



مدرسار شریف

فصل اول

«مفاهیم اولیه در مطالعه خواص مکانیکی مواد»

تعاریف اولیه

الف) نیرو: نیرو توسط اثر متقابل دو یا چند جسم بوجود می‌آید و مورد سنجش قرار می‌گیرد. دو نوع نیرو وجود دارد: یکی نیروهایی که بر سطح جسم اثر می‌گذارند و دیگری، نیروهایی که روی تمام ذرات جسم اثر می‌کنند. مانند نیروی ثقلی و نیروی مغناطیسی.

ب) تنش: عبارتست از مقدار نیروی اعمال شده در واحد سطح.

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح اثر}}$$

(۱-۱)

تنش دو نوع است:

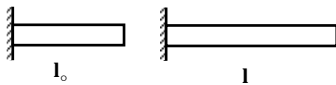
۱- تنش مهندسی عبارت از خارج قسمت نیرو بر سطح مقطع اولیه نمونه:

$$S = \frac{F}{A_0} \quad (2-1)$$

۲- تنش حقیقی که عبارت از خارج قسمت نیرو بر سطح مقطع لحظه‌ای می‌باشد:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3-1)$$

ج) کرنش: عبارتست از افزایش طول در واحد طول قطعه‌ای که تحت اثر تنش قرار گرفته است.



$$e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (4-1)$$

e برابر میزان کرنش مهندسی (Engineering strain) ایجاد شده در قطعه است.

کرنش دیگری به نام کرنش حقیقی (True strain) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} + \frac{l_3 - l_2}{l_2} + \dots$$

عبارتست از مجموعه کرنش‌های جزئی ایجاد شده در قطعه، از شروع اعمال نیرو تا پایان.

در نهایت وقتی $l_1 - l_0$ خیلی کوچک باشد، خواهیم داشت:

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (5-1)$$

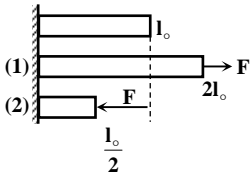
نکته ۱: ارتباط میان کرنش مهندسی و کرنش حقیقی را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\epsilon = \ln(1 + e)$$

(۶-۱)



مثال ۱: دو میله به طول l_0 و با سطح مقطع یکسان از یک جنس موجود است. طول یکی از آنها را تحت اثر نیروی کششی به دو برابر و طول میله دوم را تحت اثر نیروی فشاری بر نصف تقلیل می‌دهیم. در هر یک از حالات فوق، مقادیر کرنش مهندسی و کرنش حقیقی را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید.

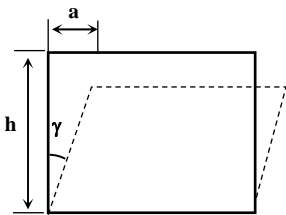


✓ پاسخ: برای حالت اول: $\epsilon_1 = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{2l_0}{l_0} = \ln 2$, $e_1 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{2l_0 - l_0}{l_0} = 1$

برای حالت دوم: $\epsilon_2 = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0/2}{l_0} = -\ln 2$, $e_2 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l_0/2 - l_0}{l_0} = -0.5$

برای حالت دوم:

(د) تغییر شکل برشی: عبارتست از مقدار تغییر زاویه‌ای که تحت اثر نیروی برشی در جسم ایجاد می‌شود.



$$\text{tg} \gamma = \frac{a}{h} \approx \gamma$$

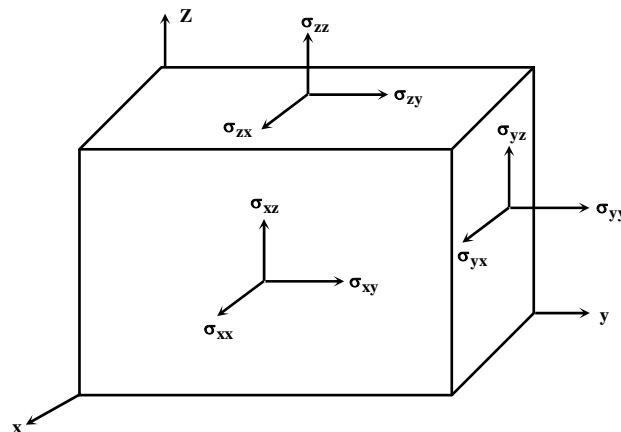
(۷-۱)

بررسی تنش‌های اعمالی در حالات هندسی مختلف

معمولاً تنش‌های اعمالی بر یک نقطه از جسم را می‌توان به صورت یک تانسور نشان داد:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (۸-۱)$$

در این حالت، تنش‌های اعمالی بر روی یک نقطه در تعادل استاتیکی به سر می‌برند بنابراین: در این رابطه σ_{xx} (تنش اعمالی عمود بر صفحه X یا Z) و σ_{yy} (تنش اعمالی عمود بر صفحه Y یا Z) و σ_{zz} (تنش اعمالی عمود بر صفحه X یا Y) جهت X و جهت Y و جهت Z است که اندیس اول تانسور نشان دهنده‌ی صفحه اعمالی تنش و اندیس دوم تانسور جهت تنش اعمالی را بیان می‌کند.



نکته ۲: برای مشخص شدن وضعیت اعلام تنش، تنها کافی است، ۶ مؤلفه تنش را در اختیار داشته باشیم.

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \end{cases}$$

در حالتی که بخواهیم، مقادیر تنش را بر روی سطح قاطع المان بدست آوریم، لازم است راستاهای آن در فضا توسط کسینوس‌های هادی آن مشخص گردند:

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1 \quad (9-1)$$

بدین ترتیب تنشهای اعمالی بر یک صفحه در یک المان به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$S_x = K \sigma_x + L \tau_{yx} + m \tau_{zx} \quad (10-1)$$

$$S_y = K \tau_{xy} + L \sigma_y + m \tau_{zy}$$

$$S_z = K \tau_{xz} + L \tau_{yz} + m \sigma_z$$

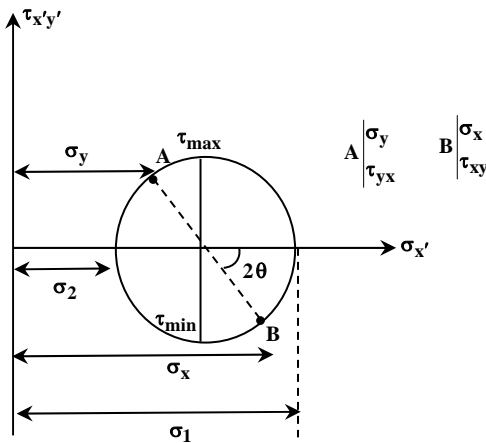
مثال ۲: اگر تانسور تنش در یک نقطه از جسمی به صورت $\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ باشد مقدار تنش نرمال در صفحه‌ای که با محورهای مختصات اصلی

زوایای مساوی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{12 \text{ Kgf}}{\text{mm}^2} \quad (4) \quad \frac{9 \text{ Kgf}}{\text{mm}^2} \quad (3) \quad \frac{6 \text{ Kgf}}{\text{mm}^2} \quad (2) \quad \frac{3 \text{ Kgf}}{\text{mm}^2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۲» از آنجاییکه تنش نرمال با صفحه مختصات زوایای مساوی می‌سازد یعنی $L = m = n$ و $L^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(6 + 3 + 9) = 6 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2}$$



محاسبه تنش‌های اصلی به کمک دایره مور در حالت دو و سه بعدی

تنشهای اصلی در حالت دو بعدی یا صفحه‌ای با استفاده از دایره مور قابل محاسبه می‌باشند.

هر نقطه بر روی دایره مور نشان دهنده‌ی تنش‌های وارده بر جسم است به این ترتیب که طول و عرض هر نقطه از دایره مور به ترتیب بیانگر تنش‌های نرمال و برشی اعمالی بر صفحات 0° جسم با بردار واحد n می‌باشد.

با توجه به شکل روبرو می‌توان روابط مربوط به تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 و تنش σ_{\max} را به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11-1)$$

$$\tau_{\min}, \tau_{\max} = \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2} = \pm R \quad (\text{شعاع دایره مور}) \quad (12-1)$$

در حالت‌های سه‌بعدی، تنشهای اصلی به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0 \quad (13-1)$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

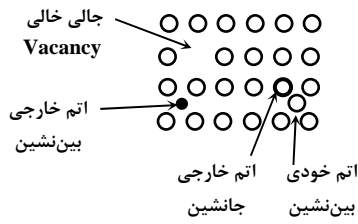
$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$



انواع معایب موجود در شبکه کریستالی

عیوب نقطه‌ای



حضور هر گونه عیب در شبکه کریستالی موجب افزایش بی‌نظمی سیستم و در نهایت موجب افزایش انرژی آن می‌گردد. انواع عیوب نقطه‌ای در شکل مقابل وجود دارد: برای اینکه یک شبکه کریستالی دارای حداقل میزان انرژی باشد، ضروری است تعداد معینی جای خالی در آن ایجاد شود. تعداد جاهای خالی که موجب ایجاد یک تعادل ترمودینامیکی در سیستم می‌گردند از عبارت زیر بدست می‌آید:

$$n_v = n_o \exp\left(\frac{-E}{KT}\right)$$

(۲-۲)

که در آن، n_v : تعداد جاهای خالی؛ n_o : تعداد محل استقرار اتمها؛ E : انرژی لازم برای ایجاد یک جای خالی؛ K : ثابت بولتزمن؛ T : درجه حرارت؛ خواهد بود. از طرف دیگر، وجود اتمهای بین‌نشین و جانشین در شبکه کریستالی (Fe-C و Al-Cu)، به دلیل اختلاف در شعاع اتمی میان آنها، موجب ایجاد یک میدان الاستیک در اطراف آنها می‌گردد که به افزایش بی‌نظمی سیستم منجر می‌شود.

