مدرسان شریف

فصل اول

«مفاهیم اساسی سیستم‌های قدرت»

رئوس مطالب مهم این فصل:

۱ـ ولتاژ و جریان در سیستم‌های قدرت	۵ـ سیستم‌های سه‌فاز
۲ـ تعریف عناصر سیستم در حوزه فرکانس	۶ـ توان سه‌فاز
۳ـ توان AC در مدار تک‌فاز	۷ـ سیستم پریونیت
۴ـ اصلاح ضریب توان	

مقدمـه

منظور از یک سیستم قدرت چیست؟ این اولین سؤالی است که در بررسی یک سیستم قدرت ممکن است در ذهن ایجاد شود. سیستم قدرت شبکه‌ای است که خود سیستم‌های تولید، انتقال و توزیع را شامل می‌گردد. درواقع این شبکه در بخش تولید شکلی از انرژی (مانند انرژی سوختن زغال سنگ) را به انرژی الکتریکی تبدیل و در مرحله بعد از طریق سیستم انتقال (خطوط انتقال، ترانسفورماتورها و ...) انرژی تولیدی را منتقل کرده و در قسمت توزیع به مصرف‌کنندگان می‌رساند. چهار جزء اصلی سیستم قدرت عبارتند از: نیروگاه‌ها، ترانسفورماتورها، خطوط انتقال و پست‌ها.

اگر بخواهیم برای یک سیستم قدرت ساختار ساده‌ای را نشان بدهیم، شکل زیر شکل مناسبی خواهد بود:

نیروگاه $\xrightarrow{\text{تولید انرژی الکتریکی}}$ پست تولید $\rightarrow$ خطوط انتقال $\rightarrow$ پست توزیع $\rightarrow$ مصرف کننده

بخش تولید

در این بخش که شامل نیروگاه‌ها و پست‌های تولید می‌شود، انرژی الکتریکی تولید می‌گردد. توان الکتریکی ابتدا در بازه ولتاژ ۱۱kV تا ۲۵kV تولید می‌گردد، سپس توسط ترانسفورماتورهای پست تولید برای انتقال در مسافت‌های طولانی، ولتاژ افزایش پیدا می‌کند.

نیروگاه‌های توان معمول را می‌توان به سه دسته حرارتی، هسته‌ای و برق آبی دسته‌بندی کرد، هرچند که در سال‌های اخیر با تأکید ویژه بر روی استفاده از انرژی‌های پاک (انرژی بادی، خورشیدی و ...) این نیروگاه‌ها نیز جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده‌اند. در سیستم تولید، ژنراتور و ترانسفورماتور نقش اصلی را ایفا می‌کنند. ژنراتور تبدیل انرژی را انجام می‌دهد و ترانسفورماتور توان را با بازده مناسب از یک سطح به سطح دیگری از ولتاژ می‌رساند. توان انتقال یافته برابر با توان قبلی است که تلفات ترانسفورماتور از آن کم شده است. دلیل اصلی استفاده از ترانسفورماتور برای افزایش ولتاژ در سمت تولید، کاهش تلفات در خط انتقال برای مسیرهای طولانی است.

بخش انتقال

این بخش شامل خطوط انتقال هوایی است که انرژی الکتریکی تولیدشده را در سیستم تولید به بخش توزیع می‌رساند. وظیفه این بخش این است که:

۱) انرژی تولیدشده توسط ژنراتورها را به پست بعدی برساند.

۲) دو یا چند پست تولید را به‌هم متصل نماید.

ولتاژهای انتقال در ایران شامل ۶۳kV، ۱۳۲kV، ۲۳۰kV و ۴۰۰kV می‌باشد.

پست فوق توزیع: بخشی از سیستم انتقال است که پست‌های فشارقوی را از طریق ترانسفورماتور کاهنده به پست‌های توزیع متصل می‌نماید. در این بخش خازن‌ها و راکتورهایی برای حفظ ولتاژ موردنظر وجود دارند. عملکرد این پست مشابه عملکرد سیستم توزیع است با این تفاوت که:

۱) ولتاژ سیستم فوق توزیع بیشتر است.

۲) تنها بارهای بزرگتر را تأمین مکند.

۳) تعداد کمی پست را تغذیه می‌کند، درحالی‌که سیستم توزیع، تعداد زیادی بار را باید تأمین نماید.

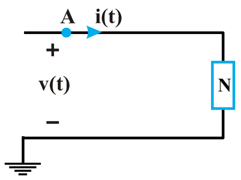
سیستم توزیع

بخشی از سیستم قدرت که تمامی مصرف‌کنندگان یک ناحیه را به دیگر بخش سیستم قدرت متصل می‌نماید، به‌عنوان سیستم توزیع شناخته می‌شود. پست‌های توزیع توان را بین مصرف‌کننده‌های کوچک تجاری و خانگی توزیع می‌نمایند.

ولتاژ و جریان در سیستم قدرت

از آنجا که ولتاژها و جریان‌های عناصر سیستم‌های قدرت (سلف، خازن و ...) نیاز به مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری دارند، در سیستم قدرت از ولتاژ سینوسی استفاده می‌کنیم، زیرا همانطور که می‌دانیم توابع سینوسی بعد از مشتق و انتگرال شکل سینوسی خود را حفظ می‌کنند.

شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید:



$v(t)$ و $i(t)$ به ترتیب ولتاژ و جریان لحظه‌ای نقطه‌ای مانند A در شکل هستند.

$v(t)$ یک ولتاژ سینوسی و R یک عنصر از سیستم قدرت است.

با توجه به عناصر سیستم قدرت (مقاومت، سلف، خازن ...) جریان نیز سینوسی خواهد بود، لذا ولتاژ و جریان را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad , \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_I) \qquad (1)$$

البته ممکن است در بعضی از کتاب‌ها ولتاژ و جریان لحظه‌ای به‌صورت زیر نمایش داده شود:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v) \quad , \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_I) \qquad (2)$$

استانداردی که برای این کتاب و همچنین کنکور در نظر گرفته می‌شود، همواره روش نمایش اول است.

