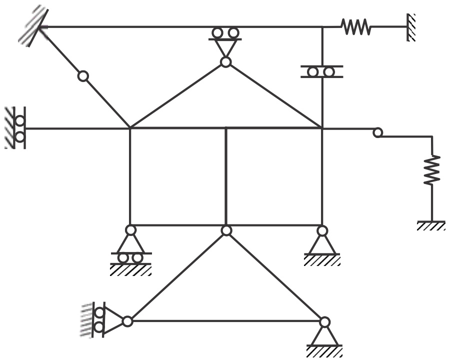
فصل اول

«بررسی معینی و نامعینی در سازه‌ها»

مثال۱: سازه مقابل چند درجه نامعین است؟



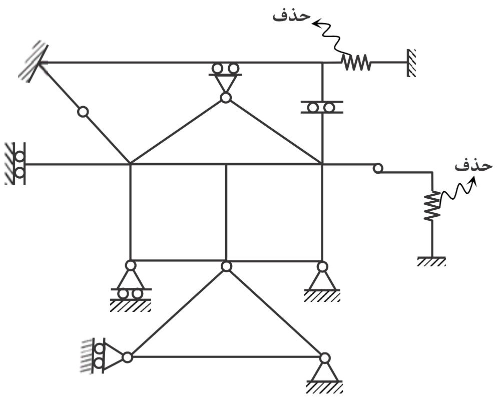
۱) ۱۸

۲) ۱۶

۳) ۱۹

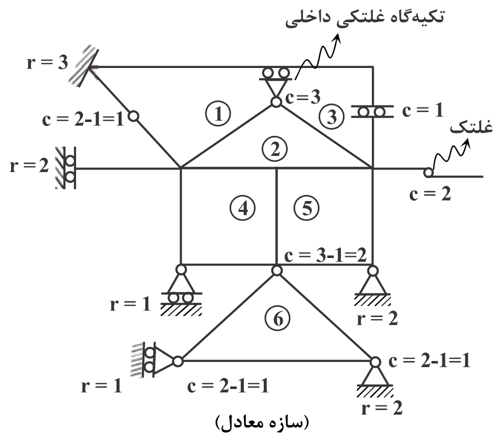
۴) ۱۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که این قاب دارای دو فنر انتقالی تکیه‌گاهی است. بنابراین با حذف این دو فنر انتقالی تکیه‌گـاهی از سازه اصلی، سازه معادل زیر حاصل می‌شود:



(سازه اصلی)

$\Rightarrow$



(سازه معادل)

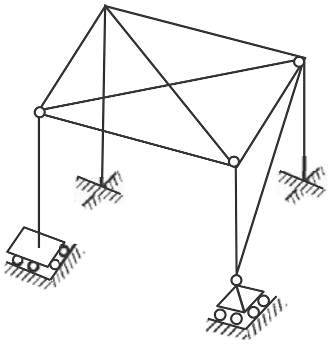
سپس مقادیر تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی (r)، تعداد معادلات شرط (c) و تعداد فضاهای بسته در قاب بـدون در نظرگیـری زمـین (k)، بـرای سـازه معادل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r=۳+۲+۱+۱+۲+۲=۱۱ \quad , \quad c=۳+۱+۱+۲+۲+۱+۱=۱۱ \quad , \quad k=۶$$

در نتیجه با توجه به حذف دو فنر انتقالی تکیه‌گاهی از سازه اصلی، به مقدار درجه نامعینی از سازه معادل، ۲ عدد اضافه می‌کنیم. پس درجه نـامعینی سـازه اصلی برابر است با:

$$DI=[(r+۳k)-(c+۳)]+۲ \Rightarrow DI=[(۱۱+۳\times۶)-(۱۱+۳)]+۲ \Rightarrow DI=[(۲۹)-(۱۴)]+۲=۱۷$$

مثال۲: درجه نامعینی قاب فضایی مقابل کدام است؟

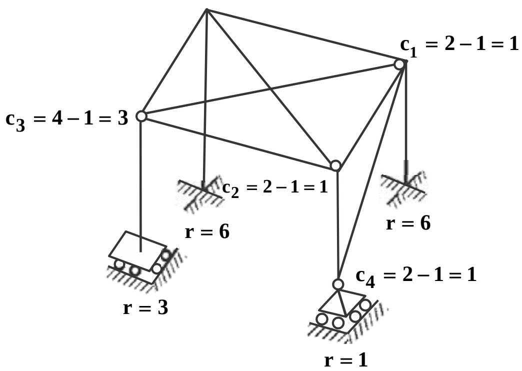


۱) ۱۷

۲) ۱۸

۳) ۱۹

۴) ۲۰



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه قاب فضایی است، پس مقادیر تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی (r)، تعداد اعضا (m) و تعداد گره‌ها (n) را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$r = ۶+۶+۳+۱ = ۱۶ \quad , \quad m = ۱۱ \quad , \quad n = ۸$$

سپس تعداد معادلات شرط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$c = ۳\left(\sum c_i\right) - (\text{تعداد اعضا دو سر مفصل در قاب})$$

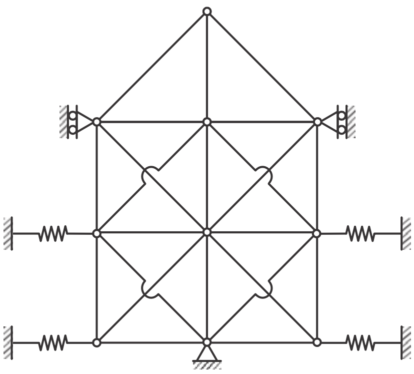
$$c = ۳(c_۱ + c_۲ + c_۳ + c_۴) - (۱) = ۳(۱+۱+۳+۱) - (۱) = ۳(۶) - ۱$$

$$\Rightarrow c = ۱۸ - ۱ = ۱۷$$

بنابراین درجه نامعینی قاب فضایی برابر است با:

$$DI = (۶m + r) - (۶n + c) \Rightarrow DI = (۶\times۱۱ + ۱۶) - (۶\times۸ + ۱۷) \Rightarrow DI = ۸۲ - ۶۵ = ۱۷$$

✍ **مثال ۳: درجه نامعینی خرپای مقابل کدام است؟**



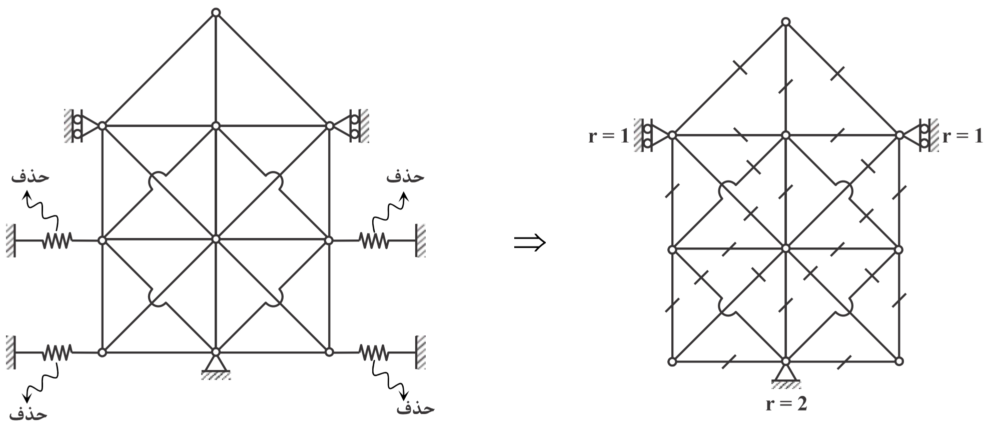
۱) ۶

۲) ۷

۳) ۱۱

۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در این خرپا چهار فنر انتقالی تکیه‌گاهی وجود دارد. پس ابتدا فنرها را حذف کرده تا سازه معادل زیر ایجاد شود:



(سازه اصلی)　　(سازه معادل)

سپس مقادیر تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی (r)، تعداد اعضا خرپا (m) و تعداد مفصل‌های خرپا (n) برای سازه معادل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r = ۲+۱+۱ = ۴ \quad , \quad m = ۲۳ \quad , \quad n = ۱۰$$

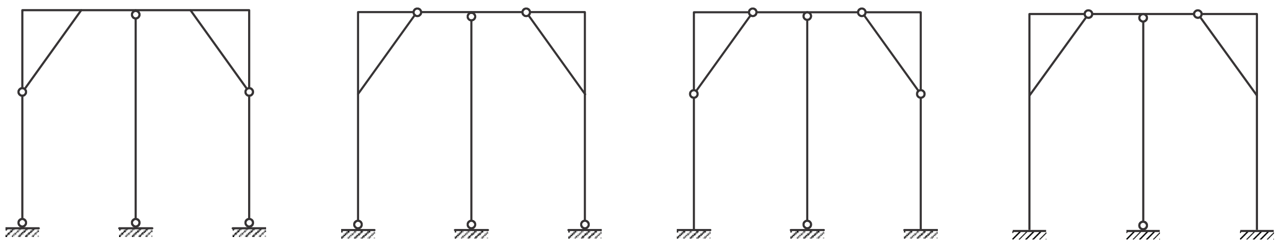
با توجه به اینکه چهار فنر از سازه اصلی حذف شده است، بنابراین به درجه نامعینی سازه معادل، ۴ عدد اضافه می‌شود. پس درجه نامعینی سازه اصلی برابر است با:

$$DI = [(m + r) - ۲n] + ۴ \Rightarrow DI = [(۲۳ + ۴) - ۲\times۱۰] + ۴ \Rightarrow DI = [۲۷ - ۲۰] + ۴ \Rightarrow DI = ۷ + ۴ = ۱۱$$

فصل دوم

«بررسی پایداری و ناپایداری سازه‌ها»

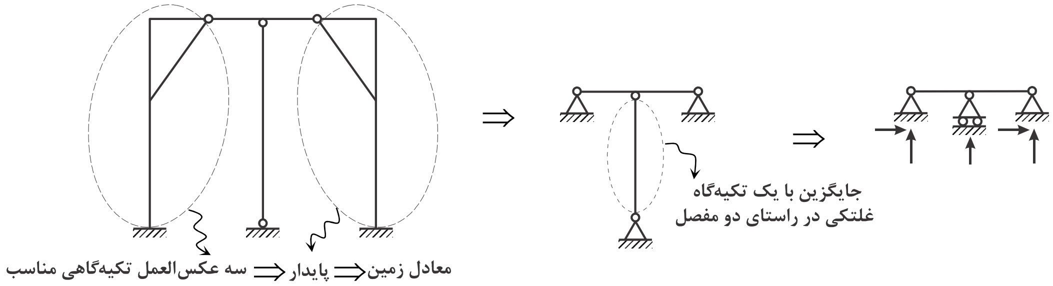
مثال: کدام‌یک از سازه‌های زیر پایدار است؟(کلیه سازه‌ها متقارن هستند.) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۶)



(۴) (۳) (۲) (۱)

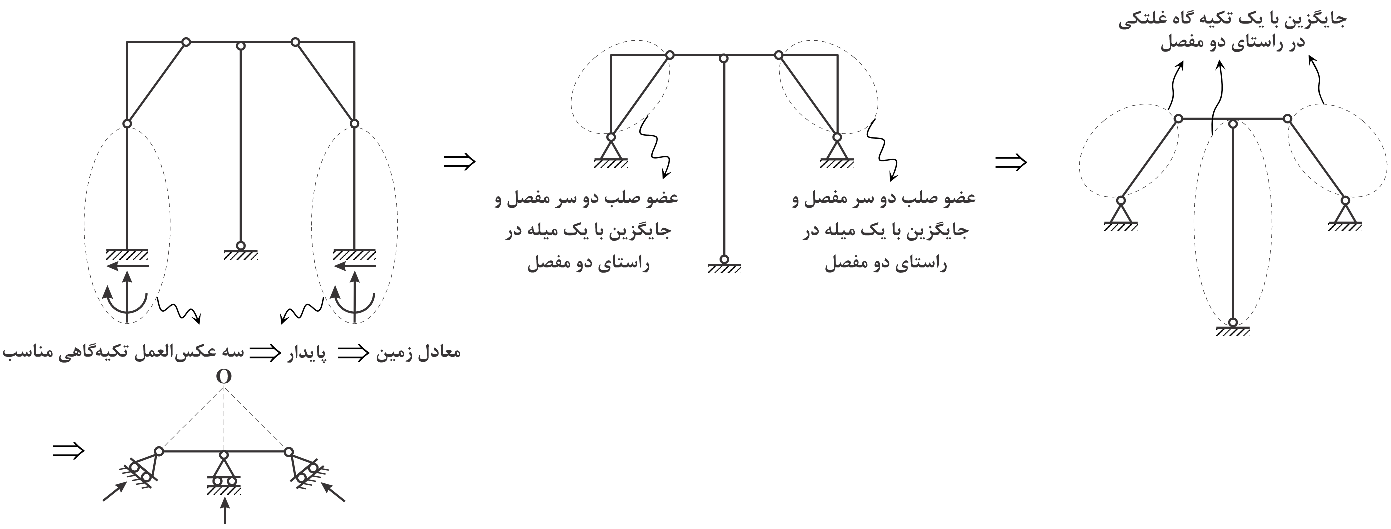
پاسخ: گزینه «۱» باید تمام گزینه‌ها را به‌صورت جداگانه بررسی نمود:

