فصل پنجم

«تبدیلات تنش و کرنش»

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۱)

۱ـ گزینه «۲» حداکثر تنش برشی در المان نشان داده شده برابر شعاع دایره‌ی موهر بوده و مساوی است با:

$$R=\tau_{max}=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}=\sqrt{(\frac{-۱۰-۵۰}{۲})^۲+۴۰^۲}=۵۰\,\text{Mpa}$$

۲ـ گزینه «۲» ماده‌ی نرم غالباً تحت تنش برشی حداکثر که به حد بحرانی رسیده باشد گسیخته می‌شود. امتدادهای oa و oc امتدادهای تنش قائم اصلی بوده بنابراین امتداد ob که زاویه‌ی ۴۵° با آن دارد، امتداد تنش برشی حداکثر است.

۳ـ گزینه «۱» نقطه B در روی تار خنثی قرار داشته بنابراین مقدار تنش قائم در آن نقطه صفر بوده از طرفی دیگر تنش‌های برشی ناشی از نیروی برشی و لنگر خمشی هم جهت بوده و با هم جمع می‌شوند.

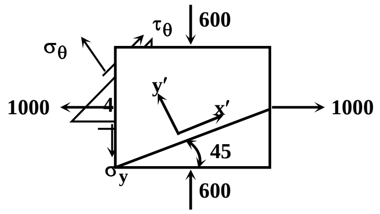
۴ـ گزینه «۴» حداکثر تنش ایجاد شده در لوله در امتداد θ (امتداد عرضی) بوده بنابراین احتمال ترک در راستای عمود بر آن که راستای طولی بوده، بیشتر است.

۵ـ گزینه «۱» طبق رابطه‌ی $\sigma_\theta=\frac{Pd}{۲t}$ اگر قطر دو برابر و ضخامت نصف شود حداکثر تنش کشش در مخزن چهار برابر می‌شود.

۶ـ گزینه «۴»

۷ـ گزینه «۱»

۸ـ گزینه «۲»



$$\sigma_{y'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\cos ۲\theta-\tau_{xy}\sin ۲\theta$$

$$\sigma_{y'}=\frac{۱۰۰۰-۶۰۰}{۲}-\frac{۱۰۰۰+۶۰۰}{۲}\cos(۲\times۴۵)\Rightarrow\sigma_{y'}=۲۰۰$$

این مسئله را با استفاده از دایره مور نیز می‌توان حل نمود.

۹ـ گزینه «۳» حداکثر تنش قائم مساوی است با:

$$\sigma_{max}=\sigma_{ave}+R=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۵=\frac{۱۲+۰}{۲}+\sqrt{(\frac{۱۲-۰}{۲})^۲+\tau_\circ^۲}\Rightarrow ۶^۲+\tau_\circ^۲=۹^۲\Rightarrow\tau_\circ=\sqrt{۴۵}\,\text{MPa}$$

۱۰ـ گزینه «۲» حداکثر تنش برشی برابر شعاع دایره موهر می‌باشد. بنابراین:

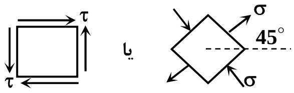
$$\sigma_{max}=\sigma_{ave}+R\Rightarrow ۱۵=\frac{۱۲+۰}{۲}+\tau_{max}\Rightarrow\tau_{max}=۹\text{ MPa}$$

۱۱ ـ گزینه «۱» تنش برشی بر روی المان واقع بر سطح خارجی پوسته کروی صفر است. چرا که دایره مور مربوط به المانی از سطح خارجی کره یک نقطه است

۱۲ ـ گزینه «۲» مواد ترد در جهت عمودبر تنش کششی ماکزیمم گسیخته می‌شوند چون راستای تنش عمودی ماکزیمم در راستای محیطی است پس در نتیجه راستای گسیختگی در راستای طولی خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۳» هرگاه جسمی تحت پیچش خالص باشد مرکز دایره مور بر مبداء مختصات منطبق است.



◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ گزینه «۱»

$$\sigma_\theta = \sigma_{max} = \frac{PR}{t} \Rightarrow P = ۱۸۰ \times \frac{۵}{۴۰۰} = ۲/۲۵\,MPa = ۲۲۵۰\,KPa$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ گزینه «۴»

$$\tau_{max} = \frac{\tau_Y}{n} \Rightarrow \frac{۰/۵\sigma_Y}{n} = \tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{۱۶T}{\pi d^۳} \Rightarrow T = \frac{۰/۵ \times ۱۴۰}{۲} \times \pi \times \frac{۱۰^۳}{۱۶} \Rightarrow T = ۶۸۷۲\,N.mm = ۶/۸۷\,N.m$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶ ـ گزینه «۲»

معیار ون میزز $: \sigma_۱^۲ - \sigma_۱\sigma_۲ + \sigma_۲^۲ = \sigma_Y^۲$

در برش خالص $: \sigma_۱ = -\sigma_۲ = \tau_Y = n\tau$

$$\Rightarrow n^۲\tau^۲ = \frac{\sigma_Y^۲}{۳} \Rightarrow n = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{۳}\tau}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ـ گزینه «۴» معیار ماکزیمم تنش عمودی:

$$F.S. = \frac{S_y}{\sigma_{max}} = \frac{۱۰۰}{۷۰} = ۱/۴۲$$

ماکزیمم تنش برشی:

$$F.S. = \frac{S_y}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} = \frac{۱۰۰}{۷۰ - (-۳۰)} = ۱$$

ماکزیمم انرژی واپیچش:

$$F.S. = \frac{S_y}{\sqrt{\sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲ - \sigma_۱\sigma_۲}} = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۷۰^۲ + ۳۰^۲ + ۷۰ \times ۳۰}} = ۱/۱۲۵$$

معیار کولن ـ مور:

$$\frac{\sigma_۱}{S_y} - \frac{\sigma_۲}{S_y} = \frac{۱}{F.S.} \Rightarrow \frac{۷۰}{۱۰۰} - \frac{-۳۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{F.S.} \Rightarrow F.S. = ۱$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۸ـ گزینه «۱» مقدار تنش در مخازن جدار نازک کروی مساوی $\frac{PR}{۲t}$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹ـ گزینه «۴» میله ترد تحت زاویه پیچش در زاویه ۴۵° گسیخته می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰ـ گزینه «۲»

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲})^۲ + \tau_{xy}^۲} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{۱۰۰}{۲} + \sqrt{(\frac{۱۰۰}{۲})^۲ + ۵۰^۲} = ۱۲۰\,MPa$$

◆ ◆ ◆ ◆

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۲)

۱ـ گزینه «۳» با توجه به قانون هوک عمومی می‌توان کرنش را در راستای محوری به‌دست آورد. تنش شعاعی در مخازن جدار نازک مساوی صفر می‌باشد.

$$\varepsilon_z=\varepsilon_\circ=\frac{1}{E}\{\sigma_z-\upsilon(\sigma_r+\sigma_\theta)\}\Rightarrow\varepsilon_z=\varepsilon_\circ=\frac{1}{E}\{\frac{Pr}{2t}-\upsilon\frac{Pr}{t}\}=\frac{Pr}{Et}(\frac{1}{2}-\upsilon)\Rightarrow P=\frac{E\varepsilon_\circ t}{r(\frac{1}{2}-\upsilon)}$$

۲ـ گزینه «۴» چون بر صفحه‌ی عمود بر محور z تنش برشی اعمال نشده است، بنابراین σ_z یک تنش اصلی است $(\sigma_z=\sigma_3=-30)$ و اما دو تنش اصلی دیگر را می‌توان توسط رابطه زیر بدست آورد:

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=50\pm\sqrt{0+20^2}\Rightarrow\sigma_1=70\quad,\sigma_2=30$$

تنش برشی ماکزیمم مساوی نصف تفاضل تنش قائم حداکثر و تنش قائم حداقل است.

$$\Rightarrow\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})=\frac{1}{2}(70-(-30))=50\,MPa$$

۳ـ گزینه «۳» طبق معیار فون میزز برای آنکه جسم به حد تسلیم برسد باید تنش فون میزز به حد تنش تسلیم σ_y برسد.

$$\sigma_e=\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{(2\sigma_\circ-\sigma_\circ)^2+(\sigma_\circ+4\sigma_\circ)^2+(2\sigma_\circ+4\sigma_\circ)^2}$$

$$\Rightarrow\sigma_e=\sqrt{\sigma_\circ^2+25\sigma_\circ^2+36\sigma_\circ^2}=\sqrt{62}\sigma_\circ=7/87\sigma_\circ\simeq8\sigma_\circ$$

شرط تسلیم $\sigma_y=\sigma_e=8\sigma_\circ$

۴ـ گزینه «۳»

۵ـ گزینه «۱»

۶ـ گزینه «۳» کرنش سطحی در یک المان تنش صفحه‌ای برابر است با:

$$\varepsilon_A=\varepsilon_x+\varepsilon_y=\frac{1-v}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\Rightarrow\varepsilon_A=\frac{1-v}{E}(\sigma_\theta+\sigma_L)=\frac{1-v}{E}(\frac{Pr}{t}+\frac{Pr}{2t})=\frac{3Pr}{2tE}(1-v)$$

۷ـ گزینه «۱» در راستای z تنش برشی اعمال نشده است، بنابراین σ_z خود یکی از تنش‌های اصلی می‌باشد. از طرفی تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه‌ای مساوی شعاع دایره موهر است، بنابراین:

$$R=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=\sqrt{(\frac{50-50}{2})^2+50^2}=50$$

$$\sigma_{1,2}=a_{ave}\pm R=50\pm50=100,0\quad;\quad\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})=\frac{1}{2}(100-0)=50$$

چون ماکزیمم و مینیمم تنش‌های اصلی مربوط به صفحه xy است لذا تنش برشی ماکزیمم در این صفحه اتفاق می‌افتد.

۸ـ گزینه «۴» در حالت تنش صفحه‌ای مؤلفه تنش σ_z برابر صفر می‌باشد.

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\{\sigma_z-v(\sigma_x+\sigma_y)\}=\frac{-v}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\qquad(1)$$

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}\{\sigma_x-v\sigma_y\}\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}\{\sigma_y-v\sigma_x\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_x-v\sigma_y=E\varepsilon_x\\ \sigma_y-v\sigma_x=E\varepsilon_y\end{cases}\Rightarrow\sigma_x-v\sigma_y+\sigma_y-v\sigma_x=E(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow(\sigma_x+\sigma_y)(1-v)=E(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\Rightarrow\sigma_x+\sigma_y=\frac{E}{1-v}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\varepsilon_z=-\frac{v}{1-v}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

۹ـ گزینه «۳» تنش کششی در مخزن کروی برابر $\frac{PR}{2t}$ است.

$$\sigma_{all} = \frac{0/75\times\sigma_Y}{n} = \frac{PR}{2t} \Rightarrow \frac{0/75\times 250}{2/5} = \frac{P\times 12500}{2\times 15} \Rightarrow P = 0/18\,\text{MPa}$$ (تنش مجاز جوش)

۱۰ـ گزینه «۱»

$$(\frac{\sigma_Y}{n})^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \Rightarrow n^2 = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{250^2}{90^2 - 90\times 120 + 120^2 + 3\times 36^2} = 4 \Rightarrow n = 2$$

۱۱ـ گزینه «۱»

$$\tau_{max} = \frac{\tau_Y}{n} \Rightarrow \frac{0/577\sigma_Y}{n} = \frac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow T = \frac{0/577\times 140}{2}\times\pi\frac{10^3}{16} = 7930\,\text{N.mm} = 7/93\,\text{N.m}$$

۱۲ـ گزینه «۳»

$$\tau_{max}^2 \le 150^2 , \tau_{max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow (\frac{60-(-120)}{2})^2 + \tau_{xy}^2 \le 150^2 \Rightarrow \tau_{xy}^2 \le 150^2 - 90^2 = 14400 \Rightarrow |\tau_{xy}| \le 120\,\text{MPa}$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = 2800 \pm 1565 \Rightarrow \sigma_{1,2} = 4365, 1235 \quad , \quad \sigma_3 = 7000$$

به دلیل آنکه تنش برشی در سطر و ستون سوم مساوی صفر است، بنابراین σ_z تنش اصلی می‌باشد.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 2882/5$$

۱۴ـ گزینه «۳» با فرض اینکه مخزن استوانه‌ای باشد، تنش برشی ماکزیمم در سطح داخلی مخزن مساوی است با:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\frac{Pr}{t} - (-P)}{2} = \frac{\frac{20000\times 500}{1} - (-20000)}{2} \quad ; \quad \tau_{max} = 5/01\times 10^6\,\text{Pa} = 5/01\,\text{MPa}$$

۱۵ـ گزینه «۱» چون تنش‌های صفحه‌ای هم‌علامت می‌باشند، پس تنش برشی ماکزیمم در خارج از صفحه اتفاق می‌افتد و برابر است با:

$$\tau_{max} = (\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}) = (\frac{0-(-8)}{2}) = 4\,\text{Mpa}$$

۱۶ـ گزینه «۲»

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

المان تحت برش خالص است و کرنش قائم در آن بر روی وجوه المان مساوی صفر است در نتیجه:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \Rightarrow \varepsilon_{x'} = \frac{\gamma}{2}\sin(2\times 45) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \varepsilon_{x'} = \frac{\frac{\tau}{G}}{2} = \frac{\tau}{2G}$$

۱۷ـ گزینه «۲» مجموع کرنش‌های قائم همواره مقداری ثابت است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \Rightarrow 3\times 10^{-6} + 5\times 10^{-6} = -2\times 10^{-6} + \varepsilon_4 \Rightarrow \varepsilon_4 = 10\times 10^{-6} = 10^{-5}$$

۱۸ـ گزینه «۱»

۱۹ـ گزینه «۲»

۲۰ـ گزینه «۱»

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۳)

۱ـ گزینه «۲» مقدار تنش قائم بر وجه مایل $\sigma y'$ بوده که برابر است با:

$$\sigma_{y'}=\frac{\sigma x+\sigma y}{۲}-\frac{\sigma x-\sigma y}{۲}\cos ۲\theta-\tau xy\sin ۲\theta$$

$$\sigma_{y'}=\frac{۱۰۰+(-۲۰)}{۲}-\frac{۱۰۰-(-۲۰)}{۲}\cos(۲\times ۳۰)-۴۰\sin(۲\times ۳۰)=-۲۴/۶\,MPa$$

۲ـ گزینه «۳» چون عناصر غیرقطری سطر و ستون اول، صفر می‌باشند بنابراین $\sigma_x=۶۰\,MPa$ یک تنش اصلی محسوب می‌شود. از طرفی در صفحه yz المان تحت برش خالص قرار گرفته و از اینرو مقدار تنش‌های قائم اصلی در این صفحه برابر است با:

$$\sigma_۲=۴۰\,MPa\ ;\ \sigma_۳=-۴۰\,MPa$$

از طرفی حداکثر تنش برشی برابر نصف تفاضل حداکثر تنش قائم اصلی و حداقل تنش قائم اصلی است.

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{۲}=\frac{۶۰-(-۴۰)}{۲}=۵۰\,MPa$$

۳ـ گزینه «۳» حالت تنشی که تمام مؤلفه‌های آن با هم برابر باشند دارای سه تنش قائم اصلی است.

