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{k}} \times \cos \frac{x}{\sqrt{k}} \times \cdots \times (\cos \frac{x}{\sqrt{k-1}} \sin \frac{x}{\sqrt{k-1}}) \times \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sin \frac{x}{\sqrt{k}}}$$

$$\prod_{n=1}^k \cos \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{(\sin x) \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^k}{\sin \frac{x}{\sqrt{k}}}$$

به همین شکل اگر ادامه دهیم، به اندازه‌ی k تا $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ایجاد می‌شود و در نهایت به $\sin x$ می‌رسیم، لذا داریم:

$$\prod_{n=1}^k \cos \frac{x}{\sqrt{n}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{k} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}} \quad \text{هم‌ارزی} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{k} \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)} = \frac{\sin x}{x}$$

اگر $k \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه داریم:

۲- گزینه «۴» با توجه به این که محورهای دوران یعنی خط $x+y=3$ از درون منحنی داده شده عبور نمی‌کند، می‌توانیم از روش گلدن-پاپوس استفاده کنیم. پس باید ابتدا مرکز ثقل ناحیه را به دست آوریم و با استفاده از فرمول فاصله نقطه تا خط فاصله مرکز ثقل تا محور دوران را بیابیم و آن را با d نمایش می‌دهیم. برای هر ربع دایره به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات مرکز ثقل به صورت $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{2a}{\pi}, \frac{2a}{\pi})$ می‌باشد، پس مختصات مرکز ثقل برابر است با:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{6}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right)$$

$$d = \frac{\left|\frac{6}{\pi} + \frac{6}{\pi} - 3\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|\frac{12}{\pi} - 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{12-3\pi}{\pi\sqrt{2}} = \frac{3(4-\pi)}{\pi\sqrt{2}}$$

فاصله مرکز ثقل تا خط $x+y-3=0$ برابر است با:

$$S = 2\pi dL$$

با استفاده از قضیه گلدن - پاپوس، سطح حاصل از دوران برابر است با:

$$S = 2\pi \left(\frac{3(4-\pi)}{\pi\sqrt{2}}\right) \left(\frac{3\pi}{2}\right) = 9\pi \left(\frac{4-\pi}{\sqrt{2}}\right)$$

L طول کمان یا همان طول ربع دایره است پس داریم:

۳- گزینه «۲» این سؤال دقیقاً سؤال متن کتاب ریاضی (۱) میکرو مدرسان شریف می‌باشد.

به راحتی شکل تابع را به صورت $|x| = \sqrt{\frac{4}{9}y^3}$ می‌نویسیم که با توجه به دامنه نقاط سؤال، می‌توان آن را به صورت $x = \sqrt{\frac{4}{9}y^3} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ در نظر گرفت.

حال با استفاده از رابطه طول منحنی به فرم $x = f(y)$ خواهیم داشت:

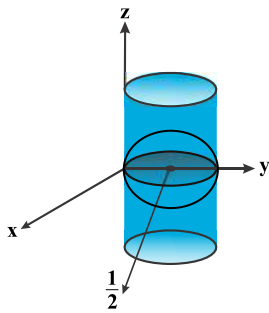
$$x' = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 + x'^2 = 1 + y \Rightarrow L = \int_0^3 \sqrt{1+(x'_y)^2} dy = \int_0^3 \sqrt{1+y} dy = \frac{2}{3} (1+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} (4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}$$

۴- گزینه «۳» با توجه به اینکه ناحیه S درون یک بیضی می‌باشد، از تغییر متغیر بیضوی برای حل انتگرال استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{x^2}{(\epsilon)^2} + \frac{y^2}{(\epsilon)^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \epsilon r \cos \theta \\ y = \epsilon r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} dx dy = \epsilon \times \epsilon \times r dr d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right) dy dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\epsilon^2 r^2 \cos^2 \theta}{9} + \frac{\epsilon^2 r^2 \sin^2 \theta}{4}\right) \times \epsilon^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \epsilon^2 r^3 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \times \epsilon^2 r dr d\theta \\ &= 9\epsilon^6 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^5}{5}\right)_0^1 d\theta = 9\epsilon^6 \times 2\pi \times \frac{1}{5} = 4\pi \end{aligned}$$



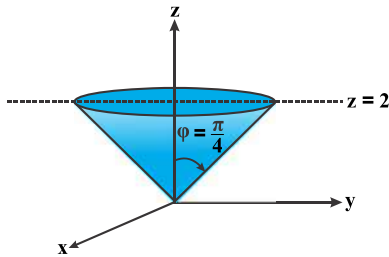
۵- گزینه «۱» اگر کره و استوانه داده شده را رسم کنیم، می بینیم که کل کره داخل استوانه قرار گرفته است و حجم قسمتی از کره که داخل استوانه قرار گرفته است، یعنی حجم کل کره.

$$\text{کره: } x^2 + y^2 - y + z^2 = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{استوانه: } x^2 + y^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \xrightarrow{r = \frac{1}{2}} V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

پس حجم کره برابر است با:



۶- گزینه «۳» با توجه به اینکه ناحیه‌ی داده شده یک ناحیه‌ی بسته می باشد، برای محاسبه شار عبوری از سطح S، از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم و داریم:

$$\text{شار} = \iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V (1 - z + 0) \, dv = - \iiint_V dv$$

اکنون با استفاده از مختصات کروی داریم:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad Z = z \Rightarrow \rho \cos \varphi = z \Rightarrow \rho = \frac{z}{\cos \varphi}$$

پس داریم:

$$\text{شار} = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{z}{\cos \varphi}} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = -(2\pi) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\rho^3}{3} \right)_{\cos \varphi}^{\frac{z}{\cos \varphi}} \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= -(2\pi) \left(\frac{1}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \, d\varphi = \frac{-16\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi (\cos \varphi)^{-3} \, d\varphi = \frac{16\pi}{3} \left(\frac{(\cos \varphi)^{-2}}{-2} \right)_{\cos \varphi}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-8\pi}{3} \left(\frac{1}{(\cos \varphi)^2} \right)_{\cos \varphi}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-8\pi}{3} (2 - 1) = \frac{-8\pi}{3}$$

روش دیگر برای محاسبه‌ی انتگرال سه گانه به دست آمده:

در واقع شار برابر با منفی حجم یک مخروط با شعاع و ارتفاع ۲ است. فرمول حجم مخروط برابر با $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ است، پس حجم این مخروط برابر با $\frac{8\pi}{3}$

است و شار گذرنده از سطح S برابر با $\frac{-8\pi}{3}$ است.



سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

سؤالات رشته‌ی MBA

۱- چنانچه $i^2 = -1$ ، حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (۳) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ (۴) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

۲- حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ مختلط $Z^2 - 4\bar{Z} + 2Z + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $2\sqrt{5}i$ (۳) $-2\sqrt{5}i$ (۴) -۶

۳- مساحت تصویر متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{OB} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ بر صفحهٔ $2x + y - 2z = 5$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$

۴- فرض کنید $f(x) = \cosh(\sinh^{-1} x)$. مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۵- برد تابع $f(x) = 2^x - \left[2^x + 4/7\right]$ کدام است؟

- (۱) $[-4/7, -4]$ (۲) $[-4/7, -3/7]$ (۳) $[-5, -3/7]$ (۴) $(-4/7, -3/7)$

۶- تعداد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{3x^3 + 5 \circ \circ x^2}{x^3 + 5 \circ \circ x^2 + 1 \circ \circ x - 2 \circ \circ \circ}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷- مجانب منحنی $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ به ازای $x > 0$ کدام است؟

- (۱) $y = 0$ (۲) $y = 1$ (۳) $y = ex$ (۴) $y = \frac{1}{e}x$

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ (۳) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ (۴) $+\infty$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) صفر (۴) $+\infty$

۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} e^{[ax]} & ; x < 1 \\ B & ; x = 1 \\ \frac{1}{x^{x-1}} & ; x > 1 \end{cases}$ پیوسته است. کدام مقدار برای انتخاب a مناسب است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2/1$ (۴) ۳

۱۱- فرض کنید تابع هزینه تولید x واحد از یک کالا به صورت $C(x) = 10000 + 5x + 0.01x^2$ باشد. هزینه نهایی هنگامی که ۵۰۰ قطعه کالا تولید می‌شود، کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۱۲- مماس‌های گذرا بر نمودار درجه سوم $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ در نقطه‌های $(-2, 6)$ و $(2, 0)$ افقی هستند. مقدار $4a + c$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۳- معادله حرکت نقطه‌ای در صفحه مختصات به صورت $\begin{cases} x = 4 \sin t - 3 \cos t \\ y = 3 \sin t + 4 \cos t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) است. مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{27}$ (۲) $\frac{27}{25}$ (۳) $-\frac{25}{27}$ (۴) $-\frac{27}{25}$

۱۴- فرض کنید $f(x) = \frac{(2x+1)^5(x^2+1)^6}{\sqrt{4x \cos x + 1}}$ مقدار $f''(0)$ کدام است؟

- (۱) ۵۲ (۲) $26\sqrt{2}$ (۳) ۲۶ (۴) صفر

۱۵- نزدیک‌ترین فاصله نقطه $(1, 4)$ از سهمی $y^2 = 2x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{15}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{5}$

۱۶- با استفاده از تقریب مرتبه اول (تقریب خطی)، مقدار تقریبی $\frac{1/0.3^2}{\sqrt{3/98} \times \sqrt[4]{1/0.2^3}}$ را محاسبه می‌کنیم، کدام عدد حاصل می‌شود؟

- (۱) $0/5027$ (۲) $0/5052$ (۳) $0/5275$ (۴) $0/5527$

۱۷- اگر $f(x, y) = \begin{cases} x \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

۱۸- معادله صفحه مماس بر هذلولی گون $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} - z^2 = -1$ در نقطه $(5, 2, 3)$ کدام است؟

- (۱) $3x + 2y - 6z - 3 = 0$ (۲) $2x - 2y - 2z + 2 = 0$ (۳) $x + y - 2z - 2 = 0$ (۴) $x + y - 3z + 1 = 0$

۱۹- اگر $u = x^2y$ و $x^2 + y^2 + 2xy = -2$ باشد، حاصل $\frac{du}{dx}$ در نقطه $(-1, 1)$ ، کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۳ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) ۳

۲۰- اگر $z = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول باشد، حاصل $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $(-1, 2)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) صفر

(۳) ۴ (۴) به مقدار مشتق تابع ϕ در نقطه $(-1, 2)$ بستگی دارد.

۲۱- درخصوص نقاط بحرانی غیرواقع بر محورهای مختصات تابع با ضابطه $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$ ، کدام مورد درست است؟

- (۱) تابع دو نقطه مینیمم موضعی و دو نقطه زینی دارد. (۲) تابع دو نقطه ماکزیمم موضعی و دو نقطه زینی دارد. (۳) تابع چهار نقطه ماکزیمم موضعی دارد. (۴) تابع چهار نقطه مینیمم موضعی دارد.

۲۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5}$ کدام است؟

- (۱) $0/2$ (۲) $0/5$ (۳) ۱ (۴) ۲



🔗 ۲۳- اگر $A = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

- (۱) $A \leq 1$ (۲) $A \leq 1/25$ (۳) $A \geq 1/5$ (۴) $A \geq 1/75$

🔗 ۲۴- اگر به ازای تابع پیوسته f ، تساوی $\int_0^x f(t)dt = x \sin x + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$ برقرار باشد، آنگاه مقدار $f(\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\pi + \frac{1}{\pi}$ (۲) $\pi - \frac{1}{\pi}$ (۳) $\frac{1}{\pi} - \pi$ (۴) $-(\pi + \frac{1}{\pi})$

🔗 ۲۵- خط قائم بر سهمی $x^2 = 2y$ را چنان رسم می‌کنیم که مساحت ناحیه محصور به سهمی و خط قائم، کمترین مقدار باشد. طول پاره خط ایجاد شده درون سهمی، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) ۸

🔗 ۲۶- اگر $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sqrt{2}e^t)$ یک منحنی در فضا باشد، آنگاه بردار یکه مماسی بر منحنی در $t = \frac{\pi}{3}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, \sqrt{2})$ (۲) $\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ (۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$

🔗 ۲۷- حاصل $\iint_D \frac{x-y}{\sqrt{x+y}} dx dy$ که در آن D ناحیه درون ربع دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به ازای $x \geq 0$ و $y \geq 0$ است، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) a (۳) a^2 (۴) $-a^2$

🔗 ۲۸- حجم ناحیه محدود به صفحه $z + 2x = 8$ و سهمی گون $z = x^2 + y^2$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}\pi$ (۲) 8π (۳) $\frac{81}{2}\pi$ (۴) 23π

🔗 ۲۹- اگر منحنی جهت دار C با ضابطه $9x^2 + y^2 = 9$ پادساعتگرد باشد، مقدار $\oint_C (y + y \sin^2 y) dx + (y^2 + xy \sin 2y + x \sin^2 y) dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) 3π

🔗 ۳۰- فرض کنید D ناحیه ربع دایره‌ای شکل به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ واقع در ربع اول باشد. اگر $\iint_D xy(x^2 + y^2)^{\frac{a}{2}} dx dy = 3/2$ ، آنگاه مقدار

a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{4}$

۱- گزینه «۳» ابتدا اعداد مختلط داده شده را به حالت قطبی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{3+1} = 2 \\ \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad \begin{cases} r_2 = \sqrt{3+1} = 2 \\ \operatorname{tg} \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\left(\frac{re^{\frac{i\pi}{6}}}{re^{-\frac{i\pi}{6}}} \right)^{10} = (e^{\frac{i\pi}{3}})^{10} = e^{\frac{i10\pi}{3}} = \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

۲- گزینه «۱» با توجه به این که $z = x + iy$ و مزدوج آن $\bar{z} = x - iy$ می‌باشد، داریم:

$$z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$(x - iy)^2 - 4(x - iy) + 2(x + iy) + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + i^2 y^2 - 2xyi - 4x + 4yi + 2x + 2yi + 2 = 0$$

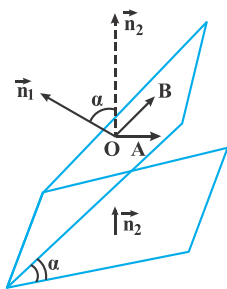
$$x^2 - y^2 - 2x + 2 + i(6y - 2xy) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6y - 2xy = 0 \Rightarrow 6y = 2xy \xrightarrow{y \neq 0} x = 3 \\ 9 - y^2 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

پس ریشه‌های معادله $z = 3 \pm i\sqrt{5}$ است و لذا مجموع آن‌ها برابر ۶ می‌باشد.

۳- گزینه «۱» با توجه به این که اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ برابر مساحت ساخته شده توسط دو بردار است، باید حاصل ضرب خارجی دو بردار را بیابیم و داریم:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$S = |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$$



$\vec{n}_2 = (1, -4, -3) \rightarrow \vec{OA}, \vec{OB}$ بردار نرمال صفحه شامل

$\vec{n}_1 = (2, 1, -2) \rightarrow$ بردار نرمال صفحه مفروض

اکنون با توجه به این که مساحت تصویر برابر است با مساحت ساخته شده توسط دو بردار در کسینوس زاویه بین بردارهای نرمال دو صفحه، باید ابتدا $\cos \alpha$ را از رابطه زیر بیابیم.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2 - 4 + 6}{3\sqrt{26}} = \frac{4}{3\sqrt{26}}$$

$$\cos \alpha \times \text{مساحت ساخته شده توسط دو بردار} = \text{مساحت تصویر} \Rightarrow S' = S \times \cos \alpha$$

$$S' = \sqrt{26} \times \frac{4}{3\sqrt{26}} = \frac{4}{3}$$

$$\sinh^{-1}(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$$

۴- گزینه «۳» با توجه به این که $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ می‌باشد، داریم:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\cosh(\ln(1 + \sqrt{2})) = \frac{e^{\ln(1 + \sqrt{2})} + e^{-\ln(1 + \sqrt{2})}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2(1 + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{1 - 2} = \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}$$

۵- گزینه «۲» $\frac{4}{7}$ را به عبارت کم و زیاد می‌کنیم.

$$y = 2^x + \frac{4}{7} - \frac{4}{7} - [2^x + \frac{4}{7}] \Rightarrow y = \underbrace{2^x + \frac{4}{7}}_u - [2^x + \frac{4}{7}] - \frac{4}{7} \Rightarrow y = u - [u] - \frac{4}{7}$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \Rightarrow -\frac{4}{7} \leq u - [u] - \frac{4}{7} < -\frac{3}{7} \Rightarrow R_f = [-\frac{4}{7}, -\frac{3}{7})$$

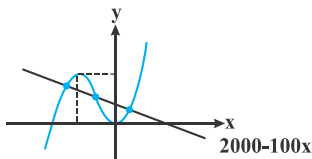
۶- گزینه «۳» برای به‌دست آوردن مجانب افقی تابع باید حد تابع را در بی‌نهایت به‌دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$$

برای به‌دست آوردن مجانب قائم باید ریشه‌های مخرج را بیابیم و اگر به‌زای این ریشه‌ها تابع $f(x)$ به سمت بی‌نهایت میل کند، آن ریشه‌ها مجانب قائم منحنی هستند.

$$x^3 + 500x^2 + 1000x - 2000 = 0$$

برای پیدا کردن تعداد ریشه‌های این معادله، آن را به‌صورت $x^3 + 500x^2 = 2000 - 1000x$ می‌نویسیم و دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و به تعداد نقاط برخورد دو تابع معادله درجه سوم مخرج ریشه خواهد داشت که همان مجانب‌های قائم تابع می‌باشند.



$$g: x^3 + 500x^2 \Rightarrow g': 3x^2 + 1000x = 0 \Rightarrow x(3x + 1000) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow g = 0 \\ x = -\frac{1000}{3} \approx -333 \Rightarrow y \approx 18/000 \end{cases}$$

۷- گزینه «۴» با استفاده از رابطه $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ شیب مجانب مایل، تابع داده شده را به‌دست می‌آوریم.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = (1)^\infty \Rightarrow e^{\left(\frac{x}{1+x}-1\right) \times x} = e^{\frac{x-1-x}{x} \times x} = \frac{1}{e}$$

پس مجانب منحنی $y = \frac{1}{e}x$ می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0$$

۸- گزینه «۱» با استفاده از هم‌ارزی $\ln(1+u) \sim u$ داریم:

۹- گزینه «۲» حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و با هسپیتال آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{4x+5}{-1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 16$$

$$0 - \frac{2\sqrt{3-x}}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}} = \frac{4}{4} = \frac{1}{16}$$

۱۰- گزینه «۲»

$$f(1) = B, \quad f(1^-) = e^{[a(1^-)]}$$

$$f(1^+) = (1)^\infty \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} e^{(x-1) \times \frac{1}{x-1}} = e^1 = e$$

برای پیوسته بودن باید $f(1^-) = e$ باشد. پس باید توان e در $f(1^-)$ برابر ۱ شود. بنابراین باید $a = 2$ را انتخاب کنیم.

$$f(1^-) = e^{[2(1^-)]} = e^{[2^-]} = e^1 = e$$

$$c'(x) = 5 + 2\left(\frac{1}{100}\right)x \Rightarrow c'(\frac{1}{100}) = 5 + 2\left(\frac{1}{100}\right)\frac{1}{100} = 5 + 10 = 15$$

۱۱- گزینه «۱» فقط کافی است از تابع هزینه، مشتق بگیریم:

۱۲- گزینه «۱» نقطه وسط دو نقطه اکسترمم، دقیقاً نقطه عطف تابع درجه سوم می‌باشد و داریم:

$$(2, 0), (-2, 6) \rightarrow M(0, 3)$$

$$(0, 3) \in f(x) \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y'' = 6ax + 2b = 0 \xrightarrow{x=0} b = 0$$

$$f(x) = ax^3 + cx + 3 \xrightarrow{(2,0) \in f} 8a + 2c + 3 = 0 \Rightarrow 4a + c = -\frac{3}{2}$$

۱۳- گزینه «۳» با استفاده از مشتق توابع پارامتری داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos t - 4 \sin t}{4 \cos t + 3 \sin t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left(\frac{3 \cos t - 4 \sin t}{4 \cos t + 3 \sin t} \right)}{dt}$$

$$= \frac{(-3 \sin t - 4 \cos t)(4 \cos t + 3 \sin t) - (-4 \sin t + 3 \cos t)(3 \cos t - 4 \sin t)}{(4 \cos t + 3 \sin t)^2} \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \frac{(-3)(3) - (-4)(-4)}{3^2} = \frac{-9 - 16}{27} = -\frac{25}{27}$$

۱۴- گزینه «۱» با توجه به شکل ظاهری تابع از دو طرف تساوی Ln می‌گیریم و سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم.

$$y(0) = 1$$

$$\text{Ln} y = \Delta \text{Ln}(2x+1) + 6 \text{Ln}(x^2+1) - \frac{1}{2} \text{Ln}(4x \cos x + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} + 6 \left(\frac{2x}{x^2+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4 \cos x - 4x \sin x}{4x \cos x + 1} \right)$$

$$x=0 \rightarrow \frac{y'}{y} = 2 + 0 - \left(\frac{4}{2} \right) = 0$$

اکنون مشتق دوم تابع را می‌گیریم و قرار می‌دهیم $x=0$ (در قسمت دوم سمت راست تساوی به‌ازای $x=0$ مشتق دوم صفر می‌شود) و داریم:

$$\frac{y''y - y'y'}{y^2} = \frac{-2}{(2x+1)^2} + 0 - \frac{1}{2} \left(\frac{(-4 \sin x - 4 \cos x - 4x \cos x)(4x \cos x + 1) - (4 \cos x - 4x \sin x)(4 \cos x - 4x \sin x)}{(4x \cos x + 1)^2} \right)$$

$$y=1, y'=0 \Rightarrow \frac{y''-0}{1} = -2+0 \Rightarrow y'' = -2+0 = -2$$

۱۵- گزینه «۴» فاصله نقطه تا منحنی را می‌نویسیم:

$$y^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2 + (y-4)^2}$$

$$\text{مشتق} = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{y^2}{2}-1\right)y + 2(y-4) = 0 \Rightarrow y^3 - 2y + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$d_{(\min)} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



۱۶- گزینه «۳» یک تابع سه متغیره داریم و با استفاده از فرمول تقریب خطی برای توابع چندمتغیره داریم:

$$f = \frac{x^2}{\sqrt{y} \sqrt[3]{z}}$$

$$\begin{cases} x = 1/03 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = \frac{3}{100} \\ y = 3/98 \Rightarrow y_0 = 4, \Delta y = -\frac{2}{100} \\ z = 1/02 \Rightarrow z_0 = 1, \Delta z = \frac{2}{100} \end{cases}, \quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

$$f = \frac{x^2}{\sqrt{y} \sqrt[3]{z}} = x^2 (y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{3}})^{-1} = x^2 y^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{(1,4,1)} 2 \times \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} x^2 y^{-\frac{3}{2}} z^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{(1,4,1)} -\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{3} x^2 y^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{4}{3}} \xrightarrow{(1,4,1)} -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{مقدار تقریبی} \approx \frac{1}{\sqrt{4}} + 1 \times \left(\frac{3}{100}\right) - \frac{1}{16} \left(-\frac{2}{100}\right) - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{100} + \frac{1}{800} - \frac{1}{300} = \frac{1}{2} + \frac{3}{100} - \frac{2}{300} = 0/5 + 0/03 - 0/0025 = 0/5275$$

۱۷- گزینه «۳»

$$f(x, y) = x \frac{y^3 - x^3}{x^3 + y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^0 - h^3}{h^3 + 0} = -\frac{h^3}{h^3} = -1$$

با استفاده از تعریف مشتق جزئی داریم:

۱۸- گزینه «۴» معادله صفحه مماس بر رویه $f(x, y, z) = 0$ در نقطه (x_0, y_0, z_0) برابر است با: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ که بردار

(a, b, c) برابر بردار گرادیان رویه در این نقطه است. پس داریم:

$$f: \frac{x^2}{\Delta} + \frac{y^2}{3} - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = \frac{2x}{\Delta} \xrightarrow{x=\Delta} a = 2 \\ f_y = \frac{2y}{3} \xrightarrow{y=3} b = 2 \\ f_z = -2z \xrightarrow{z=3} c = -6 \end{cases}$$

$$2(x - \Delta) + 2(y - 3) - 6(z - 3) = 0 \xrightarrow{\div 2} x - \Delta + y - 3 - 3z + 9 = 0 \Rightarrow x + y - 3z + 1 = 0$$

پس معادله صفحه برابر است با:

۱۹- گزینه «۱» با توجه به اینکه سه متغیر x, y, u و دو رابطه داریم و سؤال $\frac{du}{dx}$ را از ما می‌خواهد، پس x مستقل و u و y تابع می‌باشند.

$$F: u - x^2 y = 0, \quad G: x^2 + y^2 + 2xy + 2 = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -2xy & -x^2 \\ 2x^2 + 2y & 2y^2 + 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -x^2 \\ 0 & 2y^2 + 2x \end{vmatrix}} \xrightarrow{(-1, 1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \Delta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\left(\frac{2 + \Delta}{1 - 0}\right) = -7$$

۲۰- گزینه «۱» با توجه به این که φ تابعی بر حسب دو متغیر x و y می باشد و مشتق تابع Z را بر حسب هر دو متغیر x و y می خواهیم بیابیم، باید از مشتق توابع زنجیره ای استفاده کنیم و در رابطه خواسته شده جایگذاری کنیم.

$$x' \left(\frac{-2y^2}{x^3} + y\varphi'(xy) \right) - x' y \left(\frac{2y}{x^3} + x\varphi'(xy) \right) = -\frac{y^2}{x^3} + x^2 y\varphi'(xy) - \frac{2y^2}{x^3} - x^2 y\varphi'(xy) = \frac{-y^2}{x^3} - \frac{2y^2}{x^3} = -y^2 \xrightarrow{(-1,2)} -4$$

۲۱- گزینه «۴» ابتدا باید مشتق $f(x, y)$ را نسبت به متغیرهای x و y جداگانه مساوی صفر قرار دهیم تا طول و عرض نقطه بحرانی به دست بیاید.

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$z_x = 2x - \frac{2xy^2}{(x^2 y^2)^2} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{2xy^2}{x^4 y^4} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{2}{x^3 y^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2}{x^3 y^2} \Rightarrow x^4 y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^4}$$

$$z_y = 2y - \frac{2x^2 y}{x^4 y^4} = 0 \Rightarrow 2y = \frac{2}{x^2 y^3} \Rightarrow x^2 y^4 = 1 \xrightarrow{y^2 = \frac{1}{x^4}} x^2 \times \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1$$

$$z_{xx} = 2 - \left(\frac{-6x^2 y^2}{x^6 y^4} \right) = 2 + \frac{6}{x^4 y^2}, \quad z_{yy} = 2 - \left(\frac{-6x^2 y^2}{x^4 y^6} \right) = 2 + \frac{6}{x^2 y^4}, \quad z_{xy} = 0 - \left(\frac{-4x^2 y}{x^6 y^4} \right) = \frac{4}{x^4 y^3}$$

$$\Delta = z_{xx} z_{yy} - (z_{xy})^2$$

$$(1, 1) \Rightarrow \Delta = 8 \times 8 - (4)^2 = 64 - 16 > 0 \xrightarrow{z_{xx} > 0} \text{min نسبی}$$

$$(-1, 1) \Rightarrow \Delta = 8 \times 8 - (4)^2 = 64 - 16 > 0 \xrightarrow{z_{xx} > 0} \text{min نسبی}$$

$$(1, -1) \Rightarrow \Delta = 8 \times 8 - (4)^2 = 64 - 16 > 0 \xrightarrow{z_{xx} > 0} \text{min نسبی}$$

$$(-1, -1) \Rightarrow \Delta = 8 \times 8 - (4)^2 = 64 - 16 > 0 \xrightarrow{z_{xx} > 0} \text{min نسبی}$$

پس تابع ۴ نقطه مینیمم موضعی دارد.

۲۲- گزینه «۱» با استفاده از رابطه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} = 0.2$$

۲۳- گزینه «۲» با توجه به این که حدود x را داریم از روی حدود x ، تابع $f(x)$ را می سازیم.

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < x^2 + 1 < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt{x^2 + 1} < \sqrt{2} \Rightarrow \int_0^1 dx < \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx < \int_0^1 \sqrt{2} dx$$

$$(x)_0^1 < A < (\sqrt{2}(x))_0^1 \Rightarrow 1 < A < \sqrt{2}$$

۲۴- گزینه «۴»

$$\int_0^x f(t) dt = x \sin x + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

$$f(x) = \sin x + x \cos x + \frac{f(x)}{1+x^2}$$

از دو طرف تساوی مشتق می گیریم:

اکنون $x = \pi$ را قرار می دهیم:

$$f(\pi) = \underbrace{\sin \pi}_0 + \underbrace{\pi \cos \pi}_{-\pi} + \frac{f(\pi)}{1+\pi^2} \Rightarrow f(\pi) = -\pi + \frac{f(\pi)}{1+\pi^2}$$

$$f(\pi) - \frac{f(\pi)}{1+\pi^2} = -\pi \Rightarrow f(\pi) \left(1 - \frac{1}{1+\pi^2}\right) = -\pi \Rightarrow f(\pi) \left(\frac{1+\pi^2-1}{1+\pi^2}\right) = -\pi \Rightarrow f(\pi) = \frac{-\pi(1+\pi^2)}{\pi^2} \Rightarrow f(\pi) = \frac{-1-\pi^2}{\pi} = -\left(\frac{1}{\pi} + \pi\right)$$

۲۵- گزینه «۲» یک نقطه بر روی منحنی تابع $y = \frac{x^2}{2}$ به طول α در نظر می‌گیریم و عرض این نقطه $\frac{\alpha^2}{2}$ می‌باشد. اکنون باید معادله خط قائم بر منحنی در این نقطه را به دست آوریم.

$$y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y' = x \Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{\alpha^2}{2} = -\frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Rightarrow y = -\frac{1}{\alpha}x + \frac{\alpha^2}{2} + 1$$
 معادله خط قائم:

اکنون خط قائم و منحنی را با هم قطع می‌دهیم تا طول دیگر محل تلاقی دو تابع را بیابیم.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{\alpha}x + \frac{\alpha^2}{2} + 1 \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{\alpha}x + \frac{\alpha^2}{2} + 1 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{\alpha}x - \alpha^2 - 2 = 0$$

یک ریشه $x_A = \alpha$ است. پس داریم:

$$x^2 + \frac{2}{\alpha}x - \alpha^2 - 2 \mid x - \alpha \Rightarrow x_B = -\alpha - \frac{2}{\alpha}$$

اکنون باید مساحت بین منحنی و خط قائم را بیابیم و آن را مینیمم کنیم:

$$S = \int_{-\alpha - \frac{2}{\alpha}}^{\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha}x + \frac{\alpha^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(-\frac{1}{2\alpha}x^2 + \frac{\alpha^2}{2}x + x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-\alpha - \frac{2}{\alpha}}^{\alpha}$$

$$= -\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{2} + \alpha - \frac{\alpha^3}{6} - \left(\frac{-(-\alpha - \frac{2}{\alpha})^3}{6} + \frac{\alpha^2}{2}(-\alpha - \frac{2}{\alpha}) + (-\alpha - \frac{2}{\alpha}) - \frac{(-\alpha - \frac{2}{\alpha})^3}{6} \right) = \frac{5}{6}\alpha^3 + \frac{2}{\alpha^3} + 3\alpha + \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{6}(\alpha + \frac{2}{\alpha})^3$$

اکنون باید مشتق مساحت نسبت به α را مساوی صفر قرار دهیم.

$$S'_\alpha = \frac{5}{2}\alpha^2 - \frac{6}{\alpha^4} + 3 - \frac{4}{\alpha^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right)\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \alpha^6 + \alpha^4 - \alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^4(\alpha^2 + 1) - (\alpha^2 + 1) = 0 \Rightarrow (\alpha^2 + 1)(\alpha^4 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^4 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = +1 \rightarrow \text{قابل قبول} \rightarrow A(1, \frac{1}{2}), B(-3, \frac{9}{2}) \\ \alpha = -1 \times \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

۲۶- گزینه «۲» با استفاده از رابطه بردار یک مماس که به صورت زیر می‌باشد، داریم:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sqrt{2}e^t)$$

$$\vec{r}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, \sqrt{2}e^t)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + 2e^{2t}} = \sqrt{e^{2t} + e^{2t} + 2e^{2t}} = \sqrt{4e^{2t}} = 2e^t$$

$$\vec{T} = \left(\frac{\cos t - \sin t}{2}, \frac{\sin t + \cos t}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \xrightarrow{t = \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} + 1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{4}, \frac{1 + \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

۲۷- گزینه «۱» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: با استفاده از مختصات قطبی در انتگرال دوگانه داریم: $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{r \cos \theta - r \sin \theta}{\sqrt{r \cos \theta + r \sin \theta}} \times r dr d\theta \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^{\frac{3}{2}} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta + \sin \theta}} dr d\theta \xrightarrow{(\cos \theta + \sin \theta) d\theta = du} \frac{2}{5} (r^{\frac{5}{2}})_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{2}{5} \times \sqrt{a^5} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u} du = \frac{2}{5} \times a^{\frac{5}{2}} \sqrt{a} \times \frac{2}{3} \sqrt{u} = \frac{4}{15} a^{\frac{5}{2}} \sqrt{a} \sqrt{(\cos \theta + \sin \theta)^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{15} a^{\frac{5}{2}} \sqrt{a} \times (1-1) = 0$$

روش دوم: با توجه به این که ناحیه انتگرال گیری یعنی $x^2 + y^2 = a^2$ نسبت به x و y متقارن است، پس می‌توانیم در تابع زیر انتگرال جای x و y را عوض کنیم و حاصل انتگرال تغییری نکند. پس داریم:

$$\begin{cases} I = \iint_D \frac{x-y}{\sqrt{x+y}} dx dy \\ I = \iint_D \frac{y-x}{\sqrt{y+x}} dx dy \end{cases} \Rightarrow I + I = \iint_D \frac{x-y+y-x}{\sqrt{x+y}} dx dy \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

پس حاصل انتگرال خواسته شده برابر صفر است.

۲۸- گزینه «۳» ابتدا تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} z = \lambda - 2x \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \lambda - 2x \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - \lambda = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = \lambda + 1$$

معادله دایره به مرکز $(-1, 0)$ و شعاع ۳ می‌باشد. با استفاده از تغییر متغیر زیر داریم:

$$\begin{cases} x+1 = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$V = \iint (z_2 - z_1) dy dx \Rightarrow V = \iint (\lambda - (x+1)^2 - y^2) dy dx \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \int_0^{2\pi} \int_0^3 (\lambda - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 [\lambda r - r^3 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] dr d\theta = (2\pi) \left(\frac{\lambda}{2} r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^3 = 2\pi \left(\frac{\lambda}{2} \times 9 - \frac{81}{4} \right) = 2\pi \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{9}{4} \right) = \frac{\lambda - 9}{2} \pi$$

۲۹- گزینه «۴»

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \text{مسیر } C \text{ معادله بیضی است}$$

مسیر بسته است و از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx \Rightarrow \iint_D (y \sin 2y + \sin^2 y) - (1 + \sin^2 y + 2y \sin y \cos y) dy dx$$

$$= \iint_D -1 \times dy dx = -\iint_D dy dx = -(\text{مساحت بیضی}) = -(\pi ab) = -(\pi \times 1 \times 3) = -3\pi$$

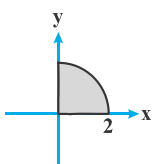
توجه مهم: اگر صورت سؤال می‌گفت ساعتگرد، جواب درست گزینه (۴) بود.

۳۰- گزینه «۲» با مختصات قطبی داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{a}{r}} (r \cos \theta)(r \sin \theta)(r^{\frac{a}{r}}) r dr d\theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{a}{r}} r^{\frac{a}{r}} \times r^a \sin \theta \cos \theta dr d\theta = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^{\frac{a}{r}+a}) dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{r^{\frac{a}{r}+a}}{\frac{a}{r}+a} \right) \Big|_0^{\frac{a}{r}} \times \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{r^{\frac{a}{r}+a}}{\frac{a}{r}+a} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow r^{\frac{a}{r}+a} = 6 / 4 \times (a+r) \Rightarrow a = 1$$





سؤالات رشته‌ی عمران و نقشه‌برداری

برای رشته مهندسی نقشه‌برداری مجموعاً ۱۵ سؤال ریاضی عمومی طرح شده بود که سؤالات ۱ تا ۱۰ مشترک با رشته عمران می‌باشد.

۱- در تابع $f(x, y) = 3x^2y^2 + 6xy^2 - 4y^3 + 18y$ ، نقطه $(-1, -\frac{3}{4})$ چه نقطه‌ای است؟

- (۱) ماکزیمم است. (۲) مینیمم است. (۳) نقطه زینی است. (۴) نقطه بحرانی نیست.

۲- فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, x) - f(x, -x)}{x} = 2$ ، در این صورت $f_y(0, 0)$ ، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۳- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y}} \sqrt{1-x^2} dx dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{20}$ (۳) $\frac{1}{15}$ (۴) $\frac{2}{15}$

۴- مقدار $\int_1^2 e^{x^2} dx + \int_e^e \sqrt{\ln x} dx$ ، کدام است؟

- (۱) $2e^4 - e$ (۲) $4e^4 + e$ (۳) $4e^4 - e$ (۴) $2e^4 + e$

۵- بین n و m کدام رابطه برقرار باشد تا $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{x^n} dx$ همگرا باشد؟

- (۱) $n < m$ (۲) $m < n+1$ (۳) $n < m+1$ (۴) $m < n$

۶- در بسط مک‌لورن تابع $f(x) = (2+x^2)^{\frac{5}{2}}$ ، ضریب x^4 کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ (۲) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$ (۳) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{15\sqrt{2}}{4}$

۷- اندازه مشتق سویی تابع $W = x^2y - yz + 2z$ در نقطه $(1, -2, 0)$ در امتداد بردار $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۸- اگر $h(x) = e^{xf(2x)}$ ، مقدار $h'(1)$ با توجه به جدول زیر کدام است؟

x	f(x)	f'(x)
۱	۱۰	۱
۲	۸	۴

- (۱) $16e^8$ (۲) $8e^8$

- (۳) $10e^8$ (۴) $12e^8$

۹- تعداد جواب‌های معادله $z^2 + 4\bar{z} - 2 = 0$ در مجموعه اعداد مختلط کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۰- حاصل $\oint_C 3y dx + 2x dy$ هنگامی که C قوسی از سهمی $y = x^2$ از مبدأ به نقطه $A(1, 1)$ و پاره‌خط واصل نقطه A تا مبدأ مختصات باشد، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۱۱- تعداد جواب‌های معادله $\frac{z^2-1}{z\bar{z}} = 1$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} (\cos x + ax^2) = A$ و A عددی کراندار باشد، مقدار $a + A$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۳- اگر $z = x^n e^{\frac{y^2}{x}}$ باشد، برای کدام مقدار n ، تساوی $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} (-y^2 \frac{\partial}{\partial y})$ برقرار است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۱۴- اگر $y > 0$ و $x^2 - xy + y^2 = 1$ باشد، مقدار $y''(0)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۵- فرض کنید S سطح بیرونی مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) باشد. مقدار $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 4π (۴) صفر

باسخنامه رشته‌ی عمران و نقشه‌برداری

۱- گزینه «۲» ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا نقطه داده شده بحرانی است یا خیر:

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 6xy^2 - 4y^3 + 18y$$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= 6xy^2 + 6y^2 \\ f_y &= 6x^2y + 12xy - 12y^2 + 18 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-1, -\frac{3}{2})} \begin{cases} f_x = 6xy^2 + 6y^2 = -6(\frac{9}{4}) + 6(\frac{9}{4}) = 0 \checkmark \\ f_y = 6(-\frac{3}{2}) - 12(-\frac{3}{2}) - 12(\frac{9}{4}) + 18 = 0 \checkmark \end{cases}$$

پس نقطه داده شده بحرانی است. حالا مبین دلتا را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f_{xx} &= 6y^2 \\ f_{yy} &= 6x^2 + 12x - 24y \\ f_{xy} &= 12xy + 12y \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-1, -\frac{3}{2})} \Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = [6(\frac{9}{4})][6 - 12 - 24(-\frac{3}{2})] - [-12(-\frac{3}{2}) + 12(-\frac{3}{2})]^2 = \frac{27}{4} \times 30 > 0$$

پس نقطه مورد نظر مینیمم است.

