مدرسان شریف

فصل اول

«ماتریس و دستگاه معادلات خطی»

ماتریس

ماتریس‌ها یکی از پرکاربردترین ابزارهای ریاضی در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی چون برق، مکانیک، کامپیوتر و غیره می‌باشند. در نتیجه از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و به نوعی همه‌ی مباحث درس حاضر، آمیخته با مفهوم ماتریس است. بدین جهت، می‌خواهیم در ابتدای کتاب شما عزیزان را با مفهوم ماتریس و کابرد آن در حل دستگاه‌های معادلات خطی آشنا کنیم، همان‌طور که می‌دانیم، ماتریس یک آرایه‌ی مستطیل شکل است که درایه‌های آن متعلق به میدانی هستند که ماتریس روی آن تعریف شده است. پس، قبل از شروع بحث در مورد ماتریس‌ها، ابتدا به تعریف میدان می‌پردازیم.

❖ **تعریف۱:** مجموعه $\mathbb{F}$ را همراه با دو عمل جمع و ضرب که به ازای هر دو عضو x و y از $\mathbb{F}$ به ترتیب به صورت $x+y$ و $x.y$ نمایش داده می‌شوند، میدان گوییم، هرگاه خواص ده‌گانه زیر را داشته باشد:

۱ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ داشته باشیم: $x.y\in\mathbb{F}$ و $x+y\in\mathbb{F}$ (بسته بودن نسبت به اعمال جمع و ضرب)

۲ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ داشته باشیم: $x+y=y+x$ (خاصیت جابجایی نسبت به عمل جمع)

۳ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ نتیجه شود: $x+(y+z)=(x+y)+z$ (خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به عمل جمع)

۴ـ یک عنصر منحصر بفرد $\circ\in\mathbb{F}$ موجود باشد به گونه‌ای که، به ازای هر $x\in\mathbb{F}$ ، $x+\circ=\circ+x=x$ (عضو خنثی نسبت به عمل جمع)

۵ـ به ازای هر عضو $x\in\mathbb{F}$ یک عنصر منحصر بفرد $(-x)\in\mathbb{F}$ موجود باشد به گونه‌ای که:

(عنصر قرینه نسبت به عمل جمع)　$x+(-x)=(-x)+x=\circ$

۶ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ ، $x.y=y.x$ (خاصیت جابجایی نسبت به عمل ضرب)

۷ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ ، $x.(y.z)=(x.y).z$ (خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به عمل ضرب)

۸ـ عضو ناصفر و منحصر بفرد $1\in\mathbb{F}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که؛ به ازای هر $x\in\mathbb{F}$ ، $x.1=1.x=x$ (عضو خنثی نسبت به عمل ضرب)

۹ـ به ازای هر $x\in\mathbb{F}$، عنصر ناصفر و منحصر بفرد $x^{-1}\in\mathbb{F}$ موجود باشد به طوریکه؛ $x.x^{-1}=x^{-1}.x=1$ (عضو قرینه نسبت به عمل ضرب)

۱۰ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ ، $x.(y+z)=x.y+x.z$ (پخش‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع)

مثال۱: مجموعه اعداد حقیقی و اعداد گویا تحت همان جمع و ضرب معمولی یک میدان هستند. همچنین، اعداد مختلط $\mathbb{C}$ نسبت به عمل جمع و ضرب تعریف شده در زیر؛ تشکیل یک میدان می‌دهند:

$$1)\ (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \quad ; \quad 2)\ (a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

مثال۲: __میدان‌های متناهی__. **مجموعه $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$ همراه با اعمال جمع و ضرب به هنگ ۵، یک میدان متناهی است. جمع و ضرب به هنگ ۵ بدین صورت است که همان جمع و ضرب معمولی را انجام می‌دهیم و فقط حاصل آن را به هنگ ۵ بدست می‌آوریم. به عنوان مثال در $\mathbb{Z}_5$ داریم:**

$$3+2=5\overset{5}{\equiv}0 \quad \text{و} \quad 4+3=7\overset{5}{\equiv}2 \quad \text{و} \quad 4\times3=12\overset{5}{\equiv}2$$

نکته۱: اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه $\mathbb{Z}_p=\{0,1,2,\dots,p-1\}$ تحت اعمال جمع و ضرب به هنگ p یک میدان متناهی است.

❖ **تعریف۲:** عدد صحیح و مثبت n را مشخصه میدان $\mathbb{F}$ گویند، هرگاه n کوچکترین عددی باشد که حاصل جمع n مرتبه عدد ۱ (عضو خنثی نسبت به ضرب) در آن میدان برابر صفر (عضو خنثی نسبت به جمع) شود. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، میدان را از مشخصه صفر می‌نامند.

مثال۳: اعداد حقیقی و گویا، میدان‌هایی با مشخصه صفر و به ازای هر عدد اول p ، $\mathbb{Z}_p$ میدانی با مشخصه p است.

مثال۴: کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

۱) $\mathbb{Z}$ یک میدان از مشخصه صفر است. ۲) $\mathbb{R}$ یک میدان از مشخصه نامتناهی است.

۳) $\mathbb{Z}_{91}$ یک میدان از مشخصه ۹۱ است. ۴) $\mathbb{Z}_{53}$ یک میدان از مشخصه ۵۳ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $\mathbb{Z}$ یک میدان نیست؛ زیرا $2 \in \mathbb{Z}$ و $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ = 2^{-1}، در واقع وارون عناصر ناصفر مخالف یک در $\mathbb{Z}$ وجود ندارد. $\mathbb{R}$ یک میدان از مشخصه صفر است. همچنین می‌دانیم که $\mathbb{Z}_p$ به ازای هر عدد اول p یک میدان از مشخصه p است. پس از آنجا که ۹۱ غیر اول (یا مرکب) و ۵۳ عدد اول است؛ گزینه (۳) غلط و گزینه (۴) درست است.

حال به تعریف ماتریس و اعمال جبری روی آن و بعضی قضایا در مورد آن می‌پردازیم.

❖ **تعریف۳:** فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان باشد، آرایه مستطیل شکل زیر که عناصر آن متعلق به $\mathbb{F}$ هستند را یک ماتریس می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

به ازای هر $i = 1,2,\dots,m$ و $j = 1,2,\dots,n$ عنصر a_{ij} را درایه ijـام ماتریس A می‌نامند. همچنین اگر m تعداد سطرهای ماتریس و n تعداد ستونهای ماتریس A باشد، ماتریس را از اندازه $m \times n$ می‌گویند و برای نمایش آن از شکل خلاصه مقابل استفاده می‌کنند. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

هر ماتریس $m \times 1$ را یک ستون m تایی و هر ماتریس $1 \times n$ را یک سطر n تایی می‌نامند. همچنین اگر $m = n$ باشد، ماتریس A، یک ماتریس مربعی نامیده می‌شود.

اعمال جبری روی ماتریس‌ها

۱ـ جمع و تفریق ماتریس: جمع و تفریق دو ماتریس فقط در صورتی تعریف‌پذیر است که دو ماتریس هم اندازه باشند. در اینصورت، با فرض

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

داریم:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

۲ـ ضرب اسکالر در ماتریس: برای هر اسکالر $c \in \mathbb{F}$ و ماتریس A روی میدان $\mathbb{F}$ داریم:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال۵: ماتریس‌های $A+B$، $2B - C$ و $3A$ را به‌دست آورید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

☑ **پاسخ:**

$$A + B = \begin{bmatrix} 2-4 & -1+2 & 1+1 \\ 0+1 & 1+3 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times -1 & 3\times 1 \\ 3\times 0 & 3\times 1 & 3\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

از آنجا که B یک ماتریس 3×2 و C یک ماتریس 2×2 است، $2B - C$ قابل تعریف نیست.

۳ـ ضرب دو ماتریس: ضرب ماتریس $A_{m\times n}$ در ماتریس $B_{k\times l}$ فقط در صورتی امکان‌پذیر است که $n=k$ ، یعنی تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. که در اینصورت حاصلضرب AB یک ماتریس $m\times l$ است و به صورت زیر حاصل می‌شود:

$AB=[c_{ij}]_{m\times l}$ و $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$ و $i=1,2,...,m$ و $j=1,2,...,l$

توجه کنید که لزوماً $AB=BA$ نیست. حتی ممکن است، حاصلضرب AB قابل تعریف و BA غیرقابل تعریف باشد. همچنین، توانهای یک ماتریس مربعی، از حاصلضرب آن ماتریس در خودش، حاصل می‌شود. یعنی؛ اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد، آنگاه داریم:

$A^2=AA\,,A^3=AA^2\,,...,A^m=AA^{m-1}\,,m\in\mathbb{N}$

به خاطر داشته باشید که محاسبه توانهای یک ماتریس، فقط در ماتریس‌های مربعی امکان‌پذیر است.

برای درک بهتر ضرب دو ماتریس، ابتدا به یادآوری ضرب اسکالر در بردارها پرداخته و سپس حاصل ضرب دو ماتریس را به کمک آن به دست می‌آوریم.

❖ **تعریف۴:** فرض کنید $\mathbf{a}=(a_1,a_2,....,a_n)^T$ و $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)^T$ دو بردار دلخواه باشند. در اینصورت ضرب اسکالر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a.b}$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$\mathbf{a.b}=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$

مثال۶: اگر $\mathbf{a}=(1,2,-1,3)$ و $\mathbf{b}=(2,3,1,-1)$ داریم: $\mathbf{a.b}=(1,2,-1,3).(2,3,1,-1)=1\times2+2\times3+(-1)\times1+3\times(-1)=4$

حال اگر در ماتریس $A_{m\times n}$، سطر iام را $\mathbf{a_i}=(a_{i1},a_{i2},....,a_{in})$ و در ماتریس $B_{n\times\ell}$، ستون jام را $\mathbf{b'_j}=(b_{1j},b_{2j},...,b_{nj})^T$ در نظر بگیریم، به سادگی می‌بینیم که درایه ij ـ ام ماتریس $C=AB$ برابر با ضرب اسکالر دو بردار $\mathbf{a_i^T}$ و $\mathbf{b'_j}$ است: یعنی،

$c_{ij}=\mathbf{a_i^T}.\mathbf{b'_j}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$

مثال۷: **با فرض** $A=\begin{bmatrix}-1&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$، **ماتریس‌های AB و BA را به دست آورید:**

☑ **پاسخ:**

$$AB=\begin{bmatrix}-1+1+2&-1+1+4\\3+2+1&3+2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\6&7\end{bmatrix}\,,\ BA=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5&4\\2&3&3\\2&3&3\end{bmatrix}$$

مثال۸: **فرض کنید ماتریس‌های A، B و C به‌صورت زیر تعریف شده باشند:**

$$A=\begin{bmatrix}4&3&2\\3&2&1\end{bmatrix}_{2\times3}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}5&4\\3&2\\2&1\end{bmatrix}_{3\times2}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}3&2&1\\1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}_{3\times3}$$

در این صورت داریم:

$$AC=\begin{bmatrix}21&14&19\\14&9&13\end{bmatrix}_{2\times3}\quad,\quad 2B=\begin{bmatrix}10&8\\6&4\\4&2\end{bmatrix}_{3\times2}\quad,\quad C^2=\begin{bmatrix}14&9&13\\14&11&11\\16&9&11\end{bmatrix}_{3\times3}\quad,\quad AB=\begin{bmatrix}27&18\\17&11\end{bmatrix}_{2\times2}$$

واضح است که حاصلضرب CA غیرقابل تعریف و همچنین BA یک ماتریس ۳×۳ است. بنابراین، در ضرب ماتریس‌ها لزوماً خاصیت جابجایی را نداریم. توجه کنید که محاسبه A^2 یا B^2 نیز، امکان‌پذیر نیست، چرا که آنها ماتریس مربعی نیستند.

مثال۹: **نشان دهید که اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه و به گونه‌ای باشند که AB=BA، آنگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $(AB)^n=A^nB^n$.**

☑ **پاسخ:** برای اثبات از استقرار روی n استفاده می‌کنیم:

برای $n=1$ داریم: $(AB)^1=A^1B^1$

حال فرض می‌کنیم که حکم برای $n=k$ برقرار باشد ($(AB)^k=A^kB^k$) و آن را برای $n=k+1$ اثبات می‌کنیم:

$$(AB)^{k+1}=(AB)^k(AB)\ \overset{\text{فرض استقرا}}{=\!=\!=}\ A^kB^kAB=A^k\underbrace{BB\cdots B}_{\text{k بار}}AB\ \overset{\text{فرض}}{=\!=\!=}$$

$$A^k\underbrace{BB\cdots B}_{\text{k-1 بار}}ABB\ \underset{\text{مسأله استفاده می‌کنیم.}}{\overset{\text{k-1 بار دیگر از فرض}}{=\!=\!=\!=\!=}}\ A^kA\underbrace{BB\cdots B}_{\text{k بار}}B=A^{k+1}B^{k+1}$$

بدین ترتیب اثبات پایان می‌یابد.

مثال۱۰: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۱ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۴ & ۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $D=ABC$، آنگاه $۲d_{۱۱}$ برابر است با:

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نکته دارای اهمیت در اینگونه تست‌ها، پرهیز از محاسبات کامل و تعیین ماتریس D است. در واقع باید فقط به دنبال درایه مورد نظر باشیم. اگر قرار دهیم؛ $D=ABC=(AB)C$، آنگاه برای محاسبه $d_{۱۱}$ کافی است حاصلضرب سطر اول AB در ستون اول C را بدست آوریم.

چون ستون اول C به صورت $\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$ است؛ پس فقط کافی است $(AB)_{۱۱}$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم $(AB)_{۱۱}$ برابر است با حاصل‌ضرب سطر اول A در ستون اول B، پس داریم:

$$(AB)_{۱۱}=۲\times۳+۳\times۴+۴\times(-۱)=۱۴ \xrightarrow{\text{جون ستون اول C برابر با } \begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix} \text{ است.}} d_{۱۱}=۱۴\Rightarrow ۲d_{۱۱}=۲۸$$

نکته۲: اگر A و B ماتریس‌هایی باشند که جمع درایه‌های هر سطر آنها یک است، آنگاه جمع درایه‌های هر سطر AB نیز یک می‌شود.

اثبات: توجه کنید که لازمه‌ی برقراری این نکته، اینست که ضرب AB قابل تعریف باشد. با توجه به این، فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس دلخواه و به گونه‌ای باشند؛ که مجموع درایه‌های هر سطر آنها یک است.