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_\circ & \sigma_\circ & \sigma_\circ\\ \sigma_\circ & \sigma_\circ & \sigma_\circ\\ \sigma_\circ & \sigma_\circ & \sigma_\circ\end{bmatrix}\Rightarrow \sigma_۱=۳\sigma_\circ\ ;\ \sigma_۲=\sigma_۳=۰$$

بنابراین داریم:

$$\sigma_۱=۳\times ۱۰۰=۳۰۰\,MPa$$

۴ـ گزینه «۱» در دستگاه مختصات استوانه‌ای، کرنش محیطی برحسب مؤلفه‌های جابجایی برابر است با:

$$\varepsilon_\theta=\frac{۱}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{u}{r}$$

چون جسم دارای تقارن محوری است بنابراین جابه جایی V مستقل از θ بوده و در نتیجه مقدار کرنش محیطی مساوی خواهد شد با:

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}$$

۵ـ گزینه «۳»

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}۰ & ۱۰ & ۰\\ ۱۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_۳=۲۰\\ \sigma_۱=۱۰\\ \sigma_۲=-۱۰\end{cases}\Rightarrow \tau_{max}=\frac{۱}{۲}(۲۰-(-۱۰))=۱۵$$

۶ـ گزینه «۳» مؤلفه‌های تنش ناشی از بارگذاری برابرند با:

$$\sigma_x=\frac{F}{A}=\frac{۴۲۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۴۰^۲}=۳۵\,MPa$$

$$\tau_{xy}=\frac{TR}{J}=\frac{۱۶T}{\pi d^۳}=\frac{۱۶\times ۴۸۰\times ۱۰^۳}{\pi\times(۴۰)^۳}=۴۰\,MPa$$

$$\tau_{max}=R=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}=\sqrt{(\frac{۳۵}{۲})^۲+۴۰^۲}\simeq ۴۳/۷\,MPa$$

۷ـ گزینه «۱» تنش معادل فون میزز برابر است با:

$$\sigma_e=\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^۲+(\sigma_y-\sigma_z)^۲(\sigma_z-\sigma_x)^۲+۶(\tau_{xy}^۲+\tau_{yz}^۲+\tau_{zx}^۲)}=\sqrt{۶(\tau^۲+\tau^۲+\tau^۲)}=۳\sqrt{۲}\tau$$

طبق این معیار هنگامی در قطعه، تسلیم رخ خواهد داد که:

$$\sigma_e=\sigma_y\Rightarrow ۳\sqrt{۲}\,\tau=\sigma_y\Rightarrow\tau=\frac{\sigma_y}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}\sigma_y}{۶}$$

۸ـ گزینه «۱»

۹ـ گزینه «۱»

۱۰ـ گزینه «۲» تانسور تنش به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{معادله مشخصه ماتریس}: \sigma^۳-I_۱\sigma^۲+I_۲\sigma-I_۳=۰ \ , \ I_۱=۳ \ , I_۲=-۶ \ , I_۳=-۸$$

$$\Rightarrow \ \sigma^۳-۳\sigma^۲-۶\sigma+۸=۰ \Rightarrow (\sigma-۱)(\sigma-۴)(\sigma+۲)=۰ \Rightarrow \sigma_۱=۱ \ , \ \sigma_۲=۴ \ , \ \sigma_۳=-۲ \Rightarrow \sigma_{max}=۴ \Rightarrow ksi=۴۰۰۰\,psi$$

۱۱ـ گزینه «۴»

$$\sigma_{۱,۲}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲} \Rightarrow \sigma_{۱,۲}=۲۷۵۰\pm۱۸۵۵ \Rightarrow \sigma_۱=۴۶۰۵ \ , \ \sigma_۲=۸۹۵ \ , \ \sigma_۳=۴۰۰۰$$

$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}(\sigma_{max}-\sigma_{min})=\frac{۱}{۲}(۴۶۰۵-۸۹۵)=۱۸۵۵$$

۱۲ـ گزینه «۱»

۱۳ـ گزینه «۴» مقدار تنش برشی حداکثر در نقطه A برابر است با:

$$\tau_{max}=\frac{TR}{J}+\frac{VQ}{It}=\frac{۱۶T}{\pi d^۳}+\frac{۴}{۳}\frac{F}{A} \Rightarrow \tau_{max}=\frac{۱۶\times۴۸۰\times۱۰^۳}{\pi\times۴۰^۳}+\frac{۴}{۳}\times\frac{۳۶۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times۴۰^۲}=۸۰\,MPa$$

طبق قانون هوک می‌توان نوشت:

$$\tau_{max}=G\gamma_{max} \Rightarrow ۸۰=۸۰\times۱۰^۳\,\gamma_{max} \Rightarrow \gamma_{max}=۰/۰۰۱\,rad$$

۱۴ـ گزینه «۳» در یک ترکیب کرنش سنج‌ها تحت زوایای ۹۰,۴۵,۰ درجه مقدار کرنش برشی برابر است با:

$$\gamma_{xy}=۲\varepsilon_۲-(\varepsilon_۱+\varepsilon_۳)=۲\times\sigma\varepsilon_۰-(\varepsilon_۰+۴\varepsilon_۰)=۷\varepsilon_۰$$

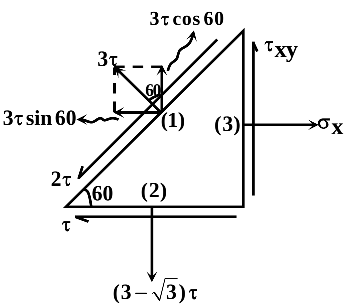
۱۵ـ گزینه «۳»

۱۶ـ گزینه «۲»

$$\text{تنش ون‌میزز}\ \sigma_e=\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^۲+(\sigma_y-\sigma_z)^۲+(\sigma_z-\sigma_x)^۲+۶(\tau_{xy}^۲+\tau_{yz}^۲+\tau_{zx}^۲)}{۲}}$$

$$\sigma_x=\sigma \ , \ \sigma_y=\sigma_z=۰ \ , \ \tau_{xy}=\tau \ , \ \tau_{yz}=\tau_{zx}=۰ \quad ; \quad \sigma_e=\sqrt{\sigma^۲+۳\tau^۲} \ \Rightarrow \sigma_y^۲=\sigma^۲+۳\tau^۲$$

۱۷ـ گزینه «۳» در المان مقابل داریم تنش نرمال ۳τ را در جهت افق و قائم تصویر می‌کنیم. تنش برشی ۲τ را نیز در جهت افق و قائم تصویر می‌کنیم. اگر سطح ۱ برابر $A_۱ \Leftarrow$ سطح (۲) $A_۲=A_۱\cos۶۰^\circ$ و سطح (۳) $A_۳=A_۱\sin۶۰^\circ$.



تعادل را برای المان بالا می‌نویسیم:

$$\sum F_x=۰$$

$$\Rightarrow (A_۱\sin۶۰^\circ)\sigma_x=(A_۱\cos۶۰^\circ)\tau+A_۱(۳\tau\sin۶۰^\circ+۲\tau\cos۶۰^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sigma_x=\frac{۱}{۲}\tau+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\tau+\tau \Rightarrow \sigma_x=(۳+\sqrt{۳})\tau$$

با نوشتن تعادل در جهت y، τ_{xy} را نیز می‌توان محاسبه کرد.

۱۸ـ گزینه «۳»

۱۹ـ گزینه «۳»

۲۰ـ گزینه «۳»

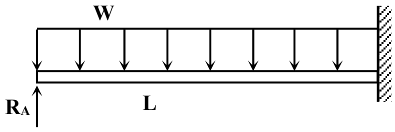
فصل ششم

«خیز تیرها»

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۱)

۱ـ گزینه «۱» تکیه‌گاه A را برداشته به جای آن عکس‌العمل تکیه‌گاهی R_A قرار داده می‌شود، اکنون با استفاده از جدول، خیز در نقطه A محاسبه شده و نتیجه مساوی صفر قرار داده شده و از این طریق نیروی تکیه‌گاهی A بدست آورده می‌شود.

$$\delta_A = -\frac{WL^۴}{۸EI} + \frac{R_A L^۳}{۳EI} = ۰ \Rightarrow R_A = \frac{۳}{۸}WL$$

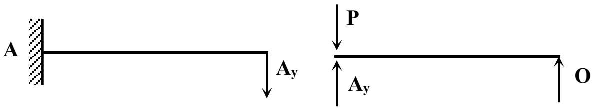


۲ـ گزینه «۱» تیر را در مفصل A جدا کرده، سپس با نوشتن معادله گشتاور برای تیر سمت راست می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum M_O = ۰ \Rightarrow P = A_y$$

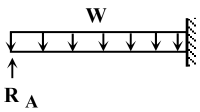
برای تیر سمت چپ می‌توان نوشت:

$$\delta_A = \frac{A_y L^۳}{۳EI} = +\frac{PL^۳}{۳EI}$$



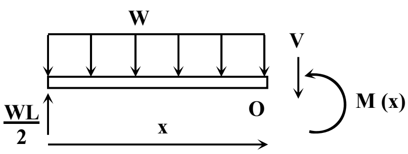
۳ـ گزینه «۳» طبق روش جمع آثار می توان مقدار نیروی تکیه گاهی را به صورت زیر به دست آورد:

$$y_A = ۰ \Rightarrow -\frac{R_A L^۳}{۳EI} + \frac{WL^۴}{۸EI} = ۰ \Rightarrow R_A = \frac{۳}{۸}WL$$



$$R_A = \frac{۳}{۸} \times ۶۰۰ \times ۴ = ۹۰۰N$$

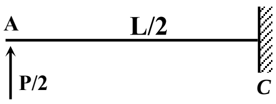
۴ـ گزینه «۴» در فاصله x از تکیه‌گاه سمت چپ برش زده و دیاگرام آزاد آن رسم می‌شود، با نوشتن معادله تعادل گشتاور $M(x)$ بدست می‌آید.



$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow M(x) + \frac{wx^۲}{۲} - \frac{wL}{۲}x = ۰$$

$$M(x) = \frac{wL}{۲}x - \frac{wx^۲}{۲}$$

۵ـ گزینه «۳» می‌توان به جدول ضمیمه کتاب رجوع کرد یا بدلیل تقارن در بارگذاری از روش زیر استفاده کرد.



$$y_c = -\delta_{\frac{A}{C}} = \frac{\frac{P}{۲}(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI} = \frac{PL^۳}{۴۸EI}$$

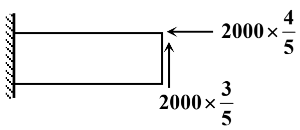
۶ـ گزینه «۱»

۷ـ گزینه «۴» چون در گزینه‌ها گشتاور ماکزیمم متفاوت است، پس کافی است گشتاور ماکزیمم محاسبه شود:

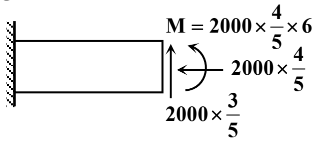
$$M_{max} = A_y \times ۰/۵ = \frac{۱۵ \times ۱ \times ۰/۵}{۱/۵} = ۵KN.m$$

۸ـ گزینه «۴»

۹ـ گزینه «۲» با توجه به جدول خیز و استفاده از روش جمع آثار می‌توان نوشت:



نیروها به مرکز سطح مقطع انتقال داده می‌شوند



$$\delta = \frac{FL^۳}{۳EI} + \frac{ML^۲}{۲EI} = \frac{(۲۰۰۰ \times \frac{۳}{۵})(۵ \times ۱۲)^۳}{۳ \times ۱۲ \times ۱۰^۵ \times ۲۱۶} + \frac{(۲۰۰۰ \times \frac{۴}{۵} \times ۶)(۵ \times ۱۲)^۲}{۲ \times ۱۲ \times ۱۰^۶ \times ۲۱۶} \Rightarrow \delta = ۰/۴in$$

۱۰ـ گزینه «۳»

$$y_B = \frac{wL^4}{8EI} - \frac{(\frac{wL^2}{4})L^2}{2EI} - \frac{R_B}{3EI} = 0 \Rightarrow R_B = 0$$

۱۱ـ گزینه «۱» شیب در تکیه‌گاه A صفر است:

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{16EI} - \frac{M_A L}{3EI} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{3}{16}PL$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -A_y L + \frac{3PL}{16} + \frac{PL}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{11}{16}P$$

۱۲ـ گزینه «۲»

۱۳ـ گزینه «۳»

۱۴ـ گزینه «۴» در تکیه‌گاه ریلی شیب برابر صفر است در نتیجه:

$$0 \Rightarrow \frac{WL^3}{6EI} - \frac{M_B L}{EI} = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{6}$$

خیز مقطع B برابر است با:

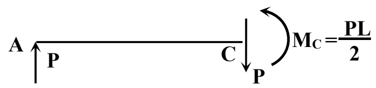
$$\frac{WL^4}{8EI} - \frac{M_B L^2}{2EI} = \frac{WL^4}{8EI} - \frac{WL^4}{12EI} = \frac{WL^4}{24EI}$$

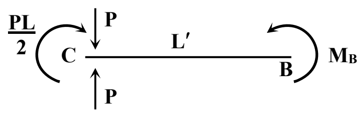
۱۵ـ گزینه «۳» در تکیه‌گاه ریلی، نیروی برشی و شیب مساوی صفر است

۱۶ـ گزینه «۳» حداکثر خیز ایجاد در تیر تحت بار مثلثی نصف حداکثر خیز ایجادشده در تیر ساده تحت بار مستطیلی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$y_{max} = \frac{1}{2} \times \frac{5w_0 L^4}{384EI} = \frac{5w_0 L^4}{768EI}$$

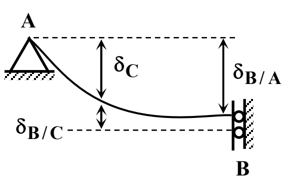
۱۷ـ گزینه «۱» در تکیه‌گاه نیروی برشی مساوی صفر است. بنابراین دیاگرام آزاد بخش AC و BC تیر به شکل نشان داده شده می‌باشد:





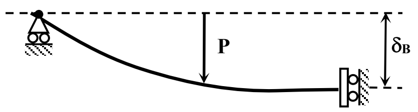
$$R_B = 0, R_A = P$$

$$\delta_{B/C} \Rightarrow \frac{ML'^2}{2EI} = \frac{(\frac{PL}{2})(\frac{L}{2})^2}{2EI} = \frac{PL^3}{16EI}$$

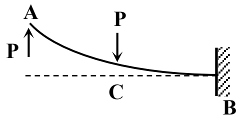


$$\delta_C = \delta_{B/A} - \delta_{B/C} = \frac{11PL^3}{48EI} - \frac{PL^3}{16EI} = \frac{PL^3}{6EI}$$

۱۸ـ گزینه «۲»

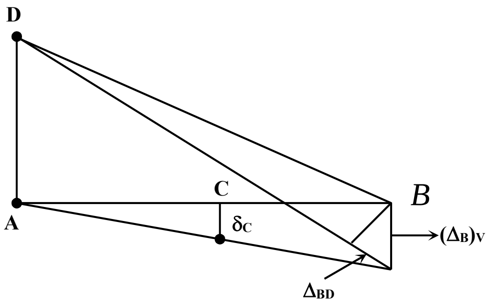


$$\delta_B = -\delta_{A/B} = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI} - \frac{P(\frac{L}{2})^2}{2EI} \times \frac{L}{2} = \frac{11PL^3}{48EI}$$



$$\delta_{A/B}=-\delta_{B/A}=\frac{PL^3}{3EI}-\frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI}-\frac{P(\frac{L}{2})^2}{2EI}\times\frac{L}{2}=\frac{11PL^3}{48EI}$$

۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از معادله تعادل نیروی موجود در کابل بدست می‌آید.



$$\sum M_A=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}F\times L-\frac{WL^2}{2}=0\Rightarrow F=\frac{WL}{\sqrt{2}}$$

مقدار افزایش طول کابل ناشی از نیروی کششی برابر است با:

$$\Delta_{BD}=\frac{F(L\sqrt{2})}{AE}=\frac{(\frac{WL}{\sqrt{2}})(L\sqrt{2})}{AE}=\frac{WL^2}{AE}=\frac{WL^4}{12\sqrt{2}EI}$$

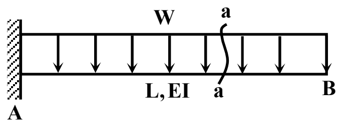
اما خیز قائم مقطع B در اثر Δ_{BD} برابر خواهد بود با:

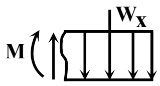
$$(\Delta_B)_V=\frac{\Delta_{BD}}{\cos 45}=\frac{WL^4}{12\sqrt{2}EI}\times\sqrt{2}=\frac{WL^4}{12EI}$$

تغییر مکان نقطه C در وسط تیر با استفاده از روش جمع آثار بدست می‌آید.

$$\delta_c=\frac{5WL^4}{384EI}+\frac{(\Delta_B)_V}{2}=\frac{5WL^4}{384EI}+\frac{WL^4}{24EI}=\frac{(5+16)WL^6}{384EI}=\frac{21WL^4}{384EI}\Rightarrow\delta_c=\frac{7WL^4}{128EI}$$

۲۰ـ گزینه «۴» مقطع $a-a$ را جهت بدست آوردن گشتاور خمشی در نظر بگیرید.