۲- گزینه «۳» حد داده شده، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و با توجه به این که تابع دو متغیره $f(x, y)$ در عامل اول صورت کسر داده شده $f(x, x)$ و در عامل دوم

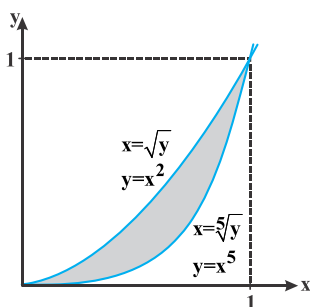
$f(x, -x)$ می‌باشد، پس در عامل اول $y = x$ و در عامل دوم $y = -x$ می‌باشد و داریم:

$$f_y(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \times f_y(x, x) - (-1)f_y(x, -x)}{1} = 2$$

$$\Rightarrow f_y(0, 0) + f_y(0, 0) = 2 \Rightarrow 2f_y(0, 0) = 2 \Rightarrow f_y(0, 0) = 1$$

۳- گزینه «۴» با توجه به این که تابع زیر انتگرال فقط تابعی از متغیر x است و به این صورت قابل حل نیست، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرده و با توجه

به شکل ناحیه انتگرال‌گیری داریم:



$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{\sqrt[5]{y}}^{\sqrt{y}} \sqrt{1-x^2} dx dy = \int_0^1 \int_{x^5}^{x^2} \sqrt{1-x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^5) \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^2(1-x^3) \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 x^2(1-x^3)^{\frac{2}{3}} dx = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} (1-x^3)^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = -\frac{2}{15} (0-1) = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

۴- گزینه «۱» برای حل این انتگرال، از یک نکته خیلی ساده کمک می‌گیریم. اینکه اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و اکیداً یکنوا باشد و $f(a) = \alpha$ و

$f(b) = \beta$ ، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = b\beta - a\alpha$$

در این سوال با فرض $f(x) = e^{x^2}$ داریم:

$$y = e^{x^2} > 0 \Rightarrow \ln y = x^2 \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{\ln y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$2e^f - e$$

بنابراین از رابطه بالا حاصل عبارت موجود در سؤال برابر است با:

۵- گزینه «۳» انتگرال مورد نظر در $x = 0$ ناسره است. در این نقطه با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{x^n} dx \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^m}{x^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{n-m}}$$

می‌دانیم انتگرال فوق به ازای $n - m < 1$ همگراست یعنی $n < m + 1$

۶- گزینه «۲» برای نوشتن بسط مک‌لورن این تابع، ابتدا آن را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = 2^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$$

حالا با کمک بسط مک‌لورن داریم:

$$f(x) = 2^{\frac{5}{2}} \left[1 + \frac{5}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{5}{2} \times \frac{3}{2}}{2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots\right] = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \left(\frac{5}{4} x^2\right) + 4\sqrt{2} \left(\frac{15}{8} \times \frac{x^4}{4}\right) + \dots \Rightarrow 4\sqrt{2} \left(\frac{15}{8} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

۷- گزینه «۳» با کمک گرادیان تابع مورد نظر در نقطه مورد اشاره و همچنین رابطه مشتق سوئی داریم:

$$w = f(x, y, z) = x^2 y - yz + 2z$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (2xy, x^2 - z, -y + 2) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1, -2, 0) = (-4, 1, 4)$$

$$D_{\vec{u}} f(x, y, z) = \vec{\nabla} f(1, -2, 0) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (-4, 1, 4) \cdot \frac{(2, -1, 2)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{-8-1+8}{3} = -\frac{1}{3}$$

همان گونه که ملاحظه می‌کنید پاسخ صحیح گزینه (۳) است اما سازمان سنجش گزینه (۴) را صحیح اعلام کرده است!

۸- گزینه «۱» به سادگی با کمک رابطه مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$h(x) = e^{xf(2x)} \Rightarrow h'(x) = [f(2x) + 2xf'(2x)]e^{xf(2x)} \Rightarrow h'(1) = [f(2) + 2f'(2)]e^{f(2)} = (8+8)e^8 = 16e^8$$

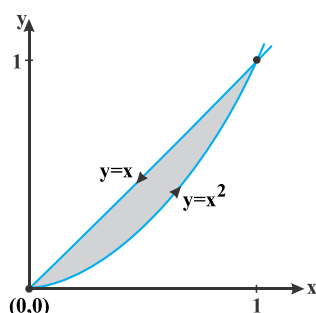
۹- گزینه «۲» برای حل این معادله با استفاده از فرم دکارتی اعداد مختلط داریم:

$$z = x + iy$$

$$z^2 + 4\bar{z} - 2 = (x^2 - y^2 - 2) + i(2xy) + 4(x - iy) - 2 = (x^2 + 4x - y^2 - 2) + i(2x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - y^2 - 2 = 0 \\ y(2x - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{6} \\ x = 2 \\ 4 + 4 - y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

پس در کل ۴ نقطه داریم.



۱۰- گزینه «۳» تابع برداری زیر انتگرال همواره مشتق‌پذیر است. از طرفی با توجه به شکل واضح است که ناحیه بسته است. در نتیجه به راحتی با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$I = \oint_C 2y dx + 2x dy = \iint_D (2 - 2) dA = - \iint_D dA$$

$$= - \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = - \int_0^1 (x - x^2) dx = - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = - \frac{1}{6}$$

۱۱- گزینه «۴» با تبدیل $z = x + iy$ داریم:

$$\frac{z^r - 1}{z\bar{z}} = 1 \Rightarrow \frac{(x+iy)^r - 1}{(x+iy)(x-iy)} = 1 \Rightarrow (x^r - y^r - 1) + i2xy = x^r + y^r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^r - y^r - 1 = x^r + y^r \Rightarrow 2y^r = -1 \rightarrow \\ xy = 0 \end{cases}$$

۱۲- گزینه «۱» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است. در نتیجه کافیت به صورت زیر عمل کنیم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + ax^r)^{\frac{1}{x - \sin x}} = 1^\infty \Rightarrow A = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} (\cos x + ax^r - 1)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} (\cos x + ax^r - 1) \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - (x - \frac{x^3}{3!})} (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ax^r - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ax^r)}{\frac{x^3}{3!}}$$

برای اینکه حد فوق کراندار باشد، باید ضریب x^2 در صورت برابر صفر باشد. در نتیجه باید $a = \frac{1}{2}$ باشد و خواهیم داشت:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{2}x^r)}{\frac{x^3}{3!}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{3!}{2}} = 0 \Rightarrow A = e^L = 1 \Rightarrow a + A = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

۱۳- گزینه «۴» با استفاده از مشتق جزئی طرفین معادله داده شده را تشکیل داده و بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^n \frac{ry}{x} e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow -y^r \frac{\partial z}{\partial y} = -x^{n-1} ry^r e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} e^{\frac{y}{x}} - x^{n-r} y^r e^{\frac{y}{x}} = x^{n-r} e^{\frac{y}{x}} (nx - y^r)$$

حالا تساوی صورت سؤال را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{ry^r} \frac{\partial}{\partial y} (-y^r \frac{\partial z}{\partial y}) = -\frac{x^{n-1}}{ry^r} (\lambda y^r e^{\frac{y}{x}} + \frac{ry^r}{x} e^{\frac{y}{x}}) = x^{n-r} e^{\frac{y}{x}} (-rx - y^r)$$

$$\frac{1}{ry^r} \frac{\partial}{\partial y} (-y^r \frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow n = -r$$

۱۴- گزینه «۲»

$$0 = 0 + y^r(0) = 1 \Rightarrow y(0) = \pm 1 \xrightarrow{y>0} y(0) = 1$$

با جایگذاری $x = 0$ مقدار $y(0)$ به دست می‌آید:

$$rx - y - xy' + ryy' = 0$$

از معادله مشتق می‌گیریم:

$$0 = y(0) - 0 + ry(0)y'(0) = 0 \xrightarrow{y(0)=1} y'(0) = \frac{1}{r}$$

جایگذاری $x = 0$:

$$r - y' - y''x - y' + r(y')^r + ryy'' = 0$$

مجدداً از معادله مشتق می‌گیریم:

$$r - \frac{1}{r} - 0 - \frac{1}{r} + r(\frac{1}{r})^r + r(1)y'' = 0 \Rightarrow y''(0) = \frac{-r}{r}$$

جایگذاری $x = 0$:

۱۵- گزینه «۴» برای میدان برداری $\vec{F} = (P, Q, R)$ داریم:

$$I = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

پس در این مثال $P = y - z$ و $Q = z - x$ و $R = x - y$ می باشد.

با توجه به این که سطح داده شده فقط شامل بدنه‌ی مخروط است، بنابراین ناحیه داده شده یک ناحیه بسته نیست.

اگر بخشی از صفحه $z = h$ که با مخروط تلاقی دارد را S' بنامیم و به سطح S اضافه کنیم، $S \cup S'$ یک ناحیه‌ی بسته می شود و می توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم و در انتها انتگرال روی S' را از انتگرال روی $S \cup S'$ کم کنیم. پس داریم:

$$\iint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint \text{div} \vec{F} dv = \iiint (0 + 0 + 0) dv = 0$$

اکنون باید انتگرال روی S را حساب کنیم.

$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$

معادله S' به صورت $z = h$ می باشد که بردار قائم یکه‌ی رو به خارج آن به صورت مقابل می باشد.

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x - y)$$

پس داریم:

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx = dy dx$$

از $z = h$ داریم:

حال داریم: (تصویر محل برخورد $z = h$ با مخروط دایره $x^2 + y^2 = h^2$ می باشد.)

$$I = \iint_D (x - y) dy dx$$

با توجه به این که ناحیه D نسبت به محورهای x و y متقارن است و تابع زیر انتگرال نیز نسبت به x و y فرد می باشد، پس حاصل این انتگرال نیز صفر است و در نتیجه حاصل انتگرال کل نیز صفر می باشد.



سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱- تعداد جواب‌های معادله $e^z = 2i$ که درون دایره $x^2 + y^2 = 25$ قرار می‌گیرند، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{e^6}$ (۲) $\frac{1}{e^6}$ (۳) $\frac{1}{e^2}$ (۴) ۱

۳- حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}$ ، $x > 0$ ، کدام است؟

- (۱) x^2 (۲) $x + \frac{1}{2}$ (۳) $x + 1$ (۴) $2x + 1$

۴- مقدار مینیمم تابع $z = x^2 + y^2$ مقید به معادله $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ، $(a, b \neq 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{ab(a+b)}{(a^2+b^2)^2}$ (۲) $\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$ (۳) $\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$ (۴) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

۵- اگر $u(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ باشد، حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در نقطه $(2, 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{2}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- مختصات مرکز ثقل اولین قوس سیکلوئید $\begin{cases} x = 3(1 - \cos t) \\ y = 3(t - \sin t) \end{cases}$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ، کدام است؟

- (۱) $(3, 4\pi)$ (۲) $(4, 3\pi)$ (۳) $(2, 3\pi)$ (۴) $(3, 2\pi)$

۷- میدان نیروی $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ بر سطح نیم‌کره فوقانی با معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ جریان دارد. شار گذرا توسط نیروی $\vec{F}$ از سطح

مورد نظر، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۸- فرض کنید چگالی سطحی هر نقطه از پوسته سهمی‌گون با ضابطه $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ که زیر صفحه $z = 1$ واقع است، برابر ارتفاع آن نقطه باشد.

جرم پوسته، کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$ (۲) $\frac{\pi(12\sqrt{3}+1)}{15}$ (۳) $\frac{2\pi(3\sqrt{3}+1)}{15}$ (۴) $\frac{\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$

۹- فرض کنید C مسیر بسته واقع بر منحنی به معادله $\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = 4\sin t \cos t \\ z = 2\cos^2 t \end{cases}$ در دامنه $[0, \pi]$ باشد. مقدار $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$

کدام است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) صفر

۱۰- اگر سری $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2})$ واگرا باشد، مقدار α ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر

۱- گزینه «۲» با فرض عدد مختلط $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$ و جایگذاری در معادله داریم:

$$e^{x+iy} = re^{i(\frac{2k\pi + \pi}{r})} \Rightarrow e^x e^{iy} = re^{i(\frac{2k\pi + \pi}{r})} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln r \\ y = \frac{2k\pi + \pi}{r} ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

از مجموعه جوابهای فوق فقط کافی است مقادیری از y که درون دایره مورد نظر قرار دارند مشخص کنیم. با توجه به اینکه شعاع دایره ۵ است باید مقادیری از k را بدست آوریم که $-5 < y < 5$ باشد. پس داریم:

$$x = \ln r \approx 0.69 ; \pi \approx 3.14$$

$$-5 < \frac{2k\pi + \pi}{r} < 5 \Rightarrow -5 - \frac{1}{57} < \frac{2k\pi}{r} < 5 - \frac{1}{57} \Rightarrow -\frac{6}{57} < \frac{2k\pi}{r} < \frac{3}{43} \Rightarrow \frac{-6/57}{6/28} < k < \frac{3/43}{6/28} \Rightarrow k = -1, 0$$

۲- گزینه «۱» برای حل این حد ابتدا حاصل حد تابع درون پرنتر را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = 1$$

پس حد کلی داده شده به فرم 1^∞ مبهم است، در نتیجه با استفاده از این نکته که $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sinh^{-1} x$ است داریم:

$$L = e^A$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left[\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left[\frac{\sinh^{-1} x - x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sinh^{-1} x - x}{x^2} \right) \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \frac{1}{6}x^3 - x}{x^2} \right) = -\frac{1}{6} \Rightarrow L = e^{-\frac{1}{6}}$$

۳- گزینه «۲» برای حل این حد ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)} = \sqrt{n^2(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})} = n\sqrt{(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} n\sqrt{(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x+\frac{k}{n})(x+\frac{k+1}{n})}$$

در حد اخیر وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\frac{k}{n} \approx \frac{k+1}{n}$ در نتیجه حد اخیر به $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x + \frac{k}{n})$ تبدیل می‌شود که با فرض $f(\frac{k}{n}) = x + \frac{k}{n}$ داریم:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x + \frac{k}{n}) = \int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2}$$

۴- گزینه «۴» به راحتی با استفاده از روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$f(x, y) = x^r + y^r ; g(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{rx}{1} = \frac{ry}{\frac{1}{b}} \Rightarrow y = \frac{a}{b}x \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{\frac{a}{b}x}{b} = 1 \Rightarrow x(\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2}) = 1$$

$$x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2} \Rightarrow z = x^r + y^r = \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}\right)^r + \left(\frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)^r = \frac{a^rb^r + a^rb^r}{(a^2 + b^2)^r} = \frac{a^rb^r(b^r + a^r)}{(a^2 + b^2)^r} = \frac{a^rb^r}{a^2 + b^2}$$

۵- گزینه «۳» برای محاسبه مشتقات جزئی خواسته شده، کافی است در محاسبه مشتق نسبت به هر متغیر، تابع را نسبت به آن متغیر به صورت

هموگرافیک نوشته و از مشتق مراتب بالاتر توابع هموگرافیک کمک بگیریم. با توجه به اینکه برای تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ مشتق مرتبه n ام به صورت

$$y^{(n)} = n!(-c)^{n-1} \frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}} \text{ است، داریم:}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow \frac{\partial^f u}{\partial x^f} = f!(-1)^{f-1} \frac{-y-y}{(x-y)^{f+1}} = \frac{f!y}{(x-y)^{f+1}} \xrightarrow{(r,0)} = 0 \\ u = \frac{y+x}{-y+x} \Rightarrow \frac{\partial^f u}{\partial y^f} = f!(1)^{f-1} \frac{x+x}{(x-y)^{f+1}} = \frac{f!x}{(x-y)^{f+1}} \xrightarrow{(r,0)} = \frac{96}{32} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^f u}{\partial y^f} - \frac{\partial^f u}{\partial x^f} = 3$$

۶- گزینه «۲» با توجه به روابط مختصات مرکز ثقل منحنی‌های پارامتری داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b y \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad ; \quad L = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \\ \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} &= \sqrt{9 \sin^2 t + 9(1-\cos t)^2} = 3\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t + 1} = 3\sqrt{2-2\cos t} = 3\sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} = 6 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \\ L &= \int_0^{2\pi} 6 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \int_0^{2\pi} 6 \sin \frac{t}{2} dt = -12 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -12(-1-1) = 24 \\ \bar{x} &= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} 3(1-\cos t) 6 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (1-\cos^2 \frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{3}{4} [-2\cos(\frac{t}{2}) + \frac{2}{3}\cos^3(\frac{t}{2})] \Big|_0^{2\pi} = 4 \\ \bar{y} &= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} 3(t-\sin t) 6 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (t \sin \frac{t}{2} - \sin t \sin \frac{t}{2}) dt = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (t \sin \frac{t}{2} - 2\cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}) dt = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - \frac{3}{4} (\sin^2 \frac{t}{2}) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{4} I_1 \end{aligned}$$

برای حل انتگرال I_1 نیز با استفاده از روش جدول جزء به جزء داریم:

+	t	$\sin \frac{t}{2}$
-	1	$-2\cos \frac{t}{2}$
o		$-4\sin \frac{t}{2}$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt = -2t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4\pi(-1) - 0 + 0 = 4\pi \Rightarrow \bar{y} = \frac{3}{4} I_1 = 3\pi$$

۷- گزینه «۲» با توجه به اینکه سطح مورد نظر بسته نیست نمی‌توان بلافاصله از قضیه دیورژانس استفاده کرد. ولی به راحتی با اضافه کردن S' یعنی

بخشی از صفحه‌ی $z=0$ که درون دایره $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد، می‌توان یک ناحیه بسته تولید کرده و از قضیه دیورژانس استفاده کرد، پس داریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma - \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \underbrace{\iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv}_{I_1} - \underbrace{\iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma}_{I_2}$$

$$I_1 = \iiint_D (2x + 2y + 2z) dv$$

ناحیه مورد اشاره نسبت به متغیرهای x و y متقارن و تابع زیر انتگرال نسبت به آن‌ها فرد است، پس حاصل این قسمت‌ها صفر است. در نتیجه با استفاده از مختصات کروی خواهیم داشت:

$$I_1 = \iiint_D (2z) dv = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = 2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) = 2(2\pi) \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{2}$$

برای محاسبه انتگرال I_2 نیز با روش مستقیم و با توجه به اینکه $\vec{n} = -\vec{k}$ است داریم:

$$I_2 = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{S'} z^2 d\sigma = - \iint_{S'} (0)^2 d\sigma = 0 \Rightarrow I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2}$$

۸- گزینه «۱» به راحتی با استفاده از رابطه‌ی جرم یک سطح داریم:

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_S \delta d\sigma = \iint_S z d\sigma = \iint_{S^+} \frac{1}{r} (x^2 + y^2) d\sigma \\
 z = \frac{1}{r} (x^2 + y^2) = 1 &\Rightarrow x^2 + y^2 = r \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{r} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \\
 d\sigma &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\
 M &= \iint_{S^+} \frac{1}{r} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} \frac{1}{r} r^2 \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{r}} \frac{1}{r} r^2 \sqrt{1 + r^2} dr = \pi \int_0^{\sqrt{r}} r^2 \sqrt{1 + r^2} r dr \\
 1 + r^2 &= t \Rightarrow r dr = dt \\
 M &= \pi \int_1^r (t-1) t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{r} = \frac{\pi}{r} \int_1^r (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{\pi}{r} \left(\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^r \\
 &= \frac{\pi}{r} \left[\left(\frac{2}{5} r^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{\pi}{r} \left(\frac{54r^{\frac{5}{2}} - 30r^{\frac{3}{2}}}{15} + \frac{4}{15} \right) = 2\pi \left(\frac{6\sqrt{r} + 1}{15} \right)
 \end{aligned}$$

۹- گزینه «۴» ابتدا کرل تابع برداری در انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}$$

پس تابع مورد نظر پایستار و همواره پیوسته بوده و انتگرال آن روی یک مسیر بسته صفر خواهد بود.

۱۰- گزینه «۱» برای بررسی همگرایی این سری، ابتدا سعی می‌کنیم آن را به فرم p -سری تبدیل کنیم. برای این کار کافی است صورت و مخرج را در مزدوج عبارت درون پرانتز ضرب کرده و سپس با کمک هم‌ارزی داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \frac{(n^{\frac{r}{2}} + 2 - n^{\frac{r}{2}} + 2)}{\sqrt{n^{\frac{r}{2}} + 2} \sqrt{n^{\frac{r}{2}} - 2}} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^{\alpha}}{2n^{\frac{r}{2}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{r}{2} - \alpha}}$$

می‌دانیم این سری در صورتی همگراست که $\frac{r}{2} - \alpha > 1$ باشد. یعنی $\frac{1}{r} < \alpha$. پس به ازای گزینه (۱) واگرا خواهد بود.



سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱- تعداد و محل تقریبی ریشه‌های حقیقی معادله $x(x-1)(x-2)=1$ ، کدام است؟

(۱) تنها یک ریشه در بازه $[0,1]$ دارد. (۲) تنها یک ریشه در بازه $[2,3]$ دارد.

(۳) یک ریشه در بازه $[0,1]$ و دو ریشه به‌ازای $x \geq 2$ دارد. (۴) سه ریشه به‌ازای $x \geq 2$ دارد.

۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2}) \dots (1+\frac{1}{n})}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) e (۳) ۱ (۴) $+\infty$

۳- فاصله همگرایی سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n} + x^{-2n} + 3}{1 + x^{2n} + x^{-2n}}$ کدام است؟

(۱) $|x| > 1$ (۲) $0 < |x| < 1$ (۳) همواره واگرا است. (۴) به‌جز $x=0$ همواره همگرا است.

۴- معادله صفحه مماس بر رویه با معادلات پارامتری $x = \cos u \cos v$ ، $y = \cos u \sin v$ و $z = \sin u$ و $u = \frac{\pi}{4}$ و $v = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) $2x + 2y + \sqrt{2}z = 3$ (۲) $x + y + \sqrt{2}z = 2$ (۳) $2x + 2y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = \frac{5}{2}$ (۴) $x + y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 2$

۵- حاصل $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ کدام است؟

(۱) $\ln 2$ (۲) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$ (۴) ∞

۶- فرض کنید f یک تابع پیوسته و به‌ازای مقادیر ثابت و مثبت a و b و هر $x \in [0,1]$ در $[a,b]$ قرارگیرد. اگر $A = \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$ باشد، آنگاه کدام رابطه درست است؟

(۱) $A \geq \frac{2}{b} - \frac{1}{a} \int_0^1 f(x) dx$ (۲) $A \geq \frac{2}{a} - \frac{1}{b} \int_0^1 f(x) dx$ (۳) $A \leq \frac{2}{b} - \frac{1}{ab} \int_0^1 f(x) dx$ (۴) $A \leq \frac{2}{a} - \frac{1}{ab} \int_0^1 f(x) dx$

۷- حاصل انتگرال $\iint_D (x+1)^2 y^2 dx dy$ در ناحیه D درون مثلثی با رأس‌های $(0,0)$ و $(1,-1)$ و $(1,1)$ ، کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{49}{90}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{23}{18}$

۸- انحناى منحنی $r = 3 + 2 \cos \theta$ در نقطه $(\frac{\pi}{4}, 3)$ در مختصات قطبی، کدام است؟

(۱) $\frac{17}{13\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۳) $\frac{13}{17}$ (۴) $\frac{17}{13}$

۹- حاصل $\iint_S (yz dy dz + xz dx + xy dx dy)$ که در آن S سطح کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات به شعاع واحد است، کدام است؟

(۱) $\frac{2}{8}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۱۰- فرض کنید V حجم ناحیه‌ای باشد که از اطراف به استوانه $r = \cos \theta$ ، از بالا به مخروط $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ و از پایین به صفحه xy محدود است.

مقدار V کدام است؟

(۱) $2\pi - \frac{2}{9}$ (۲) $2\pi - \frac{4}{9}$ (۳) $4\pi - \frac{2}{9}$ (۴) $4\pi - \frac{4}{9}$

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x(x-1)(x-2) - 1 = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

داریم:

$$\begin{cases} f(2) = 2(2-1)(2-2) - 1 = -1 < 0 \\ f(3) = 3(3-1)(3-2) - 1 = 5 > 0 \end{cases}$$

$f(2)f(3) < 0$ پس طبق قضیه‌ی بولتزانو f در بازه‌ی $[2, 3]$ ریشه دارد چون $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ در بازه‌ی $[2, 3]$ اکیداً صعودی است، در این بازه f فقط یک ریشه دارد. اما به ازای $x < 2$ ، تابع f همواره منفی و به ازای $x > 3$ ، تابع f همواره مثبت است پس f ریشه‌ی دیگری ندارد.

۲- گزینه «۳» برای حل این حد ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{1}} = 1$$

حال به راحتی با استفاده از قاعده ادغام برای حاصل ضرب (نماد پای) خواهیم داشت:

۳- گزینه «۳» ابتدا وضعیت حد جمله‌ی سری را در بی‌نهایت بررسی می‌کنیم. برای اینکار با توجه به اینکه $X = 0$ نمی‌تواند باشد، حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

$$0 < |x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{fn} + x^{-fn} + 3}{1 + x^{fn} + x^{-fn}} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-fn}}{x^{-fn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \infty$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{fn} + x^{-fn} + 3}{1 + x^{fn} + x^{-fn}} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{fn}}{x^{fn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2x^{fn} = \infty$$

$$|x| = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{fn} + x^{-fn} + 3}{1 + x^{fn} + x^{-fn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1 + 3}{1 + 1 + 1} = 3$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در هیچ حالتی سری داده شده حتی شرط لازم همگرایی را ندارد، پس همواره واگراست.

۴- گزینه «۲» به ازای $(u, v) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ داریم $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. از طرفی برای نوشتن معادله صفحه مماس، نیاز به بردار گرادیان داریم. برای

محاسبه بردار گرادیان نیز از ضرب خارجی بردارهای $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ که مماس بر رویه هستند کمک می‌گیریم و داریم:

$$\vec{r}_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \xrightarrow{(u,v) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} \vec{r}_u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{r}_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \xrightarrow{(u,v) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} \vec{r}_v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \parallel (1, 1, \sqrt{2})$$

$$P: 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow x + y + \sqrt{2}z = 2$$



۵- گزینه «۳» برای حل این انتگرال، از روش جزء به جزء به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow -\frac{1}{x} = v$$

$$I = -\left(\frac{\arctan x}{x}\right)_1^\infty - \int_1^\infty -\frac{dx}{x(1+x^2)} = 0 + \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^\infty$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4} + \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$$

۶- گزینه «۴» به راحتی با استفاده از داده‌های مسئله و خواص انتگرال داریم:

$$\forall x \in [0,1] \rightarrow a \leq f(x) \leq b \Rightarrow \int_0^1 a dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 b dx \Rightarrow a \leq \int_0^1 f(x) dx \leq b \xrightarrow{\div ab} \frac{1}{b} \leq \frac{1}{ab} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{a} \quad (1)$$

$$\forall x \in [0,1] \rightarrow a \leq f(x) \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{a} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{b} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \int_0^1 \frac{1}{a} dx \Rightarrow \frac{1}{b} \leq A \leq \frac{1}{a} \quad (2)$$

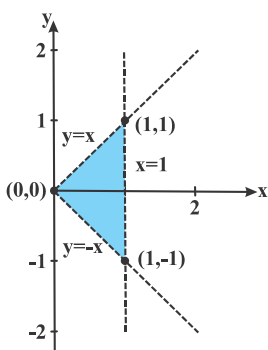
$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{1}{b} \leq A + \frac{1}{ab} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} A \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} \int_0^1 f(x) dx \\ A \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} \int_0^1 f(x) dx \end{cases}$$

۷- گزینه «۲» با توجه به شکل ناحیه و اینکه تابع در راستای محور عرض‌ها مرتب است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$$I = \iint_D (x+1)^2 y^2 dx dy = \int_0^1 \int_{-x}^x (x+1)^2 y^2 dy dx = \int_0^1 (x+1)^2 \left(\frac{1}{3} y^3 \Big|_{-x}^x\right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x+1)^2 (2x^3) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (2x^5 + 4x^4 + 2x^3) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{2x^6}{6} + \frac{4x^5}{5} + \frac{2x^4}{4}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10+24+15}{30}\right) = \frac{49}{90}$$

۸- گزینه «۱» با توجه به رابطه‌ی انحنا برای منحنی‌های قطبی خواهیم داشت:



$$r = 3 + 2 \cos \theta$$

$$r' = -2 \sin \theta \xrightarrow{(r,\theta)=(3,\frac{\pi}{2})} r' = -2$$

$$r'' = -2 \cos \theta \xrightarrow{(r,\theta)=(3,\frac{\pi}{2})} r'' = 0$$

$$K = \frac{|r^2 + 2r'r'' - r''^2|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{|9 + 2(4) - 0|}{(9 + 4)^{3/2}} = \frac{17}{13\sqrt{13}}$$

۹- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به اینکه سطح داده شده بسته است، به راحتی با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\vec{F} = (yz, zx, xy)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) dv = \iiint_D (0) dv = 0$$

پس جواب صحیح صفر است اما در بین گزینه‌ها وجود ندارد و سازمان سنجش گزینه (۱) را صحیح اعلام کرده است!



۱۰- گزینه «۴» واضح است که باید از مختصات استوانه‌ای کمک بگیریم. با توجه به اینکه تصویر ناحیه بر صفحه xy همان دایره $r = \cos \theta$ است، داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \cos \theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

از طرفی برای حدود Z نیز با توجه به صورت سؤال $0 \leq Z \leq 16 - r$ است. پس در کل داریم:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{16-r} r dz dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} (16r - r^2) dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8r^2 - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 \cos^2 \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \frac{\cos \theta (1 - \sin^2 \theta)}{3} \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 + 4 \cos 2\theta - \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{1}{3} \cos \theta \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= 4\theta + 2 \sin 2\theta - \frac{1}{3} \sin \theta + \frac{1}{9} \sin^3 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi + 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \left(-2\pi + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) = 4\pi - \frac{4}{9} \end{aligned}$$



سؤالات رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + ax^2)^{\frac{1}{x - \sin x}} = A$ و A عددی کراندار باشد، مقدار $a + A$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲- اگر $z = x^n e^{\frac{y}{x}}$ باشد، برای کدام مقدار n ، تساوی $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} (-y^2 \frac{\partial}{\partial y})$ برقرار است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۳- مشتق سویی (جهتی) تابع $f(x, y) = x^2 + e^{xy} - 3xy^2$ در نقطه $(1, 0)$ و در جهت بردار یکه‌ای که با جهت مثبت محور x زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازد،

کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۴- مقدار $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{9^x - 4^x} dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\ln 5}{\ln 3 / 5}$ (۲) $\frac{\ln 3}{\ln 2 / 5}$ (۳) $\frac{\ln 5}{\ln 2 / 25}$ (۴) $\frac{\ln 3}{\ln 1 / 75}$

۵- فرض کنید منحنی C اضلاع مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ و $(2, 2)$ در صفحه مختصات است، که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده

می‌شود. مقدار $\oint_C \sin(x^2) dx + 2ye^{x^2} dy$ ، کدام است؟

- (۱) $3e^4 + 1$ (۲) $3e^4 - 1$ (۳) $e^4 + 3$ (۴) $e^4 - 3$

۶- فرض کنید S سطح بیرونی مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) باشد. مقدار $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 4π (۴) صفر

۷- ضریب $a^2 b^2 c^2 d^4$ در بسط $(4a - 3b + 2c - d)^{10}$ ، کدام است؟

- (۱) $10!$ (۲) $9!$ (۳) $8!$ (۴) $7!$

۱- گزینه «۱» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است. در نتیجه کفایت به صورت زیر عمل کنیم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + ax^2)^{\frac{1}{x - \sin x}} = 1^\infty \Rightarrow A = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} (\cos x + ax^2 - 1)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} (\cos x + ax^2 - 1) \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - (x - \frac{x^3}{3!})} (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ax^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ax^2)}{\frac{x^3}{3!}}$$

برای اینکه حد فوق کراندار باشد، باید ضریب x^2 در صورت برابر صفر باشد. در نتیجه باید $a = \frac{1}{2}$ باشد و خواهیم داشت:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}x^2)}{\frac{x^3}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{6}} = 0 \Rightarrow A = e^L = 1 \Rightarrow a + A = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

۲- گزینه «۴» با استفاده از مشتق جزئی طرفین معادله داده شده را تشکیل داده و بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^n \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow -y^r \frac{\partial z}{\partial y} = -x^{n-1} y^r e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} e^{\frac{y}{x}} - x^{n-r} y^r e^{\frac{y}{x}} = x^{n-r} e^{\frac{y}{x}} (nx - y^r)$$

$$\frac{1}{xy^r} \frac{\partial}{\partial y} (-y^r \frac{\partial z}{\partial y}) = -\frac{x^{n-1}}{xy^r} (\lambda y^r e^{\frac{y}{x}} + \frac{ry^r}{x} e^{\frac{y}{x}}) = x^{n-r} e^{\frac{y}{x}} (-rx - y^r)$$

$$\frac{1}{xy^r} \frac{\partial}{\partial y} (-y^r \frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow n = -r$$

حالا تساوی صورت سؤال را می‌نویسیم:

۳- گزینه «۳» بردار یک‌ه‌ی موردنظر از رابطه $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ به‌راحتی قابل استخراج و برابر $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ است. حالا با استفاده از گرادیان تابع و فرمول

$$f(x, y) = x^2 + e^{xy} - 3xy^2$$

مشتق سوئی داریم:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (2x + ye^{xy} - 3y^2, xe^{xy} - 6xy) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1, 0) = (2, 1)$$

$$D_{\vec{u}} f(1, 0) = \vec{\nabla} f(1, 0) \cdot \vec{u} = (2, 1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2+1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۴- گزینه «۳» برای حل این انتگرال ابتدا آن را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$I = \int_1^\infty \frac{e^x}{9^x - 4^x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{(\frac{9}{e})^x - (\frac{4}{e})^x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{(\frac{9}{e})^x - (\frac{4}{e})^x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{(\frac{9}{e})^x - (\frac{4}{e})^{-x}} dx$$

حالا با تغییر متغیر $u = (\frac{9}{e})^x$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (\frac{9}{e})^x \ln \frac{9}{e} dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{u \ln 1/9} \\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{9}{e} \\ x = \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{cases}$$

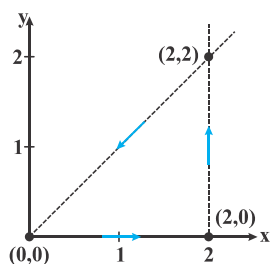
$$I = \int_{\frac{9}{e}}^\infty \frac{1}{u - \frac{1}{u}} \frac{du}{u \ln 1/9} = \frac{1}{\ln 1/9} \int_{\frac{9}{e}}^\infty \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2 \ln 1/9} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Big|_{\frac{9}{e}}^\infty = \frac{1}{2 \ln 1/9} (\ln 1 - \ln \frac{\frac{9}{e}-1}{\frac{9}{e}+1}) = \frac{\ln 9}{2 \ln 1/9} = \frac{\ln 9}{\ln (1/9)^2} = \frac{\ln 9}{\ln 9/25}$$



۵- گزینه «۱» با توجه به بسته بودن ناحیه و هموار بودن تابع زیر انتگرال، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$I = \oint_C (\sin x^2 dx + 2ye^{x^2} dy) = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (2ye^{x^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\sin x^2) \right] dx dy = \iint_D 2xye^{x^2} dx dy$$

و با توجه به ناحیه داده شده داریم:



$$I = \iint_D 2xye^{x^2} dx dy = \iint_D 2xye^{x^2} dy dx = \int_0^2 \int_0^{x^2} 2xye^{x^2} dy dx = \int_0^2 2xe^{x^2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \int_0^2 2x^3 e^{x^2} dx$$

$$x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du$$

$$2xe^{x^2} dx = dv \Rightarrow e^{x^2} = v$$

$$I = [x^2 e^{x^2}]_0^2 - \int_0^2 2xe^{x^2} dx = 4e^4 - e^{x^2} \Big|_0^2 = 4e^4 - (e^4 - 1) = 3e^4 + 1$$

$$I = \iiint P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

۶- گزینه «۴» برای میدان برداری $\vec{F} = (P, Q, R)$ داریم:

پس در این مثال $P = y - z$ و $Q = z - x$ و $R = x - y$ می‌باشد.

با توجه به این که سطح داده شده فقط شامل بدنه‌ی مخروط است، بنابراین ناحیه داده شده یک ناحیه بسته نیست.

اگر بخشی از صفحه $z = h$ که با مخروط تلاقی دارد را S' بنامیم و به سطح S اضافه کنیم، $S \cup S'$ یک ناحیه‌ی بسته می‌شود و می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم و در انتها انتگرال روی S' را از انتگرال روی $S \cup S'$ کم کنیم. پس داریم:

$$\iiint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint \text{div} \vec{F} dv = \iiint (0 + 0 + 0) dv = 0$$

اکنون باید انتگرال روی S را حساب کنیم.

$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$

معادله S' به صورت $z = h$ می‌باشد که بردار قائم یکنه‌ی رو به خارج آن به صورت مقابل می‌باشد.

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x - y)$$

پس داریم:

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx = dy dx$$

از $z = h$ داریم:

حال داریم: (تصویر محل برخورد $z = h$ با مخروط دایره $x^2 + y^2 = h^2$ می‌باشد.)

$$I = \iint_D (x - y) dy dx$$

با توجه به این که ناحیه D نسبت به محورهای x و y متقارن است و تابع زیر انتگرال نیز نسبت به x و y فرد می‌باشد، پس حاصل این انتگرال نیز صفر است و در نتیجه حاصل انتگرال کل نیز صفر می‌باشد.