گزینه (۱): در این سازه قسمت‌های سمت چپ و راست سازه صلب بوده و توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب به زمین متصل شده‌اند، بنابراین این دو قسمت را می‌توان پایدار و در نهایت معادل زمین در نظر گرفت، پس داریم:



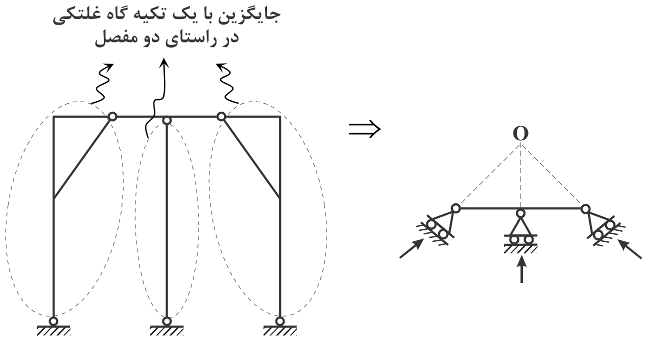
در نهایت مشاهده می‌شود که قسمت صلب توسط پنج عکس‌العمل تکیه‌گاهی به زمین متصل شده که سه تا از آن‌ها به‌صورت غیرموازی و غیرهمرس می‌باشند، در نتیجه سازه پایدار است.

گزینه (۲): در این سازه قسمت‌های صلب و پیوسته سمت چپ و راست با سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب به زمین متصل شده‌اند، پس پایدار و معادل زمین هستند، بنابراین داریم:



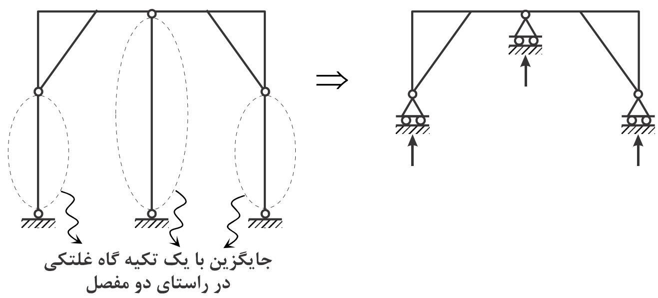
بنابراین مشاهده می‌شود که قسمت صلب توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی هم‌رس در نقطه O به زمین متصل شده و در نتیجه سازه ناپایدار است.

گزینه (۳): در این سازه قسمت‌های صلب در وسط، سمت چپ و راست سازه به‌صورت دو مفصل هستند و می‌توان آن‌ها را با یک میله در راستای دو مفصل جایگزین نمود و سپس از تکیه‌گاه‌های غلتکی در همان راستا استفاده کرد. پس داریم:



همان‌طور که مشاهده می‌شود قسمت صلب توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی همرس در نقطه O به زمین متصل شده و در نتیجه این سازه ناپایدار است.

گزینه (۴): این سازه در قسمت‌های چپ و راست و همچنین قسمت وسط، به‌صورت قسمت‌های صلب دو سر مفصل بوده و می‌توان آن‌ها را با یک تکیه‌گاه غلتکی در راستای دو مفصل جایگزین نمود. بنابراین داریم:

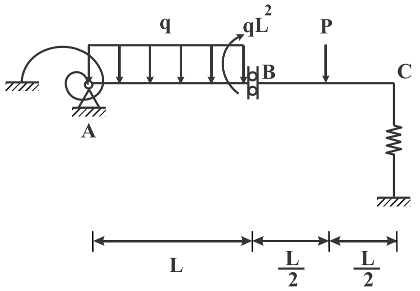


همان‌طور که مشاهده می‌شود قسمت صلب توسط سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی موازی به زمین متصل شده و در نتیجه این سازه ناپایدار است.

فصل سوم

«بررسی استاتیک سازه‌های معین»

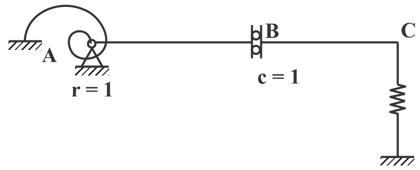
مثال۱: در تیر شکل زیر مقدار لنگر در فنر دورانی A و نیروی فنر C به ترتیب کدام است؟



۱) $\frac{۳qL^۲}{۲}+۲PL$ و $۲P$ ۲) $\frac{۳qL^۲}{۲}+PL$ و P

۳) $\frac{۳qL^۲}{۲}-PL$ و P ۴) $\frac{۳qL^۲}{۲}-۲PL$ و $۲P$

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه تحت اثر بارگذاری افقی و مایل قرار نگرفته، پس تیر محسوب می‌شود. بنابراین در این حالت از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی افقی و همچنین نیروهای محوری داخلی در اعضا و مفاصل صرف‌نظر می‌گردد. از طرفی سازه معین است زیرا:

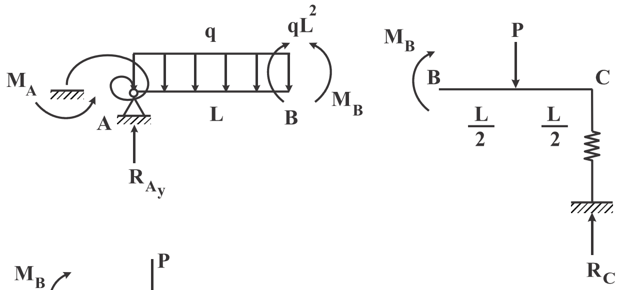


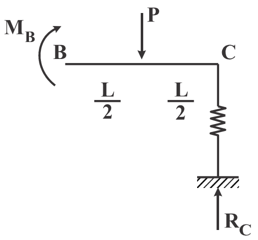
فنر انتقالی و فنر دورانی از تیر حذف شده و در انتها دو عدد به درجه نامعینی آن اضافه می‌شود.

$$DI=[r-(c+۲)]+۲ \Rightarrow DI=[۱-(۱+۲)]+۲ \Rightarrow DI=۰$$

حال تیر را از مفصل برشی B جدا کرده و داریم:

با توجه به شکل‌های ایجادشده از قسمت BC شروع می‌کنیم زیرا دارای دو مجهول است $(M_B\ ,\ R_C)$.



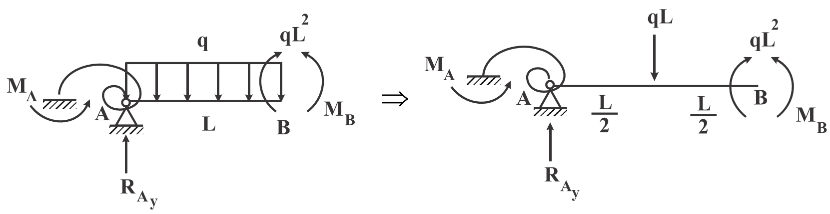


پس معادلات تعادل را برای آن نوشته و به‌صورت زیر داریم:

$$+\uparrow \sum F_y=۰ \Rightarrow R_C-P=۰ \Rightarrow R_C=P \Rightarrow R_{\text{فنر}}=R_C=P$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C=۰ \Rightarrow M_B-(R_C\times L)=۰ \Rightarrow M_B=R_C L \Rightarrow M_B=PL$$

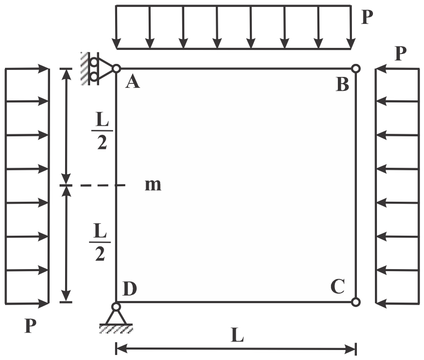
حال با مشخص شدن مقدار M_B از قسمت BC، تعداد مجهولات قسمت AB برابر دو می‌شود $(M_A\ ,\ R_{A_y})$، پس با نوشتن معادلات تعادل برای قسمت AB داریم:



$$+\uparrow \sum F_y=۰ \Rightarrow R_{A_y}-qL=۰ \Rightarrow R_{A_y}=qL$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A=۰ \Rightarrow -M_A-M_B+qL^۲+(qL\times \frac{L}{۲})=۰ \xrightarrow{M_B=PL} -M_A-PL+\frac{۳qL^۲}{۲}=۰ \Rightarrow M_A=M_{\text{فنر}}=\frac{۳qL^۲}{۲}-PL$$

مثال۲: در شکل مقابل گشتاور خمشی در نقطه m واقع در وسط AD کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۶)



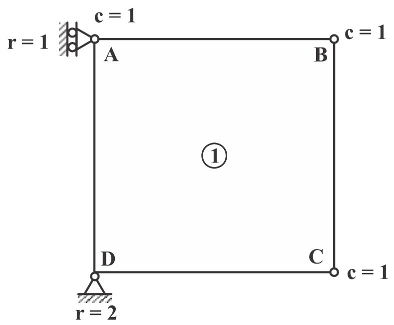
۱) $\frac{PL^۲}{۸}$

۲) $\frac{۲PL^۲}{۸}$

۳) $\frac{۳PL^۲}{۸}$

۴) $\frac{۴PL^۲}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا درجه نامعینی قاب را بدست می‌آوریم:

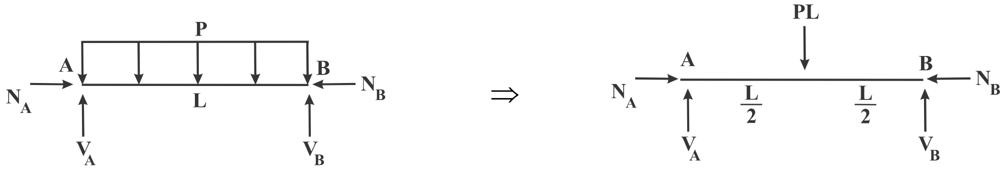


$$\begin{cases} r = ۲+۱ = ۳ \\ c = ۱+۱+۱ = ۳ \quad \Rightarrow DI = (r+۳k)-(c+۳) \\ k = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow DI = (۳+۳\times۱)-(۳+۳) \Rightarrow DI = ۰$$

بنابراین قاب معین است. حال با توجه به اینکه تمام اعضای دو سر مفصل و پیوسته AB ، BC و ADC دارای بارگذاری به صورت مستقیم هستند، پس در این قاب هیچ عضو دو نیرویی نداریم.