مجموع درایه‌های هر سطر A برابر با یک است؛ بنابراین به ازای هر $i=۱,۲,...,n$، داریم: $$\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}=۱ \quad (۱)$$

مجموع درایه‌های هر سطر B برابر با یک است؛ بنابراین به ازای هر $k=۱,۲,...,m$، داریم: $$\sum_{j=۱}^{p}b_{kj}=۱ \quad (۲)$$

حال فرض کنید $C=AB$، در اینصورت با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها، می‌دانیم که C یک ماتریس $m\times p$ است و به ازای هر $i=۱,۲,...,p$ و $j=۱,۲,...,p$، داریم؛

$$c_{ij}=a_{i۱}b_{۱j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj} \qquad (۳)$$

با توجه به روابط ۱و۲و۳ نتیجه می‌شود؛

$$\text{مجموع درایه‌های سطر } i \text{ ـ ام } C=\sum_{j=۱}^{p}c_{ij}\overset{(۳)}{=\!=}\sum_{j=۱}^{p}\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{p}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}\sum_{j=۱}^{p}b_{kj}\overset{(۲)}{=\!=}\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}\times۱=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}\overset{(۱)}{=\!=}۱$$

بنابراین، مجموع درایه‌های هر سطر $C=AB$ نیز، برابر با یک است.

❖ **تعریف۵:** در ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، درایه‌های $a_{۱۱},a_{۲۲},...,a_{nn}$ را درایه‌های قطری، یا قطر اصلی ماتریس A می‌نامیم. اگر در یک ماتریس تمام درایه‌ها به غیر از درایه‌های قطری آن صفر باشند، آنرا ماتریس قطری نامیده و به صورت $A=\text{diag}(a_{۱۱},a_{۲۲},...,a_{nn})$ نمایش می‌دهیم.

برای نمایش ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & ۰\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ از نماد $A=\text{diag}(a_{۱۱}a_{۲۲}\cdots a_{nn})$ نیز استفاده می‌شود. در واقع، مواقعی از علامت (,) بین اعداد استفاده می‌شود که تشخیص درایه‌های قطری بدون کاما سخت باشد. به عنوان مثال $\text{diag}(۱۳۵)$ عبارتی مبهم است که می‌تواند هر کدام از ماتریس‌های $\text{diag}(۱,۳۵)$، $\text{diag}(۱۳,۵)$ و یا $\text{diag}(۱,۳,۵)$ نیز باشد. ولی عبارت $\text{diag}(a_۱a_۲)$ کاملاً واضح است؛ پس دیگر نیازی به استفاده از کاما در آن نیست.

ماتریس $\text{diag}(\underbrace{۱,۱,...,۱}_{n \text{ بار}})$ را ماتریس همانی مرتبه n می‌نامند و با I_n نمایش می‌دهند. به عنوان مثال: $I_۲=\text{diag}(۱,۱)=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

مثال۱۱: فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{n} & -\sin\frac{\pi}{n}\\ \sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n}\end{bmatrix}$، در اینصورت $A^{۲n}$ برابر است با:

۱) A ۲) $\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{n} & \sin\frac{\pi}{n}\\ -\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n}\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n}\\ \cos\frac{\pi}{n} & \sin\frac{\pi}{n}\end{bmatrix}$ ۴) $I_۲$

مدرسان شریف

فصل چهارم

«تبدیل‌ها و تابعک‌های خطی»

تبدیل خطی

تبدیلات خطی، یکی از موضوعات اصلی در درس جبر خطی است و همواره در کنکور کارشناسی ارشد مورد توجه بوده است. به همین دلیل، همراه با شما دانشجویان گرامی، به معرفی این مفهوم پرداخته و با پیدا کردن ارتباط آن با ماتریس‌ها، خواص آن را بررسی می‌کنیم. دسته‌ی خاصی از این تبدیلات به نام تابعک‌های خطی مورد توجه ویژه‌ای می‌باشند که در بخشی مجزا از این فصل مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

تعریف و چند مثال

❖ **تعریف ۱:** فرض کنید V و W، دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. در اینصورت یک تبدیل خطی از V به W، تابعی مانند $T:V\to W$ است؛ بطوریکه به ازای هر $c\in\mathbb{F}$ و $\alpha,\beta\in V$، در شرط $T(c\alpha+\beta)=cT(\alpha)+T(\beta)$ صدق کند. یا به به طور معادل در دو شرط زیر صدق کند:

$$\begin{cases} ۱)\ \forall\alpha,\beta\in V\Rightarrow T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta) \\ ۲)\ \forall c\in F,\forall\alpha\in V\Rightarrow T(c\alpha)=cT(\alpha)\end{cases} \overset{\text{معادل با}}{\equiv} T(c\alpha+\beta)=cT(\alpha)+T(\beta)$$

مثال۱: تابع زیر یک تبدیل خطی است.

$$\mathbf{T}:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$$
$$\mathbf{T(x,y,z)=(x,y,\circ)}$$

اثبات: فرض کنید $\alpha=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\beta=(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو عضو دلخواه از $\mathbb{R}^۳$ و $c\in\mathbb{R}$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$T(c\alpha+\beta)=T(c(x_۱,y_۱,z_۱)+(x_۲,y_۲,z_۲))=T((cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲,cz_۱+z_۲))\xlongequal{\text{تعریف تبدیل خطی}}(cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲,\circ)=$$
$$c(x_۱,y_۱,\circ)+(x_۲,y_۲,\circ)\xlongequal{\text{تعریف تبدیل خطی}}cT((x_۱,y_۱,z_۱))+T((x_۲,y_۲,z_۲))=cT(\alpha)+T(\beta)$$

پس، با توجه به تعریف تبدیل خطی؛ تابع تعریف شده T، یک تبدیل خطی است.

مثال۲: تابع $\mathbf{T}:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $\mathbf{T(x,y,z)=(x,y)}$ یک تبدیل خطی است.

☑ **پاسخ:**

اثبات: با فرض $\alpha=(x_۱,y_۱,z_۱)$، $\beta=(x_۲,y_۲,z_۲)$ و $c\in\mathbb{R}$ داریم:

$$T(c\alpha+\beta)=T(c(x_۱,y_۱,z_۱)+(x_۲,y_۲,z_۲))=T((cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲,cz_۱+z_۲))$$
$$\xlongequal{\text{تعریف } T}(cx_۱+x_۲,cy_۱+y_۲)=c(x_۱,y_۱)+(x_۲,y_۲)\xlongequal{\text{تعریف } T}$$
$$cT(\alpha)+T(\beta)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

مثال۳: فرض کنید V یک فضای برداری است. در اینصورت توابع $\begin{matrix}\mathbf{o}:V\to V\\ \mathbf{o(v)}=\circ\end{matrix}$ **و** $\begin{matrix}\mathbf{I}:V\to V\\ \mathbf{I(v)=v}\end{matrix}$ **تبدیل خطی هستند.**

اثبات: با توجه به تعریف به سادگی نتیجه حاصل می‌شود.

❖ **تعریف ۲:** اگر $T:V\to V$ یک تبدیل خطی باشد، T را یک عملگر خطی روی V می‌نامیم.

مثال۴: تابع $D: P_n \to P_n$ با ضابطه $D(f(x)) = f'(x)$ یک تبدیل خطی یا یک عملگر خطی روی P_n است که آن را عملگر مشتق (یا مشتق‌گیری) روی فضای چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه n می‌نامند.

با توجه به تعریف، برای تابع $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ از P_n داریم: $D(f) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$

نشان می‌دهیم عملگر D، یک عملگر خطی است؛

$$\forall f, g \in P_n, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow D(cf + g) \xlongequal{\text{تعریف}D} (cf + g)' \xlongequal{\text{روابط مشتق}} cf' + g' \xlongequal{\text{تعریف } D} cD(f) + D(g)$$

بنابراین، D یک عملگر خطی روی P_n است.

مثال۵: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های واقع در میدان $\mathbb{F}$ باشد. در اینصورت اگر تابع T را از $\mathbb{F}^{n\times 1}$ به $\mathbb{F}^{m\times 1}$ با ضابطه زیر تعریف کنیم، آنگاه T یک تبدیل خطی خواهد بود.

$$T: \mathbb{F}^{n\times 1} \underset{T(X)=AX}{\longrightarrow} \mathbb{F}^{m\times 1}$$

اثبات:

$$\forall X, Y \in \mathbb{F}^{n\times 1}, c \in \mathbb{F} \Rightarrow T(cX + Y) \xlongequal{\text{تعریف}} A(cX + Y) \xlongequal{\text{قوانین ضرب ماتریس}} cAX + AY \xlongequal{\text{تعریف}} cT(X) + T(Y)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

مثال۶: اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه داریم:

۱) $T(0) = 0$

۲) $T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_nT(v_n)$

اثبات:

۱)
$$T(0) = T(0 + 0) \xlongequal{\text{T تبدیل خطی است.}} T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0$$

۲)
$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) \xlongequal{\text{تعریف}} c_1T(v_1) + T(c_2v_2 + \dots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + T(c_3v_3 + \dots + c_nv_n) = \dots =$$
$$c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_nT(v_n)$$

مثال۷: تابع $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T((x, y)) = (x^2, y)$ یک تبدیل خطی نیست.

اثبات: بنابر برهان خلف، فرض کنید T خطی است. در اینصورت داریم:

$$T((1,0)) = (1,0) \quad , \quad T((1,1)) = (1,1) \Rightarrow T((1,0)) + T((1,1)) = (1,0) + (1,1) = (2,1)$$

از طرفی، $(2,1) = (1,1) + (1,0)$ و داریم: $T((2,1)) = (4,1)$، ولی؛ $T((1,0) + (1,1)) = (4,1) \neq (2,1) = T((1,0)) + T((1,1))$ که این تناقض است. پس، فرض خلف باطل و در نتیجه T یک تبدیل خطی نیست.

مثال۸: تابع $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $T(x, y) = (x, y, x + y)$ یک تبدیل خطی است.

اثبات:

$$T(c(x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((cx_1 + x_2, cy_1 + y_2)) \xlongequal{\text{تعریف}} (cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, c(x_1 + y_1) + x_2 + y_2) =$$
$$c(x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) \xlongequal{\text{تعریف}} cT((x_1, y_1)) + T((x_2, y_2))$$

پس، T یک تبدیل خطی است.

مثال۹: کدام‌یک از نگاشت‌های زیر یک تبدیل خطی نیست؟

۱) $T: M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ s.t. $T(A) = tr(A)$

۲) $T: M_{n\times n} \to \mathbb{F}^n$ s.t. $T(A) = A_j$ (ستون $j-$ام A)

۳) $T: P_n \to \mathbb{R}$ s.t. $T(f(x)) = f(0)$

۴) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.t. $T(x, y) = (xy, x + y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم که گزینه‌های ۱و۲و۳ تبدیل خطی هستند.

در گزینه (۱) فرض کنید A و B دو ماتریس دلخواه و c یک اسکالر است. در اینصورت داریم:

$$T(cA+B) \xrightarrow[]{\text{تعریف } T} tr(cA+B) \xrightarrow[]{\text{خاصیت تابع اثر ماتریس}} ctr(A)+tr(B) \xrightarrow[]{\text{تعریف } T} cT(A)+T(B) \Rightarrow$$ T یک تبدیل خطی است.

در گزینه (۲) نیز فرض کنید A و B دو ماتریس و c یک اسکالر دلخواه است. در این‌صورت داریم:

$$T(cA+B) \xrightarrow[]{\text{تعریف } T} (cA+B)_j = c\times A_j + B_j \xrightarrow[]{\text{تعریف } T} cT(A)+T(B)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

در گزینه (۳) فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای دلخواه و c یک اسکالر دلخواه است. در اینصورت داریم:

$$T(cf(x)+g(x)) \xrightarrow[]{\text{تعریف } T} (cf+g)(۰) = cf(۰)+g(۰) \xrightarrow[]{\text{تعریف } T} cT(f)+T(g)$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است.

در گزینه (۴) فرض کنید $x=(۱,۱)$ و $y=(۱,۰)$؛ در اینصورت داریم: $T(x)+T(y)=T(۱,۱)+T(۱,۰)=(۱,۲)+(۰,۱)=(۱,۳)$ و $T(x+y)=T((۱,۱)+(۱,۰))=T(۲,۱)=(۲,۳)$. حال از آنجا که $(۲,۳)\neq(۱,۳)$ بنابراین، $T(x)+T(y)\neq T(x+y)$ و در نتیجه T نمی‌تواند یک تبدیل خطی باشد.

توجه کنید که در چنین تست‌هایی تشخیص گزینه غلط کافی است. در اینجا برای تمرین بیشتر، خطی بودن سایر گزینه‌ها را بررسی کردیم.

مثال۱۰: آیا تابع $T:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌ی $T(x,y)=(۱,x+y)$ یک تبدیل خطی است؟

☑ **پاسخ:** خیر. فرض کنید $\alpha=(۱,۱)$ و $\beta=(۰,۱)$ و $c=۲$، داریم:

$$T(c\alpha+\beta)=T(۲,۳)\xrightarrow[]{\text{تعریف } T}(۱,۵)$$

$$cT\alpha+T\beta=۲T(۱,۱)+T(۰,۱)=۲(۱,۲)+(۱,۱)=(۳,۵)$$

چون $(۳,۵)\neq(۱,۵)$، پس $T(c\alpha+\beta)\neq cT\alpha+T\beta$ و در نتیجه تبدیل T خطی نیست.

مثال۱۱: فرض کنید V فضای تمام توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد. در اینصورت تابع $T:V\to V$ با ضابطه $T(f(x))=\int_۰^x f(t)dt$ یک عملگر خطی روی V است.

اثبات:

$$T(cf+g)\xrightarrow[]{\text{تعریف}}\int_۰^x (cf+g)(t)dt \xrightarrow[]{\text{خواص انتگرال}} c\int_۰^x f(t)dt+\int_۰^x g(t)dt \xrightarrow[]{\text{تعریف}} cT(f)+T(g)\Rightarrow$$ T یک عمگر خطی است.

مثال۱۲: تابع $T:M_{m\times n}\to M_{n\times m}$ با ضابطه $T(A)=A^t$ یک تبدیل خطی است.