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

۷- گزینه «۱» در عبارت $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k)^n$ ، ضریب جمله $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ برابر است با:

در اینجا عبارت داده شده به صورت $(4a - 3b + 2c - d)^{10}$ است پس داریم:

$n = 10$ ، $a_1 = 4$ ، $a_2 = -3$ ، $a_3 = 2$ ، $a_4 = -1$ و چون ضریب جمله

$$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 4$$

$ab^2c^3d^4$ خواسته شده لذا داریم:

$$\frac{10!}{1! 2! 3! 4!} (4)^1 (-3)^2 (2)^3 (-1)^4 = 10 \times 9 \times 4 \times 7 \times 5 \times 4 \times 9 \times 8 = 10!$$

در نتیجه ضریب عبارت خواسته شده برابر است با:

سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۱

سؤالات رشته‌ی MBA

۱- فرض کنید قسمت حقیقی عبارت‌های $\sqrt{1+\sqrt{3}}i$ و $\sqrt{\sqrt{3}-i}$ به ترتیب a و b باشند. مقدار $a^2 - b^2$ ، کدام است؟ ($i^2 = -1$)

(۱) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{-2}$

۲- حاصل عبارت $(-1 + e^{\frac{5\pi i}{6}} + e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{6}})$ ، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) صفر

۳- فرض کنید $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{4}{\pi}\}$ و $B = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 3\}$ ، مساحت ناحیه‌ای که نقاط واقع در مجموعه $B - (A \cap B)$ تولید می‌کنند، کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴

۴- پنج گرم فلز A و پنج گرم فلز B را در یک ظرف به‌طور همگن ذوب می‌کنیم تا بتوانیم یک سکه ده گرمی بسازیم. از مقدار مذاب x گرم حذف می‌کنیم و به همان مقدار فلز A اضافه می‌کنیم تا در ساخت سکه جدید، فلز A به 80% برسد. مقدار x به گرم کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۶

۵- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-3}{-x+1}\right)}$ ، کدام است؟

(۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $[2, \infty)$

۶- فاصله نقطه $(1, \sqrt{2}, 3)$ از صفحه $4x + 2\sqrt{2}y + 5z = a$ برابر ۷ است. ماکزیمم مقدار a کدام است؟

(۱) ۴۸ (۲) ۷۲ (۳) ۳۰ (۴) ۶۸

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(-\left|\frac{x}{2}\right| + \left[-\frac{2}{x}\right]\right)$ ، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۸- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (e^{2ax} - 1)\left[\frac{1}{x}\right] & x \neq 0 \\ -a + 1 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۹- مقدار مشتق مرتبه ۱۲ تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ در $x = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{-11!}{2^{13}}$ (۲) $\frac{11!}{2^{13}}$ (۳) $\frac{-12!}{2^{14}}$ (۴) $\frac{12!}{2^{14}}$

۱۰- فرض کنید تابع $f(x) = \begin{cases} be^{\cos x} + 1 & x > 0 \\ e^x - ax & x \leq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد. مقدار $a - b$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۱۱- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^2$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) ۲

۱۲- فاصله نقاط عطف منحنی $y = e^{-x^2}$ ، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i+n}{n^2} \sin\left(\frac{i-n}{n}\right)$ ، کدام است؟

(۱) $-\sin 1 - \cos 1 - 2$ (۲) $-\sin 1 + \cos 1 - 2$ (۳) $\sin 1 + \cos 1 - 2$ (۴) $\sin 1 - \cos 1 - 2$



۱۴- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x \, dx}{4 \sin^2 x - \cos^2 x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\text{Ln} 3}{4}$ (۲) $\frac{2 \text{Ln} 3}{9}$ (۳) $\frac{\text{Ln} 3}{3}$ (۴) $\frac{\text{Ln} 3}{8}$

۱۵- حجم حاصل از دوران یک دایره (قرص) به شعاع a حول یکی از خطوط مماس بر آن کدام است؟

- (۱) $2\pi^2 a^3$ (۲) $\frac{4}{3}\pi a^3$ (۳) $2\pi^3 a^2$ (۴) $4\pi^2 a^3$

۱۶- سطح محصور به منحنی $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$ و محورهای مختصات را، واقع در ربع اول صفحه مختصات، حول محور y ها دوران دهیم، حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{14}$ (۲) $\frac{\pi}{84}$ (۳) $\frac{\pi}{7}$ (۴) $\frac{\pi}{42}$

۱۷- اگر ماتریس مربع $A = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ دارای یک مقدار ویژه مکرر از مرتبه دوم $\lambda = 2$ باشد، مقدار ویژه دیگر آن کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۸- فاصله نقطه $(1, 1, 0)$ از رویه $z = x^2 + y^2$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۹- اگر $f(x) = \int_0^{\sinh x} \sqrt{4+t^2} \, dt$ باشد، آنگاه مشتق وارون $(f^{-1})'f$ در نقطه $x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) ۸ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۲۰- طول منحنی نمودار تابع $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ وقتی $0 \leq t \leq 2\pi$ ، کدام است؟

- (۱) π^2 (۲) 2π (۳) $2\pi^2$ (۴) 4π

۲۱- انحنای منحنی $\vec{r}(t) = 3 \sin t \hat{i} - (1 + 2t) \hat{j} + 3 \cos t \hat{k}$ در لحظه $t = \frac{\pi}{4}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{13}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{7}$

۲۲- کوتاه ترین فاصله نقطه $(\sqrt{3}, 2, -1)$ از سطح $2y + 4z - 1 = x^2 + y^2 + z^2$ ، چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{7} - 2$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5} - 1$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۳- بیشترین مقدار مشتق جهتی تابع $f(x, y, z) = xe^{yz^2} + yz^2$ ، در نقطه $(1, 0, -1)$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{5}$

۲۴- تعداد نقاط زینی تابع $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 3xy^2 - 3x$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۳

۲۵- حاصل $\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \cos^2(\sin x) \, dx \, dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2$ (۲) $\frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{4} \sin(2 \sin 1)$ (۳) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin 2$ (۴) $\frac{\sin 1}{2} - \frac{1}{4} \sin(2 \sin 1)$

۲۶- حاصل $\int_0^1 \int_x^1 e^{-\frac{x}{y}} \, dy \, dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{e^2 - 1}{2e}$ (۲) $\frac{e^2 - 1}{2}$ (۳) $\frac{e - 1}{2e}$ (۴) $\frac{e - 1}{2}$

۲۷- مساحت سطح سهمیگون باز $z = x^2 + y^2$ محدود به صفحات $z = 1$ و $z = 4$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$ (۲) $\frac{\pi}{6}(\Delta^{\frac{3}{2}} - 1)$ (۳) $\frac{\pi}{3}(\Delta^{\frac{3}{2}} - 1)$ (۴) $\frac{\pi}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$

۲۸- اگر C مرز بسته ناحیه $x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}$ و $y \geq 0$ باشد، حاصل $\oint_C (e^y \sin x + 3y^2) dx + (2x - e^y \cos x) dy$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{\pi^3}{4}$ (۲) $\frac{\pi^3}{8}$ (۳) $-\frac{\pi^3}{8}$ (۴) $\frac{\pi^3}{4}$

۲۹- فرض کنید نیروی $\vec{F}(x, y, z) = (x + y)\hat{i} + (y + z)\hat{j} + (x + z)\hat{k}$ جسمی را که بر مرز منحنی شکل حاصل از برخورد سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و نیم کره فوقانی $z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ قرار دارد، در جهت عقربه‌های ساعت به حرکت درمی‌آورد. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ کدام است؟

(۱) 3π (۲) 2π (۳) صفر (۴) π

۳۰- شار گذرا از سطح باز استوانه‌ای شکل با ضابطه $x^2 + y^2 = 4$ ، محدود به صفحات $z = 0$ و $z = 1$ توسط نیروی $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{i} + (2x + y)\hat{j} + z\hat{k}$ ، کدام است؟

(۱) 8π (۲) صفر (۳) 4π (۴) 12π

پاسخنامه رشتی MBA

۱- گزینه «۲» با توجه به اینکه $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ می‌باشد، داریم:

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} = (1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (re^{i\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\pi}{6}} \rightarrow a = \sqrt{r} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{\sqrt{3}-i} = (\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{2}} = (re^{-i\frac{\pi}{6}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{-i\frac{\pi}{12}} \rightarrow b = \sqrt{r} \cos(-\frac{\pi}{12})$$

پس $a^2 - b^2$ برابر است با:

$$a^2 - b^2 = (\sqrt{r} \cos \frac{\pi}{6})^2 - (\sqrt{r} \cos \frac{\pi}{12})^2 = r(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - r(\cos^2 \frac{\pi}{12})$$

با استفاده از رابطه $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ داریم:

$$= \frac{3}{2} - r(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

۲- گزینه «۱» با توجه به اینکه $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ می‌باشد و با توجه به اینکه فقط قسمت‌های حقیقی عبارت را از ما می‌خواهد، داریم:

$$\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6} - 1$$

زوایای مکمل، کسینوس آنها قرینه هم می‌باشند و داریم:

$$\cos \frac{\pi}{6} = -\cos \frac{5\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{3} = -\cos \frac{2\pi}{3}$$

پس حاصل عبارت برابر ۱- می‌باشد.

۳- گزینه «۴» ابتدا ناحیه‌های مورد اشاره را رسم می‌کنیم:

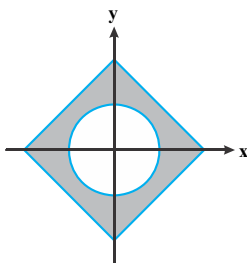
A یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ و B یک لوزی به مرکز مبدأ و به شکل مقابل است.

$$B - (A \cap B) = B - A$$

در واقع چون A کاملاً درون ناحیه B قرار دارد، اشتراک آنها برابر ناحیه کوچک‌تر بوده و مساحت ناحیه موردنظر

برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}d^2 - \pi r^2 = \frac{1}{2}(6)^2 - \pi(\frac{4}{\pi}) = 18 - 4 = 14$$



۴- گزینه «۴» با توجه به همگن بودن سکه قبل از حذف، نسبت فلز A و B در همه جا ۱ به ۱ است. در نتیجه با حذف X گرم، مقدار $\frac{X}{Y}$ گرم فلز A و $\frac{X}{Y}$

فلز B حذف می‌شود. حالا با اضافه کردن X گرم فلز A، جرم فلز دوباره ۱۰ گرم است اما جرم فلز A در آن $5 - \frac{X}{Y} + X$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{5 + \frac{X}{Y}}{10} = 0.8 \Rightarrow 5 + \frac{X}{Y} = 8 \Rightarrow X = 6$$



۵- گزینه «۳» راه حل تشریحی: ابتدا باید داشته باشیم $\frac{x-3}{-x+1} > 0$ ، یعنی $1 < x < 3$ (A) از طرفی باید $\ln\left(\frac{x-3}{-x+1}\right) \geq 0$ باشد یعنی $\frac{x-3}{-x+1} \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{-x+1} - 1 = \frac{2x-4}{-x+1} = \frac{2(x-2)}{-x+1} \geq 0 \Rightarrow -1 < x \leq 2 \quad (B)$$

با توجه به اشتراک A و B، دامنه تابع همان $1 < x \leq 2$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x-3}{-x+1}\right) = \ln(-1) \quad \times$$

راه حل تستی:

پس تابع به هیچ نوع بی‌نهایتی نمی‌تواند میل کند. پس فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۶- گزینه «۲» با توجه به رابطه فاصله نقطه از صفحه داریم:

$$d = \frac{|4(1) + 2\sqrt{2}(\sqrt{2}) + 5(3) - a|}{\sqrt{16 + 8 + 25}} = 7 \Rightarrow |4 + 4 + 15 - a| = 7\sqrt{49} = 49 \Rightarrow |23 - a| = 49 \Rightarrow \begin{cases} 23 - a = 49 \Rightarrow a = -26 \\ 23 - a = -49 \Rightarrow a = 72 \end{cases}$$

۷- گزینه «۲» برای تشخیص اینکه در حالت‌های مختلف منفی یا مثبت میل به سمت چپ عدد ۲- بهتر است یک عدد فرضی (مثلاً ۲.۱-) را در نظر گرفته و با توجه به آن مقادیر جزء صحیح را تعیین کنید. در این صورت واضح است که داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{2}{x} \right\rfloor \right) = -\left\lfloor \frac{(-2)^-}{2} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{2}{(-2)^-} \right\rfloor = -\left\lfloor (-1)^- \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2^+} \right\rfloor = -(-2) + 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

۸- گزینه «۴» باید حد تابع در $x = 0$ با مقدار آن در این نقطه برابر باشد؛ یعنی داریم:

با توجه به اینکه به ازای $x \rightarrow 0$ ، $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2ax} - 1}{x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ae^{2ax}}{1} = 2a \Rightarrow 2a = -a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

۹- گزینه «۳» قبل از محاسبه مشتق موردنظر ابتدا تابع را به فرم مقابل ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right]$$

حالا با استفاده از مشتق مرتبه nام تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ که به صورت $y^{(n)} = n!(-c)^{n-1} \frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}$ است داریم:

$$f^{(12)}(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{12!(-1)^{11} \frac{-1}{(x-2)^{13}} - 12!(-1)^{11} \frac{-1}{(x+2)^{13}}}{1} \right]$$

$$f^{(12)}(0) = \frac{12!}{4} \left[\frac{1}{(-2)^{13}} - \frac{1}{2^{13}} \right] = \frac{12!}{2^2} \left[\frac{-2}{2^{13}} \right] = \frac{-12!}{2^{14}}$$

۱۰- گزینه «۴» برای مشتق پذیر بودن تابع در $x = 0$ باید ابتدا در $x = 0$ پیوسته باشد.

$$\begin{cases} f(0^+) = be^{\cos(0)} + 1 = be + 1 \\ f(0^-) = f(0) = e^0 - a(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{باید}} be + 1 = 1 \Rightarrow b = 0$$

اکنون باید مشتق چپ و راست را مساوی یکدیگر قرار دهیم.

$$\begin{cases} f'(0^+) = -b \sin x e^{\cos x} \xrightarrow{b=0} 0 \\ f'(0^-) = e^x - a \xrightarrow{x=0} e^0 - a = 0 \end{cases} \rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

پس $a - b = 1$ می‌باشد.

۱۱- گزینه «۳» با توجه به اینکه $\cotgh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ می‌باشد، داریم:

$$y = (\cotgh x)^2 \Rightarrow y' = 2 \cotgh x (1 - \cot^2 gh x) = 0$$

$$\cotgh x = 0, \cot^2 gh x - 1 = 0 \Rightarrow \cotgh x = \pm 1$$

$$\text{اگر } \cotgh x = 1 \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 \Rightarrow e^x + e^{-x} = e^x - e^{-x} \Rightarrow 2e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$$

مقدار e^{-x} هیچ وقت برابر صفر نمی شود در نتیجه این معادله جواب ندارد.

$$\cot gh x = -1 \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -1 \Rightarrow e^x + e^{-x} = -e^x + e^{-x} \Rightarrow 2e^x = 0 \Rightarrow e^x = 0$$

مقدار e^x هیچ وقت برابر صفر نمی شود در نتیجه این معادله جواب ندارد. این یعنی تابع داده شده فاقد نقطه بحرانی است.

۱۲- گزینه «۲» فقط کافی است دوبار از تابع داده شده مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم و ریشه های ساده مشتق دوم را بیابیم.

$$y = e^{-x^2}$$

$$y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y'' = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = 0 \Rightarrow e^{-x^2}(-2 + 4x^2) = 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

از آنجایی که مقدار عرض دو نقطه با هم برابر است، پس فاصله آنها برابر اختلاف مقدار طول آنها خواهد بود. یعنی داریم:

$$\text{فاصله} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

۱۳- گزینه «۳» با بازنویسی حد داده شده به صورت زیر آن را به یک حد مجموع ریمان تبدیل کرده و داریم:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} + 1\right) \sin\left(\frac{i}{n} - 1\right) = \int_0^1 (x+1) \sin(x-1) dx$$

برای حل انتگرال فوق از جدول جزء به جزء داریم:

$$\begin{array}{r|l} x+1 & \sin(x-1) \\ \hline 1 & -\cos(x-1) \\ \hline 0 & -\sin(x-1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} L &= -(x+1)\cos(x-1) + \sin(x-1) \Big|_0^1 \\ &= [-(2)\cos(0) + \sin(0)] - [-(1)\cos(-1) + \sin(-1)] \\ &= -2 + 0 + \cos 1 + \sin 1 = \sin 1 + \cos 1 - 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{4 \sin^2 x - \cos^2 x}$$

۱۴- گزینه «۴» سؤال غلط است، اما راه حل مدنظر طراح (که البته از یک نکته غافل شده) به شرح مقابل می باشد:

از مخرج کسر $\cos^2 x$ را فاکتور می گیریم و با توجه به اینکه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ می باشد، داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x (4 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 x) \tan x dx}{(4 \tan^2 x - 1)}$$

$$u = \tan x \rightarrow du = (1 + \tan^2 x) dx, \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{u du}{4u^2 - 1} = \frac{u}{4u^2 - 1} = \frac{A}{2u - 1} + \frac{B}{2u + 1} = \frac{2u(A+B) + A - B}{4u^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2u-1} + \frac{1}{2u+1} \right) du$$

نکته: به ازای $u = \frac{1}{2}$ مخرج کسر اول صفر می شود و با توجه به این که توان u برابر ۱ می باشد، طبق نکته انتگرال های ناسره برای توان $p = 1$ این انتگرال واگراست پس در کل این انتگرال واگراست و طراح از این موضوع غافل شده است!

$$V = \pi d S = \pi d (\pi a^2) = \pi^2 a^2$$

۱۵- گزینه «۱» برای حل این سوال از قضیه گلدن پاپوس استفاده کرده و داریم:

در واقع d همان فاصله مرکز ثقل قرص (در اینجا همان مرکز دایره) از مماس بر دایره است که برابر همان شعاع دایره است. S نیز مساحت قرص به شعاع a خواهد بود.



۱۶- گزینه «۲» برای حل این سؤال ابتدا نقاط تقاطع آن با محورهای مختصات (حدود انتگرال) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=1 \\ y=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

حالا با بازنویسی معادله منحنی به فرم $y = (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ و استفاده از رابطه حجم حاصل از دوران حول محور y ها داریم:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x f(x) dx = \int_0^1 2\pi x (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 2\pi x (1 - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}}) dx = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{7} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{14} \right) = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) \\ \Rightarrow V &= \pi \left(\frac{7-3}{21} \right) = \frac{4\pi}{21} \end{aligned}$$

۱۷- گزینه «۴» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda)) - (2-\lambda) = 0 = (2-\lambda)[(a-1-\lambda)(3-\lambda) - 1] = 0$$

چون $\lambda = 2$ ریشه مضاعف این معادله می‌باشد پس علاوه بر عامل $(2-\lambda)$ که در خارج از کروشه است، عبارت داخل کروشه هم باید در $\lambda = 2$ صفر شود، پس داریم:

$$\lambda = 2 \Rightarrow (a-3)(3-2) - 1 = 0$$

$$a - 3 - 1 = 0 \Rightarrow a = 4$$

پس ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

جمع مقادیر ویژه ماتریس برابر است با جمع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، یعنی:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 2 + 3 \xrightarrow{\lambda_1 = \lambda_2 = 2} 2 + 2 + \lambda_3 = 8 \Rightarrow \lambda_3 = 4$$

۱۸- گزینه «۱» در واقع خواسته سؤال پیدا کردن مینیمم مقدار $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + z$ با شرط $z = x^2 + y^2$ است. برای راحتی کار فقط عبارت زیر رادیکال را در نظر گرفته و با استفاده از روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{2(x-1)}{2x} = \frac{2(y-1)}{2y} = \frac{2z}{-1} \Rightarrow x = y, \quad y = \frac{1}{1+2z}$$

با جایگذاری روابط بالا در شرط داده شده داریم:

$$z = x^2 + y^2 = 2y^2 = \frac{2}{(1+2z)^2} \Rightarrow (1+2z)^2 z = 2$$

$$4z^2 + 4z^2 + z^2 - 2 = 0 \Rightarrow (2z-1)(2z^2 + 3z + 2) = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = x \Rightarrow d = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۹- گزینه «۳» با توجه به رابطه مشتق وارون، ابتدا نقطه متناظر $x=0$ از تابع معکوس را روی تابع اصلی پیدا می‌کنیم. برای این کار باید قرار دهیم $f(x) = 0$

یعنی $\int_0^{\sinh x} \sqrt{4+t^2} dt = 0$ با توجه به اینکه $\sinh x \geq 0$ و $\sqrt{4+t^2} > 0$ فقط به ازای $\sinh x = 0$ این انتگرال صفر می‌شود. پس داریم:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$$

$$f'(x) = \cosh x \sqrt{4 + \sinh^2 x} \Rightarrow f'(0) = 1\sqrt{4+0} = 2 \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$$

۲۰- گزینه «۳» با استفاده از رابطه طول قوس منحنی‌های پارامتری داریم:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

$$\kappa = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

۲۱- گزینه «۲» با استفاده از رابطه انحنای منحنی‌های پارامتری داریم:

حال با توجه به معادله پارامتری منحنی، مشتق اول و دوم را استخراج و مقدار آن در نقطه مورد نظر را محاسبه می‌کنیم و با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$\vec{r}(t) = (3 \sin t, -(1+2t), 3 \cos t)$$

$$\vec{r}'(t) = (3 \cos t, -2, -3 \sin t) \Rightarrow \vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0, -2, -3) \quad , \quad \vec{r}''(t) = (-3 \sin t, 0, -3 \cos t) \Rightarrow \vec{r}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-3, 0, 0)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 9, -6)$$

$$\kappa = \frac{|(0, 9, -6)|}{|(0, -2, -3)|^3} = \frac{\sqrt{81+36}}{(\sqrt{4+9})^3} = \frac{3\sqrt{13}}{13\sqrt{13}} = \frac{3}{13}$$

۲۲- گزینه «۲» با بازنویسی معادله سطح به صورت $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$ واضح است که خواسته سؤال پیدا کردن کمترین فاصله نقطه

$(\sqrt{3}, 3, -1)$ از کره موردنظر است. با قراردادن نقطه در معادله کره داریم:

پس نقطه موردنظر بیرون کره قرار دارد که در این حالت کمترین فاصله از کره برابر $d-R$ است که d فاصله نقطه از مرکز کره و R شعاع کره است. پس داریم:

$$d = \sqrt{16} = 4 \quad , \quad R = 2 \Rightarrow d - R = 2$$

۲۳- گزینه «۴» بیشترین مقدار مشتق جهتی در هر نقطه در راستای بردار گرادیان تابع در آن نقطه حاصل می‌شود و مقدار آن همان مقدار بردار گرادیان

در آن نقطه است؛ یعنی داریم:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (e^{yz^2}, xz^2 e^{yz^2} + z^2, 2xyze^{yz^2} + 2yz)$$

$$\vec{\nabla} f(1, 0, -1) = (1, 1+1, 0) = (1, 2, 0) \Rightarrow D_{\vec{u}} f(1, 0, -1) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

۲۴- گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم:

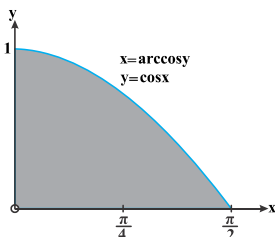
$$\left. \begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 3y^2 - 3 = 0 \\ f_y &= -6y^2 - 6xy = -6y(y+x) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=\pm 1 & \checkmark \\ y=-x \Rightarrow -3=0 & \times \end{cases}$$

حالا وضعیت دو نقطه $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} f_{xx} &= 6x \\ f_{yy} &= -12y - 6x \\ f_{xy} &= -6y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta(1, 0) &= (6)(-6) - 0^2 = -36 < 0 \\ \Delta(-1, 0) &= (-6)(6) - 0^2 = -36 < 0 \end{aligned}$$

پس هر دو نقطه زینی هستند.

۲۵- گزینه «۱» برای حل این انتگرال از تغییر ترتیب انتگرال‌گیری کمک می‌گیریم. برای این کار ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را رسم کرده و داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \cos x \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به شکل واضح است که داریم:

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} \cos^2(\sin x) dy dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \cos^2(\sin x) dx$$

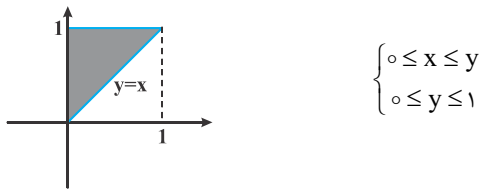
حالا در انتگرال اولیه خواهیم داشت:

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \cos^2 u du = \int_0^1 \left(\frac{1+\cos 2u}{2} \right) du = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sin 2u}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sin 2}{4} \right)$$

با تغییر متغیر $\sin x = v$ و $\cos x dx = dv$ لذا داریم:

۲۶- گزینه «۳» برای حل این انتگرال با توجه به وجود y در مخرج توان عبارت نمایی باید ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم.

در این صورت شکل زیر را داریم:



$$I = \int_0^1 \int_x^1 e^{-\frac{x}{y}} dy dx = \int_0^1 \int_0^y e^{-\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 (-y) e^{-\frac{x}{y}} \Big|_0^y dy = - \int_0^1 y(e^{-1} - 1) dy = \frac{e-1}{e} \int_0^1 y dy = \frac{e-1}{2e}$$

۲۷- گزینه «۴» با توجه به اینکه Z به طور صریح بر حسب X و Y تعریف شده، $d\sigma$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

از طرفی تصویر ناحیه به صفحه XOY به صورت $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ است که فضای بین دو دایره به شعاع ۱ و ۲ و مرکزیت مبدأ مختصات است. پس با استفاده

$$S = \iint d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = 2\pi \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} [17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}]$$

از مختصات قطبی داریم:

۲۸- گزینه «۱» با توجه به بسته بودن منحنی C ، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (2 + e^y \sin x - e^y \sin x - 6y) dA = \iint_D (2 - 6y) dx dy$$

با توجه به اینکه ناحیه انتگرال سطح داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{\pi}{4}$ و بالای محور X هاست با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - 6r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2r - 6r^2 \sin \theta) dr d\theta = \int_0^\pi (r^2 - 2r^3 \sin \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{4} \sin \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \left(\frac{\pi^3}{4} \cos \theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{4} (-1 - 1) = -\frac{\pi^2}{4}$$

۲۹- گزینه «۴» مقدار کار انجام شده $-\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ است. علامت منفی به خاطر حرکت در جهت عقربه‌های ساعت است. برای حل این انتگرال ابتدا فرم

پارامتری منحنی C را به دست می‌آوریم. برای این کار داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow (z-1)(z+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

پس منحنی موردنظر به فرم $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z=1 \end{cases}$ است. برای یک دور کامل این منحنی به صورت پارامتری داریم:

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z &= 1 \end{aligned}$$

حالا با جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= (\cos t + \sin t, \sin t + 1, \cos t + 1) \\ \vec{r}(t) &= (\cos t, \sin t, 1) \Rightarrow d\vec{r}(t) = (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} &= (-\sin t \cos t - \sin^2 t + \sin t \cos t + \cos t) dt = \left(\cos t - \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt \\ \Rightarrow W &= \int_0^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \left(\sin t - \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = +\pi \end{aligned}$$

۳۰- گزینه «۳» با توجه به اینکه طبق گفته سؤال سطح مورد اشاره باز است، برای استفاده از قضیه دیورژانس ابتدا دو سطح $z=0$ و $z=1$ را به آن اضافه کرده و داریم:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma - \underbrace{\iint_{z=0} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma}_{I_1} - \underbrace{\iint_{z=1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma}_{I_2}$$

$$I' = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) dv = \iiint_D (0+1+1) dv = 2V_D$$

$$I' = 2(4\pi) = 8\pi$$

که D حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۱ است که برابر $\pi(2^2)(1)$ است. یعنی:

حالا برای دو سطح $z=0$ و $z=1$ داریم:

$$z=0 \Rightarrow \vec{n} d\sigma = (0, 0, -1) dA$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = (y, 2x+y, 0) \cdot (0, 0, -1) dA = 0 \Rightarrow I_1 = 0$$

$$z=1 \Rightarrow \vec{n} d\sigma = (0, 0, 1) dA$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = (y, 2x+y, 1) \cdot (0, 0, 1) dA = 1 dA$$

$$I_2 = \iint_{z=1} 1 dA = A = \pi(2^2) = 4\pi \Rightarrow I = I' - I_1 - I_2 = 8\pi - 0 - 4\pi = 4\pi$$



سؤالات رشته‌ی عمران

۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{e^3}$

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{e^2}$

(۱) $\frac{1}{e^6}$

۲- شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \right)^2 (1-x)^n$ ، کدام است؟

(۴) $R = 1, (-2, 0)$

(۳) $R = 1, (0, 2]$

(۲) $R = \frac{1}{2}, (0, 1]$

(۱) $R = 1, (0, 2)$

۳- حاصل انتگرال $\int_1^2 \frac{(x^2-1)}{x^2+x} dx$ ، کدام است؟

(۴) $\ln \frac{25}{16}$

(۳) $\ln \frac{4}{5}$

(۲) $\ln \frac{5}{2}$

(۱) $\ln \frac{5}{4}$

۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2} \right) \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)$ ، کدام است؟

(۴) $2 \ln 2 - \frac{5}{4}$

(۳) واگراست.

(۲) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

(۱) $2 \ln 2 + \frac{1}{4}$

۵- مساحت بین دو نمودار $y = x^2$ و $y = x^2$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{8}{3}$

(۳) ۸

(۲) $\frac{4}{3}$

(۱) $\frac{16}{3}$

۶- در تابع دو متغیره $z = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ، حاصل $xz_x + yz_y$ به ازای $x = \sqrt{3}$ و $y = 1$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{2\pi}{3}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۲) π

(۱) $\frac{\pi}{3}$

۷- کدام گزینه درباره نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = x^2 - x^2 y^2$ ، درست است؟

(۱) فقط یک نقطه زینی دارد. (۲) فقط یک مینیمم نسبی دارد. (۳) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد. (۴) نقطه بحرانی ندارد.

۸- حاصل $\int_0^1 \int_0^{\sin x} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy dx$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۹- حجم ناحیه بالای صفحه xy محصور شده بین $z = x^2 + y^2$ و $x^2 + y^2 = 4$ ، کدام است؟

(۴) 8π

(۳) 2π

(۲) 16π

(۱) 4π

۱۰- حاصل انتگرال $\iint_D (x+1)^2 y^2 dx dy$ ، که در آن D ناحیه محدود به خطوط $y = x$ ، $y = -x$ و $x = 1$ می باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{49}{90}$

(۱) $\frac{41}{90}$

۱- گزینه «۱» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin^{-1} x - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{6} - x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

۲- گزینه «۳» بازه همگرایی در سری‌های توانی به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ یک بازه متقارن به مرکز $x=c$ است، پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است. حالا کفایت وضعیت همگرایی سری در $x=2$ را بررسی کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \right] (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times 2n}{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)^2} \right] (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right] (-1)^n$$

با توجه به اینکه سری حاصل متناوب است، شروط همگرایی آن را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} \left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right]^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} = 0$$

از طرفی از هم‌ارزی فوق می‌توان فهمید که دنباله مورد نظر نزولی نیز هست، پس سری به ازای $x=2$ متناوب همگراست و گزینه (۳) صحیح است.

۳- گزینه «۱» برای حل این انتگرال به صورت زیر کسر داده شده را تجزیه می‌کنیم:

$$I = \int_1^2 \frac{(x^2-1)}{x^2+x} dx = \int_1^2 \frac{(x^2-1)}{x(x^2+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \right] dx \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ C = 0 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$I = \int_1^2 \left(\frac{-1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = [-\ln x + \ln(x^2+1)]_1^2 = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)_1^2 = \ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln\frac{5}{2}$$

۴- گزینه «۲» حد داده شده را به فرم روبه‌رو بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

$$S = \int_0^1 (1+x) \ln(1+x) dx$$

این حد یک مجموع ریمن است که به‌صورت انتگرال روبه‌رو قابل حل است:

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ (1+x) dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}(1+x)^2 \end{cases} \Rightarrow S = uv - \int v du$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(1+x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}(1+x)^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}(4-1) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4}$$

۵- گزینه «۴» ابتدا دو نمودار را با هم تقاطع می‌دهیم تا بازه انتگرال را به‌دست آوریم:

$$x = y^2 = \left(\frac{1}{\lambda} x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} x^{\frac{1}{2}} - x = 0 \Rightarrow x \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2} - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0, \lambda^4$$

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_0^{\lambda^4} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\lambda} x^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_0^{\lambda^4} = \frac{2}{3} (\lambda^6) - \frac{1}{2\lambda} (\lambda^6) = \frac{\lambda}{3}$$

مساحت موردنظر برابر است با:



۶- گزینه «۲» تابع Z همگن از درجه ۲ است، در نتیجه با استفاده از قضیه اویلر داریم:

$$xz_x + yz_y = 2z = 2x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} = 2(x^2) \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi$$

۷- گزینه «۱» با محاسبه مشتقات جزئی و نقاط بحرانی تابع داریم:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 2xy^2 = 0 \\ f_y = -2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = x(3x - 2y^2) = 0 \\ f_y = -2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0)$$

حالا مبین دلتا را در تنها نقطه بحرانی تابع بررسی می‌کنیم:

$$f_{xx} = 6x - 2y^2$$

$$f_{xy} = -4xy$$

$$f_{yy} = -2x^2$$

$$\Delta = (6x - 2y^2)(-2x^2) - (-4xy)^2 = -2x^2(6x - 2y^2) - 16x^2y^2 = -2x^2(6x - 10y^2)$$

با توجه به اینکه مبین دلتا در مبدأ صفر است، نمی‌توان نوع نقطه را به صورت مستقیم مشخص کرد. در نزدیکی مبدأ f_{yy} همواره نامثبت است، اما f_{xx} تغییر علامت می‌دهد؛ مثلاً در $(2\epsilon, 0)$ یک عدد فوق‌العاده کوچک مثبت است) داریم $f_{xx} > 0$ و در $(-2\epsilon, 0)$ داریم $f_{xx} < 0$. پس مبدأ مختصات یک نقطه زینی این تابع است.

۸- گزینه «۳» انتگرال داده شده به راحتی با استفاده از روابط اصلی انتگرال قابل حل است و داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sin x} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy dx = \int_0^1 x \text{Arcsin}(\sin x) dx = \int_0^1 x \underbrace{\text{Arcsin}(\sin x)}_{=x} dx = \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^1 = \frac{1}{3}$$

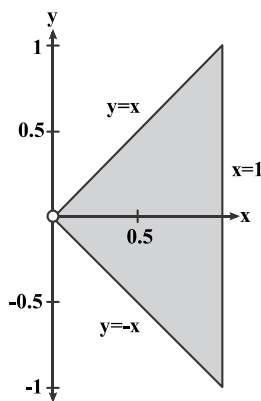
۹- گزینه «۴» برای محاسبه این حجم از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. تصویر ناحیه بر صفحه xOy ، دایره $x^2 + y^2 = 4$ است. پس داریم:

$$V = \iiint_D dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^2 r dz dr d\theta = (2\pi) \int_0^2 r^2 dr = \left(\frac{2\pi}{3}r^3\right)_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

۱۰- گزینه «۲» ابتدا ناحیه مورد اشاره را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل واضح است که ناحیه و تابع زیر انتگرال هر دو نسبت به متغیر y متقارن هستند، پس کافی است مقدار انتگرال را فقط برای نیمه واقع در ربع اول محاسبه کرده و حاصل را دو برابر کنیم. پس داریم:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+1)^2 y^2 dx dy = 2 \iint_{D^+} y^2 (x+1)^2 dy dx = 2 \int_0^1 \int_0^x y^2 (x+1)^2 dy dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{3} x^2 (x+1)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2) dx \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{17}{30} \right) = \frac{34}{45} \end{aligned}$$



سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱- اگر A مجموعه جواب‌های معادله $z^{1401} + \frac{1}{z^{1401}} = 2 \cos(1401\pi)$ باشد، آنگاه مجموعه $\left\{ z + \frac{1}{z} : z \in A \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۷۰۱ (۲) ۲۸۰۲ (۳) ۷۰۰ (۴) ۱۴۰۱

۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^n$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) e (۳) -1 (۴) ۱

۳- به‌ازای کدام بازه از مقادیر θ سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} \theta}{n}$ همگرای مطلق است؟

- (۱) $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$ (۲) $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right]$ (۳) $\left[\pi, \frac{5\pi}{4} \right]$ (۴) $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$

۴- ضریب x^{20} در سری مک‌لورن تابع $y = \sqrt{1+x^2}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2^{20}} \frac{19!}{(10!)^2}$ (۲) $-\frac{1}{2^{19}} \frac{18!}{9! \times 10!}$ (۳) $\frac{1}{2^{19}} \frac{19!}{9! \times 10!}$ (۴) $-\frac{1}{2^{19}} \frac{19!}{(10!)^2}$

۵- حاصل $\int_1^{\pi} \cos(\ln x) dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{e^2 - 1}$ (۲) $\frac{\pi}{e^2}$ (۳) $\frac{\pi}{e^2 - 1}$ (۴) $\frac{\pi}{e^2}$

۶- فاصله نزدیک‌ترین نقطه از محل تقاطع رویه‌های $\frac{z}{\lambda} = x - y + 2z$ ، $z = 2x^2 + 2y^2$ به مبدأ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{3\sqrt{7}}{16}$

۷- مساحت رویه حاصل از دوران بخشی از منحنی $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$) که در ربع اول صفحه مختصات قرار دارد، حول محور y ها کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}\pi a^2$ (۲) $2\sqrt{2}\pi a^2$ (۳) πa^2 (۴) $2\pi a^2$

۸- صفحه مماس بر رویه S به معادله $xyz^2 = 4$ در نقطه $(1, 2, 1)$ کدام است؟

- (۱) $x + 3y + z = 8$ (۲) $3x + y + 3z = 8$ (۳) $x + y + 3z = 6$ (۴) $3x + y + z = 6$

۹- حاصل $\iint_R (x^2 - xy + y^2) dA$ که در آن R در ناحیه اول محصور به بیضی $x^2 - xy + y^2 = 2$ است، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \pi$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{9} \pi$ (۴) $\frac{4\sqrt{3}}{9} \pi$

۱۰- حاصل $\iint_S \text{curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma$ که در آن S رویه $x \geq 0$ ؛ $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$ و بردار نرمال رویه S است و

$\vec{F}(x, y, z) = (xz - y^2 \cos z) \vec{i} + x^2 e^{yz} \vec{j} + xyz e^{x^2+y^2+z^2} \vec{k}$ ، کدام است؟

- (۱) 8π (۲) 24π (۳) 4π (۴) 16π

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱- گزینه «۱» با توجه به این که $\cos(1401\pi) = \cos(1400\pi + \pi) = -1$ می‌باشد، داریم:

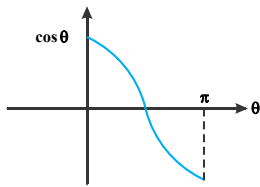
$$z^{1401} + \frac{1}{z^{1401}} = -2 \xrightarrow{z^{1401}=t} t + \frac{1}{t} = -2 \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$z^{1401} = -1 = e^{i\pi} = e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow e^{1401\theta i} = e^{i(\pi+2k\pi)} = \theta = \frac{(2k+1)\pi}{1401}$$

پس داریم:

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta - i \sin \theta) = 2 \cos \theta$$

انکون $z + \frac{1}{z}$ را محاسبه می‌کنیم:



برای آن‌که معادله جواب‌های تکراری نداشته باشد، باید بازه‌ای را برای $\cos \theta$ انتخاب کنیم که $\cos \theta$ در آن بازه یک به یک باشد، یعنی:

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq (2k+1)\frac{\pi}{1401} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 2k+1 \leq 1401$$

پس داریم:

$$\Rightarrow -1 \leq 2k \leq 1400 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq 700 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 700$$

که این مجموعه با احتساب عدد صفر ۷۰۱ عضو دارد.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^n = 1^\infty = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(\cos \frac{\pi}{n} - 1)}$$

۲- گزینه «۴» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است؛ در نتیجه خواهیم داشت:

حالا حد $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\cos \frac{\pi}{n} - 1)$ که به فرم $\infty \times 0$ مبهم است به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\cos \frac{\pi}{n} - 1) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\pi^2}{2n} = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

۳- گزینه «۳» برای شرط همگرایی مطلق تابع توانی داده شده باید $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{r^n \sin^n \theta}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin^n \theta}{n}$ همگرا باشد. برای بررسی همگرایی این

سری با کمک آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(\theta, n)|} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{r^n \sin^n \theta}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} r \sin \theta < 1 \Rightarrow \sin \theta < \frac{1}{r} \Rightarrow |\sin \theta| < \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است. برای تشخیص گزینه صحیح فقط کافی است یکی از نقاط سر بازه را که در گزینه‌ها یکسان نیست، بررسی کنیم:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin^n \theta}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \left(-\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

می‌دانیم که سری هارمونیک بدست آمده واگراست، پس گزینه (۳) صحیح است.