بنابراین ابتدا قسمت AB را از قاب جدا کرده و به صورت زیر خواهیم داشت:

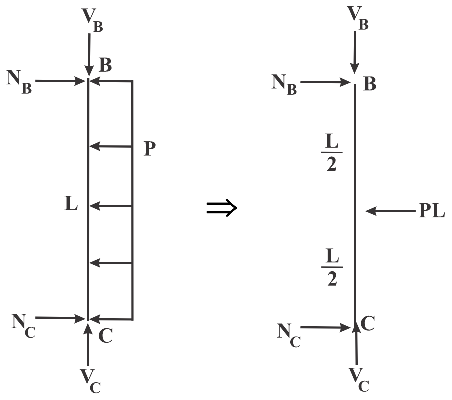


با توجه به تقارن در بارگذاری قائم، نیروهای V_B و V_A برابر هستند و داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow -PL + V_A + V_B = ۰ \Rightarrow V_A = V_B = \frac{PL}{۲}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow N_A - N_B = ۰ \Rightarrow N_A = N_B$$



پس عضو BC را جدا کرده و داریم:

با توجه به تقارن در بارگذاری افقی، نیروهای N_B و N_C برابر هستند و داریم:

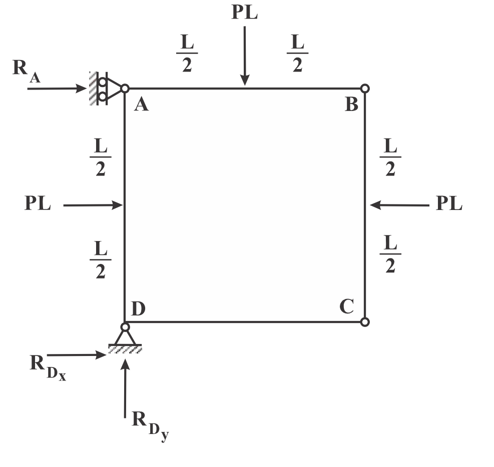
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow N_B + N_C - PL = ۰ \Rightarrow N_B = N_C = \frac{PL}{۲}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow V_C - V_B = ۰ \Rightarrow V_C = V_B$$

بنابراین می‌توان نوشت: $V_C = \frac{PL}{۲}$ و $N_A = \frac{PL}{۲}$

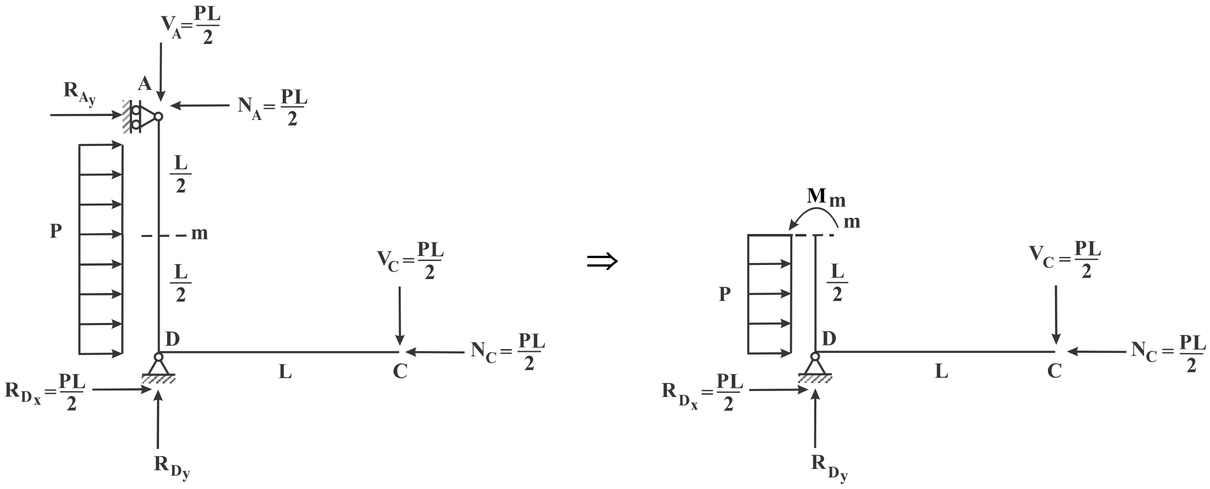
سپس برای محاسبه مقدار لنگر خمشی در نقطه m، باید مقدار عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه D را بدست آوریم. بنابراین با لنگرگیری حول نقطه A در کل سازه به صورت زیر داریم:



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = ۰ \Rightarrow (PL\times\frac{L}{۲}) + (PL\times\frac{L}{۲}) - (PL\times\frac{L}{۲}) - (R_{D_x}\times L) = ۰$$

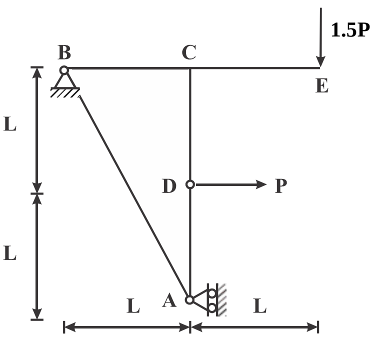
$$\Rightarrow \frac{PL^۲}{۲} = R_{D_x}\times L \Rightarrow R_{D_x} = \frac{PL}{۲}$$

در نهایت با زدن مقطعی در m برای عضو جدا شده ADC داریم:



$$+\circlearrowleft \sum M_m = 0 \Rightarrow (\frac{PL}{2}\times\frac{L}{2})+(\frac{PL}{2}\times L)-(\frac{PL}{2}\times\frac{L}{2})-(P\times\frac{L}{2}\times\frac{\frac{L}{2}}{2})-M_m=0 \Rightarrow \frac{PL^2}{2}-\frac{PL^2}{8}=M_m \Rightarrow M_m=\frac{3PL^2}{8}$$

مثال ۳: مقدار لنگر M_{CB} چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)



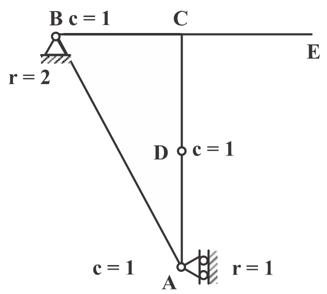
۱) صفر

۲) $\frac{PL}{2}$ در جهت عقربه‌های ساعت

۳) $1/5PL$ در جهت عقربه‌های ساعت

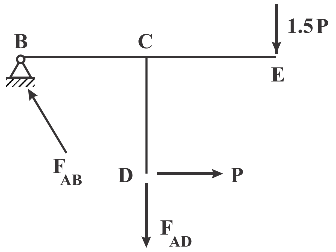
۴) PL در جهت عکس عقربه‌های ساعت

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا درجه نامعینی قاب را بدست می‌آوریم:



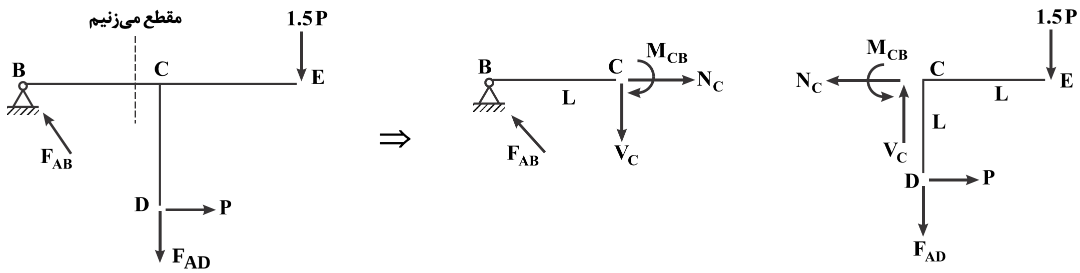
$$\begin{cases} r=2+1=3 \\ c=1+1+1=3 \quad \Rightarrow DI=(r+3k)-(c+3) \\ k=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow DI=(3+3\times1)-(3+3) \Rightarrow DI=0$$



بنابراین قاب معین است. حال مشاهده می‌شود که اعضای AB و AD به صورت پیوسته، دو سر مفصل و فاقد بارگذاری مستقیم هستند، بنابراین اعضا دو نیرویی می‌باشند و نیروی داخلی آنها در راستای دو مفصل قرار دارد. پس به صورت مقابل داریم:

پس می‌توان بدون محاسبه نیروهای F_{AD} و F_{AB}، مقدار لنگر خمشی M_{CB} را به صورت زیر محاسبه نمود. برای این منظور ابتدا سمت چپ نقطه C از قسمت BCDE را مقطع زده و لنگر M_C را بدست می‌آوریم:



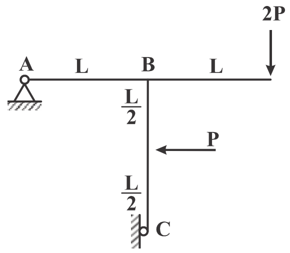
در ادامه با در نظرگیری قسمت سمت راست C داریم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = 0 \Rightarrow (1/5P \times L) - (P \times L) - M_C = 0 \Rightarrow M_C = \frac{PL}{2}$$

حال با انتقال لنگر M_C به قسمت چپ C، مقدار لنگر M_{CB} هم مقدار با M_C ولی خلاف جهت آن بدست می‌آید:

$$M_{CB} = \frac{PL}{2} \text{ (در جهت عقربه‌های ساعت)}$$

مثال۴: در قاب مقابل لنگر M_{BC} برابر است با: (مهندسی عمران - آزاد ۸۴)



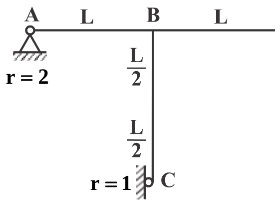
۱) $3PL$

۲) $2PL$

۳) $5PL$

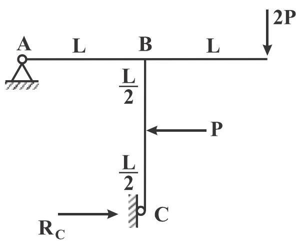
۴) $4PL$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به صورت زیر درجه نامعینی قاب را بدست می‌آوریم:



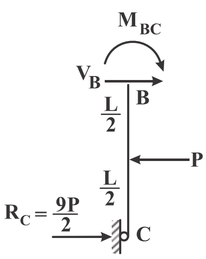
$$\begin{cases} r = 2 + 1 = 3 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow DI = (r + 3k) - (c + 3) \Rightarrow DI = (3 + 0) - (0 + 3) \Rightarrow DI = 0$$

قاب معین است، همچنین مشاهده می‌شود که این قاب پیوسته (فاقد ناپیوستگی داخلی) دارای سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی است، بنابراین برای محاسبه لنگر M_{BC}، ابتدا باید مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی R_C را بدست آوریم:



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_A = 0 \Rightarrow (2P \times 2L) + (P \times \frac{L}{2}) - (R_C \times L) = 0$$

$$\Rightarrow 4PL + \frac{PL}{2} - (R_C \times L) = 0 \Rightarrow R_C = \frac{9P}{2}$$

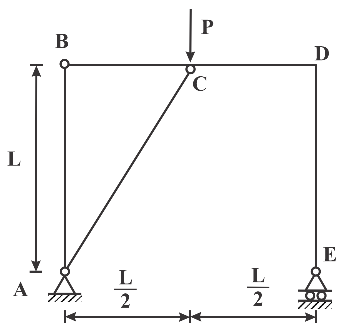


حال با زدن مقطعی از نقطه B می‌توان مقدار لنگر M_{BC} را تعیین نمود:

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + (P \times \frac{L}{2}) - (R_C \times L) = 0$$

$$\Rightarrow M_{BC} + \frac{PL}{2} - (\frac{9P}{2} \times L) = 0 \Rightarrow M_{BC} = 4PL$$

مثال۵: در قاب مقابل نیروی محوری در عضو AC چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۷)



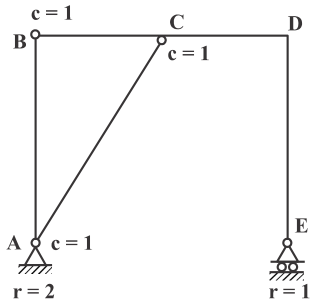
۱) صفر

۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}P$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}P$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}P$