اثبات:

$$T(cA+B)\xrightarrow[]{\text{تعریف}}(cA+B)^t\xrightarrow[]{\text{خواص ترانهاده}}cA^t+B^t\xrightarrow[]{\text{تعریف}}cT(A)+T(B)$$

پس، T یک تبدیل خطی است.

تذکر۱: در بعضی از موارد برای سادگی، عبارت $T(v)$ را به‌طور خلاصه، به‌صورت Tv می‌نویسیم.

مثال۱۳: فرض کنید $T:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ یک تبدیل خطی باشد. به طوریکه $T(۱,۱)=(۱,۲,۱)$ و $T(۱,۰)=(۰,۱,۲)$، در اینصورت $T(۲,۳)$ برابر است با:

۱) $(۳,۴,۱)$ ۲) $(۳,۵,۱)$ ۳) $(۲,۵,۱)$ ۴) $(۳,۵,۲)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به خاصیت خطی بودن تبدیل، اگر بتوانیم بردار $(۲,۳)$ را به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای $(۱,۱)$ و $(۱,۰)$ بدست آوریم، می‌توان $T(۲,۳)$ را به کمک $T(۱,۱)$ و $T(۱,۰)$ محاسبه کرد.

$$(۲,۳)=a(۱,۱)+b(۱,۰)=(a+b,a)\Rightarrow\begin{cases}a+b=۲\\ a=۳\end{cases}\Rightarrow a=۳, b=-۱\Rightarrow(۲,۳)=۳(۱,۱)-(۱,۰)$$

بنابراین، داریم:

$$T(۲,۳)=T(۳(۱,۱)-(۱,۰))\xrightarrow[\text{تبدیل } T]{\text{خاصیت خطی بودن}}۳T(۱,۱)-T(۱,۰)\xrightarrow[]{\text{فرض مساله}}۳(۱,۲,۱)-(۰,۱,۲)=(۳,۵,۱)$$

مثال۱۴: فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی و $T(v_1+2v_2)=w_1$ و $T(v_1-v_2)=w_2$ است. در اینصورت Tv_1 برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}w_1-\frac{1}{3}w_2$	۲) $\frac{1}{3}w_2-\frac{1}{3}w_1$	۳) $\frac{1}{3}w_1+\frac{2}{3}w_2$	۴) $\frac{2}{3}w_1+\frac{1}{3}w_2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از خاصیت خطی بودن T و با تشکیل دستگاه ، Tv_1 را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}T(v_1+2v_2)=w_1\\ T(v_1-v_2)=w_2\end{cases}\xrightarrow[\text{تبدیل } T]{\text{خاصیت خطی بودن}}\begin{cases}Tv_1+2Tv_2=w_1\\ Tv_1-Tv_2=w_2\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}3Tv_1=w_1+2w_2\Rightarrow Tv_1=\frac{1}{3}w_1+\frac{2}{3}w_2$$

هسته و برد

❖ **تعریف ۳:** فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد. در اینصورت مجموعه $R_T=\{Tv\mid v\in V\}$ را برد T یا تصویر V تحت تبدیل خطی T می‌نامیم؛ که آن را با نمادهایی چون R_T، $T(V)$ و یا $\operatorname{Im}(T)$ نمایش می‌دهند.
به همین ترتیب؛ اگر E یک زیر مجموعه از V باشد، تصویر E تحت تبدیل خطی T برابر با $T(E)=\{Tv\mid v\in E\}$ است.

مثال۱۵: برد تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T(x,y,z)=(x,x)$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** با توجه به تعریف T می‌بینیم که به ازای هر $\alpha=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$، تصویر α $(T\alpha)$ در برد تبدیل خطی، یک نقطه روی خط $y=x$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ است. به همین ترتیب به ازای هر نقطه روی خط $y=x$، مانند (a,a)، تصویر نقطه $(a,0,0)$ برابر است با:

$$T(a,0,0)=(a,a)$$

بنابراین، برد تبدیل خطی همان خط $y=x$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ است، یعنی؛

$$R_T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=y\right\}$$

مثال۱۶: برد تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $T(x,x)=(x,y,x+y)$ را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** ادعا می‌کنیم که برد تبدیل خطی بالا، صفحه‌ی $z=x+y$ در فضای $\mathbb{R}^3$ است. به وضوح می‌بینیم که به ازای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$، تصویر آن تحت T متعلق به صفحه‌ی $z=x+y$ است. از طرفی به ازای هر نقطه از این صفحه مانند (a,b,c) واضح است که $c=a+b$. بنابراین، اگر قرار دهیم $(x,y)=(a,b)$، داریم:

$$T(x,y)=T(a,b)=(a,b,a+b)=(a,b,c)$$

بدین ترتیب، ادعایمان ثابت شد و داریم:

$$R_T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=x+y\right\}$$

نکته۱: اگر V و W دو فضای برداری و $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه:

۱- R_T یک زیر فضای W است.

۲- اگر E یک زیرفضای V باشد، آنگاه $T(E)$ نیز یک زیرفضای W است.

اثبات. برای اثبات اینکه R_T یک زیر فضای W است، کافی است نشان دهیم نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است؛ چرا که با توجه به تعریف R_T، واضح است که $R_T\subseteq W$. فرض کنید $\alpha,\beta\in R_T$ و $c\in F$ باشد. در اینصورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in R_T\xrightarrow{\text{با توجه به تعریف}}\exists v_1\in V\ \text{ s.t. }\ \alpha=Tv_1\\ \beta\in R_T\xrightarrow{\text{با توجه به تعریف}}\exists v_2\in V\ \text{ s.t. }\ \beta=Tv_2\end{array}\right\}\Rightarrow c\alpha+\beta=cTv_1+Tv_2\overset{\text{تبدیل خطی است } T}{=\!=\!=}T(\underbrace{cv_1+v_2}_{\in V})\in R_T\Rightarrow c\alpha+\beta\in R_T$$

بنابراین، $R_T\le W$ است. اثبات قسمت (۲) نیز کاملاً شبیه به قسمت (۱) است.

نکته۲: اگر $T:V\to W$ یک تبدیل خطی و $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V باشد، آنگاه مجموعه $S'=\{Tv_1,Tv_2,\dots,Tv_n\}$ یک مولد برای R_T است.

اثبات. فرض کنید $w\in R_T$. پس با توجه به تعریف، عضوی مانند $v\in V$ وجود دارد بطوری‌که $Tv=w$. از آنجا که S یک پایه برای V است؛ بنابراین، اسکالرهای a_1، a_2، ... ، a_n وجود دارند؛ بطوریکه $v=a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n$. لذا داریم:

$$w=Tv=T(a_1v_1+\dots+a_nv_n)\overset{\text{تبدیل خطی است } T}{=\!=\!=}a_1Tv_1+a_2Tv_2+\dots+a_nTv_n\quad(1)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد، هر عضو دلخواه R_T را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از اعضای S' نمایش داد. بنابراین، S' یک مولد برای R_T است. دقت کنید که لزوماً S' یک پایه برای R_T نیست؛ چرا که لزوماً مستقل خطی نیست. یعنی ممکن است بعد R_T کمتر از بعد V باشد. ولی در مواقعی که بعد R_T و بعد V برابر باشند؛ لزوماً S' یک پایه برای R_T است.

از نکته فوق می‌توان چنین برداشت کرد که اگر تصویر عناصر یک پایه از فضای برداری V را تحت تبدیل خطی $T:V\to W$ داشته باشیم. می‌توان تصویر هر عنصر (یا بردار) از فضای برداری V را تحت T بدست آورد.

مثال ۱۷: برد تبدیل خطی در مثال قبل را به کمک نکته‌ی بالا به دست آورید: $\mathbf{T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\ ,\ T(x,y)=(x,y,x+y)}$

پاسخ: می‌دانیم که $\{(1,0),(0,1)\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^2$ است. پس کافی است تصویر اعضای این پایه را تحت T به دست آوریم:

$$T(1,0)=(1,0,1)\ ,\ T(0,1)=(0,1,1)\ \Rightarrow$$
$$R_T=\langle(1,0,1)\ ,\ (0,1,1)\rangle=\{a(1,0,1)+b(0,1,1)=(a,b,a+b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)\mid z=x+y\}$$

مثال ۱۸: اگر $\mathbf{T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3}$ یک تبدیل خطی و $\mathbf{T(1,0)=(1,2,0)}$ و $\mathbf{T(0,1)=(0,1,2)}$ باشد، ضابطه تبدیل خطی را بدست آورید.

پاسخ: هدف، تعیین $T(x,y)$ است.

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)\Rightarrow T(x,y)=T(x(1,0)+y(0,1))\xlongequal{\text{T تبدیل خطی است}}xT(1,0)+yT(0,1)\xlongequal{\text{فرض مسأله}}$$
$$x(1,2,0)+y(0,1,2)=(x,2x+y,2y)\Rightarrow T(x,y)=(x,2x+y,2y)\quad(\text{ضابطه تبدیل})$$

قضیه ۱: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی و $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V و $S'=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ بردارهای دلخواه در W باشند. در اینصورت دقیقاً یک تبدیل خطی مانند $T:V\to W$ وجود دارد؛ بطوریکه برای هر $i=1,2,\dots,n$ داشته باشیم $Tv_i=w_i$.

اثبات: ابتدا یک تبدیل خطی از V به W که در شرط قضیه صدق کند را معرفی (اثبات وجودی)، سپس منحصر بفردی آن را (اثبات یکتایی) ثابت می‌کنیم. فرض کنید $v\in V$ بردار دلخواهی در V باشد، از آنجا که S یک پایه برای V است؛ پس، اسکالرهایی مانند a_1، a_2، ... ، a_n وجود دارد؛ بطوریکه $v=a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n$. نگاشت T را برای هر $v\in V$ به صورت $Tv=a_1w_1+a_2w_2+\dots+a_nw_n$ درنظر بگیرید؛ که در آن w_1، ...، w_n بردارهای متعلق به S' و a_1، a_2، ... ، a_n، اسکالرهای موجود در نمایش v به صورت ترکیب خطی از بردارهای S است. نشان می دهیم T یک تبدیل خطی است. برای این منظور فرض کنید v و u دو عضو دلخواه V و c یک اسکالر دلخواه است.

$$\left.\begin{array}{l} v\in V\xrightarrow{\text{S یک پایه برای V است.}}v=a_1v_1+\dots+a_nv_n\\ u\in V\xrightarrow{\text{S یک پایه برای V است.}}u=b_1v_1+\dots+b_nv_n\end{array}\right\}\Rightarrow cv+u=(ca_1+b_1)v_1+\dots+(ca_n+b_n)v_n\xrightarrow{\text{تعریف T}}$$
$$T(cv+u)=(ca_1+b_1)w_1+\dots+(ca_n+b_n)w_n=ca_1w_1+b_1w_1+\dots+ca_nw_n+b_nw_n=$$
$$c(a_1w_1+\dots+a_nw_n)+(b_1w_1+\dots+b_nw_n)\xlongequal{\text{تعریف T}}cTv+Tu$$

بنابراین، T یک تبدیل خطی است. حال منحصر بفرد بودن T را نشان می‌دهیم. برای این منظور، فرض کنید T' یک تبدیل خطی از V به W است که برای هر $i=1,2,\dots,n$، در شرط $T'v_i=w_i$ صدق می کند و $v\in V$ یک بردار دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$T'v=T'(a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n)\xlongequal{\text{T' تبدیل خطی است}}a_1T'v_1+a_2T'v_2+\dots+a_nT'v_n\xlongequal{\text{با توجه به شرط}}$$
$$a_1w_1+a_2w_2+\dots a_nw_n\xlongequal{\text{تعریف T}}Tv$$

بنابراین برای هر $v\in V$، $T'v=Tv$ و در نتیجه $T'=T$ می‌باشد. پس نگاشت T منحصر به فرد است.

با توجه به این قضیه می‌بینیم که **برای مشخص کردن یک تبدیل خطی،** کافی است اثر تبدیل را روی بردارهای پایهٔ فضای برداری اول، بدست آوریم.

مثال ۱۹: فرض کنید $\mathbf{T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2}$ یک تبدیل خطی با ضابطه $\mathbf{T(x,y,z)=(x-y,z+y)}$ باشد. تصویر زیرفضای $\mathbf{E=\{(x,y,z)\mid x=z+2y\}}$ تحت $\mathbf{T}$ کدامیک از گزینه‌های زیر است.

۱) خط $x=2y$ ۲) خط $y=x+1$ ۳) نیمساز ربع دوم و چهارم ۴) نیمساز ربع اول و سوم

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تعریف E، داریم: $E=\{(x,y,z)\mid x=z+2y\}=\{(z+2y,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}$

از طرفی می‌دانیم $T(z+2y,y,z)=(z+2y-y,z+y)=(z+y,z+y)$، بنابراین:

$$T(E)=\{(z+y,z+y)\mid z,y\in\mathbb{R}\}\xlongequal{z+y=a}\{(a,a)\mid a\in\mathbb{R}\}$$

در نتیجه تصویر E تحت T، خط $y=x$ یا همان نیمساز ربع اول و سوم است.

❖ **تعریف۴:** فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی و $U\subseteq W$ باشد. در اینصورت، تصویر معکوس U تحت تبدیل خطی T، که با $T^{-1}(U)$ نمایش داده می‌شود؛ برابر است با: $T^{-1}(U)=\{v\in V \mid Tv\in U\}$

مثال۲۰: با در نظر گرفتن تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T:(x,y)=(y,x)$، تصویر معکوس $U_1=\{(x,y)\mid x=y\}$ و $U_2=\{(1,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$ را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$V_1=T^{-1}U_1=\left\{T^{-1}(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\right\}\xlongequal[\quad]{T\ \text{تعریف}}\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=U_1$$

$$V_2=T^{-1}U_2=\left\{T^{-1}(1,y)\mid y\in\mathbb{R}\right\}\xlongequal[\quad]{T\ \text{تعریف}}\{(y,1)\mid y\in\mathbb{R}\}$$

پس، V_1 همان خط $y=1$ در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ است. توجه کنید که U_2، خط $x=1$ در فضای $\mathbb{R}^2$ بود. در واقع با کمی دقت می‌توان فهمید که تبدیل خطی معرفی شده در این مثال هر نقطه را به قرینه‌ی آن نسبت به خط $y=x$ می‌برد.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۳: فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی است. در اینصورت اگر $U\subseteq W$ یک زیرفضای W باشد، آنگاه $T^{-1}(U)$ یک زیرفضای V است.