مثال ۳: اگر غلظت (تعداد) جاهای خالی برای آلومینیوم در دمای 600°C برابر $1/6 \times 10^7$ باشد، تعداد محل‌های استقرار اتمها را پیدا کنید.

$$E = 0.62\text{eV}, K = 86/2 \times 10^{-6} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$$

پاسخ: با استفاده از رابطه اخیر داریم:

$$n_v = n_o \exp\left(-\frac{E}{KT}\right) \Rightarrow 1/6 \times 10^7 = n_o \exp\left(\frac{-0.62}{86/2 \times 10^{-6} \times 873}\right) \Rightarrow n_o = 6/0.5 \times 10^{10}$$

عیوب خطی یا نابجایی‌ها

می‌دانیم که یک کریستال از یک سری صفحات اتمی موازی هم تشکیل شده است. هرگاه یکی از این صفحات ناقص باشد، مثلاً به صورت نیم صفحه قرار بگیرد، به دلیل وجود خاصیت الاستیک در شبکه، اتمهای اطراف نیم صفحه جابجا می‌شوند تا بتوانند نقص را جبران کنند. از این نقص با عنوان نابجایی یاد می‌شود.

انواع نابجایی‌ها عبارتند از:

۱- نابجایی پله‌ای یا ساده. ۲- نابجایی پیچی. ۳- نابجایی مخلوط یا ترکیبی. خواص و ویژگیهای نابجایی‌ها در ادامه بیان می‌گردد.

عیوب سطحی

عیوبی که بر روی یک سطح امتداد داشته باشند، از آن به عنوان عیوب سطحی یاد می‌شود و عموماً به سه نوع زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

الف) مرز بین دانه‌ها: مرز دانه‌ها عبارتست از مناطقی که دانه‌ها را به یکدیگر متصل می‌کنند. در صورتیکه زاویه انحراف میان دو دانه کمتر از 10° درجه باشد، سطوح مربوطه عموماً ترکیبی از نابجایی ساده و پیچی هستند. اما در شرایطی که زاویه انحراف بیشتر از 10° درجه باشد، تصور قرارگیری نامنظم اتمهای بین دانه‌ها بیشتر مورد پذیرش است.

نکته ۳: ارتباط میان اختلاف جهت در یک مرز فرعی یا کم زاویه با بردار برگرز نابجایی‌ها از رابطه زیر تبعیت می‌کند، که در آن θ برابر اختلاف جهت مرز فرعی، D فاصله نابجایی و b بردار برگرز است.

$$\theta = 2 \text{tg}^{-1} \frac{b}{2D}$$

(۳-۲)

مثال ۴: در یک نمونه آلومینیومی با بردار برگرز 3nm ، فاصله نابجایی‌ها در مرز دانه کم زاویه برابر $5/5\text{nm}$ است. اختلاف جهت (misorientation) در این مرز دانه چقدر است؟

$$12/48^\circ \quad (4)$$

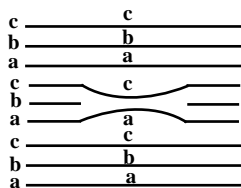
$$6/24^\circ \quad (3)$$

$$3/12^\circ \quad (2)$$

$$1/56^\circ \quad (1)$$

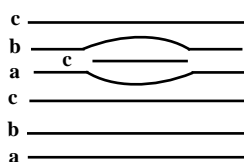
$$\Rightarrow \theta = 2 \text{tg}^{-1} \frac{b}{2D} = 2 \text{tg}^{-1} \frac{0/3}{2 \times 5/5} = 3/12^\circ$$

پاسخ: گزینه «۲» از رابطه ۳-۲ داریم:



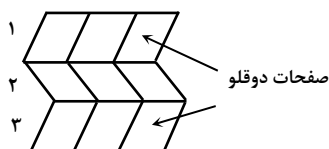
صفحه b کم است.

abca bc
HCP



abcabc

صفحه اضافی است.



ب) نقص در چیده شدن اتم‌ها: هرگونه انحراف در ترتیب چیده شدن اتمها بر روی صفحات متراکم کریستالی (FCC, HCP) به عنوان نقص در چیده شدن اتمها شناخته می‌شود. برای مثال در شبکه FCC، ترتیب چیده شدن صفحات متراکم از نوع {111} به دو شکل ممکن است به هم بخورد.

- در حالت اول، در ترتیب قرارگیری صفحات، یک صفحه وجود ندارد، که به این نوع نقص Intrinsic Stacking Fault می‌گویند.

در این شرایط، برای چهار لایه اتمی در میان شبکه FCC؛ شبکه HCP بوجود آمده است.

- در حالت دوم، در ترتیب قرارگیری صفحات، یک صفحه اضافی وجود دارد، که به این نوع نقص Extrinsic Stacking Fault می‌گویند.

چون بالا و پایین صفحات اضافه شده، a و b قرار دارد، تنها صفحه C می‌تواند بوجود آید.

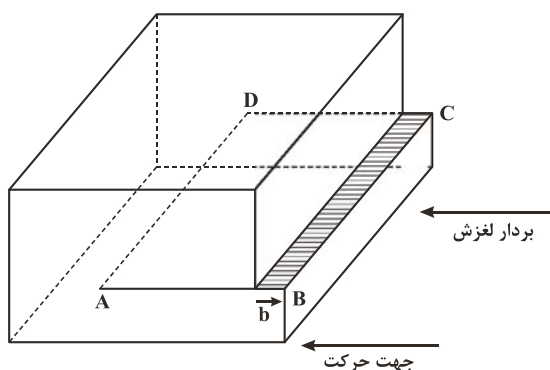
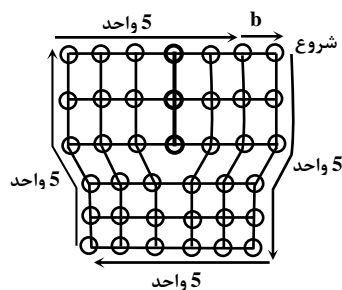
ج) مرز دوقلوها: یک بلور را وقتی می‌گویند دوقلویی شده است که یک بخش از آن، تصویر آینه‌ای بخش دیگر باشد و یکی از روش‌های تغییر شکل پلاستیک می‌باشد. صفحات 1 و 3 نسبت به صفحه 2 حالت دوقلویی دارد.

ویژگی‌های نابجایی‌ها

تغییر شکل برگشت‌ناپذیر یا پلاستیک مواد کریستالی، در آغاز بوسیله حرکت نواقص کریستالی رخ می‌دهد که نابجایی نامیده می‌شود. افزایش تنش لازم برای تغییر شکل پلاستیک بیشتر، ناشی از برخورد بین نابجایی‌های بسیاری است که آن را کار سختی می‌نامند. نابجایی‌های موجود در بلور، ممکن است در نتیجه خطاهای رشد در هنگام انجماد باشند، اما روی هم رفته، آنها بوسیله منابع نابجایی بوجود می‌آیند که تحت تنش عمل کرده و نابجایی‌ها را به طور پیاپی تولید می‌کنند.

ویژگی‌های نابجایی پله‌ای (ساده)

نابجایی پله‌ای یا ساده از اضافه شدن یک نیم‌صفحه به بلور بوجود می‌آید. در صورتیکه این نیم‌صفحه از قسمت بالای کریستال وارد شده باشد (مطابق شکل)، لبه پایین نیم‌صفحه اضافی به عنوان نابجایی پله‌ای مثبت تعریف می‌شود. اگر این نیم‌صفحه از پایین کریستال وارد شده باشد در این صورت نابجایی پله‌ای منفی خواهیم داشت.



نکته ۴: میزان انحراف ایجاد شده در شبکه کریستالی بوسیله یک نابجایی را به کمک بردار برگرز مشخص می‌کنند.



در یک شبکه کامل، مدار برگزری که از نقطه شروع حرکت کرده و با یک تعداد مساوی از بردار شبکه ولی با جهت مخالف در جهت افقی و عمودی پیشرفت کرده است به نقطه شروع ختم نمی‌شود. بردار لازم برای بسته شدن این مدار، بردار برگزری نابجایی b نامیده می‌شود و نشان‌دهنده اندازه و جهت لغزش نابجایی است.

نکته ۵: در نابجایی پله‌ای، همواره جهت بردار برگزری b نسبت به خط نابجایی (AD) عمود است و همچنین حرکت نابجایی لبه‌ای موازی با بردار برگزری می‌باشد.

نکته ۶: معمولاً تغییر شکل پلاستیک ناشی از حرکت نابجایی ساده (پله‌ای) محدود به صفحه‌ای است که در آن خط و بردار برگزری نابجایی تعریف می‌شود. این حرکت در همان جهت b (جهت لغزش) صورت می‌گیرد.

مثال ۵: جهت خط نابجایی لبه‌ای $\langle 01\bar{1} \rangle$ و $\frac{a}{4} < 110 \rangle$ واقع در صفحه (۱۱۱) چه مقدار می‌باشد؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۱۱۰ (۳) ۱۰۱ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱» جهت خط نابجایی لبه‌ای همواره بر بردار برگزری عمود است. در میان گزینه‌ها، تنها گزینه «۱» این شرط را دارد.