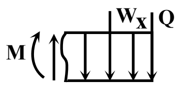
$$\sum M=0\Rightarrow M(x)=\frac{-wx^2}{2}$$

قضیه دوم لنگر سطح $\Rightarrow \delta_B=A\bar{x}=(\frac{1}{3}(\frac{WL^2}{2})L)(\frac{3}{4}L)=\frac{WL^4}{8EI}$

روش دیگر: با فرض نیروی فرضی Q در B

$$M(x)=-\frac{wx^2}{2}+Qx$$

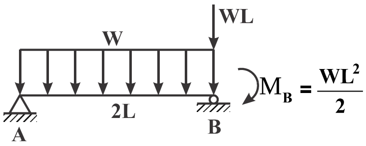
$$\frac{\delta M}{\delta Q}=-x$$



$$y_B=\int\frac{(\frac{-q}{2}x^2)(-x)}{EI}dx=\frac{w\ell^4}{8EI}$$

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۲)

۱ـ گزینه «۳» برای تعیین شیب تیر در تکیه‌گاه B تأثیر بخش BC تیر بر روی تکیه‌گاه B لحاظ شده سپس از روش جمع آثار استفاده می‌شود.

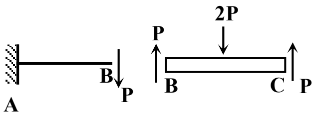


$$+\circlearrowleft \theta_B = \frac{W(2L)^3}{24EI} - \frac{M_B(2L)}{3EI} = \frac{WL^3}{3EI} - \frac{WL^3}{3EI} = 0$$

۲ـ گزینه «۱» دو تیر AB و BC مانند دو فنر موازی عمل می‌کنند. برای محاسبه خیز مقطع B می‌توان از این نکته به صورت زیر استفاده کرد:

$$y_B = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_{AB}+k_{BC}} = \frac{F}{\frac{3(2EI)}{L^3}+\frac{3EI}{(\frac{L}{2})^3}} = \frac{F}{\frac{6EI}{L^3}+\frac{24EI}{L^3}} \Rightarrow y_B = \frac{FL^3}{30EI}$$

۳ـ گزینه «۲» به هر یک از مفاصل B و C بدلیل تقارن نیروی P اعمال می‌شود. در نتیجه تیر AB مانند تیر یکسر گیردار تحت بار P در انتهای خود عمل می‌کند.



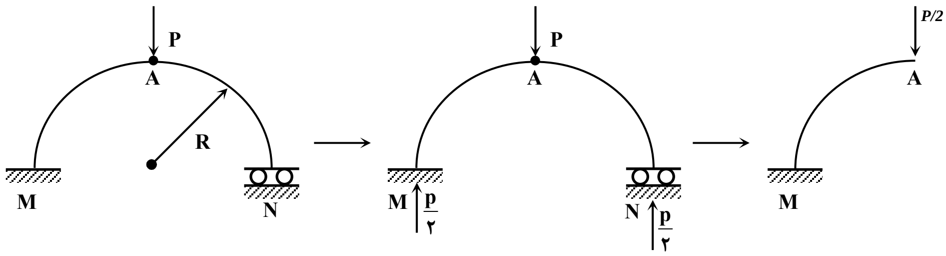
با توجه به جدول خیز $\delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$

۴ـ گزینه «۳» با استفاده از روش جمع آثار می‌توان نوشت:

$$\delta_B = (\delta_B)_1 + (\delta_B)_2 = \frac{P(2L)^3}{3EI} + [-\frac{(np)L^3}{3EI} - \theta \times L]$$

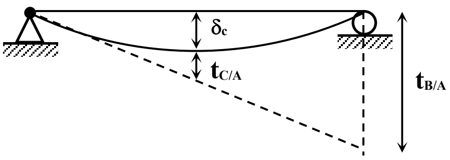
$$\Rightarrow \delta_B = \frac{P(2L)^3}{3EI} - \frac{(np)L^3}{3EI} - \frac{(np)L^2}{2EI} \times L = 0 \Rightarrow n = \frac{16}{5}$$

۵ـ گزینه «۳» نیروی افقی در تکیه‌گاهM مساوی صفر است در نتیجه تکیه‌گاه M و N را می‌توان مشابه یکدیگر در نظر گرفت. بدلیل تقارن اکنون می‌توان تنها نیمی از سازه را در نظر گرفت. در نتیجه نیروی وارد بر مفصل A در سمت چپ سازه مساوی $\frac{P}{2}$ می‌باشد. با مقایسهٔ دو سازه داده شده در صورت مسئله نتیجه می‌شود:



$$\Rightarrow \delta_A = \frac{1}{2}\delta_B$$

۶ـ گزینه «۱» برای حل مسئله می‌توان مستقیم از جدول خیز استفاده نمود یا آنکه از قضیه دوم ممان مساحت به شکل زیر استفاده شود.

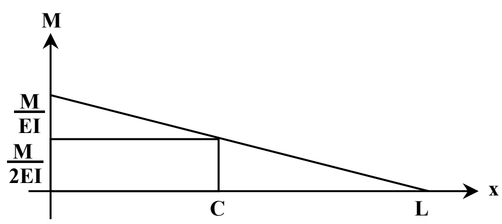


$$\delta_C = \frac{ML^2}{16EI}$$

یا

$$\delta_C = \frac{1}{2}t_{B/A} - t_{C/A}$$

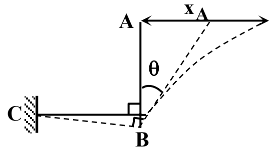
$$t_{B/A} = A\bar{x} = \frac{M}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2L}{3}$$



$$t_{C/A} = \frac{M}{2EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{4} + \frac{M}{2EI} \times \frac{L}{4} \times \frac{2(\frac{L}{2})}{3}$$

$$\Rightarrow \delta_C = \frac{ML^2}{EI}(\frac{1}{6} - \frac{1}{16} - \frac{1}{24}) = \frac{1}{16}\frac{ML^2}{EI}$$

۷ـ گزینه «۴» در اثر نیروی P مقطع B دچار دوران به اندازه θ می‌شود که مقدار آن $\frac{M_B L}{EI}$ است.

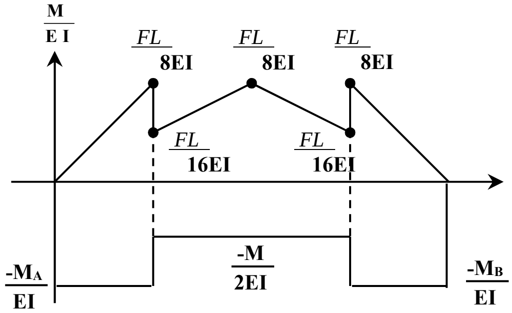


خیز ناشی از دوران بدون اثر خمش

$$x_A = x_{A_1} + x_{A_2} = x_{A_1} + \theta_B \times L_{AB} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{ML}{EI} \times L = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{EI} = \frac{4PL^3}{3EI}$$

خیز ناشی از خمش بدون اثر دوران

۸ـ گزینه «۳» بدلیل تقارن در بارگذاری لنگرهای تکیه‌گاهی مساویند. بنابراین بـا اسـتفاده از قضـیه اول ممـان مسـاحت $\theta_{B/A} = 0$ بـوده و در نتیجـه مساحت کل زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ مساوی صفر است.



$$\frac{M_A}{EI} \times \frac{L}{4} + \frac{M_A}{2EI} \times \frac{L}{2} + \frac{M_A}{EI} \times \frac{L}{4} =$$

$$\frac{FL}{8EI} \times \frac{L}{8} \times 2 + \frac{FL}{16EI} \times \frac{L}{2} + \frac{FL}{16EI} \times \frac{L}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{M_A L}{2EI} + \frac{M_A L}{4EI} = \frac{FL^2}{32EI} + \frac{FL^2}{32EI} + \frac{FL^2}{64EI}$$

$$\Rightarrow \frac{3M_A L}{4EI} = \frac{5FL^2}{64EI} \Rightarrow M_A = \frac{5FL}{48}$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا فرض می‌کنیم قسمت AB تیر یکسر گیردار می‌باشد (تکیه‌گاه B بدون چرخش) در نتیجه $\theta_{A/B} = \frac{M_0 L_1}{EI}$ اما چرخش در تکیه‌گاه ناشی از لنگر M_0 مساوی است با:

$$\theta_B = \frac{M_0 L_2}{3EI} \Rightarrow \theta_A = \theta_{A/B} + \theta_B = \frac{M_0 L_1}{EI} + \frac{M_0 L_2}{3EI} = \frac{M_0}{EI}(L_1 + \frac{L_2}{3})$$

۱۰ـ گزینه «۳» با توجه به سختی معادل تیر طبق جدول فصل ششم کتاب می‌توان نوشت:

$$y_B = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{12EI/L^3} = \frac{FL^3}{12EI}$$

۱۱ـ گزینه «۲»

۱۲ـ گزینه «۳» اگر ممان در تکیه‌گاه D صفر باشد به معنای آن است که بارگذاری وارد بر میله BD به صـورت محـوری اسـت. در ایـن حالـت مقطـع B هیچ‌گونه چرخشی نخواهد داشت و تیرهای AB و BC مانند دو تیر دو سر گیردار رفتار می‌کنند. بنابراین با توجه به نتیجه مثـال‌هـای (۴۰) و (۴۳) مـتن درس می‌توان نوشت:

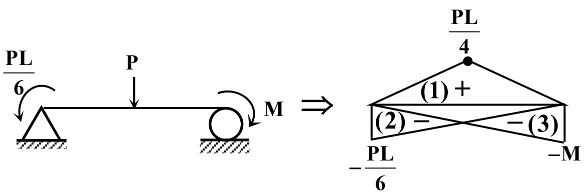
$$\theta_B = 0 \Rightarrow \theta_{B_1} - \theta_{B_2} = 0 \Rightarrow \theta_{B_1} = \theta_{B_2} \Rightarrow M_{B1} = M_{B2} \Rightarrow \frac{PL}{8} = \frac{WL^2}{12} \Rightarrow P = \frac{2}{3}WL$$

۱۳ـ گزینه «۳» تغییر طول تار فوقانی تیر توسط رابطه روبرو محاسبه می‌شود:

$$\delta_{AB} = \int \varepsilon_x dx = \int \frac{MC}{EI} dx = C \int_{x_A}^{x_B} \frac{Mdx}{EI} = \frac{h}{2} \times \theta_{B/A}$$

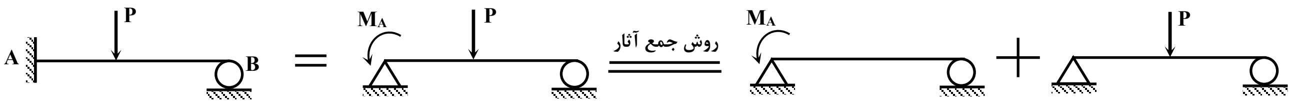
برای آنکه تار فوقانی تیر تغییر طول ندهد، طبق قضیه اول ممان مساحت باید اختلاف شیب بین دو تکیه‌گاه مساوی صفر باشد. (مجموع مسـاحت‌هـای زیـر نمودار $\frac{M}{EI}$ مساوی صفر باشد)

$$\theta_{B/A} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} A_i = 0$$



$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \Rightarrow \frac{PL}{4} \times \frac{L}{2} - \frac{PL}{6} \times \frac{L}{2} - M \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{PL}{12}$$

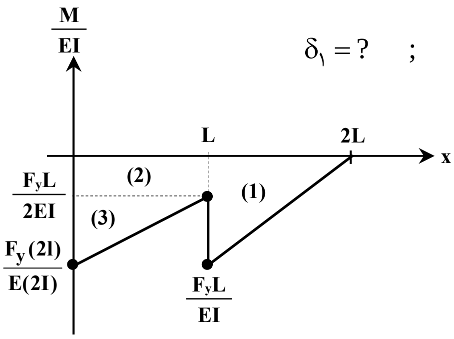
۱۴ـ گزینه «۳» با استفاده از جدول شیب و روش جمع آثار می‌توان نوشت:



$$\theta_A=\theta_{A_1}+\theta_{A_2}=0\Rightarrow -\frac{M_A L}{3EI}+\frac{PL^2}{16EI}=0\Rightarrow M_A=\frac{3}{16}PL$$

۱۵ـ گزینه «۲» در معادله لنگر خمشی درجه تابع منفرد مربوط به نیروی متمرکز و بار گسترده به ترتیب مساوی یک و دو می‌باشد

۱۶ـ گزینه «۲» با استفاده از قضیه دوم ممان مساحت می‌توان نوشت:



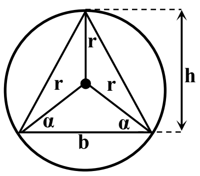
$$\delta_1=?\quad ;\quad \delta_1=\sum_{i=1}^{3}A_i\bar{x}_i=A_1\bar{x}_1+A_2\bar{x}_2+A_3\bar{x}_3$$

$$\Rightarrow \delta_1=\frac{F_yL}{EI}\times\frac{L}{2}\times\frac{2}{3}L+\frac{F_yL}{2EI}\times L\times\frac{3L}{2}+\frac{F_yL}{2EI}\times\frac{L}{2}\times\left(L+\frac{2L}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_1=\frac{F_yL^3}{3EI}+\frac{3F_yL^3}{4EI}+\frac{5F_yL^3}{12EI}=\frac{F_yL^3}{EI}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_1=\frac{F_yL^3}{EI}\times\frac{4+9+5}{12}=\frac{3}{2}\frac{F_yL^3}{EI}$$

۱۷ـ گزینه «۲» برای آنکه خیز تیر مینیمم شود باید ممان اینرسی مقطع مثلثی ماکزیمم شود.



$$I=\frac{bh^3}{36}=\frac{(2r\cos\alpha)(r+r\sin\alpha)^3}{36}$$

$$I=\frac{r^4}{18}\cos\alpha(1+\sin\alpha)^3\Rightarrow\frac{dI}{d\alpha}=0\Rightarrow -\sin\alpha(1+\sin\alpha)^3+3\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)^2=0$$

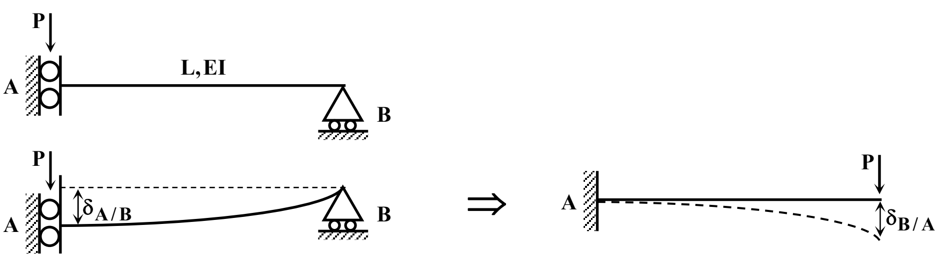
$$\Rightarrow(1+\sin\alpha)^2[-\sin\alpha-\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha]=0\Rightarrow 4\sin^2\alpha+\sin\alpha-3=0\Rightarrow\sin\alpha=-1,\frac{3}{4}$$

$\sin\alpha=\frac{3}{4}$ جواب قابل قبول

$$h=r+r\sin\alpha=r+\frac{3}{4}r=\frac{7}{4}r=\frac{7}{8}D$$

۱۸ـ گزینه «۳» برای پیدا کردن خیز قائم نقطهٔ A می‌توان از شبیه سازی فوق استفاده نمود.