اثبات: فرض کنید v_1 و v_2 دو عضو دلخواه از $T^{-1}(U)$ و c یک اسکالر دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} v_1\in T^{-1}(U)\xrightarrow{\text{تعریف}}Tv_1\in U\\ v_2\in T^{-1}(U)\xrightarrow{\text{تعریف}}Tv_2\in U\end{array}\right\}\xrightarrow[W\ \text{است.}]{U\ \text{زیرفضای}}cTv_1+Tv_2\in U\xrightarrow[\text{خطی است}]{T\ \text{تبدیل}}T(cv_1+v_2)\in U$$

$$\xrightarrow{T^{-1}(U)\ \text{تعریف}}cv_1+v_2\in T^{-1}(U)\Rightarrow$$ $T^{-1}(U)$ یک زیر فضای V است.

❖ **تعریف۵:** فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی است. در اینصورت تصویر معکوس مجموعه $\{o\}$ را فضای پوچ یا هسته‌ی T نامیده و آن را با N_T یا $\ker(T)$، نمایش می‌دهند. بنابراین، N_T برابر است با: $N_T=\{v\in V \mid TV=o\}$

نکته۴: اگر $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه N_T یک زیرفضای V است.

اثبات: از قبل می دانیم $\{o\}$زیرفضای بدیهی W است؛ بنابراین، طبق نکته قبل نتیجه می‌شود N_T زیرفضای V است.

مثال۲۱: فرض کنید $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(x,y)=(x,x-y,x+y)$ یک تبدیل خطی است. R_T و N_T را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** ابتدا N_T را بدست می‌آوریم. طبق تعریف می‌دانیم $N_T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid T(x,y)=(0,0,0)\}$ است. لذا، برای تعیین N_T باید $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ را به‌گونه‌ای بیابیم که $T(x,y)=(0,0,0)$؛

$$T(x,y)=(0,0,0)\xrightarrow{T\ \text{تعریف}}(x,x-y,x+y)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-y=0\Rightarrow y=0,x=0\\ x+y=0\end{cases}$$

بنابراین، $N_T=\{(0,0)\}$ یک مجموعه تک عضوی است.

برای تعیین R_T طبق تعریف باید $T(\mathbb{R}^2)$ را بدست آوریم. همانطور که از قبل می‌دانیم، در تبدیل خطی $T:V\to W$ اگر $S=\{v_1,v_2,...v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد، مجموعه $S'=\{Tv_1,...,Tv_n\}$ یک مجموعه مولد برای $R_T=T(V)$ است. پس در تبدیل خطی $T:V\to W$، برای تعیین R_T همواره بهتر است یک پایه برای V بدست آورده، سپس تصویر اعضای پایه را تحت اثر T تعیین کنیم. در این مثال می‌دانیم مجموعه $\{(1,0),(0,1)\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^2$ است و طبق تعریف T در این مثال داریم: $T(1,0)=(1,1,1)\ ,\ T(0,1)=(0,-1,1)$

بنابراین، مجموعه $\{(1,1,1)\ ,\ (0,-1,1)\}$ یک مولد برای R_T می‌باشد. بوضوح می‌دانیم که مجموعه $\{(1,1,1),(0,-1,1)\}$ مستقل و در نتیجه یک پایه برای R_T است و داریم: $R_T=<(1,1,1),(0,-1,1)>$

◆ ◆ ◆ ◆

با توجه به حل مثال فوق می‌توانیم به نکته زیر اشاره کنیم.

نکته۵: در تبدیل $T:V\to W$ برای تعیین R_T، می‌توان یک پایه مانند $S=\{v_1,...,v_n\}$ را برای V درنظر گرفت و سپس از آنجا که مجموعه $S'=\{Tv_1,Tv_2,...,Tv_n\}$ یک مولد برای R_T است، آن را به یک پایه برای R_T تقلیل دهیم. یعنی، اگر S' مستقل باشد، پایه نیز است و اگر مستقل نباشد، بزرگترین زیر مجموعه مستقل خطی آن را درنظر می‌گیریم.

مثال۲۲: در تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(x,y,z)=(z-y,x-y,x-z)$، کدامیک از گزینه‌ها یک پایه برای R_T است.

۱) $\{(0,1,1),(1,0,1)\}$ ۲) $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ ۳) $\{(0,1,1),(1,0,-1)\}$ ۴) $\{(-1,-1,0),(0,1,-1)\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم $S=\{e_1,e_2,e_3\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^3$ است و داریم :

$Te_1=T(1,0,0)=(0,1,1)\ ,\ Te_2=T(0,1,0)=(-1,-1,0)\ ,\ Te_3=T(0,0,1)=(1,0,-1)$

پس، $S'=\{(0,1,1),(-1,-1,0),(1,0,-1)\}$ یک مجموعه مولد برای R_T است. از طرفی از آنجا که: $(0,1,1)+(-1,-1,0)+(1,0,-1)=(0,0,0)$ مجموعه فوق وابسته خطی است و نمی‌تواند یک پایه برای R_T باشد. به سادگی دیده می‌شود که زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $S'=\{(0,1,1),(-1,-1,0),(1,0,-1)\}$ دارای بعد ۲ است. برای این موضوع می‌توانیم از ماتریس تشکیل شده توسط این بردارها استفاده کنیم.

(یادآوری می‌کنیم که برای تشخیص بعد زیرفضای تولید شده توسط بردارهای α_1، α_2، ... ، α_m از $\mathbb{R}^n$، می‌توان ماتریس A را به‌گونه‌ای تشکیل داد که بردارهای α_1، α_2، ... ، α_m سطرهای آن باشند، سپس با عملیات سطری مقدماتی، فرم تحویل یافته سطری ـ پلکانی آن را بدست آوریم. در اینصورت تعداد سطرهای ناصفر فرم سطری ـ پلکانی A، برابر با بعد زیرفضای تولید شده توسط بردارهای α_1، α_2، ... ، α_m است و سطرهای ناصفر فرم سطری ـ پلکانی A را می‌توان به عنوان یک پایه برای این زیر فضا در نظر گرفت).

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{+R_1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[+R_2]{\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین، بعد R_T برابر ۲ و $\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$ یک پایه برای R_T است. البته توجه کنید که چون تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی S' مستقل‌اند (در این مثال چنین است)، پس مجموعه‌های $\{(0,1,1),(-1,-1,0)\}$ و $\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$ را نیز می‌توان به عنوان یک پایه برای R_T درنظر گرفت.

مثال۲۳: در تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(x,y,z)=(x+y-z,y+z,x+2y)$، کدامیک از گزینه‌ها یک پایه برای R_T است.

۱) $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ ۲) $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ ۳) $\{(-1,1,0),(-1,1,2)\}$ ۴) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» این تست کاملا شبیه به تست قبل است و هدف از ارائه آن، تمرین بیشتر برای تعیین R_T می‌باشد.

می دانیم $S=\{e_1,e_2,e_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است و داریم: $Te_1=(1,0,1),\quad Te_2=(1,1,2),\quad Te_3=(-1,1,0)$

بنابراین، مجموعه $\{(1,0,1)\ ,\ (1,1,2)\ ,\ (-1,1,0)\}$ یک مولد برای R_T است. برای تعیین پایه برای R_T داریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\-1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[+R_1]{-R_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

مجموعه $\{(1,0,1)\ ,\ (0,1,1)\}$ یک پایه برای R_T است.

نکته۶: اگر $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه ماتریس $A_{m\times n}$ حقیقی به گونه‌ای وجود دارد که برای هر $X\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم؛ $TX=AX$.

اثبات. فرض می کنیم $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی دلخواه باشد و ماتریس مورد نظر در حکم مساله را تعیین می‌کنیم. می دانیم $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ است. حال اگر ماترس A را به‌گونه‌ای در نظر بگیریم که برای هر $j=1,2,...,n$ ، ستون jـ ام آن Te_j باشد. ثابت می‌کنیم A شرط خواسته شده در نکته را دارد. اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}=[Te_1Te_2...Te_n]$، نتیجه می شود:

$$Te_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},Te_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\dots,Te_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

حال، فرض کنید $X\in\mathbb{R}^n$ یک عضو دلخواه باشد. در اینصورت داریم:

$$X=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n\Rightarrow TX=x_1Te_1+x_2Te_2+\dots+x_nTe_n=x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\dots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=AX \Rightarrow \quad TX=AX$$

بدین ترتیب، اثبات تمام است.

با کمی دقت می‌توان دید که روند اثبات نکته‌ی بالا، نحوه‌ی محاسبه چنین ماتریسی را نمایش می‌دهد. برای درک بهتر این روند، به مثال زیر توجه کنید.

مثال۲۴: ماتریس متناظر با تبدیل خطی زیر را به گونه‌ای به دست آورید که در رابطه‌ای $TX = AX$ صدق کند.

$$\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$\mathbf{T}:(x,y,z)=(x+y,y-z)$$

پاسخ: با توجه به روند اثبات نکته‌ی بالا، کافی است یک پایه از فضای اول را در نظر گرفته و تصویر اعضای آن پایه را به‌عنوان ستون‌های ماتریس A در نظر بگیریم.

می‌دانیم $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^3$ است و داریم:

$$T(1,0,0)=(1,0) \ , \ T(0,1,0)=(1,1) \ , \ T(0,0,1)=(0,-1)$$

بنابراین، به دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

بررسی درستی این ماتریس:

$$AX=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix}=TX$$

توجه کنید که برای هر تبدیل خطی مانند $T:V\to W$ که V و W دو فضای برداری با بعد متناهی باشند، چنین ماتریسی وجود دارد؛ که در انتهای فصل به این موضوع بیشتر می‌پردازیم. در واقع نشان خواهیم داد که بین دسته‌ای از تبدیلات خطی و ماتریس‌ها تناظر یک‌به‌یک وجود دارد.

در نکته قبل نشان دادیم که برای هر تبدیل خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ مانند T می‌توان ماتریسی یافت به گونه‌ای که برای هر $X\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $TX=AX$. از طرف دیگر متناظر با هر ماتریس $m\times n$ دلخواه مانند A، می‌توان تبدیل خطی $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ با ضابطه $T_A(X)=AX$ درنظر گرفت؛ که به آن تبدیل خطی متناظر با ماتریس A می‌گویند.

نکته۷: اگر $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی بوده و ماتریس A به‌گونه ای باشد که برای هر $X\in\mathbb{R}^n$؛ $TX=AX$، آنگاه N_T برابر با فضای جواب دستگاه همگن $AX=0$ و R_T برابر با فضای ستونی ماتریس A است.

اثبات. با توجه به تعریف N_T و R_T و نکات قبل، اثبات بدیهی است.

مثال۲۵: در تبدیل خطی $T:P_2\to P_3$ با ضابطه $T(f(x))=xf(x)-f'(x)$، فضای برد و پوچ T را تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا R_T را تعیین می‌کنیم. می‌دانیم مجموعه $S=\{1,x,x^2\}$ پایه استاندارد فضای P_2 است. از آنجا که $T(1)=x-0=x$، $T(x)=x.x-1=x^2-1$ و $T(x^2)=x.x^2-2x=x^3-2x$ است، پس مجموعه $S'=\{x,x^2-1,x^3-2x\}$ یک مولد برای R_T و از آنجا که S' مستقل خطی است. بنابراین، S' پایه R_T می‌باشد، یعنی: $R_T=<x,x^2-1,x^3-2x>$.

برای تعیین N_T باید تمام توابع $f(x)$ را به‌گونه‌ای تعیین کنیم که $T(f(x))=0$ شود. پس داریم:

$$T(f(x))=0\xrightarrow{\text{تعریف } T}xf(x)-f'(x)=0\Rightarrow f'(x)=x.f(x)\xrightarrow{f(x)\neq 0}\frac{f'(x)}{f(x)}=x\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}}$$

$$Ln(f(x))=\frac{1}{2}x^2+c\xrightarrow[e\text{ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}}e^{\ln(f(x))}=e^{\frac{1}{2}x^2+c}=e^c.e^{\frac{1}{2}x^2}\Rightarrow f(x)=c'e^{\frac{x^2}{2}}$$

واضح است که $f(x)=c'e^{\frac{x^2}{2}}\notin P_2$؛ بنابراین، چنین تابعی در P_2 وجود ندارد. لذا، $N_T=\{0\}$. توجه داشته باشید که همواره در هر تبدیل خطی $T(0)=0$ و در نتیجه همواره $\{0\}\subseteq N_T$ است.

❖ **تعریف۶:** فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند که V با بعد متناهی است و $T:V\to W$ یک تبدیل خطی باشد. در اینصورت بعد فضای پوچ تبدیل (یعنی N_T) را پوچی T نامیده و با $\text{nullity}(T)$ نمایش می‌دهند و بعد فضای تصویر تبدیل (یعنی R_T) را رتبه T نامیده و با $\text{rank}(T)$ نمایش می دهند.
توجه کنید که چون V را با بعد متناهی درنظر گرفته‌ایم؛ N_T و R_T هر دو با بعد متناهی می‌باشند. چرا که اولاً N_T زیرفضایی از V است و درثانی اشاره کردیم که اگر $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V باشد، مجموعه $S'=\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ یک مولد برای R_T است و بنابراین، اگر V با بعد متناهی باشد؛ همواره $\dim R_T\le\dim V$ است. پس لازمه تعریف فوق این است که V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد.

