

سؤالات آزمون سراسری ۱۳۸۴

ریاضی و آمار

۱- اگر $\sin \alpha \sec \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ باشد، آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲- جواب معادله $\log(3-x) - \log(1+x) = \frac{1}{\log_2 \sqrt{10}}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) نشدنی

۳- اگر $f\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right) = x$ باشد، ضابطه $f(t)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2t}{e^{t-1}}$ (۲) $\ln \frac{2t}{t-1}$ (۳) $\frac{e^{2t}}{e^t-1}$ (۴) $\ln |t|$

۴- اگر $f = \{(3, 2), (2, 1), (9, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (1, 0), (3, 3), (6, 6)\}$ باشد، آنگاه تابع معکوس $f-g$ کدام است؟

- (۱) $\{(2, 3), (-1, 3)\}$ (۲) $\{(2, \frac{1}{3}), (3, 1)\}$ (۳) $\{(2, -2), (3, -1)\}$ (۴) $\{(1, -1), (1, 1), (6, 3)\}$

۵- برد تابع $y = \frac{2}{e^x+1}$ در کدام بازه است؟

- (۱) $[2, +\infty)$ (۲) $(0, 2]$ (۳) $(2, +\infty)$ (۴) $(0, 2)$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sin x) \left[\frac{1}{x} \right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) -1 (۴) 0

۷- وضعیت خطوط مجانب نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{5}{x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ چگونه است؟

- (۱) دو قائم - دو افقی (۲) دو قائم - یک افقی (۳) سه قائم - دو افقی (۴) سه قائم - یک افقی

۸- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x^2} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) -3

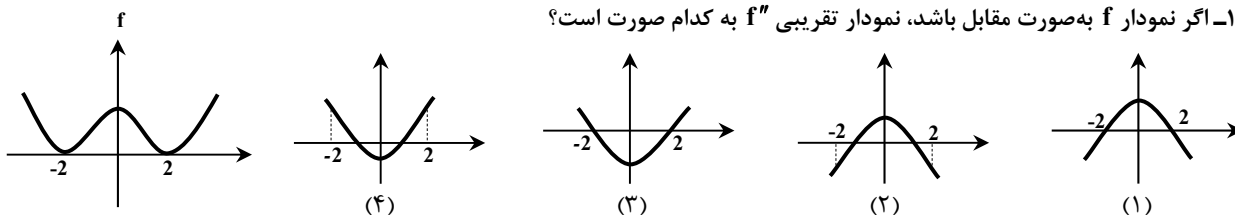
۹- در تابع پارامتری $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \frac{\sin^2 t}{3} \end{cases}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $t = \frac{\pi}{6}$ چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) -4 (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

۱۰- نقطه $(0, 2)$ بر منحنی به معادله $y = e^{-2x} - 3x^2 + 2x + 1$ کدام وضع را دارد؟

- (۱) مینیمم نسبی (۲) ماکسیمم نسبی (۳) نقطه عادی (۴) نقطه عطف

۱۱- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، نمودار تقریبی f'' به کدام صورت است؟





۱۲- حاصل $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $2 - \sqrt{2}$

۱۳- انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\ln \sqrt{x} + \ln(1+x) + c$ (۲) $\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$ (۳) $2 \tan^{-1} \sqrt{x} + c$ (۴) $\tan \sqrt{x} + c$

۱۴- حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی $y = \tan x \sqrt{1 + \tan^2 x}$ و محور x ها در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ حول محور x ها کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} \pi$ (۲) $(\sqrt{3} - 1) \pi$ (۳) $3\sqrt{3} \pi$ (۴) $(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1) \pi$

۱۵- ضریب جمله x^7 در بسط تیلور تابع $f(x) = e^{2x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۱۶- به‌طور متوسط در هر ساعت ۱۲ اتومبیل به پمپ بنزین مراجعه می‌کنند احتمال اینکه در ۱۵ دقیقه ۳ اتومبیل مراجعه کنند، کدام است؟

- (۱) e^{-3} (۲) e^{-12} (۳) $12e^{-3}$ (۴) $4/5e^{-3}$

۱۷- اگر $\text{cov}(x, y) = 0$ باشد، کدام عبارت درباره رابطه x, y صحیح است؟

- (۱) دو متغیر مستقل هستند. (۲) رابطه غیرخطی یا استقلال وجود دارد.
(۳) رابطه‌ای وجود ندارد. (۴) رابطه غیرخطی وجود دارد.

۱۸- اگر واریانس مقادیر x_1, \dots, x_n برابر ۱۶ باشد، انحراف معیار $\frac{x_1}{4}, \dots, \frac{x_n}{4}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۶

۱۹- اگر $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{5}, P(A|B) = \frac{1}{3}$ باشد، $P(A \cup B)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{6}{15}$ (۲) $\frac{7}{15}$ (۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{9}{15}$

۲۰- اگر $P(Z \leq -2) = 0.0228$ و متغیر x دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۵ باشد و $P(x \geq 5) = 0.9772$ باشد، انحراف معیار x کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

اصول حسابداری

۲۱- کدام واحد اقتصادی فعالیت غیرانتفاعی دارد؟

- (۱) شرکت مخمل کاشان (۲) شرکت ایران خودرو
(۳) شهرداری‌ها (۴) شرکت‌های وابسته به بورس اوراق بهادار

۲۲- فروش خدمات به‌طور نقد و نسیه موجب می‌شود که:

- (۱) بانک (وجه صندوق) افزایش یابد. (۲) حساب‌های دریافتی و حقوق صاحبان سرمایه افزایش یابد.
(۳) دارائی‌ها افزایش یابد. (۴) دارائی‌ها و حقوق صاحبان سرمایه افزایش یابد.