خط نابجایی عمود بر بردار برگزری است.
 $\cos \theta = \frac{0-1+1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = 0$

خط نابجایی داخل صفحه‌ی (۱۱۱) است.
 $\cos \theta = \frac{2-1-1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0$

مثال ۶: طول کوچک‌ترین بردار برگزری در جهت [۱۱۱] در شبکه آهن چقدر است؟

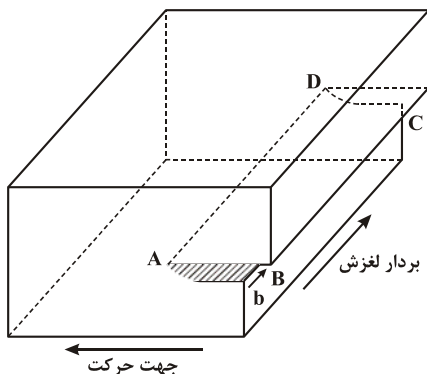
- (۱) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (۲) a (۳) $a\sqrt{3}$ (۴) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» شبکه آهن از نوع BCC بوده و در این سیستم، جهت [۱۱۱] متراکم‌ترین جهت لغزش است. لذا در این جهت بردار برگزری برابر $2r$ است.

در فلزات BCC $a\sqrt{3} = 4r$

با قرار دادن مقدار b خواهیم داشت:
 $a\sqrt{3} = 2b \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ویژگی‌های نابجایی پیچی



این نقص با جابجایی یک قسمت از کریستال نسبت به قسمت دیگر بوجود می‌آید. مدار برگزری اطراف یک نابجایی پیچی شکل مارپیچی دارد. نابجایی پیچی راستگرد عبارتست از چرخش 36° در جهت عقربه ساعت مارپیچی که به اندازه یک بردار برگزری پیشرفت کند و اگر این نابجایی چرخش 36° در خلاف جهت عقربه ساعت بدست آید نابجایی پیچی چپگرد می‌باشد.

نکته ۷: در نابجایی پیچی، همواره جهت بردار برگزری موازی خط نابجایی (AD) می‌باشد.

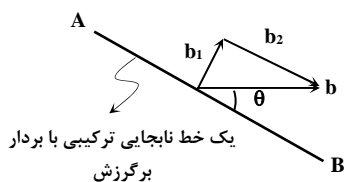
نکته ۸: جهت لغزش نابجایی پیچی با بردار برگزری موازی است اما جهت حرکت نابجایی پیچی عمود بر بردار برگزری خواهد بود.

مثال ۷: کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند جهت حرکت نابجایی پیچی با بردار برگزری $\langle 110 \rangle$ باشد؟

- (۱) $01\bar{1}$ (۲) $1\bar{1}0$ (۳) ۱۰۱ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» جهت حرکت نابجایی پیچی همواره عمود بر بردار برگزری می‌باشد. لذا حاصلضرب داخلی آنها صفر است. تنها گزینه ۲ این شرط را دارد.

نکته ۹: برای نابجایی پیچی نمی‌توان صفحه لغزش واحد تعریف کرد. از آنجاییکه خط نابجایی و بردار برگرز موازی یکدیگرند، لذا تعداد زیادی صفحه لغزش برای آنها تعریف می‌گردد و مجاز به حرکت بر روی صفحه‌های بسیاری است که بردار برگرز در آنها قرار می‌گیرد. در واقع هنگامی که نابجایی پیچی به مانع برخورد می‌کند و نمی‌تواند به حرکت خود ادامه دهد در جهت یکی از صفحات لغزش، ادامه مسیر می‌دهد.



ویژگی‌های نابجایی مختلط یا ترکیبی

نابجایی مختلط یا ترکیبی از مجموع دو حرکت که یکی برای تشکیل نابجایی پله‌ای و دیگری برای تشکیل نابجایی پیچی است، ایجاد می‌شود. با توجه به شکل مقابل، خط نابجایی ترکیبی از روی هم گذاشتن یک نابجایی ساده با بردار برگرز b_1 و یک نابجایی پیچی با بردار برگرز b_2 تشکیل می‌شود.

$$b_1 = b \sin \theta \quad (۴-۲)$$

$$b_2 = b \cos \theta \quad (۵-۲)$$

نکته ۱۰: بردار برگرز نابجایی ترکیبی با خط نابجایی زاویه بین 0 تا 90° درجه می‌سازد. $0 < \theta < 90$

مثال ۸: نابجایی با بردار برگرز $\vec{b} = [11\bar{1}]$ و خط نابجایی $\vec{t} = [211]$ از چه نوع است؟

- (۱) پیچی (۲) لبه‌ای (۳) مخلوط (۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» در نابجایی ساده، بردار برگرز نابجایی بر خط نابجایی عمود است، در نابجایی پیچی بردار برگرز و خط نابجایی با هم موازی‌اند و در نابجایی ترکیبی، بردار برگرز نابجایی با خط آن زاویه بین 0 تا 90° می‌سازند.

$$\cos \theta = \frac{2+1-1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 62^\circ$$

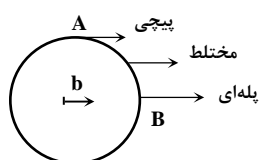
لذا:

پس نابجایی مربوطه، نابجایی مخلوط (ترکیبی) است.

نکته ۱۱: در نابجایی ترکیبی همانند نابجایی پله‌ای، بردار برگرز با خط نابجایی یک صفحه لغزش را مشخص می‌کند.

نکته ۱۲: نابجایی در داخل شبکه نمی‌تواند انتهای آزاد داشته باشد: یا به سطح بلور می‌رسد (مرزدانه‌ها) و یا با نابجایی‌های دیگر تشکیل گره می‌دهد.

$$\sum \vec{b}_i = 0 \quad \text{شرط تشکیل گره} \quad (۶-۲)$$



نکته ۱۳: در یک حلقه نابجایی، بردار برگرز ثابت است ولی موقعیت آن نسبت به حلقه متغیر است. (در واقع، هر سه

نوع نابجایی در آن وجود دارد).

مماس در نقطه A موازی با بردار برگرز است بنابراین نابجایی در این نقطه پیچی است. اما در نقطه‌ی B عمود بر بردار برگرز است پس در نقطه‌ی B نابجایی پله‌ای است.

مقاومت شبکه به حرکت نابجایی (تنش پیرلز - نابارو)

برای حرکت نابجایی در داخل شبکه، بویژه زمانی که از موقعیت نامتقارن عبور کند، مقداری نیرو لازم است که از آن به عنوان نیروی پیرلز - نابارو یاد می‌شود که مقدار آن با حرکت نابجایی در داخل شبکه به طور تناوبی تغییر می‌کند.

نکته ۱۴: تنش پیرلز به عرض نابجایی بستگی دارد بدین معنی که هر چه عرض نابجایی بیشتر باشد (مثلاً در FCC و HCP)، تنش پیرلز در آنها کمتر است و هر چه عرض نابجایی کمتر باشد (مثل کریستالهای یونی و کووالانت، BCC)، تنش پیرلز بیشتر خواهد بود.

مکانیزم‌های تغییر شکل پلاستیک

تغییر شکل در مواد کریستالی، اصولاً بوسیله لغزش در صفحه‌ها و راستاهای ویژه‌ای صورت می‌گیرد. هنگامی که لغزش محدود می‌شود، فرآیند دوقلوبی در تغییر شکل دخالت می‌کند. لذا، مکانیزم‌های اصلی تغییر شکل پلاستیک لغزش و دو قلوبی هستند.

کج مثال ۲۰: نابجایی‌های متوقف شده در کریستال مس را در نظر بگیرید. اگر تنش سیلان بوسیله تنش لازم برای فعال کردن یک منبع فرانک-رید کنترل شود، با فرض اینکه تنش برشی بحرانی 42 MPa باشد، دانسیته نابجایی را بدست آورید. ($b = 0.36 \text{ nm}$, $G = 50 \text{ GPa}$)

پاسخ: طول خط نابجایی با دانسیته نابجایی از رابطه روبرو پیروی می‌کند:

$$\bar{l} = \rho^{-\frac{1}{2}}$$

از طرفی، تنش سیلان برابر تنش برشی فعال‌کننده یک منبع فرانک رید می‌باشد:

$$\tau = \frac{Gb}{l} = Gb\sqrt{\rho}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{\tau} = \tau b = \tau b \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{\tau}}{\tau} = \frac{0.36 \times 10^{-9} \times \sqrt{\tau}}{\tau} = 2.55 \times 10^{-10} \text{ m}$$

در شبکه FCC

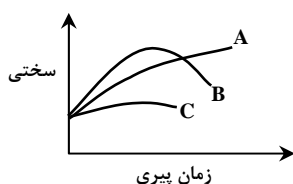
$$\Rightarrow \rho = \frac{\tau^2}{G^2 b^2} = \frac{(42 \times 10^6)^2}{(50 \times 10^9)^2 \times (2.55 \times 10^{-10})^2} = 1.09 \times 10^{13} \text{ m}^{-2}$$

کج مثال ۲۱: بردار برگز یک فلز 3 A° و مدول برشی آن 38 GPa می‌باشد. با فرض فاصله ذرات پراکنده برابر $3 \times 10^{-3} \text{ m}$ میکرومتر، تنش تسلیم کششی برابر است با:

- (۱) 1140 MPa (۲) 580 MPa (۳) 342 MPa (۴) 760 MPa

پاسخ: گزینه «۴» نکته: میزان استحکام ناشی از توزیع ذرات پراکنده در یک محلول جامد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{2\alpha Gb}{\lambda} \quad \alpha=1 \text{ با فرض} \Rightarrow \sigma = \frac{2 \times 38 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-3}} = 760 \text{ MPa}$$



کج مثال ۲۲: شکل زیر منحنی‌های پیرسختی یک آلیاژ را در درجه حرارت‌های مختلف نشان می‌دهد؟

(۱) منحنی B معرف فراپیری است.

(۲) منحنی A معرف پایین‌ترین درجه حرارت پیرسختی است.

(۳) منحنی C معرف بالاترین درجه حرارت پیرسختی است.

(۴) منحنی A معرف فراپیری است.