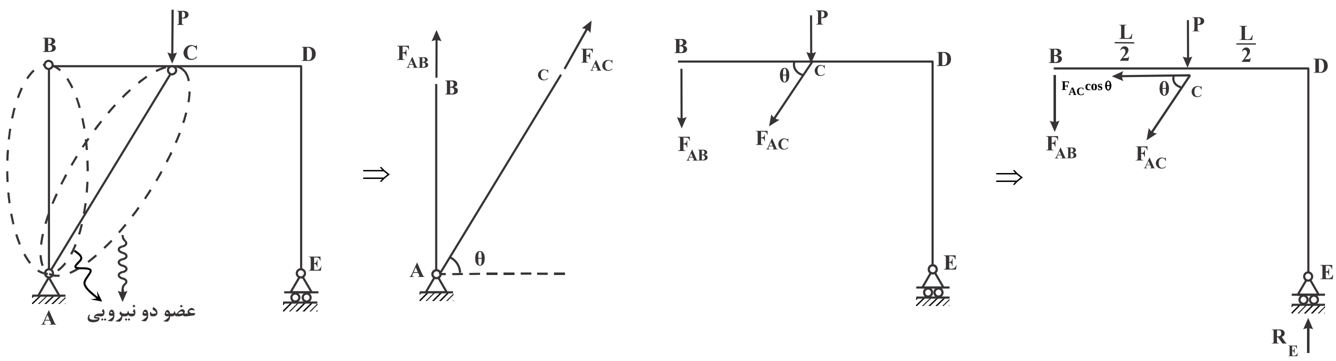
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا درجه نامعینی قاب را به صورت زیر بدست می‌آوریم:



$$\begin{cases} r = ۲ + ۱ = ۳ \\ c = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ \\ k = ۱ \end{cases} \Rightarrow DI = (r + ۳k) - (c + ۳)$$

$$\Rightarrow DI = (۳ + ۳ \times ۱) - (۳ + ۳) \Rightarrow DI = ۰$$

بنابراین قاب معین است. حال مشاهده می‌شود که اعضای AC و AB به صورت پیوسته، دو سر مفصل و فاقد بارگذاری مستقیم هستند، این اعضا دو نیرویی می‌باشند و نیروی داخلی آنها در راستای دو مفصل قرار می‌گیرد پس به صورت زیر داریم:



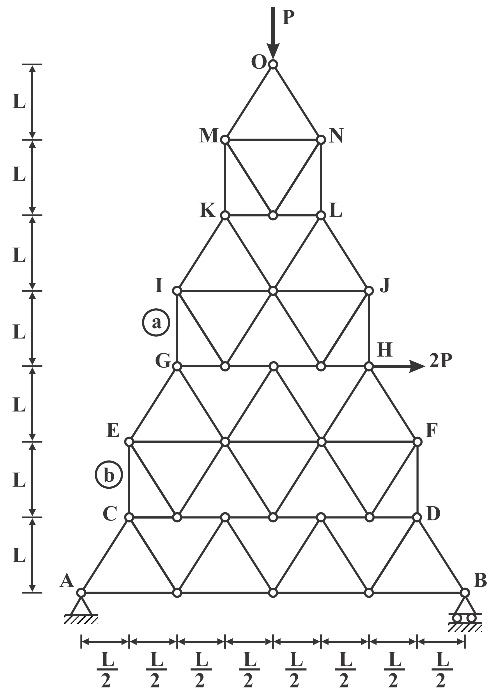
حال با در نظرگیری قسمت BCDE به صورت زیر مقدار نیروی محوری در عضو AC را بدست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AC}\cos\theta = ۰ \Rightarrow F_{AC} = ۰$$

همچنین می‌توان مقدار نیروی عضو AB را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$+\circlearrowleft \sum M_E = ۰ \Rightarrow -(F_{AB} \times L) - (P \times \frac{L}{۲}) = ۰ \Rightarrow F_{AB} \times L = -\frac{PL}{۲} \Rightarrow F_{AB} = -\frac{P}{۲}$$ (خلاف جهت فرضی اولیه)

✍ **مثال۶: به خرپای متقارن شکل زیر دو نیروی P و ۲P اعمال شده است، نیروی داخلی عضو b چند برابر عضو a می‌باشد؟** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۸)



۱) $-\frac{۷}{۳}$

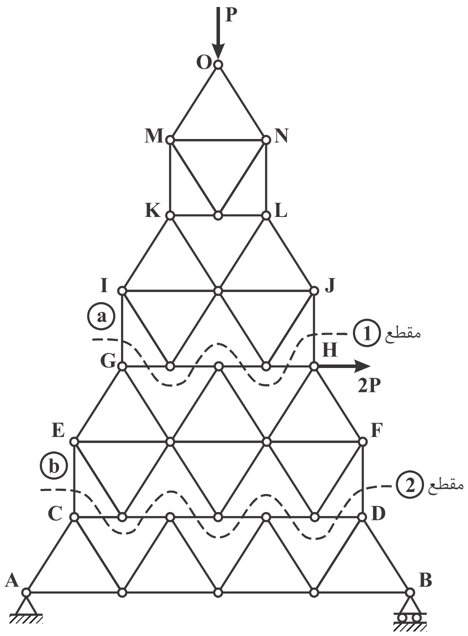
۲) $-\frac{۵}{۳}$

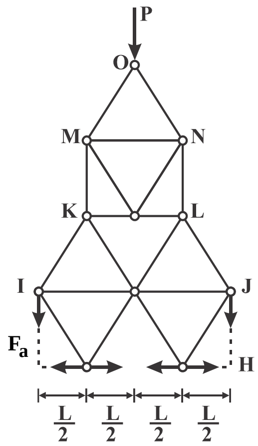
۳) $-\frac{۴}{۳}$

۴) $-\frac{۲}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل این خرپا پیچیده است، بنابراین بهترین روش برای محاسبه نیروی اعضای این خرپا، روش مقطع زدن است.

دقت داشته باشید که مقطع زده‌شده باید به نحوی باشد که با استفاده از یک معادله تعادل لنگر برای آن مقطع بتوان نیروی عضو موردنظر را به‌دست آورد. پس به‌طورکلی مطابق شکل مقابل نیروی هر یک از اعضا a و b را با مقاطع نشان داده شده به‌دست می‌آوریم:

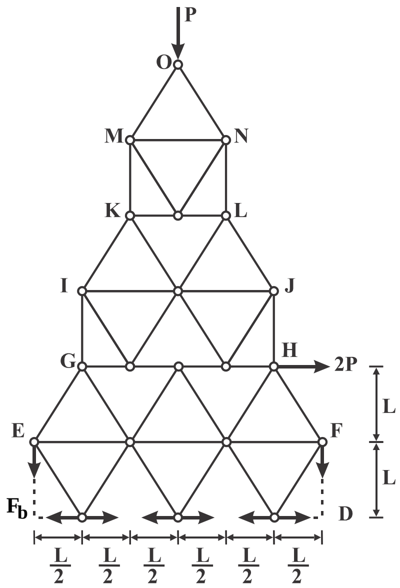




ابتدا نیروی عضو a را با استفاده از مقطع (۱) به‌دست می‌آوریم. برای این منظور مطابق شکل مقابل با لنگرگیری حول مفصل H می‌توان به‌صورت زیر با یک معادله مقدار نیروی عضو a را تعیین نمود، پس داریم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_H = 0 \Rightarrow -[F_a \times 4(\frac{L}{2})] - [P\times 2(\frac{L}{2})] = 0$$

$$\Rightarrow F_a \times 2L = -PL \Rightarrow F_a = \frac{-P}{2}$$



حال برای محاسبه نیروی عضو b، با استفاده از مقطع (۲)، مطابق شکل مقابل با لنگرگیری حول مفصل D می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_D = 0 \Rightarrow -[F_b \times 6(\frac{L}{2})] - [P\times 3(\frac{L}{2})] + [2P\times 2L] = 0$$

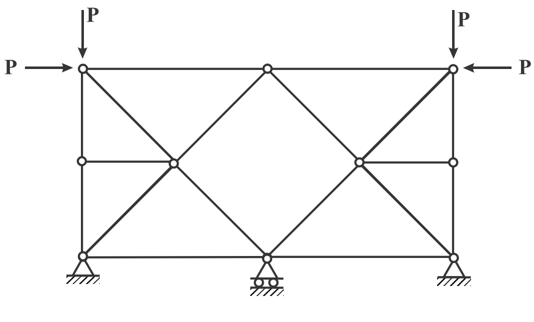
$$\Rightarrow F_b \times 3L = -\frac{3PL}{2} + 4PL \Rightarrow F_b \times 3L = \frac{5}{2}PL$$

$$\Rightarrow F_b = \frac{5}{6}P$$

در نهایت نسبت نیروهای F_b به F_a برابر است با:

$$\frac{F_b}{F_a} = \frac{\frac{5}{6}P}{-\frac{P}{2}} = -\frac{5}{3}$$

✍ **مثال ۷: در خرپای مقابل تحت بارگذاری نشان داده شده تعداد اعضای صفر نیرویی کدام است؟** (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۰)



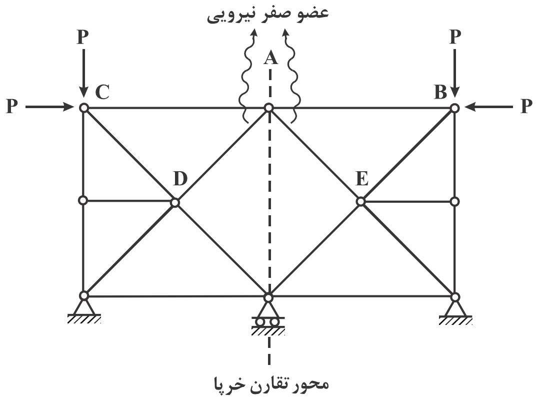
۱) ۴

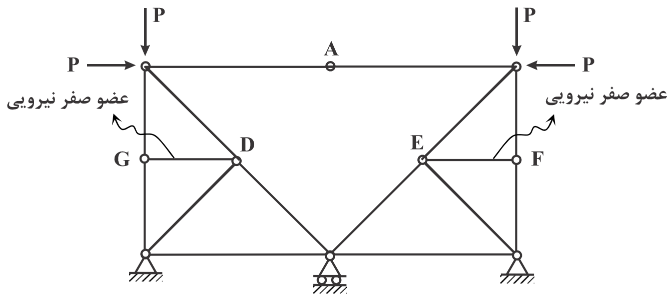
۲) ۶

۳) ۸

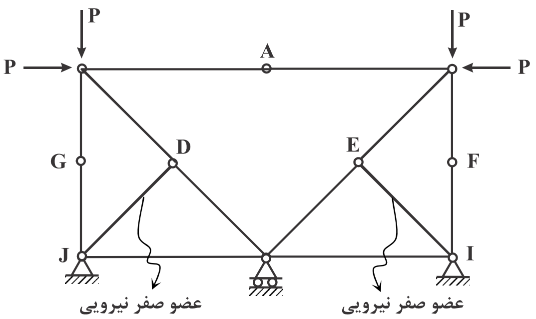
۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه خرپا متقارن است، بنابراین مفصل A روی محور تقارن خرپا قرار دارد و از طرفی دیگر دارای چهار عضو است که دو عضو آن عمود بر محور تقارن (AC و AB) و دو عضو دیگر آن با محور تقارن خرپا زاویه یکسان ساخته‌اند (AE و AD)، بنابراین می‌توان گفت که مفصل A دارای دو عضو صفر نیرویی است (AE و AD):

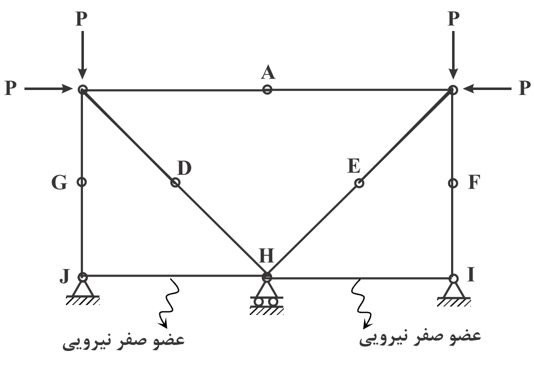




حال با در نظرگیری مفصل‌های F و G که هر دو شرایط یکسانی دارند، مشاهده می‌شود که این مفصل‌ها از سه عضو تشکیل شده‌اند که دو عضو آنها در یک راستا و عضو سوم در راستای دیگر است، از طرفی با توجه به اینکه هیچ نیروی خارجی به آنها اعمال نشده است، بنابراین اعضا FE و GD صفر نیرویی می‌باشند.