۲۳- با توجه به اطلاعات داده شده «خرید خالص» کدام است؟ (واحد به ریال)

- ۱- خرید طی دوره: ۱۷۰,۰۰۰ ۲- قیمت تمام شده‌ی کالای خریداری شده ۱۷۵,۰۰۰
۳- هزینه‌ی حمل خرید ۵,۰۰۰ ۴- برگشت از خرید ۴,۰۰۰ ۵- تخفیفات نقدی خرید ۱۰,۰۰۰
(۱) ۱۵۷,۰۰۰ (۲) ۱۶۱,۰۰۰ (۳) ۱۶۵,۰۰۰ (۴) ۱۷۱,۰۰۰

۲۴- با توجه به اطلاعات مسأله‌ی ۲۳ در صورتی که موجودی کالا در ابتدای دوره ۱۶۰,۰۰۰ و موجودی کالا در پایان دوره ۱۷۵,۰۰۰ باشد، قیمت تمام شده‌ی کالای فروش رفته کدام است؟

- (۱) ۱۳۴,۰۰۰ (۲) ۱۴۶,۰۰۰ (۳) ۳۲۱,۰۰۰ (۴) ۴۹۶,۰۰۰



پاسخنامه آزمون سراسری ۸۴

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۳» با توجه به رابطه $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0$ می توان نتیجه گرفت که $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ باید هم علامت باشند، لذا انتهای کمان α در ربع اول یا

در ربع سوم قرار دارد از طرفی با توجه به رابطه $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} < 0$ می توان نتیجه گرفت چون $\cos^2 \alpha$ همواره مثبت است پس باید $\sin \alpha$ منفی باشد، لذا انتهای کمان α در ربع سوم قرار دارد.

۲- گزینه «۳» ابتدا عبارت $\log \sqrt{10}$ را با استفاده از روابط لگاریتم ساده می کنیم:

$$\log \sqrt{10} = \log (10)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 10$$

$$\log(3-x) - \log(1+x) = \frac{1}{\frac{1}{2} \log 10} = \frac{2}{\log 10} \Rightarrow \log \frac{3-x}{1+x} = 2 \log 10 \Rightarrow \log \frac{3-x}{1+x} = \log 4$$

$$\Rightarrow \frac{3-x}{1+x} = 4 \Rightarrow 3-x = 4+4x \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{5}}$$

۳- گزینه «۲»

$$t = \frac{e^x}{e^x - 2} \Rightarrow te^x - 2t = e^x \Rightarrow e^x(t-1) = 2t \Rightarrow e^x = \frac{2t}{t-1} \Rightarrow x = \text{Ln} \frac{2t}{t-1} \Rightarrow \boxed{f(t) = \text{Ln} \frac{2t}{t-1}}$$

۴- گزینه «۱»

$$f - g = \{(3, -1), (2, -2)\} \Rightarrow (f - g)^{-1} = \{(-1, 3), (-2, 2)\}$$

۵- گزینه «۴» وقتی $X \rightarrow -\infty$ میل کند مقدار e^X تقریباً برابر صفر خواهد شد و در نتیجه مقدار کسر تقریباً برابر ۲ می شود، هر چه قدر X بزرگ شود مقدر e^X نیز افزایش یافته و وقتی $X \rightarrow +\infty$ آنگاه مقدار کسر تقریباً برابر صفر خواهد شد لذا $0 < y < 2$ می باشد.

۶- گزینه «۲» وقتی $X \rightarrow -\infty$ آنگاه $\frac{1}{X} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$ و می دانیم $0^- = -1$ می باشد پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sin x) \left[\frac{1}{X} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sin x)(-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x - x^2) = \text{عدد} -(-\infty)^2 = -\infty$$

۷- گزینه «۱» ابتدا دامنه تابع را تعیین می کنیم:

$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x < -2$ یا $x > 2$
 $x = -2$ ، $x = +2$ و $x = 1$ ریشه های مخرج کسرها هستند، اما $x = 1$ در قلمرو تابع نیست، پس تابع دو خط مجانب قائم $x = \pm 2$ را دارا می باشد، از طرفی برای به دست آوردن مجانب های افقی تابع طبق تعریف داریم:

$$y_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x-1} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$y_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x-1} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

۸- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \text{Ln} x}{1-x^2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Ln} x + x \times \frac{1}{x}}{-2x} \right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

۹- گزینه «۴»

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{3} \times 3 \sin^2 t \cos t}{-2 \sin 2t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t = \frac{\pi}{6}} = \frac{3 \times \frac{1}{3} \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 \times \cos \frac{\pi}{6}}{-2 \sin 2 \times \frac{\pi}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{-2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{8}$$

$$y = e^{-2x} - 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y' = -2e^{-2x} - 6x + 2 \Rightarrow y'' = 4e^{-2x} - 6$$

۱۰- گزینه «۲»

نقطه $X = 0$ مشتق اول را صفر می‌کند و بر طبق قضیه آزمون مشتق دوم ملاحظه می‌گردد $0 < -6 = y''(0)$ می‌باشد یعنی نقطه $X = 0$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع می‌باشد.