پاسخ: گزینه «۱» نکته: منحنی B معرف فراپیری یا Over Aging است، زیرا هر چقدر دمای Aging افزایش یابد، به همان نسبت امکان تشکیل رسوبات بیشتر شده، نفوذ سریع‌تر رخ می‌دهد و زودتر به max سختی می‌رسند و چون دما بالا بوده است، رسوبات درشت هستند و سختی آن‌ها کمتر است.

پراکنده سختی

در این روش، ذرات فاز دیگری را در زمینه توسط روشهای مکانیکی توزیع می‌کنند. برای مثال، با اضافه کردن ذرات اکسید آلومینیوم Al_2O_3 به زمینه آلومینیوم یا ذرات ThO_2 به زمینه نیکل، مانع حرکت نابجایی‌ها شده و آلیاژهای مزبور را سخت می‌نمایند. بدین ترتیب با افزایش کسر حجمی اکسید و کاهش فاصله ذرات، استحکام آلیاژ افزایش می‌یابد.

نکته ۱: ریزساختارهای آلیاژی پراکنده سختی شده پایدارتر از ریزساختار آلیاژهای رسوب سخت شونده است، لذا آلیاژهای پراکنده سخت شده برای کاربرد در دماهای بالا مناسبند چرا که در این دما هیچگونه تغییری در فازهای آن ایجاد نخواهد شد.



مقاوم شدن از طریق مجموعه‌های چندفازی (کامپوزیت‌ها)

روش‌های گوناگونی برای افزایش استحکام یک ماده از طریق ایجاد فازهای ثانویه خارجی یا واکنش‌های منجر به تولید فازهای داخلی (In-Situ Composite) وجود دارد. افزودن تقویت کننده خارجی متداول‌ترین روش مورد استفاده است که از الیاف، ویسکرها یا ذرات پراستحکام مانند Al_2O_3 ، SiC کمک می‌گیرد. یک نظریه قابل قبول در تشریح چگونگی استحکام بخشی کامپوزیت‌هایی که طی فرآیند ذوب و انجماد حاصل شده‌اند، ایجاد چگالی زیاد نایبایی به علت اختلاف در ضریب انبساط حرارتی زمینه فلزی و ذرات یا الیاف تقویت کننده می‌باشد. در این حالت بیان می‌شود که هنگامی که کامپوزیت از دماهای زیاد سرد می‌شود، کرنش‌های ناسازگاری که ایجاد شده‌اند با افزایش میزان نایبایی‌ها در اطراف تقویت کننده جبران می‌شوند.



نکته ۱۲: گاهی نیز فاز تقویت کننده از طریق تحمل نیروی اعمالی به مجموعه کامپوزیت (مکانیزم معروف به انتقال نیرو) به مقاوم شدن زمینه کمک می‌کند.



نکته ۱۳: گاهی نیز هنگام ساخت مواد از طریق ایجا ساختارهای لایه - لایه به افزایش استحکام ماده کمک می‌شود.

کامپوزیت‌ها به ۳ نوع زمینه پلیمری، زمینه فلزی و زمینه سرامیکی طبقه‌بندی می‌شوند. کامپوزیت‌ها از لحاظ شکل به دسته‌های زیر تقسیم بندی می‌شوند:

۱- ذره‌ای ۲- رشته‌ای یا الیافی ۳- لایه‌ای

در کامپوزیت‌های الیافی با قرار دادن یک رشته ظریف در یک زمینه نرم به یک ماده مرکب با استحکام بالا می‌رسیم. الیاف بایستی استحکام و مدول الاستیسیته بالایی داشته باشد. تفاوت مهم بین فلزاتی که با الیاف مقاوم شده‌اند و فلزاتی که با استفاده از مکانیزم پراکنده سختی مقاوم شده‌اند این است که در افزایش استحکام توسط الیاف که دارای مدول الاستیسیته بالایی می‌باشند تمام نیرو را تحمل می‌کنند.

فرموله کردن کامپوزیت‌های الیافی:

۱- بارگذاری طولی (موازی جهت رشته‌ها)

$$\sigma_c = f_f \sigma_f + F_m \sigma_m \quad (9-3)$$

$$E_c = f_f E_f + F_m E_m$$

۲- بارگذاری عمود بر جهت الیاف (بارگذاری عرضی):

$$\frac{1}{\sigma_c} = \frac{F_f}{\sigma_f} + \frac{F_m}{\sigma_m} \quad \frac{1}{E_c} = \frac{F_f}{E_f} + \frac{F_m}{E_m} \quad (10-3)$$

استحکام‌دهی با عیوب نقطه‌ای

علاوه بر تمام موارد فوق، گاهی اوقات فرآیند استحکام‌دهی از طریق ایجاد عیوب نقطه‌ای مانند اتم بین‌نشین و جای خالی (Vacancy) همراه با آن نیز می‌تواند موثر باشد. شناخته شده‌ترین مورد استفاده از چنین مکانیزمی در فلزات خالص می‌باشد که آن‌ها را از دمای بالا به سرعت سرد می‌کنند تا به تولید بین‌نشین (Vacancy) به افزایش استحکام ماده کمک کرده باشند. از سوی دیگر پرتوهای پرنرژی نیز می‌تواند چنین عیوبی در ماده بوجود آورد که موجب استحکام بخشی آن می‌گردد.

مثال ۲۳: کدام یک از حالات انحلال زیر در مقاومت شدن یک شبکه کریستالی اثر بیشتری دارد؟

- (۱) اتم‌های جانشینی (۲) اتم‌های بین‌نشینی (۳) محلول‌های جامد منظم (۴) محلول‌های جامد نامنظم

پاسخ: گزینه «۳» محلول جامد منظم در مقایسه با محلول جامد نامنظم اثر بیشتری دارد. تأثیر مقاوم نمودن اتم‌هایی که اعوجاج‌های غیرکروی ایجاد می‌کنند (مانند اتم‌های بین‌نشین) نسبت به اتم‌های محلولی که اعوجاج‌های کروی بوجود می‌آورند (مانند اتم‌های جانشین) خیلی بیشتر است. در اینجا مقایسه محلول‌های جامد بین‌نشین و جانشین با محلول‌های جامد منظم و نامنظم امکان‌پذیر نیست.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

کله ۱- تنش تسلیم در یک آلیاژ آلومینیوم پر استحکام، (در صورتی که تنش اصطکاکی در آن برابر 450 MPa ، ضریب ثابت K برابر $\frac{2}{\sqrt{5 \text{ MNm}}}$ و قطر متوسط دانه‌های آن برابر 25 میکرون باشد) چند MPa است؟ (سراسری ۸۰)

- (۱) 350 (۲) 550 (۳) 700 (۴) 1100

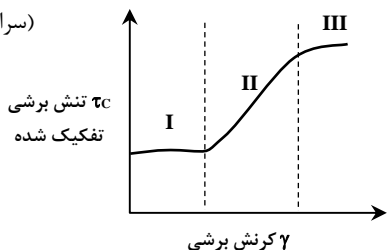
کله ۲- اگر اختلاف استحکام آلومینیوم خالص و یک آلیاژ آلومینیوم حاوی ذرات ریز پراکنده 12 MPa باشد، فاصله متوسط ذرات فاز دوم چند μm است؟ ($b = 2/5A^\circ, G = 28 \text{ GPa}$) (سراسری ۸۰)

- (۱) $0/285$ (۲) $0/58$ (۳) $1/14$ (۴) $2/28$

کله ۳- اگر مقدار تنش اعمال شده به یک ماده دو برابر شود، دانسیته نابجایی چند برابر خواهد شد؟ (سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

کله ۴- شکل مقابل منحنی سیلان عمومی تک بلورهای FCC است. در این صورت لغزش متقاطع در اتفاق افتاده و (سراسری ۸۰)



- (۱) ناحیه I، از کار سخت شدن قطعه می‌کاهد.
 (۲) ناحیه II، باعث کار سختی می‌شود.
 (۳) ناحیه III، از کار سختی قطعه می‌کاهد.
 (۴) نواحی I، II و III عامل کار نرمی است.

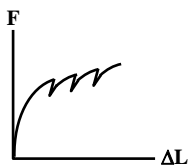
کله ۵- ورق‌های فولاد کم کربن پس از 15% تغییر شکل پلاستیک بوسیله نورد بلافاصله تحت آزمایش کشش قرار می‌گیرد. در این حالت، ورق به علت چگالی نابجایی‌های قفل نشده دارای تسلیم بالا و پایین (سراسری ۸۰)

- (۱) کاهش - است. (۲) کاهش - نیست (۳) افزایش - است (۴) افزایش - نیست

کله ۶- تنش تسلیم، در یک سیستم سختی پراکندگی از Al با اندازه شبکه 4 nm و مدول برشی 3 GPa و ذرات سخت آلومینا با فاصله متوسط $1 \mu\text{m}$ از یکدیگر بر حسب MPa چقدر است؟ (سراسری ۸۱)

- (۱) 80 (۲) 82 (۳) 84 (۴) 86

کله ۷- نمودار کشش فلز Cd به صورت زیر به دست آمده است. علت دنداندار شدن این نمودار چیست؟ (سراسری ۸۱)



- (۱) اشکال در دستگاه کشش
 (۲) تشکیل دوقلوها در حین تغییر شکل پلاستیکی
 (۳) تشکیل باندهای لودر در حین تغییر شکل پلاستیکی
 (۴) لغزش اریب (Cross Slip) نابجایی‌ها در حین تغییر شکل پلاستیکی

کله ۸- اگر اندازه متوسط قطر دانه دو برابر شود، اندازه تنش تسلیم چند برابر خواهد شد؟ (از تنش اصطکاکی شبکه صرف نظر شود). (سراسری ۸۱)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) 2