۴- گزینه «۲» با استفاده از بسط مک‌لورن تابع $(1+u)^k$ داریم:

$$y = (1+x^r)^{\frac{1}{r}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{r}-n+1\right)}{n!} (x^r)^n$$

$$x^{r^0} \Rightarrow n=1^0 \Rightarrow a_{1^0} = \frac{\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r}-1\right) \left(\frac{1}{r}-2\right) \left(\frac{1}{r}-3\right) \left(\frac{1}{r}-4\right) \left(\frac{1}{r}-5\right) \left(\frac{1}{r}-6\right) \left(\frac{1}{r}-7\right) \left(\frac{1}{r}-8\right) \left(\frac{1}{r}-9\right)}{10!}$$

$$a_{1^0} = \frac{\frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r}\right) \left(-\frac{3}{r}\right) \left(-\frac{5}{r}\right) \left(-\frac{7}{r}\right) \left(-\frac{9}{r}\right) \left(-\frac{11}{r}\right) \left(-\frac{13}{r}\right) \left(-\frac{15}{r}\right) \left(-\frac{17}{r}\right)}{10!} = \frac{-1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 17}{r^{10} (10!)} = -\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \cdots \times 17 \times 18}{r^{10} (10!)}$$

$$a_{1^0} = -\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \cdots \times 17 \times 18}{r^{10} (10! \times 9)} = -\frac{1}{r^{19}} \frac{18!}{9! \times 10!}$$

۵- گزینه «۳» برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $\ln x = u$ استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos(\ln x) dx$$

$$\ln x = u \Rightarrow \begin{cases} x = e^u \Rightarrow dx = e^u du \\ x = 1 \Rightarrow u = 0, \quad x = e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)(e^u du)$$

پس انتگرال برحسب متغیر u به صورت مقابل خواهد بود:

برای حل انتگرال حاصل نیز کافی است دو بار از روش جزء به جزء استفاده کنیم یا از این نکته زیر کمک بگیریم که:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c$$

$$I = \frac{e^u}{1+1} (\cos u + \sin u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

پس به راحتی داریم:

البته در صورتی که رابطه انتگرال فوق را به خاطر نداشته باشید، می‌توانید از جدول جزء به جزء به صورت زیر استفاده نمایید:

$$\begin{array}{r|l} + e^u & \cos u \\ - e^u & \sin u \\ + e^u & -\cos u \end{array}$$

$$I = e^u \sin u + e^u \cos u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^u \cos u du \Rightarrow I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + (-I) \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

۶- گزینه «۱» اگر دقت کنید، با فرض اینکه هر نقطه از منحنی تقاطع دو رویه به صورت (x, y, z) باشد، خواسته سؤال پیدا کردن مینیمم مقدار

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ با شروط $z = 2x^2 + 2y^2$ و $x - y + 2z = \frac{3}{\lambda}$ است. برای سادگی کار ابتدا دو شرط را با هم ادغام می‌کنیم و همچنین فقط عبارت

زیر رادیکال را مینیمم می‌کنیم و خود رادیکال را در محاسبات دخالت نمی‌دهیم:

$$C: x - y + 2(2x^2 + 2y^2) = \frac{3}{\lambda}$$

$$D = x^2 + y^2 + (2x^2 + 2y^2)^2$$

حالا برای تابع D دو متغیره و شرط حاصل از روش ساده شده لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\frac{C_x}{D_x} = \frac{C_y}{D_y} \Rightarrow \frac{1 + 4\lambda x}{2x + 4\lambda x(2x^2 + 2y^2)} = \frac{-1 + 4\lambda y}{2y + 4\lambda y(2x^2 + 2y^2)} \Rightarrow 2y = -2x \Rightarrow y = -x$$

$$C: x - (-x) + 2(2x^2 + 2(-x)^2) = \frac{3}{\lambda} \Rightarrow 4x^2 + 2x - \frac{3}{\lambda} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right), B\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$$

از بین دو نقطه حاصل واضح است که نقطه A به مبدأ نزدیک‌تر است. فاصله موردنظر برابر است با:

$$d = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{256}} = \sqrt{\frac{9}{256}} = \frac{3}{16}$$

۷- گزینه «۱» با استفاده از رابطه مساحت سطح حاصل از دوران منحنی حول محورها داریم:

$$S = 2\pi \int_a^b r \cos \theta \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta$$

$$r^2 = a^2 \cos^2 \theta \Rightarrow r = a \sqrt{|\cos \theta|}$$

از آنجایی که $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ است، $0 \leq \cos \theta \leq 1$ خواهد بود و نیازی با قدرمطلق ندارد. در نتیجه داریم:

$$r = a \sqrt{\cos \theta} \Rightarrow r' = \frac{-a \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}} \Rightarrow r'^2 + r^2 = a^2 \cos \theta + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{a^2}{\cos \theta}$$

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{|\cos \theta|} \cos \theta \sqrt{\frac{a^2}{\cos \theta}} d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos \theta d\theta = 2\pi a^2 \left(\sin \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \pi a^2$$

۸- گزینه «۳» بردار نرمال صفحه مماس، در راستای بردار گرادیان در نقطه تماس است. در نتیجه داریم:

$$f(x, y, z) = xyz - 4 = 0$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (y^2 z^2, 2xyz^2, 2xy^2 z^2) \xrightarrow{(1,2,1)} \vec{\nabla} f(1,2,1) = (4, 4, 12) \parallel (1, 1, 3)$$

واضح است که گزینه (۳) صحیح است.

۹- گزینه «۴» ابتدا با تغییر متغیر $x = u + v$ و $y = u - v$ معادله مرزهای ناحیه جدید D در صفحه uov را به دست می آوریم:

$$x^2 - xy + y^2 = 2 \Rightarrow (u+v)^2 - (u+v)(u-v) + (u-v)^2 = 2u^2 + 2v^2 - (u^2 - v^2) = u^2 + 3v^2 = 2$$

با توجه به اینکه x و y را بر حسب u و v داریم، مستقیماً J_{uv} را محاسبه کرده و داریم:

$$J_{uv} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow dA = |-2| du dv$$

$$x, y \geq 0 \Rightarrow -v \leq u \leq v$$

$$I = \iint_R (x^2 - xy + y^2) dA = \iint_D (u^2 + 3v^2) 2 du dv$$

$$\text{حالا ناحیه انتگرال گیری محدود به بیضی } \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{\frac{2}{3}} = 1 \text{ در ناحیه اول است. با تغییر متغیر } \begin{cases} X = \frac{u}{\sqrt{2}} \\ Y = \frac{v}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \end{cases} \text{ معادله بیضی به } X^2 + Y^2 = 1 \text{ تبدیل می شود که}$$

قوس آن محدود به زوایای $-\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ است (D').

$$J_{XY} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow du dv = \frac{2}{\sqrt{3}} dX dY$$

$$-v \leq u \leq v \Rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} Y \leq \sqrt{2} X \leq \sqrt{\frac{2}{3}} Y \Rightarrow -\frac{Y}{\sqrt{3}} \leq X \leq \frac{Y}{\sqrt{3}}$$

$$I = \iint_D (u^2 + 3v^2) 2 du dv = \iint_{D'} (2X^2 + 2Y^2) 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) dX dY$$

$$I = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{r^4}{4}\right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi$$

برای حل این انتگرال با استفاده از مختصات قطبی داریم:

۱۰- گزینه «۲» بهتر است از نتیجه‌ی قضیه استوکس کمک بگیریم. یعنی به جای اینکه روی سطح S انتگرال سطح را حساب کنیم، روی سطح $z=0$ که دارای

مرز مشترک با این رویه است، انتگرال سطح را حساب کنیم.

اولاً توجه کنید که بر روی سطح $z=0$ بردار قائم یک $\vec{n} = \pm \vec{k}$ است و چون در نتیجه‌ی قضیه استوکس جهت بردار قائم یک بر سطح جدید، با جهت بردار قائم یک سطح اصلی یکسان است، پس $\vec{n} = +\vec{k}$ است. حالا باید $\text{curl} \vec{F}$ را حساب کنیم؛ اما قبل از آن توجه کنید که چون $\text{curl} \vec{F}$ قرار است در $\vec{n} = \vec{k}$ ضرب شود، پس مؤلفه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ آن به درد ما نمی خورد و در محاسبه‌ی $\text{curl} \vec{F}$ فقط مؤلفه‌ی سوم را حساب می کنیم. (این کار، برای کاهش حجم محاسبات و ذخیره زمان در روز آزمون صورت می گیرد!)

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - y^2 \cos z & x^2 e^z & xyz e^{x^2+y^2+z^2} \end{vmatrix} \xrightarrow{z=0} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 2(x^2 + y^2) dA$$

حالا باید مقدار $\text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ را در انتگرال جایگذاری کنیم و روی ناحیه D انتگرال را حساب کنیم، اما قبل از آن بهتر است تکلیف ناحیه D را معلوم کنیم

$$x^2 + y^2 + 2(0-1)^2 = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

که کار راحتی است. کافی است در معادله‌ی S به جای z ، عدد صفر را قرار دهیم:

پس D دایره‌ای به شعاع ۲ است.

$$\iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D 2(x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^2 (r dr d\theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^3 dr = 2\pi \left[\frac{2r^4}{4}\right]_0^2 = 24\pi$$

سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱- دامنه تابع $f(x) = \log \frac{2-x}{x\sqrt{x^2-2x+2}}$ ، کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(-\infty, 2)$

۲- مساحت رویه دوار حاصل از دوران منحنی $y = \sin^2 t$ و $x = 2 \cos^2 t$ ، حول محور x ها کدام است؟

- (۱) 6π (۲) $\frac{24\pi}{5}$ (۳) 12π (۴) $\frac{48\pi}{5}$

۳- مساحت کل ناحیه بسته درون منحنی قطبی $r = \cos 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۴- حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور به محور y ها و یک طاق از منحنی $x = 1 - \cos t$ و $y = t - \sin t$ ، حول محور y ها، کدام است؟

- (۱) $4\pi^2$ (۲) $5\pi^2$ (۳) $6\pi^2$ (۴) $7\pi^2$

۵- در کدام بازه سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n \ln n}$ ، همگرایی مطلق است؟

- (۱) $(-1, 2)$ (۲) $[-1, 2)$ (۳) $(-1, 2]$ (۴) $[-1, 2]$

۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1 - 2x) \ln(1 - x^2)}{(1 - \cos 3x)^n} = a$ باشد، مقدار $\frac{a}{n}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-16\sqrt{2}}{5 \times 3^5}$ (۲) $\frac{8\sqrt{2}}{5 \times 3^5}$ (۳) $\frac{16\sqrt{2}}{3^5}$ (۴) $\frac{-8\sqrt{2}}{5 \times 3^5}$

۷- فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مقدار $f_{yx}(0, 0)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) وجود ندارد.

۸- مقدار مشتق سویی مرتبه دوم تابع $f(x, y) = x^2 e^{(xy)}$ ، در نقطه $(1, 0)$ در سویی که با جهت مثبت محور x ها زاویه ۴۵ درجه می‌سازد، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{9}{2}$

۹- فرض کنید $A = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + 1)^k}$ ، به ازای کوچک‌ترین مقدار صحیح ممکن برای k همگرا باشد، مقدار A کدام است؟ ($\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است.)

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) 2π (۳) π (۴) $\frac{2\pi}{2}$

۱۰- فرض کنید S سطح واقع بر کره $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ باشد، که در بالای صفحه xy قرار گرفته است. اگر میدان نیروی $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \cos(xz)\hat{i} + x^2 e^{(yz)}\hat{j} - e^{-(xyz)}\hat{k}$ ، از سطح S گذر کند، مقدار $\iint_S \text{Curl} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ کدام است؟ ($\hat{n}$ بردار قائم یکه برونسو بر سطح S است.)

- (۱) 8π (۲) 10π (۳) 12π (۴) 16π

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» برای تعیین دامنه این تابع به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$y = \log \frac{2-x}{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \log \frac{2-x}{x - \sqrt{(x-1)^2 + 1}}$$

$$\frac{2-x}{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}} > 0 \Rightarrow \frac{(2-x)(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2})}{x^2 - (x^2 - 2x + 2)} = \frac{(2-x)(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2})}{2(x-1)} > 0$$

درخصوص عبارت $\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ توجه داشته باشید که عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است. پس فقط باید نامساوی اخیر را تعیین علامت کنیم. با توجه به اینکه عبارت $x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1$ را می‌توان به صورت $1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1} + (x-1)$ نوشت، واضح است این عبارت همواره مثبت است. پس فقط داریم:

$$\frac{(2-x)}{2(x-1)} > 0 \Rightarrow x \in (1, 2)$$

۲- گزینه «۴» با استفاده از رابطه مساحت حاصل از دوران منحنی‌های پارامتری حول محور x ها داریم:

$$S = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

برای تعیین حدود انتگرال، توجه داشته باشید که چون معادله منحنی را می‌توان به صورت $\left(\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ نوشت و در این معادله تغییر x به $-x$ و y به $-y$ معادله را تغییر نمی‌دهد، پس منحنی نسبت به همه محورهای متقارن است و مساحت رویه حاصل از دوران نیمه بالایی منحنی بر مساحت حاصل از نیمه پایینی منطبق می‌شود و کافی است فقط نیمه بالایی که به ازای $0 \leq t \leq \pi$ به دست می‌آید را تعیین کنیم.

از طرفی مساحت قسمت مربوط به $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ نیز با مساحت متناظر با قسمت $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi$ برابر خواهد بود، در نتیجه کافی است مساحت حاصل از دوران منحنی در ربع اول را محاسبه کرده و حاصل را دو برابر کنیم:

$$S = 2 \times 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin^3 t \sqrt{(-\rho \sin t \cos^2 t)^2 + (\rho \cos t \sin^2 t)^2} dt = 4\pi \rho^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t \sqrt{(\sin t \cos t)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt$$

$$= 4\pi \rho^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t (\sin t \cos t) dt = 4\pi \rho^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t (\cos t dt) = \frac{4\pi \rho^2}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi \rho^2}{5}$$

۳- گزینه «۳» منحنی مورد اشاره یک رز ۴ برگ است که با توجه به تقارن شکل کافی است مساحت محصور به وسیله منحنی در فاصله $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ را محاسبه کرده و سپس حاصل انتگرال را در ۸ ضرب کنیم.

$$S = 8 \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2 (1 + \cos 2\theta)}{2} d\theta = \rho^2 \left(\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \rho^2 \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) = \frac{\pi \rho^2}{4}$$

۴- گزینه «۲» با توجه به رابطه حجم حاصل از دوران یک منحنی پارامتری حول محور y ها داریم:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

ابتدا باید حدود انتگرال را تعیین کنیم. برای این کار با توجه به اینکه از تقاطع با محور y ها به $x = 0$ یا به عبارتی $t = 0, 2\pi$ می‌رسیم. در نتیجه داریم:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + 3\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) - \left(\frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}\right) \right] dt = \pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{5}{4} - 3\cos t + \frac{3\cos 2t}{2} - \frac{\cos 3t}{4} \right] dt = \pi \times \frac{5}{4} \times 2\pi = \frac{5\pi^2}{2}$$

۵- گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها نیازی به محاسبه بازی همگرایی نیست و فقط کافی است وضعیت همگرایی سری در دو سر بازه را بررسی کنیم:

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n L_{nn}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L_{nn}}$$

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{2^n L_{nn}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{nn}}$$

با توجه به اینکه قدرمطلق عبارت درون سری به صورت $\frac{1}{L_{nn}}$ بوده و این سری همواره واگراست، پس دو سر بازه باید باز باشد و گزینه (۱) صحیح است.

۶- گزینه «۱» حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است. برای اینکه این حد را رفع ابهام کنیم، ابتدا به صورت زیر بسط توابع صورت و مخرج را می‌نویسیم:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \dots - 1 - 2x)(-x^2 - \frac{x^6}{2} - \dots)}{(1 - 1 + \frac{(3x)^2}{2} - \dots)^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{(2x)^2}{2} + \dots)(-x^2 - \frac{x^6}{2} - \dots)}{(\frac{(3x)^2}{2} - \dots)^n}$$

با توجه به هم‌ارزی توابع چندجمله‌ای در همسایگی $x = 0$ ، حد فوق به صورت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2)(-x^2)}{(\frac{9x^2}{2})^n}$ خواهد بود. برای همگرایی این حد به عددی حقیقی غیر

از صفر، باید توان x در صورت و مخرج برابر باشد. یعنی $n = \frac{5}{2} \Rightarrow 2n = 5$ پس حد نهایی به صورت زیر است و داریم:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^5}{(\frac{9}{2})^{\frac{5}{2}} x^5} = \frac{-2 \times 2^{\frac{5}{2}}}{(3^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2 \times 4\sqrt{2}}{3^5} = \frac{-8\sqrt{2}}{3^5} \Rightarrow \frac{a}{n} = \frac{\frac{-8\sqrt{2}}{3^5}}{\frac{5}{2}} = \frac{-16\sqrt{2}}{5 \times 3^5}$$

۷- گزینه «۲» ابتدا f_y را در همه نقاط به دست می‌آوریم، توجه کنید که برای محاسبه این مقادیر در مبدأ باید از تعریف استفاده کنیم چون ضابطه تابع f در مبدأ تغییر می‌کند. ولی برای محاسبه f_y در سایر نقاط فقط کافی است از ضابطه داده شده مشتق بگیریم:

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y = \begin{cases} \frac{2x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

حال اگر f_y به دست آمده در بالا را به عنوان یک تابع بر x و y در نظر بگیریم، می‌توانیم مشتق جزئی آن را نسبت به x در مبدأ محاسبه کنیم.

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 0}{h} = 2$$

۸- گزینه «۴» ابتدا مشتق سویی مرتبه اول f را در نقطه دلخواه $p(x,y,z)$ به دست می‌آوریم. یک‌ه شده بردار جهت مورد اشاره به صورت $(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$$D_{\vec{u}}f(p) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{u} = ((2x + yx^2)e^{xy}, x^2e^{xy}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x + yx^2 + x^2)e^{xy}$$

است، بنابراین داریم:

قرار می‌دهیم $g = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x + yx^2 + x^2)e^{xy}$ در این صورت برای به دست آوردن مشتق سویی مرتبه دوم f کافی است $D_{\vec{u}}g(p)$ را به دست آوریم:

$$D_{\vec{u}}g(p) = \vec{\nabla}g \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}((2 + 4xy + 2x^2 + y^2x^2 + yx^2)e^{xy}, (2x^2 + yx^2 + x^2)e^{xy}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{1}{2}(2 + 4xy + 6x^2 + y^2x^2 + 2yx^2 + x^4)e^{xy}$$

که در نقطه $(1,0)$ مقدار مشتق سویی فوق برابر $\frac{9}{2}e^0 = \frac{9}{2}(2 + 0 + 6 + 0 + 0 + 1) = 9$ است.

۹- گزینه «۳» ابتدا انتگرال داده شده را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+1)^k} dr d\theta = 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+1)^k} dr$$

باید وضعیت ناسرگی انتگرال در دو سر بازه انتگرال را بررسی کنیم. برای این کار ابتدا آن را به صورت $\int_0^1 \frac{r}{(r^2+1)^k} dr + \int_1^\infty \frac{r}{(r^2+1)^k} dr$ می‌نویسیم. در همسایگی $x = 0$ انتگرال I_1 هم‌ارز $\int_0^1 \frac{r}{(1)^k} dr$ است که همگرا خواهد بود. در مورد انتگرال I_2 نیز با استفاده از هم‌ارزی در بی‌نهایت داریم:

$$\int_1^\infty \frac{r}{(r^2+1)^k} dr \sim \int_1^\infty \frac{r}{r^{2k}} dr = \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2k-1}}$$

انتگرال فوق به ازای $k > 1 \Rightarrow 2k - 1 > 1$ همگرا خواهد بود. کوچک‌ترین مقدار صحیح برای k مقدار ۲ خواهد بود که در نهایت داریم:

$$A = 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+1)^2} dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2+1} \right)_0^\infty = 2\pi \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \pi$$



۱۰-گزینه «۳» برای حل این انتگرال از نتیجه قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. ابتدا سطح S' را که از تقاطع صفحه xOy با ضابطه کره به‌دست می‌آید، مشخص می‌کنیم. برای این کار با قرار دادن $z = 0$ ، داریم $x^2 + y^2 = 4$ که ناحیه داخل یک دایره به شعاع ۲ است و چون $\vec{n}$ بردار رو به خارج برای سطح S است، بردار قائم سطح جدید را می‌توان $\vec{k}$ در نظر گرفت و لذا داریم:

$$I = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S'} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \iint_{S'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS = \iint_{z=0} (3x^2 e^{yz} - 2y \cos xz) dS = \iint_{S'} (3x^2 - 2y) dA$$

درون ناحیه $x^2 + y^2 = 4$ نسبت به متغیر y متقارن است، در نتیجه در انتگرال فوق حاصل انتگرال عبارت $-2y$ که نسبت به این متغیر فرد است برابر صفر خواهد بود. در ادامه برای محاسبه انتگرال با کمک مختصات قطبی داریم:

$$I = \iint_{S'} 3x^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = \int_0^{2\pi} 3r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \left(\frac{3}{4} r^4 \right)_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = 12\pi$$

سؤالات رشته‌ی مهندسی نقشه‌برداری و مهندسی کامپیوتر

۱- به‌ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \leq ۱۰۰۱$ ، تساوی $\sin(n\theta) + i \cos(n\theta) = (\sin \theta + i \cos \theta)^n$ برقرار است؟

- (۱) ۲۵۰ (۲) ۲۵۱ (۳) ۵۰۰ (۴) ۵۰۱

۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sin^n \frac{\pi}{3} + \sin^n \frac{2\pi}{4} + \sin^n \frac{5\pi}{6}}{3}}$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳- کدام مورد، درباره تابع $F(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$ بر $\mathbb{R}$ درست است؟

- (۱) تابع F در نقاط $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ دارای اکسترمم نسبی است، ولی کران‌دار نیست.
(۲) تابع F کران‌دار است و در نقاط $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ دارای اکسترمم مطلق است.
(۳) تابع F کران‌دار است، ولی اکسترمم ندارد.
(۴) تابع F اکسترمم نسبی ندارد و کران‌دار نیست.

۴- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{13}(e^{\frac{2\pi}{2}} + 1)$ (۲) $\frac{2}{13}(e^{\frac{2\pi}{2}} - 1)$ (۳) $\frac{3}{13}(e^{\frac{2\pi}{2}} - 1)$ (۴) $\frac{3}{13}(e^{\frac{2\pi}{2}} + 1)$

۵- اگر $f(x) = x^2 - \frac{1}{3!}x^5 + \frac{1}{5!}x^7 - \frac{1}{7!}x^9 + \dots$ ، آنگاه $f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) π

۶- طول قوس منحنی $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ ، از نقطه $x = ۱$ تا نقطه $x = ۲$ ، کدام است؟

- (۱) $\ln(e + \frac{1}{e})$ (۲) $\ln(e - \frac{1}{e})$ (۳) $\ln(e^2 + \frac{1}{e^2})$ (۴) $\ln(e^2 - \frac{1}{e^2})$

۷- انحنای منحنی فصل مشترک دو رویه $y\sqrt{z} + z = ۱$ و $x^2 + 4y^2 = ۴$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۸- مینیمم تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ با شرط $x - 2y - z = ۴$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۹- مشتق سویی تابع زیر در نقطه $(0, 0)$ در جهت کدام بردار موجود است؟

- (۱) $i - j$ (۲) $i + j$ (۳) $i - j$ (۴) $i + j$
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x-y} & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases}$

۱۰- حاصل $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$ که در آن D محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ محور y ها و خط $y = ۱$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۱- مساحت بریده شده از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ توسط استوانه $ax = x^2 + y^2$ کدام است؟

- (۱) $a^2(\pi - ۱)$ (۲) $a^2(\pi - ۲)$ (۳) $a^2(\pi - ۳)$ (۴) $a^2(\pi - ۱)$

۱۲- مقدار $\iint_S F \cdot d\vec{\sigma}$ به‌ازای میدان برداری $F(x, y, z) = xz\vec{i}$ و رویه S به معادله $z = 4 - x^2 - y^2$ بالای صفحه $z = 0$ و بردار $\vec{n}$ قائم یک‌ه برون‌سوی

رویه S کدام است؟

- (۱) $\frac{128}{3}\pi$ (۲) $\frac{64}{3}\pi$ (۳) $\frac{32}{3}\pi$ (۴) $\frac{16}{3}\pi$



توجه: برای رشته مهندسی کامپیوتر مجموعاً ۶ سؤال ریاضی طرح شده است که سؤالات (۱، ۳، ۵، ۶، ۹ و ۱۳) طراحی شده است، که سؤالات (۱، ۳، ۵ و ۶) با رشته مهندسی نقشه‌برداری مشترک می‌باشد.

سؤال ۱۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) حد وجود ندارد.

پاسخنامه رشته‌ی مهندسی نقشه‌برداری

۱- گزینه «۲» با توجه به فرمول دموآر برای هر عدد طبیعی n داریم $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ حالا با اندکی بازنویسی در تساوی داده شده داریم:

$$i^n (\cos n\theta - i \sin n\theta) = \begin{cases} i \cos n\theta + \sin n\theta & ; \quad n = 4k+1 \\ -\cos n\theta + i \sin n\theta & ; \quad n = 4k+2 \\ -i \cos n\theta - \sin n\theta & ; \quad n = 4k+3 \\ \cos n\theta - i \sin n\theta & ; \quad n = 4k \end{cases}$$

واضح است به ازای مقادیری از n به صورت $4k+1$ ، که در آن k یک عدد صحیح نامنفی است، تساوی مورد نظر برقرار است؛ در نتیجه داریم:

$$1 \leq 4k+1 \leq 1001 \Rightarrow 0 \leq 4k \leq 1000 \Rightarrow 0 \leq k \leq 250$$

می‌دانیم تعداد اعداد صحیح در یک بازه دو سر بسته به صورت $250 - 0 + 1 = 251$ محاسبه می‌شود.

۲- گزینه «۴» با توجه به مقادیر هریک از توابع مثلثاتی زیر رادیکال و سرعت رشد توابع نمایی در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sin^n \frac{\pi}{3} + \sin^n \frac{2\pi}{3} + \sin^n \frac{4\pi}{3}}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^n + (\frac{\sqrt{3}}{2})^n + (\frac{1}{2})^n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt[n]{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳- گزینه «۳» با استفاده از مشتق‌گیری از انتگرال و بررسی نقاط بحرانی تابع داریم:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt \Rightarrow F'(x) = \frac{\sin^2 x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

به ازای مقادیر x به فرم فوق مشتق تابع صفر می‌شود، اما چون توان $\sin x$ زوج است و $1+x^2$ همواره مثبت است، مقدار مشتق در دو طرف این نقاط تغییر

$$\begin{cases} 1 < 1+t^2 < \infty \\ 0 \leq \sin^2 t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin^2 t}{1+t^2} < 1$$

علامت نمی‌دهد، در نتیجه این نقاط اکسترمم نیستند. از طرفی داریم:

با توجه به اینکه تابع زیر انتگرال محدود است، به ازای مقایر محدود x این انتگرال همگرا و در نتیجه تابع کران‌دار است. فقط باید به ازای $x \rightarrow \infty$ وضعیت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \tan^{-1} t \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

تابع را بررسی کنیم. در این حالت داریم:

پس تابع مورد اشاره همواره کران‌دار است.

۴- گزینه «۴» روش اول: برای حل این انتگرال از رابطه $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + c$ کمک گرفته و داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2x} \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{4+9} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{13} [e^{\frac{2\pi}{3}} (0+3) - e^0 (0-3)] = \frac{3}{13} [e^{\frac{2\pi}{3}} + 1]$$

روش دوم: برای حل این‌گونه انتگرال‌ها که حاصلضرب یک تابع مثلثاتی در تابع نمایی است، می‌توان از روش جزء به جزء به صورت زیر کمک گرفت:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2x} \sin 3x dx$$

$$\sin 3x = u \Rightarrow 3 \cos 3x = du, \quad e^{2x} dx = dv \Rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} = v$$

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x dx = 0 - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x dx}_{I'}$$

حالا برای حل انتگرال I' دوباره از روش جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} e^{2x} \cos 2x dx$$

$$\cos 2x = u \Rightarrow -2 \sin 2x = du, \quad \frac{1}{x} e^{2x} dx = dv \Rightarrow \frac{1}{x} e^{2x} = v$$

$$I' = \frac{1}{x} e^{2x} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} e^{2x} \sin 2x dx = \frac{1}{x} (-e^{2x} - 1) + \frac{1}{x} I$$

$$\Rightarrow I = -I' = \frac{1}{x} (e^{2x} + 1) - \frac{1}{x} I \Rightarrow \frac{1}{x} I = \frac{1}{x} (e^{2x} + 1) \Rightarrow I = \frac{1}{x} (e^{2x} + 1)$$

۵- گزینه «۴» با توجه به بسط مک‌لورن $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ داریم:

$$f(x) = x^2 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^9}{7!} + \dots = x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = x^2 \sin x$$

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$$

۶- گزینه «۱» با استفاده از رابطه طول قوس منحنی داریم:

$$y = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x-1)$$

برای محاسبه عبارت مقابل انتگرال داریم:

$$y' = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)} \Rightarrow y'^2 = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \Rightarrow 1+y'^2 = 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$$

حالا با جایگذاری در انتگرال اولیه خواهیم داشت:

$$L = \int_1^2 \left| \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \right| dx = \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx = \int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx = \ln(e^x-e^{-x}) \Big|_1^2 = \ln\left(\frac{e^2-e^{-2}}{e^1-e^{-1}}\right) = \ln\left[\frac{(e^1-e^{-1})(e^1+e^{-1})}{e^1-e^{-1}}\right] = \ln(e+\frac{1}{e})$$

۷- گزینه «۲» منحنی R فصل مشترک رویه‌های داده شده است. با استفاده از این دو معادله منحنی R را به شکل پارامتری می‌نویسیم:

$$x = 2 \cos t, y = \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z = 1 - \sqrt{2}y = 1 - \sqrt{2} \sin t, \quad R(t) = (2 \cos t, \sin t, 1 - \sqrt{2} \sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\kappa = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$$

حالا با استفاده از رابطه انحنا منحنی‌های پارامتری داریم:

$$R'(t) = (-2 \sin t, \cos t, -\sqrt{2} \cos t), \quad R''(t) = (-2 \cos t, -\sin t, \sqrt{2} \sin t)$$

$$R'(t) \times R''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin t & \cos t & -\sqrt{2} \cos t \\ -2 \cos t & -\sin t & \sqrt{2} \sin t \end{vmatrix} = (0, -2\sqrt{2} \sin^2 t - 2\sqrt{2} \cos^2 t, 2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t) = (0, -2\sqrt{2}, 2)$$

$$|R'(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \cos^2 t} = \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 2, \quad \kappa = \frac{|(0, -2\sqrt{2}, 2)|}{2^3} = \frac{\sqrt{0+12+4}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

۸- گزینه «۴» با توجه به اینکه باید مینیمم تابع را به صورت مشروط محاسبه کنیم و مشتقات جزئی هر دو تابع ساده هستند، از روش ساده شده لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$g(x, y, z) = x - 2y - z = 4$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{2y}{-2} = \frac{2z}{-1} \Rightarrow 2x = -y = -2z$$

حالا روابط به دست آمده را در تابع g جایگذاری می‌کنیم تا مقادیر متغیرها به دست آیند و سپس با جایگذاری آنها در تابع اولیه مقدار مینیمم محاسبه می‌شود:

$$x - 2(-2x) - (-x) = 4 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{4}{3}, \quad z = -\frac{2}{3}$$

$$f(x, y, z) = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

۹- گزینه «۴» با استفاده از رابطه اصلی مشتق سویی در راستای بردار یکه دلخواه به صورت $\vec{u} = (u_1, u_2)$ داریم:

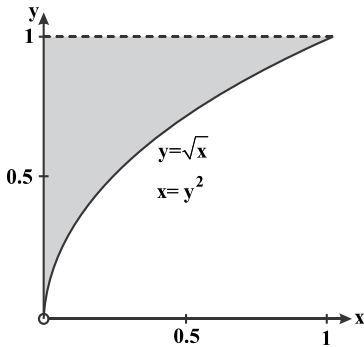
$$D_{\vec{u}}f = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + hu_1, 0 + hu_2) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{hu_1 - hu_2}{h} = \frac{u_1}{u_1 - u_2}$$

مشتق سویی تابع $f(x, y)$ در نقطه $p(x_0, y_0)$ در جهت برداری $\vec{u} = (u_1, u_2)$ برابر است با: $D_{\vec{u}}f(p) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + hu_1, 0 + hu_2) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{hu_1 - hu_2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u_1}{(u_1 - u_2)h}$$

پس داریم: برای آنکه این حد موجود باشد و مشتق سویی وجود داشته باشد، باید $u_1 = 0$ باشد. پس باید برداری را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه اول یعنی ضریب i مساوی صفر باشد. پس در جهت بردار $\vec{j}$ می‌تواند مشتق سویی وجود داشته باشد.

۱۰- گزینه «۱» با رسم ناحیه مورد نظر داریم:



$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 y(e^y - 1) dy = \int_0^1 (ye^y - y) dy = (ye^y - e^y - \frac{1}{2}y^2) \Big|_0^1 = (e - e - \frac{1}{2}) - (0 - 1 - 0) = \frac{1}{2}$$

۱۱- گزینه «۲» با توجه به تقارن کره نسبت به صفحه xOy ، کافی است مساحت قسمت بالایی را محاسبه کرده و حاصل را دو برابر کنیم. صفحه تصویر را xOy

در نظر گرفته و در این صورت ناحیه درون دایره $x^2 + y^2 = ax$ قرار می‌گیرد که در مختصات قطبی به صورت $r = a \cos \theta$ ، $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ درمی‌آید.

می‌دانیم برای کره به شعاع a ، $d\sigma = \frac{a dA}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ است. پس مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S = 2 \iint_S d\sigma = 2 \iint_D \frac{a dA}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{a^2 - r^2}) \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta = 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a - a |\sin \theta|) d\theta = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 4a \left(\theta + \cos \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2a^2 (\pi - 2)$$

۱۲- گزینه «۳» ناحیه داده شده بسته نیست؛ برای اینکه بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، ابتدا صفحه $z=0$ را به عنوان رویه S' به رویه S

اضافه کرده و داریم: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma - \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$

$$\iint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_D (z) dv$$

برای حل انتگرال اخیر از مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم. برای تعیین حدود r و θ ابتدا رویه S را با S' تقاطع داده و داریم:

$$x^2 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 0 \leq r \leq 2 ; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

پس حاصل انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$\iiint_D (z) dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} z dz dr d\theta = (2\pi) \int_0^2 \left(\frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_0^{4-r^2} dr = \pi \int_0^2 (16r - 4r^3 + r^5) dr = \pi (8r^2 - r^4 + \frac{r^6}{6}) \Big|_0^2 = \pi (32 - 16 + \frac{64}{6}) = \frac{32}{3} \pi$$

$$\iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{z=0} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{z=0} (xz\vec{i}) \cdot (-\vec{k}) d\sigma = 0$$

حالا برای انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ داریم:

پس حاصل انتگرال اولیه نیز همان $\frac{32}{3} \pi$ است.

۱۳- گزینه «۱» برای حل این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 \sin \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 \sin \left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right) \right]$$

با توجه به اینکه در بی‌نهایت $\sin \left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right)$ هم‌ارز $\sin \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ بوده و به صفر میل می‌کند و همچنین $\cos \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right)$ کراندار و بین -1 و 1

است، پس با استفاده از قضیه فشردگی، حاصل حد کلی برابر صفر خواهد بود.



سوالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۲

سوالات رشته‌ی MBA

۱- فرض کنید $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, 0)$ ، $\vec{b} = (1, 1, 1)$ و $\vec{c} = (1, 3, 2)$. زاویه بین بردارهای $\vec{c} + 2\vec{a}$ و $\vec{c} - 2\vec{b}$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{3\pi}{4}$

(۳) $\frac{2\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{3}$

(۱) $\frac{\pi}{4}$

۲- رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) بستگی به مقدار α دارد.

۳- به ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \leq 1201$ ، تساوی $\sin(n\theta) + i \cos(n\theta) = (\sin \theta + i \cos \theta)^n$ ، برقرار است؟

(۴) ۳۰۰

(۳) ۴۰۰

(۲) ۵۰۰

(۱) ۱۲۰۱

۴- دامنه تابع $f(x) = (x + \frac{1}{|x-1|})^x$ ، کدام است؟

(۱) $(0, +\infty) - \{1\}$

(۲) $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty) - \{0, 1\}$

(۳) $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) - \{1\}$

(۴) $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty) - \{0\}$

۵- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $\tanh x - \frac{0}{5} = 0$ ، کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ∞

۶- معکوس تابع f با ضابطه $f(x) = 4 \arcsin \sqrt{1-x^2}$ در فاصله $[0, 1]$ ، کدام است؟

(۱) $y = \arccos 4x$

(۲) $y = \cos 4x$

(۳) $y = \cos \frac{x}{4}$

(۴) $y = \arccos \frac{x}{4}$

۷- به ازای $c \geq 0$ ، دنباله $\{a_n\}$ را به صورت $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ ، $n \in \mathbb{N}$ و $a_1 = 0$ در نظر بگیرید. کدام مورد برای دنباله $\{a_n\}$ درست است؟

(۱) صعودی

(۲) نزولی

(۳) واگرا

(۴) نه صعودی و نه نزولی

۸- تابع $f(x) = \frac{|x^2| - x^2}{|x| + |x| + 2}$ مفروض است. مقدار $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) صفر

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{5}{2}$

۹- فرض کنید $(a > 0)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cosh ax}{\cos ax} \right) x^{\frac{1}{2}} = 2$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) $\ln 2$

(۲) $\sqrt{\ln 2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۲

۱۰- ارتفاع یک کوه از سطح دریا از رابطه $z = 1000 - \frac{0}{3}x^2 - \frac{0}{2}y^2$ بر حسب متر به دست می‌آید که در آن، جهت مثبت محورهای x و y ، به ترتیب، به سمت شرق و شمال اشاره دارند. کوهنوردی در نقطه‌ای با مختصات $(5, -10, 972/5)$ قرار دارد. او در چه جهتی حرکت کند تا در ارتفاع ثابتی بماند؟

(۱) شمال

(۲) جنوب

(۳) شمال غرب

(۴) جنوب غرب

۱۱- طول، عرض و ارتفاع یک جعبه مستطیلی به ترتیب ۱۵، ۱۰ و ۸ سانتی‌متر است. اگر سرعت تغییرات آن‌ها بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ به ترتیب ۳ افزایش،

۵/ کاهش و ۲ افزایش یابد، سرعت تغییرات حجم بر حسب $\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ و مساحت کل آن بر حسب $\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ به ترتیب کدام است؟

(۱) ۲۴۰ و ۲۵۸

(۲) ۴۸۰ و ۲۵۸

(۳) ۴۸۰ و ۱۸۵

(۴) ۲۴۰ و ۱۸۵

۱۲- معادله خط مماس بر منحنی $x^2 + 3xy^2 + xy - y^2 = 1$ در نقطه $(0, -1)$ ، کدام است؟

- (۱) $2x + 3y = -3$ (۲) $2x - 3y = 3$ (۳) $3x - 2y = 2$ (۴) $3x + 2y = -2$

۱۳- نقطه M بر منحنی قطبی $r = \cos 2\theta$ از $\theta = 0$ حرکت کرده و با سرعت ثابت $\frac{dx}{dt} = \frac{25}{2}$ بر محوری که در قطب به محور قطبی عمود است،

نزدیک می‌شود. نقطه M با کدام سرعت در $\theta = \frac{\pi}{6}$ به قطب نزدیک می‌شود؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۱۴- ماکزیمم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{(x^2+1)^2(x^2+3)}}{3x^2+4}$ ، چه ضربی از $\sqrt[3]{16}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{15}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۵- تعداد نقاطی که تابع $f(x) = ||x| - 1|$ در آن‌ها مشتق ناپذیر است، کدام‌اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶- اگر تابع f در $x = 3$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 f(3) - 9f(x)}{x - 3}$ ، کدام است؟

- (۱) $3f(3) - 9f'(9)$ (۲) $9f(3) - 6f'(3)$ (۳) $6f(3) - 9f'(3)$ (۴) $9f(9) - 3f'(3)$

۱۷- فرض کنید $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x^6 + \cos x^6 + 2} dx$ و $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x^{10} + x + 4} dx$. با استفاده از قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها، کدام

مورد برای همگرایی یا واگرایی I و J درست است؟

- (۱) I و J همگرا (۲) I و J واگرا (۳) I واگرا و J همگرا (۴) I همگرا و J واگرا

۱۸- مختصات نزدیک‌ترین نقطه واقع بر فصل مشترک رویه‌های $x - y + 2z = 5$ و $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $(\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3})$ (۲) $(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 5)$ (۳) $(\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, 5)$ (۴) $(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3})$

۱۹- با استفاده از حد مجموع ریمان، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^3}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\ln 2}{3}$ (۲) $\frac{\ln 3}{2}$ (۳) $\ln 2$ (۴) $\ln 3$

۲۰- مساحت ناحیه بیرون منحنی $xy = 2$ و درون منحنی $r = 3 - \sin \theta$ واقع در ربع اول صفحه مختصات، کدام است؟

- (۱) $\frac{15\pi - 16}{8}$ (۲) $\frac{15\pi - 24}{8}$ (۳) $2\pi - 3$ (۴) $2(\pi - 1)$

۲۱- مقدار $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x} dx$ ، کدام است؟

- (۱) $-\ln 10$ (۲) $-\ln 5$ (۳) $\ln \frac{2}{5}$ (۴) $\ln \frac{5}{2}$

۲۲- طول منحنی $f(x) = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

۲۳- مقدار $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{e^y dy dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}(e-1)$ (۲) $\frac{\pi e}{3}$ (۳) $\pi(e-1)$ (۴) πe

۲۴- حجم ناحیه محصور به رویه $r = 2 \cos \theta$ و داخل کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲، کدام است؟

- (۱) $\frac{16\pi}{9}$ (۲) $\frac{16(3\pi-4)}{9}$ (۳) $\frac{16\pi}{3}$ (۴) $\frac{16(3\pi-4)}{3}$



۲۵- مساحت سطح غیرمسطح $\phi = \frac{\pi}{4}$ محدود به صفحه $z = 1$ ، در مختصات کروی، کدام است؟

- (۱) π (۲) $\sqrt{2}\pi$ (۳) 2π (۴) $2\sqrt{2}\pi$

۲۶- مقدار $\iint_D \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ که در آن، $D = \left\{ (x, y) : 0 < a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi^2}{48}(b^2 - a^2)$ (۲) $\frac{\pi^2}{48}(b - a)^2$ (۳) $\frac{\pi^2}{12}(b^2 - a^2)$ (۴) $\frac{\pi^2}{12}(b - a)^2$

۲۷- مقدار $\iint_S e^{z^2} dS$ که در آن، S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که بین صفحات $z = a$ و $z = b$ ($0 < a < b$) قرار گرفته، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}\pi(be^b - ae^a)$ (۲) $2\sqrt{2}\pi(ae^b + be^a)$
(۳) $2\sqrt{2}\pi((a+1)e^b - (b+1)e^a)$ (۴) $2\sqrt{2}\pi((b-1)e^b - (a-1)e^a)$

۲۸- فرض کنید C منحنی حاصل از برخورد صفحه $z = 2$ با استوانه $x^2 + y^2 = 1$ در جهت مثلثاتی باشد. اگر

$\vec{F}(x, y, z) = (-\alpha y^2, \alpha x, z^2 \cos z)$ و $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ ، آنگاه مقدار α ، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۹- اگر S ، سطح کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ باشد، مقدار انتگرال زیر، کدام است؟

$$\iint_S \left(x(2x + 3e^{z^2}) - y(e^{x^2} + y) + z(2z + \cos 2y) \right) d\sigma$$

- (۱) صفر (۲) 3π (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) 4π

۳۰- برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^n(x)}{n}$ ، کدام مورد درست است؟

- (۱) در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ، همگرایی مطلق است.
(۲) در بازه $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ، همگرایی مطلق و در $x = -\frac{\pi}{4}$ ، همگرایی مشروط است.
(۳) در بازه $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ، همگرایی مطلق و در $x = \pm \frac{\pi}{4}$ ، همگرایی مشروط است.
(۴) در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ، همگرایی مطلق و در $x = \frac{\pi}{4}$ ، همگرایی مشروط است.