۱۱- گزینه «۴» باتوجه به نمودار تابع f نقاط عطف تابع بین نقاط ۲ و ۲- قرار دارد، لذا گزینه‌های ۱ و ۳ که نقاط عطف آنها دقیقاً همان نقاط ۲ و ۲- می‌باشد، غلط هستند. از طرفی قبل و بعد از نقاط ۲ و ۲- جهت تقعر تابع رو به بالا می‌باشد پس گزینه «۴» صحیح است.

۱۲- گزینه «۱»

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \sqrt{2} [-2 \cos \frac{\theta}{2}]_0^{\pi} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du, \quad x = u^2$$

۱۳- گزینه «۳»

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+x} = \int \frac{2du}{1+u^2} = 2 \operatorname{Arctg} u + c = 2 \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{x} + c$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{(\operatorname{tg} x)^2}_u \times \underbrace{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}_{du} dx = \pi \left[\frac{(\operatorname{tg} x)^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi \left[\frac{(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3})^3}{3} \right] = \pi \times \frac{(\sqrt{3})^3}{3} = \sqrt{3} \pi$$

۱۴- گزینه «۱»

۱۵- گزینه «۳»

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots \Rightarrow x^4 \text{ ضریب جمله} = \frac{2^4}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

۱۶- گزینه «۴» توزیع پواسون است. ابتدا λ را محاسبه کرده سپس احتمال مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l} \text{دقیقه} \\ ۶۰ \\ ۱۵ \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{اتومبیل} \\ ۱۲ \\ \lambda = ۳ \end{array} \Rightarrow P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \Rightarrow \lambda = ۳, \quad P(x=۳) = \frac{e^{-۳} \cdot ۳^۳}{۳!} = \frac{۴}{۵} e^{-۳}$$

۱۷- گزینه «۲» اگر X و Y دو متغیر مستقل باشند کوواریانس بین آن‌ها صفر است ولی عکس این مطلب همواره صحیح نیست پس گزینه (۱) صحیح نیست.

۱۸- گزینه «۱» از خاصیت مهم واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{var}(x_1, x_2, \dots, x_n) = ۱۶ \Rightarrow \operatorname{var}\left(\frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{4}, \dots, \frac{x_n}{4}\right) = \frac{1}{16} \operatorname{var}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{16} \cdot ۱۶ = ۱ \Rightarrow \sigma = ۱$$

۱۹- گزینه «۲» طبق رابطه احتمال شرطی ابتدا احتمال اشتراک دو پیشامد را محاسبه می‌کنیم سپس در رابطه اجتماع دو پیشامد قرار می‌دهیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{5}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

سؤالات آزمون آزاد ۱۳۸۶

ریاضی و آمار

۱- اگر $f(x-1) = x^2$ باشد، $f(x)$ برابر است با:

(۱) $x^2 - 1$ (۲) $(x-1)^2$ (۳) $x^2 + 1$ (۴) $(x+1)^2$

۲- مقدار حد عبارت کدام گزینه با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x}$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lfloor x \rfloor + |x|}$ (۴) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{|x|}$

۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x^2 - x - 4, & x \notin \mathbb{Z} \\ -4, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ در «چند نقطه» به طول‌های اعداد صحیح پیوسته است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۴- عرض نقطه تلاقی مجانب‌های منحنی تابع $y = \frac{x}{1+x}$ ، برابر چه عددی است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) صفر

۵- با توجه به رابطه $y^3 - xy^2 + 2x = 6$ ، مقدار مشتق x نسبت به y در نقطه $(1, 2)$ برابر چه عددی است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ برابر چه عددی است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

۷- حاصل عبارت $\tan(\text{Arc tan } 2 + \text{Arc tan } 3)$ برابر است با:

(۱) -۱ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۶

۸- تابع هزینه مشترک یک کارخانه به دو نوع ماشین به تعداد x و y و جمعاً ۱۲ عدد تولید می‌کند، به صورت

$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - xy$ بوده، تعداد تولید ماشین از نوع x برابر چه عددی باشد، تا هزینه مشترک مینیمم گردد؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۹- تابع نموداری که شیب خط مماس بر آن در نقطه (x, y) برابر $2x - 2$ بوده و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع نموده، به «چه صورتی» است؟

(۱) $y = (x+2)^2$ (۲) $y = (x+1)^2$ (۳) $y = (x-2)^2$ (۴) $y = (x-1)^2$

۱۰- به کمک دیفرانسیل، مقدار تقریبی $\sqrt[5]{34}$ ، برابر چه عددی است؟

(۱) $2/0.25$ (۲) $2/0.2$ (۳) $2/0.21$ (۴) $2/0.1$

۱۱- با توجه به ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، درایه a_{11} ماتریس A^{-1} چه عددی است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۲- برای درمان نوعی بیماری با دو نوع قرص موجود در اندازه‌های معمولی شامل ۳ گرم آسپیرین و ۱ گرم کدئین و بزرگ شامل ۵ گرم آسپیرین و ۱ گرم کدئین، در صورتی که درمان به مصرف حداقل ۱۵ گرم آسپیرین و ۴ گرم کدئین نیاز داشته باشد، «کدام گزینه» در مدلسازی ریاضی مسأله، نادرست است؟