در بحث‌های مربوط به سیستم‌های قدرت، حالت نهایی و پایدار برای محاسبات در نظر گرفته می‌شود. لذا با توجه به این‌که ولتاژ و جریان سینوسی هستند، می‌توانیم از روش فازوری برای تحلیل آسان‌تر استفاده کنیم. در ادامه نکات مربوط به اعداد مختلط و مبحث فازور به‌صورت خلاصه مرور می‌گردد:

اعداد مختلط

هر عدد مختلط به فرم $Z = X + jY$ نمایش داده می‌شود، که X را قسمت حقیقی عدد مختلط و Y را قسمت موهومی عدد مختلط می‌نامیم، داریم:

$$X = \mathrm{Re}(Z) \quad , \quad Y = \mathrm{Im}(Z)$$

$|Z|$ اندازه‌ی Z و $\measuredangle Z$ فاز (زاویه‌ی) Z است.

$$|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad , \quad \measuredangle Z = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$$

نمایش در حوزه‌ی فرکانس (فازوری)

هر تابعی به فرم $a(t) = A_m \cos(\omega t + \theta)$ را می‌توانیم به‌صورت $A_{rms} \measuredangle \theta$ (که در آن $A_{rms} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$ می‌باشد)، نمایش دهیم که بـه آن نمـایش در **حوزه‌ی فرکانس** یا **فازوری تابع** می‌گویند. در رابطه‌ی بالا $a(t)$ نمایش تابع در حوزه‌ی زمان و A نمایش تابع در حوزه‌ی فرکانس است.

A_{rms} مقدار مؤثر A است. برای به‌دست آوردن مقدار مؤثر یک تابع یا شکل موج $x(t)$، در حالت کلی از رابطه‌ی $X_{rms} = (\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}$ استفاده می‌کنیم. اگر از این رابطه برای یک تابع سینوسی مانند A استفاده کنیم، مقدار A_{rms} به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{A_{rms} = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_m^2 \sin^2(t)dt)^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_m^2 (\frac{1-\cos 2t}{2})dt)^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2\pi}(A_m^2 \pi))^{\frac{1}{2}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}}$$

نکته۱: در صـورتی کـه بتـوان تـابع $x(t)$ را بـه‌صـورت $x(t) = \left[\sum_{m=1}^{M} a_m \cos(m\omega t + \alpha_m) + b_m \sin(m\omega t + \beta_m)\right]$ نوشـت، X_{rms} را می‌توان از رابطه $X_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M}(a_m^2 + b_m^2)}{2}}$ به‌دست آورد.

نکته۲: $A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \tan^{-1}\frac{B}{A})$

مثال۱: فرم فازوری توابع زیر را که در حوزه‌ی زمان هستند، به‌دست آورید.

الف) $v(t)=۴\sqrt{۲}\cos\ ۵t$ ب) $v(t)=۸\sqrt{۲}\sin\ (۵t+۶۰^\circ)$

پاسخ: الف) تابع $v(t)$ دارای شکل استاندارد است، کافی است دو مقدار θ و V_{rms} را پیدا کنیم:

$$V_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۴\ ,\ \theta=۰\xrightarrow{\text{نوشتن نمایش فازوری}}V=۴\measuredangle ۰^\circ$$

ب) چون تابع سینوسی است، باید آن را به شکل استاندارد کسینوسی تبدیل کنیم و سپس آن را در حوزه‌ی فازور بنویسیم. برای تبدیل یک تابع سینوسی به یک تابع کسینوسی کافی است در شکل کسینوسی از فاز، ۹۰° کم نماییم، داریم:

$$v(t)=۸\sqrt{۲}\sin(۵t+۶۰^\circ)=۸\sqrt{۲}\cos(۵t+۶۰^\circ-۹۰^\circ)=۸\sqrt{۲}\cos(۵t-۳۰^\circ)$$

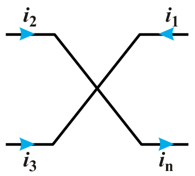
لذا $V=۸\measuredangle-۳۰^\circ$ است.

نکته۳: بعضی وقت‌ها با سؤالاتی مواجه می‌شویم که مجبوریم برای حل آنها چند موج کسینوسی را با هم جمع کنیم. در این حالت اگر همه‌ی موج‌ها در حوزه‌ی زمان هم فرکانس باشند، می‌توانیم از روش فازوری برای آسان‌تر شدن حل استفاده کنیم.

توجه: فرم فازوری $A=A_{rms}\measuredangle\theta$ را می‌توان به‌صورت مقابل نیز نمایش داد: $A=A_{rms}\measuredangle\theta=A_{rms}e^{j\theta}=A_{rms}\cos\theta+jA_{rms}\sin\theta$

نکته۴: هنگامی که در حوزه‌ی فازور اندازه و زاویه‌ی ولتاژ یا جریان را به‌دست آوردیم، برای نوشتن مقدار جریان یا ولتاژ در حوزه‌ی زمان اندازه را در $\sqrt{۲}$ ضرب کرده و سپس مقدار به‌دست آمده را در $\cos(\omega t+\theta)$ ضرب می‌کنیم. θ زاویه در حوزه‌ی فازور و ω برابر با $۲\pi f$ است که f فرکانس می‌باشد.

مثال۲: در شکل روبه‌رو مقدار جریان i_n کدام است؟



$i_۱(t)=۴۰\sqrt{۲}\sin ۲t\ \ A$

$i_۲(t)=۴۰\sqrt{۲}\cos(۲t-۳۰^\circ)\ \ A$

$i_۳(t)=۴۰\sqrt{۲}\cos(۲t+۳۰^\circ)\ \ A$

۱) $۸۰\cos(۲t-۳۰^\circ)\ A$ ۲) $۴۰\cos(۲t+۳۰^\circ)\ A$ ۳) $۸۰\sqrt{۲}\cos(۲t-۳۰^\circ)\ A$ ۴) $۸۰\sqrt{۲}\cos(۲t+۳۰^\circ)\ A$

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که از شکل سؤال پیدا است i_n مجموع سه جریان $i_۱,i_۲,i_۳$ است، یعنی: $i_n=i_۱+i_۲+i_۳$

با توجه به این که فرکانس در هر سه تابع یکی است، ابتدا جریان‌ها را در حالت فازوری می‌نویسیم و با جمع آنها فرم فازوری i_n را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$i_۱(t)=۴۰\sqrt{۲}\sin ۲t=۴۰\sqrt{۲}\cos(۲t-۹۰^\circ)\xrightarrow{\text{بردن به فرم فازوری}}I_۱=۴۰\measuredangle-۹۰^\circ\ \ A$$

$i_۲,i_۳$ دارای فرم استاندارد کسینوسی هستند پس می‌توانیم به‌طورمستقیم فرم فازوری آنها را بنویسیم:

$$I_۲=۴۰\measuredangle-۳۰^\circ\ \ A\quad و\quad I_۳=۴۰\measuredangle۳۰^\circ\ \ A$$

در حالت فازوری I_N برابر است با:

$$I_N=I_۱+I_۲+I_۳=۴۰e^{-j۹۰}+۴۰e^{-j۳۰}+۴۰e^{j۳۰}$$

$$\xrightarrow[\text{با توجه به فرمول گفته شده در صفحه‌ی قبل}]{\text{تجزیه به مؤلفه‌های حقیقی و موهومی}}I_N=۴۰(۰+j\sin(-۹۰^\circ))+۴۰(\cos(-۳۰^\circ)+j(\sin-۳۰^\circ))+۴۰(\cos۳۰^\circ+j\sin۳۰^\circ)\ A$$

$$\xrightarrow{\text{ساده سازی}}I_N=-j۴۰+۴۰\cos۳۰^\circ-۴۰j\sin۳۰^\circ+۴۰\cos۳۰^\circ+۴۰j\sin۳۰^\circ\ A$$