سپس با حذف عضوهای EF و AE برای مفصل E و هم‌چنین عضوهای GD و AD برای مفصل D، این دو مفصل سه عضوی شده که دو عضو آنها در یک راستا قرار دارند و عضو سوم آنها در راستای دیگر، بنابراین می‌توان گفت عضو سوم آنها یعنی اعضا EI و JD صفر نیرویی هستند، و داریم:



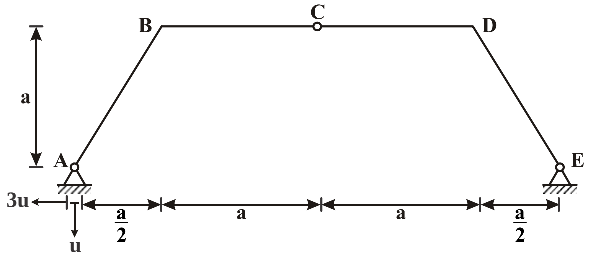
در نهایت با توجه به اینکه اعضا HI و HJ بین دو تکیه‌گاه مفصلی قرار گرفته‌اند و تغییر مکان آنها صفر است، پس این اعضا نیز صفر نیرویی هستند:

بنابراین در این خرپا ۸ عضو صفر نیرویی وجود دارد.

فصل چهارم

« محاسبه خیز و شیب در سازه‌های معین به روش کار مجازی »

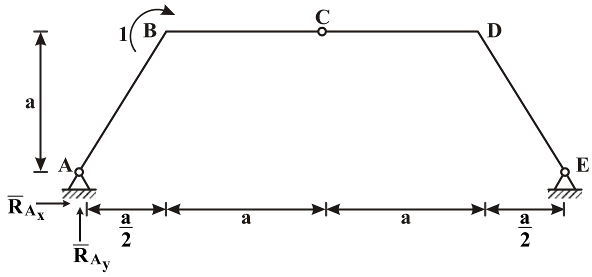
مثال۱: در اثر نشست‌های تکیه‌گاهی در تکیه‌گاه A از سازه شکل زیر دوران B کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۵)



۱) $\frac{۱۱u}{۶a}$ ۲) $\frac{۷u}{۶a}$

۳) $\frac{u}{۳a}$ ۴) $\frac{۱۱u}{۳a}$

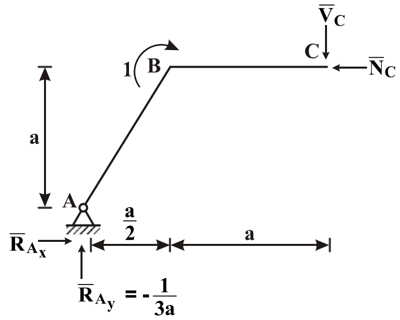
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود قاب معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار ندارد و از طرفی تحت اثر عامل غیرمستقیم نظیر نشست تکیه‌گاهی قرار گرفته است پس با استفاده از روش کار مجازی مراحل زیر را انجام می‌دهیم.



مرحله اول: برای محاسبه دوران نقطه B باید لنگر واحد در این نقطه اعمال گردد و سپس مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاطی که نشست تکیه‌گاهی ایجاد شده است مشخص گردد، پس با توجه به اینکه در نقطه A در دو جهت نشست تکیه‌گاهی ایجاد شده است بنابراین باید عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی A را در دو جهت تحت اثر بارگذاری واحد بدست آوریم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_E = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_y} \times (۳a+۱) = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_y} = \frac{-۱}{۳a}$$

حال قاب را در نقطه C جدا کرده و قسمت ABC را بررسی می‌کنیم:



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = ۰ \Rightarrow (-\bar{R}_{A_x} \times a) + (\bar{R}_{A_y} \times (a+\frac{a}{۲})) + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{A_x} \times a = ۱ + (-\frac{۱}{۳a} \times \frac{۳a}{۲}) \Rightarrow \bar{R}_{A_x} \times a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \bar{R}_{A_x} = \frac{۱}{۲a}$$

مرحله دوم: به علت اینکه فقط نشست تکیه‌گاهی داریم، پس با توجه به مقادیر بدست آمده در مرحله اول مقدار W_R را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$W_R = (\bar{R}_{A_y} \times \Delta_{A_y}) + (\bar{R}_{A_x} \times \Delta_{A_x}) \Rightarrow W_R = (-\frac{۱}{۳a} \times u) + (\frac{۱}{۲a} \times ۳u) = -\frac{u}{۳a} + \frac{۳u}{۲a} = \frac{۷u}{۶a}$$

پس رابطه کار مجازی به صورت مقابل ارائه می‌گردد:

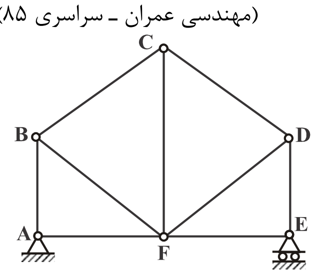
$$\theta_B + W_R = ۰ \Rightarrow \theta_B + \frac{۷u}{۶a} = ۰ \Rightarrow \theta_B = -\frac{۷u}{۶a}$$

علامت منفی نشان دهنده این است که جهت لنگر واحد در نقطه B خلاف جهت دوران این نقطه می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: در خرپای شکل زیر عضو CF در حین اجرا ۲ سانتی‌متر کوتاه‌تر اجرا شده است. تغییر مکان افقی نقطه C را پس از مونتاژ حساب کنید. (می‌دانیم در صورتی که این خرپا تحت اثر بار افقی ۷ton از چپ به راست قرار گیرد، نیروی داخلی میله CF برابر ۲/۶۲۵− (فشاری) می‌باشد.)

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)



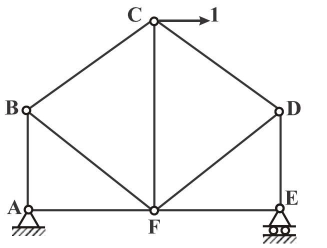
۱) ۰/۷۵cm به سمت چپ

۲) ۰/۷۵cm به سمت راست

۳) ۵/۲۵cm به سمت راست

۴) برای محاسبه ابعاد هندسی سازه باید حذف شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود خرپا معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار نداشته و فقط در عضو CF خطای ساخت ایجاد شده است، بنابراین با انجام مراحل زیر داریم:



مرحله اول: با توجه به محاسبه تغییرمکان افقی نقطه C، نیروی واحد افقی در نقطه C اعمال می‌کنیم. دقت داشته باشید در صورت سؤال اشاره شده که اگر این خرپا از چپ به راست تحت اثر بار ۷ton قرار گیرد، آنگاه نیروی ایجاد شده در عضو CF برابر ۲/۶۲۵ton− است. بنابراین با توجه به اینکه بار واحد از چپ به راست در نقطه C اعمال شده پس مقدار نیروی عضو CF تحت بارگذاری واحد برابر است با:

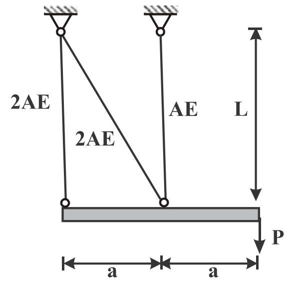
نیروی وارد بر نقطه C	نیروی وارد بر عضو CF
۷ton(بارگذاری اصلی)	$-۲/۶۲۵$
۱ton(بارگذاری واحد)	$\bar{F}_{CF}$

$$\Rightarrow \bar{F}_{CF} = \frac{-۲/۶۲۵\times ۱}{۷}$$

مرحله دوم: حال با قرار دادن مقدار بدست آمده از مرحله اول در رابطه کار مجازی داریم: $\Delta_{C_x} = \sum \bar{F}\delta = (\bar{F}\delta)_{CF} = \frac{-۲/۶۲۵}{۷}\times(-۲) = ۰/۷۵\,cm$

دقت داشته باشید که عضو CF کوچک‌تر از مقدار واقعی ساخته شده، بنابراین مقدار آن در رابطه کار مجازی منفی است $(\delta_{CF} = -۲cm)$. پس تغییر مکان افقی نقطه C مقدار مثبت بدست آمده و این یعنی تغییر مکان آن هم‌جهت با نیروی واحد افقی است.

مثال ۳: در سازه مقابل تغییر مکان افقی میله صلب کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۸)



۱) $\frac{۲Pa}{AE}$

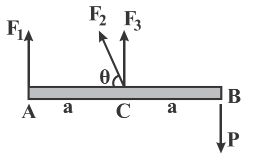
۲) $\frac{PL}{۲AE}$

۳) $\frac{۲PL^۲}{AEa}$

۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طورکه مشاهده می‌شود سازه معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار دارد. بنابراین با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: برای محاسبه نیروی عضوهای سازه تحت اثر بارگذاری اصلی می‌توان نوشت:



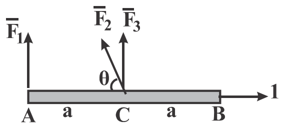
ابتدا مقطعی می‌زنیم و نیروهای سه عضو را بدست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow -F_۲\cos\theta = ۰ \Rightarrow F_۲ = ۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = ۰ \Rightarrow (F_۱\times a)+(P\times a) = ۰ \Rightarrow F_۱ = -P$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_۱ + F_۳ + F_۲\sin\theta - P = ۰ \xrightarrow[F_۱=-P]{F_۲=۰} -P + F_۳ - P = ۰ \Rightarrow F_۳ = ۲P$$

مرحله دوم: برای تعیین تغییر مکان افقی میله با اعمال بار واحد افقی در نقطه B نیروی اعضا را براساس بارگذاری واحد تعیین می‌کنیم:



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow ۱ - \bar{F}_۲\cos\theta = ۰ \Rightarrow \bar{F}_۲ = \frac{۱}{\cos\theta}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = ۰ \Rightarrow \bar{F}_۱ \times a = ۰ \Rightarrow \bar{F}_۱ = ۰$$

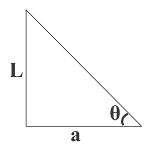
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow \bar{F}_۱ + \bar{F}_۳ + \bar{F}_۲\sin\theta = ۰ \xrightarrow[\bar{F}_۲=\frac{۱}{\cos\theta}]{\bar{F}_۱=۰} \bar{F}_۳ + (\frac{۱}{\cos\theta}\times\sin\theta) = ۰ \Rightarrow \bar{F}_۳ + \tan\theta = ۰ \Rightarrow \bar{F}_۳ = -\tan\theta$$

مرحله سوم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده در رابطه کار مجازی خواهیم داشت:

$$\Delta_{B_x} = \sum\frac{F\bar{F}L}{AE} \Rightarrow \Delta_{B_x} = (\frac{F\bar{F}L}{AE})_۱ + (\frac{F\bar{F}L}{AE})_۲ + (\frac{F\bar{F}L}{AE})_۳ = (\frac{(-P)(۰)\times L}{۲AE}) + (\frac{(۰)\times(\frac{۱}{\cos\theta})\times(\sqrt{a^۲+L^۲})}{۲AE}) + (\frac{(۲P)(-\tan\theta)\times L}{AE})$$

$$\Rightarrow \Delta_{B_x} = ۰ + ۰ - \frac{۲PL\tan\theta}{AE} \Rightarrow \Delta_{B_x} = \frac{-۲PL\tan\theta}{AE}$$

و



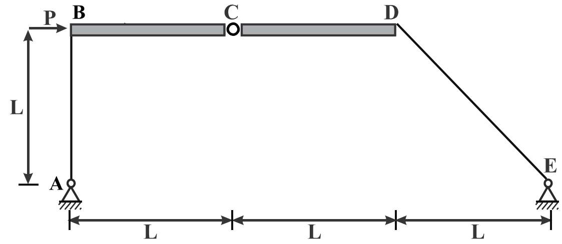
$$\tan\theta = \frac{L}{a}$$

بنابراین تغییرمکان افقی نقطه B برابر است با: $\Delta_{B_x} = \frac{-۲PL}{AE}\times\frac{L}{a} = \frac{-۲PL^۲}{AEa}$

توجه داشته باشید علامت منفی نشان‌دهنده این است که نیروی واحد افقی در نقطه B خلاف جهت تغییرمکان افقی این نقطه اعمال شده است.