(۱) $x, y \geq 0$ (۲) $3x + 5y \geq 15$ (۳) $x + y \geq 4$ (۴) $\text{Min } F \geq x + y$



۱۳- از حل مسأله‌ی: $\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$ به شرطی که: $5x_1 + 4x_2 \leq 1800$ ، $x_1 + 2x_2 \leq 720$ ، $x_1, x_2 \geq 0$ و $3x_1 + x_2 \leq 900$ مقادیر $S_1 = 0$ ، $S_2 = 0$ ، $S_3 = 240$ به دست آمده، مقدار x_2 چقدر است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۴۲۰ (۴) ۶۰۰

۱۴- تابع هزینه نهایی تولید مؤسسه‌ای به صورت $MC = 4x^2 - 2x + 1$ و هزینه اولیه واحد تولید برابر ۶ واحد پولی بوده، هزینه کل تولید در $x = 3$ «چند واحد پولی» است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۴۰ (۳) ۳۶ (۴) ۸۰

۱۵- اگر $\bar{A}(1, -2, 3)$ و $\bar{B}(1, 2, 0)$ باشد، طول بردار \overline{AB} برابر است با:

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶- استخراج نکات کلی درباره پارامترهای جامعه، از طریق تحلیل داده‌های نمونه؛ «چه اصطلاحی» دارد؟

- (۱) استنباط آماری
(۲) برآورد پارامترها
(۳) آزمون فرض‌های آماری
(۴) برآورد به وسیله فاصله‌های اطمینان

۱۷- میانگین داده‌های ۱۱، ۱۰، ۵، ۵، ۴، ۲، با کدام معیار دیگر این مجموعه، برابر است؟

- (۱) مُد (۲) دامنه (۳) میانه (۴) دامنه میان چارکی

۱۸- در نمونه‌ای به «چه حجم»: مجموع مجذورات داده‌ها ۶۱، میانگین ۳ و انحراف معیار ۲ (مخرج واریانس $n - 1$ در نظر گرفته شده) است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۹- تعداد کارکنان زیر دیپلم یک مؤسسه ۳۰ نفر و سهم آنان از نمودار کلوچه‌ای کارکنان مؤسسه برابر 27° شده، تعداد کل کارکنان مؤسسه، «چند نفر» است؟

- (۱) ۳۰۰ (۲) ۳۵۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۴۵۰

۲۰- تعداد ترتیب‌های ممکن انتخاب ۳ نفر از میان ۵ نفر، چند برابر تعداد طرق ممکن انتخاب آنان بدون هیچ ترتیبی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

۲۱- از ۱۲ عدد کالای همگن داخلی جعبه‌ای، ۴ عدد معیوب بوده؛ یک مشتری ۳ عدد آنها را بطور تصادفی یکی بعد از دیگری برداشته و بررسی می‌نماید، احتمال آنکه ۲ عدد اول سالم و سومی معیوب باشد «چقدر» است؟

- (۱) $\frac{28}{165}$ (۲) $\frac{4}{27}$ (۳) $\frac{28}{55}$ (۴) $\frac{4}{16}$

۲۲- برای توزیع احتمال متغیر تصادفی X بصورت $\begin{array}{c|cccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{احتمال} & 0/15 & b & 0/25 & c \end{array}$ ، امید ریاضی محاسبه شده برابر $2/7$ بوده، بین b ، c ،

«چه رابطه‌ای» برقرار است؟

- (۱) $b \neq c$ (۲) $b < c$ (۳) $b = c$ (۴) $b > c$

۲۳- احتمال بروز عوارض جانبی در مقابل مصرف نوعی دارو در یک بیمار $0/02$ بوده، با مصرف این دارو توسط ۵۰۰ بیمار، احتمال آنکه فقط ۲ نفرشان دچار عوارض جانبی شوند، برابر «چه عددی» است؟

- (۱) $\frac{1}{2e}$ (۲) $\frac{2}{e^2}$ (۳) $\frac{2}{e}$ (۴) $\frac{1}{e^2}$

۲۴- افزایش حجم نمونه، موجب کاهش «کدام مورد» می‌گردد؟

- (۱) مخارج عمل نمونه‌گیری
(۲) صرف وقت برای عمل نمونه‌گیری
(۳) مخارج عمل پردازش‌ها
(۴) خطای معیار شاخص آماری

۲۵- بخشی از محاسبات مربوط به یک همبستگی کامل و معکوس بین مقادیر y, x نشان داده است که: $\bar{y} = 3$ ، $\bar{x} = 2$ ، $S_x^2 = S_y^2$ با فرض خطی بودن رابطه، معادله خط رگرسیون نسبت به x ، به «چه صورتی» است؟