کله ۹- فولادی در اندازه دانه‌های $5 \mu\text{m}$ به ترتیب دارای تنش تسلیمی برابر با 250 MPa و 358 MPa است. مقدار تنش اصطکاکی آن چند MPa است؟ (سراسری ۸۲)

- (۱) $157/4$ (۲) 250 (۳) 370 (۴) $408/4$

کله ۱۰- اگر چگالی نابجاییها در ماده‌ای $10^{12} / \text{cm}^2$ باشد، فاصله متوسط نابجاییها چقدر است؟ (سراسری ۸۲)

- (۱) 10 A° (۲) 10^{-6} mm (۳) 100 A° (۴) 10^{-12} cm

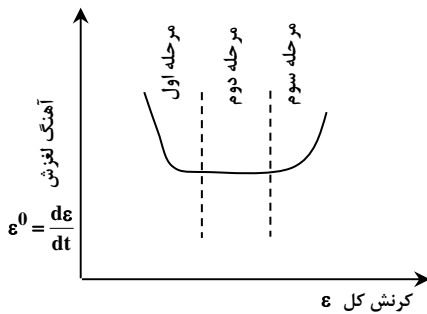
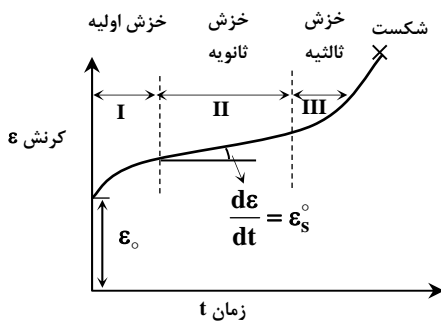


مدرسایان شریف

فصل چهارم

« خزش »

نمودارهای خزشی



تغییر شکل فزاینده ماده‌ای تحت تنش ثابت، خزش نامیده می‌شود. خزش پدیده‌ای زمان‌گیر است و به کندی اتفاق می‌افتد و در بین تست‌های مکانیکی کمترین نرخ کرنش را دارد. به عبارتی تستی کاملاً استاتیکی است ($\dot{\epsilon} = 10^{-8} - 10^{-5}$) برای رسم منحنی خزش یک نمونه، بار ثابتی به یک نمونه کشش در دمای ثابت وارد شده و کرنش نمونه بر حسب تابعی از زمان تعیین می‌شود. برای سهولت، معمولاً منحنی خزش را به سه مرحله (منطقه) تقسیم کرده‌اند. در مرحله اول، پس از تغییر شکل لحظه‌ای اولیه ϵ_0 ، آهنگ کرنش یا خزش ($\dot{\epsilon}$) کاهش می‌یابد و بیانگر مقاومت خزشی بالای ماده در حین تغییر شکل می‌باشد که ناشی از مقاومت در برابر حرکت نابجایی‌هاست. (در این مرحله اثر کار سختی بیشتر از تبلور مجدد است).

در مرحله دوم (II)، خزش مقدماتی با یک دوره انبساط در نرخ کرنش ثابت دنبال می‌شود و به یک مقدار پایدار می‌رسد که ناشی از ایجاد تعادل پس از رقابت میان مکانیسم‌های کارسختی و بازیابی می‌باشد. در این شرایط مقاومت خزشی ساختار بیشترین مقدار است. در مرحله سوم (III)، موازنه میان کارسختی (سخت شدن) و بازیابی (نرم شدن) از بین می‌رود و آهنگ لغزش شدیداً افزایش می‌یابد. در این مرحله که معمولاً در تنشهای بالا و در دمای زیاد رخ می‌دهد، پس از کاهش در سطح مقطع ناشی از گلوبی شدن و یا تشکیل حفره‌ها، نمونه می‌شکند. خزش مرحله‌ی سوم اغلب با تغییرات متالورژیکی مانند درشت شدن ذرات ریز یا تغییرات نفوذی در فازهای موجود همراه است. برای بررسی رفتار خزشی یک آلیاژ معمولاً از یک سری نمودارهای خزشی استفاده می‌شود که برای طراحی بسیار مفیدند: اگر شیب منحنی خزش را بر حسب کرنش رسم کنیم یک منحنی آهنگ خزش بر حسب کرنش کل بدست می‌آید.

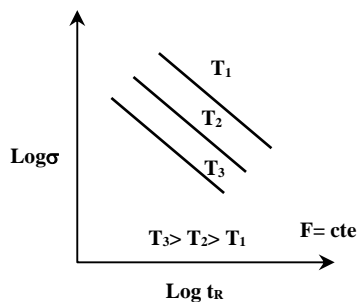
مثال ۱: نمونه استوانه‌ای به طول ۲۰ cm و سطح مقطع اولیه 15 mm^2 تحت نیروی ۴۰۰۰ N در دمای بالا لغزش می‌کند. اگر سرعت خزش ثابت و برابر 10^{-4} hr^{-1} باشد، میزان تنش و کرنش مهندسی بعد از ۲۰ ساعت برابر است با:

(۱) 400 MPa و 2×10^{-3} (۲) 267 MPa و 2×10^{-3} (۳) 267 MPa و 10^{-3} (۴) 400 MPa و 10^{-3}

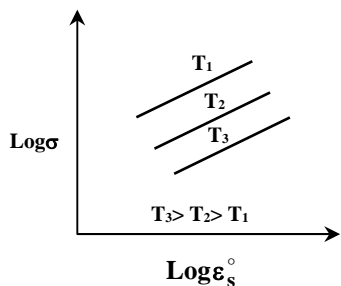
پاسخ: گزینه «۲» در کرنش‌های کمتر از ۱/۵۰ مقادیر مهندسی و حقیقی برابرند.

$$\text{کرنش مهندسی } \epsilon = \epsilon^{\circ} \times t = 10^{-4} \times 20 = 2 \times 10^{-3} = e$$

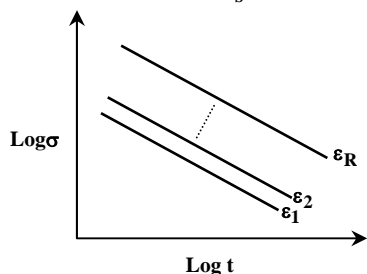
$$\Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} = \frac{4000}{15} = 267 \text{ MPa} \quad \text{تنش مهندسی}$$



نمودار تنش بر حسب زمان شکست: با کمک این نمودار می‌توان تنش مجاز اعمالی بر روی یک قطعه برای کار در یک زمان مشخص، تعیین نمود. در این روش با ثابت در نظر گرفتن نیرو، سطح مقطع را تغییر می‌دهیم. بدین ترتیب سطح مقطع بر حسب تنش مجاز تعیین می‌گردد. همچنین در این آزمایش، مقدار t_R (زمان گسیختگی) نمونه که بیانگر عمر شکست نمونه می‌باشد، بدست می‌آید. لذا برای طراحی قطعات مهندسی با عمر مشخص از این نمودار استفاده می‌گردد.

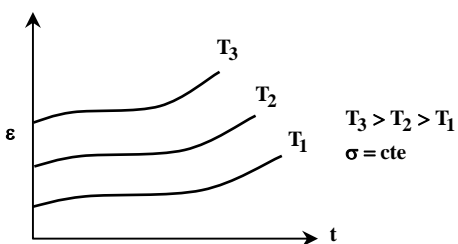


نمودار تنش بر حسب حداقل سرعت خزشی: با توجه به اینکه حداقل سرعت در مرحله (II) است، با استفاده از این نمودار می‌توان میزان تنشی که قادر است مقدار معینی سرعت خزشی را ایجاد کند، تعیین کرد. به این میزان تنش، استحکام خزشی می‌گویند.

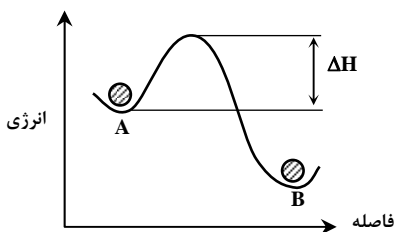


نمودار تنش به زمان لازم برای ایجاد یک میزان کرنش خزشی مشخص در نمونه: با بکارگیری این نمودار می‌توان، تنشی را که موجب کرنش مجاز در یک مدت معین در نمونه گردد را تعیین نمود.

اثر دما و تنش بر خزش



از آنجاییکه عمر خزش و کل ازدیاد طول یک ماده به آهنگ خزش پایدار (مرحله II)، ϵ_s^0 وابستگی شدیدی دارند، لذا می‌بایستی متغیرهایی چون دما و تنش که بر ϵ_s^0 شدیداً اثر گذارند، مورد بررسی دقیق‌تر قرار گیرند: با افزایش دما، سرعت خزشی مرحله II (ϵ_s^0)، افزایش یافته و عمر قطعه کاهش می‌یابد.



نمودار مقابل نشان می‌دهد که، انرژی محرکه خزش (ΔH) نشان‌دهنده مانع انرژی است که اتم برای عبور از موقعیت A به موقعیت کم انرژی‌تر B، باید بر آن غلبه کند. لذا ارتباط میان سرعت خزشی مرحله II با دما به صورت یک رابطه آرنیوسی بدست می‌آید:

$$\epsilon^0 = A \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right)$$

(۱-۴)

$$\ln \frac{\epsilon_2^0}{\epsilon_1^0} = \frac{\Delta H}{R} \left[\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right]$$

(۲-۴)

$A = cte$ ، R : ثابت گازها ، ΔH : انرژی محرکه خزش ، T : دمای فرآیند



کج مثال ۲: نرخ خزش یک پلیمر از رابطه روبرو بدست می آید:

$$\dot{\epsilon} = 4/5 \times 10^{11} \exp\left(\frac{-100 \text{ KJ}}{RT}\right)$$

مقدار زمانی را که طول می کشد تا یک میله از این پلیمر در دمای 60°C از 10 mm به 15 mm کشیده شود، بدست آورید.