مقادیرکسینوس و سینوس‌ها را محاسبه کرده و قسمت‌های موهومی و حقیقی را با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه:

$$I_N=۴۰\sqrt{۳}-j۴۰\ A$$

اندازه و زاویه I_N را با توجه به این‌که I_N یک عدد مختلط است و با استفاده از روابط گفته شده برای اندازه و زاویه‌ی یک عدد مختلط به‌دست می‌آوریم:

$$I_{N_{rms}}=\sqrt{(۴۰\sqrt{۳})^۲+۴۰^۲}=\sqrt{۳\times۴۰^۲+۴۰^۲}=۲\times۴۰=۸۰\ \ A$$

$$\measuredangle I_N=\tan^{-۱}(\frac{-۴۰}{۴۰\sqrt{۳}})=\tan^{-۱}(\frac{-۱}{\sqrt{۳}})=-۳۰^\circ$$

با داشتن فاز و اندازه‌ی I_N می‌توانیم آن را به‌صورت فازوری بنویسیم:

$$I_N=I_{N_{rms}}\measuredangle I_N=۸۰\measuredangle-۳۰^\circ\ \ A$$

با توجه به این‌که گزینه‌ها در حوزه‌ی زمان هستند باید I_N را نیز به حوزه‌ی زمان برگردانیم:

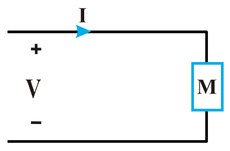
$$i_n(t)=\sqrt{۲}I_{N_{rms}}\cos(\omega t+\theta)=۸۰\sqrt{۲}\cos(۲t-۳۰^\circ)\ \ A$$

امپدانس و ادمیتانس

همگی رابطه یک مقاومت الکتریکی را به‌خاطر داریم که برابر اندازه ولتاژ دو سر عنصر تقسیم بر اندازه جریان عبوری از آن است. درواقع همان‌طور که از این تعریف مشخص است مقدار مقاومت یک مدار الکتریکی سنجشی است از نحوه عبور جریان از آن مدار. درواقع هرچه مقاومت پایین‌تر، جریان الکتریکی ساده‌تر شارش پیدا می‌کند و برعکس. با اضافه شدن عناصر جدید به مدار مانند خازن و سلف و در نظر گرفتن منبع جریان متناوب بررسی عملکرد مدار دچار پیچیدگی بیشتری می‌شود. در این راستا برای مدار الکتریکی در حوزه فازور تعاریف جدیدی ارائه می‌شود.

امپدانس: معیاری برای سنجش مخالفت یک مدار الکتریکی در برابر شارش جریان است هنگامی‌که به دو سر آن ولتاژ اعمال می‌گردد.

ادمیتانس: این مفهوم در مقابل امپدانس قرار می‌گیرد و معیاری است برای سنجش رسانایی الکتریکی یا همان‌طور که از معنای واژه مشخص است، مقدار ادمیتانس یک مدار مشخص‌کننده این است که جریان چقدر اجازه عبور از آن را دارد.



شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. M یکی از اجزای شبکه است که در دو سر خود دارای ولتاژ V است و جریان I از آن عبور می‌کند.

$$V = V_{rms}\measuredangle\theta_V \quad , \quad I = I_{rms}\measuredangle\theta_I$$

امپدانس M به‌صورت نسبت فازور ولتاژ دو سر عنصر M به فازور جریان عبوری از آن تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{rms}\measuredangle\theta_V}{I_{rms}\measuredangle\theta_I} = \frac{V_m}{I_m}\measuredangle(\theta_V - \theta_I)\Omega$$

ادمیتانس M به‌صورت نسبت فازور جریان عبوری از عنصر M به فازور ولتاژ دو سر آن تعریف می‌شود:

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{I_{rms}\measuredangle\theta_I}{V_{rms}\measuredangle\theta_V} = \frac{I_m}{V_m}\measuredangle(\theta_I - \theta_V)\mho$$

امپدانس و ادمیتانس عکس یکدیگر هستند $(Y = \frac{۱}{Z})$. یعنی می‌توان با داشتن یکی از این دو، دیگری را نیز به‌دست آورد.

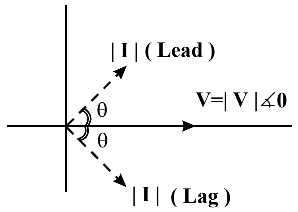
به‌طورخلاصه:

$$\boxed{Z_{(\text{امپدانس})} = \frac{V_m}{I_m}\measuredangle\theta \quad , \quad Y_{(\text{ادمیتانس})} = \frac{I_m}{V_m}\measuredangle -\theta \quad , \quad \theta = \theta_V - \theta_I}$$

نکته۵: θ (زاویه‌ی امپدانس) به‌صورت $\measuredangle\theta = \measuredangle(\theta_V - \theta_I)$ تعریف می‌شود. به $\cos\theta$ **ضریب توان (power factor)** می‌گویند.

تعریف عناصر سیستم‌های قدرت در حوزه‌ی فرکانس

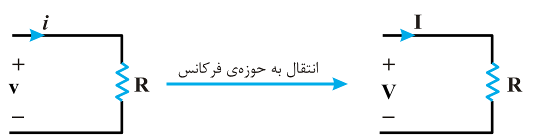
قبل از پرداختن به تعاریف عنصرها در حوزه فرکانس و محاسبه امپدانس آنها، بد نیست دو واژه پرکاربرد پس‌فاز (Lag) و پیش‌فاز (Lead) را یادآوری نماییم. درسیستم قدرت معمولاً به‌جای اعلام دقیق زوایای جریان و ولتاژ، زاویه ولتاژ به‌عنوان مبدأ در نظر گرفته می‌شود و آدرس زاویه جریان به‌وسیله ضریب توان $(\cos\theta)$ و پس‌فاز یا پیش‌فاز بودن مشخص می‌گردد. مقدار زاویه برابر $\cos^{-1}$ (ضریب توان) است. پس‌فاز یا پیش‌فاز ممکن است مقداری گیج‌کننده باشد. اما اگر به واژه‌های اصلی مراجعه کنیم می‌بینیم که نامگذاری مناسبی صورت گرفته است. شکل مقابل را در نظر بگیرید:



ولتاژ مشخص و زاویه آن به‌عنوان مرجع درنظر گرفته شده است. فرض کنید به شما گفته می‌شود مقدار جریان $|I|$ بوده و ضریب توان $\cos\theta$ پس‌فاز (Lag) است. باتوجه به این اطلاعات به‌سادگی می‌توانید جریان را در شکل مشخص کنید. پس‌فاز معادل Lag یا عقب بودن است. مثلاً در یک بازی اینترنتی بعضی از بازیگرها دارای Lag بوده و از روند بازی عقب‌تر هستند. در نقطه مقابل اگر ضریب توان $\cos\theta$ پیش‌فاز (Lead) باشد این یعنی جریان جلوتر از ولتاژ است مانند یک Leader یا پیشوا که از بقیه جلوتر است!