- (۱) $y = -1 + x$ (۲) $y = 5 - x$ (۳) $y = 1 - x$ (۴) $y = -5 + x$

اصول حسابداری

- ۲۶- توجه به «خصوصیات صنعت» در گزارشگری مالی، به «چه طبقه‌ای» از مفاهیم اساسی حسابداری مربوط می‌شود؟
 (۱) مفروضات (۲) اصول (۳) استانداردها (۴) میثاق‌های محدود کننده
- ۲۷- برخورداری اطلاعات مالی از قابلیت مقایسه، مستلزم رعایت چه مفهومی است؟
 (۱) اهمیت (۲) افشا (۳) یکنواختی (۴) تداوم فعالیت
- ۲۸- مانده‌ی کدام یک از حساب‌ها، ممکن است بستانکار شود؟
 (۱) بانک (۲) برداشت (۳) صندوق (۴) اسناد دریافتنی
- ۲۹- اعمال ضوابط الزامی برای انجام به موقع ثبت‌ها؛ از بروز احتمالی چه نوع اشتباهی، در مرحله ورود اطلاعات به رایانه می‌کاهد؟
 (۱) مفقود شدن اطلاعات ثبت شده
 (۲) ثبت تکراری یا اضافی
 (۳) اشتباه در مرحله وارد کردن اطلاعات از پایانه‌ها
 (۴) ثبت غلط یا ناقص
- ۳۰- مانده‌ی صورتحساب دریافتی از بانک در ۸/۸/۳۰ مبلغ ۳۰۰,۰۰۰ ریال بدهکار بوده و پس از تطبیق آن با حساب بانک دفتر کل مؤسسه، اقلام باز بدست آمده شامل مبلغ ۸۰۰,۰۰۰ ریال اشتباه برداشت بانک از حساب مؤسسه و یک فقره چک معوق به مبلغ ۴۰۰,۰۰۰ ریال بوده؛ در این صورت، امکان صدور حداکثر «چه مبلغ» چک برای مؤسسه وجود دارد؟
 (۱) ۷۰۰,۰۰۰ (۲) ۵۰۰,۰۰۰ (۳) ۱۰۰,۰۰۰ (۴) امکان آن وجود ندارد.
- ۳۱- ثبت کدام رویداد؛ بر مانده حساب‌های دریافتنی، بی‌تأثیر است؟
 (۱) فروش نسبه
 (۲) حذف مطالبات سوخت شده از حساب‌ها
 (۳) وصول وجه قسمتی از مطالبات
 (۴) وصول وجه مطالبات سوخت و حذف شده از حساب‌ها در سال گذشته
- ۳۲- یک دستگاه وسیله نقلیه به بهای تمام شده ۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال با نرخ ۲۰٪ قیمت دفتری در سال مستهلک می‌شده، آغاز سال جاری معادل میل ۶۰۰,۰۰۰ ریال استهلاک انباشته داشته و در اول آذر امسال بر اثر تصادف از بین رفته که چون بیمه بوده مبلغ ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال بابت خسارت آن دریافت گردیده، زیان ناشی از حذف این دارایی از حساب‌ها، «چند ریال» است؟
 (۱) ۸۰۰,۰۰۰ (۲) ۶۰۰,۰۰۰ (۳) ۴۰۰,۰۰۰ (۴) ۲۰۰,۰۰۰
- ۳۳- در سیستم حسابداری شعب غیر متمرکز، کدام یک از عملیات فقط در دفاتر مرکز، ثبت می‌شود؟
 (۱) انتقال سود خالص شعبه به مرکز
 (۲) بستن سود شعبه به سود (زیان) مرکز
 (۳) کالای ارسالی مرکز به شعبه
 (۴) وجه نقد ارسالی به مرکز توسط شعبه
- ۳۴- مبلغ ۲,۵۰۰,۰۰۰ ریال سهام خریداری شده به عنوان سرمایه‌گذاری معاملاتی؛ بعد از اعمال اقلام مربوط در تاریخ‌های مناسب، شامل: منظور نمودن سود نگهداری معادل ۲۵۰,۰۰۰ ریال، دریافت سود نقدی سهام به مبلغ ۱۵۰,۰۰۰ ریال و در نظر گرفتن زیان نگهداری معادل ۱۰۰,۰۰۰ ریال؛ به «چه مبلغی» فروخته شده است؟
 (۱) ۲,۴۰۰,۰۰۰ (۲) ۲,۵۵۰,۰۰۰ (۳) ۲,۶۵۰,۰۰۰ (۴) ۲,۸۰۰,۰۰۰
- ۳۵- در تاریخ معینی؛ بابت پرداخت بهره اوراق قرضه که بخشی از آن معوق بوده؛ هزینه بهره ۹,۶۰۰، بهره پرداختنی ۱,۸۰۰ و جوه نقد ۱۱,۷۰۰ و «کدام حساب و با چه مبلغی» به تناسب جهت انقضا، ثبت شده‌اند؟
 (۱) صرف اوراق قرضه پرداختنی ۳۰۰
 (۲) کسر اوراق قرضه پرداختنی ۳,۹۰۰
 (۳) کسر اوراق قرضه پرداختنی ۳۰۰
 (۴) صرف اوراق قرضه پرداختنی ۳,۹۰۰
- ۳۶- شرکت اصلی، برای تملک شرکت فرعی به روش اتحاد منافع، به «چه صورتی» عمل می‌کند؟
 (۱) خرید دارایی‌های شرکت فرعی
 (۲) انتشار اوراق بدهی برای تملک سهام شرکت فرعی
 (۳) خرید سهام شرکت فرعی
 (۴) انتشار سهام جدید برای تملک سهام شرکت فرعی



پاسخنامه آزمون آزاد ۱۳۸۶

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» $x-1=t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow f(t)=(t+1)^2 \xrightarrow{\text{به جای } X, t \text{ قرار می‌دهیم}} f(x)=(x+1)^2$

۲- گزینه «۲» هر چهار حد داده شده را حساب می‌کنیم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-\varepsilon-1} = \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (|x| + |x|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (0 + |x|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{|x|} = \sqrt{|-1|} = 1$$

ملاحظه می‌گردد حد گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ برابر یک می‌باشد که با حد گزینه (۲) که برابر $-\infty$ است، متفاوت است.