پاسخنامه رشته‌ی MBA

۱- گزینه «۱» ابتدا بردارهای مورد اشاره را تشکیل می‌دهیم:

$$\vec{c} + 2\vec{a} = (2, -1, 2) \quad 2\vec{b} - \vec{c} = (1, -1, 0)$$

$$\cos \hat{\theta} = \frac{(\vec{c} + 2\vec{a}) \cdot (2\vec{b} - \vec{c})}{|\vec{c} + 2\vec{a}| |2\vec{b} - \vec{c}|} = \frac{(2+1+0)}{\sqrt{4+1+4} \sqrt{1+1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

حالا با توجه به رابطه زاویه بین دو بردار خواهیم داشت:

۲- گزینه «۲» یک ماتریس 4×5 داریم که حداکثر مرتبه ماتریس ۴ می‌باشد. حال چون (سطر چهارم) $\times (-2)$ سطر اول می‌باشد پس سطر چهارم وابسته خطی است و یکی از حداکثر رتبه ماتریس کم می‌شود، پس تا اینجا رتبه ماتریس حداکثر ۳ است.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (5 - 0) + 1 \times (0 - 0) = 5 \neq 0$$

اکنون زیر ماتریس 3×3 روبرو را انتخاب می‌کنیم و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

چون دترمینان این ماتریس مخالف صفر است پس دیگر از رتبه ماتریس کم نمی‌شود و رتبه ماتریس همان ۳ می‌باشد.

۳- «هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.»

روش اول: ابتدا توجه کنید که سمت راست را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = [i(\cos \theta - i \sin \theta)]^n = i^n [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)]$$

و عبارت سمت چپ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sin(n\theta) + i \cos(n\theta) = i [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)]$$

$$i [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)] = i^n [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)]$$

پس تساوی صورت سؤال به شکل مقابل بازنویسی می‌شود:

رابطه‌ی فوق وقتی برقرار است که $i = i^n$ باشد.

برای اینکه این رابطه برقرار باشد، n چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟! واضح است مثلاً $n = 1$ می‌تواند جواب باشد، اما $n = 2$ ، یا $n = 3$ و یا حتی $n = 4$ نمی‌توانند تساوی را ایجاد کنند، اما $n = 5$ چطور؟ واضح است n می‌تواند برابر ۵ باشد و اساساً هر n به صورت $n = 4k + 1$ می‌تواند مشکل ما را حل کند. پس داریم:

در نامساوی فوق $300 - 0 + 1 = 301$ عدد صحیح وجود دارد و این یعنی جواب صحیح در گزینه‌ها نیست، اگر در صورت سؤال $n < 1201$ داده می‌شد، در نهایت $k = 300$ به دست می‌آمد و دقیقاً به جواب سازمان سنجش می‌رسیدیم.

روش دوم: این روش هم تقریباً مشابه روش اول است؛ عبارت سمت چپ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sin(n\theta) + i \cos(n\theta) = i [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)] = i [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)] = i e^{-i(n\theta)}$$

و به همین ترتیب عبارت سمت راست برابر $(i e^{-i\theta})^n$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$i e^{-i(n\theta)} = (i e^{-i\theta})^n \Rightarrow i e^{-i(n\theta)} = i^n e^{-i(n\theta)} \Rightarrow i = i^n$$

از اینجا به بعد با همان استدلال مربوط به روش اول به جواب می‌رسیم.

روش سوم: به دلیل ذهنیت خودمان از فرمول $\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) = \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$ اوایل سعی می‌کنیم پشت کسینوس i نباشد و اتفاقاً پشت سینوس i باشد، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{4} - n\theta) + i \sin(\frac{\pi}{4} - n\theta) &= [\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{4} - \theta)]^n \Rightarrow \sqrt[n]{\cos(\frac{\pi}{4} - n\theta) + i \sin(\frac{\pi}{4} - n\theta)} \\ &\Rightarrow \sqrt[n]{e^{i(\frac{\pi}{4} - n\theta)}} = e^{i(\frac{\pi}{4} - n\theta)} \Rightarrow e^{\frac{i[(\frac{\pi}{4} - n\theta) + 2k\pi]}{n}} = e^{i(\frac{\pi}{4} - \theta)} \Rightarrow \frac{i[(\frac{\pi}{4} - n\theta) + 2k\pi]}{n} = i(\frac{\pi}{4} - \theta) \Rightarrow \frac{1}{n}(\frac{\pi}{4}) + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\pi}{4} \\ &\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } n \text{ تقسیم بر } \frac{\pi}{4}} 1 + 4k = n \end{aligned}$$

در این راه حل هم $n = 4k + 1$ به دست آمد و لذا ادامه‌ی راه حل مانند روش‌های قبل است.

۴- «هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.»

با توجه به وجود قدرمطلق، تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x + \frac{1}{x-1})^x & ; x > 1 \\ (x - \frac{1}{x-1})^x & ; x < 1 \end{cases}$$

واضح است به ازای $x = 1$ تابع تعریف نشده است.

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{x^2 - x + 1}{x-1})^x & ; x > 1 \\ (\frac{x^2 - x - 1}{x-1})^x & ; x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع به دست آمده تعریف شده باشد، باید پایه مثبت باشد؛ بنابراین هر دو ضابطه باید مثبت باشد.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x-1} > 0 \xrightarrow{x > 1} x^2 - x + 1 > 0$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x-1} > 0$$

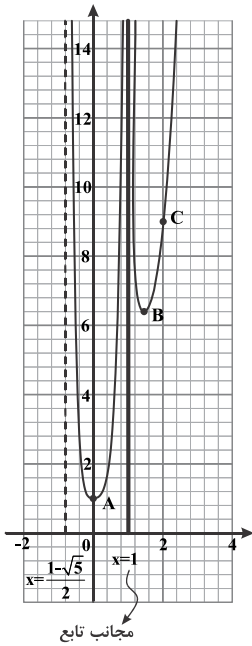
نامساوی اخیر همواره برقرار است؛ چون دلتا منفی و ضریب x^2 مثبت است. حالا سراغ ضابطه دوم می‌رویم:

با توجه به اینکه در ضابطه دوم $x < 1$ است، پس مخرج در هر صورت علامتش منفی است و این یعنی برای برقراری نامساوی فوق، عبارت صورت کسر یعنی $x^2 - x - 1$ باید منفی باشد. ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ را به دست می‌آوریم و می‌دانید بین دو ریشه علامت عبارت مخالف ضریب x^2 خواهد بود. یعنی بین دو ریشه علامت صورت کسر منفی خواهد بود.

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x < 1} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1$$

$$D_f = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty \right) - \{1\}$$

بنابراین دامنه تابع به شکل مقابل است:



دقت کنید که تابع $(f(x))^{g(x)}$ را می‌توان به صورت مقابل تعریف کرد: $(f(x))^{g(x)} = e^{\ln f(x) \cdot g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$
در اینجا تنها شرط $f(x) > 0$ است و اساساً طراح کمی به لحاظ علمی در این مبحث متزلزل بوده و فکر کرده باید شرط $f(x) \neq 1$ هم در مسئله برقرار باشد و برای همین گزینه (۲) را به عنوان جواب منظور کرده است و این تعریف دیبرستانی و غیردقیق از توابعی به شکل مقابل است!!

همان‌طور که می‌بینید با قرار دادن $x = 0$ در ضابطه‌ی تابع مقدار تابع برابر با $1 = (0+1)^0$ به دست می‌آید و کاملاً مشخص است که $x = 0$ جزو دامنه تابع می‌باشد. رسم نمودار برای عزیزی که بیشتر علاقه‌مند به مباحث ریاضی هستند به صورت مقابل است.

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A|_1^0$$

$$B = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 6/5 \Rightarrow B|_{6/5}^{3/2}$$

$$C = 2 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow C|_9^2$$

۵- گزینه «۲» با کمک رابطه اصلی $\tan hx$ داریم:

$$\tan hx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0/5 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0/5e^x + 0/5e^{-x} \Rightarrow 0/5e^x = 1/5e^{-x} \Rightarrow e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln 3$$

۶- گزینه «۳» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم؛ به راحتی با روش مستقیم داریم:

$$y = 4 \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{y}{4} = \arcsin \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin \frac{y}{4} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin^2 \frac{y}{4} = 1-x^2$$

$$x^2 = 1 - \sin^2 \frac{y}{4} = \cos^2 \frac{y}{4} \Rightarrow x = \cos \frac{y}{4} \xrightarrow{\text{نقش } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = \cos \frac{x}{4}$$

روش تستی: می‌دانیم اگر نقطه‌ی (a, b) روی تابع $f(x)$ باشد، نقطه‌ی (b, a) روی تابع $f^{-1}(x)$ خواهد بود. اگر نقطه‌ی $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi)$ روی تابع امتحان شود، فقط گزینه (۳) می‌تواند جواب باشد.

$$a_1 = 0, a_2 = \sqrt{c+a_1} = \sqrt{c}, a_3 = \sqrt{c+a_2} = \sqrt{c+\sqrt{c}} \geq \sqrt{c}$$

۷- گزینه «۱» با نوشتن چند جمله اول داریم:

واضح است که $a_{n+1} \geq a_n$ و علامت مساوی به این علت است که مقدار c می‌تواند صفر باشد. پس دنباله مورد نظر صعودی است.

۸- گزینه «۳» به راحتی با محاسبه مقادیر حدی توابع جزء صحیح خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \frac{\left[((-3)^+)^2 \right] - (-3)^2}{|-3| + \left[(-3)^+ \right] + 2} = \frac{\left[9^- \right] - 9}{3 - 3 + 2} = \frac{8 - 9}{2} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \frac{\left[((-3)^-)^2 \right] - (-3)^2}{|-3| + \left[(-3)^- \right] + 2} = \frac{\left[9^+ \right] - 9}{3 - 4 + 2} = \frac{9 - 9}{1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos hax}{\cos ax} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\cos hax}{\cos ax} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\cos hax - \cos ax}{\cos ax} \right)}$$

۹- گزینه «۲» حد داده شده به فرم 1^∞ مبهم است. پس داریم:

با توجه به اینکه عامل صفرکننده در مخرج از توان ۲ است، هم‌ارزی توابع صورت کسر را نیز تا توان ۲ ادامه داده و داریم:

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(ax)^2 - (1 - \frac{1}{2}(ax)^2)}{\cos ax} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{a^2 x^2}{\cos ax} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2}{\cos ax}} = e^{a^2} = 2 \Rightarrow a^2 = \ln 2 \xrightarrow{a > 0} a = \sqrt{\ln 2}$$

۱۰- گزینه «۴»

روش اول:

$$z = 1000 - 0.3x^2 - 0.4y^2$$

$$z = f(x, y) \Rightarrow dz = f_x dx + f_y dy \quad (1)$$

$$f_x = -0.6x \xrightarrow{\text{در نقطه } x=5} -3$$

$$f_y = -0.8y \xrightarrow{\text{در نقطه } y=10} -8$$

$$dz = 0 \Rightarrow -3dx + 8dy = 0$$

برای اینکه ارتفاع ثابت باشد، لازم است $dz = 0$ باشد، لذا داریم:

حال برای آنکه این معادله برقرار باشد باید x و y هر دو هم جهت باشند و این اتفاق در مسیر شمال شرقی (هر دو x و y دارای تغییرات مثبت هستند) یا جنوب غربی (هر دو x و y دارای تغییرات منفی هستند) رخ می‌دهد، پس گزینه (۴) پاسخ صحیح است.

روش دوم: با توجه به اینکه ارتفاع کوهنورد یعنی z تابعی از x و y اوست، کافی است جهتی را پیدا کنیم که مشتق سویی در نقطه مورد اشاره در آن جهت صفر باشد. با فرض اینکه جهت بردار حرکت (α, β) باشد، داریم:

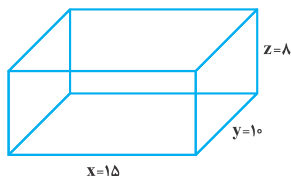
$$f(x, y) = z = 1000 - 0.3x^2 - 0.4y^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f(x, y) = (-0.6x, -0.8y) \Rightarrow \vec{\nabla} f(5, -10) = (-3, 8)$$

$$D_{\vec{u}} f(5, -10) = \vec{\nabla} f(5, -10) \cdot (\alpha, \beta) = (-3, 8) \cdot (\alpha, \beta) = -3\alpha + 8\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{8}\alpha$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 \left(1 + \frac{9}{64}\right) = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{8}{\sqrt{73}} \Rightarrow \beta = \pm \frac{3}{\sqrt{73}}$$

از طرفی بردار جهت یک است، پس داریم:

پس جهت مورد نظر به صورت $(\frac{3}{\sqrt{73}}, \frac{8}{\sqrt{73}})$ یعنی شمال شرقی یا $(-\frac{3}{\sqrt{73}}, -\frac{8}{\sqrt{73}})$ یعنی جنوب غربی خواهد بود



۱۱- گزینه «۳» شکل یک مکعب را داریم که $x'_t = 3(\frac{\text{cm}}{\text{s}})$ ، $y'_t = -0.5(\frac{\text{cm}}{\text{s}})$ و $z'_t = 2(\frac{\text{cm}}{\text{s}})$ داده شده است.

$$V = xyz \Rightarrow V'_t = x'_t yz + y'_t xz + z'_t xy = 3(10)(8) + (-0.5)(15)(8) + 2(15)(10) = 240 - 60 + 300 = 480$$

سرعت تغییرات حجم به دست آمد، اما دو گزینه با این عدد داریم و لازم است سرعت تغییرات مساحت حساب شود. مساحت کل برابر است با:

$$S = 2(yz + xy + xz) \Rightarrow S'_t = 2(y'_t z + z'_t y + x'_t y + y'_t x + x'_t z + z'_t x) \Rightarrow S'_t = 2(-\frac{1}{2}(8)) + 2(10) + (3)(10) + (-\frac{1}{2})$$

$$(15) + 2(8) + 2(15)) = 2(-4 + 20 + 30 - \frac{15}{2} + 24 + 30) = 2(100 - \frac{15}{2}) = 200 - 15 = 185$$

$$x^2 + 3xy^2 + xy - y^3 = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x^2 + 2y^2 + y}{6xy + x - 3y^2}$$

۱۲- گزینه «۲» به راحتی با استفاده از مشتق گیری ضمنی داریم:

$$m = \frac{dy}{dx} \Big|_{(0, -1)} = -\frac{0 + 3 - 1}{0 + 0 - 3} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 2x - 3y = 3$$

۱۳- گزینه «۳» با توجه به اینکه مقدار $\frac{dx}{dt} = 0.25$ را داریم و با توجه به رابطه $r = \cos 2\theta$ داریم:

$$x = r \cos \theta \xrightarrow{r = \cos 2\theta} x = \cos 2\theta \cos \theta = (\cos^2 \theta - 1) \cos \theta = \cos^3 \theta - \cos \theta$$

با استفاده از مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{25}{100} = (6 \cos^2 \theta (-\sin \theta) + \sin \theta) \times \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{6}} \frac{1}{4} = (6(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{7}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = (-2 \sin 2\theta) (-\frac{1}{7}) \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{6}} -2(\sin \frac{\pi}{3}) (-\frac{1}{7}) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{2}{7} (\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

اکنون از $r = \cos 2\theta$ داریم:

توجه داشته باشید که قطب همان مبدأ مختصات است و محور قطبی در واقع همان محور x هاست. محوری که بر محور قطبی عمود است هم محور y ها می باشد و صورت سؤال مسیر حرکت نقطه M بر روی منحنی را فقط مشخص کرده است.

۱۴- گزینه «۱» برای کاهش حجم ظاهری محاسبات فرض می‌کنیم $x^2 + 1 = A$ باشد:

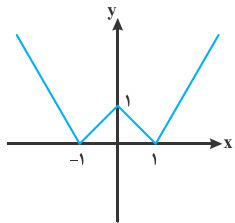
$$y = \frac{\sqrt[3]{A^2(A+2)}}{3A+1} = \frac{\sqrt[3]{A^2+2A^2}}{3A+1}$$

$$y' = \frac{(3A^2+4A)A'}{3\sqrt[3]{(A^2+2A^2)^2}} - 3A^2\sqrt[3]{(A^2+2A^2)} = \frac{(9A^3+3A^2+12A^2+4A-9(A^2+2A^2))A'}{3\sqrt[3]{(A^2+2A^2)^2}(3A+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -3A^2 + 4A = 0 \Rightarrow A(-3A + 4) = 0 \\ \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \quad A=0 \quad \quad A=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$f(x^2 = \frac{1}{3}) = \frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+1)^2(\frac{1}{3}+3)}}{3(\frac{1}{3})+4} = \frac{\sqrt[3]{\frac{16}{9} \times \frac{10}{3}}}{5} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{160}$$



۱۵- گزینه «۴» به راحتی با رسم نمودار تابع داریم:
واضح است که تابع ۳ نقطه زاویه‌ای دارد.

حل به روش جبری: با توجه به اینکه در توابع قدرمطلق ریشه از مرتبه فرد عبارت داخل قدرمطلق نقطه زاویه‌ای و مشتق‌ناپذیر است، داریم:

از طرفی خود $|x| = 0$ در نقطه‌ای $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

$$|x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس در مجموع ۳ نقطه مشتق‌ناپذیر داریم.

۱۶- گزینه «۳» با توجه به اینکه حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است، با استفاده از قاعده هسپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 f(3) - 9f(x)}{x - 3} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2xf(3) - 9f'(x)}{1} = 6f(3) - 9f'(3)$$

$$A = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \exists c \in [a, b]: f(c)(b-a) = A$$

۱۷- گزینه «۴» مطابق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها داریم:

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + \cos x^2 + 2} dx = \frac{\sqrt{c_n^2 + \cos c_n^2 + 2}}{n^2}, c_n \in (0, \frac{1}{n^2})$$

در هر جمله از سری I و J داریم:

$$J = \int_0^1 \sqrt{x^{10} + x + 4} dx = \frac{\sqrt{d_n^{10} + d_n + 4}}{n}, d_n \in (0, \frac{1}{n})$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{c_n^2 + \cos c_n^2 + 2}}{n^2}, c_n \in (0, \frac{1}{n^2})$$

پس داریم:

$$\sqrt{c_n^2 + \cos c_n^2 + 2} \leq \sqrt{1+1+2} = 2 \Rightarrow 0 < I \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

اما چون $c_n^2 \leq 1$ و $\cos c_n^2 \leq 1$ پس داریم:

با استفاده از روش تست انتگرال برای همگرایی سری‌ها به راحتی می‌توان نشان داد که $\sum \frac{2}{n^2}$ همگراست پس I نیز همگرا خواهد بود.

$$\sqrt{d_n^{10} + d_n + 4} \geq \sqrt{4} = 2$$

از طرفی داریم:

$$J \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$$

پس؛ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به سری همساز معروف است که واگراست پس J نیز واگراست.

۱۸- گزینه «۱»

روش اول: با توجه به اینکه تابع فاصله از مبدأ $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ است، خواسته سؤال مینیمم کردن این تابع با دو قید $x - y + 2z = 5$ و $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ است. برای راحتی کار تابع $f = x^2 + y^2 + z^2$ را مینیمم می‌کنیم که نتیجتاً f نیز مینیمم می‌شود. همچنین سعی می‌کنیم با حذف z از این دو قید به مسئله‌ای برسیم که یک قید داشته باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$z = \frac{5 - x + y}{2}$$

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x^2 + 2y^2 = 3x^2 + 3y^2 \\ g(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - \left(\frac{5 - x + y}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

حالا با روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{6x}{4x - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5 - x + y}{2}\right)} = \frac{6y}{4y - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5 - x + y}{2}\right)}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}} \Rightarrow x^2 + 2xy - 5x = 2xy + y^2 + 5y \Rightarrow x^2 - 5x = y^2 + 5y \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \left|x - \frac{5}{2}\right| = \left|y + \frac{5}{2}\right|$$

$$(1) \quad x - \frac{5}{2} = y + \frac{5}{2} \Rightarrow x - y - 5 = 0 \Rightarrow z = \frac{5 - x + y}{2} = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 = z^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \quad \text{غ قق}$$

$$(2) \quad x - \frac{5}{2} = -\left(y + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x = -y \Rightarrow z = \frac{5 - x + y}{2} = \frac{5 - x - x}{2} = \frac{5}{2} - x$$

$$z^2 = 2(x^2 + y^2) = 2(x^2 + x^2) = 4x^2 = \left(\frac{5}{2} - x\right)^2 \Rightarrow 2x = \pm\left(\frac{5}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}, y = -\frac{5}{6}, z = \frac{5}{3} \\ x = -\frac{5}{2}, y = \frac{5}{2}, z = 5 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right) = \frac{25}{36} + \frac{25}{36} + \frac{25}{9} = \frac{25}{6}$$

$$f\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 5\right) = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 25 = \frac{75}{2}$$

واضح است که $\left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right)$ نزدیک‌ترین و $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$ دورترین نقطه روی منحنی مورد نظر از مبدأ مختصات هستند.

روش دوم (تستی): گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه داده شده صدق نمی‌کنند. از بین گزینه‌های ۱ و ۲ فاصله گزینه (۱) کمتر است. صورت‌ها همه ۵ هستند، بنابراین داریم:

$$(1) \quad \text{گزینه} \rightarrow d = 5\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}} = 5\sqrt{\frac{2}{36} + \frac{1}{9}} = 5\sqrt{\frac{2+4}{36}} = 5\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$(2) \quad \text{گزینه} \rightarrow 5\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = 5\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = 5\sqrt{\frac{3}{2}} = 5\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۹- گزینه «۱» حد سری داده شده را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم (در واقع دنبال تولید $\frac{k}{n}$ ها هستیم):

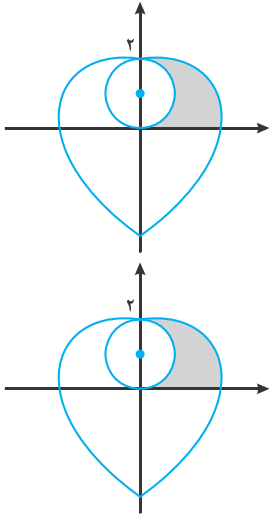
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k^2}{n^2}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$L = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+1}{1+0}\right) = \frac{1}{2} \ln 2$$

حالا با فرض $f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ داریم:

۲۰- گزینه «۲»

روش اول: ابتدا دایره داده شده را در مختصات قطبی بازنویسی می‌کنیم:
 $x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r \sin \theta \Rightarrow r = 2 \sin \theta$
 پس مساحت ناحیه مشخص شده در شکل مورد نظر است. برای محاسبه این مساحت کافی است که مساحت درون منحنی $r = 2 - \sin \theta$ در ربع اول را محاسبه کرده و مساحت یک نیم دایره به شعاع ۱ را از آن کم می‌کنیم. با توجه به ناحیه بین دایره و منحنی در ربع اول باید حدود θ را از صفر (محور x ها) تا $\frac{\pi}{4}$ (محور y ها) در نظر بگیریم.



$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - \sin \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 - 4 \sin \theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{9}{2} - 4 \sin \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} (\frac{9}{2} \theta + 4 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} (\frac{9}{2} \times \frac{\pi}{4} - 4 - 0) = \frac{1}{2} (\frac{9\pi}{4} - 4) \Rightarrow S = S' - \frac{\pi(1)^2}{2} = \frac{9\pi}{8} - 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8} - 2 = \frac{5\pi - 16}{8} \end{aligned}$$

روش دوم: پس از اینکه معادله $x^2 + y^2 = 2y$ را به صورت $r = 2 \sin \theta$ نوشتیم به روش کلاسیک می‌توان مساحت را نیز حساب کرد. نقطه‌ی تلاقی در منحنی را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2 - \sin \theta &= 2 \sin \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ \text{از طرفی چون مساحت ناحیه مورد اشاره به ربع اول مختصات محدود شده است حد پایین انتگرال به ازای } \theta = 0 \text{ خواهد بود.} \\ S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(2 - \sin \theta)^2 - (2 \sin \theta)^2] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 + \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 4 \sin^2 \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-3 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 4) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-3 (\frac{1 - \cos 2\theta}{2}) - 4 \sin \theta + 4) d\theta = \frac{1}{2} (-\frac{3}{2} (\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) + 4 \cos \theta + 4\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} (-\frac{3}{2} (\frac{\pi}{4} - 0) + \frac{9\pi}{4} - 4) = \frac{1}{2} (-\frac{3\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} - 4) = \frac{1}{2} (\frac{6\pi}{4} - 4) = \frac{1}{2} (\frac{3\pi}{2} - 4) = \frac{3\pi}{4} - 2 = \frac{3\pi - 8}{4} \Rightarrow S = \frac{5\pi - 16}{8} \end{aligned}$$

۲۱- گزینه «۴»

روش اول: برای حل این انتگرال از روابط انتگرال‌های فرولانی کمک می‌گیریم، داریم: $f(x) = e^{-ax}$ و $f(0) = e^0 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = [1 - 0] \ln \frac{a}{b}$$

لذا با توجه به قضیه مقابل داریم:

یادآوری: اگر تابع $f(x)$ به ازای $x \geq 0$ پیوسته بوده و حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \infty$ موجود باشد و همچنین a و b بزرگ‌تر از صفر باشد، همواره رابطه زیر را داریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}$$

روش دوم: برای تبدیل انتگرال یگانه به انتگرال دوگانه یک قاعده کمکی به صورت مقابل وجود دارد:

$$\int_c^d \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_c^d \int_a^b f'(xy) dy dx$$

در این سؤال با توجه به تابع زیر انتگرال $f(x) = e^{-x}$ است و $f'(x) = -e^{-x}$ خواهد بود. پس داریم:

حالا در این انتگرال کافی است ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم:

$$\int_0^{\infty} \int_{\Delta}^2 -e^{-xy} dy dx = \int_{\Delta}^2 \int_0^{\infty} -e^{-xy} dy dx = \int_{\Delta}^2 [-\frac{1}{x} e^{-xy}]_0^{\infty} dx = \int_{\Delta}^2 [-\frac{1}{x} (0 - 1)] dx = \int_{\Delta}^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{\Delta}^2 = \ln \frac{2}{\Delta}$$

۲۲- گزینه «۴» با توجه به رابطه $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ ابتدا مؤلفه طول را تشکیل می‌دهیم. با استفاده از مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

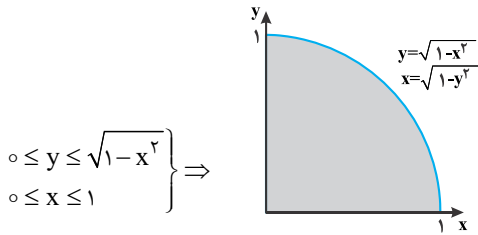
$$f'(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow 1 + [f'(x)]^2 = 1 + \sin x$$

حال داریم:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2} dx = \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^{\pi} (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) dx = (-2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}) \Big|_0^{\pi} = (2 + 2) = 4$$

۲۳- گزینه «۱» برای حل این انتگرال ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می کنیم.

با توجه به اینکه متغیر y هم در صورت و هم در مخرج وجود دارد و محاسبه این انتگرال به صورت مستقیم امکان پذیر نیست، ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم و داریم:



$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{e^y dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^1 e^y \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-y^2-x^2}} \right) dy$$

با تغییر متغیر $x = \sqrt{1-y^2} \sin t$ داریم $dx = \sqrt{1-y^2} \cos t dt$ و چون $0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ پس $0 \leq \sin t \leq 1$ ، بنابراین $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ و داریم:

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-y^2-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-y^2} \cos t dt}{\sqrt{(1-y^2)(1-\sin^2 t)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{|\cos t|} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 e^y \frac{\pi}{2} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^y dy = \frac{\pi}{2} (e^y)_0^1 = \frac{\pi}{2} (e-1)$$

۲۴- گزینه «۲» با توجه به اینکه رویه $r = 2 \cos \theta$ یک استوانه است، برخورد آن با کره مورد اشاره را در دستگاه استوانه‌ای راحت تر می توان نوشت. تصویر استوانه

در صفحه xoy دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و شعاع ۱ است. یعنی $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ و $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ نیز $z = \pm \sqrt{4-x^2-y^2}$ به دست

می آید که به صورت $-\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$ است. با توجه به تقارن ناحیه، حجم ناحیه $z \geq 0$ را محاسبه کرده و حاصل را دو برابر می کنیم:

$$V = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r \sqrt{4-r^2} dr d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta = -\frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\lambda |\sin^3 \theta| - \lambda) d\theta$$

$$= -\frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \theta - 1) d\theta = \frac{32}{3} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \theta) \sin \theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] = \frac{32}{3} \left(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta \right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3} \left(-\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16(3\pi-4)}{9}$$

۲۵- گزینه «۲» سؤال را به سه روش حل می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ z &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

روش اول: ناحیه به صورت مقابل است:

پس تصویر ناحیه روی صفحه xoy دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد است.

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dA = \sqrt{2} dA$$

$$\sigma = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{2} dA = \sqrt{2} \iint_D dA = \sqrt{2} \pi (1)^2 = \sqrt{2} \pi$$

روش دوم:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$S = \iint ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta$$

$$\sqrt{2} \times 2\pi \times \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^1 = \sqrt{2} \times \pi \times \frac{1}{1} = \pi \sqrt{2}$$

روش تستی: خواسته سؤال مساحت جانبی یک مخروط به شعاع ۱ و ارتفاع ۱ است که با توجه به رابطه $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ برابر $\pi(1)\sqrt{1+1} = \sqrt{2}\pi$ است.

۲۶- «هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: با توجه به حد داده شده و وجود عامل $x^2 + y^2$ در ناحیه مورد نظر، انتگرال را در مختصات قطبی حل می‌کنیم. ابتدا حدود انتگرال را مشخص می‌کنیم:

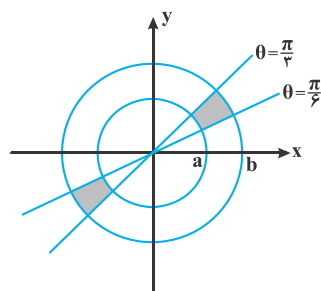
$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \Rightarrow a^2 \leq r^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq r \leq b$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan \theta \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$I = \iint_D \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_a^b \theta r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \theta \left(\frac{r^2}{2}\right)_a^b d\theta = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \left(\frac{\theta^2}{2}\right)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = (b^2 - a^2) \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right)$$

بنابراین داریم:

$$= (b^2 - a^2) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4\pi^2 - \pi^2}{36}\right) = (b^2 - a^2) \frac{\pi^2}{48}$$



با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری، این ناحیه‌ها هم در ناحیه اول وجود دارند و هم در ناحیه سوم (با تبدیل x به $-x$ و همچنین y به $-y$ معادله ناحیه‌ها تغییر نمی‌کنند). باید انتگرال به دست آمده را در ۲ ضرب کنیم. بنابراین داریم:

$$\text{حاصل} = 2 \times (b^2 - a^2) \times \frac{\pi^2}{48}$$

روش دوم: با توجه به تابع زیر انتگرال و حدود آن، از تغییر متغیر $\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$ کمک می‌گیریم، در این حالت باید توجه داشته باشید که چون با تبدیل

توأم‌ان x به $-x$ و y به $-y$ ، معادلات u و v تغییری نمی‌کنند، پس ناحیه D نسبت به مبدأ مختصات متقارن است و برای رعایت شرط یک‌به‌یک بودن تبدیل باید حاصل انتگرال را روی ناحیه‌ای که در ربع اول قرار دارد حساب کرده و آن را ۲ برابر کنیم. پس با شرط $x > 0$ و $y > 0$ تغییر متغیر را انجام می‌دهیم:

$$\partial_{uv} = \frac{1}{\partial_{xy}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & 2y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{-2y^2}{x^2} - 2} = \frac{-1}{2(1 + (\frac{y}{x})^2)}$$

$$dx dy = |\partial_{uv}| du dv = \frac{du dv}{2(1 + u^2)}$$

$$I = \iint_D \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = 2 \iint_{D'} \tan^{-1} u \frac{du dv}{2(1 + u^2)}$$

$$D = \{(x, y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3}\} \Rightarrow D' = \{(u, v) : u, v > 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq u \leq \sqrt{3}, a^2 \leq v \leq b^2\}$$

$$I = 2 \int_{a^2}^{b^2} dv \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \tan^{-1} u \frac{du}{1 + u^2} = 2(b^2 - a^2) \frac{1}{4} (\tan^{-1} u)^2 \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{24} (b^2 - a^2)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، جواب صحیح بین گزینه‌ها وجود ندارد؛ به نظر می‌رسد طراح محترم بدون توجه به شرط یک‌به‌یک بودن تبدیل، تغییر متغیر را انجام داده‌اند که در این صورت یک ضرب ۲ کم شده و گزینه (۱) جواب خواهد بود.

۲۷- گزینه «۴» با توجه به اینکه Z به صورت صریح بر حسب x و y بیان شده است، ناحیه را بر صفحه xoy تصویر کرده و داریم:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ z &= a \\ z &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dA = \sqrt{2} dA$$

یعنی تصویر نوار بین دو دایره به شعاع‌های a و b و مرکز مبدأ است.

$$I = \iint_S e^z d\sigma = \iint_D e^{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{2} dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b e^r \sqrt{2} r dr d\theta = 2\sqrt{2} \pi (re^r - e^r) \Big|_a^b = 2\sqrt{2} \pi [(b-1)e^b - (a-1)e^a]$$

۲۸- گزینه «۲» چون منحنی C بسته است، از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. ابتدا $\vec{n}$ را حساب می‌کنیم. قرار می‌دهیم $g: y+z-2=0$ ، در این صورت داریم:

$$\vec{n} d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|} dA = \frac{(0, 1, 1)}{1} dA = (0, 1, 1) dA$$

$$\vec{F} = (-\alpha y^2, \alpha x, z^2 \cos z) \Rightarrow \text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\alpha y^2 & \alpha x & z^2 \cos z \end{vmatrix} = (0, 0, \alpha + 2\alpha y)$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D (\alpha + 2\alpha y) dA = \iint_D \alpha dA + \iint_D 2\alpha y dA = \alpha \pi \Rightarrow \alpha = 2$$

توجه کنید که $2\alpha y$ تابع فرد است و تصویر ناحیه روی صفحه xoy دایره $x^2 + y^2 = 1$ است که متقارن است. پس داریم:

$$\iint_D 2\alpha y dA = 0$$

۲۹- گزینه «۴» حل عادی سؤال بسیار زمان‌بر است. اما چون سطح S بسته است به فکر استفاده از قضیه دیورژانس می‌افتیم. اما برای این کار باید تابع اسکالر زیر انتگرال را به صورت حاصل ضرب یک تابع برداری $\vec{F}$ در بردار قائم $\vec{n}$ بنویسیم. پس ابتدا $\vec{n}$ را حساب می‌کنیم:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = (x, y, z)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (P, Q, R) \cdot (x, y, z) = Px + Qy + Rz$$

حالا فرض کنید $\vec{F}$ به صورت $\vec{F} = (P, Q, R)$ باشد. با این حساب داریم:

$$Px + Qy + Rz = x(2x + 3e^{x^2}) - y(e^{x^2} + y) + z(2z + \cos 2y)$$

این تابع باید با تابع درون انتگرال برابر باشد؛ یعنی داریم:

و ساده‌ترین انتخاب $P = 2x + 3e^{x^2}$, $Q = -(e^{x^2} + y)$, $R = 2z + \cos 2y$ است. حالا با توجه به $\vec{F} = (2x + 3e^{x^2}, -y - e^{x^2}, 2z + \cos 2y)$ و استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\text{div } \vec{F} = (2 - 1 + 2) = 3$$

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V (\text{div } \vec{F}) dv = \iiint_V 3 dv = 3V = 3 \times \frac{4}{3} \pi (1)^3 = 4\pi$$

۳۰- گزینه «۳» ابتدا وضعیت همگرایی مطلق سری را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n}(x)}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2(x)}{1} < 1 \Rightarrow \sin^2(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

پس سری در این بازه همگرایی مطلق است. حالا وضعیت سری را در دو سر بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ بررسی کنیم: (توجه کنید که با توجه به گزینه‌ها، محاسبات فوق نیاز نبود فقط کافی است وضعیت همگرایی و یا واگرایی سری در نقاط مرزی بررسی شود).

$$x = \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n}(\pm \frac{\pi}{4})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (\frac{1}{2})^n}{n} (-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

سری به دست آمده یک سری متناوب همگراست، با توجه به اینکه در سری متناوب حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ سری هارمونیک است که واگراست.