قضیه۲: اگر $T:V\to W$ یک تبدیل خطی، V و W دو فضای برداری؛ و V با بعد متناهی باشد، آنگاه داریم:

$$\text{nullity}\,T+\text{rank}\,T=\dim V$$

اثبات: قبل از ارائه اثبات یادآوری می‌کنیم که $\text{nullity}T=\dim(N_T)$ و $\text{rank}T=\dim(R_T)$
فرض کنید $\dim V=n$ و $\dim N_T=k$، ثابت می‌کنیم $\dim\ R_T=n-k$. از آنجا که $\dim N_T=k$، فرض می‌کنیم مجموعه $S_1=\{v_1,\dots,v_k\}$ یک پایه برای N_T است. چون N_T یک زیرفضای V است، پس S_1 یک مجموعه مستقل خطی در V نیز می‌باشد و می‌توان آن را به یک پایه برای V گسترش داد. فرض کنید $S=\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ پایه‌ای برای V است که از گسترش S_1 بدست آمده است. از قبل می‌دانیم که اگر $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V باشد، مجموعه $S_2=\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ یک مولد برای R_T است. از طرفی از آنجا که $S_1=\{v_1,\dots,v_k\}$ پایه N_T است، پس، $Tv_1=Tv_2=\dots=Tv_k=0$ و چون $S_2=\{Tv_1,\dots,Tv_k,Tv_{k+1}\dots,Tv_n\}$ مولد R_T بود، مجموعه $S'=\{Tv_{k+1},\dots,Tv_n\}$ نیز مولد R_T است. ثابت می‌کنیم S' یک پایه برای R_T می‌باشد. از آنجا که S' مولد R_T است، کافی است استقلال خطی بردارهای آن را بررسی کنیم. به همین منظور فرض کنید اسکالرهای a_{k+1} ، a_{k+2}، ... ، a_n به گونه‌ای وجود دارند که:

$$a_{k+1}Tv_{k+1}+\dots+a_nTv_n=0\xrightarrow{\text{تبدیل خطی } T}T(a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n)=0\xrightarrow{\text{تعریف } N_T}(a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n)\in N_T$$

چون S_1 پایه N_T است؛ پس، ضرایب b_1، b_2، ...، b_k به گونه‌ای وجود دارد که:

$$(a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n)=b_1v_1+\dots+b_kv_k\Rightarrow b_1v_1+\dots+b_kv_k-a_{k+1}v_{k+1}-\dots-a_nv_n=0\xrightarrow{\text{مستقل خطی است. } S}$$
$$b_1=b_2=\dots=b_k=a_{k+1}=\dots=a_n=0$$

چون $a_{k+1}=a_{k+2}=\dots=a_n=0$، پس S' مستقل خطی و لذا پایه برای R_T است. می‌دانیم که S' دارای n-k عضو است، پس، $\dim R_T=n-k$ و داریم:

$$\dim R_T=n-k=\dim V-\dim N_T\Rightarrow\dim R_T+\dim N_T=\dim V$$

بدین ترتیب، اثبات تمام است.

مثال۲۶: رتبه و پوچی تبدیلات خطی زیر را به دست آورید:

$$\mathbf{T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2}\qquad\qquad \mathbf{T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3}$$
$$\mathbf{T_2(x,y,z)=(x+y-z\ ,\ x-y+z)}\qquad\qquad \mathbf{T_1(x,y)=(x+y,x-y,x)}$$

☑ **پاسخ:**

$$T_1(x,y)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\x-y=0\\x=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(0,0)\Rightarrow N_{T_1}=\{(0,0)\}\Rightarrow\text{nullity }T_1=0\xrightarrow{\text{nullity }T_1+\text{rank }T_1=2}\text{rank }T_1=2$$

$$R_{T_2}=\langle T_2(1,0,0)\ ,\ T_2(0,1,0)\ ,\ T_2(0,0,1)\rangle=\langle(1,1)\ ,\ (1,-1)\ ,\ (-1,1)\rangle=\langle(1,1)\ ,\ (1,-1)\rangle\Rightarrow$$

$$\text{rank }T_2=\text{din}(R_{T_2})=2\xrightarrow{\text{rank }T_2+\text{nullity }T_2=3}\text{nullity }T_2=1$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۷: پوچی و رتبه تبدیل خطی $\mathbf{T:M_{n\times n}\to M_{n\times n}}$ با ضابطه $\mathbf{T(A)=A-A^t}$ برابر است با:

۱) $\text{nullity}T=\dfrac{n(n-1)}{2}\ ,\ \text{rank}T=\dfrac{n(n+1)}{2}$
۲) $\text{nullity}T=\dfrac{n(n+1)}{2}\ ,\ \text{rank}T=\dfrac{n(n-1)}{2}$
۳) $\text{nullity}T=n\ ,\ \text{rank}T=n^2-n$
۴) $\text{nullity}T=n^2-n\ ,\ \text{rank}T=n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا N_T را تعیین می‌کنیم، یعنی تمام ماتریس‌هایی را بدست می‌آوریم که به ازای آنها $T(A)=0$ شود. به همین منظور داریم:

$$T(A)=0\xrightarrow{\text{تعریف}}A-A^t=0\Rightarrow A=A^t\Rightarrow$$ A متقارن است.

از طرف دیگر به سادگی دیده می‌شود که اگر A متقارن باشد، $TA = o$ می‌شود. بنابراین، نتیجه می‌شود که ماتریس A متقارن است، اگر و تنها اگر عضو N_T باشد. پس، $N_T = \{$تمام ماتریس‌های متقارن$\}$. از قبل می‌دانیم بعد ماتریس‌های متقارن برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است. لذا؛

$$\text{nullity}T = \dim N_T = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

برای تعیین برد T یا R_T، به سادگی با توجه به تعریف T دیده می‌شود که به ازای هر ماتریس A، $T(A)$ یک ماتریس پادمتقارن است. یعنی R_T زیر مجموعه‌ای از ماتریس‌های پادمتقارن است. ثابت می‌کنیم R_T دقیقا برابر با مجموعه ماتریس‌های پادمتقارن است:

فرض کنید A یک ماتریس پادمتقارن دلخواه است و قرار دهید $B = \frac{۱}{۲}A$. در اینصورت داریم:

$$T(B) = B - B^t \xlongequal{B=\frac{۱}{۲}A} \frac{۱}{۲}A - (\frac{۱}{۲}A^t) \xlongequal{\text{پاد متقارن است } A} \frac{۱}{۲}A + \frac{۱}{۲}A = A \Rightarrow A \in R_T$$

پس، مجموعه‌ی ماتریس‌های پادمتقارن نیز یک زیرمجموعه R_T و در نتیجه $R_T = \{$مجموعه ماتریس‌های پادمتقارن$\}$. از قبل می‌دانیم که بعد ماتریس‌های پادمتقارن برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. پس؛

$$\text{rank}T = \dim R_T = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

توجه کنید که بعد از محاسبه $\text{nullity}\,T = \frac{n(n+۱)}{۲}$ به سادگی از قضیه قبل نتیجه می‌شود که:

$$\text{rank}T = \dim M_{n\times n} - \text{nullity}T = n^۲ - \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

و نیازی به تعین ماهیت R_T در این مساله نیست. در واقع هدف از تعیین R_T، انجام تمرین بیشتر بود.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۸: پوچی تبدیل خطی $T : P_n \to IR$ با ضابطه $T(f(x)) = f(\circ)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $n-۱$ ۳) $n+۱$ ۴) n

پاسخ: گزینه «۴» طبق تعریف می‌دانیم که اعضای P_n به صورت $f(x) = a_\circ + a_۱x + ... + a_nx^n$ می‌باشند و برای تعیین N_T باید $f(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنیم که $T(f(x)) = \circ$. به همین منظور قرار می‌دهیم:

$$T(f(x)) = \circ \xrightarrow{f(x)=a_\circ+a_۱x+...+a_nx^n} T(a_\circ + a_۱x + ... + a_nx^n) = \circ \xrightarrow{T(f(x))=f(\circ)} a_\circ = \circ$$

بنابراین، در چند جمله‌ای $f(x)$، برای اینکه $T(f) = \circ$ شود، کافی است جمله ثابت آن صفر باشد و تمام دیگر ضرایب آن دلخواه می‌باشند. از آنجا که n ضریب $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n در اعضای N_T دلخواه هستند؛ پس بعد N_T برابر با n است. همچنین، می‌توان نشان داد که مجموعه $S = \{x, x^۲, ..., x^n\}$ یک پایه برای N_T است.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۸: اگر A یک ماتریس دلخواه $m\times n$ و $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تبدیل خطی متناظر با A باشد، یعنی تبدیل خطی با ضابطه $T_AX = AX$، آنگاه $\text{rank}A = \text{rank}T_A$ است.

اثبات. فرض کنید $S = \{e_۱, e_۲, ..., e_n\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ است. در اینصورت می‌دانیم که مجموعه $S' = \{Te_۱, Te_۲, .., Te_n\}$ یک مولد برای R_{T_A} می‌باشد. از طرفی طبق تعریف T_A برای هر $j = ۱, ..., n$، $T_Ae_j = Ae_j = A_j$ است که در آن A_j، ستون jام ماتریس A می‌باشد. بنابراین، ستون‌های A؛ یعنی $S' = \{A_۱, A_۲, ..., A_n\}$ یک مولد زیرفضای R_{T_A} است. پس، زیرفضای R_{T_A} و فضای ستونی ماتریس A؛ یعنی $\text{col}\ (A)$ یکسان هستند و $\text{rank}T_A = \dim R_{T_A} = \dim \text{col}A = \text{rank}A$.

مثال۲۹: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و T_A تبدیل خطی متناظر با آن است. در اینصورت $\text{nullity}\,T_A$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته قبل می‌دانیم $\text{rank}T_A = \text{rank}A$. از طرفی با توجه به تعریف T_A می‌دانیم که تبدیل خطی T_A از فضای $\mathbb{R}^۵$ به فضای $\mathbb{R}^۲$ است؛ یعنی $T_A : \mathbb{R}^۵ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه $T_AX = AX$ است. بنابراین داریم:

$$\text{nullity}\,T_A = \dim \mathbb{R}^۵ - \text{rank}T_A = ۵ - \text{rank}A \quad (۱)$$

همچنین، بوضوح دیده می‌شود که سطرهای A مستقل خطی‌اند (هیچکدام ضریب دیگری نیست)، پس $\text{rank}A = ۲$ و در نتیجه از رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$\text{nullity}\,T_A = ۵ - ۲ = ۳$$

فصل پنجم

«مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و قضیه کیلی ـ هامیلتون»

مقدار و بردار ویژه

❖ **تعریف ۱:** فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $T:V\to V$ یک عملگر خطی روی Vباشد. در این صورت اسکالر $\lambda\in\mathbb{F}$ را یک مقدار ویژه T گویند، هرگاه یک بردار ناصفر مانند $v\in V$ وجود داشته باشد؛ به طوریکه رابطه $Tv=\lambda v$ به ازای آن برقرار باشد. همچنین، در صورت برقراری این رابطه، v را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامند.

مثال۱: نشان دهید که $\lambda=\pm 1$ مقادیر ویژه عملگر خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T(x,y)=(y,x)$ می‌باشند.

☑ **پاسخ:** کافی است دو بردار ویژه متناظر آنها را پیدا کنیم.

$T(1,1)\xlongequal{\text{تعریف } T}(1,1)\Rightarrow T(1,1)=1\times(1,1)\Rightarrow$ $\lambda=1$ یک مقدار ویژه T با بردار ویژه متناظر $(1,1)$ است.

$T(1,-1)=(-1,1)=-1\times(1,-1)\Rightarrow$ $\lambda=-1$ یک مقدار ویژه T با بردار متناظر $(1,-1)$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

با کمی دقت در مثال بالا می‌توان فهمید که به ازای هر $a\in\mathbb{R}$، بردار (a,a) یک بردار ویژه متناظر با $\lambda=1$ و بردار $(a,-a)$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=-1$ است. این نتیجه به صورت کلی و همواره برقرار است. در نکته‌ی زیر آن را بیان و ثابت می‌کنیم.

نکته۱: اگر $v\in V$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ برای تبدیل خطی T باشد، آنگاه به ازای هر اسکالر نا صفر $\alpha\in\mathbb{F}$ بردار αv نیز یک بردار ویژه متناظر با λ است.

اثبات: از آنجا که v بردار ویژه متناظر با λ است، $Tv=\lambda v$ است. بنابراین، داریم:

$T(\alpha v)=\alpha Tv=\alpha(\lambda v)=\lambda(\alpha v)\Rightarrow$ αv یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ است.

با توجه به نکته فوق می‌بینیم که اگر v یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه تمام مضارب اسکالر v نیز بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌باشند. پس می‌توانیم تعریف زیر را در نظر بگیریم.

❖ **تعریف ۲:** فرض کنید λ یک مقدار ویژه عملگر خطی $T:V\to V$ باشد. در این صورت، مجموعه تمام بردارهای $v\in V$ که در رابطه $Tv=\lambda v$ صدق کند را فضای ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامند و آنرا با E_λ نمایش می‌دهند.

مثال۲: فضای ویژه متناظر با مقادیر ویژه $\lambda=\pm 1$ در مثال قبل را به دست آورید:

☑ **پاسخ:** همان‌طور که در بالا دیدیم، به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم:

$$T(a,a)=1\times(a,a)\Rightarrow E_1=\{(a,a)\mid a\in\mathbb{R}\}=\langle(1,1)\rangle$$

$$T(a,-a)=-1\times(a,-a)\Rightarrow E_{-1}=\{(a,-a)\mid a\in\mathbb{R}\}=\langle(1,-1)\rangle$$

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۲: اگر λ یک مقدار ویژهٔ عملگر خطی T باشد، آنگاه E_λ یک زیر فضای V است.

اثبات: با توجه به تعریف می‌دانیم $E_\lambda=\{v\in V\mid Tv=\lambda v\}$؛ بنابراین، E_λ در واقع فضای پوچ عملگر خطی $T-\lambda I_V$ است و از قبل می‌دانیم که فضای پوچ هر عملگر خطی روی V، یک زیر فضای V است.

نکته۳: عملگر خطی $T:V\to V$ دارای بردار ویژه متناظر با اسکالر $\lambda\in\mathbb{F}$ است، اگر و تنها اگر $T-\lambda I_V$ یک به یک نباشد.

اثبات: فرض کنید عملگر خطی T دارای بردار ویژه $v \in V$ با مقدار ویژه متناظر λ است. در این صورت، بنابر تعریف می‌دانیم که E_λ (فضای ویژه متناظر با λ) فضای پوچ عملگر $T - \lambda I_V$ است و همچنین $\{0\} \neq <v> \subseteq E_\lambda$ می‌باشد. بنابراین، $N_{T-\lambda I_V} = E_\lambda \neq \{0\}$ و در نتیجه $T - \lambda I_V$ یک به یک نیست. از طرف دیگر، اگر $T - \lambda I_V$ یک به یک نباشد، آنگاه $E_\lambda = N_{T-\lambda I_V} \neq \{0\}$ است و در نتیجه اثبات تمام است.