۳- گزینه «۳» $2x^3 - x^2 - x - 4 = -4 \Rightarrow 2x^3 - x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - x - 1) = 0$

ریشه‌های معادله فوق $x=1, x=0$ و $x = \frac{-1}{2}$ می‌باشند، که فقط $x=1, x=0$ اعداد صحیح هستند.

$$۴- \text{گزینه «۲» عرض نقطه تلاقی مجانب‌ها در واقع همان مجانب افقی تابع است: } y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

۵- گزینه «۱» با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$f(x, y) = y^2 - xy^2 + 2x - 6 = 0$$

$$x'_y = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{2y^2 - 2xy}{-y^2 + 2} \Rightarrow x'_y(1, 2) = -\frac{2(2)^2 - 2 \times 1 \times 2}{-2^2 + 2} = -\frac{8}{-2} = 4$$

$$۶- \text{گزینه «۳» حالت ابهام } \frac{0}{0} \text{ است و با استفاده از قاعده هویتال داریم: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = 1$$

۷- گزینه «۱» با توجه به دو فرمول زیر تست را حل می‌کنیم:

$$\text{tg}(\text{Arctg}\alpha) = \alpha, \text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x \cdot \text{tg}y}$$

$$\text{tg}(\text{Arctg}2 + \text{Arctg}3) = \frac{\text{tg}(\text{Arctg}2) + \text{tg}(\text{Arctg}3)}{1 - \text{tg}(\text{Arctg}2)\text{tg}(\text{Arctg}3)} = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

۸- گزینه «۲» طبق فرض $x+y=12$ می‌باشد، بنابراین $y=12-x$ با جایگزینی y بر حسب x در تابع f نتیجه می‌شود:

$$f(x) = 3x^2 + 2(12-x)^2 - x(12-x) = 6x^2 - 60x + 288$$

$$f'(x) = 12x - 60 = 0 \Rightarrow x = 5$$

برای به دست آوردن می‌نییم کافی است مشتق تابع f را مساوی صفر قرار دهیم.

۹- گزینه «۴» روش اول: در واقع مشتق این منحنی به صورت $y' = 2x - 2$ می‌باشد و اگر از آن انتگرال بگیریم، خود تابع به دست می‌آید:

$$y = \int (2x - 2) dx = x^2 - 2x + c \Rightarrow y = x^2 - 2x + c$$

منحنی محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده و می‌دانیم عرض هر نقطه روی محور طول‌ها صفر است پس نقطه $(1, 0)$ باید در معادله منحنی صدق کند:

$$0 = 1^2 - 2(1) + c = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

روش دوم: چون نقطه $(1, 0)$ باید در معادله منحنی صدق کند پس فقط معادله داده شده در گزینه (۴) که این شرایط را دارد، می‌تواند جواب باشد.

۱۰- گزینه «۱» با توجه به فرمول تقریب $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{n \cdot a^{n-1}}$ و با توجه به اینکه $a=2$ ، $b=2$ و $n=5$ می‌باشد، داریم:

$$\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32+2} = \sqrt[5]{2^5} + 2 = 2 + \frac{2}{5 \cdot 2^4} = 2 + \frac{2}{5 \times 16} = 2 + \frac{2}{80} = 2 + \frac{25}{1000} = 2.025$$

۱۱- گزینه «۳»

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (4 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1 + 2 \times 3 \times 2) - (2 \times 2 \times 1 + 3 \times 3 \times 2 + 4 \times 1 \times 2) = 31 - (30) = 1$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 (2 \times 2 - 2) = 2 \Rightarrow a_{11} = \frac{\Delta_{11}}{|A|} = \frac{2}{1} = 2$$

۱۲- گزینه «۴» اگر X را تعداد قرص‌های معمولی و Y را تعداد قرص‌های بزرگ در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} 3x + 5y \geq 15 & \text{آسپرین} \\ x + y \geq 4 & \text{کدئین} \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

گزینه (۱) همان شرط مثبت بودن متغیرهای مدل ریاضی می‌باشد.
گزینه‌های ۲ و ۳ همان محدودیت‌های صورت مسئله می‌باشند. لذا
گزینه (۴) غلط است.

۱۳- گزینه «۲» ابتدا دستگاه را استانداردسازی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 720 \\ 5x_1 + 4x_2 + S_2 = 1800 \\ 3x_1 + x_2 + S_3 = 900 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[S_3=240]{S_1=S_2=0} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 720 \\ 5x_1 + 4x_2 = 1800 \\ 3x_1 + x_2 + 240 = 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

۱۴- گزینه «۴» می‌دانیم هزینه کل برابر انتگرال هزینه نهایی می‌باشد، لذا داریم:

$$TC = \int MC \Rightarrow TC = \int (4x^3 - 2x + 1) dx = x^4 - x^2 + x + c$$

چون هزینه اولین واحد تولید برابر ۶ است، پس به ازای $x=1$ مقدار $TC=6$ است. در نتیجه داریم:

$$1 - 1 + 1 + c = 6 \Rightarrow c = 5$$

$$TC = x^4 - x^2 + x + 5 \xrightarrow{x=3} TC = 3^4 - 3^2 + 3 + 5 = 80$$

هزینه کل در $x=3$ برابر است با:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (2-(-2))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{0+16+9} = \sqrt{25} = 5$$

۱۵- گزینه «۳»

۱۶- گزینه «۱» طبق تعریف آمار استنباطی گزینه ۱ صحیح است.