مقــاومت اهمی

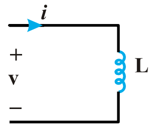
رابطه‌ی ولتاژ و جریان مقاومت در حوزه‌ی فرکانس مشابه حوزه‌ی زمان است و ولتاژ و جریان فاز یکسانی دارند.



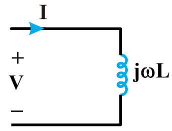
$$R = \frac{V}{I} = Z \ , \ Y = \frac{۱}{R}$$

سـلف

در حوزه‌ی فرکانس روابط ولتاژ و جریان سلف به‌صورت زیر بوده و جریان ۹۰° نسبت به ولتاژ **پس فاز** (Lag) است.



$$v = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{انتقال به حوزه‌ی فرکانس}}$$



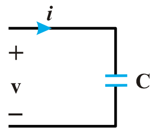
$$V = j\omega LI \ , \ Z = j\omega L \ , \ Y = \frac{۱}{j\omega L}$$

در حـوزه‌ی زمـان بـرای یـک سـلف $v = L\frac{di}{dt}$ اسـت کـه اگـر ایـن رابطـه را بـه حـوزه‌ی فرکـانس ببـریم؛ عمـل مشـتق معـادل ضـرب $j\omega$ اسـت. در نتیجه $V = j\omega LI$ که ωL یک عدد مثبت بوده ولی j معادل $۱\measuredangle ۹۰^\circ$ است، در نتیجه $\measuredangle V$ برابر $\measuredangle I + ۹۰^\circ$ خواهد بود.

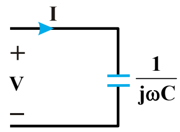
با توجه به رابطه‌ی بالا فاز V به اندازه ۹۰° از فاز I بیشتر است. می‌توان گفت که جریان یک سلف خالص به اندازه‌ی ۹۰° از ولتاژ آن عقب است (پس فاز). یعنی $\measuredangle I = \measuredangle V - ۹۰^\circ$.

خـازن

روابط مربوط به خازن در حوزه‌ی فرکانس در زیر آمده است. برای خازن زاویه‌ی جریان (زاویه I) نسبت به ولتاژ ۹۰° جلوتر یا پیش فاز است.



$$i = C\frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{انتقال به حوزه‌ی فرکانس}}$$

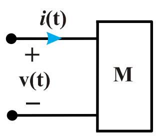


$$I = j\omega CV \ , \ Z = \frac{۱}{j\omega C} \ , \ Y = j\omega C$$

در حوزه‌ی زمان برای یک خازن $i = C\frac{dv}{dt}$ است، که با انتقال به حوزه‌ی فرکانس جریان $I = j\omega CV$ خواهد شد. ωC عددی مثبت و بدون زاویه است ولی j معادل $۱\measuredangle ۹۰^\circ$ است، لذا $\measuredangle I = \measuredangle j + \measuredangle \omega c + \measuredangle V = ۹۰^\circ + ۰ + \measuredangle V$، پس جریان خازن نسبت به ولتاژ دو سرش ۹۰° پیش فاز است.

امپدانس را به‌صورت $Z = R + jX$ نیز می‌نویسند که R مقاومت اهمی مدار و X راکتانس مدار است. با توجه به خازن‌ها و سلف‌های مدار، X می‌تواند خاصیت خازنی یا القایی داشته باشد، یعنی اگر اندازه سلف‌های مدار بیشتر باشد راکتانس اندوکتیو و در غیر این‌صورت کاپاسیتیو است. برای ادمیتانس نیز داریم: $Y = G + jB$، که G کندوکتانس و B سوسپتانس مدار است. واحد G عکس واحد مقاومت بوده و مهو نامیده می‌شود.

مثال ۳: در شکل نشان داده شده $v(t)$ ولتاژ دو سر M و $i(t)$ جریان عبوری از آن است. مقدار مقاومت و سوسپتانس به ترتیب چند اهم و چند مهو است؟



$$\mathbf{i(t) = ۵\sqrt{۲}\sin(۵t) \quad A}$$

$$\mathbf{v(t) = \sqrt{۲}(\sin(۵t + \frac{\pi}{۴}) + \cos(۵t + \frac{\pi}{۴})) \quad V}$$

۱) $\frac{۵}{\sqrt{۲}}, ۵\sqrt{۲}$

۲) $-\frac{۵}{\sqrt{۲}}, ۵$

۳) $-\frac{۵}{\sqrt{۲}}, ۰$

۴) $۵\sqrt{۲}, ۵$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» باید مقادیر ولتاژ و جریان را در حوزه‌ی فازور به‌دست آوریم:

$$i = ۵\sqrt{۲}\sin ۵t \xrightarrow{\text{تبدیل به شکل استاندارد}} i = ۵\sqrt{۲}\cos(۵t - ۹۰^\circ) \xrightarrow{\text{بردن به حوزه‌ی فرکانس}} I = ۵\measuredangle -۹۰^\circ \ A$$

برای محاسبه‌ی V در حوزه‌ی فازور از روش توضیح داده شده در مثال قبل استفاده می‌کنیم:

$$v(t) = \sqrt{۲}\sin(۵t + \frac{\pi}{۴}) + \sqrt{۲}\cos(۵t + \frac{\pi}{۴}) \quad V$$

ابتدا $v(t)$ را در حوزه‌ی فرکانس می‌نویسیم:

$$V = ۱\measuredangle -\frac{\pi}{۴} + ۱\measuredangle \frac{\pi}{۴} \quad V$$

در مرحله‌ی بعد V را به فرم قطبی نوشته و با توجه به روابط سینوس و کسینوس آن را ساده می‌کنیم:

$$V = e^{-j\frac{\pi}{۴}} + e^{j\frac{\pi}{۴}} = ۲\cos\frac{\pi}{۴} = ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}\measuredangle ۰^\circ \quad V$$

چون مقادیر مقاومت و سوسپتانس را می‌خواهیم، Z و Y را باید محاسبه کنیم. ابتدا Z را به‌دست می‌آوریم:

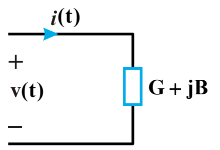
$$Z = \frac{V}{I} = \frac{\sqrt{۲}}{۵\measuredangle -۹۰^\circ} = \frac{\sqrt{۲}}{۵}\measuredangle ۹۰^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۵}e^{j۹۰} \xrightarrow{\text{بسط می‌دهیم}} Z = \frac{\sqrt{۲}}{۵}\cos ۹۰^\circ + j\frac{\sqrt{۲}}{۵}\sin ۹۰^\circ = j\frac{\sqrt{۲}}{۵} \quad \Omega$$

اگر مقدار به‌دست آمده را با شکل اصلی امپدانس یعنی $R+jX$ مقایسه کنیم، قسمت حقیقی که مقاومت است برابر صفر خواهد بود، لذا $R=0$. برای محاسبه‌ی B، باید Y را به‌دست آوریم:

$$Y=\frac{I}{V}=\frac{5\measuredangle -90^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}e^{-j90}=-j\frac{5}{\sqrt{2}}\ \mho$$

$$B=\mathrm{Imag}(Y)=-\frac{5}{\sqrt{2}}\quad \Omega$$

مثال ۴: در شکل نشان داده شده اگر داشته باشیم $v(t)=4\sqrt{2}\sin(\omega t+150^\circ)$ و $i(t)=\cos\omega t+\sin\omega t$ مقدار کندوکتانس برحسب $\mho$ کدام است؟ ($v(t)$ و $i(t)$ به ترتیب برحسب ولت و آمپر هستند.)



۱) $-0/25\sin15^\circ$ ۲) $0/25\sin15^\circ$

۳) $0/25\cos15^\circ$ ۴) $-0/25\cos15^\circ$

پاسخ: گزینه «۱» برای به‌دست آوردن کندوکتانس باید مقدار فازوری I و V را محاسبه کنیم سپس می‌توانیم از روی ادمیتانس، G را به‌دست آوریم.

نمایش فازوری V:

$$v(t)=4\sqrt{2}\sin(\omega t+150^\circ)=4\sqrt{2}\cos(\omega t+150^\circ-90^\circ)\Rightarrow V=4\measuredangle 60^\circ=4e^{j60}\quad V$$

نمایش فازوری I: مقدار جریان لحظه‌ای به‌صورت $i(t)=\cos\omega t+\sin\omega t$ است. برای این حالت می‌توانیم هر دو جمله را به فازور تبدیل کنیم، سپس مانند مثال‌های قبل آن را به یک جمله تبدیل کنیم و یا از نکته گفته شده استفاده کنیم.

در این‌صورت می‌توانیم جریان را به‌صورت زیر به فرم استاندارد ببریم:

$$i(t)=\sqrt{2}\cos(\omega t-\tan^{-1}1)=\sqrt{2}\cos(\omega t-45^\circ)\xrightarrow{\text{تبدیل به فرم فازوری}}I=1\measuredangle -45^\circ\quad A$$

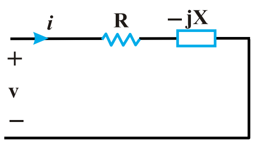
در مرحله بعد ادمیتانس را محاسبه می‌کنیم:

$$Y=\frac{I}{V}=\frac{1\measuredangle -45^\circ}{4\measuredangle 60^\circ}=0/25\measuredangle -105^\circ\Rightarrow Y=G+jB=0/25\cos105^\circ-j0/25\sin105^\circ\ \mho$$

کندوکتانس (G) را می‌خواهیم که برابر است با:

$$G=0/25\cos105^\circ=-0/25\sin15^\circ\ \mho$$

مثال ۵: برای شکل نشان داده شده داریم $B=0/06\mho$ (سوسپتانس)، کدام گزینه می‌تواند نشان‌دهنده X و R برحسب اهم باشد؟



۱) $X=6$، $R=8$ ۲) $X=8$، $R=6$

۳) $X=10$، $R=12$ ۴) $X=12$، $R=10$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مقدار سوسپتانس را در حالت کلی برای مدار به‌دست می‌آوریم سپس گزینه‌ها را جایگذاری کرده و با مقدار سوسپتانس داده شده مقایسه می‌کنیم، گزینه‌ای که R و X آن در جواب صدق کند، پاسخ صحیح است. برای محاسبه‌ی سوسپتانس باید ادمیتانس را داشته باشیم، لذا ابتدا امپدانس را به‌دست آورده، با عکس کردن آن ادمیتانس نیز به‌دست می‌آید:

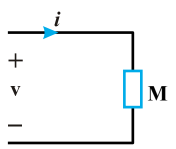
$$Z=R-jX\xrightarrow{\text{رابطه بین }Y,Z}Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R-jX}\xrightarrow{\times\frac{R+jX}{R+jX}}Y=\frac{R+jX}{R^2+X^2}=\frac{R}{R^2+X^2}+j\frac{X}{R^2+X^2}$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با }Y=G+jB}B=\frac{X}{R^2+X^2}$$

با جایگذاری R و X گزینه‌های جواب در رابطه‌ی بالا، به ازای گزینه ۱ داریم: $B=0/06$ پس این گزینه پاسخ صحیح است.

توان AC در مدارهای تک فاز

شکل مقابل را در نظر بگیرید. برای $v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_V)$ و $i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_I)$ توان تک فاز مصرفی عنصر M به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$p(t)=v(t).i(t)\qquad(1)\qquad \left.\begin{matrix}p(t)>0\ \text{جذب توان}\\ p(t)<0\ \text{تولید توان}\end{matrix}\right\}$$

$p(t)$ مقدار توان مصرفی عنصر M را در هر لحظه به ما می‌دهد، بنابراین به آن **توان لحظه‌ای** می‌گوییم. برای به‌دست آوردن رابطه‌ی جداگانه برای $p(t)$ مقادیر $i(t)$ و $v(t)$ را در عبارت (۱) قرار می‌دهیم:

$$p(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_V).I_m\cos(\omega t+\theta_I)$$

با ساده‌سازی با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه‌ی توان لحظه‌ای به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$p(t)=\frac{۱}{۲}V_m\,I_m\cos(۲\omega t+\theta_V+\theta_I)+\frac{۱}{۲}V_m\,I_m\cos(\theta_V-\theta_I)\quad,\quad(\theta=\theta_V-\theta_I)\qquad(*)$$