مثال۳: فرض کنید $I_V : V \to V$ عملگر همانی باشد. در این صورت برای هر $v \in V$، داریم: $I_V(v) = 1.v$؛ بنابراین اسکالر ۱، مقدار ویژه I_V و همچنین $E_1 = V$ است. در واقع تنها مقدار ویژه عملگر همانی، $\lambda = 1$ می‌باشد.

مثال۴: فرض کنید $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک عملگر خطی با ضابطه $T(x,y) = (2x, x+y)$ است. در این صورت به ازای بردار $(1,1)$، داریم:

$$T(1,1) = (2\times 1, 1+1) = (2,2) = 2(1,1)$$

بنابراین، $(1,1)$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 2$ است. به همین ترتیب، می‌بینیم که برای هر $a \in \mathbb{R}$ بردار $a(1,1) = (a,a)$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 2$ است.

$$T(a,a) = (2a, a+a) = (2a,2a) = 2(a,a)$$

همانطور که در قبل نیز اشاره کردیم، لزوماً هر عملگر خطی دارای مقادیر و یا بردارهای ویژه نیست و فقط زمانی $\lambda \in \mathbb{F}$ می‌تواند یک مقدار ویژه عملگر خطی $T : V \to V$ باشد؛ که عملگر $T - \lambda I_V$ یک به یک نباشد. مثال بعد، یک عملگر خطی را ارائه می‌کند که دارای هیچ مقدار یا بردار ویژه‌ای نیست.

مثال۵: فرض کنید $V = C[a,b]$ مجموعه تمام توابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ است. عملگر خطی $T : V \to V$ با ضابطه $T(f) = \int_a^x f(t)dt$ را در نظر بگیرید (این عملگر، به عملگر انتگرال‌گیری معروف است). در این صورت تابع نا صفر $f \in V$ یک بردار ویژه با مقدار ویژه متناظر λ است، اگر و تنها اگر رابطه $T(f) = \lambda f$ برقرار باشد. در چنین مواقعی تابع f را یک تابع ویژه نیز می‌نامند. نشان می‌دهیم این عملگر خطی دارای هیچ تابع ویژه‌ای (بردار ویژه) نیست.

☑ **پاسخ:** بنابر برهان خلف، فرض کنید تابع ناصفر f و اسکالر ناصفر $\lambda \in \mathbb{F}$ وجود دارد؛ بطوریکه f یک تابع ویژه متناظر با λ است. در این صورت داریم:

$$T(f) = \lambda f \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = \lambda f(x) \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری از طرفین}} f(x) = \lambda f'(x) \xrightarrow{f(x)\neq 0,\lambda\neq 0}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}} \mathrm{Ln}(f(x)) = \frac{1}{\lambda}x + c \xrightarrow{\text{طرفین را به توان e می‌رسانیم.}} e^{\ln(f(x))} = e^{\frac{1}{\lambda}x+c} = e^c.e^{\frac{1}{\lambda}x} = c'e^{\frac{1}{\lambda}x}$$

$$\Rightarrow f(x) = c'e^{\frac{1}{\lambda}x} \qquad (1)$$

از طرف دیگر $$\Rightarrow \lambda f(x) = T(f) = \int_a^x f(t)dt \xrightarrow{x=a} \lambda f(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \xrightarrow{\lambda\neq 0} f(a) = 0 \qquad (2)$$

حال با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow f(x) = c'e^{\frac{1}{\lambda}x}\\ (2) \Rightarrow f(a) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow c'e^{\frac{1}{\lambda}a} = 0 \xrightarrow{e^{\frac{1}{\lambda}a}\neq 0} c' = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

و این با فرض اولیه که f یک تابع ناصفر است، تناقض دارد. بنابراین، فرض خلف باطل و اثبات تمام است.توجه کنید که برای $\lambda = 0$ با توجه به ناصفر بودن f، بوضوح هیچ تابعی به عنوان تابع ویژه وجود ندارد.

بنابراین، عملگر فوق یک عملگر بدون بردار ویژه یا مقدار ویژه است. این نتیجه می‌دهد که برای هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$، به ازای عملگر خطی فوق، عملگر $T - \lambda I_V$ یک عملگر نامنفرد است.

نکته‌ای که باید توجه کرد؛ این است که در مثال قبل V یک فضای برداری از بعد نامتناهی است و در واقع فقط در مواقعی که V با بعد نامتناهی باشد، امکان روی دادن چنین حالتی وجود دارد. در ادامه فصل نشان می‌دهیم که اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، هر عملگر خطی روی آن حتماً دارای مقادیر و بردارهای ویژه خواهد بود (البته با فرض اینکه فضای برداری V روی یک میدان بسته جبری تعریف شده باشد).

مثال۶: نشان دهید تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T:(x,y)=(-y,x)$ دارای هیچ مقدار ویژه‌ای نیست.

☑ **پاسخ:** بنابر برهان خلف، فرض کنید که $\lambda \in \mathbb{R}$ یک مقدار ویژه T با بردار ویژه متناظر (a,b) باشد. در این‌صورت داریم:

$$T(a,b)=\lambda(a,b) \Rightarrow (-b,a)=(\lambda a,\lambda b) \Rightarrow \begin{cases} -b=\lambda a \\ a=\lambda b \end{cases} \Rightarrow -b=\lambda^2 b \Rightarrow (1+\lambda^2)b=0 \xrightarrow{1+\lambda^2\neq 0} b=0 \qquad (1)$$

$$\text{به همین تربیت} \Rightarrow a=-\lambda^2 a \Rightarrow (1+\lambda^2)a=0 \xrightarrow{1+\lambda^2\neq 0} a=0 \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $(a,b)=(0,0)$ و این تناقض دارد با تعریف بردار ویژه، چرا که بردار ویژه باید ناصفر باشد. بنابراین فرض خلف باطل و اثبات تمام است.

◆ ◆ ◆ ◆

در مثال بالا، دیدیم که امکان دارد یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی هر هم مقدار ویژه و در نتیجه بردار ویژه نداشته باشد. در مثال فوق، تبدیل خطی را روی فضای $\mathbb{C}^2$ در نظر بگیریم، می‌بینیم که دو مقدار ویژه $\lambda=\pm i$ خواهد داشت.

مثال۷: فرض کنید V یک فضای برداری و $T:V\to V$ یک عملگر خطی است. در این صورت کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح <u>نیست</u>؟

۱) T دارای n مقدار ویژه است (با احتساب تکرار).

۲) اگر v یک بردار ویژه T باشد، آنگاه هر مضرب ناصفر v نیز یک بردار ویژه T است.

۳) اگر E_λ فضای ویژه متناظر با λ باشد، آنگاه هر $0\neq v\in E_\lambda$ یک بردار ویژه متناظر با λ است.

۴) یک عملگر خطی روی Vمانند T وجود دارد که مقدار ویژه نداشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در مثال قبل دیدیم که اگر V از بعد نامتناهی باشد، عملگر خطی Tروی V را می‌توان چنان پیدا کرد که مقدار یا بردار ویژه نداشته باشد. بنابراین، گزینه (۱) غلط و گزینه (۴) صحیح است. از طرفی درستی گزینه‌های ۲و۳ نیز، با توجه به نکات قبل و تعریف، بوضوح نتیجه می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۸: عملگر خطی $D:P_n\to P_n$ با ضابطه $D(f)=f'$ را در نظر بگیرید (این عملگر به عملگر مشتق‌گیری معروف است). مقادیر و بردارهای ویژه آن را در صورت وجود بدست آورید.

☑ **پاسخ:** اگر $f(x)=a$ یک تابع ثابت باشد، واضح است که $Df=(a)'=0$ و لذا $\lambda=0$ یک مقدار ویژه عملگر مشتق‌گیری است و تابع ثابت $f(x)=1$ و تمام مضارب آن بردار ویژه (تابع ویژه) متناظر با آن هستند. در واقع اگر $f(x)=1$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{matrix} D(f)=D(1)=(1)'=0 \\ 0\times 1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D(f)=0\times f=0 \Rightarrow$$

$\lambda=0$ یک مقدار ویژه و تابع $f(x)=1$ تابع ویژه متناظر با آن است.

حال فرض کنید $f(x)\in P_n$ یک چند جمله‌ای دلخواه نا صفر و $\lambda\neq 0$ به گونه‌ای باشند که λ یک مقدار ویژه و $f(x)$ تابع ویژه متناظر با آن است. در این صورت داریم:

$$D(f)=\lambda f \xrightarrow{\text{تعریف}} f'(x)=\lambda f(x) \xrightarrow{f\neq 0} \frac{f'(x)}{f(x)}=\lambda \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}}$$

$$Ln(f(x))=\lambda x+c \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } e \text{ برسانیم}} e^{Ln(f(x))}=e^{\lambda x+c}=e^c e^{\lambda x}=c'e^{\lambda x} \Rightarrow f(x)=c'e^{\lambda x}$$

واضح است که تابع $f(x)$ بدست آمده؛ در P_n قرار ندارد. پس، عملگر خطی فوق به غیر از صفر $(\lambda=0)$ مقدار ویژه‌ی دیگری ندارد و تنها مقدار ویژه آن $\lambda=0$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۴: فرض کنید V یک فضای برداری و $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد. در این صورت $\lambda=0$ یک مقدار ویژه T است، اگر و تنها اگر T منفرد باشد.

اثبات: اگر $\lambda=0$ یک مقدار ویژه T باشد، از نکته قبل نتیجه می‌شود که عملگر خطی $T-\lambda I_V=T-0I_V=T$ منفرد است. از طرف دیگر، اگر T منفرد باشد؛ به همین ترتیب نتیجه می‌شود، عملگر $T-0I_V=T$ منفرد و در نتیجه $\lambda=0$ یک مقدار ویژه T است.

تعیین مقادیر و بردارهای ویژه یک عملگر خطی با توجه به تعریف در اکثر مواقع، کاری وقت‌گیر و حوصله‌بر است. می‌توان برای این منظور از ماتریس متناظر با عملگر خطی استفاده کرد. البته واضح است که این روش فقط در مواقعی که V دارای بعد متناهی است، کاربرد دارد.

❖ **تعریف ۳:** فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ است. در این صورت $\lambda\in\mathbb{F}$ را یک مقدار ویژه ماتریس A می‌گوییم، هرگاه بردار ناصفری مانند $X\in\mathbb{F}^n$ موجود باشد؛ به طوریکه رابطه $AX=\lambda X$ برقرار شود. در چنین مواقعی بردار X را، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم.

با توجه به تعریف واضح است که λ یک مقدار ویژه ماتریس A است، هرگاه دستگاه $AX=\lambda X$ و یا دستگاه متناظر آن؛ یعنی $(\lambda I_n-A)X=o$ دارای جواب ناصفر باشد. از فصل دستگاه معادلات می‌دانیم که یک دستگاه معادلات همگن فقط در صورتی دارای جواب غیر بدیهی است؛ که ماتریس ضرایب آن وارون‌ناپذیر باشد. همچنین، یک ماتریس وارون‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن صفر شود. بنابراین، می‌توان چنین نتیجه گرفت که λ یک مقدار ویژه ماتریس A است، اگر و تنها اگر $\det(\lambda I_n-A)=\circ$ شود. پس، عبارت $\det(\lambda I_n-A)$ که یک چند جمله‌ای از درجه n برحسب λ است؛ در تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس نقش اساسی دارد.

❖ **تعریف ۴:** اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، چند جمله‌ای $P_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$ را چند جمله‌ای مشخصه A و معادله $P_A(\lambda)=\circ$ را معادله مشخصه A می‌نامند.

مثال۹: معادله مشخصه ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۳\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$\det(\lambda I_۲-A)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&\circ\\\circ&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۳\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-۲&-۱\\۱&\lambda-۳\end{bmatrix}\right)$$

$$=(\lambda-۲)(\lambda-۳)+۱=\lambda^۲-۵\lambda+۶+۱\Rightarrow\lambda^۲-۵\lambda+۷=\circ\qquad :A \text{ معادله مشخص ماتریس}$$

نتیجه۱: با توجه به توضیحات قبل؛ نتیجه می‌شود که λ یک مقدار ویژه A است، اگر و تنها اگر ریشه معادله مشخصه آن باشد. بنابراین، برای تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس، باید ریشه‌های معادله مشخصه آن را بدست آوریم و سپس برای تعیین بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ، کافی است؛ دستگاه معادلات $(\lambda I_n-A)X=o$ را حل کنیم.

مثال۱۰: چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&\circ&-۱\\۴&۱&-۴\\۲&\circ&-۱\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$P_A(\lambda)=\det(\lambda I_۳-A)=\begin{vmatrix}\lambda-۲&\circ&۱\\-۴&\lambda-۱&۴\\-۲&\circ&\lambda+۱\end{vmatrix}\ \underset{\text{به ستون دوم می‌نویسیم.}}{\overset{\text{بسط دترمینان را نسبت}}{=\!=\!=}}\ (-۱)^{۲+۲}(\lambda-۱)\begin{vmatrix}\lambda-۲&۱\\-۲&\lambda+۱\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-۱)((\lambda-۲)(\lambda+۱)+۲)=(\lambda-۱)((\lambda-۱)\lambda)=(\lambda-۱)^۲\lambda$$

برای تعیین مقادیر ویژه A، باید ریشه‌های $P_A(\lambda)$ را بدست آوریم.