پاسخ: از رابطه داده شده ابتدا نرخ خزش را بدست می آوریم:

$$\dot{\epsilon} = 4/5 \times 10^{11} \exp\left(\frac{-100000}{8/3 \times 333}\right) = 8/71 \times 10^{-5} \text{ S}^{-1}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\epsilon}{t} \Rightarrow t = \frac{\epsilon}{\dot{\epsilon}} = \frac{10}{8/71 \times 10^{-5}} = 5739 \text{ S} \Rightarrow \Delta t = 95 \text{ min}$$

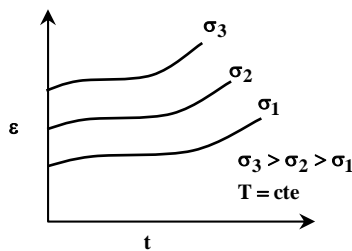
از طرفی:

کج مثال ۳: انرژی فعال سازی برای رهایی تنش در یک پلیمر $50 \frac{\text{KJ}}{\text{mol}}$ می باشد. زمان رهایی در 25°C ، 90 روز می باشد. زمان رهایی در 100°C چقدر

است؟ $\frac{1}{t} = A \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right)$

پاسخ: زمان رهایی از رابطه اخیر پیروی می کند، لذا:

$$\frac{1}{t_{25}} = \frac{\exp\left(\frac{-Q}{R \times 298}\right)}{\exp\left(\frac{-Q}{R \times 373}\right)} \Rightarrow t_{100} = 90 \times \frac{\exp\left(\frac{-50 \times 10^3}{8/314 \times 298}\right)}{\exp\left(\frac{-30 \times 10^3}{8/314 \times 373}\right)} = 90 \times 0/0173 = 1/55 \text{ day}$$



شکل مقابل، اثر تنش وارده بر منحنی خزشی در دمای ثابت را نشان می دهد. با افزایش تنش، سرعت خزشی ($\dot{\epsilon}_s$) افزایش یافته و عمر قطعه کاهش می یابد. با افزایش تنش اعمالی، طول و شیب مرحله سوم خزشی افزایش یافته و طول مرحله دوم کاهش و شیب آن افزایش می یابد.

$\dot{\epsilon}_s$ در تنش های کم و دماهای نزدیک به نقطه ذوب، مستقیماً با σ تغییر می کند و در تنشهای متوسط تا زیاد و در دماهای زیادتر از ΔT_m ، $\dot{\epsilon}_s \propto \sigma^{4-5}$ تغییر می کند. این مسئله برای فلزات خالص و محلولهای جامد صادق است. اما در سوپر آلیاژها این وابستگی شدیدتر است $\leftarrow \dot{\epsilon}_s \propto e^{\alpha \sigma}$ به طور کلی مقدار سرعت خزشی حالت پایدار از رابطه زیر بدست می آید که کاربرد زیادی دارد:

$$\dot{\epsilon}_s = A \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right) \cdot \sinh \frac{\alpha \sigma}{KT}$$

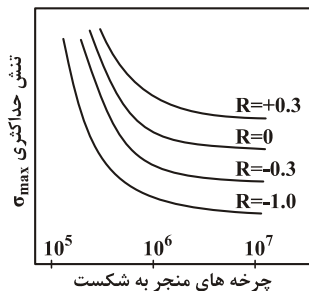
(۳-۴)

A : cte ، α : ضریب حجمی اکتیواسیون ، K : ثابت بولتزمن

خزش در دماهای کم



در دماهای کمتر از نصف نقطه ذوب ماده و معمولاً بین 0 تا $0/3 T_m$ ، خزش اولیه یا ناپایدار تسلط دارد. در این دماها، فرآیندهای بازبایی مثل لغزش متقاطع که مستقل از نفوذ هستند، نقش مهمی در خزش بر عهده دارند. در این نوع خزش، هر چه که زمان می گذرد، مقاومت جسم بالا می رود و سرعت خزش افت می کند.



در روش دوم نمودار تنش حداکثری برحسب تعداد چرخه منجر به شکست در شرایط نسبت تنش ثابت (R) ثابت رسم می شود. می توان گفت هرچه قدر R مثبت تر می شود (افزایش در تنش متوسط) حد خستگی اندازه گیری شده بیشتر می شود:

کلمه مثال ۵: دو نمونه مشابه از یک فلز غیر آهنی در شرایط زیر تحت تنش های کلی قرار می گیرند. کدام گزینه در مورد تعداد سیکل شکست (عمر خستگی) صادق است؟

نمونه A : $\sigma_{\min} = -150 \text{ MPa}$, $\sigma_{\max} = 450 \text{ MPa}$

نمونه B : $\sigma_{\min} = -300 \text{ MPa}$, $\sigma_{\max} = 300 \text{ MPa}$

(۴) هیچکدام

(۳) $N_A > N_B$

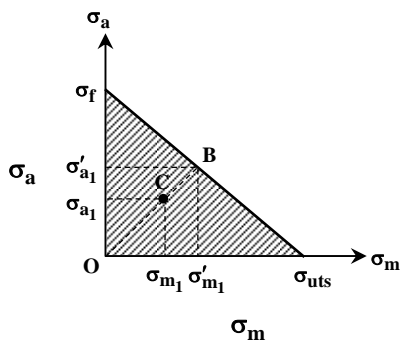
(۲) $N_B > N_A$

(۱) $N_B = N_A$

پاسخ: گزینه «۲» نکته: در پدیده خستگی، ماکزیمم مقدار تنش کششی بر سرعت رشد ترک خستگی تأثیرگذار بوده و شکست خستگی را تسریع می نماید، لذا نمونه با ماکزیمم مقدار تنش کششی کمتر از عمر خستگی بیشتری برخوردار است. همچنین هرچه قدر σ_m بیشتر باشد، عمر خستگی کمتر است.

نمونه A : $\sigma_m = \frac{450 - 150}{2} = 150$

نمونه B : $\sigma_m = \frac{300 - 300}{2} = 0$ ($N_B > N_A$)



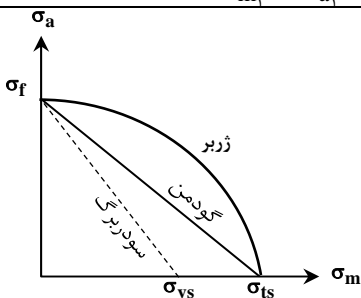
بر این اساس، آقای گودمن با استفاده از دیاگرامهایی و نیز یک رابطه تجربی بر اساس آن نشان داد که به ازای هر مقدار تنش متوسط مقدار متفاوتی از تنش تناوبی وجود دارد که می تواند بدون ایجاد شکست مقاومت نماید. با توجه به دیاگرام اصلاح شده گودمن، با افزایش تنش متوسط، دامنه مجاز تنش (σ_a) کم می شود تا در استحکام کششی σ_{uts} به صفر می رسد. معادله خط گودمن عبارتست از:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{uts}} = 1 \quad (13-5)$$

σ_{ts} : استحکام کششی ، σ_f : حد خستگی ، σ_m : تنش متوسط ، σ_a : تنش تناوبی

در صورتیکه بارگذاری چرخه ای در منطقه هاشور خورده قرار گیرد که مرز آن خط گودمن است، شکست خستگی رخ نمی دهد. لذا برای بدست آوردن ضریب اطمینان از روی خط OB دو نقطه انتخاب می کنیم (B, C)؛ و خواهیم داشت:

$$n = \frac{\sigma'_m1}{\sigma_m1} = \frac{\sigma'_a1}{\sigma_a1} \quad (14-5)$$



$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{uts}}\right)^2 = 1 \quad (15-5)$$

به عبارتی دیگر می توان گفت:

۱- تحت اثر تنش σ'_m1 اگر $\sigma_a > \sigma'_a1$ باشد، قطعه پس از تحمل تعدادی سیکل شکسته خواهد شد.

۲- تحت اثر تنش σ'_m1 اگر $\sigma_a < \sigma'_a1$ باشد، قطعه با یک ضریب اطمینان در زیر حد تحمل قرار دارد.

البته محققین دیگری چون ژربر و سودربرگ روابط نظری دیگری را بر پایه ارتباط میان تنش متوسط و تنش تناوبی ارائه کردند. بر خلاف گودمن، ژربر یک منحنی سهمی را پیشنهاد نمود که معادله آن عبارتست از:



اگر طراحی مواد بر اساس استحکام تسلیم (σ_{ys}) انجام شود که در نمودار قبلی توسط خط چین سودبرگ نشان داده شده است در معادله گودمن، σ_{ys} جایگزین σ_{uts} می‌گردد، زیرا:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{ys}} = 1$$

(۱۶-۵)

اکثر نتایج تجربی محققین مختلف نشان می‌دهد که بیشتر داده‌ها میان نمودارهای ژربر و گودمن قرار می‌گیرد، لذا در ارتباط با تنش متوسط، رابطه گودمن (۱۳-۵) معیار محافظه کارانه‌تری در طراحی به شمار می‌رود.

مثال ۶: یک فولاد آلیاژی خاص دارای حد خستگی 700 MPa و استحکام کششی 1400 MPa می‌باشد. اگر قطعه‌ای از این فولاد تحت دامنه تنشی 300 MPa قرار بگیرد، مقدار تنش متوسط آن را مطابق معیارهای گودمن و ژربر بدست آورید.