مثال۴: در قاب زیر اختلاف دوران در محل مفصل خمشی C ($\Delta\theta_C$) کدام است؟

(اعضای BC و CD صلب و سایر اعضا دارای صلبیت خمشی EI می‌باشند). (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۹)

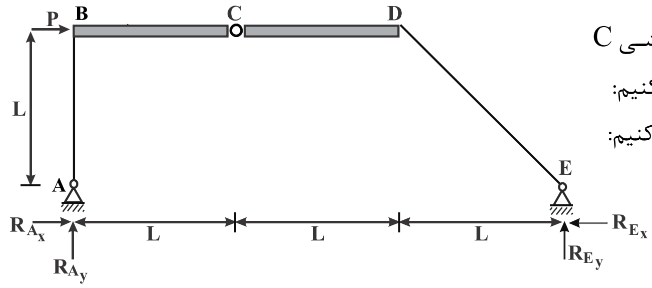


۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}\frac{PL^۲}{EI}$ ۲) $\frac{(\sqrt{۲}+۱)}{۹}\frac{PL^۲}{EI}$

۳) $\frac{(\sqrt{۲}-۱)}{۹}\frac{PL^۲}{EI}$ ۴) $\frac{PL^۲}{۳EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به منظور محاسبه اختلاف دوران در محل مفصل خمشی C برای قاب معین ABCDE با استفاده از روش کار مجازی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله اول: نمودار لنگر خمشی در قاب را با توجه به بارگذاری اصلی آن رسم می‌کنیم:

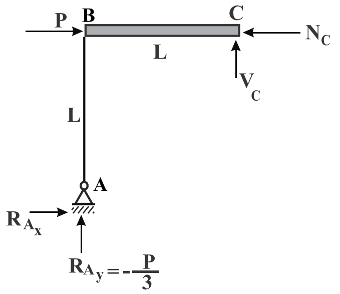


ابتدا با لنگرگیری حول نقطه E در کل قاب داریم:

$$^{+}\curvearrowleft\sum M_E = ۰ \Rightarrow (R_{A_y}\times ۳L)+(P\times L)=۰ \Rightarrow R_{A_y}\times ۳L=-PL \Rightarrow R_{A_y}=-\frac{P}{۳}$$

$$+\uparrow\sum F_y=۰ \Rightarrow R_{A_y}+R_{E_y}=۰ \Rightarrow R_{E_y}-\frac{P}{۳}=۰ \Rightarrow R_{E_y}=\frac{P}{۳}$$

سپس با جداسازی قسمت ABC از مفصل C داریم:



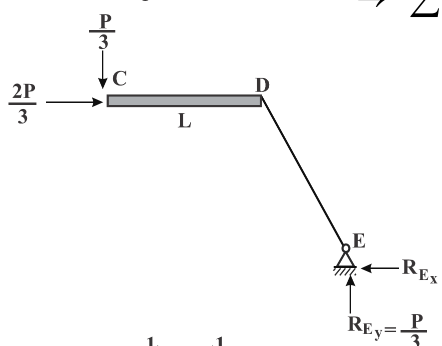
$$^{+}\curvearrowleft\sum M_C=۰ \Rightarrow (R_{A_y}\times L)-(R_{A_x}\times L)=۰$$

$$\Rightarrow R_{A_x}\times L=R_{A_y}\times L \Rightarrow R_{A_x}=R_{A_y} \Rightarrow R_{A_x}=-\frac{P}{۳}$$

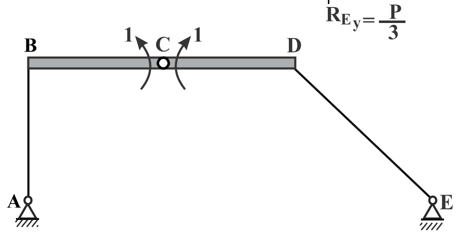
$$+\uparrow\sum F_y=۰ \Rightarrow R_{A_y}+V_C=۰ \Rightarrow V_C=-R_{A_y} \Rightarrow V_C=\frac{P}{۳}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \sum F_x=۰ \Rightarrow R_{A_x}+P-N_C=۰ \Rightarrow N_C=R_{A_x}+P \Rightarrow N_C=-\frac{P}{۳}+P \Rightarrow N_C=\frac{۲P}{۳}$$

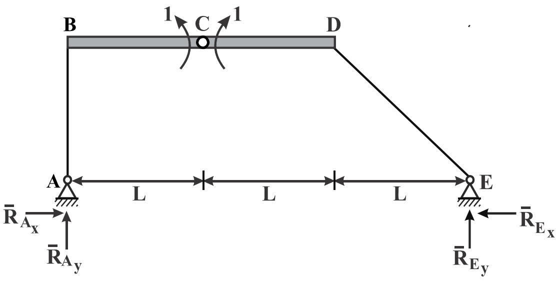
همچنین با بررسی قسمت CDE داریم:



$$\overset{+}{\rightarrow}\ \sum F_x=۰ \Rightarrow \frac{۲P}{۳}-R_{E_x}=۰ \Rightarrow R_{E_x}=\frac{۲P}{۳}$$



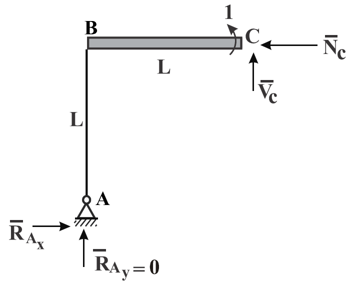
مرحله دوم: حال به منظور محاسبه اختلاف دوران در محل مفصل خمشی C، باید دو لنگر واحد در خلاف جهت هم در طرفین مفصل خمشی C اعمال نماییم و سپس نمودارهای لنگر خمشی در قاب را تحت اثر این بارگذاری واحد رسم کنیم:



ابتدا با لنگرگیری حول نقطه E در کل قاب داریم:

$$^{+}\curvearrowleft\sum M_E=۰ \Rightarrow (\bar{R}_{A_y}\times ۳L)+۱-۱=۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_y}=۰$$

$$+\uparrow\sum F_y=۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_y}+\bar{R}_{E_y}=۰ \Rightarrow \bar{R}_{E_y}=۰$$

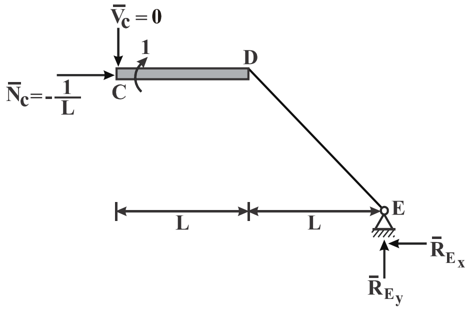


حال با جداسازی قسمت ABC از قاب داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = ۰ \Rightarrow -۱-(\bar{R}_{A_x} \times L) = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_x} = \frac{-۱}{L}$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_x} - \bar{N}_C = ۰ \Rightarrow \bar{N}_C = \bar{R}_{A_x} \Rightarrow \bar{N}_C = \frac{-۱}{L}$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_y} + \bar{V}_C = ۰ \Rightarrow \bar{V}_C = ۰$$

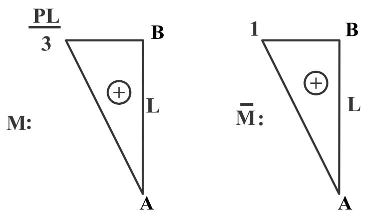


سپس برای قسمت CDE به‌صورت زیر داریم:

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow \bar{N}_C - \bar{R}_{E_x} = ۰$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{E_x} = \bar{N}_C = -\frac{۱}{L}$$

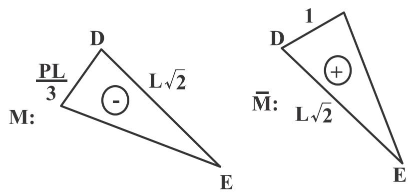
مرحله سوم: با رسم نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی (مرحله اول) و بارگذاری واحد (مرحله دوم) می‌توان با استفاده از روش ترسیمی مور مقادیر $\int M\bar{M}dx$ را به‌دست آورد:



قسمت AB:

$$\int_A^B M\bar{M}dx = \frac{\frac{PL}{۳} \times ۱ \times L}{۳} \Rightarrow \int_A^B M\bar{M}dx = \frac{PL^۲}{۹}$$

قسمت DE:



$$\int_D^E M\bar{M}dx = \frac{\frac{-PL}{۳} \times ۱ \times L\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow \int_D^E M\bar{M}dx = \frac{-PL^۲\sqrt{۲}}{۹}$$

مرحله چهارم: بنابراین با قراردادن مقادیر به‌دست آمده در مرحله سوم، می‌توان مقدار اختلاف دوران در مفصل خمشی C را با استفاده از رابطه کار مجازی تعیین نمود:

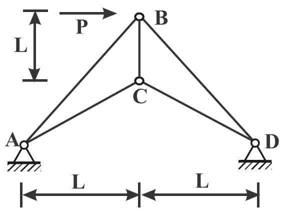
$$(\Delta\theta)_C = \int_A^E \frac{M\bar{M}dx}{EI} = \int_A^B \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_B^C \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_C^D \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_D^E \frac{M\bar{M}dx}{EI}$$

$$\Rightarrow (\Delta\theta)_C = \frac{PL^۲}{۹EI} + \cancel{\frac{PL^۲}{۶EI}}_{۰} - \cancel{\frac{PL^۲}{۶EI}}_{۰} - \frac{PL^۲\sqrt{۲}}{۹EI} \Rightarrow (\Delta\theta)_C = (\frac{۱-\sqrt{۲}}{۹})\frac{PL^۲}{EI}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود در گزینه‌ها ضریب $(\frac{\sqrt{۲}-۱}{۹})$ وجود دارد و می‌توان گفت که مقدار مثبت در گزینه‌ها درنظر گرفته شده و درواقع از لحاظ اندازه فرقی با $(\frac{۱-\sqrt{۲}}{۹})$ ندارد.

توجه داشته باشید به علت اینکه اعضای CD و BC صلب هستند، بنابراین مقدار $\int_B^C \frac{M\bar{M}dx}{EI}$ و $\int_C^D \frac{M\bar{M}dx}{EI}$ برابر صفر می‌باشد و در مرحله سوم برای این قسمت‌ها مقادیری محاسبه نشده است.

مثال۵: عضو BC در اثر بارگذاری P به اندازه $\delta_\circ$ افزایش طول می‌دهد. چنانچه این عضو در اثر خطای ساخت $2\delta_\circ$ کوتاه ساخته شده باشد، پس از نصب و در غیاب هرگونه بارگذاری خارجی روی خرپا، تغییر مکان افقی گره B کدام است؟ (EA ثابت) (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۰)



۱) $\frac{۲EA\delta_\circ^۲}{PL}$ ۲) $\frac{۴EA\delta_\circ^۲}{PL}$

۳) $\frac{۳EA\delta_\circ^۲}{PL}$ ۴) $\frac{۵EA\delta_\circ^۲}{PL}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» خرپا معین و تحت اثر بارگذاری مستقیم P قرار گرفته است. هم‌چنین عضو BC دارای خطای ساخت است، پس با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: خرپا تحت اثر بارگذاری مستقیم P قرار دارد که در اثر این بارگذاری عضو BC به اندازه $\delta_\circ$ افزایش طول می‌دهد. پس با استفاده از رابطه تغییر مکان محوری در عضو از درس مقاومت مصالح، نیروی عضو BC را تحت بارگذاری اصلی بدست می‌آوریم:

$$\Delta_{BC}=\frac{F_{BC}L_{BC}}{(EA)_{BC}}\Rightarrow \delta_\circ=\frac{F_{BC}\times L}{EA}\Rightarrow F_{BC}=\frac{EA\delta_\circ}{L}$$

مرحله دوم: جهت محاسبه تغییرمکان افقی نقطه B باید بار واحد افقی را در نقطه B اعمال نماییم. به دلیل اینکه نیروی واحد افقی در جهت نیروی P در بارگذاری اصلی به نقطه B اعمال می‌شود، می‌توان مقدار نیروی عضو BC تحت بارگذاری اصلی را بر P تقسیم کرده و نیروی عضو BC تحت بارگذاری واحد را بدست آوریم:

$$\bar{F}_{BC}=\frac{F_{BC}}{P}\Rightarrow \bar{F}_{BC}=\frac{EA\delta_\circ}{L}\times\frac{۱}{P}=\frac{EA\delta_\circ}{PL}$$

مرحله سوم: بنابراین با قرار دادن در رابطه کار مجازی داریم:

دقت داشته باشید در صورت سؤال بیان شده است که مقدار تغییرمکان افقی نقطه B را در شرایط بدون بارگذاری خارجی تعیین نمایید. بنابراین از اثر بارگذاری مستقیم بر سازه و ترم $\sum\frac{F\bar{F}L}{AE}$ در رابطه کار مجازی صرف‌نظر می‌کنیم. یعنی داریم:

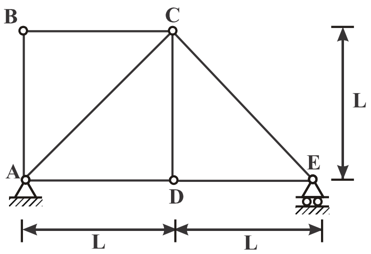
$$\Delta_{B_x}=\sum\bar{F}\delta=(\bar{F}\delta)_{BC}\Rightarrow \Delta_{B_x}=(\frac{EA\delta_\circ}{PL})\times(-۲\delta_\circ)\Rightarrow \Delta_{B_x}=-\frac{۲EA\delta_\circ^۲}{PL}$$

علامت منفی در $-۲\delta_\circ$ به علت این است که عضو BC کوتاه‌تر از مقدار واقعی ساخته شده است و علامت منفی در Δ_{B_x} نشان‌دهنده این است که تغییر مکان افقی نقطه B خلاف جهت نیروی واحد افقی در این نقطه می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: در خرپای مطابق شکل زیر عضو DE را به چه اندازه گرم کنیم تا تغییر مکان افقی مفصل B به سمت راست برابر $۱۰^{-۴}$ L شود؟

(ضریب انبساط حرارتی را $\alpha=۱۰^{-۵}\frac{۱}{C^\circ}$ فرض کنید.) (مهندسی در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۳)



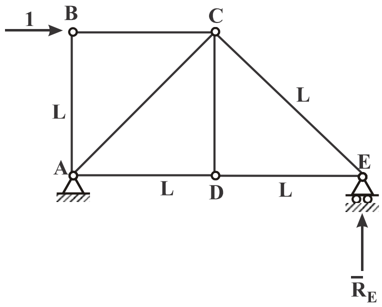
۱) ۱۰° C

۲) ۲۰° C

۳) ۴۰° C

۴) ۵۰° C

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» خرپا معین و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار نگرفته و از طرفی عضو DE تغییر دما داشته است. بنابراین با استفاده از روش کار مجازی و انجام مراحل زیر داریم:

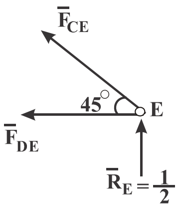


مرحله اول: به منظور محاسبه تغییرمکان افقی مفصل B باید نیروی واحد افقی را در نقطه B اعمال نماییم و سپس نیروی عضو DE را تحت بارگذاری واحد به صورت زیر تعیین کنیم. پس داریم:

دقت داشته باشید چون تغییر مکان افقی نقطه B به سمت راست مطرح شده است بنابراین نیروی افقی واحد نیز باید در سمت راست به نقطه B اعمال گردد.

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_A=\circ\Rightarrow(\bar{R}_E\times ۲L)-(۱\times L)=\circ\Rightarrow \bar{R}_E=\frac{۱}{۲}$$

مفصل E:



$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow \bar{R}_E + \bar{F}_{CE}\sin ۴۵^\circ = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} + (\bar{F}_{CE} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}) = ۰ \Rightarrow \bar{F}_{CE} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

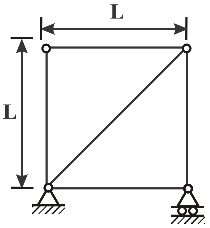
$$\overset{+}{\leftarrow} \sum F_x = ۰ \Rightarrow \bar{F}_{DE} + \bar{F}_{CE}\cos ۴۵^\circ = ۰ \Rightarrow \bar{F}_{DE} + (-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}) = ۰ \Rightarrow \bar{F}_{DE} = \frac{۱}{۲}$$

مرحله دوم: بنابراین با قرار دادن مقدار بدست آمده از مرحله اول در رابطه کار مجازی داریم:

دقت شود که تغییر مکان افقی نقطه B برابر $۱۰^{-۴}$ L است، پس خواهیم داشت:

$$\Delta_{B_x} = \sum \bar{F}\alpha L\Delta T = (\bar{F}\alpha L\Delta T)_{DE} \Rightarrow ۱۰^{-۴}\,L = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۵} \times L \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = ۲۰^\circ\,C$$

مثال۷: در خرپای مقابل که سطح مقطع همه میله‌ها یکسان و برابر A است فقط چهار ضلع را به اندازه ΔT حرارت می‌دهیم. تنش حاصل در میله قطری چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۳)



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}E\alpha\Delta T$

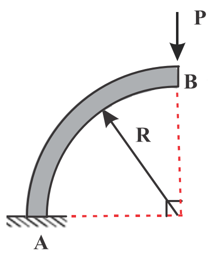
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}E\alpha\Delta T$

۳) $E\alpha\Delta T$

۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» خرپا معین است و تحت اثر بارگذاری مستقیم قرار ندارد. از طرفی چهار عضو آن دچار تغییر دما به اندازه ΔT شده‌اند. می‌دانیم در خرپای معین که تنها تحت اثر عوامل غیرمستقیم نظیر نشست تکیه‌گاهی، تغییر دما و خطای ساخت قرار گرفته باشد، نیرو در اعضای خرپا ایجاد نمی‌گردد و در نتیجه تنش در اعضا آن برابر صفر است.

مثال۸: در میله یکنواخت زیر با بارگذاری نشان داده شده مطلوب است تعیین تغییرمکان افقی و عمودی نقطه B: (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۳)



۱) $\frac{PR^۳\pi}{۲EI}, \frac{PR^۳}{۲EI}$

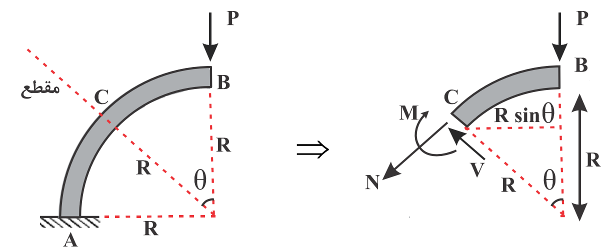
۲) $\frac{PR^۳\pi}{۲EI}, \frac{PR^۳}{EI}$

۳) $\frac{PR^۳}{۲EI}, \frac{PR^۳}{۲EI}$

۴) $\frac{PR^۳\pi}{۴EI}, \frac{PR^۳}{۲EI}$

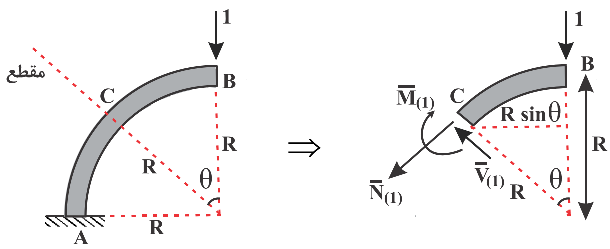
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه تغییرمکان افقی و قائم قاب قوسی شکل معین با استفاده از روش کار مجازی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله اول: ابتدا توجه داشته باشید که فقط مقدار صلبیت خمشی قاب ارائه شده است، بنابراین تنها باید معادله لنگر خمشی را تحت اثر بارگذاری اصلی برحسب θ بدست آوریم. پس با زدن مقطعی مطابق شکل زیر داریم:



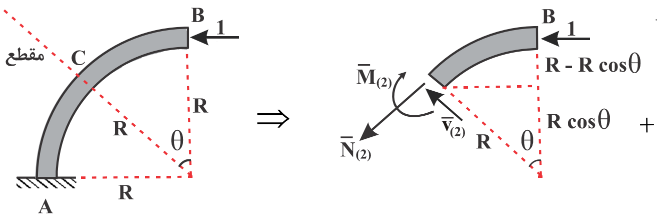
$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = ۰ \Rightarrow M + P(R\sin\theta) = ۰ \Rightarrow M = -PR\sin\theta$$

مرحله دوم: برای محاسبه تغییرمکان قائم نقطه B، ابتدا بار واحد قائم را در نقطه B اعمال می‌کنیم و سپس با زدن مقطعی معادله لنگر خمشی را برحسب θ تحت اثر بارگذاری واحد بدست می‌آوریم:



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = ۰ \Rightarrow \bar{M}_{(1)} + (۱ \times R\sin\theta) = ۰ \Rightarrow \bar{M}_{(1)} = -R\sin\theta$$

همچنین برای محاسبه تغییرمکان افقی نقطه B، کافی است بار واحد افقی را در نقطه B اعمال نماییم و سپس با زدن مقطعی معادله لنگر خمشی را برحسب θ تحت اثر بارگذاری واحد تعیین کنیم:



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = ۰ \Rightarrow \bar{M}_{(۲)} - (۱\times(R - R\cos\theta)) = ۰$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{(۲)} = +R(۱-\cos\theta)$$

مرحله سوم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مراحل اول و دوم در رابطه کار مجازی داریم:

۱) تعیین تغییر مکان قائم نقطه B:

$$\Delta_{B_y} = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{M\bar{M}_{(۱)}}{EI} Rd\theta \Rightarrow \Delta_{B_y} = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{(-PR\sin\theta)(-R\sin\theta)}{EI}Rd\theta \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^۳}{EI}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۲\theta d\theta = \frac{PR^۳}{EI}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\cos۲\theta}{۲}d\theta$$

$$\Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^۳}{۲EI}\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}d\theta - \int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos۲\theta d\theta\right] \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^۳}{۲EI}\left[\theta|_۰^{\frac{\pi}{۲}} - \frac{۱}{۲}\sin۲\theta|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\right] \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^۳}{۲EI}(\frac{\pi}{۲}-۰) \Rightarrow \Delta_{B_y} = \frac{PR^۳\pi}{۴EI}$$

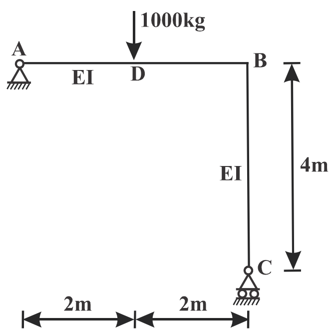
۲) تعیین تغییر مکان افقی نقطه B:

$$\Delta_{B_x} = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{M\bar{M}_{(۲)}}{EI} Rd\theta \Rightarrow \Delta_{Bx} = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{(-PR\sin\theta)(+R(۱-\cos\theta))}{EI}Rd\theta \Rightarrow \Delta_{B_x} = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{-PR^۳(\sin\theta)(۱-\cos\theta)}{EI}d\theta$$

$$= \frac{-PR^۳}{EI}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin\theta(۱-\cos\theta)d\theta \Rightarrow \Delta_{B_x} = \frac{-PR^۳}{EI}\left[\frac{(۱-\cos\theta)^۲}{۲}|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\right] = \frac{-PR^۳}{EI}(\frac{۱}{۲}-۰) \Rightarrow \Delta_{B_x} = \frac{-PR^۳}{۲EI}$$

علامت منفی نشان‌دهنده این است که جهت انتخاب اعمال نیروی افقی واحد خلاف جهت تغییر مکان افقی نقطه B می‌باشد.