مقادیر ویژه ماتریس A: $\quad P_A(\lambda)=\circ\Rightarrow(\lambda-۱)^۲\lambda=\circ\Rightarrow\lambda_۱=\circ\ ,\ \lambda_۲=۱$ (ریشه مضاعف)

ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱=\circ$ را بدست می‌آوریم. برای این منظور باید دستگاه $(\lambda_۱I_۳-A)X=-AX=o$ را حل کنیم، که جواب آن با دستگاه $AX=o$ برابر است (فرض کنید: $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$).

$$AX=o\Rightarrow\begin{bmatrix}۲&\circ&-۱\\۴&۱&-۴\\۲&\circ&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\circ\\\circ\\\circ\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}۲x-z=\circ\Rightarrow z=۲x\\۴x+y-۴z=\circ\\۲x-z=\circ\ \text{با معادله اول یکسان است}\end{array}\right\}\Rightarrow y=۴x\ ,\ z=۲x$$

بنابراین، تمام بردارهای به شکل $X=\begin{bmatrix}x\\۴x\\۲x\end{bmatrix}$ که در آن $\circ\neq x\in\mathbb{R}$ است، یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_۱=\circ$ است. برای سادگی بردار $X_\circ=\begin{bmatrix}۱\\۴\\۲\end{bmatrix}$ را به عنوان بردار ویژه متناظر با $\lambda_۱=\circ$ در نظر می‌گیریم. فضای ویژه متناظر با $\lambda_۱=\circ$ نیز، فضای تولید شده توسط این بردار است. یعنی داریم:

$$E_{\lambda_۱}=<\begin{bmatrix}۱\\۴\\۲\end{bmatrix}>\Rightarrow\dim E_{\lambda_۱}=۱$$

حال بردار ویژه متناظر با $\lambda_۲=۱$ را بدست می‌آوریم. برای این منظور باید دستگاه $(\lambda_۲I_۳-A)X=(I_۳-A)X=o$ را حل کنیم.

$$(I_3-A)X=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&0&1\\-4&0&4\\-2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+z=0\\-4x+4z=0\\-2x+2z=0\end{cases}\Rightarrow x=z \text{ و } y \text{ دلخواه}$$

با توجه به نتیجه بدست آمده در بالا، واضح است که بردارهای $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$، دو بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2=1$ می‌باشند. توجه کنید که چون λ_2 یک مقدار ویژه با دو بار تکرار (ریشه مضاعف چند جمله‌ای مشخصه) بود؛ بنابراین، می‌تواند دارای دو بردار ویژه مستقل خطی هم، باشد. در این صورت داریم:

$$E_{\lambda_2}=<\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}>\Rightarrow \dim E_{\lambda_2}=2$$

در حالت کلی اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A با k بار تکرار باشد، می‌توان نشان داد که همواره $\dim E_\lambda \le k$ است. در اینجا، ابتدا در نکته زیر به رابطه بین مقادیر و بردارهای ویژه در ماتریس‌ها و عملگرهای خطی پرداخته، و سپس پاره‌ای از خواص چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر و بردارهای ویژه در ماتریس‌ها را بررسی می‌کنیم.

نکته۵: اگر A یک ماتریس متقارن ، حقیقی و $n\times n$ باشد، آنگاه تمام مقادیر ویژه A حقیقی‌اند.

اثبات: فرض کنید λ یک مقدار ویژه A و X بردار ویژه متناظر با آن است: در اینصورت با توجه به رابطهٔ $AX=\lambda X$؛ واضح است که اگر X یک بردار حقیقی باشد، آنگاه چون A حقیقی است، λ نیز لاجرم اسکالری حقیقی خواهد بود. اگر x یک بردار مختلط باشد؛ یعنی $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n$ ، آنگاه اگر طرفین رابطهٔ $AX=\lambda X$ را در $\overline{X}^t$ ضرب کنیم ($\overline{X}^t$، ترانهاده‌ی مزدوج X است)، نتیجه می‌شود:

$$\overline{X}^tAX=\overline{X}^t\lambda X=\lambda[\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ ....\ \overline{x}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\lambda\sum_{i=1}^n\overline{x}_i\ x_i=\lambda\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2 \qquad (1)$$

(از درس توابع مختلط می‌دانیم که همواره به ازای هر $z\in\mathbb{C}$ ، $\overline{z}z=\|z\|^2$)

از طرفی، $\overline{X}^tAX$ ، یک اسکالر و در نتیجه با ترانهادهٔ خود برابر است، یعنی؛

$$\overline{X}^tAX=(\overline{X}^tAX)^t=X^tA^t\overline{X}\ \overset{\text{A متقارن است.}}{=\!=\!=}\ X^tA\overline{X} \qquad (2)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\overline{\overline{X}^tAX}=\overline{\overline{X}^t}\,\overline{AX}\ \overset{\text{A حقیقی است}}{=\!=\!=}\ X^tA\overline{X} \qquad (3)$$

از روابط ۲و۳ نتیجه می‌شود که $\overline{\overline{X}^tAX}=\overline{X}^tAX$ و این یعنی $\overline{X}^tAX$ یک اسکالر حقیقی است (فقط اعداد حقیقی با مزدوجشان برابرند). لذا با توجه به رابطه (۱)، باید $\lambda\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2$ نیز حقیقی باشد. چون $\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2$ حقیقی است؛ پس، لزوماً λ نیز حقیقی و لذا اثبات تمام است.

مثال۱۱: کدام گزینه در مورد مقادیر ویژه تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(x,y,z)=(x-y+z\ ,\ -x+2y\ ,\ x+z)$ درست است؟

۱) $\lambda_1=\sqrt{2}+1\ ,\ \lambda_{2,3}=1\pm i$

۲) $\lambda_1=\sqrt{5}+1\ ,\ \lambda_{2,3}=1\pm i$

۳) $\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i\ ,\ \lambda_3=\sqrt{3}-1$

۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۴» با کمی دقت می‌بینیم که ماتریس این تبدیل خطی تحت پایه‌ی استاندارد به صورت $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ است. چون A یک ماتریس حقیقی، متقارن و مربعی است، از نکته‌ی قبل نتیجه می‌شود که تمام مقادیر ویژه‌ی T باید حقیقی باشند. پس، هیچ‌کدام از گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ نمی‌توانند مقادیر ویژه T باشند.

نکته۶: فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی، Tیک عملگر خطی روی V و B یک پایه مرتب برای V باشد. در این صورت λ یک مقدار ویژه T است اگر و تنها اگر λ یک مقدار ویژه $[T]_B$ باشد. همچنین $v \in V$ یک بردار ویژه T است، اگر و تنها اگر $[v]_B$ (مختصات v در پایه B) یک بردار ویژه $[T]_B$ باشد.

بنابراین، با توجه به نکته فوق؛ برای تعیین مقادیر و یا بردارهای ویژه یک عملگر خطی، کافی است ماتریس آن را نسبت به یک پایه مرتب دلخواه (اصولاً برای راحتی پایه استاندارد فضا را در نظر می‌گیریم) بدست آوریم و سپس با تعیین مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس آن، با استفاده از نکته فوق، مقادیر و بردارهای ویژه عملگر خطی مورد نظر را بدست آوریم.

مثال۱۲: کدامیک از توابع زیر یک بردار ویژه تبدیل خطی $T : P_۲ \to P_۲$ با ضابطه $T(a+bx+cx^۲) = a+(۲a-b)x+(a+۲b-۲c)x^۲$ نیست.

۱) $۱+x+۲x^۲$ ۲) $۱+x+x^۲$ ۳) $x+۲x^۲$ ۴) $۲x^۲$

پاسخ: گزینه «۱» با در نظر گرفتن پایه استاندارد $B=\{۱,x,x^۲\}$ نتیجه می‌شود $[T]_B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$. به سادگی مقادیر ویژه $[T]_B$ به صورت $\lambda_۱ = ۱$، $\lambda_۲ = -۱$ و $\lambda_۳ = -۲$ بدست می‌آیند. برای تعیین بردارهای ویژه متناظر با آنها داریم.

$$\lambda_۱ = ۱: \quad (I_۳ - [T]_B)X = o \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۲x+۲y=۰ \\ -x-۲y+۳z=۰ \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

بنابراین، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه $[T]_B$ و در نتیجه $f_۱(x) = ۱+x+x^۲$ یک بردار ویژه T است.

$$\lambda_۲ = -۱: \quad (-I_۳ - [T]_B)X = o \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۲x=۰ \\ -۲x=۰ \\ -x-۲y+z=۰ \end{cases} \Rightarrow x=۰,\ z=۲y$$

بنابراین، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه $[T]_B$ و در نتیجه $f_۲(x) = ۰+x+۲x^۲ = x+۲x^۲$ یک بردار ویژه T است.

$$\lambda_۳ = -۲: \quad (-۲I_۳ - [T]_B)X = o \Rightarrow \begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۰ \\ -۲ & -۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۳x=۰ \\ -۲x-y=۰ \\ -x-۲y=۰ \end{cases} \Rightarrow x=y=۰ \text{ و } z \text{ دلخواه}$$

بنابراین، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه $[T]_B$ و در نتیجه $f_۳(x) = ۰+۰x+x^۲ = x^۲$ یک بردار ویژه T است.

توجه کنید که از قبل می‌دانیم اگر v یک بردار ویژه Tباشد، آنگاه به ازای هر اسکالر ناصفر $\alpha \in \mathbb{F}$ ، αv نیز یک بردار ویژه T است. لذا، گزینه‌های ۲،۳و۴ شامل بردارهای ویژه T هستند و گزینه «۱»، گزینه موردنظر می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

در مثال قبل دیدیم که مقادیر ویژه $[T]_B$ بدون انجام محاسبات و به سادگی بدست آمدند. این موضوع را در نکته زیر به صورت کلی بیان می‌کنیم.

نکته۷: اگر A یک ماتریس $n \times n$ و قطری یا مثلثی (بالا مثلثی یا پایین مثلثی) باشد، آنگاه مقادیر ویژه A همان درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس می‌باشند.

اثبات. فرض کنید A یک ماتریس پایین مثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن $a_{۱۱}$ ، $a_{۲۲}$، ...، a_{nn}می‌باشند. در این صورت $(\lambda I_n - A)$ نیز یک ماتریس پایین مثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با $\lambda - a_{۱۱}$ ، $\lambda - a_{۲۲}$ ،...، $\lambda - a_{nn}$است. از طرفی می‌دانیم که دترمینان یک ماتریس پایین مثلثی برابر حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن است. بنابراین، داریم:

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a_{۱۱})(\lambda - a_{۲۲})\ldots(\lambda - a_{nn}) \xrightarrow{\det(\lambda I_n - A)=۰} (\lambda - a_{۱۱})(\lambda - a_{۲۲})\ldots(\lambda - a_{nn}) = ۰ \Rightarrow \lambda = a_{ii}\ ,\ i = ۱,۲,\ldots,n$$

می‌توان استدلال‌های مشابهی، برای حالتی که A بالا مثلثی یا قطری است، به کار برد.

نکته۸: اگر A یک ماتریس $n\times n$ با چند جمله‌ای مشخصه $P_A(\lambda)$ باشد، آنگاه چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $aI+A$ برابر با $P_A(\lambda-a)$ است.

اثبات. با توجه به تعریف می‌دانیم که چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $aI+A$ برابر با $\det(\lambda I-(aI+A))$ است. پس، داریم:

$$\det(\lambda I-(aI+A))=\det((\lambda-a)I-A)\xlongequal[\text{ماتریس } A]{\text{تعریف چندجمله‌ای مشخصه}}P_A(\lambda-a)$$

قضیه۱: اگر A و B ماتریس‌های متشابهی باشند، آنگاه A و B دارای چند جمله‌ای مشخصه یکسانی هستند.

اثبات. فرض کنید A و B متشابه باشند. پس، ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد، به طوریکه $A=P^{-1}BP$ ؛ در این صورت داریم:

$$P_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)\xlongequal{A=P^{-1}BP}\det(\lambda I_n-P^{-1}BP)=\det(P^{-1}(\lambda I_n-B)P)=$$
$$\det P^{-1}.\det(\lambda I_n-B).\det P=\det(\lambda I_n-B)=P_B(\lambda)$$

بدین ترتیب اثبات تمام است.

نتیجه۲: ماتریس‌های متشابه دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.

توجه۱: عکس قضیه و نتیجه قبل برقرار نیست. یعنی ممکن است، دو ماتریس دارای مقادیر ویژه و چند جمله‌ای مشخصه یکسانی باشند، ولی متشابه نباشند.

توجه۲: در ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه یکسان است، ولی لزوماً بردارهای ویژه یکسان نیست.

نتیجه۳: فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T:V\to V$ یک عملگر خطی روی V است. در این صورت به ازای هر دو پایه مرتب B و B' برای V، ماتریس‌های $[T]_B$ و $[T]_{B'}$ دارای چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه یکسانی هستند.

اثبات. از آنجا که $[T]_B$ و $[T]_{B'}$ متشابه‌اند. مستقیماً از قضیه قبل این نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه۲: ماتریس‌های A و A^t دارای چند جمله‌ای مشخصه یکسان هستند.

اثبات. $P_\lambda(A^t)=\det(\lambda I_n-A^t)=\det((\lambda I_n-A)^t)=\det(\lambda I_n-A)=P_\lambda(A)$

بدین ترتیب، اثبات تمام است.

توجه۳: ماتریس‌های A و A^t دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند؛ ولی لزوماً بردارهای ویژه آنها یکسان نیست.

مثال۱۳: به سادگی دیده می‌شود که $\lambda=0$ یک مقدار ویژه مضاعف ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$، با بردار ویژه متناظر $X=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ است. در صورتی که بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=0$ در ماتریس $A^t=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ برابر $X'=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ است.

مثال۱۴: فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ و متشابه‌اند. در این صورت کدامیک از گزینه‌ها غلط است.

۱) A و B دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.
۲) A و B دارای بردارهای ویژه یکسانی هستند.
۳) A و B^t دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.
۴) A^t و B^t دارای چند جمله‌ای مشخصه یکسانی هستند.

پاسخ: گزینه «۲» از آنجا که A و B متشابه‌اند؛ پس A و B دارای مقادیر ویژه و چند جمله‌ای مشخصه یکسانی هستند. از طرفی چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه A و A^t، همچنین B و B^t نیز یکسان هستند. بنابراین، می‌توان چنین نتیجه گرفت که اگر A و B متشابه باشند، آنگاه چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه A، B، A^t و B^t یکسان هستند. در نتیجه گزینه‌های ۱،۳و۴ درست و گزینه (۲) نادرست است. برای مثال نقض گزینه۲، قرار دهید $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$، واضح است که A و B متشابه‌اند ($P=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$). چند جمله‌ای مشخصه A و B برابر با $P_A(\lambda)=P_B(\lambda)=\lambda^2$ و $\lambda=0$ مقدار ویژه مضاعف A و B است. ولی بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=0$ در ماتریس A برابر با $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و در ماتریس B برابر با $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ است.

با توجه به قضیه اساسی جبر؛ می‌دانیم که یک چند جمله‌ای از درجه n دارای n ریشه در میدان اعداد مختلط است (با احتساب تکرار). بنابراین، از آنجا که چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس $n\times n$، یک چند جمله‌ای از درجه n است؛ پس دارای n ریشه می‌باشد. فرض کنید ریشه‌های $P_A(\lambda)$ برابر λ_1، λ_2، ... ، λ_k به ترتیب با تکرار r_1، r_2، ...، r_k باشند.