۱۷- گزینه «۴» شاخص‌های آماری را محاسبه می‌کنیم:

$$MO = 5 \quad \text{مقدار مُد (داده‌ای که بیشترین تکرار را دارد):}$$

$$R = \max - \min = 11 - 2 = 9 \quad \text{مقدار دامنه:}$$

$$me = 5 \quad \text{مقدار میانه (عدد وسط):}$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 10 - 4 = 6$$

$$\bar{X} = \mu = \frac{2+4+5+5+5+10+11}{7} = 6$$

۱۸- گزینه «۲» رابطه واریانس را نوشته و مقادیر داده شده در صورت مسئله را جاگذاری می‌کنیم:

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{n-1} [\sum x_i^2 - n\bar{x}^2]$$

$$4 = \frac{1}{n-1} [61 - 9n] \Rightarrow 4n - 4 = 61 - 9n \Rightarrow 13n = 65$$

$$n = 5$$



۱۹- گزینه «۳» از رابطه مورد نیاز در نمودار دایره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$n = 30 \Rightarrow \frac{Fi}{n} \times 360 \Rightarrow 27 = \frac{30}{n} \times 360$$

$$27n = 10800 \Rightarrow n = 400$$

۲۰- گزینه «۲» ترتیب و ترکیب را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم مشاهده می‌شود که ترتیب ۶ برابر ترکیب است:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow P_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

۲۱- گزینه «۱» احتمال مورد نظر را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$\frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{28}{165}$$

۲۲- گزینه «۳» ابتدا جمع احتمالات برابر با ۱ است از طرفی امید ریاضی برابر با ۲/۷ می‌باشد:

$$\sum P(X=x) = 1 \Rightarrow 0/15 + b + 0/25 + c = 1 \Rightarrow b + c = 0/6$$

$$E(x) = 2/7 \Rightarrow 1 \times 0/15 + 2 \times b + 3 \times 0/25 + 4c = 2/7 \Rightarrow 2b + 4c = 1/8 \Rightarrow b + 2c = 0/9$$

$$\begin{cases} b + c = 0/6 \\ b + 2c = 0/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b - c = -0/6 \\ b + 2c = 0/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0/3 \\ b = 0/3 \end{cases}$$

۲۳- گزینه «۱» توجه کنید $n = 500$ بزرگ و $P = 0/002$ بسیار کوچک است از توزیع پواسن استفاده می‌کنیم. $\lambda = n.p = 500 \times \frac{2}{1000} = 1$

$$P(X=r) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = \frac{1}{2e}$$

۲۴- گزینه «۴» افزایش حجم نمونه باعث افزایش دقت می‌شود بنابراین واریانس و خطای معیار کاهش می‌یابد.

۲۵- گزینه «۲» ارتباط کامل و معکوس است بنابراین $r = -1$ لذا:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}} \sqrt{S_{yy}}} \Rightarrow -1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \Rightarrow S_{xy} = -S_{xx}$$

\hat{a} و \hat{b} را محاسبه کرده تا معادله خط رگرسیون بدست آید:

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_x} = -1; \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 3 + 2 = 5$$

$$y = a + bx \Rightarrow y = 5 - x$$

اصول حسابداری

۲۶- گزینه «۴» اصول محدود کننده (تعدیل کننده) شامل:

۱- فزونی منافع بر مخارج ۲- اهمیت ۳- خصوصیات صنعت ۴- محافظه کاری

۲۷- گزینه «۲» برخورداری اطلاعات مالی از قابلیت مقایسه مستلزم رعایت: ۱- ثبات رویه ۲- همسانی رویه‌ها ۳- افشاء می‌باشد.

۲۸- گزینه «۱» اگر دارنده حساب جاری اقدام به صدور چک بیش از میزان موجودی نقد خود نزد بانک صادر نماید مانده حساب بانک بستانکار می‌شود.

سؤالات آزمون سراسری ۱۳۹۱

ریاضی و آمار

۱- مقدار سری $\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \left(\frac{4K}{4K^2 - 1} \right)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) صفر

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A \times B$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۳- اگر $y = -x + e^{-2x}$ باشد. معادله خط مماس بر نمودار f' ، در نقطه به طول صفر، کدام است؟

- (۱) $y = 4x + 3$ (۲) $y = -4x + 3$ (۳) $y = 4x - 3$ (۴) $y = -4x - 3$

۴- در معادله پارامتری $\begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases}$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، به ازای $t = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{2x}$ ، کدام است؟

- (۱) e^{-1} (۲) e^{-2} (۳) ۱ (۴) e^1

۶- حاصل $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1} dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{1}{2} (\ln 2 - 1) + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{1}{2} (1 - \ln 2) + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

۷- اگر $z^2 - \frac{yz}{x} = 5 - e^{2y-x}$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(2, 1, -2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