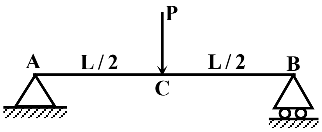
$$\sum F_y=0\Rightarrow B_y=P$$



$$|\delta_{\frac{A}{B}}|=|\delta_{\frac{B}{A}}|$$

$$|\delta_{\frac{B}{A}}|=\frac{PL^3}{3EI}$$

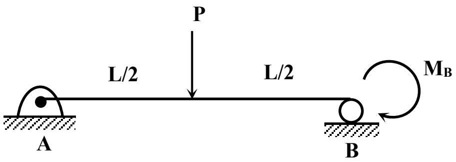
۱۹ـ گزینه «۱» با توجه به معادلات δ_{max}، θ_{max} در پوسته مقابل



$$\delta_c = \delta_{max} = \frac{PL^۳}{۴۸EI} \quad , \quad \theta_{A,B} = \theta_{max} = \frac{PL^۲}{۱۶EI}$$

در صورتی که ابعاد مقطع و طول پوسته α برابر شود، I $(I = \frac{bh^۳}{۱۲})$، $\alpha^۴$ برابر می‌شود. در نتیجه δ_{max}، $\frac{۱}{\alpha}$ برابر و θ_{max}، $\frac{۱}{\alpha^۲}$ برابر می‌شود.

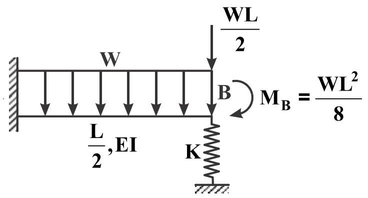
۲۰ـ گزینه «۱» فنر مانع چرخش در تکیه‌گاه B خواهد شد، در نتیجه:



$$R_A = \frac{P}{۲} - \frac{M_B}{L} \qquad R_B = \frac{P}{۲} + \frac{M_B}{L}$$

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۳)

۱ـ گزینه «۴» ابتدا تأثیر بخش BC تیر بر روی این مقطع نشان داده می‌شود. سپس با استفاده از روش جمع آثار خیز این مقطع محاسبه می‌شود.



$$y_B=\frac{w(\frac{L}{۲})^۴}{۸EI}+\frac{(\frac{WL}{۲})(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI}+\frac{(\frac{WL^۲}{۸})(\frac{L}{۲})^۲}{۲EI}-\frac{F(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI} \qquad (۱)$$

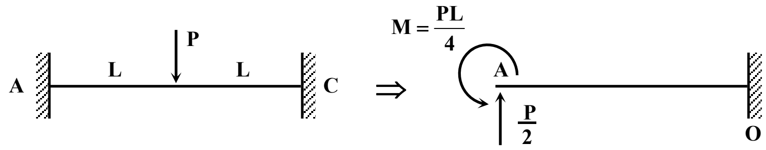
$$F=ky_B=\frac{۶EI}{L^۳}y_B \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow y_B=\frac{WL^۴}{۱۶\times ۸EI}+\frac{WL^۴}{۱۶\times ۳EI}+\frac{WL^۴}{۳۲\times ۲EI}-\frac{y_B}{۴}\Rightarrow \frac{۵}{۴}y_B=\frac{WL^۴}{EI}\left(\frac{۱}{۱۶\times ۸}+\frac{۱}{۱۶\times ۳}+\frac{۱}{۳۲\times ۲}\right)\Rightarrow y_B=\frac{۱۷}{۴۸۰}\frac{WL^۴}{EI}$$

۲ـ گزینه «۳» تیرهای AC و BD و فنر همانند سه فنر موازی عمل می‌کنند (چون خیز آنها در نقطه O برابر است) سهم نیروی تحمل شده توسط فنر مساوی است با:

$$F`_S=\frac{K_S}{K_S+۲K_{AC}}\times P=\frac{۱۲\frac{EI}{L^۳}}{\frac{۱۲EI}{L^۳}+۲\times\frac{۲۴EI}{L^۳}}=\frac{P}{۵}$$

محاسبه سختی معادل فنر AC: با استفاده از تقارن تیر می‌توان سختی تیر AC را محاسبه نمود:



$$\theta_o=۰\Rightarrow\frac{-\frac{P}{۲}\times L^۲}{۲EI}+\frac{M_A L}{EI}=۰$$

$$\Rightarrow M_A=\frac{PL}{۴}$$

$$\delta_o=-\delta_{A/o}=\frac{\frac{P}{۲}L^۳}{۳EI}-\frac{P\frac{L}{۴}\times L^۲}{۲EI}=\frac{PL^۳}{۲۴EI}\Rightarrow K_{AC}=\frac{P}{\delta_A}=\frac{۲۴EI}{L^۳}$$

۳ـ گزینه «۳» خیز وسط تیر ساده تحت بار مثلثی برابر نصف خیز وسط تیر تحت بار مستطیلی است بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۵w(۲L)^۴}{۳۸۴EI}=\frac{۵w\times ۱۶L^۴}{۷۶۸EI}=\frac{۵}{۴۸}\frac{wL^۴}{EI}$$

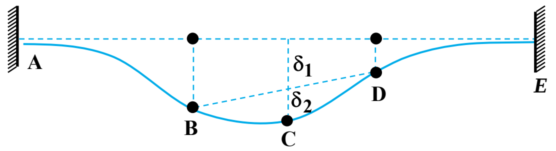
۴ـ گزینه «۳» با توجه به برابری خیز مقطع B در دو تیر می‌توان رابطه سازگاری را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{F_B L^۳}{۳EI}=\frac{(F-F_B)L^۳}{۳EI}+\frac{ML^۲}{۲EI}\xrightarrow{M=FL}F_B=\frac{۵}{۴}F\Rightarrow y_B=\frac{F_B L^۳}{۳EI}=\frac{۵FL^۳}{۱۲EI}$$

۵ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه ممان اینرسی هر دو مقطع نسبت به محور افقی گذرنده از مرکز سطح برابر است بنابراین خیز آن‌ها یکسان است.

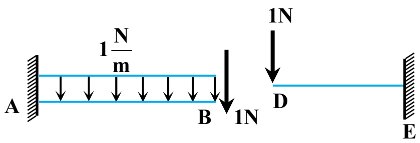
۶ـ گزینه «۴» به جای تکیه‌گاه B نیروی تکیه‌گاهی قرارداده سپس خیز ناشی از نیروی R_B و گشتاور $M_\circ$ محاسبه شده و نتیجه برابر صفر قرار داده می‌شود. $\delta_B=۰\Rightarrow\frac{R_B L^۳}{۳EI}-\frac{M_\circ L^۲}{۲EI}=۰\Rightarrow R_B=\frac{۳M_\circ}{۲L}$.

۷ـ گزینه «۳» نیروی ۲N چون به وسط میله BD وارد شده است، بنابراین به هر یک از مفاصل D و B نیروی ۱N وارد می‌کند. اما خیز انتهای تیر یکسرگیردار AB تحت نیروی ۱N و بار گسترده برابر است با:



$$y_B = \frac{WL^4}{8EI} + \frac{FL^3}{3EI} = \frac{1}{8EI} + \frac{1}{3EI} = \frac{11}{24EI}$$

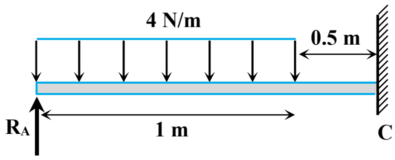
$$y_D = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{1}{3EI}$$



خیز مقطع C ناشی از نیروی متمرکز ۲N، (δ_2) در وسط تیر برابر $\frac{FL^3}{48EI}$ می‌باشد بنابراین می‌توان نوشت:

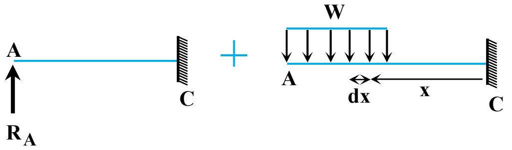
$$y_C = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow y_C = \left(\frac{y_D + y_E}{2}\right) + \frac{FL^3}{48EI} = \left(\frac{11}{48EI} + \frac{1}{6EI}\right) + \frac{2}{48EI} = \frac{7}{16EI}$$

۸ـ گزینه «۴» بدلیل تقارن در بارگذاری تنها نیمی از تیر را در نظر می‌گیریم. با حل معادله تعادل نیروی تکیه‌گاه A بدست می‌آید. در این حالت در وسط تیر شیب صفر بوده بنابراین می‌توان در وسط تیر یک تکیه‌گاه گیردار فرضی در نظر گرفت.



$$\delta_C = -\delta_{\frac{A}{C}} \qquad \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A = 4N \ \text{(کل تیر)}$$

اکنون با استفاده از روش جمع آثار خیز نقطه C تعیین می‌شود:

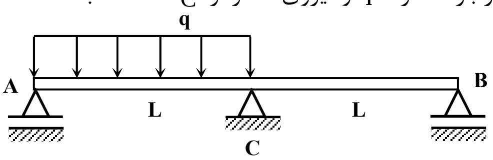


$$;\quad dF = qdx = 4dx$$

برای تعیین خیز مقطع A ناشی از بارگسترده کافی است، خیز ناشی از یک جزء نیروی dF محاسبه شده، سپس از آن انتگرال‌گیری شود.

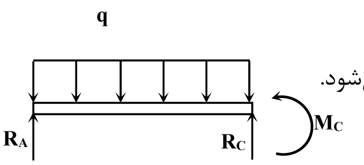
$$\delta_C = -\left[-\frac{R_A L^3}{3EI} + \int_{0/5}^{1/5} \frac{dFx^2(3L-x)}{6EI}\right] = \frac{4\times 1/5^3}{3EI} - \int_{0/5}^{1/5} \frac{4x^2(3\times 1/5 - x)dx}{6EI} \Rightarrow \delta_c = \frac{1}{EI}\left(4/5 - \frac{2}{3}\left[1/5x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{0/5}^{1/5}\right) = \frac{2/08}{EI}$$

۹ـ گزینه «۲» تیر نامعین استاتیکی می‌باشد، برای محاسبه نیروی تکیه‌گاهی C، خیز این نقطه ناشی از بار گسترده q و نیروی متمرکز R_C محاسبه شده و برابر صفر قرار داده می‌شود تا R_C بدست آید.



$$\Rightarrow \delta_C = \frac{5q(2L)^4}{768EI} - \frac{R_C(2L)^3}{48EI} = 0$$

$$R_C = \frac{480}{768}qL = \frac{5}{8}qL$$

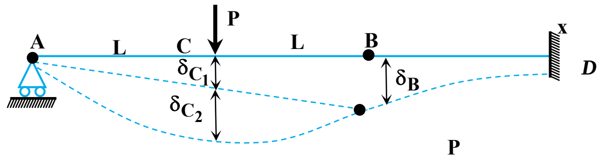


برای تعیین لنگر داخلی در مقطع C دیاگرام آزاد بخش AC تیر رسم شده و برای آن معادله تعادل گشتاور نوشته می‌شود.

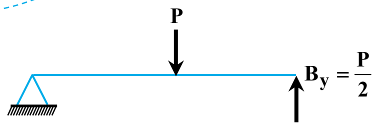
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_C + R_C \times L - qL \times L/2 = 0 \Rightarrow M_C = \frac{qL^2}{2} - \frac{5}{8}qL^2 \Rightarrow M_C = -\frac{qL^2}{8}$$

۱۰ـ گزینه «۱» خیز مقطع B ناشی از نیروی F و لنگر M_B مساوی است با:

$$y_B = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL^2}{2EI} \times \frac{L}{2} - \frac{M_B\left(\frac{3L}{2}\right)^2}{2EI} \Rightarrow M_B = \frac{14}{27}FL$$



۱۱ـ گزینه «۱» نیروی داخلی ایجاد شده در مفصل B ناشی از نیروی P مساوی $B_y = \frac{P}{۲}$ است. اما در اثر این نیرو مفصل B به اندازه δ_B به پایین جابجا می‌شود، در نتیجه:



$$\delta_C = \delta_{C_۱} + \delta_{C_۲} = \frac{\delta_B}{۲} + \frac{FL^۳}{۴۸EI} = \frac{۱}{۲}\times\frac{(\frac{P}{۲})L^۳}{۳EI} + \frac{P(۲L)^۳}{۴۸EI} \Rightarrow \delta_C = \frac{PL^۳}{۱۲EI}+\frac{PL^۳}{۶EI}=\frac{PL^۳}{۴EI}$$

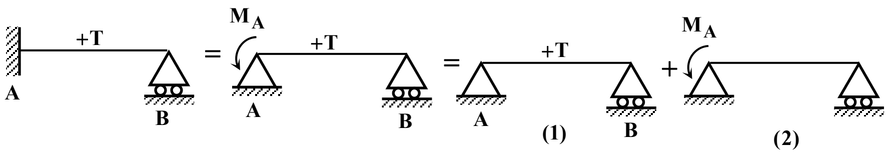
$\delta_{C_۱}=$ جمله اول : خیز نقطه C ناشی از خیز نقطه B. ($\delta_{C_۱} = \frac{\delta_B}{۲}$)

$\delta_{C_۲}=$ جمله دوم : خیز نقطه C ناشی از نیروی P در تیر AB. ($\delta_{C_۲}=\frac{FL^۳}{۴۸EI}$)

۱۲ـ گزینه «۴» تحت گرادیان دما در راستای عرضی، معادله دیفرانسیل تغییر شکل به صورت زیر است :

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{\alpha(T_۲-T_۱)}{h} = \frac{\alpha(۰-T)}{h} = -\frac{\alpha T}{h}$$

اما با توجه به حل تشریحی مثال ۵۳ شیب در تکیه‌گاه A در تیر ساده ناشی از گرادیان دمایی برابر $\frac{-\alpha L\Delta T}{۲h}$ می‌باشد. بنابراین با توجه به اینکه در تکیه‌گاه A در این مثال شیب برابر صفر است، می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار مسئله را حل نموده و لنگر تکیه‌گاهی را بدست آورد.



$$\theta_A = ۰ = \theta_{A۱} + \theta_{A۲} = -\frac{\alpha L \Delta T}{۲h} - \frac{M_A L}{۳EI} = ۰ \Rightarrow M_A = -\frac{۳}{۲}\frac{EI\alpha\Delta T}{h} \Rightarrow M_A = -\frac{۳}{۲}\frac{EI\alpha(T_۲-T_۱)}{h} = \frac{۳}{۲}\frac{EI\alpha T}{h}$$

۱۳ـ گزینه«۲»

$$\frac{EI}{\rho}=M\ ,\ EI\frac{d^۲y}{dx^۲}=M\ ,\ M''=-W \Rightarrow M=\int(\int -\omega_۰ \sin\frac{\pi x}{L}dx)dx + C_۱x + C_۲$$

با اعمال شرایط مرزی $C_۱=C_۲=۰$ می‌باشد.