در این صورت با توجه به تعریف $P_A(\lambda)$ داریم:

$$\det(\lambda I_n - A) = P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{r_k} \xrightarrow{\text{اگر } \lambda=0 \text{ را در دو طرف قرار دهیم.}}$$

$$\det(-A) = (0-\lambda_1)^{r_1}(0-\lambda_2)^{r_2}\dots(0-\lambda_k)^{r_k} = (-1)^{r_1+r_2+\dots+r_k}(\lambda_1^{r_1}\times\lambda_2^{r_2}\times\dots\times\lambda_k^{r_k}) \qquad (1)$$

از طرفی، چون $P_A(\lambda)$ یک چند جمله‌ای از درجه n و دارای n ریشه است؛ پس $r_1+r_2+\dots+r_k=n$ و در نتیجه معادله (۱) نتیجه می‌دهد:

(با احتساب تکرار ریشه‌ها)
$$\det(-A) = (-1)^n \det A = (-1)^n(\lambda_1^{r_1}.\lambda_2^{r_2}\dots\lambda_k^{r_k}) = (-1)^n\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{r_i} \Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

بنابراین، چنین نتیجه می‌شود که دترمینان یک ماتریس برابر با حاصلضرب مقادیر ویژه آن ماتریس است.

نکته۹: دترمینان یک ماتریس $n\times n$، مانند A برابر با حاصلضرب n مقدار ویژه آن است.

نکته۱۰: اگر A یک ماتریس $n\times n$ با چند جمله‌ای مشخصه $P_A(\lambda)$ باشد، آنگاه:
$$\det A = (-1)^n P_A(0)$$

اثبات. بنابر تعریف داریم:
$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \xrightarrow{\lambda=0} P_A(0) = \det(-A) = (-1)^n\det A \Rightarrow \det A = (-1)^n P_A(0)$$

نتیجه۴: ماتریس $A_{n\times n}$ وارون‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه آن صفر باشد.

اثبات. A وارون‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر $\det A = 0$ باشد و بنابر رابطه $\det A = (-1)^n P_A(0)$، $\det A = 0$ است، اگر و تنها اگر $P_A(0)=0$ باشد. همچنین $P_A(0)=0$ است، اگر و تنها اگر $\lambda=0$ یکی از ریشه‌های $P_A(\lambda)$ باشد، یعنی $\lambda=0$ یکی از مقادیر ویژه A باشد.

البته اگر از رابطه $\det A = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ استفاده کنیم، اثبات کاملاً واضح است.

مثال۱۵: اگر $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda + 4$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد، آنگاه $\det A$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -4

پاسخ: گزینه «۴» از آنجا که $P_A(\lambda)$ یک چند جمله‌ای از درجه ۳ است، بنابراین، A یک ماتریس 3×3 است و داریم:

$$\det A = (-1)^3 P_A(0) = -4$$

نکته۱۱: اگر $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$ چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ و λ_1، λ_2، ...، λ_n مقادیر ویژه A باشند، آنگاه داریم:

$$\text{I})\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = -a_{n-1} \qquad \text{II})\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = (-1)^n a_0 \qquad \text{III})\ \sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j = a_{n-2}$$

اثبات: چون λ_1، ... ، λ_n مقادیر ویژه A هستند؛ بنابراین داریم:

$$P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n) = \lambda^n - (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\lambda^{n-1} + (\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j)\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \qquad (1)$$

بنابراین، اگر فرض کنیم که $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_0$ باشد، با توجه به رابطه (۱) موارد I، II و III بدست می‌آیند.

مثال۱۶: اگر $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$ چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد، آنگاه با در نظر گرفتن λ_1، λ_2، λ_3 و λ_4 به‌عنوان مقادیر ویژه A، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.
$$\alpha = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4$$

پاسخ: با کمی دقت می‌توان فهمید که $\alpha = \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$ و در نتیجه، بنابر نکته قبل α برابر با ضریب x^2 در چند جمله‌ای مشخصه است. پس داریم.

$$\alpha = -3$$

توجه کنید که محاسبهٔ مقادیر ویژه و سپس α مستلزم صرف وقت و حوصله زیادی می‌باشد.

مثال۱۷: اگر چند جمله‌ای مشخصه A برابر با $f(x) = x^3 - 2x + 1$ باشد، آنگاه مجموع مقادیر ویژه A برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) $2+\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: با توجه به نکته قبل چون ضریب x^2 در چند جمله‌ای مشخصه صفر است؛ پس، مجموع مقادیر ویژه A صفر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های $f(x)$ و جمع کردن آنها با هم، که وقت‌گیر و حوصله‌بر است.

مثال۱۸: اگر چند جمله‌ای مشخصه A برابر $f(x)=x^3+x^2-x+2$ باشد، آنگاه مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A-2I$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه «۲» از قبل می‌دانیم که اگر چند جمله‌ای مشخصه A برابر $f(x)$ باشد، آنگاه چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $A+aI$ برابر $f(x-a)$ است. بنابراین، با توجه به داده‌های مسأله، چند جمله‌ای مشخصه $A-2I$ برابر است با:

$$g(x)=f(x+2)=(x+2)^3+(x+2)^2-(x+2)+2=x^3+7x^2+15x+12$$

لذا، مجموع مقادیر ویژه $A-2I$ با توجه به نکته قبل برابر ضریب x^2 در چند جمله‌ای مشخصه آن، یعنی برابر ۷ است.

پیشتر دیدیم که مقادیر ویژه و چندجمله‌ای مشخصه در ماتریس‌های متشابه یکسان است. همچنین، در ماتریس‌های A و A^t نیز یکسانند. حال به رابطه بین مقادیر ویژه در ماتریس A و توان‌های آن یعنی A^k و A^{-1} می‌پردازیم.

نکته۱۲: اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه به ازای هر $k\in\mathbb{N}$، λ^k یک مقدار ویژه ماتریس A^k است.

اثبات: فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس A است. پس، بنابر تعریف بردار ناصفر X وجود دارد؛ به طوریکه رابطه $AX=\lambda X$ برقرار باشد. در این صورت داریم:

$$A^kX=A^{k-1}(AX)\xlongequal{AX=\lambda X}A^{k-1}(\lambda X)=\lambda(A^{k-1}X)\Rightarrow A^kX=\lambda(A^{k-1}X) \qquad (1)$$

حال اگر رابطه (۱) را k بار پیاپی استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$A^kX=\lambda(A^{k-1}X)=\lambda^2(A^{k-2}X)=\ldots=\lambda^{k-1}(AX)=\lambda^kX$$

بنابراین، λ^k یک مقدار ویژه ماتریس A^k است.

نکته دیگری که از اثبات فوق نتیجه می‌شود این است که؛ اگر X یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ در ماتریس A باشد، آنگاه X بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ^k در ماتریس A^k نیز هست.

مثال۱۹: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$. مقادیر ویژه A^{1391} را به دست آورید؟

پاسخ: با توجه به نکته فوق کافی است مقادیر ویژه A را به دست آورده و به توان ۱۳۹۱ برسانیم.

$$\det(\lambda I-A)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\1&\lambda-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow(\lambda-1)^2+2=0\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+1+2=0$$

$$\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i\xlongequal{\text{تبدیل به فرم قطبی}}2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

بنابراین، مقادیر ویژه ماتریس A^{1391} برابرند با:

$$(2e^{\pm i\frac{\pi}{3}})^{1391}=2^{1391}*e^{\pm i\frac{1391\pi}{3}}=2^{1391}e^{\pm i(462\pi+\frac{5\pi}{3})}=2^{1391}e^{\pm i\frac{5\pi}{3}}\xlongequal{\text{فرم دکارتی}}2^{1391}(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2^{1390}(1\pm\sqrt{3}i)$$

نکته۱۳: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ و $a\in\mathbb{F}$ یک اسکالر دلخواه ناصفر باشد. در این صورت λ مقدار ویژه A است، اگر و تنها اگر، $a\lambda$ مقدار ویژه aA باشد.

اثبات. λ یک مقدار ویژه A است، اگر و تنها اگر بردار ناصفری مانند X وجود داشته باشد؛ به طوریکه رابطه $AX=\lambda X$ برقرار شود و این رابطه معادل با رابطه $(aA)X=(a\lambda)X$، به ازای هر اسکالر ناصفر $a\in\mathbb{F}$ می‌باشد. این رابطه نیز برقرار است، اگر و تنها اگر $a\lambda$ یک مقدار ویژه ماتریس aA با بردار ویژه متناظر X باشد. بدین ترتیب اثبات تمام است.

می‌توان از اثبات فوق چنین نتیجه گرفت که اگر X یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ در ماتریس A باشد، آنگاه X، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $a\lambda$ در ماتریس aA نیز می‌باشد. از ادغام دو نکته فوق، نکته زیر حاصل می‌شود که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

نکته۱۴: اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A با بردار ویژه متناظر X و $p(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه از درجه m باشد، آنگاه $p(\lambda)$ یک مقدار ویژه ماتریس $p(A)$ با بردار ویژه متناظر X است.

مثال۲۰: فرض کنید مجموعه $\{1,-1,0\}$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند. در این صورت کدامیک از مجموعه‌های زیر مقادیر ویژه ماتریس $B=A^2-A$ را نمایش می‌دهند.

۱) $\{1,-1,0\}$ ۲) $\{0,-2\}$ ۳) $\{0,2\}$ ۴) $\{0,1,2\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر قرار دهیم $p(x)=x^{۲}-x$ ، واضح است که $B=p(A)$ ، بنابراین طبق نکته قبل مقادیر ویژه ماتریس B برابر است با:
$\{p(۰),p(۱),p(-۱)\}=\{۰,۰,۲\}=\{۰,۲\}$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۱: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۲&۱&۰\\۱&۲&۳\end{bmatrix}$ است. در این صورت بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه در ماتریس $B=۳A^{۳}-A^{۲}+۲I_{۳}$ برابر است با:

۱) $\begin{bmatrix}۰\\۱\\۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱\\۱\\۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰\\۰\\\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\۰\\۱\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آنجا که A یک ماتریس پایین مثلثی است؛ بنابراین، مقادیر ویژه A همان درایه‌های روی قطر اصلی A می‌باشند. یعنی $\lambda_{۱}=۱$ و $\lambda_{۲}=۳$ (با مرتبه تکرار ۲) مقادیر ویژه A هستند. اگر قرار دهیم $p(x)=۳x^{۳}-x^{۲}+۲$ ، داریم $B=p(A)$ و لذا مقادیر ویژه B برابر با $\{p(\lambda_{۱}),p(\lambda_{۲})\}$ یعنی مجموعه $\{۴,۷۴\}$ است. پس، بزرگترین مقدار ویژه B ، $\lambda=۷۴$ است که متناظر با مقدار ویژه $\lambda_{۲}=۳$ در ماتریس A است.
از طرفی می‌دانیم که اگر X، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ در ماتریس A باشد، آنگاه X، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $p(\lambda)$ در ماتریس $p(A)$ نیز می‌باشد. پس، کافی است؛ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_{۲}=۳$ در ماتریس A را بدست آوریم. برای این منظور داریم:

$$(\lambda_{۲}I_{۳}-A)X=o\Rightarrow\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\-۲&۲&۰\\-۱&-۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-۲x+۲y=۰\\-x-۲y=۰\end{cases}\Rightarrow x=y=۰ \text{ و } z \text{ دلخواه}$$

بنابراین با در نظر گرفتن $z=a$ که a یک اسکالر ناصفر دلخواه است، هر بردار به صورت $X=\begin{bmatrix}۰\\۰\\a\end{bmatrix}$ ؛ یک بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه در ماتریس B می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۲: فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ ، $\{۱,-۱\}$ دو مقدار ویژه A و $\det A=۲$ است. در این صورت بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $B=۳A^{۲}-A+I$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنید مقدار ویژه سوم A برابر a باشد. در این صورت از آنجا که مقادیر ویژه A همان ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه A هستند؛ داریم:
$P_{A}(\lambda)=(\lambda-۱)(\lambda+۱)(\lambda-a)$
از طرفی چون A یک ماتریس ۳×۳ است؛ دترمینان A برابر با $(-۱)^{۳}P_{A}(۰)$ است. پس؛ $\det A=۲=(-۱)^{۳}(۰-۱)(۰+۱)(۰-a)\Rightarrow a=-۲$
بنابراین، مقادیر ویژه A برابر با $\{۱,-۱,-۲\}$ می‌باشند و در نتیجه مقادیر ویژه B برابر با $\{۳,۵,۱۵\}$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۱۵: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ و عملگر خطی $T:M_{n\times n}\to M_{n\times n}$ دارای ضابطه $T(B)=AB$ است. در این صورت مقادیر ویژه A و T یکسان هستند.

اثبات. فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس A با بردار ویژه متناظر X باشد (یعنی $AX=\lambda X$). ماتریس $B_{n\times n}$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که تمام ستون‌های آن برابر با X باشند. یعنی $B=[XX......X]_{n\times n}$ ؛ در اینصورت داریم:

$$T(B)=AB=A[XX...X]=[AX\ AX\ .....\ AX]\ \underline{\underline{AX=\lambda X}}\ [\lambda X\ \lambda X\ .....\ \lambda X]=\lambda[XX.....X]=\lambda B$$

بنابراین، λ یک مقدار ویژه عملگر خطی T با بردار ویژه متناظر B است. حال، فرض کنید که λ یک مقدار ویژه عملگر خطی T و ماتریس ناصفر B ، بردار ویژه متناظر با آن باشد. ثابت می‌کنیم λ لزوماً یک مقدار ویژه A نیز می‌باشد.

فرض کنید $B^{۱},B^{۲},.....,B^{n}$ ستون‌های ماتریس B هستند (یعنی $B=[B^{۱}B^{۲}.....B^{n}]$). در اینصورت، از آنجا که B بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژه λ در عملگر خطی T است؛ نتیجه می‌شود:

$$T(B)=\lambda B\ \Rightarrow\ AB=\lambda B\ \Rightarrow\ A[B^{۱}B^{۲}.....B^{n}]=\lambda[B^{۱}B^{۲}.....B^{n}]\ \Rightarrow\ [AB^{۱}AB^{۲}.....AB^{n}]=[\lambda B^{۱}\lambda B^{۲}.....\lambda B^{n}]$$