پس سری اولیه در این نقاط همگرایی مشروط است.



سؤالات رشته‌ی عمران

۱- به ازای چه تعداد عدد طبیعی $0 \leq n \leq 35$ ، تساوی $\sin(n\theta) + i\cos(n\theta) = (\sin\theta + i\cos\theta)^n$ برقرار است؟

- (۱) ۸۷۴ (۲) ۸۷۵ (۳) ۱۷۴۹ (۴) ۱۷۵۰

۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ ، کدام است؟

- (۱) e^{-2} (۲) e^{-1} (۳) e (۴) e^2

۳- حجم حاصل از دوران منحنی $x^2 + 4y^2 = 1$ واقع در ربع اول صفحه مختصات حول خط $x = -1$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi + \pi^2}{6}$ (۲) $\frac{5\pi - \pi^2}{6}$ (۳) $\frac{2\pi + \pi^2}{24}$ (۴) $\frac{10\pi + \pi^2}{12}$

۴- اگر $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+2}$ ، آنگاه $f'(\pi)$ کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۵- مقدار $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + x} dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\ln(2\sqrt{10})$ (۲) $\ln\sqrt{\frac{8}{5}}$ (۳) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2)$ (۴) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2) + \ln 2$

۶- بیشترین انحنای تابع $y = \cosh x$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۷- اگر θ زاویه بین خم $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ و رویه $x^2y - 2yz + xz^2 = 0$ در نقطه $(1, 1, 1)$ باشد، مقدار $\cos\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{139}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{140}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{141}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{142}}$

۸- طول قوس منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $z = 1 - \sqrt{2}x$ و $z = 1 - \sqrt{2}y$ ، کدام مضرب 2π است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۹- مقدار $\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۰- فرض کنید C مرز مربع A باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده و $\oint_C (xy^2 + x^2 \sin^2 x) dx + (x^2y + 2x) dy = 6$. مساحت مربع A کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱- گزینه «۲» با توجه به فرمول دموآر برای هر عدد طبیعی n داریم $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ حالا با اندکی بازنویسی در تساوی داده شده داریم:

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = i^n (\cos \theta - i \sin \theta)^n = i^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

حالا با توجه به تفکیک مقدار i^n به ازای مقادیر مختلف n داریم:

$$i^n (\cos n\theta - i \sin n\theta) = \begin{cases} i \cos n\theta + \sin n\theta & ; n = 4k + 1 \\ -\cos n\theta + i \sin n\theta & ; n = 4k + 2 \\ -i \cos n\theta - \sin n\theta & ; n = 4k + 3 \\ \cos n\theta + i \sin n\theta & ; n = 4k + 4 \end{cases}$$

واضح است به ازای مقادیری از n به صورت $4k+1$ ، که در آن k یک عدد حسابی است، تساوی مورد نظر برقرار است؛ در نتیجه داریم:

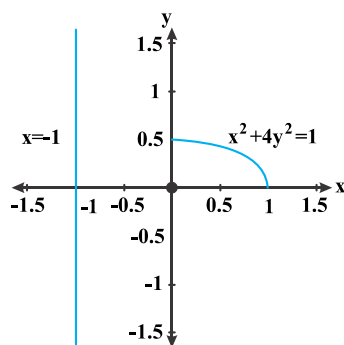
$$1 \leq 4k+1 \leq 3500 \Rightarrow 0 \leq k \leq 874$$

می‌دانیم تعداد اعداد صحیح در یک بازه دو سر بسته به صورت $875 - 0 + 1 = 874 - 0 + 1$ محاسبه می‌شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} = e^{-1}$$

۲- گزینه «۲» برای محاسبه این حد به راحتی با استفاده از هم‌ارزی استرلینگ داریم:

۳- هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای حل این سؤال از روش پوسته‌ای به صورت زیر استفاده می‌کنیم:



$$V = 2\pi \int_a^b |x - k| y dx$$

$$x^2 + 4y^2 = 1 \xrightarrow{x, y > 0} y = \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2}$$

$$V = 2\pi \int_0^1 |x + 1| \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} dx = \pi \int_0^1 (x + 1) \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2}) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (x \sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x) \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(0 + 0 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} + 0 + 0\right) \right] = \pi \left(\frac{3\pi + 4}{12} \right) = \frac{4\pi + 3\pi^2}{12}$$

سنجش گزینه (۴) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است، اما طبق توضیحات فوق هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

۴- گزینه «۱» برای حل این گونه سؤالات باید ببینیم سری داده شده شبیه به بسط مک‌لورن کدام یک از توابع شناخته شده است. با کمی دقت واضح است

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

که با تابعی شبیه $\sin x$ سر و کار داریم. با ضرب دو طرف این تساوی در x داریم:

$$x \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+2} = f(x) \Rightarrow f'(x) = \sin x + x \cos x \rightarrow f'(\pi) = 0 + \pi(-1) = -\pi$$

۵- گزینه «۲» برای حل این انتگرال ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی کرده و داریم:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_1^2 =$$

$$\left[(\ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5) - (\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2) \right] = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{5} = \ln \sqrt{\frac{4}{5}}$$

۶- گزینه «۳» ابتدا تابع انحنا منحنی داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x \Rightarrow y'' = \cosh x$$

$$\kappa = \frac{|\cosh x|}{[1 + (\sinh x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh x}{[1 + (\sinh x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh x}{[\cosh^2 x]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

توجه داشته باشید برای پیدا کردن ماکزیمم این تابع نیازی به پیدا کردن نقاط بحرانی به کمک مشتق نیست؛ فقط کافیست به خاطر داشته باشید که

مینیمم مقدار تابع $\cosh x$ به ازای $x = 0$ حاصل می‌شود که در این نقطه تابع انحنا ماکزیمم خواهد بود. پس داریم:

$$\kappa_{\max} = \frac{1}{1} = 1$$

۷- گزینه «۲» زاویه بین دو منحنی در نقطه تماس آنها با زاویه بین بردار گرادیان (یا سرعت) در آن نقطه برابر است. بنابراین داریم:

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3) \Rightarrow \vec{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2) \xrightarrow{(1,1,1)} \vec{r}'(t) = (1, 2, 3)$$

$$f(x, y, z) = xz^2 - 2yz + x^2y = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f(x, y, z) = (z^2 + 2xy, -2z + x^2, 2xz - 2y) \xrightarrow{(1,1,1)} \vec{\nabla} f = (3, -1, 0)$$

$$\cos \theta = \frac{(1, 2, 3) \cdot (3, -1, 0)}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{9+1+0}} = \frac{3-2}{\sqrt{14}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{140}}$$

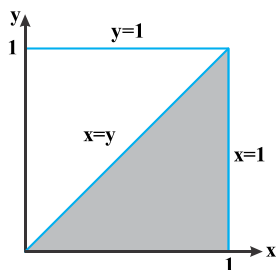
۸- گزینه «۳» ابتدا منحنی داده را به صورت پارامتری می‌نویسیم. برای این کار داریم:

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{3} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad z = 1 - \sqrt{2}x = 1 - \sqrt{2} \cos t$$

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sqrt{3} \sin t, 1 - \sqrt{2} \cos t)$$

حالا با استفاده از رابطه طول قوس منحنی‌های پارامتری داریم:

$$L = \int_a^b \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\sqrt{3} \cos t)^2 + (\sqrt{2} \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3} dt = 2\sqrt{3}\pi$$



۹- گزینه «۱» چون تابع درون انتگرال فقط تابعی از x است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. با توجه

به شکل حدود انتگرال به صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{x^4 + 1} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x^4 + 1} dy dx = \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^2 + 1} dx$$

$$\xrightarrow{x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du} I = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} u \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}$$

۱۰- گزینه «۲» در این‌گونه مسائل که با انتگرال روی منحنی سر و کار داریم ولی در صورت سؤال صحبت از مساحت شده است، مطمئن باشید طراح محترم

شما را به سمت قضیه گرین راهنمایی می‌کند. در این سؤال داریم:

$$\oint_C \underbrace{(xy^2 + x^3 \sin^3 x)}_P dx + \underbrace{(x^2 y + 2x)}_Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (2xy + 2 - 2xy) dA = 2 \iint_D dA = 2A_D = 6 \Rightarrow A_D = 3$$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱- فرض کنید به‌ازای عدد حقیقی $\alpha > 0$ ، یکی از ریشه‌های معادله $(2+i)z^2 - 2\sqrt{2}\alpha z - i + 2 = 0$ حقیقی باشد. مقدار α ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^A$ ، آنگاه مقدار A کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $(\ln 2)^2 + \frac{1}{2}$ (۳) $(\ln 2) + \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}(\ln 2) + 1$

۳- فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ مقدار $f_1 = 1, f_2 = 2, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n (n \in \mathbb{N})$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۴- مقدار تقریب خطی $\sqrt{2(1/1)^2 - 2e^{-0/1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $1/0.3$ (۲) $1/0.5$ (۳) $1/3.5$ (۴) $1/5.5$

۵- فرض کنید $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ در دستگاه $\begin{cases} e^{2u-1} - 4vx = y \\ \cos(\pi u) - y \sin(\pi v) = x^2 \end{cases}$ به‌ازای $u \geq 0$ و $1 < v \leq 2$ صادق باشند. مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$ ، کدام است؟

- (۱) 4 (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) -4

۶- فرض کنید $f(x+y, x-y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{\ln t}{t} dt$ ، مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}(e, 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{8}{e}$ (۲) صفر (۳) $\frac{4}{e}$ (۴) $\frac{4}{e}(1 + \ln 2)$

۷- فرض کنید C منحنی بسته با ضابطه $r = \cos \theta$ در مختصات قطبی در جهت مثبت باشد. مقدار $\oint_C (xy^2 dy - x^2 y dx)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{22}\pi$ (۲) $\frac{3}{16}\pi$ (۳) صفر (۴) $-\frac{3}{16}\pi$

۸- فرض کنید S یک تور به شکل سطح خارجی استوانه $x^2 + z^2 = 4$ و صفحات $y = 1$ و $y = -1$ باشد و در رودی قرار داشته باشد که میدان

بردارهای سرعت جریان آب در آن $\vec{F} = (x, x, y)$ است. شار عبوری از تور، کدام است؟

- (۱) 5π (۲) 6π (۳) 8π (۴) 10π

۹- مقدار $\iiint_R (3 - x^2 + \sin z) dV$ ، که R ناحیه محصور به داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 8π (۳) 16π (۴) 32π

۱۰- کوتاه‌ترین فاصله نقطه $(1, 1, 0)$ از سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ ، کدام است؟

- (۱) 3 (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱- گزینه «۳» با استفاده از رابطه اصلی ریشه‌های معادله درجه ۲ داریم:

$$z = \frac{\sqrt{2}\alpha \pm \sqrt{2\alpha^2 - (2+i)(2-i)}}{2+i} = \frac{\sqrt{2}\alpha \pm \sqrt{2\alpha^2 - 5}}{2+i} = \frac{(\sqrt{2}\alpha \pm \sqrt{2\alpha^2 - 5})(2-i)}{4+1}$$

با توجه به وجود عدد مختلط $2-i$ در صورت، فقط در حالتی مقدار این کسر یک عدد حقیقی خواهد شد که در صورت کسر ضریبی از مزدوج این عدد مختلط را

داشته باشیم. با توجه به اینکه $\sqrt{2}\alpha$ همواره حقیقی است، پس فقط عبارت $\sqrt{2\alpha^2 - 5}$ می‌تواند جزء مختلط عدد مزدوج را بسازد. بدین منظور باید داشته باشیم:

$$\sqrt{2}\alpha \pm \sqrt{2\alpha^2 - 5} = k(2-i) \xrightarrow{2\alpha^2 - 5 < 0} \sqrt{2}\alpha \pm i\sqrt{5 - 2\alpha^2} = k(2-i) \xRightarrow{\alpha > 0} \sqrt{2}\alpha - i\sqrt{5 - 2\alpha^2} = k(2-i)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5 - 2\alpha^2}}{1} = k \Rightarrow 2\alpha^2 = 4(5 - 2\alpha^2) \Rightarrow 10\alpha^2 = 20 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \sqrt{2}$$

۲- گزینه «۲» حد داده شده ابتدا به فرم $\frac{0}{0}$ درون پراوتز مبهم است. برای حل این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} \xrightarrow{\text{HOP}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 + e^x}{1} = 1$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، اکنون مشخص شده که حد در واقع به صورت 1^∞ مبهم است. پس در کل باید به صورت زیر حل شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3 - x}{x} \right)} = e^A$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3 - x}{x^2} \xrightarrow{\text{HOP}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 + e^x - 1}{2x} \xrightarrow{\text{HOP}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x (\ln 2)^2 + 2^{-x} (\ln 2)^2 + e^x}{2} = \frac{2(\ln 2)^2 + 1}{2}$$

۳- گزینه «۳» با توجه به معادله بازگشتی دنباله، جمله عمومی آن را به دست آورده و حد آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow f_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

توجه داشته باشید که نیازی به محاسبه ضرایب مجهول این دنباله نیست؛ زیرا به ازای $n \rightarrow \infty$ جمله $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$ به سمت صفر میل می‌کند و فقط

عبارت $c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ باقی می‌ماند. حالا داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

۴- گزینه «۴» ابتدا تابع $f(x, y) = \sqrt{3x^3 - 2e^y}$ را تعریف می‌کنیم. حالا کافیت تقریب مرتبه اول این تابع را در نقطه $(x_0, y_0) = (1, 0)$ و به ازای $\Delta x = 0/1$ و $\Delta y = -0/1$ محاسبه کنیم:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(1/1, -0/1) = f(1, 0) + 0/1 f_x(1, 0) - 0/1 f_y(1, 0)$$

$$f_x = \frac{9x^2}{2\sqrt{3x^3 - 2e^y}}, \quad f_y = \frac{-2e^y}{2\sqrt{3x^3 - 2e^y}}$$

$$f(1/1, -0/1) = \sqrt{3 - 2} + 0/1 \times \frac{9}{2\sqrt{3-2}} - 0/1 \times \frac{-2}{2\sqrt{3-2}} = 1 + 0/45 + 0/1 = 1/55$$

۵- گزینه «۱» ابتدا به ازای $(x, y) = (0, 1)$ مقادیر u و v را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x, y, u, v) = e^{ru-1} - vx - y = 0 \\ g(x, y, u, v) = \cos(\pi u) - y \sin(\pi v) - x^2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(x,y)=(0,1)} \begin{cases} e^{ru-1} - 1 = 0 \\ g(x, y, u, v) = \cos(\pi u) - \sin(\pi v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = 2 \end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطه مشتق جزئی در توابع ضمنی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} = - \frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} -fv & -fx \\ -2x & -\pi \cos(\pi v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} re^{ru-1} & -fx \\ -\pi \sin(\pi u) & -\pi \cos(\pi v) \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -\pi & -\pi \end{vmatrix}} = - \frac{\lambda \pi}{-2\pi} = 4$$

ع- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} x+y=v \\ x-y=u \end{aligned} \Rightarrow f(v,u) = \int_{(v+u)^r}^{(v-u)^r} \frac{\text{Ln } t}{t} dt \xrightarrow{\text{با تغییر اسم}} f(x,y) = \int_{(x+y)^r}^{(x-y)^r} \frac{\text{Ln } t}{t} dt \Rightarrow x = \frac{v+u}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2}$$

حال x و y مستقل اند و می شود مشتق پاره ای گرفت:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\text{Ln}(x-y)^r}{(x-y)^r} \times r(x-y)(-1) - \frac{\text{Ln}((x+y)^r)}{(x+y)^r} \times r(x+y)$$

$$\begin{aligned} x=e \\ y=o \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(e,o) = \frac{\text{Ln}(e^r)}{e^r} \times re(-1) - \frac{\text{Ln}(e^r)}{e^r} \times re = \boxed{\frac{-\lambda}{e}}$$

$$\text{Ln}(e^r) = r \text{Ln}(e) = r$$

۷- گزینه «۱» با توجه به بسته بودن منحنی، از قضیه گرین استفاده می کنیم:

$$\oint_C \underbrace{(-x^r y)}_P dx + \underbrace{xy^r}_{Q} dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (y^r + x^r) dA$$

با توجه به شکل قطبی منحنی و وجود عامل $x^r + y^r$ در انتگرال، از مختصات قطبی استفاده می کنیم. برای دایره $r = \cos \theta$ داریم:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{r} \leq \theta \leq \frac{\pi}{r} \\ 0 \leq r \leq \cos \theta \end{cases}$$

پس انتگرال برابر است با:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{r}}^{\frac{\pi}{r}} \int_0^{\cos \theta} (r^r) r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{r}}^{\frac{\pi}{r}} \left[\frac{1}{r+1} r^{r+1} \right]_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{r+1} \int_{-\frac{\pi}{r}}^{\frac{\pi}{r}} \cos^{r+1} \theta d\theta = \frac{1}{r+1} \int_0^{\frac{\pi}{r}} (1 + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{r+1} \int_0^{\frac{\pi}{r}} (1 + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{r+1} \int_0^{\frac{\pi}{r}} (1 + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{r+1} \left(\frac{r}{r+1} \theta + \frac{1}{r+1} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{r}} = \frac{r\pi}{r+1} \end{aligned}$$

۸- گزینه «۳» با توجه به اینکه سطح S بسته است، از قضیه دیورژانس استفاده کرده و داریم:

$$\varphi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_D (1+o+o) dv = V_D = \pi(r)(r) = \lambda\pi$$

توجه داشته باشید در پایان مقدار انتگرال برابر حجم داخل استوانه مورد اشاره است که به صورت حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع محاسبه شده است.

۹- گزینه «۴» با توجه به اینکه ناحیه درون کره نسبت به متغیرهای X و Z زوج بوده و توابع x^r و $\sin z$ نسبت به این متغیرها فرد هستند، مقدار این بخش

$$\iiint_R (r - x^r + \sin z) dV = \iiint_R r dV = r V_R = r \times \frac{4}{3} \pi (r)^3 = 32\pi$$

از انتگرال ها صفر خواهد بود. پس داریم:

۱۰- گزینه «۳» فاصله نقطه مورد نظر از هر نقطه (x, y, z) از سهمی گون مورد اشاره برابر است با $d = \sqrt{(x-1)^r + (y-1)^r + z^r}$. برای اینکه این تابع را

مینیمم سازیم، کافیست تابع درون انتگرال را با روش ساده شده لاگرانژ مینیمم کنیم. یعنی داریم:

$$f(x, y, z) = (x-1)^r + (y-1)^r + z^r, \quad g(x, y, z) = x^r + y^r - z = o$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{r(x-1)^{r-1}}{rx} = \frac{r(y-1)^{r-1}}{ry} = \frac{rz}{-1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{y} = -rz \Rightarrow x = y = \frac{1}{1+rz}$$

$$\left(\frac{1}{1+rz} \right)^r + \left(\frac{1}{1+rz} \right)^r - z = \frac{r-z(1+rz)^r}{(1+rz)^r} = o \Rightarrow r-z-4z^r-4z^r = o \Rightarrow z = \frac{1}{r} \Rightarrow x = y = \frac{1}{r}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{r} \right)^r + \left(\frac{1}{r} \right)^r + \left(\frac{1}{r} \right)^r} = \frac{\sqrt{3}}{r}$$



سوالات رشته ریاضی

۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ ، در صورت وجود کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) حد وجود ندارد.

۲- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^{201} - x + 7 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) حداقل ۴

۳- کدام مورد برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$ درست است؟

- (۱) همگرا به $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. (۲) همگرا به ۱ است. (۳) همگرا به $\sqrt{2}$ است. (۴) واگراست.

۴- کدام مورد برای مقادیر سری‌های $I = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$ و $J = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$ درست است؟

- (۱) I و J موجود و متناهی‌اند. (۲) J موجود و متناهی و I بی‌نهایت است. (۳) I موجود و متناهی و J بی‌نهایت است. (۴) I و J بی‌نهایت هستند.

۵- مقدار متوسط تابع $f(x, y) = x$ بر قطعه‌ای از قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ که در سمت راست خط $x = 1$ قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi - \sqrt{3}}$ (۲) $\frac{6\sqrt{3}}{2\pi - \sqrt{3}}$ (۳) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{6\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$

۶- فرض کنید D ناحیه محصور به منحنی‌های $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ بوده و داشته باشیم: $I = \iint_D f(xy) dx dy = A \int_1^2 f(u) du$. مقدار A کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4} \ln 2$ (۲) $\frac{1}{2} \ln 2$ (۳) $\ln 2$ (۴) $2 \ln 2$

۷- جرم کل چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا و تابع چگالی $\rho(x, y, z) = \frac{16}{(1+x+y+z)^3}$ ، کدام است؟

- (۱) $4 \ln 2 - 5$ (۲) $8 \ln 2 - 5$ (۳) $4 \ln 2 + 5$ (۴) $8 \ln 2 + 5$

۸- فرض کنید $z = z(x, y)$ ، $z = e^y \cos x + x e^z$ و $u = e^y \cos x + x e^z$ مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\sin(1)$ (۲) صفر (۳) $\sin(1)$ (۴) $2e$

۹- فرض کنید C منحنی قطبی $r = 2\sqrt{\cos \theta}$ به ازای $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ واقع در صفحه مختصات xy باشد. مقدار $\int_C 2x dx + dz$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۰- فرض کنید S آن قسمت از رویه استوانه‌ای $y = e^x$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا باشد که تصویر قائم آن بر صفحه yz به صورت

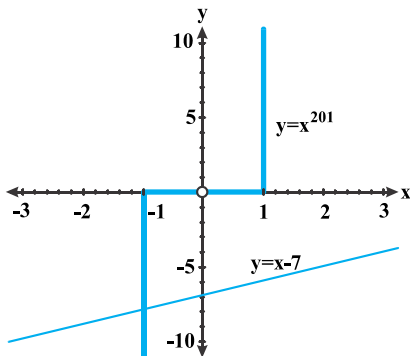
$R = \{1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ است. شار میدان $\vec{F} = 2x \vec{i} - 3xy \vec{j} + \ln z \vec{k}$ بر S، کدام است؟

- (۱) $5 - 10 \ln 2$ (۲) $3 - 2 \ln 2$ (۳) $10 \ln 2 - 5$ (۴) $10 \ln 2 - \frac{15}{4}$

۱- گزینه «۲» حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است. ابتدا با تغییر متغیر $\cos^{-1}(1-x) = t$ حد داده شده را بازنویسی کرده و داریم:

$$\cos^{-1}(1-x) = t \Rightarrow 1-x = \cos t \Rightarrow x = 1 - \cos t$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}} = \frac{0}{0} \sim \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2}t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2}t}{t} = \sqrt{2}$$



۲- گزینه «۱» برای حل این معادله کافیه آن را به صورت $x^{201} = x - 7$ نوشته و دستگاه حاصل را

در یک صفحه مختصات رسم کنیم:

توجه داشته باشید که در بازه $-1 < x < 1$ ، مقدار تابع x^{201} بسیار ناچیز است و به سمت صفر میل می‌کند؛ به همین خاطر در نمودار این تابع اینطور به نظر می‌رسد که در این بازه تابع یک خط راست است. همچنین بعد از این بازه از هر دو طرف تابع به سرعت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و سرعت حرکت آن به مراتب از تابع خطی $x - 7$ بیشتر است. بنابراین این ۲ تابع فقط در یک نقطه در بازه $-2 < x < -1$ همدیگر را قطع می‌کنند.

۳- گزینه «۲» ابتدا دنباله درون سری را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(n+1-n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$S = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 1 - 0 = 1$$

واضح است که سری به دست آمده تلسکوپی است و برای حاصل آن داریم:

۴- گزینه «۳» برای بررسی همگرایی سری‌های داده شده، ابتدا هم‌ارز عبارت $\sqrt[n]{n}$ در بی‌نهایت را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \sim 1 + \frac{1}{n} \ln n$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \ln n - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

حالا با جایگذاری این حد در سری‌های داده شده داریم:

پس طبق آزمون مقایسه، این سری همگراست.

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \ln n - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

می‌دانیم این یک سری هارمونیک واگراست.

۵- گزینه «۴» در واقع خواسته سؤال مقدار متوسط تابع در بازه $1 \leq x \leq 2$ و $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$ است که به سادگی داریم:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x dy dx}{\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx} = \frac{\int_1^2 2x\sqrt{4-x^2} dx}{\int_1^2 2\sqrt{4-x^2} dx} = \frac{-\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2}{x\sqrt{4-x^2} + 4\sin^{-1} \frac{x}{2} \Big|_1^2} = \frac{-\frac{2}{3}(0-3\sqrt{3})}{[0+4(\frac{\pi}{2})-1\sqrt{3}-4(\frac{\pi}{6})]} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{4\pi-3\sqrt{3}}$$



۶- گزینه «۳» اگر فرض کنیم $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ آنگاه D از صفحه xOy به ناحیه مستطیل $1 \leq u \leq 2$ و $1 \leq v \leq 4$ تبدیل می‌شود. اما حواستان باشد چون با تبدیل همزمان x به $-x$ و y به $-y$ معادلات u و v توأمان بدون تغییرات باقی می‌ماند، لذا حاصل انتگرال را در ربع اول حساب کرده و آن را ۲ برابر می‌کنیم. ابتدا ژاکوبین را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}} = \frac{1}{2v}$$

$$I = \iint_D f(xy) dx dy = 2 \int_1^2 \int_1^4 f(u) \frac{1}{2v} dv du = \int_1^2 f(u) \ln v \Big|_1^4 du = \int_1^2 f(u) (\ln 4 - \ln 2) du = \ln 2 \int_1^2 f(u) du$$
 بنابراین داریم:

تذکر: اگر به یک به یک نبودن تبدیل استفاده شده توجه نداشته باشید، ضریب ۲ را نداشته و به اشتباه گزینه (۲) را انتخاب خواهید کرد!

۷- گزینه «۲» به راحتی با استفاده از مختصات دکارتی داریم:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D \rho(x, y, z) dv = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{16}{(1+x+y+z)^2} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[-\frac{16}{(1+x+y+z)} \right]_0^{1-x-y} dy dx = -16 \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy dx \\ &= -16 \int_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{(1+x+y)} \right)_0^{1-x} dx = -16 \int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= -16 \int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+x} \right) dx = -16 \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}x^2 - \ln(1+x) \right)_0^1 = -16 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2 \right) = -16 \left(\frac{5}{8} - \ln 2 \right) = 16 \ln 2 - 10 \end{aligned}$$

۸- گزینه «۱» با فرض $\begin{cases} F(x, y, z, u) = e^y \cos x + xe^z - u = 0 \\ G(x, y, z, u) = x^2z + y \ln x - x \cos y = 0 \end{cases}$ و استفاده از روابط مشتق جزئی داریم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(x, y) = (1, 0)} \begin{cases} \cos 1 + e^z - u = 0 \\ z + 0 - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow z = 1, u = \cos 1 + e^z \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, z)}} = - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_z \\ G_u & G_z \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} -e^y \sin x + e^z & xe^z \\ 2xz + \frac{y}{x} - \cos y & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & xe^z \\ 0 & x^2 \end{vmatrix}} \\ \xrightarrow{(x, y, z, u) = (1, 0, 1, \cos 1 + e^z)} \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\begin{vmatrix} -\sin 1 + e & e \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & e \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = - \frac{-\sin 1 + e - e}{-1} = -\sin 1 \end{aligned}$$

۹- گزینه «۱» سؤال ایراد تایپی دارد که می‌تواند ایراد علمی هم محسوب شود. به نظر می‌رسد در صورت سؤال یک ایراد تایپی وجود دارد و منظور طراح $\int_C 2x dx + dy$ بوده است. در این صورت با توجه به بسته بودن مسیر از قضیه گرین استفاده کرده و داریم:

$$\int_C 2x dx + dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (0 - 0) dA = 0$$

۱۰- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که طبق گفته سؤال، تصویر رویه S ، مستطیل R روی صفحه $yo z$ است. حالا با فرض $g: e^x - y = 0$ داریم:

$$\vec{\nabla} g = (e^x, -1, 0) \Rightarrow \vec{\nabla} g \cdot \vec{i} = e^x$$

$$\vec{n} d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{p}|} dA = \frac{(e^x, -1, 0)}{e^x} dA = (1, -e^{-x}, 0) dA$$

و بنابراین داریم:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = (2x, -2xy, \ln z) \cdot (1, -e^{-x}, 0) dA = (2x + 2xye^{-x}) dA = (2x + 2xe^x)e^{-x} dA = (2x + 2x) dA = 4x dA$$

پس داریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D 4x dA = \iint_D 4 \ln y dz dy = 4 \int_1^2 \int_0^1 \ln y dz dy = 4 \int_1^2 \ln y dy = 4(y \ln y - y) \Big|_1^2 = 4[(2 \ln 2 - 2) - (1 \ln 1 - 1)] = 4(2 \ln 2 - 1)$$

سؤالات رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱- به ازای چه تعداد عدد طبیعی $n \leq 3500$ ، تساوی $\sin(n\theta) + i \cos(n\theta) = (\sin \theta + i \cos \theta)^n$ برقرار است؟

- (۱) ۸۷۴ (۲) ۸۷۵ (۳) ۱۷۴۹ (۴) ۱۷۵۰

۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ کدام است؟

- (۱) e^{-2} (۲) e^{-1} (۳) e (۴) e^2

۳- مقدار $\int_1^2 \frac{1}{x^3 + x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\ln(2\sqrt{10})$ (۲) $\ln \sqrt{\frac{8}{5}}$ (۳) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2) + \ln 2$ (۴) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2) + \ln 2$

۴- معادله صفحه مماس بر رویه $x + z^2 - \frac{1}{\lambda} = xy + yz + xz$ که موازی صفحه $x - 2y + 3z = 4$ باشد، کدام است؟

- (۱) $x - 2y + 3z = 2$ (۲) $x - 2y + 3z = -3$ (۳) $x - 2y + 3z = -2$ (۴) $x - 2y + 3z = 3$

۵- کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از رویه $xyz^2 = 2$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- مقدار $\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۷- فرض کنید C مرز مربع A باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده و $\oint_C (xy^2 + x^2 \sin^2 x) dx + (x^2 y + 2x) dy = 6$ ، مساحت مربع A ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخنامه رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱- گزینه «۲» با توجه به فرمول دموآر برای هر عدد طبیعی n داریم $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ حالا با اندکی بازنویسی در تساوی داده شده داریم:

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = i^n (\cos \theta - i \sin \theta)^n = i^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

حالا با توجه به تفکیک مقدار i^n به ازای مقادیر مختلف n داریم:

$$i^n (\cos n\theta - i \sin n\theta) = \begin{cases} i \cos n\theta + \sin n\theta & ; n = 4k + 1 \\ -\cos n\theta + i \sin n\theta & ; n = 4k + 2 \\ -i \cos n\theta - \sin n\theta & ; n = 4k + 3 \\ \cos n\theta + i \sin n\theta & ; n = 4k + 4 \end{cases}$$

واضح است به ازای مقادیری از n به صورت $4k+1$ ، که در آن k یک عدد حسابی است، تساوی موردنظر برقرار است؛ در نتیجه داریم:

$$1 \leq 4k+1 \leq 3500 \Rightarrow 0 \leq k \leq 874$$

می‌دانیم تعداد اعداد صحیح در یک بازه دو سر بسته به صورت $875 - 0 + 1 = 874$ محاسبه می‌شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = e^{-1}$$

۲- گزینه «۲» برای محاسبه این حد به راحتی با استفاده از هم‌ارزی استرلینگ داریم:

۳- گزینه «۲» برای حل این انتگرال ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی کرده و داریم:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x} &= \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^2 \\ &= \left[(\ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5) - (\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2) \right] \\ &= \frac{1}{2} (3 \ln 2 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{2^3}{5} = \ln \sqrt{\frac{8}{5}} \end{aligned}$$



۴- گزینه «۲» ابتدا باید بردار نرمال صفحه را به دست آوریم. با توجه به اینکه صفحه‌ای موازی صفحه مورد نظر داده شده است، بردار نرمال آن‌ها نیز موازی خواهد بود. پس $(1, -2, 3) \parallel \vec{n}$. از طرفی این بردار نرمال بر رویه مورد نظر عمود است پس در راستای بردار گرادیان آن در نقطه تماس خواهد بود.

$$f(x, y, z) = x + z^2 - \frac{1}{\lambda} - xy - yz - xz = 0$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{\nabla} f \parallel \vec{n} \Rightarrow \frac{f_x}{1} = \frac{f_y}{-2} = \frac{f_z}{3} \Rightarrow \frac{1-y-z}{1} = \frac{-x-z}{-2} = \frac{2z-y-x}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+2y+2z = -x-z \\ 3-3y-3z = 2z-y-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+2z = 2 \\ x-2y-5z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2z = -1 \\ 4y+8z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - \frac{1}{2} \\ y = -2z + \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$f(z) = z - \frac{1}{2} + z^2 - \frac{1}{\lambda} - (z - \frac{1}{2})(-2z + \frac{5}{4}) - (-2z + \frac{5}{4})z - (z - \frac{1}{2})z = 0$$

$$\Rightarrow z - \frac{5}{4} + z^2 - (-2z^2 + \frac{9}{4}z - \frac{5}{4}) - (-2z^2 + \frac{5}{4}z) - (z^2 - \frac{1}{2}z) = 4z^2 - 2z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{4}, z = 0 & (1) \\ x = 0, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x - 2y + 3z = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 0 = -3$$

$$(2) \Rightarrow x - 2y + 3z = 0 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید یکی از این صفحات در گزینه (۲) آمده است.

۵- گزینه «۲» فاصله مبدأ مختصات از هر نقطه (x, y, z) رویه مورد اشاره برابر است با $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. برای اینکه این تابع را مینیمم سازیم،

کافی است تابع درون رادیکال را با روش ساده شده لاگرانژ مینیمم کنیم. یعنی داریم:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad g(x, y, z) = xyz^2 - 2 = 0$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{2x}{yz^2} = \frac{2y}{xz^2} = \frac{2z}{2xyz} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2z^2 = 2y^2z^2 \\ 4x^2yz = 2yz^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm y = \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$xyz^2 - 2 = x(\pm x)(2x^2) - 2 = \pm 2x^4 - 2 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = y = \pm 1, z = \pm \sqrt{2}$$

$$d = \sqrt{1+1+2} = 2$$

۶- گزینه «۱»

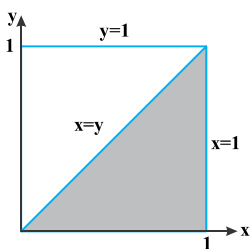
چون تابع درون انتگرال فقط تابعی از x است، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. با توجه به شکل حدود انتگرال به صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{x^4 + 1} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x^4 + 1} dy dx = \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^2 + 1} dx$$

$$\xrightarrow{x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du} I = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} u \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}$$

۷- گزینه «۲» در این‌گونه مسائل که با انتگرال روی منحنی سروکار داریم ولی در صورت سؤال صحبت از مساحت شده است، مطمئن باشید طراح محترم شما را به سمت قضیه گرین راهنمایی می‌کند. در این سؤال داریم:

$$\oint_C (\underbrace{xy^2 + x^3 \sin^3 x}_P) dx + (\underbrace{x^2y + 2x}_Q) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (2xy + 2 - 2xy) dA = 2 \iint_D dA = 2A_D = 6 \Rightarrow A_D = 3$$





سؤالات و پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۳

سؤالات رشته‌ی MBA

۱- فرض کنید z_1, z_2, z_3 اعداد مختلط با اندازه یک باشند، به‌طوری که $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. مقدار $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}\right)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{3}{2}$

۲- فرض کنید رأس یک مثلث و $B(3, 4, 3)$ و $C(0, 1, 0)$ دو نقطه از دو ضلع زاویه BAC باشد. اندازه این زاویه کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۳- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^{200} + n^{100} + 1}\right)$, $(n \in \mathbb{N})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) مقدار حد وجود ندارد.

۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{\frac{1}{1+3^{x-2}}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\infty$ (۳) $+\infty$ (۴) مقدار حد وجود ندارد.

۵- کدام تابع با $f(x) = \coth^{-1} x$ برابر است؟

- (۱) $y = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{x-1}{x+1}$ (۲) $y = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{x+1}{x-1}$ (۳) $y = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (۴) $y = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{x^2-1}{x^2+1}$

۶- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt[3]{1+\frac{n}{n}}\right)}{n^2}$, $(n \in \mathbb{N})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{3}{4}(\sqrt[3]{2}-1)$ (۳) $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$ (۴) $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}+1)$

۷- اگر d کوتاه‌ترین فاصله نقطه $(0, b)$ از منحنی $x^2 - 4y = 0$ باشد، آنگاه کدام مورد نادرست است؟

- (۱) $d = -b, b < 0$ (۲) $d = b, 0 \leq b \leq 2$ (۳) $d = 2\sqrt{b-1}, b > 2$ (۴) $d = 2\sqrt{1-b}, 0 \leq b \leq 1$

۸- فرض کنید $x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{4+9t^2}}$ و $y = f(x)$ تابعی پیوسته و حداقل ۲ مرتبه مشتق‌پذیر بوده و $y(x) \neq 0$. حاصل $\frac{f''(x)}{f(x)}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۹

۹- مقدار $B = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)} dx dy$ و $C = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|} dx dy$ کدام‌اند؟

- (۱) $B = C = 4$ (۲) $B = 4$ و C وجود ندارد. (۳) $C = 4$ و B وجود ندارد. (۴) B و C وجود ندارند.

۱۰- اگر حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی $y = 3x + 3$ و محورهای مختصات، حول خط $x = c < 0$ برابر 7π باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱- کدام مورد برای سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ، درست است؟

- (۱) سری واگراست.
(۲) سری همگرا و مقدار سری برابر $\frac{1}{2\ln 2}$ است.
(۳) سری همگرا و مقدار سری از مقدار $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ کمتر است.
(۴) سری همگرا و مقدار سری از مقدار $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ کمتر است.