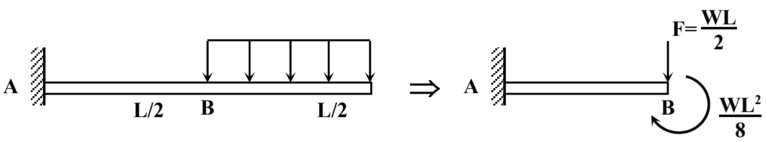
$$x=۰ \Rightarrow M=۰ \Rightarrow C_۲=۰$$

$$x=L \Rightarrow M=۰\Rightarrow C_۱=۰$$

$$\Rightarrow M = \frac{\omega_۰ L^۲}{\pi^۲}\sin\frac{\pi x}{L} \Rightarrow M_{max} = \frac{\omega_۰L^۲}{\pi^۲}$$

از طرفی : $\frac{۱}{\rho} =$ انحنای تیر $= \frac{M_{max}}{EI} = \frac{\omega_۰L^۲}{\pi^۲EI}$

۱۴ـ گزینه «۲» نیروی گسترده را به صورت نیروی متمرکز به نقطه B منتقل می‌کنیم:



با استفاده از روش جمع آثار و جدول خیز می‌توان نوشت:

$$\delta_B = \frac{(W\frac{L}{۲})\times(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI} + \frac{(W\frac{L^۲}{۸})\times(\frac{L}{۲})^۲}{۲EI} = \frac{WL^۴}{۴۸EI}+\frac{WL^۴}{۶۴EI}=\frac{۷WL^۴}{۱۹۲EI}$$

۱۵ ـ گزینه «۴»

$y_A = y_{A_1}$ (ناشی از دوران مقطع B بدون در نظر گرفتن اثر خمش در قسمت AB) $+ y_{A_2}$ (ناشی از خمش خالص تیر AB بدون در نظر گرفتن اثر دوران مقطع B) $= y_{A_1} + \theta_B \times L_1$

$$y_A = \frac{M_\circ L_1^2}{2EI} + \frac{M_\circ L_2}{3EI} \times L_1 = \frac{M_\circ L_1}{EI}\left(\frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{3}\right) = \frac{M_\circ L_1}{EI}\left(\frac{3L_1 + 2L_2}{6}\right)$$

۱۶ـ گزینه «۲» چون سطح شیبدار دارای زاویه 45° است، در نتیجه مولفه‌های افقی و قائم نیروی تکیه‌گاه B با یکدیگر مساوی است، همچنین مولفهٔ قائم و افقی جابجایی انتهای تیر، مساوی است. اما خیز افقی تیر، ناشی از انبساط حرارتی و عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه است، در حالی‌که خیز قائم تنها ناشی از عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه است.

$$\left.\begin{matrix}\Delta V = \Delta H \\ F_V = F_H\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{F_V L^3}{3EI} = \alpha L \Delta T - \frac{F_H L}{AE} \Rightarrow F_V = \frac{\alpha L \Delta T}{\frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{AE}} = F_H$$

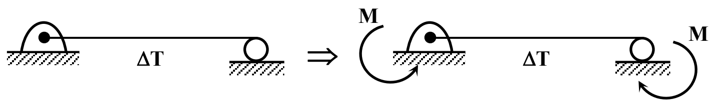
حداکثر لنگر خمشی در تکیه‌گاه گیردار اتفاق خواهد افتاد و مساوی است با:

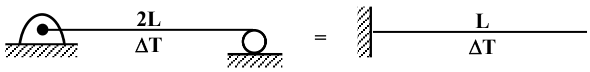
$$M_{max} = F_V L \Rightarrow M_{max} = \frac{\alpha L \Delta T}{\frac{L^2}{3EI} + \frac{1}{AE}}$$

۱۷ـ گزینه «۴» **روش اول:** در این مسئله تغییر مکان ناشی از گرادیان دما در تکیه‌گاه B مساوی و قرینه خیز ناشی از نیروی R_B در تکیه‌گاه می‌باشد.

$$\delta_B = \circ = \delta_{B1} + \delta_{B2} \qquad \delta_{B1} = ? \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\alpha \Delta T}{h} \Rightarrow M = \frac{EI\alpha\Delta T}{h}$$

تیری ساده که تحت گرادیان دما قرار گرفته است مانند تیری است که تحت دو کوپل مساوی و مختلف الجهت M قرار گرفته باشد، خیز ناشی از دو کوپل مساوی و مختلف الجهت در دو سر تیر ساده مساوی است با:





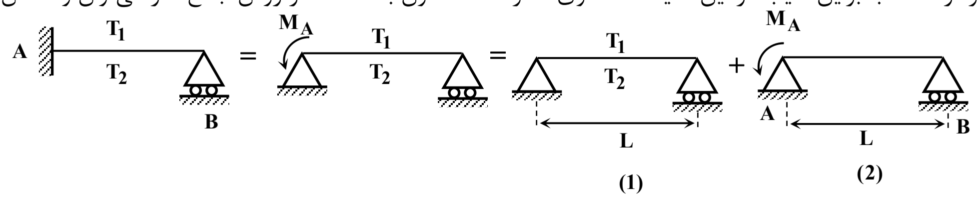
$$y_{max} = \frac{ML^2}{8EI} = \frac{(EI\alpha\Delta T)L^2}{8EIh} = \frac{\alpha L^2 \Delta T}{8h}$$

اما خیز ماکزیمم ناشی از دما در تیر ساده با طول $2L$ مساوی خیز ماکزیمم ناشی از دما در تیر یکسر گیردار با طول L است. بنابراین:

$$\Rightarrow y_{max} = \frac{\alpha(2L)^2\Delta T}{8h} = \frac{\alpha L^2 \Delta T}{2h} = \delta_{B1}$$

$$\delta_{B2} = \frac{R_B L^3}{3EI} \Rightarrow \frac{\alpha L^2 \Delta T}{2h} - \frac{R_B L^3}{3EI} = \circ \Rightarrow R_B = \frac{3}{2}\frac{EI\alpha\Delta T}{hL}$$

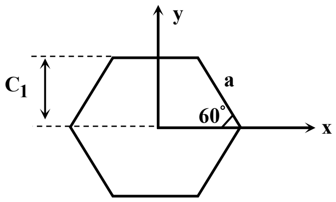
روش دوم: چون تکیه‌گاه A گیردار است، بنابراین شیب در این تکیه‌گاه مساوی صفر است. اکنون با استفاده از روش جمع آثار می‌توان واکنش تکیه‌گاه B را بدست آورد.



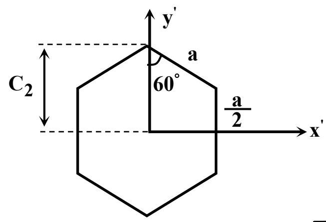
۱۸ـ گزینه «۲» با استفاده از پاسخ تست قبلی می‌توان نتیجه گرفت:

$$M_A = R_B L = \frac{3}{2}\frac{EI\alpha\Delta T}{hL} \times L = \frac{3}{2}\frac{EI\alpha\Delta T}{h}$$

۱۹ـ گزینه «۱» مقطع (۲) نسبت به مقطع (۱) به اندازه ۳۰ درجه دوران نموده، پس می‌توان فرض کرد که محورهای $x'y'$ نسبت به محورهای xy، ۳۰ درجه دوران نموده است.



(1)



(2)

$$I_{x'}=\frac{I_x+I_y}{۲}+\frac{I_x-I_y}{۲}\cos(۲\times۳۰)+I_{xy}\sin(۲\times۳۰)$$

چون محورهای xy، محورهای اصلی هستند در نتیجه $I_{xy}=۰$ است.

$$I_{x'}=\frac{I_x+I_y}{۲}+\frac{I_x-I_y}{۴}=\frac{۳}{۴}I_x+\frac{۱}{۴}I_y$$

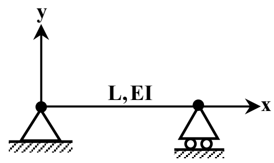
اما از طرفی با مقایسه دو شکل می‌توان نتیجه گرفت که $I_{x'}=I_y$ است در نتیجه با جایگذاری در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$I_x=I_y$$

و اما چون خیز با عکس ممان اینرسی متناسب است در نتیجه $y_۱=y_۲$ بوده از طرفی:

$$\frac{\sigma_{max۱}}{\sigma_{max۲}}=\frac{C_۱}{C_۲}\times\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{C_۱}{C_۲}\times۱=\frac{a\sin۶۰}{\frac{a}{۲}+a\cos۶۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۰ـ گزینه «۳»



$$y_۱(x)=\frac{M}{۶EI\ell}(x^۳-۳\ell x^۲+۲\ell^۲x)\rightarrow\frac{dy_۱(x)}{dx}=y_۱'(x)=\frac{M}{۶EI\ell}(۳x^۲-b\ell x+۲\ell^۲)$$

$$y_۲(x)=\frac{M}{۶EI\ell}(x^۳-\ell^۲x)\rightarrow\frac{dy_۲(x)}{dx}=y_۲'(x)=\frac{M}{۶EI}(۳x^۲-\ell^۲)$$

خیزها شیب‌ها

$$y_۱'(\frac{\ell}{۲})=\frac{M}{۶EI\ell}(\frac{۳\ell^۲}{۴}-\frac{۶\ell^۲}{۲}+۲\ell^۲)=-\frac{M\ell}{۲۴EI}$$

$$y_۲'(\frac{\ell}{۲})=\frac{M}{۶EI\ell}(\frac{۳\ell^۲}{۴}-\ell^۲)=-\frac{M\ell}{۲۴EI}$$

$$y_۱''(x)=\frac{M}{۶EI\ell}(۶x-\ell)\rightarrow y_۱''(\frac{\ell}{۲})=-\frac{M}{۲EI}$$

$$y_۲''(x)=\frac{M}{۶EI\ell}(۶x)\rightarrow y_۲''(\frac{\ell}{۲})=\frac{M}{۲EI}$$

می‌دانیم $k=\frac{۱}{\rho}=\frac{M}{EI}=y''(\frac{\ell}{۲})\xrightarrow{\text{از اصل جمع آثار}}y''(\frac{\ell}{۲})=۰\Rightarrow K=۰$

k: انحناء

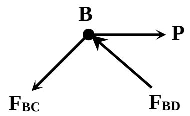
ρ: شعاع انحناء

فصل هفتم

«روش‌های انرژی»

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۱)

۱ـ گزینه «۴» در ابتدا با استفاده از معادلات تعادل برای مفصل B نیروی داخلی در اعضای BC و BD بدست می‌آیند.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - \frac{4}{5}F_{BD} - \frac{3}{5}F_{BC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}F_{BD} - \frac{4}{5}F_{BC} = 0 \Rightarrow 3F_{BD} = 4F_{BC} \Rightarrow F_{BD} = \frac{4}{3}F_{BC}$$

$$P - \frac{4}{5}\times\frac{4}{3}F_{BC} - \frac{3}{5}F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BC} = \frac{P}{\frac{25}{15}} = \frac{3}{5}P \Rightarrow \frac{\partial F_{BC}}{\partial P} = \frac{3}{5} \Rightarrow F_{BD} = \frac{4}{5}P \Rightarrow \frac{\partial F_{BD}}{\partial P} = \frac{4}{5}$$

$$U = \sum_{i=1}^{2}\frac{F_i^2 L_i}{2A_iE_i} = \frac{F_{BD}^2 L_{BD}}{2AE} + \frac{F_{BC}^2 L_{BC}}{2AE}$$

طبق قضیه دوم کاستیگلیانو می‌توان نوشت:

$$\delta_H = \frac{\partial U}{\partial P} \Rightarrow \delta_H = \frac{F_{BD}\,L_{BD}}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial P} + \frac{F_{BC}\,L_{BC}}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial P}$$

$$\delta_H = \frac{\frac{4}{5}P\times\frac{4}{5}L}{AE}\times\frac{4}{5} + \frac{\frac{3}{5}P\times\frac{3}{5}L}{AE}\times\frac{3}{5} = \frac{PL}{AE}\left(\frac{4^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3}\right) \Rightarrow \delta_H = 0/728\frac{PL}{AE}$$

۲ـ گزینه «۴» انرژی کرنشی در میله‌ی مرکب تحت اثر بار محوری توسط رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$U = \sum_{i=1}^{2}\frac{F_i^2 L_i}{2A_iE_i} = \frac{P^2\frac{L}{2}}{2AE} + \frac{(3P)^2\frac{L}{2}}{2(4AE)} = \frac{PL^2}{AE}\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\right) = \frac{13}{16}\frac{P^2L}{AE}$$

۳ـ گزینه «۲» چگالی انرژی کرنشی را می‌توان توسط رابطه $u = \int \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$ محاسبه نمود که البته در محدوده ارتجاعی خطی و با استفاده از قانون هوک به صورت روبرو تبدیل می‌شوند:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

۴ـ گزینه «۴»

۵ـ گزینه «۳» رابطه بین δ_{st} و δ_{max} به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\delta_{max} = \delta_{st} + (\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 10\,\delta_{st} = \delta_{st} + (\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}}$$

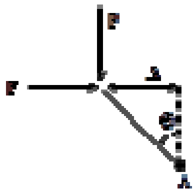
$$\Rightarrow 9\delta_{st} = (\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 81\delta_{st}^2 = \delta_{st}^2 + 2h\delta_{st} \Rightarrow$$

$$\delta_{st}(80\,\delta_{st} - 2h) = 0 \Rightarrow \delta_{st} = \frac{2\times 4}{80} = 0/1\text{m} \Rightarrow \delta_{max} = 10\times 0/1 = 1\text{m}$$

۶ـ گزینه «۲» در محدوده ارتجاعی انرژی کرنشی برابر کار انجام شده می‌باشد، از طرفی کار در محدوده ارتجاعی برابر مساحت سطح مثلث زیر نمودار نیرو ـ خیز می‌باشد، بنابراین:

$$U = \frac{P\delta}{2} = \frac{P}{2}\times\frac{PL^3}{3EI} = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

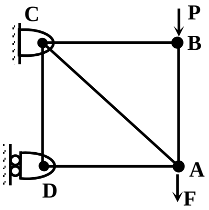
۷ـ گزینه «۱»



$$\sum M_A = \circ \Rightarrow P\Delta - FL = \circ \Rightarrow P\Delta = K\Delta L \Rightarrow P = KL$$

$$U = \frac{K}{۲}\Delta^{۲} = \frac{P}{۲L}(L\,Sin\theta)^{۲} = \frac{PL}{۲}Sin^{۲}\theta \xrightarrow{\theta<<\Rightarrow\ \sin\theta\simeq\theta} U = \frac{PL}{۲}\theta^{۲}$$

۸ـ گزینه «۳» در ابتدا برای حل مسئله یک نیروی موهومی F در مفصل A قرار داده می‌شود. اکنون با نوشتن معادلات تعادل بـرای مفاصـل B و A و D می‌توان نیروی داخلی در اعضای خرپا را بدست آورد.



$$F_{BC} = \circ \quad , \quad F_{AB} = -P \quad , \quad F_{AC} = (P+F)\sqrt{۲} \quad , \quad F_{AD} = (P+F) \quad , \quad F_{CD} = \circ$$

اکنون از نیروهای داخلی در اعضای خرپا نسبت به بار موهومی F مشتق گرفته می‌شود.