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{uts}} = 1 \Rightarrow \frac{300}{700} + \frac{\sigma_m}{1400} = 1 \Rightarrow \sigma_m = 800 \text{ MPa}$$

پاسخ: مطابق معیار گودمن (۱۳-۵) داریم:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{uts}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{300}{700} + \left(\frac{\sigma_m}{1400}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sigma_m = 1058.3 \text{ MPa}$$

مطابق معیار ژربر (۱۵-۵) داریم:

مثال ۷: میله‌ای تحت تنش فشاری 35 MPa (min) قرار دارد. حد خستگی این نمونه وقتی $R = -1$ باشد، 220 MPa می‌باشد. با توجه به معیار

گودمن، تنش کششی را که این میله قبل از شکست در 10^7 چرخه می‌تواند تحمل کند، بدست آورید؟

$$\sigma_{uts} = 500 \text{ MPa}$$

پاسخ: مطابق رابطه گودمن داریم:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{uts}} = 1 \xrightarrow{\text{با استفاده از روابط ۱-۵ الی ۳-۵}} \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{500} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\max} + 35}{220} + \frac{\sigma_{\max} - 35}{500} = 1 \Rightarrow \sigma_{\max} = 292.2 \text{ MPa}$$

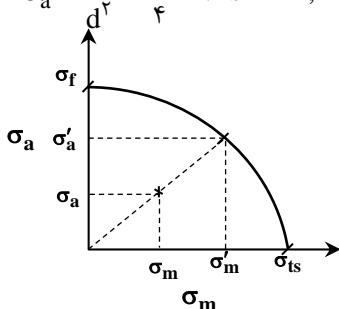
مثال ۸: برای یک قطعه فولادی میزان تنش متوسط برابر $\frac{25}{d^2}$ و دامنه تغییرات تنش تناوبی $\frac{16}{d^2}$ و قطر نمونه‌ها 2 in می‌باشد. ضریب اطمینان این

قطعه را از طریق معیار ژربر بدست آورید. ($\sigma_f = 25 \text{ ksi}$, $\sigma_{ys} = 80 \text{ ksi}$, $\sigma_{ts} = 100 \text{ ksi}$)

$$\sigma_a = \frac{16}{d^2} = \frac{16}{4} = 4 \text{ ksi} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{25}{d^2} = \frac{25}{4} = 6.25 \text{ ksi}$$

پاسخ: ابتدا مقادیر σ_a و σ_m را بدست می‌آوریم:

برای ضریب اطمینان از رابطه ۱۴-۵ داریم:



$$n = \frac{\sigma'_m}{\sigma_m} = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a} \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_a = n\sigma_a = 4n \\ \sigma'_m = n\sigma_m = 6.25n \end{cases}$$

در معادله ژربر (۱۵-۵) قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{ts}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{4n}{25} + \left(\frac{6.25n}{100}\right)^2 = 1 \Rightarrow 39.0625n^2 + 1600n - 100000 = 0 \Rightarrow n = 5/8$$

کجه مثال ۹: مطلوبست تعیین قطر فولادی با خواص فولاد سؤال قبل و ضریب اطمینان ۰.۵.

$$\frac{\sigma'_a}{\sigma_a} = \frac{\sigma'_m}{\sigma_m} = \Delta \Rightarrow \sigma'_a = \Delta \sigma_a = \Delta \times \frac{16}{d^2} = \frac{80}{d^2}, \quad \sigma'_m = \Delta \times \sigma_m = \Delta \times \frac{25}{d^2} = \frac{125}{d^2} \quad \checkmark \text{ پاسخ:}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma'_a}{\sigma_f} + \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma_{ts}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{80}{25} + \left(\frac{125}{100}\right)^2 = 1 \Rightarrow 10^4 d^4 - 32000 d^2 - 15625 = 0 \Rightarrow d = 1/91 \text{ in}$$

کجه مثال ۱۰: فولادی دارای استحکام کششی ۶۰۰ MPa می باشد و حد خستگی آن وقتی $R = -1$ است، ۱۲۰ MPa می باشد. اگر این فولاد تحت تنش متوسط با $\sigma_m = 180 \text{ MPa}$ قرار گیرد، حد خستگی آن چند MPa است؟

- ۱) ۱۵۶ ۲) ۹۴ ۳) ۸۴ ۴) ۱۷/۵

کجه پاسخ: گزینه «۳» نکته: برای محاسبه حد خستگی با داشتن استحکام کشش نهایی از رابطه گودمن استفاده می شود:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{uts}} = 1 \quad (\sigma_a = \text{حد خستگی} \text{ و } \sigma_m = \text{تنش دینامیکی} \text{ و } \sigma_f = \text{حد تحمل اصلاح شده})$$

$$R = -1 \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1 \Rightarrow \sigma_m = 0$$

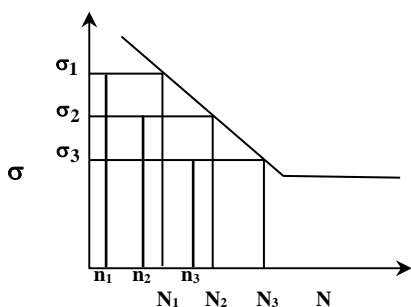
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{0}{\sigma_{uts}} = 1 \Rightarrow \frac{120}{\sigma_f} = 1 \Rightarrow \sigma_f = 120 \text{ MPa}$$

با جایگذاری در گودمن، به دست می آید.

$$\Rightarrow \frac{\sigma_a}{120} + \frac{180}{600} = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_a}{120} = 0.7 \Rightarrow \sigma_a = 84 \text{ MPa}$$

حال اگر ماده تحت تنش سیکلی ۱۸۰ MPa قرار گیرد.

خسارتهای جمع پذیر ناشی از خستگی



اکثر اطلاعاتی که تاکنون در مورد خستگی بحث شد، از نتایج آزمونهای با دامنه تنش ثابت بدست آمده است، اما حقیقت آن است که در بسیاری از کاربردهای عملی، تنش چرخه‌ای ثابت باقی نمی ماند. یعنی اگر در هر سطح تنشی معین و در نتیجه کسر معینی (n) از تعداد چرخه لازم برای شکست (N)، میزان خسارت وارد به قطعه یکسان باشد، مطابق شکل روبرو خواهیم داشت:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} = 1$$

از این رابطه می توان به صورت تعمیم یافته زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad \text{قانون ماینر}$$

(۱۷-۵)

n_i : تعداد چرخه اعمال شده در تنش i ام ، N_i : عمر خستگی در تنش i ام ، k : تعداد سطوح تنش بارگذاری شده قانون ماینر از ترتیب اعمال تنش کاملاً مستقل است. اما در واقعیت میزان خسارات جمع شده به ترتیب بارگذاری بستگی دارد. برای مثال اگر ابتدا نیروی

زیاد و سپس نیروی کم اعمال شود، قانون ماینر به صورت $\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} < 1$ درمی آید و از آنجا که در سطوح تنش بیشتر، گسترش ترک زودتر شروع می شود عقیده بر

این است که چرخه‌های اولیه در بارگذاری دوم با سطح تنش کمتر، از آنچه انتظار می رود خسارت بیشتری وارد می کند. حال برای بعضی از آلیاژها وقتی $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$

است، قانون ماینر به $\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} > 1$ تبدیل می شود. دیده می شود که این نوع بارگذاری در فولادهای خاص که پیرکرنش می شوند، باعث افزایش حد خستگی به

سطح بالاتر می شود. بر طبق قانون ماینر، عمر کل یک قطعه از مجموع درصد عمرهای صرف شده توسط هر چرخه کمتر از شکست تخمین زده می شود.



نظریه گریفیث

بر اساس نظریه گریفیث،

۱- اختلاف بین استحکام شکست واقعی و نظری اجسام ترد وابسته به ترکهایی است که درون آن وجود دارد.

۲- شرط آنکه ترک در آستانه رشد قرار گیرد آن است که کاهش انرژی کرنش الاستیک در نتیجه توسعه ترک، حداقل برابر با نرخ انرژی لازم برای ایجاد سطوح جدید شکست باشد. بدین ترتیب با فرض‌های زیر:

$$\frac{dw}{da} = 2\gamma_s \quad \text{و} \quad \frac{du}{da} = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \quad \text{و} \quad \text{با توجه به نظریه گریفیث:} \quad \frac{du}{da} = \frac{dw}{da}$$

$$\sigma = \left[\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}}$$

(۶-۶)

γ_s : انرژی لازم برای تشکیل واحد سطح، σ : استحکام شکست واقعی، a : طول ترک

معادله ۳-۶ برای حالت تنش صفحه‌ای (حذف تنش در یک بعد، کرنش سه‌بعدی) می‌باشد.

مثال ۸: ماده‌ای ترد با $\gamma_s = 1/27 \frac{J}{m^2}$ و $E = 96/39 GPa$ را در نظر بگیرید. اگر این ماده دارای ترکی داخلی به طول $1/14$ میلی‌متر باشد، استحکام

شکست قطعه‌ای که از آن ساخته می‌شود چند مگاپاسکال است؟

۶/۸ (۴)

۸/۳ (۳)

۱۱/۷ (۲)

۱۲/۴ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» یادآوری: برای پاسخ به این سؤال از رابطه گریفیث استفاده می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi c}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{2 \times 96/39 \times 10^9 \times 1/27 \times 10^6}{\pi \times 0.057 \times 10^{-3}}} = 11692852/85 Pa = 11/7 MPa$$

مثال ۹: با فرض اینکه استحکام تئوری یک ماده ترد 250° برابر استحکام شکست آن باشد، طول ترک بحرانی در این قطعه در صورتیکه پارامتر شبکه بر ابر $2/25A^\circ$ باشد، را بیابید؟

۸۹/۵ میکرومتر (۴)

۱۷۹ میکرومتر (۳)

۸/۹۵ میکرومتر (۲)

۱۷/۹ (۱)

$$\sigma_{th} = \left[\frac{E\gamma_s}{a_0} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \left[\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}}$$

پاسخ: گزینه «۲» استحکام تئوری یک ماده از رابطه ۱-۶ بدست می‌آید.