متوسط رابطه‌ی بالا توان متوسط را به ما می‌دهد. رابطه‌ی متوسط‌گیری به‌صورت $x_{\text{متوسط}}=\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T}x(t)dt$ است. اگر از $p(t)$ با توجه به این رابطه متوسط بگیریم، متوسط جمله‌ی اول صفر و متوسط جمله‌ی دوم، چون به زمان بستگی ندارد، با خودش برابر می‌شود بنابراین **توان متوسط** برابر است با:

$$P_{\text{متوسط}}=\frac{۱}{۲}V_mI_m\cos\theta\qquad(۲)$$

نکته۶: رابطه‌ی (*) از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت دوم در واقع همان توان متوسط است و قسمت اول دارای نوساناتی با فرکانس $۲f$ می‌باشد. می‌توانیم با قرار دادن مقادیر مؤثر جریان و ولتاژ در رابطه‌ی (۲) رابطه‌ی توان متوسط را بر حسب مقادیر مؤثر بنویسیم:

$$\boxed{P_{\text{متوسط}}=\frac{۱}{۲}V_mI_m\cos\theta=\frac{۱}{۲}\times(\sqrt{۲}V_{rms})\times(\sqrt{۲}I_{rms})\cos\theta=V_{rms}I_{rms}\cos\theta}$$

در ادامه سایر تعاریف توان از جمله توان مختلط و توان ظاهری ارائه می‌گردد:

توان مختلط به‌صورت روبه‌رو تعریف می‌گردد: $S=|V_{rms}||I_{rms}|\measuredangle(\theta_V-\theta_I)$

که قبلاً تعریف کرده بودیم $\theta=\theta_V-\theta_I$، پس زاویه‌ی توان مختلط برابر θ است. فرم دکارتی توان مختلط را می‌نویسیم:

$$S=V_{rms}I_{rms}\measuredangle\theta=V_{rms}I_{rms}\cos\theta+jV_{rms}\,I_{rms}\sin\theta$$

جمله‌ی اول همان‌طور که قبلاً تعریف کردیم **توان متوسط** یا **اکتیو** با واحد وات است. جمله‌ی دوم **توان راکتیو** است که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود و واحدش وار (VAr) است.

$$Q=V_{rms}I_{rms}\sin\theta\xrightarrow{\text{نوشتن S برحسب P , Q}}S=P+jQ\quad(\text{ولت آمپر VA})$$

اندازه‌ی توان مختلط را **توان ظاهری** می‌نامیم که برابر است با: $|S|=|V_{rms}||I_{rms}|=|P+jQ|=\sqrt{P^۲+Q^۲}$

زاویه S، (θ) با توجه به $S=P+jQ$ و تعریف زاویه‌ی عدد مختلط، برابر $\theta=\tan^{-۱}\frac{Q}{P}$ است، همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد $\cos\theta$ را **ضریب توان** می‌نامیم. از طرفی $S=|S|\cos\theta+j|S|\sin\theta$ می‌باشد. با مقایسه‌ی این رابطه و رابطه‌ی توان اکتیو، ضریب توان $\cos\theta=\frac{P}{|S|}$ است.

برای المانی از مدار که ولتاژ دو سر آن V بوده و جریان I از آن عبور می‌کند، داریم:

$$Z=\frac{V}{I}=R+jX\quad,\quad Z=|Z|\measuredangle\theta=|\frac{V}{I}|\measuredangle\theta$$

فرض کنید مقادیر V_{rms} و I_{rms}، اندازه‌ی مقدار مؤثر ولتاژ و جریان المان مورد نظر باشند، در این حالت می‌توانیم $|Z|$ را بر حسب مقادیر مؤثر بنویسیم:

$$|Z|=\frac{V_{rms}}{I_{rms}}\quad(۳)\qquad,\quad Z=|Z|e^{j\theta}=|Z|\cos\theta+j|Z|\sin\theta$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی (۳) با $Z=R+jX$ نتیجه می‌گیریم $X=|Z|\sin\theta\ ,\ R=|Z|\cos\theta$. برای توان اکتیو رابطه‌ی $P=V_{rms}I_{rms}\cos\theta$ را به‌دست آوردیم. با توجه به رابطه‌ی (۳) و جایگذاری آن در عبارت توان داریم:

$$P=(|Z|I_{rms})\times I_{rms}\cos\theta\Rightarrow P=|Z|\cos\theta\times I_{rms}^۲\xrightarrow{R=|Z|\cos\theta}P=RI^۲$$

مشابه همین کار را برای Q انجام می‌دهیم:

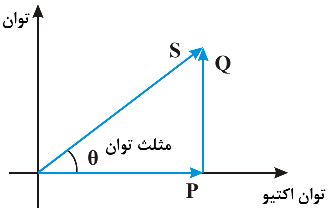
$$Q=V_{rms}I_{rms}\sin\theta=|Z|I_{rms}\times I_{rms}\sin\theta=|Z|\sin\theta I_{rms}^۲\xrightarrow{X=|Z|\sin\theta}Q=XI^۲$$

نکته۷: با توجه به تعاریف P و Q، رابطه‌ی توان لحظه‌ای را می‌توان به‌صورت مقابل نیز نوشت: $p(t) = P(1+\cos 2\omega t) + Q\sin 2\omega t$

اگر برای المانی در مدار بخواهیم مقدار توان راکتیو و اکتیو را محاسبه کنیم، می‌توانیم ولتاژ و جریان دو سر آن را به‌دست آورده و سپس با توجه به روابط بین جریان و ولتاژ، P و Q را محاسبه کنیم یا این‌که امپدانس عنصر مورد نظر را پیدا کرده و با توجه بـه مقـادیر X و R و ضرب آنها در مجذور جریان، Q و P خواسته شده را بدست آوریم.

نکته۸: معادله‌ی $S = P + jQ$ را می‌توان در دیاگرام فازوری نیز نمایش داد. در این صورت خواهیم داشت:

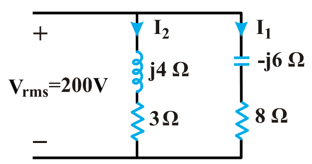
$$\theta = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$$ (مثبت برای جریان پس فاز و منفی برای جریان پیش‌فاز)



جمع بندی

توان	رابطه
لحظه‌ای	$V_{rms}I_{rms}[\cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I) + \cos\theta]$
متوسط	$V_{rms}I_{rms}\cos\theta$
مختلط	$V_{rms}I_{rms}\measuredangle(\theta_V - \theta_I)$
راکتیو	$V_{rms}I_{rms}\sin\theta$
ظاهری	$V_{rms}I_{rms}$
توان متوسط مصرف شده در یک مقاومت	RI^2
توان راکتیو مصرفی یک راکتانس	XI^2
توان لحظه‌ای برحسب P و Q	$P(1+\cos 2\omega t) + Q\sin 2\omega t$

مثال۶: در مدار نشان داده شده توان مصرفی اکتیو کل چند kW است؟



۱) ۹kW
۲) ۱۵kW
۳) ۷/۵kW
۴) ۸kW

پاسخ: گزینه «۴» در یک سیستم، توان تولیدی توسط عناصر مدار مصرف می‌گردد لذا:

$$\sum P_{\text{تولیدی}} = \sum P_{\text{مصرفی}} \quad , \quad \sum Q_{\text{تولیدی}} = \sum Q_{\text{مصرفی}}$$