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial F} = \frac{\partial F_{AB}}{\partial F} = \frac{\partial F_{CD}}{\partial F} = \circ \quad , \quad \frac{\partial F_{AC}}{\partial F} = \sqrt{۲} \quad , \quad \frac{\partial F_{AD}}{\partial F} = ۱$$

اکنون با قرار دادن مقادیر فوق در قضیه دوم کاستیگلیانو و همچنین مساوی صفر قرار دادن F، خیز در مقطع A بدست می‌آید.

$$\delta = \sum_{i=۱}^{۵} \frac{F_i L_i}{A_i E_i} \times \frac{\partial F_i}{\partial F} = \frac{P\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}L}{AE} \times \sqrt{۲} + \frac{PL}{AE} \times ۱ = \frac{PL}{AE}(۱ + ۲\sqrt{۲})$$

۹ـ گزینه «۱» طبق قضیه دوم کاستیگلیانو می‌توان نوشت:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i}$$

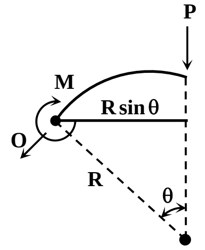
لازم به ذکر است که در یک ماده ارتجاعی خطی، انرژی کرنشی U و انرژی مکمل U^* برابر بوده، بنابراین به جای رابطه فوق می‌توان نوشت:

۱۰ـ گزینه «۳» طبق تعریف، انرژی کرنشی در ناحیه ارتجاعی مساوی کار انجام شده است و کار در ناحیه ارتجاعی خطی برابر سـطح زیـر ناحیـه مثلثـی در دیاگرام نیرو ـ جابجایی است، در نتیجه:

$$U = P\frac{\delta}{۲} = \frac{P}{۲}\frac{PL^{۳}}{۴۸EI} = \frac{P^{۲}L^{۳}}{۹۶EI}$$

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۲)

۱ـ گزینه «۴» در یک مقطع دلخواه به زاویه θ در راستای قائم لنگر داخلی را محاسبه نموده و با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو خیز قائم مقطع B بدست آورده می‌شود.

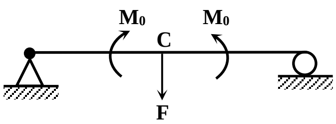


$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M = -PR\sin\theta \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -R\sin\theta$$

$$\delta_B = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}ds = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-PR\sin\theta)\times -R\sin\theta \times Rd\theta$$

$$\Rightarrow \delta_B = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{\pi PR^3}{4EI}$$

۲ـ گزینه «۳» برای محاسبهٔ خیز در وسط تیر یک نیروی موهومی در وسط تیر قرار داده و از قضیه کاستیگلیانو استفاده می‌کنیم.



$$0 \le x \le a \Rightarrow M_1 - \frac{F}{2}x = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{F}{2}x \Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial F} = \frac{x}{2}$$

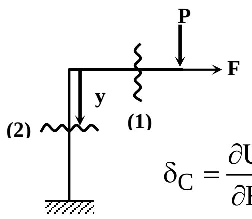
$$a \le x \le \frac{3}{2}a \Rightarrow M_2 - \frac{F}{2}x - M_0 = 0 \Rightarrow M_2 = \frac{F}{2}x + M_0 \Rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial F} = \frac{x}{2}$$

به دلیل تقارن در بارگذاری برای محاسبه خیز در وسط تیر کافی است انرژی کرنشی نصف تیر محاسبه شده سپس از آن با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو مشتق نسبی گرفته و در نهایت نتیجه را در ضریب ۲ ضرب نمود.

$$\delta_C = 2\left\{\frac{1}{EI}\int_0^a \frac{F}{2}x\times\frac{x}{2}dx + \frac{1}{EI}\int_a^{\frac{3a}{2}}\left(\frac{F}{2}x + M_0\right)\frac{x}{2}dx\right\}$$

$$\delta_C = \frac{2}{EI}\int_a^{\frac{3a}{2}} M_0\frac{x}{2}dx = \frac{M_0}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{\frac{3a}{2}} = \frac{5M_0a^2}{8EI}$$

۳ـ گزینه «۱» در نقطه C یک نیروی افقی موهومی گذاشته شده و برای حل مسئله از قضیه کاستیگلیانو استفاده می‌شود. در ابتدا در طول تیر دو برش زده و لنگر داخلی در این دو برش محاسبه می‌شود، سپس از آنها نسبت به بار موهومی مشتق گرفته شده و نتیجه آن در قضیه دوم کاستیگلیانو استفاده می‌شود.



$$M_1 = -Px \Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial F} = 0 \qquad M_2 = -PL - Fy \Rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial F} = -y$$

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial F} \Rightarrow \delta_C = \frac{1}{EI}\left(\int_0^L (-Px)\times 0\,dx + \int_0^H (-PL - Fy)\times ydy\right) \Rightarrow (F=0) \Rightarrow \delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^H PLydy = \frac{PLH^2}{2EI}$$

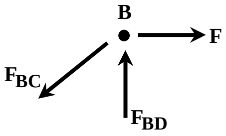
۴ـ گزینه «۴»

$$U = \sum_{i=1}^{2}\frac{F_i^2L_i}{2A_iE_i} \quad ; \quad U = \frac{P^2(\frac{L}{2})}{2AE} + \frac{P^2(\frac{L}{2})}{2(n^2A)E} = \frac{P^2L}{4AE} + \frac{P^2L}{4n^2AE} \Rightarrow U = \frac{P^2L}{4AE}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{P^2L}{4AE}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$$

۵ـ گزینه «۲» با نوشتن معادله تعادل برای گره‌های خرپای شکل مسئله می‌توان نتیجه گرفت که نیروی داخلی در هر یک از اعضای سازه برابر F می‌باشد. البته عضوهای محیطی نیروی کششی و عضوهای قطری تحت فشار هستند بنابراین می‌توان نوشت:

$$U = \sum_{i=1}^{10}\frac{F_i^2L_i}{2A_iE_i} = 10\frac{F^2L}{2AE} = 5\frac{F^2L}{AE}$$

۶ـ گزینه «۱» نیروی افقی وارد بر مفصل A صفر است. در نتیجه نیروی داخلی در اعضای AB و AC صفر می‌باشند و تغییر طول عضو AB ناشی از نیروی F_{AB} صفر بوده و بنابراین جابجایی مفصل A برابر جابجایی مفصل B تحت اثر نیروی F می‌باشد. در نتیجه برای تعیین جابجایی افقی مقطع A کافی است خیز افقی مقطع B را محاسبه نماییم.



$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x=0\Rightarrow -F_{BC}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+F=0\Rightarrow F_{BC}=\sqrt{2}F\\ \sum F_y=0\Rightarrow F_{BD}-F_{BC}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow F_{BD}=\sqrt{2}F\times\frac{\sqrt{2}}{2}=F\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial F_{BC}}{\partial F}=\sqrt{2}\\ \frac{\partial F_{BD}}{\partial F}=1\end{array}\right.$$

طبق قضیه دوم کاستیگلیانو: $\delta_B=\frac{\partial U}{\partial F}=\frac{\partial}{\partial F}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{F_i^2L_i^2}{A_iE_i}\right)=\frac{F_{BC}L_{BC}}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial F}+\frac{F_{BD}L_{BD}}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial F}$

$$\Rightarrow\delta_B=\frac{\sqrt{2}F\times\sqrt{2}L}{AE}\times\sqrt{2}+\frac{FL}{AE}\times 1=\frac{FL}{AE}(1+2\sqrt{2})\Rightarrow\delta_B=\frac{FL}{AE}(1+2\sqrt{2})$$

۷ـ گزینه «۲»

خیز ناشی از بار ضربه‌ای : $\delta_{max}=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+2h\,\delta_{st})^{\frac{1}{2}}$

خیز استاتیکی : $\delta_{st}=\frac{WL^3}{3EI}=\frac{10\times 100^3}{3\times 10^7}=0/333cm\Rightarrow\delta_{max}=0/33+(0/33^2+2\times 10\times 0/33)^{\frac{1}{2}}=2/937cm$

۸ـ گزینه «۲»

۹ـ گزینه «۱» چگالی انرژی کرنشی با مجذور تنش نسبت مستقیم دارد. از طرفی وزن واحد طول میله با مساحت سطح مقطع میله نسبت مستقیم دارد، در صورتی‌که ابعاد سازه α برابر شود، در نتیجه مساحت سطح مقطع سازه α^2 برابر شده و w نیز α^2 برابر می‌شود.

$$\sigma=\frac{MC}{I}\quad ;\quad M_{max}=\frac{wL^2}{8}$$

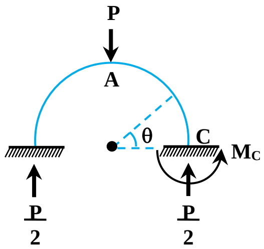
اما ممان اینرسی مقطع با توان چهار ابعاد مقطع نسبت معکوس دارد بنابراین:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{M_2}{M_1}\frac{C_2}{C_1}\frac{I_1}{I_2}=\frac{w_2}{w_1}\times\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\frac{C_2}{C_1}\frac{I_1}{I_2}=\alpha^2\times\alpha^2\times\alpha\times\frac{1}{\alpha^4}=\alpha\Rightarrow u=\frac{\sigma^2}{2E}\Rightarrow\frac{u_2}{u_1}=\alpha^2$$

۱۰ـ گزینه «۳»

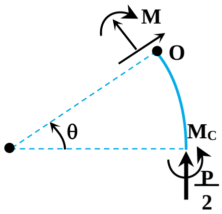
$$U=\frac{1}{2}P\delta=\frac{1}{2}P\times\frac{PL^3}{3EI}=\frac{P^2L^3}{6EI}$$

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۳)



۱ـ گزینه «۱» بدلیل تقارن تنها نیمی از سازه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین بدلیل تقارن، زاویه در مقطع C مساوی صفر بوده و نیروی تکیه‌گاهی برابر $\frac{P}{2}$ است. (به دلیل صفر بودن شیب در مقاطع B و C می‌توان در مقاطع مذکور، تکیه‌گاه گیردار فرضی در نظر گرفت). در یک زاویه دلخواه θ از مقطع C لنگر داخلی برابر است با:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M = M_C + \frac{P}{2}R(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_C} = 1 \qquad (1)$$



اما با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو شیب درمقطع C محاسبه شده و برابر صفر قرار داده می‌شود تا لنگر داخلی در مقطع C بدست آید.

$$\theta_C = \frac{\partial U}{\partial M_C} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}ds = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(M_C + \frac{P}{2}R(1-\cos\theta))}{EI} \times 1 \times Rd\theta = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (M_C + \frac{P}{2}R(1-\cos\theta))d\theta = 0 \Rightarrow (M_C \times \frac{\pi}{2}) + (\frac{PR}{2}\times\frac{\pi}{2}) - \frac{P}{2}R[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow M_C = \frac{2}{\pi}\left[\frac{PR}{2} - \frac{PR}{2}\times\frac{\pi}{2}\right] = \frac{PR}{2}\left[\frac{2}{\pi} - 1\right] \qquad (2)$$

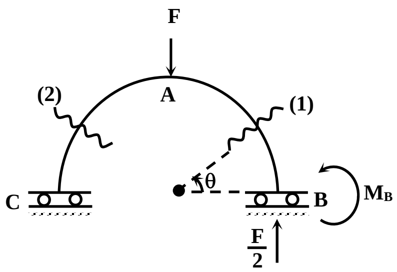
اما برای محاسبه لنگر داخلی در مقطع A کافی است در رابطه (۱) زاویه θ برابر $\frac{\pi}{2}$ قرار داده شود، چراکه مقطع برش خورده در $\theta = \frac{\pi}{2}$ همان مقطع A است.

$$M_C = \frac{PR}{2}(\frac{2}{\pi} - 1) \Rightarrow M_A = M_C + \frac{P}{2}R \overset{(2)}{\Rightarrow} M_A = \frac{PR}{2}\left[\frac{2}{\pi} - 1\right] + \frac{PR}{2} = \frac{PR}{\pi}$$

۲ـ گزینه «۱» انرژی ذخیره شده در یک تیر نسبت عکس با ممان اینرسی مقطع دارد با فرض مساوی بودن مساحت‌ها داریم:

مثلث $A_3 =$ مربع $A_2 =$ دایره A_1

$$\frac{\pi d^2}{4} = a^2 = \frac{b \times \frac{b\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{\pi d^2}{4} \\ b^2 = \frac{\pi d^2}{\sqrt{3}} \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} I_3 > I_2 > I_1 \Rightarrow U_1 > U_2 > U_3$$



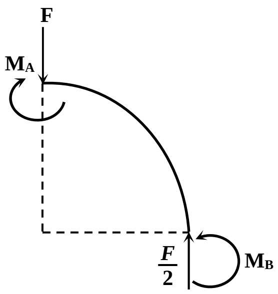
۳ـ گزینه «۴» بدلیل تقارن شکل تنها نیمی از سازه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بـه دلیـل تقـارن در مقاطع B و C شیب حلقه مساوی صفر بوده بنابراین می‌توان در این مقاطع تکیه‌گاه گیـردار فرضـی در نظر گرفت. اکنون در نیم حلقه مطابق شکل دو برش زده و لنگر داخلی در آنها محاسبه می‌شود:

$$M_1 = M_B + \frac{F}{2}R(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial M_B} = 1$$

$$M_2 = M_B + \frac{F}{2}(R + R\sin(\theta - \frac{\pi}{2})) - FR\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = M_B + \frac{F}{2}R(1-\cos\theta) + FR\cos\theta \Rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial M_B} = 1$$

اکنون با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو شیب در مقطع B محاسبه شده و مقدار آن برابر صفر قرار داده می‌شود تا لنگر داخلی M_B بدست آید:

$$\theta_B = 0 = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}[M_B + \frac{FR}{2}(1-\cos\theta)]Rd\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[M_B + \frac{FR}{2}(1-\cos\theta) + FR\cos\theta]Rd\theta\right\} = 0$$