۱۲- اگر $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{k=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{kx^n}{n}\right)$ ، آنگاه $f'(x)$ کدام است؟

- (۱) $4x^3 \tan^{-1} \frac{x^4}{4}$ (۲) $\frac{1}{4} x^3 \tan^{-1} \frac{x^4}{4}$ (۳) $4x^3 \tan^{-1} x^4$ (۴) $\frac{1}{4} x^3 \tan^{-1} x^4$

۱۳- معادله صفحه مماس بر رویه $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9$ در نقطه $(1, 2, 4)$ کدام است؟

- (۱) $x + y + z = 7$ (۲) $2x + 2y + z = 10$ (۳) $x + 2y + 2z = 13$ (۴) $2x + 4y + z = 14$

۱۴- طول مارپیچ لگاریتمی $r = e^{-a\theta}$ ، $(0 \leq \theta < \infty, a > 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{1+a^2}$ (۲) $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ (۳) $\sqrt{1+a}$ (۴) $\frac{\sqrt{1+a}}{a}$

۱۵- مساحت ناحیه مشترک منحنی‌های $r = 1 + \cos \theta$ و $r = 1 - \cos \theta$ ، کدام است؟

- (۱) $\pi + 7$ (۲) $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ (۳) $4 + \frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2} + 2\pi$

۱۶- فرض کنید طول قوس منحنی $f(x) = x^2$ در بازه $[0, 2]$ برابر A باشد. مساحت قسمتی از رویه $z = x^2$ ، $0 \leq y \leq 3$ که توسط صفحه $z = 4$ بریده می‌شود، چند برابر A است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹

۱۷- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x, y) = x^2 \hat{i} + 8xy \hat{j}$ روی قسمتی از منحنی $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$ در بازه $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ در جهت مثلاًتی، کدام است؟

- (۱) $16\sqrt{2}$ (۲) ۱۶ (۳) -۸ (۴) $-8\sqrt{2}$

۱۸- حجم ناحیه محصور به رویه $y = \sin 2x$ و صفحه $z = 2$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا $(x, y, z \geq 0)$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۹- بیشترین انحنای منحنی $y^2 - x^2 = 4$ در بازه $[-2, 1]$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۰- سری تیلور تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ حول نقطه $x = -1$ کدام است؟

- (۱) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, -2 < x < 0$ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x+1)^n, -2 < x < 0$ (۴) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x+1)^n, -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$



۲۱- مینیمم مطلق تابع $f(x) = \max\{|x|, |1+x|\}$ بر $\mathbb{R}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۲۲- نقاط ناپیوستگی تابع $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x}{2 + (2 \cos \frac{x}{2})^{2n}}$ کدام است؟

- (۱) $2\pi(k \pm \frac{1}{3})$ (۲) $2\pi(k \pm \frac{2}{3})$ (۳) $4\pi(k \pm \frac{1}{3})$ (۴) $4\pi(k \pm \frac{2}{3})$

۲۳- تاب منحنی حاصل از تقاطع استوانه $x^2 + y^2 = -2x$ و صفحه $x + 2y - z = 4$ در نقطه $(0, 0, -4)$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۴- فرض کنید $u > v$ ، $z = u^2 - v^2$ ، $x = u + v$ ، $y = uv$ و z دارای مشتقات جزئی پیوسته مرتبه دوم باشد. حاصل $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{4uv}{(u-v)^3}$ (۲) $\frac{\lambda uv}{(u-v)^3}$ (۳) $\frac{\lambda uv}{(u-v)^2}$ (۴) $\frac{4uv}{(u-v)^2}$

۲۵- مشتق سویی تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در جهت بردار $\vec{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ ، در مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{25}$ (۲) صفر (۳) $-\frac{9}{25}$ (۴) $-\frac{12}{25}$

۲۶- فرض کنید نیروی $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{i} + 4z\hat{j} + 6y\hat{k}$ بر سطح S واقع بر صفحه $x = 4$ که توسط رویه $2x = y^2 + z^2$ بریده می‌شود، اثر کند.

اگر C مرز بسته جهت‌دار مثبت سطح S باشد، مقدار کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی مسیر C ، کدام است؟

- (۱) 16π (۲) $8\sqrt{2}\pi$ (۳) 8π (۴) صفر

۲۷- فرض کنید میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = ax\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ بر سطح بسته S شامل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $z = 2$ و $z = -2$ ، گذر می‌کند.

اگر $\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 64\pi$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۸- اگر C منحنی بسته $x^2 = 4x^2 - x^4$ ، $x \geq 0$ در جهت پادساعتگرد باشد، مقدار $\oint_C (-y^2 dx + 4x dy)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{64}{3}$ (۲) ۲۱ (۳) ۱۱ (۴) $\frac{32}{3}$

۲۹- مساحت سطح واقع بر کره $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$ محدود به صفحات $x = 0$ و $x = 3$ ، کدام است؟

- (۱) 24π (۲) 20π (۳) 16π (۴) 12π

۳۰- اندازه شار گذرای میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = 4x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$ از سطح $6 = x + 2y - 3z$ که توسط استوانه $r = 1 - \sin \theta$ بریده می‌شود،

کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 12π (۳) 18π (۴) 24π

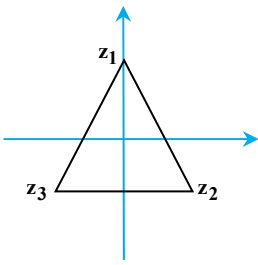
۱- گزینه «۴» سؤال را به سه روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول (تقریباً تستی): با فرض $z_1 = 1$ و $z_2 = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ و $z_3 = e^{\frac{i4\pi}{3}}$ داریم:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}\right) \quad (z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ می‌شود و اندازه هر سه بردار نیز برابر ۱ می‌باشد}).$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{0i}}{e^{\frac{i2\pi}{3}}} + \frac{e^{0i}}{e^{\frac{i4\pi}{3}}} + \frac{e^{\frac{i2\pi}{3}}}{e^{\frac{i4\pi}{3}}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{-\frac{i2\pi}{3}} + e^{-\frac{i4\pi}{3}} + e^{-\frac{i2\pi}{3}}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم: اگر $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ و $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ، آن‌گاه z_1, z_2, z_3 رئوس مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز مبدأ مختصات است:



طبق فرض اندازه هر سه عدد مختلط برابر و مجموع آنها صفر است، پس با توجه به نکته بالا z_1, z_2, z_3 رئوس مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز مبدأ مختصات است و داریم:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} + \frac{z_1 + z_2}{z_3} = e^{i\frac{\pi}{3}} + \frac{-z_3}{z_3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

روش سوم (روش تشریحی‌تر):

با فرض $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ و $z_3 = x_3 + iy_3$ داریم:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}\right) \quad \text{حال داریم:}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1 z_3 + z_1 z_2 + z_2 z_3}{z_2 z_3}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3}{z_2 z_3}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_2 + z_3}{z_2 z_3}\right) \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{(z_2 - z_1)(z_3 + z_1)}{z_2 z_3}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} - 1\right)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} - 1\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} - 1\right) \Rightarrow \operatorname{Re}(x_1 x_2 + y_1 y_2 - 1 - i(x_1 y_2 - x_2 y_1)) = x_1 x_2 + y_1 y_2 - 1$$

$x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$

با توجه به اینکه اندازه‌های سه عدد برابر ۱ است داریم:

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \text{ و } x_2^2 + y_2^2 = 1 \text{ و } x_3^2 + y_3^2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)^2}_{=0} - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)^2}_{=0} - 2(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) = 3$$

$$\Rightarrow -2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 2y_1 y_2 - 2y_1 y_3 = 3 \Rightarrow 2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 = 2(x_2^2 + y_2^2) - 3 \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{-1}{2}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = -1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

بنابراین در انتها داریم:

توضیح: این تست برگرفته از نکته مثال ۱۸ صفحه ۶۳۸ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.



۲- گزینه «۱» باید بردارهای $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را به دست آوریم و سپس زاویه بین این دو بردار را بیابیم:

$$\overline{AB} = (4, 2, 2)$$

$$\overline{AC} = (1, -1, -1)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{4 - 2 - 2}{\sqrt{16 + 4 + 4} \times \sqrt{1 + 1 + 1}} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

توضیح: با استفاده از نکته صفحه ۳۴ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) حل می‌شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{\sqrt{n}} (\pi \sqrt{n^{100} + n^{100}} + 1) \simeq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{\sqrt{n}} (\pi \sqrt{n^{100}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{\sqrt{n}} (n^{100} \pi) \xrightarrow[\substack{n \in \mathbb{N} \\ \sin k\pi = 0 \\ k \in \mathbb{Z}}]{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \sin k\pi = 0 \\ k \in \mathbb{Z}}} 0$$

۳- گزینه «۱»

با توجه به این که $n \in \mathbb{N}$ می‌باشد در نتیجه مقدار n^{100} همواره صحیح است و به ازای مقادیر صحیح π مقدار $\sin$ همواره برابر صفر است و به هر توانی نیز برسد، حاصل آن صفر است.

سازمان سنجش گزینه (۳) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است، اما طبق توضیحات فوق، گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

۴- گزینه «۴» باید حدهای راست و چپ را جداگانه محاسبه کنیم.

$$f(2^+) = \frac{2-3}{\frac{1}{1+(3)^{0^+}}} = \frac{-1}{1+(3)^{+\infty}} = \frac{-1}{+\infty} = 0, \quad f(2^-) = \frac{2-3}{\frac{1}{1+(3)^{0^-}}} = \frac{-1}{1+(3)^{-\infty}} = \frac{-1}{1+0} = -1$$

بنابراین حد داده شده وجود ندارد، چون حدهای راست و چپ باهم برابر نیستند.

توضیح: این تست مشابه مثال ۱۸ صفحه ۵۴ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.

۵- گزینه «۲»

$$f(x) = \cot^{-1} hx = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

روش اول: فرض کنیم تعریف تابع وارون $\cot hx$ را بلدیم:

روش دوم: فرض کنیم فرمول را فراموش کرده‌ایم؛ $\cot^{-1} hx$ وارون تابع $\coth x$ است، پس داریم:

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x}$$

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \Rightarrow ye^{2x} - y = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x}(y - 1) = y + 1$$

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow 2x = \operatorname{Ln} \left(\frac{y+1}{y-1} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{y+1}{y-1} \right) \Rightarrow y = \cot^{-1} hx = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{x+1}{x-1} \right), |x| > 1$$

توضیح: این تست مطالب صفحه ۲۸ (معکوس توابع هیپربولیک) کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt[3]{1+\frac{n}{n}}}{n}$$

۶- گزینه «۱» در مخرج کسر از n فاکتور می‌گیریم و حد داده شده را به صورت مقابل می‌نویسیم:

حال با استفاده از فرمول حد مجموع انتگرال داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt[3]{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx = \left(\frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \right)_0^1 = \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1) = \frac{3}{4} (2\sqrt[3]{2} - 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{n} = 0$$

توضیح: این تست مشابه مثال ۱۳ صفحه ۳۸۸ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.

۷- گزینه «۴»

$$x^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

نقطه $M(\alpha, \frac{\alpha^2}{4})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم و فاصله نقطه $A(0, b)$ تا نقطه M را به دست می‌آوریم:

$$AM = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\frac{\alpha^2}{4} - b)^2}$$

$$(AM)' = \frac{2\alpha + 2(\frac{\alpha^2}{4} - b)(\frac{\alpha}{2})}{2\sqrt{\alpha^2 + (\frac{\alpha^2}{4} - b)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha(2 + \frac{\alpha^2}{2} - b) = 0 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \frac{\alpha^2}{2} = b - 2 \Rightarrow \alpha^2 = 4(b - 2) \xrightarrow{\alpha^2 > 0} b - 2 > 0 \rightarrow b > 2$$

$$d = AM = \sqrt{4b - 4 + (b - 2 - b)^2} = \sqrt{4b - 4 + 4} = \sqrt{4b - 4} = \sqrt{4(b - 1)} = 2\sqrt{b - 1}, b > 2$$

اکنون با جایگذاری α^2 در AM داریم:

$$d = AM = \sqrt{0 + b^2} = |b| \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \rightarrow d = -b \\ 0 \leq b \leq 2 \rightarrow d = b \end{cases}$$

اگر $\alpha = 0$ باشد، داریم:

۸- گزینه «۴» با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$x = \int_0^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{4 + 9t^2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} 1 = f'(x) \times \frac{1}{\sqrt{4 + 9f^2(x)}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{4 + 9f^2(x)} \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x) = \frac{18f(x)f'(x)}{2\sqrt{4 + 9f^2(x)}} = \frac{9f(x)f'(x)}{\sqrt{4 + 9f^2(x)}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{18f(x)f'(x)}{2f'(x)\sqrt{4 + 9f^2(x)}} = 9f(x) \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = 9$$

توضیح: این تست مشابه مثال ۳۰۶ صفحه ۳۵۴ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.

۹- گزینه «۲»

$$B = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} dy$$

با توجه به اینکه انتگرال‌های داده شده هر ۴ ناحیه محورهای مختصات را شامل می‌شود، داریم:

$$B = 4 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 4(-e^{-x})_0^{+\infty} \times (-e^{-y})_0^{+\infty} = 4(0 + e^0)(0 + e^0) = 4$$

اکنون انتگرال C را باید در دو حالت زیر به دست آوریم:

$$(۱) \text{ اگر } x + y > 0 \Rightarrow C = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-(x+y)}}_{e^{-x} \times e^{-y}} dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} (-e^{-y})_{-\infty}^{+\infty} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} (+\infty) dx = (+\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$= (+\infty)(-e^x)_{-\infty}^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty \text{ وجود ندارد}$$

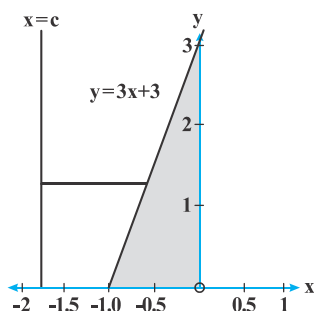
$$(۲) \text{ اگر } x + y < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+y)} dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \times e^y dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x (e^y)_{-\infty}^{+\infty} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x (+\infty) dx$$

$$= (+\infty)(e^x)_{-\infty}^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

بنابراین انتگرال C در هر دو حالت وجود ندارد.

۱۰- گزینه «۱» در این سؤال یک نکته مهم وجود دارد. درست است که با توجه به مقدار c و اینکه در هریک از سه حالت $c \leq -1$ ، $-\frac{1}{2} \leq c \leq -\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{2} \leq c \leq 0$ شکل حاصل از

دوران و محاسبات آن متفاوت خواهد بود، ولی در حد فاصل حالتی که محور دوران از داخل منحنی عبور می‌کند $c = -1$ ، حجم حاصل از دوران یک استوانه به شعاع ۱ و ارتفاع ۳ است که از داخل آن یک مخروط با همین مشخصات حذف شده است. در این حالت حجم حاصل از دوران برابر $V = \pi(1)(3) - \frac{1}{3}\pi(1)(3) = 2\pi$ خواهد بود. حالا از این مختصات هر چقدر محور دوران به سمت $x = 0$ پیش می‌رود حجم حاصل هیچ وقت از 2π بیشتر نخواهد شد. پس برای محور دوران حتماً $c \leq -1$ خواهد بود. حالا برای این حالت با توجه به شکل ناحیه و موقعیت محور دوران با روش پوسته‌ای، داریم:



$$V = 2\pi \int_a^b |x - c| y dx = 2\pi \int_{-1}^0 |x - c| (3x + 3) dx$$

$$\xrightarrow{c < x < 0} V = 2\pi \int_{-1}^0 (x - c)(3x + 3) dx = 2\pi \int_{-1}^0 (3x^2 + (3 - 3c)x - 3c) dx$$

$$V = 2\pi \left(x^3 + \frac{3 - 3c}{2} x^2 - 3cx \right) \Big|_{-1}^0 = 2\pi \left[0 - \left(-1 + \frac{3 - 3c}{2} + 3c \right) \right] = 2\pi \left(\frac{1 - 3c}{2} \right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{1 - 3c}{2} \right) = 2\pi \Rightarrow 1 - 3c = 2 \Rightarrow c = -1$$

توضیح: این تست با توجه به نکته ۱۲ و مثال ۱۱۵ صفحه ۴۳۰ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.

۱۱- گزینه «۳» با توجه به این که به ازای $x \geq 2$ تابع $\frac{1}{x(\ln x)^2}$ یک تابع پیوسته و نزولی و مثبت است، برای تعیین همگرایی یا واگرایی از آزمون انتگرال

استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \xrightarrow[u = \frac{dx}{x}]{u = \ln x} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

پس این سری همگراست و مقدار همگرایی آن با توجه به آزمون انتگرال در سری‌ها کمتر از مقدار انتگرال می‌باشد.

توضیح: این تست با توجه به نکته ۱۷ صفحه ۵۰۷ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.

۱۲- گزینه «۱» با استفاده از فرمول مجموع ریمان داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

حال داریم:

$$f(x) = \int_0^1 x^4 \tan^{-1}\left(\frac{x^4}{4} u\right) du$$

با تغییر متغیر $\frac{x^4}{4} u = y$ داریم:

$$\frac{x^4}{4} du = dy$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$f(x) = \int_0^{\frac{x^4}{4}} x^4 \tan^{-1}(y) \frac{4}{x^4} dy \Rightarrow f(x) = \int_0^{\frac{x^4}{4}} 4 \tan^{-1}(y) dy$$

اکنون با مشتق‌گیری از انتگرال مشتق $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 4x^3 \tan^{-1}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

۱۳- گزینه «۴» ابتدا بردار گرادیان رویه را به دست می آوریم و داریم:

اکنون معادله صفحه مماس را می نویسیم:

$$\nabla f = (2x, 2y, 1) \xrightarrow{(1, 2, 4)} (2, 4, 1)$$

$$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f_z(z - z_0) = 0$$

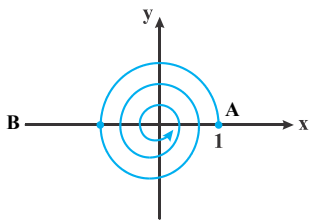
$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0$$

$$2x + 4y + z = 14$$

توضیح: این تست مشابه مثال ۲۱۴ صفحه ۱۶۴ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) است.

۱۴- گزینه «۲» با افزایش مقدار θ ، مارپیچ داده شده حول مبدأ در جهت دایره مثلثاتی می چرخد، مثلاً به ازای $\theta = 0$ داریم $r = 1$ و نقطه A یعنی نقطه

شروع به دست می آید و به ازای $\theta = \pi$ به نقطه B می رسیم که در آنجا $r = e^{-a\pi}$ می باشد، بنابراین θ در این مارپیچ از صفر تا ∞ تغییر می کند و داریم:



$$\begin{aligned} L &= \int_0^\infty \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta = \int_0^\infty \sqrt{(e^{-a\theta})^2 + (-ae^{-a\theta})^2} d\theta \\ &= \int_0^\infty \sqrt{e^{-2a\theta} + a^2 e^{-2a\theta}} d\theta = \int_0^\infty \sqrt{e^{-2a\theta} (1 + a^2)} d\theta \\ &= \sqrt{1 + a^2} \int_0^\infty e^{-a\theta} d\theta = \sqrt{1 + a^2} \left(-\frac{1}{a} e^{-a\theta} \right)_0^\infty = \sqrt{1 + a^2} \left(0 + \frac{1}{a} \right) = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \end{aligned}$$

توضیح: این تست دقیقاً مثال ۴۰ صفحه ۶۱۸ کتاب جلد ۱ میکرو است.

۱۵- «هیچ کدام از گزینه ها صحیح نمی باشد.» منحنی های $f(\theta) = 1 + \cos \theta$ و $g(\theta) = 1 - \cos \theta$ هر دو دلواری (دلنما) هستند. $f(\theta)$ به ازای $\theta = \pi$

و $g(\theta)$ به ازای $\theta = 0$ از مبدأ می گذرند. پس در مبدأ مختصات با هم برخورد می کنند. از آنجا که $\cos \theta = \cos(-\theta)$ است پس در هر دو منحنی

$f(\theta) = f(-\theta)$ و $g(\theta) = g(-\theta)$ یعنی نسبت به محور x ها تقارن دارند. علاوه بر مبدأ، محل برخورد این دو منحنی در $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ است در واقع با حل

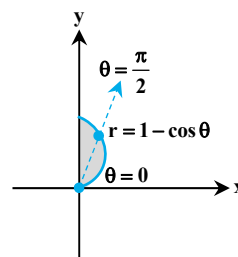
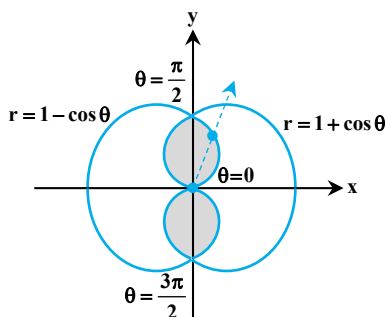
معادله $f(\theta) = g(\theta)$ داریم $1 + \cos \theta = 1 - \cos \theta$ پس $\cos \theta = 0$ که $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \frac{3\pi}{2}$ را مشخص می کند.

با توجه به شکل، ناحیه ی محدود به این دو منحنی از ۴ بخش یکسان در ۴ ربع صفحه تشکیل شده است. می توانیم مساحت واقع در ربع اول را حساب

کرده و ۴ برابر کنیم. این ناحیه بین $r = 0$ و $r = 1 - \cos \theta$ قرار دارد و در آن داریم $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4} - 2$$



سازمان سنجش گزینه (۳) را صحیح اعلام کرده است ولی طبق توضیحات فوق، هیچ کدام از گزینه ها صحیح نیست.

توضیح: این تست دقیقاً مثال ۶۸ صفحه ۶۲۹ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.



۱۶- گزینه «۳» ابتدا با استفاده از فرمول طول قوس داریم:

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} dx$$

حال مساحت رویه را به دست می‌آوریم:

$$S = \iint ds$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx = \sqrt{1 + (2x)^2} dy dx = \sqrt{1 + 4x^2} dy dx$$

حال داریم:

$$z = x^2 \xrightarrow{z=4} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$S = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} dy dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1+4x^2} (y)_0^{\sqrt{2}} dx = 2 \int_{-2}^2 \sqrt{1+4x^2} dx = 2(2) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} dx = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} dx = 4A$$

توضیح: مشابه این تست، سؤالات بسیاری در کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) وجود دارد.

۱۷- گزینه «۱» ابتدا باید منحنی داده شده را به صورت پارامتری بنویسیم که برای این کار باید ابتدا y را بر حسب x به دست آوریم و سپس با فرض

$x = t$ ، متغیر y را هم بر حسب t بنویسیم:

$$4y^2 = x^2 + 4 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2 + 4}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 4}$$

حال با پارامتری کردن x و y منحنی $\overline{C}(t)$ را بر حسب t می‌نویسیم و داریم:

$$x = t \Rightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 4} \Rightarrow \overline{C}(t) = (t, \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 4})$$

$$\overline{C}'(t) = (1, \frac{1}{2} \times \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 4}}) = (1, \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}})$$

حال داریم:

$$\int_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(C)} F(C(t)) \cdot C'(t) dt = \int_{(C)} (t^2, 4t\sqrt{t^2+4}) \cdot (1, \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}) dt$$

$$= \int_{(C)} (t^2 + 4t^2) dt = \int_0^{\sqrt{2}} 5t^2 dt \xrightarrow{x=t} t^2)_0^{\sqrt{2}} = (2\sqrt{2})^2 = 16\sqrt{2}$$

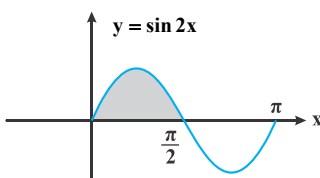
توضیح: مشابه این تست، سؤالات بسیاری در کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) وجود دارد.

۱۸- گزینه «۲» با استفاده از انتگرال سه گانه حجم ناحیه محصور را به دست می‌آوریم:

$$V = \iiint_V dV$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin 2x} \int_0^{\sqrt{2}} dz dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin 2x} (z)_0^{\sqrt{2}} dy dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y)_0^{\sin 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x)_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (-2) = \sqrt{2}$$



۱۹- گزینه «۴» برای این کار ابتدا تابع انحنای منحنی را به صورت رابطه $\kappa = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ استخراج می کنیم و داریم:

$$y^2 - x^2 = c \Rightarrow 2yy' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

$$y'' = \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{y - x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{c}{y^3} \Rightarrow \kappa = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\frac{c}{y^3}|}{(1+\frac{x^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\frac{c}{y^3}|}{(\frac{y^2+x^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\frac{c}{y^3}|}{\frac{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|y^3|}} = \frac{c}{(c+2x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حالا به راحتی برای محاسبه نقطه ماکزیمم این تابع در بازه مورد نظر داریم:

$$c + 2x^2 \geq c \xrightarrow{-2 \leq x \leq 1} \kappa_{\max} = \frac{c}{(c+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c}{c^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

۲۰- گزینه «۲» جمله عمومی سری تیلور به صورت $\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n$ است. ابتدا باید $f^{(n)}(x)$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}} \xrightarrow{x=-1} f^{(n)}(-1) = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(-1)^2} = (n+1)!$$

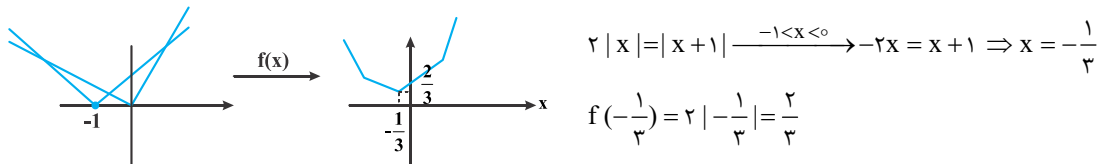
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!}(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n!(x+1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, -2 < x < 0$$

حال داریم:

توجه داشته باشید که بازه همگرایی باید نسبت به $x = -1$ متقارن باشد.

توضیح: این تست مشابه مثال ۲۷۷ صفحه ۵۶۳ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.

۲۱- گزینه «۳» باید هر دو تابع داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم و ماکزیمم مقدار این دو تابع را به عنوان تابع $f(x)$ در نظر بگیریم و سپس در تابع $f(x)$ مینیمم مطلق را بیابیم.



۲۲- گزینه «۱» بعد از بازنویسی حد داده شده به فرم زیر، با توجه به حدود عبارت $\cos \frac{x}{2}$ خواهیم داشت:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x}{2 + (2 \cos \frac{x}{2})^{2n}} = \frac{2x}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cos \frac{x}{2})^{2n}}$$

$$۱) |2 \cos \frac{x}{2}| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cos \frac{x}{2})^{2n} = 0 \Rightarrow y = x$$

$$۲) |2 \cos \frac{x}{2}| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cos \frac{x}{2})^{2n} = \infty \Rightarrow y = 0$$

$$۳) |2 \cos \frac{x}{2}| = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cos \frac{x}{2})^{2n} = 1 \Rightarrow y = \frac{2x}{3}$$

پس به نظر می رسد در نقاطی که $|\cos \frac{x}{2}| = \frac{1}{2}$ است باید وضعیت همگرایی تابع بررسی شود. از طرفی در هیچ حالتی به جز $x = 0$ سه حالت بالا با هم

مساوی نمی شوند. پس در مجموعه نقاطی که $\cos \frac{x}{2} = \pm \frac{1}{2}$ است همواره ناپیوستگی خواهیم داشت.

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2\pi(k \pm \frac{1}{3})$$

توضیح: این تست مشابه مثال ۱۴۶ صفحه ۹۶ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۱) است.



۲۳- گزینه «۱» ابتدا تقاطع استوانه و صفحه داده شده را پارامتری می‌نویسیم و داریم:

$$x^2 + 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$x+1 = \cos \theta \Rightarrow x = \cos \theta - 1$$

$$y = \sin \theta \Rightarrow z = x + 2y - 4 = (\cos \theta - 1) + 2 \sin \theta - 4 \Rightarrow z = \cos \theta + 2 \sin \theta - 5$$

$$\vec{R}(t) = (\cos \theta - 1, \sin \theta, \cos \theta + 2 \sin \theta - 5), \theta = 0$$

بنابراین منحنی $\vec{R}(t)$ به صورت مقابل می‌باشد:

اکنون با استفاده از فرمول تاب یا پیچش منحنی داریم:

$$T = \frac{\vec{R}' \circ (\vec{R}'' \times \vec{R}''')}{|\vec{R}' \times \vec{R}''|} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{|\vec{R}' \times \vec{R}''|}$$

$$\vec{R}' = (-\sin \theta, \cos \theta, -\sin \theta + 2 \cos \theta) \xrightarrow{\theta=0} (0, 1, 2)$$

$$\vec{R}'' = (-\cos \theta, -\sin \theta, -\cos \theta - 2 \sin \theta) \xrightarrow{\theta=0} (-1, 0, -1)$$

$$\vec{R}''' = (\sin \theta, -\cos \theta, \sin \theta - 2 \cos \theta) \xrightarrow{\theta=0} (0, -1, -2)$$

$$\vec{R}' \circ (\vec{R}'' \times \vec{R}''') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times (2) + 2(1) = 0$$

اکنون داریم:

پس $T = 0$ خواهد بود.

توضیح: این تست با استفاده از نکته صفحه ۹۳ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) است.

۲۴- گزینه «۲» باید z را بر حسب x و y به دست آوریم و سپس دو مرتبه از آن مشتق بگیریم:

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \end{cases} \Rightarrow x^2 = u^2 + v^2 + 2uv \Rightarrow x^2 - 2y = u^2 + v^2$$

$$(u-v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv \Rightarrow (u-v)^2 = x^2 - 2y - 2y \Rightarrow (u-v)^2 = x^2 - 4y \xrightarrow{u>v} u-v = \sqrt{x^2 - 4y}$$

از طرفی داریم:

حال داریم:

$$z = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v) = x\sqrt{x^2 - 4y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4x}{2\sqrt{x^2 - 4y}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 4y}} \xrightarrow{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} -2 \left(\frac{\sqrt{x^2 - 4y} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4y}}}{x^2 - 4y} \right) = -2 \left(\frac{(u-v) - \frac{(u+v)^2}{u-v}}{(u-v)^2} \right) = -2 \left(\frac{(u-v)^2 - (u+V)^2}{(u-v)^3} \right) = \frac{4uv}{(u-v)^3}$$

توضیح: مشابه این تست، سؤالات بسیاری در کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) وجود دارد.

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

۲۵- گزینه «۴» ابتدا بردار $\vec{u}$ را یک‌ه می‌کنیم:

حال با استفاده از فرمول مشتق سویی برای توابع چندضابطه‌ای داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} = \frac{f(x_0 + bu_1, y_0, hu_v) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{3}{5}h, -\frac{4}{5}h, 0\right) - 0}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{25}h^2 + \frac{16}{25}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{12}{25}h^2}{h(h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{12}{25}h^2}{h^2} = -\frac{12}{25}$$

توضیح: این تست مشابه مثال‌های ۱۷۵ و ۱۷۸ صفحه ۱۵۱ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) است.

۲۶- گزینه «۱» با توجه به این که صفحه $x = 4$ بر روی رویه $2x = y^2 + z^2$ یک مرز بسته ایجاد می کند، برای محاسبه مقدار کار انجام شده از قضیه استوکس استفاده می کنیم و داریم:

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 4z & 6y \end{vmatrix} = \vec{i}(6-4) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-x) = 2\vec{i} - x\vec{k}$$

$$\begin{cases} 2x = y^2 + z^2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 = 8, \vec{n} = (1, 0, 0)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D (2, 0, -x) \cdot (1, 0, 0) dA = \iint_D 2 dA = 2 \times (\text{مساحت دایره}) = 2(8\pi) = 16\pi$$

توضیح: این تست مشابه مثال ۱۲۹ صفحه ۴۹۱ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) است.

۲۷- گزینه «۲» با توجه به این که میدان داده شده یک میدان برداری می باشد و ناحیه مورد نظر یک ناحیه بسته است از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم و داریم:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 64\pi$$

$$\iiint (a+1+2z) dv$$

با استفاده از مختصات استوانه ای داریم:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-2}^2 (a+1+2z) r dz dr d\theta$$

$$\int_{-2}^2 ((a+1)r + 2zr) dz = (a+1)rz + z^2r \Big|_{-2}^2 = 2r(a+1) + 4r - (-2r(a+1) + 4r) = \int_0^2 4r(a+1) dr = 4(a+1) \left(\frac{r^2}{2}\right) \Big|_0^2 = 8(a+1)$$

$$\Rightarrow 8(a+1) \int_0^{2\pi} d\theta = 8(a+1)(2\pi) = 64\pi \Rightarrow a+1 = 4 \Rightarrow a = 3$$

توضیح: مشابه این تست، سؤالات بسیاری در کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) وجود دارد.

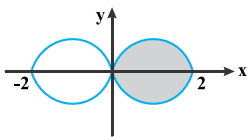
۲۸- گزینه «۱» با توجه به این که منحنی داده شده یک منحنی بسته می باشد، از قضیه گرین استفاده می کنیم و داریم:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx$$

$$\iint (4+2y) dy dx$$

با توجه به این که عامل $2y$ نسبت به y فرد و ناحیه انتگرال گیری هم با تبدیل y به $-y$ تغییری نمی کند. پس حاصل این انتگرال صفر است، بنابراین داریم:

$$y^2 = 0 \Rightarrow x^2(4-x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, -2, 2$$



$$\text{حاصل انتگرال} = \iint 4 dy dx \xrightarrow{x \geq 0} 4 \times 2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy dx = 8 \int_0^2 (y) \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = 8 \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx$$

$$\xrightarrow{\substack{4-x^2=u \\ -2xdx=du}} -4 \int \sqrt{u} du = -4 \left(\frac{2}{3} \right) u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = -\frac{8}{3} ((4-x^2)^{\frac{3}{2}}) \Big|_0^2 = -\frac{8}{3} (0 - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{64}{3}$$

توضیح: این تست مشابه مثال ۱۲۷ صفحه ۴۱۷ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) است.

۲۹- گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر $\begin{cases} x-1=X \\ y=Y \\ z-1=Z \end{cases}$ معادله کره را به فرم $X^2 + Y^2 + Z^2 = 16$ تبدیل می‌کنیم. در مختصات جدید معادله دو صفحه

$\begin{cases} X=-1 \\ X=2 \end{cases}$ به صورت $\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ است. حالا با توجه به تقارن کره در مختصات جدید، می‌توانیم از صفحات $\begin{cases} z=-1 \\ z=2 \end{cases}$ کمک بگیریم. تصویر قطعه‌ای که به

وسیله صفحه $z=-1$ از پایین کره جدا می‌گردد به صورت مقابل است:

$$X^2 + Y^2 + 1 = 16 \Rightarrow X^2 + Y^2 = 15 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{15} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

به طور مشابه برای قطعه بالایی داریم:

$$X^2 + Y^2 + 4 = 16 \Rightarrow X^2 + Y^2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{12} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

حالا برای محاسبه مساحت دو قطعه داریم:

$$S = \iint_{S_1 \cup S_2} d\sigma = \iint_{S_1} d\sigma + \iint_{S_2} d\sigma, \quad d\sigma = \frac{r dA}{\sqrt{16 - X^2 - Y^2}} = \frac{r dr d\theta}{\sqrt{16 - r^2}}$$

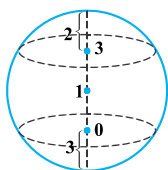
$$\Rightarrow S = \iint_{D_1} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{16 - r^2}} + \iint_{D_2} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{16 - r^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{12}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{16 - r^2}} + \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{15}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{16 - r^2}} = 2\pi(-4\sqrt{16 - r^2}) \Big|_0^{\sqrt{12}} + 2\pi(-4\sqrt{16 - r^2}) \Big|_0^{\sqrt{15}}$$

$$= -8\pi(2 - 4) - 8\pi(1 - 4) = 16\pi + 24\pi = 40\pi$$

حالا کافیست مقدار فوق را از مساحت کره که برابر $4\pi(4)^2$ است کم کنیم که داریم:

روش ساده‌تر: کره داده شده یک کره به مرکز $(1, 0, 1)$ و شعاع ۴ می‌باشد، با توجه به صفحات $x=0$ و $x=3$ باید سطح محدود به کره و این صفحات را به دست

آوریم و برای این کار باید از مساحت کل کره، مساحت عرق‌چین‌های بالا و پایین کره را که توسط صفحات $x=0$ و $x=3$ ایجاد شده است کم کنیم و داریم:



$$16\pi = 4\pi(4)(2) = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت سطح عرق‌چین بالایی}$$

$$24\pi = 4\pi(4)(3) = \text{مساحت سطح عرق‌چین پایینی}$$

$$24\pi = 4\pi(4)^2 - (16\pi + 24\pi) = \text{مساحت ناحیه وسط بین دو صفحه } x=0 \text{ و } x=3$$

توضیح: این تست مشابه مثال ۲۴ صفحه ۴۴۳ کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) است.

۳۰- «هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» جواب صحیح در گزینه‌ها نیست. تصویر سطح مورد نظر روی صفحه xoy همان منحنی $r = 1 - \sin \theta$ است،

پس ابتدا nds را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x, y, z) : x + 2y - 3z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{v}g = (1, 2, -3), P = \vec{k} \Rightarrow \vec{v}g \cdot \vec{P} = -3$$

$$\vec{n}ds = \frac{\vec{v}g}{|\vec{v}g \cdot \vec{P}|} dA = \frac{(1, 2, -3)}{|-3|} dA = \frac{1}{3} (1, 2, -3) dA$$

حال مقدار شار را به دست می‌آوریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}ds = \iint_D (4x, 2y, 2z) \cdot \frac{1}{3} (1, 2, -3) dA = \frac{1}{3} \iint_D (4x + 4y - 6z) dA = \frac{1}{3} \iint_D 4x + 4y - (2x + 4y - 12) dA = \frac{1}{3} \iint_D (2x + 12) dA$$

تابع زیر انتگرال نسبت به x فرد و ناحیه تصویر نسبت به y متقارن است. پس حاصل انتگرال برای متغیر x صفر است و داریم:

$$\frac{1}{3} \iint_D (0 + 12) dA = 4 \iint_D dA = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{1 - \sin \theta} r dr d\theta$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \sin \theta)^2 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin \theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}) d\theta = 2(\theta + 2\cos \theta + \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2(2\pi + \underbrace{2\cos 2\pi}_{=2} + \pi - \underbrace{2\cos 0}_{=2}) = 2(2\pi + 2 + \pi - 2) = 2(3\pi) = 6\pi$$

سازمان سنجش گزینه (۳) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است ولی طبق توضیحات فوق، هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

سؤالات رشته‌ی عمران

۱- مجموعه جواب‌های معادله $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$, $(n \in \mathbb{N})$ ، کدام است؟ $(\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\})$

- (۱) $\{\cot \frac{k}{n} \pi, k \in \mathbb{N}_n\}$ (۲) $\{\cos \frac{k}{n} \pi, k \in \mathbb{N}_n\}$ (۳) $\{\cot \frac{2k-1}{2n} \pi, k \in \mathbb{N}_n\}$ (۴) $\{\cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k \in \mathbb{N}_n\}$

۲- فرض کنید $\vec{a}, \vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار با طول واحد در فضای $\mathbb{R}^3$ و $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}) = \sqrt{2}\vec{b} + \sqrt{3}\vec{c}$. زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۳- اگر $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}, (n \in \mathbb{N})$ ، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) e^{-1} (۳) ۱ (۴) e

۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2\cos x}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$ ، کدام است؟

- (۱) e^{-1} (۲) ۱ (۳) e (۴) $+\infty$

۵- مشتق‌سویی تابع دو متغیره f در نقطه $(1, 2)$ و در جهت $2\hat{i} + \hat{j}$ برابر با ۲ و در جهت $\hat{i} - \hat{j}$ برابر -2 است. در کدام جهت، تغییرات تابع f در نقطه $(1, 2)$ ماکزیمم است؟

- (۱) $\hat{i} - \hat{j}$ (۲) $\hat{i} + \hat{j}$ (۳) $\pm \hat{i}$ (۴) $\pm \hat{j}$

۶- مقدار $\int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2 + x + 1} dx$ ، کدام است؟ (راهنمایی: از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ استفاده کنید).

- (۱) $-\ln 2$ (۲) صفر (۳) $\ln 2$ (۴) $2\ln 2$

۷- نیروی $\vec{F}(x, y) = (3x^2 + 2xy)\hat{i} + (x^2 + 2y)\hat{j}$ بر جسمی وارد می‌شود و آن را روی منحنی $x^2 + y^2 = 5$ از نقطه $A(1, 2)$ به نقطه $B(2, 1)$ منتقل می‌کند. کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی مسیر مورد نظر، کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۶ (۴) ۵

۸- مقدار $\iint_S xdydz + ydxdz + xydxdy$ ، که در آن S سطح بیضی‌گون $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{9}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۹- فرض کنید میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{y}\hat{i} + \frac{1}{x}\hat{j} + z\hat{k}$ از سطح S که روی سهمیگون $z = 4 - x^2 - y^2$ بالای صفحه $z = 2$ قرار دارد، گذر کند.