یعنی اگر کل توان مصرفی را بخواهیم، می‌توانیم توان مصرفی عناصر موجود در مدار را محاسبه، سپس با هم جمع کنیم یا توان تولیدی را محاسبه کـرده و برابر با کل توان مصرفی قرار دهیم. برای حل سؤال اندازه‌ی جریان‌های I_1 و I_2 را محاسبه می‌کنیم و سپس توان مصرفی اکتیو عناصر را محاسبه کرده و بـا هم جمع می‌زنیم. با توجه به فرمول توان اکتیو $P = RI^2$، فقط به اندازه‌ی جریان احتیاج داریم:

$$|I_{rms}| = \frac{|V_{rms}|}{|Z|} \Rightarrow I_{1rms} = \frac{V_{rms}}{|Z_1|} \quad , \quad |Z_1| = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{64+36} = 10\Omega$$

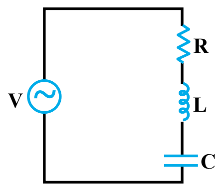
$$I_{1rms} = \frac{200}{10} = 20\,A \quad , \quad I_{2rms} = \frac{V_{rms}}{|Z_2|} \quad , \quad |Z_2| = \sqrt{16+9} = 5\Omega \Rightarrow I_{2rms} = \frac{200}{5} = 40\,A$$

حال مقادیر جریان را در فرمول توان $(P = RI^2)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$P_1 = R_1 I_{1rms}^2 = 8 \times 20^2 = 3200W \quad , \quad P_2 = R_2 I_{2rms}^2 = 3 \times 40^2 = 4800W$$

$$\xrightarrow{\text{توان مصرفی کل (اکتیو)}} P = \Sigma P_{\text{مصرفی}} = P_1 + P_2 = 4800 + 3200 = 8000\,W = 8kW$$

مثال۷: مطابق شکل نشان داده شده یک منبع ولتاژ AC یک بار RLC را تغذیه می‌کند. در صورتی‌که فرکانس منبع در اطراف فرکانس ۵۰ هرتز افزایش یابد، توان اکتیو مصرفی در بار چگونه تغییر می‌کند؟



۱) با توجه به این‌که توان اکتیو مستقل از فرکانس است، با افزایش فرکانس منبع توان اکتیو ثابت می‌ماند.

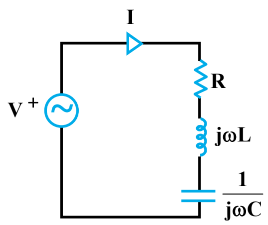
۲) توان اکتیو افزایش می‌یابد.

۳) توان اکتیو کاهش می‌یابد.

۴) با توجه به اطلاعات داده شده نمی‌توان معلوم کرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ممکن است به این‌صورت استدلال کنیم که چون امپدانس مقاومت به فرکانس وابسته نیست، با دو برابر شدن فرکانس منبع مقاومت ثابت بوده و چون سایر عناصر توان اکتیو مصرف نمی‌کنند، توان اکتیو در مجموع ثابت است. اما آیا این استدلال صحیح است؟

درست است که مقاومت تنها مصرف کننده‌ی توان اکتیو است اما باید به رابطه‌ی توان مصرفی در مقاومت نیز توجه کرد. با توجه به رابطه‌ی $P = R|I|^۲$، توان اکتیو وابسته به اندازه‌ی جریان است و باید بررسی کنیم که با افزایش فرکانس، جریان مدار چگونه تغییر می‌کند. برای این کار مدار را در حوزه‌ی فازور دوباره رسم می‌کنیم:



با استفاده از این شکل توان اکتیو برابر می‌شود با:

$$P = R|I|^۲ = R\left|\frac{V}{Z}\right|^۲ = \frac{R|V|^۲}{|Z|^۲}$$

از طرفی اندازه‌ی امپدانس بار برابر است با:

$$|Z| = \left|R + j(\omega L - \frac{۱}{\omega C})\right| = \sqrt{R^۲ + (\omega L - \frac{۱}{\omega C})}$$

با جایگذاری اندازه‌ی امپدانس در عبارت توان اکتیو، داریم:

$$P = \frac{R|V|^۲}{R^۲ + (\omega L - \frac{۱}{\omega C})^۲}$$

در مرحله‌ی بعد نحوه‌ی تغییر توان اکتیو با افزایش فرکانس را با استفاده از رابطه‌ی به‌دست آمده تحلیل می‌کنیم. صورت کسر مستقل از تغییر فرکانس است، لیکن با افزایش فرکانس مخرج کسر افزایش یافته و در نتیجه توان اکتیو مصرفی در بار کاهش پیدا می‌کند و گزینه‌ی (۳) پاسخ صحیح است.

مثال۸: توان لحظه‌ای برای یک سیستم تک فاز که با ولتاژ $v(t) = ۲۰۰\cos ۴۰۰t$ V تغذیه می‌شود، برابر $p(t) = ۸۰۰ + ۱۰۰۰\cos(۸۰۰t - ۳۶/۸۷^\circ)$ وات است. مقدار Q و I_m (حداکثر مقدار جریان لحظه‌ای) به ترتیب کدام است؟ $(\cos ۳۶/۸۷^\circ = ۰/۸)$

۱) ۲۵A, ۷۵۰ VAr
۲) ۱۰A, ۶۰۰VAr
۳) ۲۰A, ۶۰۰VAr
۴) ۱۵A, ۷۵۰ VAr

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» توان لحظه‌ای از دو جمله مطابق شکل زیر تشکیل شده است:

$$p(t) = P(۱ + \cos ۲\omega t) + Q\sin ۲\omega t \qquad (۱)$$

برای به‌دست آوردن Q کافی است، عبارت $p(t)$ داده شده در صورت سؤال را مشابه تساوی (۱) تجزیه نماییم.

$$p(t) = ۸۰۰ + ۱۰۰۰\cos(۸۰۰t - ۳۶/۸^\circ)$$

کسینوس حاصل جمع و تفاضل به‌صورت $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ تجزیه می‌شود. برای $p(t)$ داریم:

$$p(t) = ۸۰۰ + ۱۰۰۰(\cos ۳۶/۸۷^\circ \cos ۸۰۰t + \sin ۳۶/۸۷^\circ \sin ۸۰۰t)$$

با توجه به‌صورت سؤال:

$$\cos ۳۶/۸۷^\circ = ۰/۸ \Rightarrow \sin ۳۶/۸۷^\circ = \sqrt{۱ - \cos^۲ ۳۶/۸۷^\circ} = ۰/۶$$