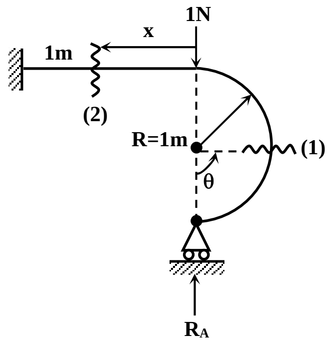
$$\Rightarrow M_B\frac{\pi}{2}+\frac{FR}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{FR}{2}[\mathrm{Sin}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+M_B\frac{\pi}{2}+\frac{FR}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{FR}{2}[\mathrm{Sin}\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=0$$

$$\Rightarrow M_B\pi+\frac{FR\pi}{2}-\frac{FR}{2}-\frac{FR}{2}=0\Rightarrow M_B=\frac{FR}{2}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)$$

اکنون با نوشتن معادله تعادل برای ربع حلقه می‌توان لنگر داخلی در نقطه A را بدست آورد:

$$\sum M_A=0\Rightarrow M_A=\frac{FR}{2}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)+\frac{FR}{2}\Rightarrow M_A=\frac{FR}{\pi}$$

۴ـ گزینه «۱» در سازه مطابق شکل دو برش زده و لنگر داخلی در آنها محاسبه می‌شود. سپس از لنگر داخلی نسبت بـه نیـروی تکیـه‌گـاهی R_A مشـتق نسبی گرفته می‌شود.



$$M_1=R_A\times R\sin\theta\Rightarrow\frac{\partial M_1}{\partial R_A}=R\,\mathrm{Sin}\theta$$

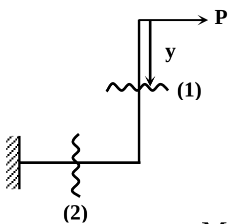
$$M_2=(R_A-1)x\Rightarrow\frac{\partial M_2}{\partial R_A}=x$$

با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو خیز در مقطع A ناشـی از R_A محاسـبه شـده و نتیجـه برابر صفر قرار داده می‌شود تا نیروی تکیه‌گاهی R_A بدست آید.

$$y_A=\frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}R_A\times R\sin\theta\times R\,\mathrm{Sin}\theta\times Rd\theta+\int_0^1(R_A-1)x\times xdx\right\}=0$$

$$\Rightarrow R_A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\mathrm{Cos}2\theta)}{2}d\theta+\int_0^1(R_A-1)x^2dx=0\Rightarrow R_A\times\frac{\pi}{2}+(R_A-1)\frac{1}{3}=0\Rightarrow R_A=\frac{2}{3\pi+2}$$

۵ـ گزینه «۴» خیز افقی مقطع A را می‌توان با توجه به قضیه دوم کاستیگلیانو محاسبه نمود:



$$M_1=-Py\Rightarrow\frac{\partial M_1}{\partial P}=-y$$

$$M_2=-PL\Rightarrow\frac{\partial M_2}{\partial P}=-L$$

$$\delta_A=\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx\Rightarrow\delta_A=\frac{1}{EI}\left\{\int_0^L(-Py)\times(-y)dy+\int_0^L(-PL)\times(-L)dx\right\}\Rightarrow\delta_A=\frac{1}{EI}\left\{\frac{P}{3}L^3+PL^3\right\}=\frac{4}{3}\frac{PL^3}{EI}$$

۶ـ گزینه «۱» با نوشتن معادلات تعادل برای مفاصل F و G می‌توان نتیجه گرفت اعضای AF و BF و BG و CG صفر نیرویی بوده همچنـین بـرای عضوهای AD و BD و BE و CE و DE نیز به همین روش می‌توان نتیجه گرفت صفرنیرویی هستند.

$$U=\frac{F_{AB}^2L_{AB}}{2AE}+\frac{F_{BC}^2L_{BC}}{2AE}=\frac{F^2L}{AE}$$

۷ـ گزینه «۲»

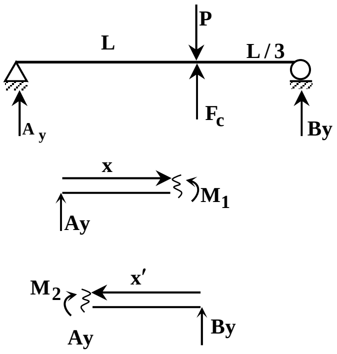
۸ـ گزینه «۳» از قضیه کاستیگلیانو استفاده می‌شود.

$$P_i=\frac{\partial U}{\partial\Delta_i}$$

$$P_1=\frac{\partial U}{\partial\Delta_1}\Rightarrow P=\frac{AE}{4L}(6\Delta_1+2\Delta_2)$$

$$P_2=\frac{\partial U}{\partial\Delta_2}=0\Rightarrow 0=\frac{AE}{4L}(6\Delta_2+2\Delta_1)=0\Rightarrow\Delta_1=-3\Delta_2\Rightarrow\left|\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right|=3$$

۹ـ گزینه « ۴ » روش اول: استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو



$$F = P - F_c \text{ ؛ } A_y = \frac{F\times\frac{L}{3}}{\frac{4L}{3}} = \frac{F}{4} \text{ ؛ } B_y = \frac{F\times L}{\frac{4L}{3}} = \frac{3F}{4}$$

$$M_1 = A_y x = \frac{F}{4}x \rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial F} = \frac{x}{4}$$

$$M_2 = B_y x' = \frac{3F}{4}x' \Rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial F} = \frac{3}{4}x'$$

$$\Rightarrow \delta_c = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^L M_1\frac{\partial M_1}{\partial F}dx + \int_0^{\frac{L}{3}} M_2\frac{\partial M_2}{\partial F}dx'\right\} \Rightarrow \delta_c = \frac{1}{EI}\left\{\frac{F}{16}\frac{L^3}{3} + \frac{9F}{16}\frac{(\frac{L}{3})^3}{3}\right\} = \frac{FL^3}{EI}\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{144}\right) = \frac{FL^3}{EI}\frac{4}{144}$$

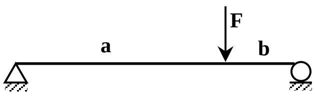
$$\Rightarrow \delta_c = \frac{FL^3}{36EI} = \frac{(P-F_c)L^3}{36EI} \qquad (1)$$

نیرو در فنر مساوی است با:

$$F_c = k_a\delta_c = \frac{12EI}{L^3}\delta_c \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \quad \delta_c = \frac{(P-\frac{12EI}{L^3}\delta_c)L^3}{36EI} \Rightarrow \frac{4}{3}\delta_c = \frac{PL^3}{36EI} \Rightarrow \delta_c = \frac{PL^3}{48EI}$$

روش دوم: سختی معادل تیر ساده که تحت نیروی متمرکز می‌باشد مساوی است با:



$$k_b = \frac{3EIL}{a^2b^2}$$

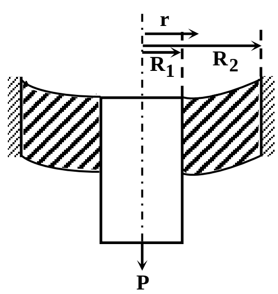
اما در این مثال $a = L$ و $b = \frac{L}{3}$ و طول تیر مساوی $\frac{4L}{3}$ است بنابراین:

$$k_b = \frac{3EI\times\frac{4L}{3}}{L^2\times\frac{L^2}{9}} = \frac{36EI}{L^3}$$

دو فنر k_a و k_b موازی بوده بنابراین سختی آنها با هم جمع می‌شود:

$$k_{eq.} = k_a + k_b = \frac{12EI}{L^3} + \frac{36EI}{L^3} = \frac{48EI}{L^3} \Rightarrow \delta_c = \frac{P}{k_{eq.}} = \frac{PL^3}{48EI}$$

۱۰ـ گزینه «۲» با استفاده از روش انرژی داریم:



انرژی کرنشی در جسم تحت برش در محدوده‌ی الاستیک خطی $u = \int\frac{\overset{*}{\tau}_{xy}}{2G}$ (۱)

کار انجام شده توسط نیروی P $= \frac{P\delta}{2}$

تنش برشی وارد شده به لاستیک در فاصله‌ی r $\quad \tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi r\tau}$

$$\xrightarrow{\text{در } (1)} u = \int\frac{P^2}{4\pi^2r^2t^2\times 2G}dV \xrightarrow{dV=2\pi rtdr} u = \int\frac{P^2\times 22\pi rt}{4\pi^2r^2t^2\times 2G}dr$$

$$\Rightarrow u = \frac{P^2}{4\pi tG}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}dr \Rightarrow u = \frac{P^2}{4\pi tG}\ln r\Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{P^2}{4\pi tG}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

فصل هشتم

«ستون»

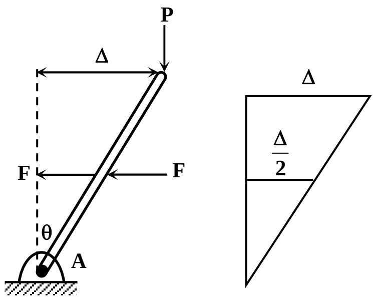
پاسخنامه آزمون خودسنجی (۱)

۱ـ گزینه «۲» بار بحرانی در یک ستون توسط رابطه زیر تعیین می‌شود. بار بحرانی با مجذور طول موثر ستون نسبت عکس داشته و با ممان اینرسی مقطع حول محور ضعیف گذرنده از مرکز سطح نسبت مستقیم دارد.

$$F_{cr.}=\frac{\pi^2 EI}{L_e^2}\ ;\ \frac{F_{cr.1}}{F_{cr.2}}=\frac{I_1}{I_2}\times\frac{(L_{e2})^2}{(L_{e1})^2}=\frac{I_1}{2I_1}\times\frac{(\frac{L_2}{2})^2}{L_1^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\frac{L_2^2}{L_1^2}=\frac{1}{8}\times 4=\frac{1}{2}$$

۲ـ گزینه «۲» بار بحرانی یک تیر ستون با بار بحرانی ستون متناظر برابر است. اما ستون متناظر دو سر مفصل بوده و ضریب طول موثر آن برابر یک است.

۳ـ گزینه «۳» اگر ستون صلب از وضعیت قائم به اندازه زاویه کوچک θ منحرف شود آنگاه با گشتاورگیری نیروها حول مفصل A نیروی **P** بحرانی بدست می‌آید.

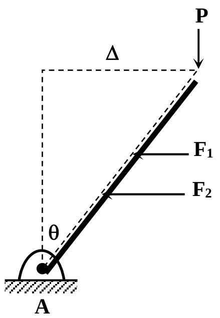


$$\sum M_A=0\Rightarrow -P\times\Delta+2F\times L=0 \qquad (1)$$

$$(F=K\frac{\Delta}{2})$$

$$(1)\Rightarrow P_{cr.}=\frac{2FL}{\Delta}=\frac{2(K\frac{\Delta}{2})L}{\Delta}=KL$$

۴ـ گزینه «۱» اگر ستون از حالت تعادل عمودی اندکی منحرف شود بار بحرانی $P_{cr.}$ توسط نوشتن معادله تعادل گشتاور بدست می‌آید.



$$\sum M_A=0\Rightarrow F_1\times 2h+F_2\times h-P\times\Delta=0 \qquad (1)$$

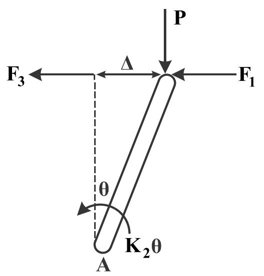
$$\Delta=3h\sin\theta\xrightarrow{(\sin\theta\approx\theta)}\Delta=3h\theta \quad,\quad F_1=K(2h\theta)\quad,\quad F_2=K(h\theta)$$

$$(1)\Rightarrow P_{cr.}=\frac{2Kh\theta\times 2h+Kh\theta\times h}{3h\theta}=\frac{5}{3}Kh$$

۵ـ گزینه «۴» کاهش ضخامت مقطع و افزایش ابعاد مقطع باعث افزایش I و در نتیجه پایداری ستون می‌شود به شرط آنکه جداره مقطع آنچنان باریک نشود که خود جداره تحت بارهای فشاری ناپایدار شود. (کمانش های موضعی در ستون اتفاق افتد)

۶ـ گزینه «۲» بار بحرانی یک تیر ستون با بار بحرانی ستون متناظرش برابراست و مقدار نیروی جانبی $2P$ تأثیری در بار بحرانی ندارد.

۷ـ گزینه «۲»



$$\Sigma M_A=0\ \Rightarrow -P\Delta+(F_1+F_3)L+k_2\theta=0 \qquad (1)$$

$$\Delta=L\sin\theta=L\theta$$

$$F_1=k_1\Delta=k_1L\theta$$

$$F_3=k_3\Delta=k_3L\theta$$

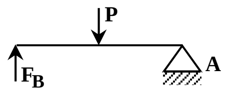
$$(1)\ \Rightarrow -P\Delta+(k_1\Delta+k_3\Delta)L+k_2\theta=0$$

$$P_{cr_0}=(k_1+k_3)L+\frac{k_2}{L}$$

۸ـ گزینه «۲»

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{Le^2}=\frac{\pi^2 EI}{k^2L^2}\quad ;\quad \frac{F_{cr.2}\ \text{ستون دو سر گیردار}}{F_{cr.1}\ \text{ستون با تکیه‌گاه‌های ساده}}=\frac{k_1^2}{k_2^2}=\frac{1^2}{0/5^2}=4\Rightarrow F_{cr.2}=16k$$

۹ـ گزینه «۲» با نوشتن معادله تعادل برای میلهٔ AB، نیروی مفصل B بدست می‌آید. (با فرض اینکه نیروی P بر وسط میله AB اعمال شده باشد می‌توان نوشت)



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\quad \sum M_A = 0 \Rightarrow P\times\frac{L}{2} - F_B\times L = 0 \Rightarrow F_B=\frac{P}{2}$$

و اما ستون BC یک ستون یکسرگیردار و یکسر مفصل با ضریب طول موثر ۰/۷ است. بنابراین:

$$(F_B)_{cr.} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \frac{P}{2} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

۱۰ـ گزینه «۳» با فرض ستون دو سه لولا داریم:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

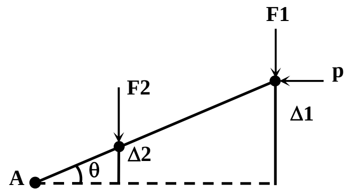
$$P_{cr} = \frac{10\times(12\times10^9)(\frac{a^4}{12})}{4}\ ,\ P_{cr} = 250\,KN \Rightarrow a = 10\,cm$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow 10^6 = \frac{250\times10^3}{a^2} \Rightarrow a = 50\,cm$$

اگر a از ۵۰cm کمتر باشد، σ در ستون بالاتر از σ_{all} می‌شود.

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۲)

۱ـ گزینه «۲» در صورتی که ستون صلب افقی به اندازه θ از وضعیت افقی منحرف شود بار بحرانی P وارد بر انتهای ستون توسط حل معادله تعادل گشتاور بدست می‌آید.