۸- در مورد نقطه بحرانی تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 15$ ، کدام درست است؟

- (۱) $(1, 1, 14)$ ماکزیمم نسبی (۲) $(0, 0, 15)$ ماکزیمم نسبی (۳) $(1, 1, 14)$ می نیمم نسبی (۴) $(0, 0, 15)$ می نیمم نسبی

۹- مساحت ناحیه محدود به منحنی، $y = \ln x$ و محور x ها و خطوط $x = 1$ و $x = e$ کدام است؟

- (۱) e (۲) ۱ (۳) $e - 1$ (۴) صفر

۱۰- مقدار تقریبی $A = \sqrt{(6/01)^2 + (7/98)^2}$ کدام است؟

- (۱) $9/97$ (۲) $9/98$ (۳) $9/99$ (۴) ۱۰

۱۱- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت $0 < x < 2$ $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(-x^2 + 2x) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ می باشد. مقدار $P(X > 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$



پاسخنامه آزمون سراسری ۱۳۹۱

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» با تجزیه کسر مورد نظر داریم:

$$\frac{4k}{4k^2 - 1} = \frac{4k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}$$

$$(-1)^k \frac{4k}{4k^2 - 1} = \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^k}{2k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right]$$

همان طور که واضح است سری مذکور یک سری تلسکوپی می باشد و داریم:

$$\left. \frac{-(-1)^{k-1}}{2k-1} \right|_{k=1} = -1 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k}{4k^2 - 1} = -1 - 0 = -1$$

بنابراین داریم:

$$A \times B = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 11 & 11 & 17 \\ 8 & 8 & 13 & 21 \\ 0 & 12 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

۲- گزینه «۴» با ضرب دو ماتریس A و B داریم:

همان طور که مشاهده می کنید جمع ستون اول و سوم ماتریس AB برابر است با ستون چهارم این ماتریس. بنابراین دترمینان AB برابر با صفر است.

۳- گزینه «۳» دقت کنید که معادله خط مماس بر تابع f' خواسته شده است.

$$y = -x + e^{-2x}$$

$$y' = -1 - 2e^{-2x} \xrightarrow{x=0} y' = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

شیب خط مماس بر تابع f' در نقطه $(0, -3)$ برابر است با $m = f''(0)$:

$$\left. \begin{aligned} y'' &= 4e^{-2x} \\ m = y''(0) &= 4e^{-2 \times 0} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - (-3) = 4(x - 0) \Rightarrow y = 4x - 3$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۴- گزینه «۱» با استفاده از مشتق زنجیره ای داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = (1 + \sin t) \cdot \frac{1}{-\cos t}$$

دوباره از قاعده مشتق زنجیره ای استفاده می کنیم و مقدار $t = 0$ را در عبارت به دست آمده قرار می دهیم.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 + \sin t}{-\cos t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1 + \sin t}{-\cos t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-\cos^2 t - \sin^2 t - \sin t}{\cos^3 t} \times \frac{-1}{\cos t} = \frac{1 + \sin t}{\cos^3 t} \xrightarrow{t=0} \frac{d^2y}{dx^2} = 1$$

۵- گزینه «۲» فرم مبهم 1^∞ را داریم. به این ترتیب حد را حل می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)(f(x)-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x \left(\frac{x+1}{x+2} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2x}{x+2}} = e^{-2}$$

۶- گزینه «۳»

نکته: به طور کلی هر وقت در انتگرال گیری با کسری مواجه شدید که درجه صورت آن کسر از درجه مخرجش بزرگتر بود، باید صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1) - (x+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan^{-1}(x) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2 \frac{\partial z}{\partial x} \times x - 2z}{x^2} = e^{2y-x}$$

۷- گزینه «۴» با گرفتن مشتق ضمنی از طرفین تساوی داریم:

$$-4 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{4 \frac{\partial z}{\partial x} + 4}{4} = 1 \Rightarrow -5 \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{5}$$

با قرار دادن نقطه‌ی $(2, 1, -2)$ در معادله‌ی فوق داریم:

۸- گزینه «۲» نکته: برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع باید ریشه‌های f_x و f_y را پیدا کنیم.

$$\left. \begin{aligned} f_x = 2x^2 - 2y = 0 \\ f_y = 2y^2 - 2x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 = y \\ y^2 = x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{aligned} \right\}$$

نقاط بحرانی تابع برابر است با:

برای تعیین نوع نقاط بایستی $\Delta = B^2 - AC$ را محاسبه کنیم.

$$A = f_{xx} = 4x$$

$$B = f_{xy} = -2$$

$$C = f_{yy} = 4y$$

بنابراین نقطه‌ی $(0, 0, 15)$ به دلیل این که $\Delta = 0$ است آزمون بی‌نتیجه می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی «۲» صحیح می‌باشد.

$$S = \int_1^e \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^e = 1$$

۹- گزینه «۲» مساحت مذکور برابر است با:

۱۰- گزینه «۳»

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \times \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \times \Delta y$$

همان‌طور که از صورت مسئله مشخص است:

$$x_0 = 6, \quad \Delta x = 0/01$$

$$y_0 = 8, \quad \Delta y = -0/02$$

با مشتق‌گیری از تابع f برحسب x و y داریم:

$$f(6/01, 7/98) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta y$$