با جایگذاری مقادیر سینوس و کسینوس به‌دست آمده $p(t)$ برابر می‌شود با:

$$p(t) = ۸۰۰(۱ + \cos ۲(۴۰۰)t) + ۶۰۰\sin ۲(۴۰۰)t$$

با مقایسه‌ی $p(t)$ و رابطه‌ی (۱) داریم:

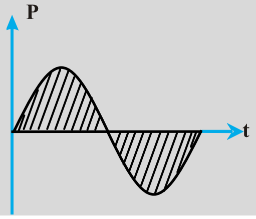
$$P = ۸۰۰W \quad ; \quad Q = ۶۰۰VAr$$

با توجه به توضیحات داده شده در این قسمت مقدار جریان را محاسبه می‌کنیم. برای این کار ابتدا توان مختلط را به‌دست می‌آوریم:

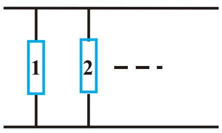
$$S = P + jQ = 800 + j600 = (1000)\measuredangle 36/87^\circ \ VA \xrightarrow[\text{برای توان مختلط}]{\text{با توجه به رابطه‌ی گفته شده}} S = V_{rms}I_{rms}^* = \frac{1}{2}V_m I_m^* \Rightarrow 1000\measuredangle 36/87^\circ = \frac{1}{2}200 I_m^*$$

با توجه به رابطه‌ی بالا، جریان ماکزیمم برابر $I_m = (10\measuredangle 36/87^\circ)^* = 10\measuredangle -36/87^\circ \ A$ است. $|I_m|$ اندازه‌ی حداکثر جریان و $\measuredangle I_m$ زاویه‌ی جریان است، بنابراین رابطه‌ی جریان در حوزه‌ی زمان به‌صورت $i(t) = I_m\cos(\omega t + \theta_I) = 10\cos(\omega t - 36/87^\circ)$ خواهد بود.

در میان عناصر مدار مانند خازن، سلف و مقاومت، تنها مقاومت است که توان اکتیو مصرف می‌کند و متوسط توان برای سلف و خازن صفر است. شکل روبه‌رو نمودار توان لحظه‌ای دو سر یک سلف را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مساحت قسمت‌های هاشور خورده در بالا و پایین محور t یکسان است و توان متوسط صفر خواهد بود. پس در واقع سلف و خازن تنها توان راکتیو مصرف یا تولید می‌کنند.



نکته۹: در صورتی‌که چند بار الکتریکی مانند شکل روبرو با یکدیگر موازی گردند، ضریب توان کل سیستم را می‌توانیم با پیدا کردن S_T و P_T به‌صورت زیر محاسبه کنیم:



$$\boxed{\begin{array}{l} P_T = \sum P = P_1 + P_2 + \cdots \ , \ Q_T = \sum Q = \pm Q_1 \pm Q_2 + \cdots \\ S_T = \sum S = S_1 + S_2 + \cdots \ , \ |S_T| = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \ , \ \cos\theta = \dfrac{P_T}{|S_T|} \end{array}}$$

برخلاف P که تنها توسط منابع تولید می‌شود، Q می‌تواند توسط عناصر مدار نیز تولید شود. در میان عناصر سیستم قدرت، سلف مصرف‌کننده‌ی توان راکتیو و خازن تولیدکننده‌ی توان راکتیو است، زیرا: $S = VI^* = ZII^* = Z|I|^2$

$$S = Z|I|^2 \xrightarrow{\text{برای یک خازن}} Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\times\frac{1}{\omega C} = -jX_C \Rightarrow S = -jX_C|I|^2 = 0 + jQ \Rightarrow Q = -X_C|I|^2$$

واضح است که $|I^2| > 0$ لذا $Q < 0$. پس خازن تولید کننده‌ی توان راکتیو است.

به‌طورمشابه برای یک سلف داریم: $Z = j\omega L \ , S = Z|I|^2 \Rightarrow S = j\omega L|I|^2 = 0 + jQ \Rightarrow Q_L = \omega L|I^2|$

با توجه به این که $|I|^2 > 0$ و ωL عددی مثبت است، $Q_L > 0$ بوده و سلف مصرف‌کننده‌ی توان راکتیو است.

نکته۱۰: با توجه به توان راکتیو مصرفی عنصر در مدار، می‌توان در مورد سلفی یا خازنی بودن آن نظر داد. اگر $Q = 0$ عنصر خاصیت مقاومتی، $Q < 0$ عنصر خاصیت خازنی و $Q > 0$ عنصر خاصیت سلفی یا القایی دارد. برای خازن، جریان نسبت به ولتاژ پیش فاز و برای سلف جریان نسبت به ولتاژ پس فاز است.

نکته۱۱: برای یک شبکه نیز می‌توان سلفی یا القایی بودن را تعریف کرد. مثلاً شبکه‌ی مقاومتی شبکه‌ای است که برای آن $\mathbf{Q = 0}$ است که این در دو حالت می‌تواند رخ دهد:

۱) شبکه تنها عناصر مقاومتی داشته باشد.

۲) توان راکتیو مصرفی (توسط سلف‌ها) با توان راکتیو تولیدی (توسط خازن‌ها) یکسان باشد.

مثال۹: برای یک سلف رابطه‌ی توان لحظه‌ای به کدام صورت است؟ $\mathbf{i_l(t) = \sqrt{2}I_{rms}\cos(\omega t + \varphi)}$

۱) $p(t) = Q\sin(2\omega t + \varphi)$ ۲) $p(t) = P\sin(2\omega t + \varphi)$ ۳) $p(t) = -Q\sin 2(\omega t + \varphi)$ ۴) $p(t) = -Q\cos 2(\omega t + \varphi)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها ابتدا $p(t)$ را در حالت کلی به‌دست آورده سپس با توجه به مقادیر P و Q برای یک سلف، جواب درست را می‌یابیم:

$$i(t) = \sqrt{2}I_{rms}\cos(\omega t + \varphi) \ , \ v(t) = L\frac{di}{dt} = -\sqrt{2}\omega L I_{rms}\sin(\omega t + \varphi)$$

رابطه‌ی توان را برابر حاصل‌ضرب جریان در ولتاژ تعریف کردیم. در نتیجه: $p(t) = v(t)\times i(t) = -2\omega L I_{rms}^2\sin(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi)$

با توجه به رابطه مثلثاتی $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، عبارت بالا را به‌صورت $p(t) = -\omega L I_{rms}^2 \sin 2(\omega t + \varphi)$ می‌نویسیم.

P و Q را برای یک سلف به‌صورت $Q_L = \omega L I_{rms}^2 \ , \ P_L = 0$ به‌دست آمد. با جایگذاری Q_L در رابطه‌ی $p(t)$ داریم:

$$p(t) = -Q_L\sin 2(\omega t + \varphi)$$