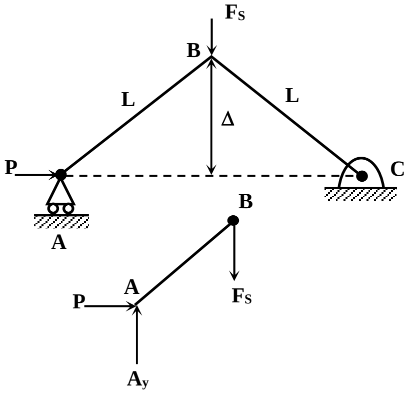
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P\Delta_1 - F_1 L - F_2 \frac{L}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta_1 = L\sin\theta \xrightarrow{\sin\theta \simeq \theta} \Delta_1 = L\theta \;,\; F_1 = K\Delta_1 = KL\theta \;,\; F_2 = K\Delta_2 = \frac{K\theta L}{2}$$

با جایگذاری در رابطه (۱) مقدار بار بحرانی تعیین می‌شود.

$$PL\theta - KL^2\theta - \frac{K\theta L^2}{4} = 0 \Rightarrow F = \frac{5}{4}KL$$

۲ـ گزینه «۱» اگر مفصل وسط ستون به میزان Δ جابجا شود نیروی $F_s = K\Delta$ در فنر ایجاد می‌شود که تمایل داشته ستون را به وضعیت اولیه باز گرداند. (مقدار انحراف Δ به اندازه کافی کوچک است.)

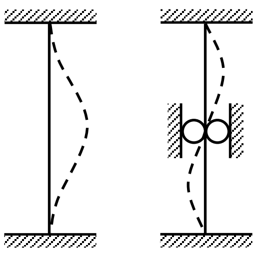


$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_s \times L - A_y \times 2L = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -Ay \times L + P \times \Delta = 0 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow P_{cr.}\Delta = A_y L = \frac{F_s L}{2} = \frac{K\Delta L}{2} \Rightarrow P_{cr.} = \frac{KL}{2}$$

۳ـ گزینه «۳» بار بحرانی ستون با کمیت I متناسب است یعنی هر چقدر ابعاد سطح مقطع بزرگتر باشد بار بحرانی بیشتر است. از طرفی اگر بخش ضخیم ستون به تکیه‌گاه نزدیک باشد بار بحرانی بزرگتر خواهد بود چرا که در برابر کمانش مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد.



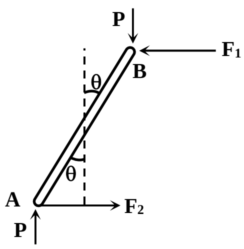
(۱) (۲)

۴ـ گزینه «۴» اگر کمانش ستون در دو حالت در صفحه به وقوع بپیوندد، آنگاه بار بحرانی در دو حالت برابر است با:

$$P_{cr.1} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr.2} = \frac{\pi^2 EI}{(0/7(\frac{L}{2}))^2} = 2/04 \times \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr.2} = 2/04 P_{cr.1}$$

۵ـ گزینه «۱» در این حالت یکی از فنرها فشرده و فنر دیگری کشیده می‌شود.

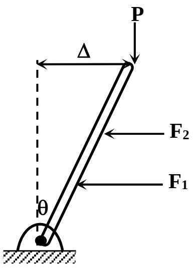


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = \Delta k = (\frac{L\theta}{2})K$$

در حل این تست و تست‌های مشابه زاویه θ کوچک در نظر گرفته شده به گونه‌ای که $\sin\theta \simeq \theta, \cos \simeq 1$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \times L\theta + F_1 \times L = 0 \Rightarrow -P \times L\theta + K(\frac{L\theta}{2}) \times L = 0 \Rightarrow P_{cr.} = \frac{KL}{2}$$

۶ـ گزینه «۳»



$$\theta \ll \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \Delta = L\sin\theta = L\theta = 3h\theta$$

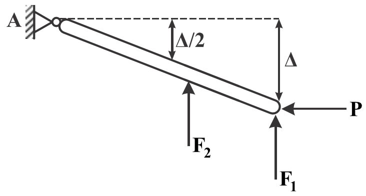
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \times \Delta + F_2 \times 2h + F_1 \times h = 0$$

$$-p \times 3h\theta + K(2h\theta)2h + K(h\theta)h = 0 \Rightarrow P_{cr.} = \frac{5}{3}Kh$$

۷ـ گزینه «۲» باری که باعث ایجاد کمانش در ستون می‌شود را بدست آورده و نتیجه آن را بر وزن مخزن تقسیم می‌کنیم تا ضریب اطمینان بدست آید.

$$P_{cr.} = \frac{\pi^۲ EI}{۴L^۲} = \frac{\pi^۲ \times ۴ \times ۱۰^۸}{۴ \times ۸۰۰^۲} = ۱۵۴۲\,kg \qquad n = \frac{P_{cr.}}{P} = \frac{۱۵۴۲}{۱۰۰۰} = ۱/۵۴$$

۸ـ گزینه «۳»

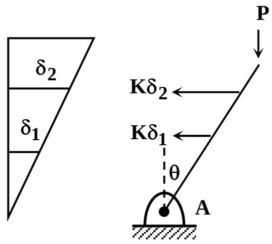


$$\Sigma M_A = ۰ \Rightarrow -P \times \Delta + F_۱ L + F_۲ \frac{L}{۲} = ۰$$

$$F_۱ = K\Delta \quad ; \quad F_۲ = K\frac{\Delta}{۲}$$

$$\Rightarrow -P \times \Delta + K\Delta L + K\frac{\Delta}{۲}\frac{L}{۲} = ۰ \Rightarrow P = \frac{۵}{۴}KL$$

۹ـ گزینه «۳»



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = ۰ \Rightarrow k\delta_۱ \times h\cos\theta + k\delta_۲ \times ۲h\cos\theta - p۳h\sin\theta = ۰$$

$$\Rightarrow k\delta_۱ \cos\theta + ۲k\delta_۲ \cos\theta = P \times ۳\sin\theta \qquad (۱)$$

از طرفی طبق تشابه مثلث می‌توان نوشت:

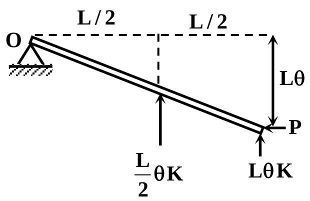
$$\delta_۲ = ۲\delta_۱ = ۲h\sin\theta \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow kh\sin\theta\cos\theta + ۴kh\sin\theta\cos\theta = ۳P\sin\theta \Rightarrow P_{cr.} = \frac{۵}{۳}kh\cos\theta$$

اما برای زوایای کوچک می‌توان $\cos\theta$ را مساوی یک قرار داد، بنابراین بار بحرانی مساوی است با:

$$P_{cr.} = \frac{۵}{۳}kh$$

۱۰ـ گزینه «۱» اگر میله صلب به اندازه‌ی θ، دوران کند داریم



$$\Sigma M_O = ۰ \Rightarrow P_{cr}\ell\theta = \ell^۲\theta K + \frac{\ell^۲}{۴}\theta K \Rightarrow P_{cr} = \frac{۵}{۴}\ell K$$

پاسخنامه آزمون خودسنجی (۳)

۱ـ گزینه «۱» نیروی وارد بر میله عمودی (ستون) مساوی نیمی از نیروی متمرکز معادل بار گسترده است. (مقدار نیروی وارد بر ستون را می‌توان از گشتاورگیری نیروها حول تکیه‌گاه A نیز بدست آورد.) $F_{cr.}=\frac{WL}{۲}$

از طرفی تیر یکسرگیردار، یکسرمفصل می‌باشد. (چون انتهای ستون خیز جانبی (خیز افقی) ندارد.)

$$L_e=۰/۷(۱/۴۳L)=L \qquad \Rightarrow \frac{WL}{۲}=\frac{\pi^۲EI}{L^۲}\Rightarrow W_{cr.}=\frac{۲\pi^۲EI}{L^۳}$$

۲ـ گزینه «۳» نسبت $\frac{h}{b}$ بهینه به گونه‌ای است که تنش بحرانی در دو حالت برابر باشد برای این منظور بایستی ضرایب لاغری برای دو ستون مساوی باشند.

$$\lambda=\frac{KL}{r}\Rightarrow(\frac{KL}{r})_x=(\frac{KL}{r})_y\Rightarrow(\frac{۲L}{r})_x=(\frac{L}{r})_y\Rightarrow\frac{۲}{r_x}=\frac{۱}{r_y}$$

$$\left.\begin{aligned}I_x=\frac{۱}{۱۲}\times bh^۳\Rightarrow r_x=\frac{h}{\sqrt{۱۲}}\\ I_y=\frac{۱}{۱۲}\times hb^۳\Rightarrow r_y=\frac{b}{\sqrt{۱۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{۲}{\frac{h}{\sqrt{۱۲}}}=\frac{۱}{\frac{b}{\sqrt{۱۲}}}\Rightarrow\frac{b}{h}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{h}{b}=۲$$

۳ـ گزینه «۳» دو میله AB و CD به عنوان دو فنر موازی با سختی $\frac{۳EI}{L^۳}$ و $\frac{AE}{L}$ رفتار می‌کنند چون خیز انتهای تیر AB برابر تغییر طول محوری میله BC است. در نتیجه بار بحرانی اعمال شده بر میله CD از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P_{CD}=\frac{K_{CD}}{K_{CD}+K_{AB}}P=\frac{\frac{AE}{L}}{\frac{۳EI}{L^۳}+\frac{AE}{L}}P=\frac{\frac{AE}{L}}{\frac{۳E(۲AL^۲)}{L^۳}+\frac{AE}{L}}P\quad\Rightarrow P_{cr.}=\frac{\frac{AE}{L}}{\frac{۶AE}{L}+\frac{AE}{L}}P=\frac{P}{۷}=P_E\Rightarrow P=۷P_E$$

۴ـ گزینه «۲» معادل تعادل را برای مفصل D می‌نویسیم:

$$\sum F_x=۰\Rightarrow P_{AD}=P_{CD}$$
$$\sum F_y=۰\Rightarrow ۲P_{AD}\cos۳۰+P_{BD}=P\Rightarrow\sqrt{۳}P_{AD}+P_{BD}=P\qquad(۱)$$

در صورتی که میله‌های جانبی همزمان با میله وسطی کمانش کنند نسبت نیروی بحرانی آنها متناسب با عکس مجذور طول ستون بوده و برابر است با:

$$\frac{P_{cr.AD}}{P_{cr.BD}}=\frac{L^۲_{BD}}{L^۲_{AD}}=\frac{L^۲}{(\frac{L}{\cos۳۰})^۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow P_{AD}=\frac{۴}{۳}P_{BD}$$

از طرفی ستون BD دو سر مفصل بوده و ستون AD ستون یکسرگیردار و یکسر مفصل می‌باشد.

$$P_{BD}=\frac{\pi^۲EI}{L^۲}\quad,\quad P_{AD}=\frac{۲/۰۴\pi^۲EI}{(\frac{L}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})^۲}=۱/۵۳۰۶\frac{\pi^۲EI}{L^۲}$$

با قرار دادن P_{AD} و P_{BD} در رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$P_{cr.}=\frac{\pi^۲EI}{L^۲}(۱+۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱/۵۳۰۶)=۳۶\frac{EI}{L^۲}$$

۵ـ گزینه «۲» با توجه به پاسخ تست (۱۲) می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{L_e}{r}=\frac{L_e}{\sqrt{\frac{I}{A}}}\Rightarrow\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\sqrt{\frac{I_۲}{I_۱}}=\sqrt{\frac{۰/۷۸۵r^۴}{۰/۸۲۲r^۴}}=۰/۹۷۷$$

۶ــ گزینه «۲» تیر از نوع تیر ستون بوده، ستون دو سر مفصل با بار جانبی، در این حالت نیروی بحرانی تیر ستون برابر بار بحرانی ستون متناظرش است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۷ــ گزینه «۲» اگر ضریب اطمینان طراحی مساوی n در نظر گرفته شود آنگاه طول ستون توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

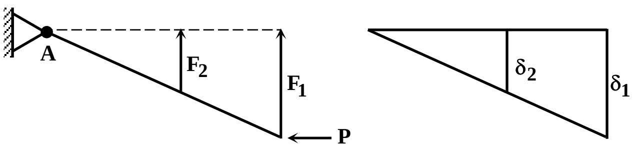
$$n=\frac{P_{cr}}{w}\Rightarrow P_{cr}=nw\ ,\ P_{cr.}=\frac{\pi^2EI}{4L^2}\Rightarrow L^2=\frac{\pi^2EI}{4nw}\Rightarrow L^2=\frac{\pi^2\times 2/1\times 10^6\ \frac{kg}{cm^2}\times 800\,cm^4}{4\times 2\times 4000}\Rightarrow L\simeq 720\,cm$$

۸ــ گزینه «۴» بار بحرانی سازه زمانی ماکزیمم است که نیروی کمانش دو بخش ستون مساوی باشند. همان‌طور که از شکل مسئله مشخص است دو ستون، یکی دوسرگیردار و دیگری یک‌سرگیردار یک سر مفصل وجود دارد که نیروی بحرانی آنها مساوی است با:

$$\left.\begin{aligned}F_{AB}&=\frac{\pi^2EI}{(L_{AB})_e^2}=\frac{\pi^2EI}{(\frac{1}{2}\times L_{AB})^2}=\frac{4\pi^2EI}{L_{AB}^2}\ (k_{AB}=\frac{1}{2})\\F_{BC}&=\frac{\pi^2EI}{(L_{BC})_e^2}=\frac{\pi^2EI}{\frac{1}{2}L_{BC}^2}\Rightarrow\frac{2\pi^2EI}{L_{BC}^2}\ (k_{BC}=0/7)\end{aligned}\right\}\Rightarrow F_{AB}=F_{BC}\Rightarrow\frac{2}{L_{AB}^2}=\frac{1}{L_{BC}^2}\Rightarrow\frac{L_{AB}^2}{L_{BC}^2}=2\Rightarrow\frac{L_{AB}}{L_{BC}}=\sqrt{2}$$

$$L_{AB}+L_{BC}=L\Rightarrow\sqrt{2}L_{BC}+L_{BC}=L\Rightarrow\begin{cases}L_{BC}=0/41\,L\\L_{AB}=0/58\,L\end{cases}$$

۹ــ گزینه «۴»



$$\left.\begin{aligned}&\sum M_A=0\Rightarrow P\times\delta_1=F_1\times L+F_2\times\frac{L}{2}\\&F_2=K\delta_2\ ,\ F_1=K\delta_1\ ,\ \delta_2=\frac{\delta_1}{2}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow P\times\delta_1=K\delta_1\times L+K\frac{\delta_1}{2}\times\frac{L}{2}\Rightarrow P=\frac{5}{4}KL$$

۱۰ــ گزینه «۲» سختی فنرها به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

شکل

$$k_2=k=\frac{AE}{L}$$

$$k_1=k_3=\frac{AE}{\sqrt{2}L}\times\cos^2 45=\frac{AE}{2\sqrt{2}L}$$

این میله به‌صورت سه فنر موازی رفتار می‌کند. در این میان نیرویی که هر فنر تحمل می‌کند متناسب با سختی آن فنر است.

$$\frac{P_E}{F}=\frac{k}{k\cos^2 45}=\frac{\frac{AE}{L}}{\frac{AE}{2\sqrt{2}L}}=2\sqrt{2}\Rightarrow F=\frac{P_E}{2\sqrt{2}}$$

معادله تعادل برای مفصل تحت نیروی خارجی $\Sigma F_y=0\ \Rightarrow P_{Cr_0}=P_E+2F=P_E+2\frac{P_E}{2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow P_{cr_0}=P_E(1+\frac{1}{\sqrt{2}})=P_E(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$$