در صورتیکه استحکام تئوری 250° برابر استحکام شکست (واقعی) قطعه باشد:

$$\left[\frac{E\gamma_s}{a_0} \right]^{\frac{1}{2}} = 250 \cdot \left[\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{E\gamma_s}{a_0} = 250^2 \cdot \frac{2E\gamma_s}{\pi a}$$

$$\Rightarrow a = 250^2 \cdot \frac{2a_0}{\pi} = 250^2 \times \frac{2 \times 2/25 \times 10^{-10}}{\pi} = 8/95 \times 10^{-6} m = 8/95 \mu m$$

مثال ۱۰: تنش شکست یک ماده ترد که دارای ترکی به طول 5 میکرومتر می‌باشد چند مگاپاسکال است؟

۵۰۰ (۴)

۲۵۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» نکته: برای به دست آوردن تنش شکست یک ماده ترد از رابطه گریفیث استفاده می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi c}} \quad \gamma_s = \text{انرژی سطحی} \quad \text{و} \quad \gamma_s = 2c \quad \text{و} \quad \text{طول ترک} = 2c = 5 \Rightarrow c = 2/5 \mu m$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-6}}{\pi \times 2/5 \times 10^{-6}}} = 159/577 MPa$$

در میان گزینه‌ها، نزدیک‌ترین جواب گزینه «۲» است.

برای حالت کرنش صفحه‌ای (تنش سه‌بعدی و حذف کرنش در یک جهت) خواهیم داشت:

$$\sigma = \left[\frac{2E_s \gamma_s}{\pi a (1-\nu)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7-6)$$

۷: ضریب پواسون

مثال ۱۱: ورقی از جنس شیشه با ابعاد $2m \times 200mm \times 2mm$ حاوی ترکی به موازات عرض ورق می‌باشد. نیروی اعمالی $800Kg$ عمود بر صفحه ترک سبب ایجاد تنش کششی می‌شود. در دو حالت زیر طول ترک را بدست آورید. الف) شرایط Plain-Stress باشد. ب) شرایط Plain-Strain باشد.

$$(E = 75GPa, \gamma_s = 0.65 \frac{J}{m^2}, \nu = 0.3)$$

پاسخ: الف) ابتدا تنش کششی اعمالی را بدست می‌آوریم:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{800 \times 9.81}{200 \times 2 \times 10^{-6}} = 19.62 MPa$$

$$\text{Plain-Stress} \Rightarrow \sigma = \left[\frac{2E_s \gamma_s}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2 \times 75 \times 10^9 \times 0.65}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}} = 19.62 \times 10^6 \Rightarrow a = 80.62 \mu m \Rightarrow 2a = 161.24 \mu m$$

$$\text{Plain-Strain} \Rightarrow \sigma = \left[\frac{2E_s \gamma_s}{\pi a (1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2 \times 75 \times 10^9 \times 0.65}{\pi \times a \times (1-0.3^2)} \right]^{\frac{1}{2}} = 19.62 \times 10^6 \Rightarrow a = 88.6 \mu m \Rightarrow 2a = 177.2 \mu m$$

مثال ۱۲: برای شکست قطعات به صورت ترد، تنها عامل بازدارنده رشد ترک می‌باشد.

- ۱) انرژی لازم جهت ایجاد سطوح جدید
- ۲) انرژی لازم جهت حرکت نابجایی
- ۳) تمرکز موضعی تنش در قطعه
- ۴) استحکام بالای قطعه

پاسخ: گزینه «۱» نکته: در شکست قطعات به صورت ترد، نیروی محرکه رشد و گسترش ترک برابر انرژی الاستیکی آزاد شده ناشی از آن است و اگر این مقدار برابر با انرژی لازم برای ایجاد سطوح جدید شکست باشد، ترک رشد خواهد نمود.

معادله اوروان: تنش شکست یک جسم که قبل از شکست دچار تغییر شکل پلاستیک شده، بیشتر از شکست یک ماده واقعاً ترد است. زیرا تغییر شکل پلاستیک نوک ترک، باعث کنده نوک ترک شده، ρ را افزایش داده لذا تنش شکست افزایش می‌یابد. اوروان پیشنهاد کرد که با قرار دادن ترم γ_p (انرژی لازم برای تغییر شکل پلاستیکی لازم در نوک ترک جهت تشکیل واحد سطح شکست) در معادله ۳-۶ (گریفیث)، معادله مزبور برای شکست نرم فلزات نیز قابل استفاده خواهد بود:

$$\sigma = \left[\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{E \gamma_p}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8-6)$$

مثال ۱۳: استحکام کششی فولادی پس از عملیات کوئنچ-تمبر، $732MPa$ می‌باشد. مدول الاستیسیته این ماده وابسته به سرعت کرنش بوده و از رابطه زیر پیروی می‌کند: $E = 1/18(\epsilon^\circ)^{0.2} GPa$. طول ترک بحرانی را با استفاده از معیار گریفیث بدست آورید.

$$(2\gamma_s + 2\gamma_p = G = 1/5 \frac{kJ}{m^2}, \epsilon^\circ = 1/5 \times 10^3)$$

پاسخ: ابتدا مدول الاستیسیته این ماده را از رابطه داده شده بدست می‌آوریم:

$$E = 1/18(1/5 \times 10^3)^{0.2} = 10/59 GPa$$

$$8-6 \Rightarrow \sigma = \left[\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}} = 732 \times 10^6 = \left[\frac{2 \times 10/59 \times 10^9 \times 1/5 \times 10^3}{\pi a} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = 18/87 \mu m \Rightarrow 2a = 37/74 \mu m$$



نکته ۶: ابروین عبارت $\gamma_s + \gamma_p$ را به عنوان منبع انرژی یعنی انرژی الاستیک بر واحد افزایش طول ترک $\frac{\partial U}{\partial a}$ به کار برد. یعنی:

$$G = 2(\gamma_s + \gamma_p) \quad (۹-۶)$$

G: آهنگ آزاد شدن انرژی الاستیک

که در نقطه ناپایداری مقدار G که از آن به عنوان نیروی رانش ترک نیز یاد می‌شود به مقدار بحرانی G_c می‌رسد که در آن شکست رخ می‌دهد. G_c مقداری ثابت است و از آن می‌توان به عنوان معیار شکست استفاده نمود.

مثال ۱۴: یک آلیاژ تیتانیومی برای کاربردهای هوا فضا مورد استفاده قرار می‌گیرد. بررسی‌های غیر مخرب قادر نیست ترک‌های کمتر از یک میلیمتر را شناسایی نماید. با داده‌های زیر، ماکزیمم تنش کششی که این قطعه می‌تواند شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای را تحمل نماید، بدست آورید.

$$E = 115 \text{ GPa}, \nu = 0.221, G_c = 23/6 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

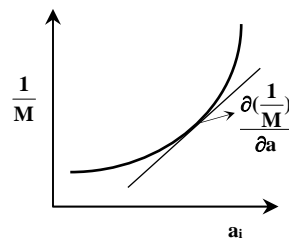
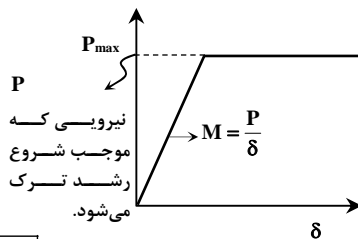
پاسخ: با توجه به اظهارات مسئله: $2a = 1 \text{ mm} \rightarrow a = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$

$$\text{Plain- Stress} \Rightarrow \sigma_c = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a}} = \left(\frac{115 \times 10^9 \times 23/6 \times 10^3}{\pi \times 0.5 \times 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}} = 1/31 \text{ GPa}$$

$$\text{Plain- Strain} \Rightarrow \sigma_c = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a(1-\nu^2)}} = \left(\frac{115 \times 10^9 \times 23/6 \times 10^3}{\pi \times 0.5 \times 10^{-3} \times (1-0.221^2)} \right)^{\frac{1}{2}} = 1/385 \text{ GPa}$$

نکته ۷: برای تعیین G_c یک آلیاژ، تعدادی نمونه کششی تحت شیاردار با سایز استاندارد ولی با طول ترک مختلف را تحت آزمایش کشش قرار

می‌دهیم. پس از انجام هر آزمایش، مقدار $P = f(\delta)$ و مقدار شیب آن را $\frac{1}{M}$ تعیین می‌کنیم. با استفاده از اطلاعات بدست آمده نمودار $\frac{1}{M} = f(a_i)$ را رسم می‌کنیم. با داشتن شیب خط مماس بر یک طول ترک مشخص آنگاه خواهیم داشت:



$$G_c = \frac{P_{\max}^2}{2B} \frac{\partial \left(\frac{1}{M} \right)}{\partial a}$$

(۱۰-۶)

P_{\max} : نیرویی که موجب رشد ترک می‌شود. ، B: ضخامت نمونه

آنالیز تنش ترکها

ابروین نشان داد تنشهای موضعی نوک ترک به حاصلضرب تنش اسمی σ و ریشه دوم نصف طول ترک بستگی دارد. این رابطه ضریب شدت تنش K نامگذاری شد. برای یک ترک تیز الاستیک در ورق با عرض نامحدود:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (۱۱-۶)$$

در واقع اختلاف میان یک قطعه ترک‌دار با قطعه دیگر در میزان پارامتر میدان تنش K است که به شکل هندسی قطعه ترک‌دار و روش اعمال نیرو بستگی دارد و در حالت کلی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$K = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \quad (۱۲-۶)$$

α : ضریب اصلاح هندسی (وابسته به شکل ترک و نمونه)