شار گذرای نیروی $\vec{F}$ بر سطح S ، کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 8π (۳) 10π (۴) 12π

۱۰- میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} - y\hat{k}$ بر سطح S واقع بر صفحه $x = 1$ که توسط استوانه $y^2 + z^2 = 4$ بریده می‌شود، گذر می‌کند. اگر $\hat{n}$ بردار یک‌ه قانم برونسوی سطح S باشد، مقدار $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ ، کدام است؟

- (۱) -4π (۲) -2π (۳) 2π (۴) 4π

۱- گزینه «۳» با توجه به اینکه $z = i$ ریشه معادله نیست، ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{z+i}{z-i}=w} w^n = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow w = e^{i\frac{2k\pi+\pi}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{z+i}{z-i} = w \Rightarrow \frac{-iw-i}{-w+1} = z \xrightarrow{\frac{2k\pi+\pi}{n}=\theta} z = i \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = i \frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1} = i \frac{(1+\cos\theta) + i\sin\theta}{(\cos\theta-1) + i\sin\theta}$$

$$z = i \frac{\frac{1+\cos\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{-\sin\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = i \frac{\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}{-\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2})} = i \frac{\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}(i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$

$$z = \cot\frac{\frac{2k\pi+\pi}{n}}{2} = \cot\frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow z = \cot\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

توضیح: این تست دقیقاً مثال ۹۰ صفحه ۶۶۳ کتاب ریاضی عمومی جلد (۱) است.

۲- گزینه «۱» با توجه به اتحاد حاصل ضرب خارجی ۳ بردار داریم:

$$\vec{a} \times (\vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{c}) = \vec{r}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{r}[(\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}] = \vec{r}\sqrt{2}\vec{b} + \vec{r}\sqrt{3}\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}\vec{c} = \frac{\vec{r}\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vec{a}\vec{b} = \frac{\vec{r}\sqrt{3}}{-6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \times 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

توضیح: این تست شبیه مثال ۸۴ صفحه ۳۹ کتاب ریاضی عمومی جلد (۲) است.

۳- گزینه «۲» به راحتی با تشکیل کسر مورد اشاره داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\frac{(n+1)^{n+2}}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!n^{n+1}}{n!(n+1)(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})^{n+1}}$$

توجه داشته باشید که حد موجود در مخرج به فرم 1^∞ مبهم است. در نتیجه داریم:

$$L = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

توضیح: این تست شبیه مثال‌های ۳۳ و ۳۴ صفحه ۴۷۱ کتاب ریاضی عمومی جلد (۱) است.

۴- گزینه «۲» حد داده شده ابتدا به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{2x} = 1$$

در این صورت حد کلی به فرم 1^∞ مبهم خواهد بود، پس حد را به صورت زیر از اول حل می‌کنیم می‌دانیم حد تابع u^v در این حالت برابر با حد تابع $e^{(u-1) \times v}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2-2\cos x}{x^2} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{x^3}} \sim e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)-x^2}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^3}} = e^0 = 1$$

۵- گزینه «۴» سؤال ایراد علمی دارد.

روش اول: با توجه به رابطه مشتق سوئی با کمک بردار گرادیان تابع داریم:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = (f_x, f_y) \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \xrightarrow{(f_x, f_y) \Big|_{(x_0, y_0)} = (f_1, f_2)} D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = (f_1, f_2) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\left. \begin{aligned} u = (2, 2) &\Rightarrow (f_1, f_2) \cdot \frac{(2, 2)}{\sqrt{4+4}} = \frac{2f_1 + 2f_2}{2\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow f_1 + f_2 = 2\sqrt{2} \\ u = (1, -1) &\Rightarrow (f_1, f_2) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{2}} = -2 \Rightarrow f_1 - f_2 = -2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_1 = 0, f_2 = 2\sqrt{2}$$

حالا با توجه به اینکه بیشترین تغییرات تابع در یک نقطه در جهت بردار گرادیان است و بردار گرادیان در نقطه $(1, 2)$ برابر $(0, 2\sqrt{2})$ است، بردار یکه گرادیان $\vec{j} = (0, 1)$ خواهد بود. به نظر می‌رسد گزینه مورد نظر طراح (۴) است، اما توجه داشته باشید که تغییرات تابع در جهت $-\vec{j}$ مینیمم است. به نظر می‌رسد منظور طراح محترم اندازه تغییرات است که در راستای بردار گرادیان (فارغ از جهت) ماکزیمم خواهد بود.

روش دوم:

$$u_1 = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow |\vec{u}_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_{\vec{u}_1}(f) = (f_x, f_y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{f_x}{\sqrt{2}} + \frac{f_y}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow f_x + f_y = 2\sqrt{2} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$\vec{u}_2 = \vec{i} - \vec{j} \Rightarrow |\vec{u}_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_{\vec{u}_2}(f) = (f_x, f_y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{f_x}{\sqrt{2}} - \frac{f_y}{\sqrt{2}} = -2 \Rightarrow f_x - f_y = -2\sqrt{2} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} f_x + f_y = 2\sqrt{2} \\ f_x - f_y = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2f_x = 0 \Rightarrow f_x = 0, f_y = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{u}_2 = (0, 1) \Rightarrow D_{\vec{u}_2} = (0, f_y) \cdot (0, 1) = f_y = 2\sqrt{2}$$

باید برداری را انتخاب کنیم که بیشترین f_y را به ما بدهد، یعنی درخت بردار $\pm y$ و داریم:

که بیشترین مقدار مشتق سوئی را به ما می‌دهد.

سازمان سنجش گزینه (۴) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است، اما طبق توضیحات فوق، هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

توضیح: این تست شبیه مثال ۱۸۹ صفحه ۱۵۶ کتاب ریاضی عمومی جلد (۲) است.

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{-dt}{t^2} \xrightarrow{\text{حدود } t \text{ را حساب کنیم}} I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{x^2 + x + 1} dx$$

۶- گزینه «۲» با توجه به راهنمایی خود سؤال داریم:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1} \cdot \frac{-dt}{t^2} = - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln t}{1+t+t^2} dt = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

حالا انتگرال جدید را بر حسب t می‌نویسیم:

$$F(x, y) = \underbrace{(3x^2 + 2xy)}_P \vec{i} + \underbrace{(x^2 + 2y)}_Q \vec{j} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

۷- گزینه «۳» با توجه به اینکه در تابع دو بعدی داده شده داریم:

پس مقدار کار مستقل از مسیر بوده و با استفاده از تابع پتانسیل داریم:

$$f(x, y) = \int (3x^2 + 2xy) dx + \int 2y dy = x^3 + x^2 y + y^2 + c$$

$$W = f(2, 1) - f(1, 2) = (8 + 4 + 1 + c) - (1 + 2 + 4 + c) = 6$$

توضیح: این تست شبیه مثال ۵۳ صفحه ۳۸۸ کتاب ریاضی عمومی جلد (۲) است.



۸- گزینه «۳» با توجه به اینکه سطح S بسته است و مقدار انتگرال داده شده در واقع همان $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ است، با کمک قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_D (1+1+0) dv = 2 \iiint_D dv = 2V_D$$

در تساوی اخیر منظور از V_D حجم بیضی گون مورد اشاره است که برابر است با:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{\frac{1}{9}} = 1 \Rightarrow V_D = \frac{4}{3} \pi abc = \frac{4}{3} \pi (1) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow I = 2V_D = \frac{4\pi}{9}$$

۹- گزینه «۲» توجه داشته باشید که سطح مورد اشاره بسته نیست؛ پس از آنجایی که معادله سطح و تابع برداری ساده هستند، از روش مستقیم انتگرال سطح داریم:

$$\varphi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$S: g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \xrightarrow{z=2} x^2 + y^2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\vec{n} dS = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|} dA = \frac{(2x, 2y, 1)}{1} dA = (2x, 2y, 1) dA$$

$$\varphi = \iint_D \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z\right) \cdot (2x, 2y, 1) dA = \iint_D (x^2 + y^2 + z) dA = \iint_D (x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2) dA = 4 \iint_D dA = 4A_D$$

در تساوی پایانی منظور از A_D مساحت ناحیه D است که یک دایره به شعاع $\sqrt{2}$ است، پس داریم:

$$\varphi = 4\pi(\sqrt{2})^2 = 8\pi$$

توضیح: مشابه این تست، سؤالات بسیاری در کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) وجود دارد.

۱۰- گزینه «۱» به راحتی با محاسبه مستقیم انتگرال مورد اشاره روی سطح S با فرض اینکه بر صفحه YOZ تصویر شده باشد محاسبه می‌کنیم:

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & -y \end{vmatrix} = (-1, 0, 0)$$

$$g(x, y, z) = x - 1 = 0 \Rightarrow D: y^2 + z^2 = 4$$

$$\vec{n} dS = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|} dA = \frac{(1, 0, 0)}{1} dA = (1, 0, 0) dA$$

$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (-1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dA = \iint_D (-1 + 0 + 0) dA = -\iint_D dA = -A_D$$

در تساوی پایانی منظور از A_D مساحت ناحیه D است که یک دایره به شعاع ۲ است، پس داریم:

$$I = -\pi(2)^2 = -4\pi$$

توضیح: این تست شبیه مثال‌های ۱۲۸ و ۱۳۰ صفحات ۴۹۰ و ۴۹۱ کتاب ریاضی عمومی جلد (۲) است.

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱- اگر $z = \sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n$ ، آنگاه مقدار $\operatorname{Re}(z)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \int_0^{x^{-2}} e^{t^2} \sin t \, dt$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۲ (۴) $+\infty$

۳- شعاع استوانه مستدیر قائمی 30 cm است که با سرعت $2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ افزایش می‌یابد. ارتفاع استوانه 50 cm و با سرعت $3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ کاهش می‌یابد. مساحت

کل این استوانه با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

- (۱) با سرعت $160\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ کاهش می‌یابد. (۲) با سرعت $160\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ افزایش می‌یابد.

- (۳) با سرعت $260\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ کاهش می‌یابد. (۴) با سرعت $260\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ افزایش می‌یابد.

۴- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + 2y^2$ به شرط $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۵- مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n(2n+1)}{2n^2+n-1}\right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\ln 3$ (۲) $-\ln 2$ (۳) $\ln 2$ (۴) $\ln 3$

۶- فرض کنید $f(u, v) = uve^{-(u^2+v^2)}$. مقدار $\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} \int_{-\infty}^{y+1} f(u, v) \, du \, dv \right)$ به ازای $y=1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2e^5}$ (۲) $-\frac{5}{4e^5}$ (۳) صفر (۴) $\frac{3}{2e^5}$

۷- فرض کنید مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $f = f(x, y)$ موجود و پیوسته باشند. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + e^{-2x}, x + e^{2x}) - f(2x + e^{-x}, 2x + e^x)}{x} = 1$ ،

آنگاه مقدار $f_x(1, 1)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۸- مقدار $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 \frac{x+y}{1+x^2} \, dx \, dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۹- حجم ناحیه‌ای از فضا که از پایین به صفحه xy و از بالا به رویه $\rho = 1 - \cos \phi$ (زاویه بین شعاع حامل و محور z در مختصات کروی است)

محصور می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰- شارگذرای میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (2x + yz^2)\hat{i} + (2y + x^2)\hat{j} + (2z + 4xy)\hat{k}$ در جهت بردار قائم برونسوی سطح یک طرف باز Δ برابر $\frac{77}{15}$

است. اگر سطح Δ صفحه $z=0$ را در منحنی‌های $x=2y-y^2$ و $x=0$ قطع کرده و تصویر آن درون ناحیه محصور به منحنی‌های مزبور قرار گیرد، آنگاه

حجم ناحیه درون سطح Δ بالای صفحه xy ، کدام است؟

- (۱) $\frac{109}{120}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{8}$

$$z = \sum_{n=1}^{99} (1+i)^n = \sum_{n=1}^{99} (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n$$

۱- گزینه «۲» با نوشتن عدد مختلط درون پرانتز به فرم نمایی داریم:

حالا با کمک حد مجموع یک سری هندسی با تعداد جملات محدود داریم:

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(1-(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{99})}{1-(1+i)} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{i\frac{100\pi}{4}}}{-i} = \frac{(1+i) - \sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{2}}}{-i} = \frac{i(1+i) - \sqrt{2}i(-1)}{-i^2} = \frac{(\sqrt{2}+1)i-1}{1} \Rightarrow \text{Re}(z) = -1$$

۲- گزینه «۱» حد داده شده به فرم $\infty \times \infty$ مبهم است. در نتیجه با بازنویسی آن به فرم زیر و استفاده از قاعده مشتق گیری از انتگرال داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} \int_0^{x^{-\frac{1}{3}}} e^{t^{\frac{1}{3}}} \sin t dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x^{-\frac{1}{3}}} e^{t^{\frac{1}{3}}} \sin t dt}{x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} e^{(x^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}} \sin x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \times 1 \times x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = 0$$

توضیح: این تست شبیه مثال ۳۲۸ صفحه ۳۶۱ کتاب ریاضی عمومی جلد (۱) است.

$$S_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

۳- گزینه «۴» ابتدا مساحت کل استوانه را برحسب شعاع و ارتفاع آن می‌نویسیم:

$$\frac{dS_T}{dt} = 2\pi \left(\frac{dr}{dt} h + r \frac{dh}{dt} \right) + 4\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi (2 \times 5 \times 3 + 3 \times (-2)) + 4\pi \times 3 \times 2 = 20\pi + 240\pi = 260\pi$$

با توجه به اینکه نرخ تغییر مساحت مثبت است، پس در حال افزایش است.

توضیح: این تست شبیه مثال‌های ۱۲۹ و ۱۳۰ صفحه ۱۶۵ کتاب ریاضی عمومی جلد (۱) است.

$$x = \cos \alpha, y = \sin \alpha, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

۴- گزینه «۳» با توجه به اینکه $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد، از تغییر متغیر مقابل استفاده می‌کنیم:

$$z = 4 \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha = \underbrace{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}_{=2} + 2 \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha = 2 + 2 \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \sin 2\alpha$$

$$z' = 4 \cos \alpha (-\sin \alpha) - 3 \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow -2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{3}{2}$$

در این بازه 2 جواب $\Rightarrow -\pi < 2\alpha < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ برای α خواهیم داشت، پس تابع داده شده دارای 2 نقطه بحرانی است.

$$\frac{n(2n+1)}{2n^2+n-1} = \frac{n(2n+1)}{(2n-1)(n+1)} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

۵- گزینه «۳» برای حل این سری ابتدا سعی می‌کنیم آن را به فرم یک سری تلسکوپی درآوریم. پس داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\text{Ln}\left(\frac{n}{2n-1}\right)}_{f_n} - \underbrace{\text{Ln}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)}_{f_{n+1}} \right] = \text{Ln}\left(\frac{1}{2-1}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ln}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = 0 - \text{Ln}\frac{1}{2} = \text{Ln}2$$

توضیح: این تست دقیقاً شبیه مثال‌های ۱۶۴ و ۱۶۵ صفحه ۵۲۰ کتاب ریاضی عمومی جلد (۱) است.

۶- گزینه «۲» ابتدا انتگرال دوگانه داده شده را به صورت زیر بازنویسی کرده و سپس با استفاده از مشتق انتگرال داریم:

$$I = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} \int_{-\infty}^{y+1} u v e^{-(u^2+v^2)} du dv \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} v e^{-v^2} dv \int_{-\infty}^{y+1} u e^{-u^2} du \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} v e^{-v^2} dv \right) \int_{-\infty}^{y+1} u e^{-u^2} du + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{y+1} u e^{-u^2} du \right) \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} v e^{-v^2} dv$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{y} e^{-y} \right) \left(-\frac{1}{2} e^{-u^2} \Big|_{-\infty}^{y+1} \right) + (1 \times (y+1) e^{-(y+1)^2}) \left(-\frac{1}{2} e^{-u^2} \Big|_{-\infty}^{\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{2} e^{-y} \left(-\frac{1}{2} e^{-(y+1)^2} \right) + (y+1) e^{-(y+1)^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-y} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-y-(y+1)^2} - \frac{1}{2} (y+1) e^{-y-(y+1)^2} = -\left(\frac{1}{4} y + \frac{3}{4} \right) e^{-y-(y+1)^2} \xrightarrow{y=1} I = -\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) e^{-1-(1+1)^2} = -\frac{5}{4} e^{-5} = -\frac{5}{4e^5}$$

۷- گزینه «۲» حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است. در نتیجه با روش هسپیتال داریم:

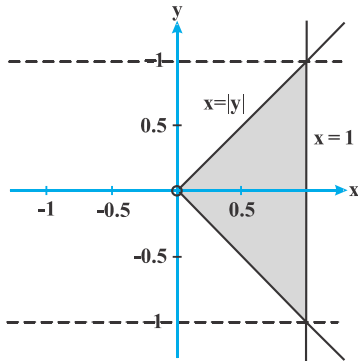
$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + e^{-2x}, x + e^{2x}) - f(2x + e^{-x}, 2x + e^x)}{x} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2e^{-2x})f_x(x + e^{-2x}, x + e^{2x}) - (2 - e^{-x})f_x(2x + e^{-x}, 2x + e^x)}{1} = 1$$

$$\Rightarrow (1 - 2)f_x(1, 1) - (2 - 1)f_x(1, 1) = -2f_x(1, 1) = 1 \Rightarrow f_x(1, 1) = -\frac{1}{2}$$

توضیح: این تست شبیه مثال ۸ صفحه ۵۳۰ کتاب ریاضی عمومی جلد (۲) است.

۸- گزینه «۱» با توجه به اینکه در تابع درون انتگرال، مخرج فقط تابعی از x است، بهتر است ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم:



$$I = \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 \frac{x+y}{1+x^6} dx dy = \int_0^1 \int_{-x}^x \frac{x+y}{1+x^6} dy dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^6} (xy + \frac{1}{2}y^2)_{-x}^x dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^6} (x^2 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^6} dx = \int_0^1 \frac{2x^2 dx}{1+(x^3)^2} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3} \tan^{-1} u \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi}{6}$$

توضیح: این تست تقریباً شبیه مثال‌های ۵۵ صفحه ۲۳۸ و ۶۱ صفحه ۲۴۰ کتاب ریاضی عمومی جلد (۲) است.

۹- گزینه «۴» واضح است که باید از مختصات کروی استفاده کنیم. با توجه به اینکه محدودیتی روی x و y نیست، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و همچنین چون ناحیه از

یک سمت به صفحه xy محدود است، پس $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ است. از طرفی طبق سؤال $0 \leq \rho \leq 1 - \cos \varphi$ پس داریم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{1-\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = (2\pi) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{1-\cos \varphi}) \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \times \frac{1}{4} (1 - \cos \varphi)^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6} (1 - 0) = \frac{\pi}{6}$$

توضیح: مشابه این تست، سؤالات بسیاری در کتاب ریاضی عمومی میکرو جلد (۲) وجود دارد.

۱۰- گزینه «۴» با اضافه کردن سطح $\Delta': z = 0$ ناحیه درون سطح موردنظر را بسته و از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$I = \iint_{\Delta} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Delta \cup \Delta'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma - \iint_{\Delta'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \underbrace{\iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) dv}_{I_1} - \underbrace{\iint_{\Delta'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma}_{I_2}$$

$$I_1 = \iiint_D (3 + 2 + 3) dv = 8 \iiint_D dv = 8V_D$$

$$I_2 = \iint_{z=0} (3x, 2y + x^2, 4xy) \cdot (0, 0, -1) dA = \iint_{z=0} -4xy dA$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2y - y^2 \end{cases} \Rightarrow 2y - y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, 2$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^2 \int_0^{2y-y^2} -4xy dx dy = \int_0^2 -2y(x^2 \Big|_0^{2y-y^2}) dy = \int_0^2 -2y(2y - y^2)^2 dy = \int_0^2 -(4y^3 - 8y^4 + 4y^5) dy$$

$$= -(2y^4 - \frac{8}{5}y^5 + \frac{4}{6}y^6) \Big|_0^2 = -(32 - \frac{8 \times 32}{5} + \frac{64}{3}) = -(\frac{32 \times 15 - 24 \times 32 + 5 \times 64}{15}) = -\frac{32}{15}$$

$$I = I_1 - I_2 = 8V_D - (-\frac{32}{15}) = \frac{77}{15} \Rightarrow V_D = \frac{3}{8}$$

توضیح: این تست تقریباً شبیه مثال ۱۱۱ صفحه ۴۸۱ کتاب ریاضی عمومی جلد (۲) است.



سوالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱- فرض کنید بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ یک‌ه باشند و $\vec{a} \neq \vec{b}$. طول بردار $\vec{a} - \vec{b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۲- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. کدام مورد برای تابع f درست است؟

- (۱) $f'(0)$ وجود ندارد. (۲) تابع f روی بازه‌های شامل صفر صعودی است.

- (۳) تابع f روی بازه‌های شامل صفر نزولی است. (۴) تابع f روی بازه‌های شامل صفر نه صعودی و نه نزولی است.

۳- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و به ازای هر دو عدد حقیقی x و y تساوی $f(x+y) = f(x) - f(y) + xy(x+y)$ برقرار باشد. مقدار $\sum_{k=1}^{17} f'(k)$ کدام است؟

- (۱) ۱۳۸۹ (۲) ۱۳۹۰ (۳) ۱۳۹۱ (۴) ۱۳۹۳

۴- مساحت ناحیه درون منحنی بسته $(a, b > 0)$ ، $\begin{cases} x = a \cos t, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = b \sin t \cos^2 t \end{cases}$ کدام مضرب πab است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۵- اگر $\int_1^{\infty} (\frac{n}{x+1} - \frac{2x}{2x^2+n}) dx$ همگرا به عدد A باشد، آنگاه مقدار nA کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{16}$ (۲) $\frac{1}{9} \ln \frac{7}{16}$ (۳) $\frac{9}{8} \ln \frac{7}{16}$ (۴) $2 \ln \frac{7}{16}$

۶- برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ کدام مورد درست است؟

- (۱) جملات سری صعودی و سری همگرا است. (۲) جملات سری نزولی و سری همگرا است.

- (۳) جملات سری صعودی و سری واگرا است. (۴) جملات سری نزولی و سری واگرا است.

۷- مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 و تابع f به شرح زیر مفروض‌اند. کدام مورد درست نیست؟ ($\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا است.)

$$A_1 = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{Q}\}, A_2 = \{(x, \frac{1}{x}) : x \notin \mathbb{Q}\}, A_3 = \{(x, 2) : x \in \mathbb{Q}\} \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2y & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- (۱) f در A_3 ناپیوسته است. (۲) f در A_1^c ناپیوسته است. (۳) f در A_1 پیوسته است. (۴) f در A_2 پیوسته است.

۸- اگر توابع دو متغیره f و g روی مجموعه همبند و باز S در صفحه مختصات به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر باشند و C هر منحنی بسته ساده و

پاره همواری در S باشد، کدام مورد درست نیست؟

$$\oint_C (f \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = \oint_C (g \vec{\nabla} g) \cdot d\vec{r} \quad (1) \quad \oint_C (f \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = -\oint_C (g \vec{\nabla} g) \cdot d\vec{r}$$

$$\oint_C (f \vec{\nabla} g) \cdot d\vec{r} = \oint_C (g \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} \quad (2) \quad \oint_C (f \vec{\nabla} g) \cdot d\vec{r} = -\oint_C (g \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r}$$

۹- شار گذرنده بیرونی میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + z^2, yz^2 + x^2, zx^2 + y^2)$ از سطح نیم‌کره $S: z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{13\pi}{20}$ (۲) $\frac{3\pi}{5}$ (۳) $\frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{3\pi}{20}$

۱۰- مقدار $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + (\min\{x, y\})^2} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} - 2 \ln 2$ (۲) $\ln 2$ (۳) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$ (۴) $2 \ln 2$

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» با توجه به اینکه برای هر بردار فرضی $\vec{u}$ داریم $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ برای بردار داده شده در سؤال که اندازه آن یک است، خواهیم داشت:

$$A = \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \vec{a} \times \vec{b} \right) = 1 \Rightarrow \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}{4} + \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 1$$

حالا با توجه به اینکه بردار حاصلضرب خارجی دو بردار بر هر ترکیب خطی آنها عمود است، $(\vec{a} \times \vec{b})$ بر بردار $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ عمود و در نتیجه ضرب خارجی آنها صفر است. از طرفی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیز یک‌هسته هستند؛ پس داریم:

$$A = \frac{1+1+2\vec{a} \cdot \vec{b}}{4} + 0 + 0 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta + 1 - \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} \xrightarrow{|\cos \theta| < 1} \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

حالا برای بردار خواسته شده داریم:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

۲- گزینه «۴» ابتدا تابع مشتق و همچنین مشتق تابع در $x = 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x \sin \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مشتق تابع در مبدأ موجود است، اما در همسایگی این نقطه تابع $\cos \frac{1}{x}$ همواره بین -1 و 1 تناوب می‌کند و در نتیجه گاهی منفی و گاهی مثبت است، پس در همسایگی این نقطه نه صعودی است و نه نزولی. پس گزینه (۴) صحیح است.

۳- گزینه «۴» ابتدا با توجه به رابطه حدی سری داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} f'(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k) - f(h) + kh(k+h) - f(k)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left[k(k+h) - \frac{f(h)}{h} \right]$$

حالا با توجه به تساوی حدی داده شده در سؤال داریم:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k(k+0) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 - 1$$

$$= \frac{17 \times 18 \times 19}{6} - \frac{10 \times 11 \times 12}{6} - 1 = 1785 - 220 - 1 = 1564$$

۴- گزینه «۱» به راحتی با توجه به رابطه اصلی ناحیه محصور به یک منحنی داریم:

$$S = \left| \int_a^b y dx \right| = \left| \int_0^{2\pi} b \sin t \cos^2 t (-a \sin t dt) \right| = ab \left| \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \right| = ab \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (2 \sin t \cos t)^2 dt \right| = \frac{ab}{4} \left| \int_0^{2\pi} (\sin 2t)^2 dt \right|$$

$$= \frac{ab}{4} \left| \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} \right| = \frac{ab}{4} (2\pi) = \frac{\pi ab}{2}$$



۵- گزینه «۳»

$$A = \int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{rx}{rx^r + n} \right) dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{(rn-r)x^r - rx + n^r}{(rx^r + n)(x+1)} \right) dx$$

انتگرال فوق در بی‌نهایت ناسره و هم‌ارز $\int_1^{\infty} \frac{(rn-r)}{rx} dx$ است که می‌دانیم این p -انتگرال واگراست. پس باید $n = \frac{r}{r} \Rightarrow n = 1$ باشد که در این صورت انتگرال به صورت زیر قابل حل است:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{rx}{rx^r + 1} \right) dx = \left[\frac{1}{r} \ln(x+1) - \frac{1}{r} \ln(rx^r + 1) \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{r} \ln x^r - \frac{1}{r} \ln rx^r \right] - \left[\frac{1}{r} \ln 2 - \frac{1}{r} \ln \left(r + \frac{1}{r} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \frac{x^r}{rx^r} - \frac{1}{r} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \ln \frac{1}{r} \Rightarrow nA = \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \ln \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^r} dx$$

۶- گزینه «۲»

$$\frac{da_n}{dn} = -\frac{1}{n^r} \left(\frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n^{r+1}} < 0 \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

با استفاده از مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^r} = 0 \Rightarrow$$

حد جمله عمومی صفر است، بنابراین شرط لازم همگرایی را دارد.

پس داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = u \Rightarrow x = u^{-2} \Rightarrow dx = -2u^{-3} du \Rightarrow \int_n^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}} = \int_n^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{n} \frac{u^4+1}{u^4}} < \int_n^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{n} u^4} = \left(\frac{-2}{3u^3} \right) \Big|_n^{+\infty} = \frac{2}{3n\sqrt{n}}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه سری کوچک‌تر غیرهمگراست، یعنی داریم:

۷- گزینه «۲» همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) با توجه به تعریف مجموعه A_3 و تابع f داریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,2) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 4 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

پس در همسایگی هر نقطه فرضی گویا، حداقل یک عدد گنگ وجود دارد که به ازای آن حد تابع مخالف ۱ است و در نتیجه تابع در مجموعه مورد اشاره پیوسته نیست.

(۲) با توجه به تعریف مجموعه A_1 و تابع f داریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, \frac{1}{r}) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2(\frac{1}{r}) = 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

پس تابع f در مجموعه موردنظر همواره مقدار ثابت ۱ و پیوسته خواهد بود. پس این گزینه درست نیست. با توجه به همین توضیح، گزینه (۳) و (۴) صحیح خواهند بود.

۸- گزینه‌های «۴»

$$\int (f \cdot \nabla R) d\vec{r} \xrightarrow[\vec{F}=f \cdot \nabla f]{\text{قضیه گرین}} \iint \text{curl} \vec{L} \cdot \vec{k} ds$$

$$\text{curl} \vec{L} = \vec{\nabla} \times (f \vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

از طرفی داریم:

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) هر دو صحیح هستند. حال داریم:

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$$

$$\int \vec{\nabla}(f \cdot g) d\vec{r} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(f \cdot g) \cdot \vec{k} ds = 0$$

$$\iint \vec{\nabla} \times (f \vec{\nabla} g) \cdot \vec{k} ds + \iint \vec{\nabla} \times (g \vec{\nabla} f) \cdot \vec{k} ds = \int (f \vec{\nabla} g) d\vec{r} + \int (g \vec{\nabla} f) d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int (f \vec{\nabla} g) d\vec{r} = - \int (g \vec{\nabla} f) d\vec{r}$$

گزینه (۳) صحیح است.

۹- گزینه «۱» سطح داده شده به این صورت بسته نیست. با اضافه کردن صفحه $z=0$ به سطح S می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم:

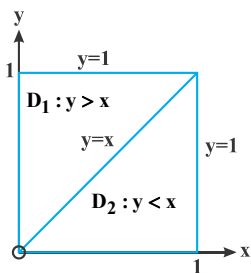
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma - \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv - \iint_{z=0} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

با توجه به معادله نیم‌کره، تصویر ناحیه بر صفحه xOy همان دایره $x^2 + y^2 = 1$ است که معادل $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$ خواهد بود. از طرفی بردار یکه رو به بیرون

صفحه $z=0$ در این رویه $-\vec{k}$ است. پس در کل داریم:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D (y^2 + z^2 + x^2) dv - \iint_{z=0} (xy^2, x^2, y^2) \cdot (0, 0, -1) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 (\rho^2 \sin \varphi) d\rho d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta (r dr) d\theta \\ &= (2\pi) \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = (2\pi) (-\cos \varphi \Big|_0^\pi) \left(\frac{1}{5} \rho^5 \Big|_0^1 \right) + \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \left(\frac{1}{5} r^5 \Big|_0^1 \right) \\ &= (2\pi) \left(\frac{1}{5} \right) + \frac{1}{5} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

۱۰- گزینه «۳» با توجه به خط $y=x$ در ناحیه مورد اشاره که حد واسط بین $x < y$ و $x > y$ است، انتگرال به صورت زیر است:



$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \frac{dx dy}{1 + (\min\{x, y\})^2} + \iint_{D_2} \frac{dx dy}{1 + (\min\{x, y\})^2} = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{1 + x^2} + \iint_{D_2} \frac{dx dy}{1 + y^2} \\ &= \int_0^1 \int_x^1 \frac{dy}{1 + x^2} dx + \int_0^1 \int_y^1 \frac{dx}{1 + y^2} dy = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1-y}{1+y^2} dy \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = 2 \left[\tan^{-1} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = 2 \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \ln 1 \right) \right] = \frac{\pi}{2} - \ln 2 \end{aligned}$$



سؤالات رشته‌ی مهندسی کامپیوتر

۱- اگر به‌ازای اعداد حقیقی x و y ، تساوی $xe^{iy} = (1+i)^{\frac{4}{3}}$ برقرار باشد، آنگاه مقادیر x و y کدام‌اند؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ y = \frac{(2k+1)\pi}{3} \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

۲- فرض کنید $f(x) = 3 + 2 \int_1^x tf(t)dt$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

$$(1) \quad e^2 + 3 \quad (2) \quad 3e^2 \quad (3) \quad e^3 + 3 \quad (4) \quad 3e^3$$

۳- فرض کنید $f(t) = 2 + \int_0^1 (t+x)f(x)dx$ ، اگر $f(\alpha) = 0$ ، آنگاه α کدام است؟

$$(1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4) \quad 1$$

۴- بازه همگرایی $(x-1)^{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$ ، کدام است؟

$$(1) \quad (0, 2) \quad (2) \quad (0, 2] \quad (3) \quad [0, 2) \quad (4) \quad [0, 2]$$

۵- تعداد نقاط بحرانی تابع $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ به شرط $x+y=2$ ، کدام است؟

$$(1) \quad 5 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 1$$

۶- مساحت چهارضلعی با معادله $|x-2y| + |2x+y| \leq 15$ ، کدام است؟

$$(1) \quad 450 \quad (2) \quad 225 \quad (3) \quad 180 \quad (4) \quad 90$$

۷- فرض کنید $w(b)$ کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\hat{i} + (x+z)\hat{j} + (x+y)\hat{k}$ ، روی مسیر $\vec{r}(t) = (t^3+1, t, t^2)$ در بازه زمانی $[0, b]$ باشد. اگر $w(b) = 5$ ، آنگاه مقدار b کدام است؟

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad 2$$

۱- گزینه «۳» در واقع خواسته سؤال فرم قطبی عدد مختلط موردنظر است. برای این کار داریم:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2}} \Rightarrow (1+i)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$$

۲- گزینه «۴» ابتدا با مشتق‌گیری از تساوی، سعی می‌کنیم معادله‌ای بدون انتگرال به دست آوریم:

$$f'(x) = 2(x)f(x)$$

معادله دیفرانسیل فوق به راحتی قابل تفکیک و حل است:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Rightarrow \ln |f(x)| = x^2 + c \Rightarrow |f(x)| = e^{x^2+c} = Ce^{x^2} \Rightarrow f(x) = \pm Ce^{x^2}$$

حالا برای تعیین ثابت C نیاز به یک مقدار اولیه داریم. در تساوی اولیه به ازای $x=1$ داریم:

$$f(1) = 2 + 2 \int_1^1 t f(t) dt = 2 + 0 \Rightarrow f(1) = \pm Ce^1 = 2 \Rightarrow \pm C = \frac{2}{e}$$

پس به تابع به صورت $f(x) = \frac{2}{e} e^{x^2} = 2e^{x^2-1}$ است که داریم:

$$f(2) = 2e^{4-1} = 2e^3$$

۳- گزینه «۱» با مشتق گرفتن از تساوی داده شده داریم:

$$f'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [(t+x)f(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که مشتق تابع $f(t)$ ، برابر مقدار عددی انتگرال به دست آمده است. یعنی اینکه مشتق تابع یک مقدار ثابت است. پس تابع از

نوع خطی درجه اول است که با فرض $\int_0^1 f(x) dx = a$ داریم:

$$f(t) = at + b$$

$$at + b = 2 + \int_0^1 (t+x)(ax+b) dx = 2 + \int_0^1 [ax^2 + (at+b)x + bt] dx = 2 + (a \frac{x^3}{3} + (at+b) \frac{x^2}{2} + btx) \Big|_{x=0}^1$$

$$at + b = 2 + \left(\frac{a}{3} + (at+b) \frac{1}{2} + bt \right) = \left(\frac{a}{3} + b \right) t + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{a}{3} + b \\ b = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} - b = 0 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} - b = 0 \\ 2a - b = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{2a}{3} = -6 \Rightarrow -\frac{a}{3} = -6 \Rightarrow a = 18, b = -6$$

$$f(t) = 18t - 6 \xrightarrow{f(\alpha)=0} 18\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

۴- گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها نیازی به محاسبه بازه همگرایی نیست و فقط کافی است دو سر بازه را بررسی کنیم:

$$x = 0, 2 \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 2 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \frac{(\pm 1)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 2 \times \dots \times (2n-1)}{2(1 \times 2 \times \dots \times n)} \times \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4 \times (n!)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{4 \times (n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\frac{2n}{e})^{2n}}{4 \times (\frac{n}{e})^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{n}{e})^2} = 4 > 1$$

با توجه به آزمون ریشه در هر دو سر بازه سری واگراست.

۵- گزینه «۲» با فرض $\begin{cases} f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \\ g(x, y) = x + y - 2 = 0 \end{cases}$ و با کمک روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{\frac{-1}{x^2} + y}{1} = \frac{\frac{-1}{y^2} + x}{1} \Rightarrow y - x = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} = \frac{(y-x)(y+x)}{x^2 y^2} \xrightarrow{x, y \neq 0} (y-x)[(y+x) - x^2 y^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x = 1 \\ 2 = x^2 y^2 \end{cases}$$

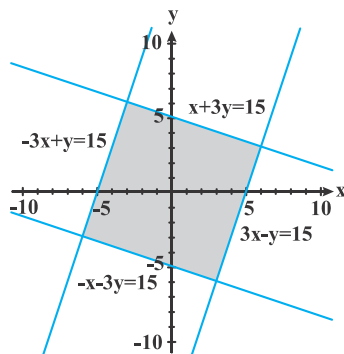
$$2 = x^2 y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x + y = x + \frac{\sqrt{2}}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + \sqrt{2} = 0 ; \Delta = 4 - 4\sqrt{2} < 0 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x + y = x - \frac{\sqrt{2}}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0 ; \Delta = 4 + 4\sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید یک نقطه بحرانی (۱، ۱) است و دو نقطه دیگر به ازای $y = -\frac{\sqrt{2}}{x}$ در رابطه $x + y = 2$ به یک معادله درجه ۲ منجر می‌شود

که ۲ ریشه متمایز دارد. پس تا اینجا ۳ نقطه بحرانی داریم. توجه کنید که از جایگذاری $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ معادله‌ای حاصل می‌شود که دلتای آن منفی و فاقد جواب در مجموعه اعداد حقیقی است. پس در کل همان ۳ نقطه بحرانی را داریم.

۶- گزینه «۴» برای رسم این نوع نامعادلات، ابتدا معادله چهار خط مرزی آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |x - 2y| + |2x + y| &= 15 \\ (x - 2y) + (2x + y) &= 15 \Rightarrow 3x - y = 15 \\ (x - 2y) - (2x + y) &= 15 \Rightarrow -x - 3y = 15 \\ -(x - 2y) + (2x + y) &= 15 \Rightarrow x + 3y = 15 \\ -(x - 2y) - (2x + y) &= 15 \Rightarrow -3x + y = 15 \end{aligned}$$



پس چهارضلعی موردنظر مطابق شکل مقابل است. با توجه به تقارن منحنی‌ها واضح است که این چهارضلعی یک مربع است. برای محاسبه مساحت این مربع، کافی است مختصات دو رأس دلخواه آن را محاسبه کنیم. برای این کار از تقاطع خطوط مجاور دلخواه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + 3y = 15 \\ 3x - y = 15 \end{cases} \Rightarrow A : (x, y) = (6, 3) \\ \begin{cases} -x - 3y = 15 \\ -3x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow C : (x, y) = (-6, -3)$$

با توجه به اینکه مختصات دو رأس روبه‌روی هم را محاسبه کرده‌ایم، فاصله آنها برابر طول قطر است و مساحت مربع براساس طول قطر به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} [(3 + 3)^2 + (6 + 6)^2] = \frac{1}{2} (36 + 144) = 90$$

۷- گزینه «۳» ابتدا وضعیت پایستاری تابع برداری نیرو را بررسی می‌کنیم:

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = (1 - 1, 1 - 1, 1 - 1) = \vec{0}$$

با توجه به اینکه تابع میدان پیوسته و کرل آن صفر است، پس پایستار است و مقدار کار انجام شده توسط آن به مسیر بستگی ندارد و داریم:

$$f(x, y, z) = \int (y + z) dx + \int (0 + z) dy + \int (0 + 0) dz = xy + xz + zy + C$$

$$t = 0 \Rightarrow r = (1, 0, 0) ; \quad t = b \Rightarrow r = (b^2 + 1, b, b^2)$$

$$w(b) = f(b^2 + 1, b, b^2) - f(1, 0, 0) = (b^2 + 1)b + (b^2 + 1)b^2 + b^3 + C - (0 + C) = b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b = 5 \Rightarrow b = 1$$