مثال ۹: در قاب زیر تغییرمکان افقی نقطه D چند سانتی‌متر است؟ ($EI = ۲\times۱۰^{۱۱}\ kg.cm^۲$) (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۴)



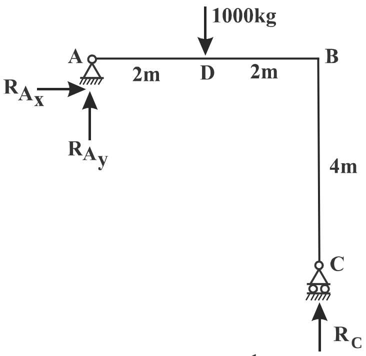
۱) ۰/۱۶

۲) ۰/۳۲

۳) ۰/۴۸

۴) ۰/۶۴

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای محاسبه تغییرمکان افقی نقطه D در قاب معین می‌توان از روش کار مجازی به صورت زیر استفاده کرد. توجه داشته باشید که اعضا فقط دارای صلبیت خمشی هستند پس با انجام مراحل زیر داریم:



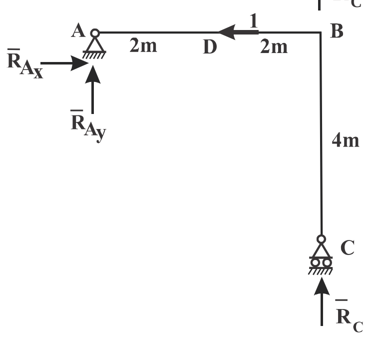
مرحله اول: نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی برای اعضا قاب به صورت مقابل رسم می‌شوند:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = ۰ \Rightarrow (۱۰۰۰\times۲) - (R_C\times۴) = ۰ \Rightarrow R_C = ۵۰۰kg$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{A_x} = ۰$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{A_y} + R_C - ۱۰۰۰ = ۰ \Rightarrow R_{A_y} + ۵۰۰ - ۱۰۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow R_{A_y} = ۵۰۰kg$$



مرحله دوم: حال برای محاسبه مقدار تغییرمکان افقی نقطه D باید بار واحد افقی را در نقطه D وارد کرده و نمودارهای لنگر خمشی اعضای قاب تحت اثر بارگذاری واحد را رسم نماییم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = ۰ \Rightarrow \bar{R}_C\times۴ = ۰ \Rightarrow \bar{R}_C = ۰$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_y} + \bar{R}_C = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_y} = ۰$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_x} - ۱ = ۰ \Rightarrow \bar{R}_{A_x} = ۱$$

بنابراین مشاهده می‌شود که نمودار لنگر خمشی در اعضای قاب تحت اثر بارگذاری واحد صفر است.

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور برای محاسبه مقادیر $\int M\bar{M}dx$ داریم:

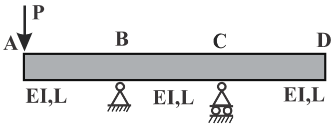
$$\int_A^D M\bar{M}dx = \int_D^B M\bar{M}dx = \int_B^C M\bar{M}dx = ۰$$

مرحله چهارم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مرحله سوم در رابطه کار مجازی داریم:

$$\Delta_{D(x)} = \int \frac{M\bar{M}dx}{EI} = \int_A^D \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_D^B \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_B^C \frac{M\bar{M}dx}{EI} \Rightarrow \Delta_{D(x)} = ۰ + ۰ + ۰ = ۰$$

پس ملاحظه می‌شود که مقدار تغییرمکان افقی نقطه D برابر صفر است و در هیچ گزینه‌ای این مقدار ارائه نشده است.

مثال۱۰: در تیر خمشی زیر خیز قائم در نقطه D کدام است؟ (مهندسی در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۴)

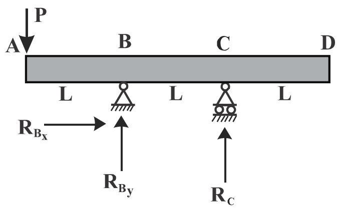


۱) $\frac{PL^۳}{۱۲EI}$　　۲) $\frac{PL^۳}{۶EI}$

۳) $\frac{PL^۳}{۳EI}$　　۴) $\frac{PL^۳}{۲EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه خیز قائم نقطه D در تیر معین می‌توان از روش کار مجازی استفاده نمود. با توجه به این‌که فقط مقدار صلبیت خمشی اعضای تیر داده شده است، پس با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: برای رسم نمودار لنگر خمشی اعضا تیر تحت بارگذاری اصلی به صورت زیر داریم:

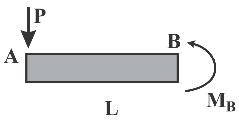


$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_B = ۰ \Rightarrow (R_C \times L) + (P \times L) = ۰ \Rightarrow R_C = -P$$

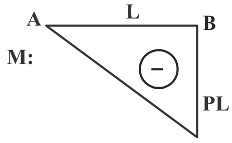
$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{B_y} + R_C - P = ۰ \Rightarrow R_{B_y} - P - P = ۰ \Rightarrow R_{B_y} = ۲P$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{B_x} = ۰$$

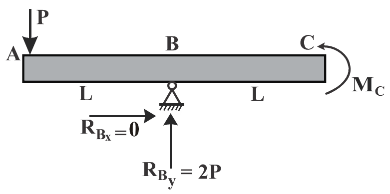
قسمت AB:



$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_B = ۰ \Rightarrow M_B + (P \times L) = ۰ \Rightarrow M_B = -PL$$

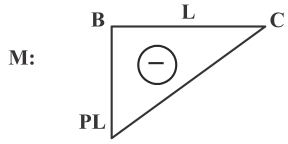


قسمت BC:

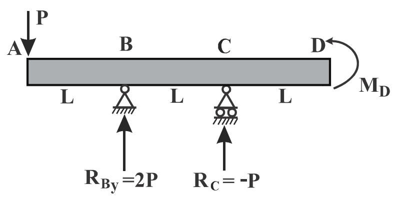


$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_C = ۰ \Rightarrow M_C + (P \times ۲L) - (۲P \times L) = ۰$$

$$\Rightarrow M_C + ۲PL - ۲PL = ۰ \Rightarrow M_C = ۰$$



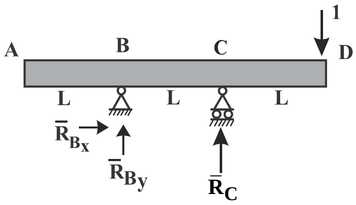
قسمت CD:



$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_D = ۰ \Rightarrow M_D + (P \times ۳L) - (۲P \times ۲L) - ((-P) \times L) = ۰$$

$$\Rightarrow M_D + ۳PL - ۴PL + PL = ۰ \Rightarrow M_D = ۰$$

مرحله دوم: برای محاسبه مقدار خیز قائم نقطه D باید بار قائم واحد در نقطه D را اعمال کرده و نمودار لنگر خمشی اعضای تیر را تحت اثر بارگذاری واحد رسم نماییم:

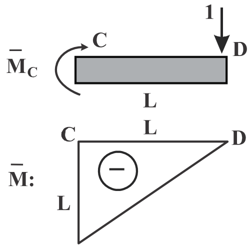


$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_B=۰\Rightarrow(\bar{R}_C\times L)-(۱\times ۲L)=۰\Rightarrow\bar{R}_C=۲$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y=۰\Rightarrow\bar{R}_C+\bar{R}_{B_y}-۱=۰\Rightarrow\bar{R}_{B_y}+۲-۱=۰\Rightarrow\bar{R}_{B_y}=-۱$$

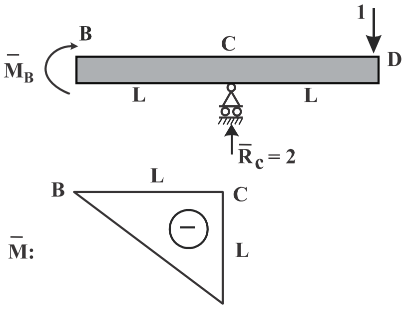
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=۰\Rightarrow\bar{R}_{B_x}=۰$$

قسمت CD:



$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_C=۰\Rightarrow\bar{M}_C+(۱\times L)=۰\Rightarrow\bar{M}_C=-L$$

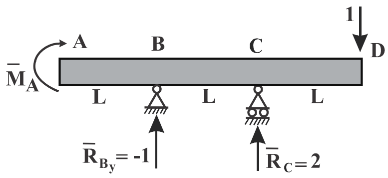
قسمت BC:



$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_B=۰\Rightarrow\bar{M}_B+(۱\times ۲L)-(۲\times L)=۰$$

$$\Rightarrow\bar{M}_B+۲L-۲L=۰\Rightarrow\bar{M}_B=۰$$

قسمت AB:

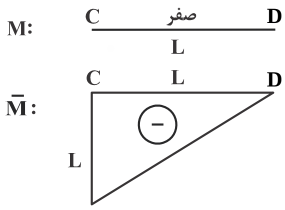


$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_A=۰\Rightarrow\bar{M}_A+(۱\times ۳L)-(۲\times ۲L)-((-۱)\times L)=۰$$

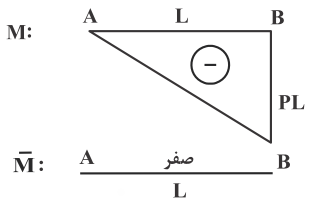
$$\Rightarrow\bar{M}_A+۳L-۴L+L=۰\Rightarrow\bar{M}_A=۰$$

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور می‌توان مقادیر $\int M\bar{M}dx$ را برای اعضا قاب به کمک نمودارهای لنگر خمشی تحت بارگذاری اصلی و واحد به صورت زیر بدست آورد:

قسمت‌های AB و CD:

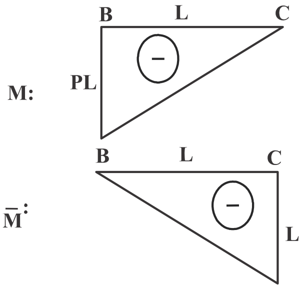


$$\int_C^D M\bar{M}dx=۰$$



$$\int_A^B M\bar{M}dx=۰$$

قسمت BC:

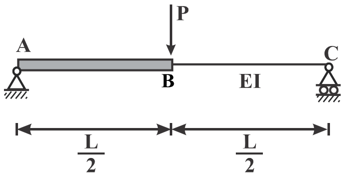


$$\int_B^C M\bar{M}dx=\frac{(-PL)(-L)\times L}{۶}\Rightarrow\int_B^C M\bar{M}dx=\frac{PL^۳}{۶}$$

مرحله چهارم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مرحله سوم در رابطه کار مجازی داریم:

$$\Delta_{D_y}=\int\frac{M\bar{M}dx}{EI}=\int_A^B\frac{M\bar{M}dx}{EI}+\int_B^C\frac{M\bar{M}dx}{EI}+\int_C^D\frac{M\bar{M}dx}{EI}\Rightarrow\Delta_{D_y}=۰+(\frac{PL^۳}{۶}\times\frac{۱}{EI})+۰\Rightarrow\Delta_{D_y}=\frac{PL^۳}{۶EI}$$

مثال۱۱: در تیر زیر قطعه AB صلب است، تغییر مکان نقطه B کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۵)



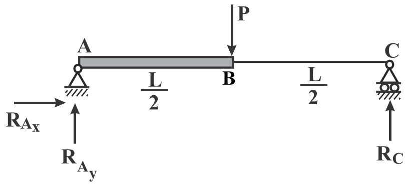
۱) $\frac{PL^۳}{۱۶EI}$

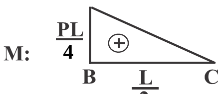
۲) $\frac{PL^۳}{۲۴EI}$

۳) $\frac{PL^۳}{۴۸EI}$

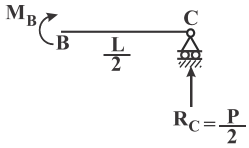
۴) $\frac{PL^۳}{۹۶EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه تغییرمکان نقطه B برای تیر معین نشان داده شده می‌توان از روش کار مجازی استفاده نمود. البته توجه داشته باشید که قسمت AB صلب است $(EI=\infty)$ و از طرفی برای قسمت BC فقط مقدار صلبیت خمشی ارائه شده است. بنابراین کافی است تنها نمودار لنگر خمشی برای قسمت BC را رسم کرده و با انجام مراحل زیر داریم:





مرحله اول: نمودار لنگر خمشی تحت بارگذاری اصلی برای قسمت BC به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

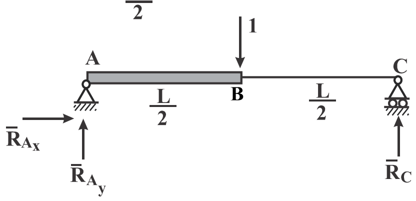


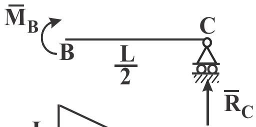
$$^{+}\circlearrowright\sum M_A=\circ \Rightarrow (R_{C_y}\times L)-(P\times\frac{L}{۲})=\circ \Rightarrow R_C=\frac{P}{۲}$$

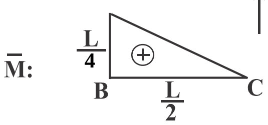
$$^{+}\uparrow\sum F_y=\circ \Rightarrow R_{A_y}+R_C-P=\circ \Rightarrow R_{A_y}=\frac{P}{۲}$$

$$^{+}\circlearrowright\sum M_B=\circ \Rightarrow M_B-(R_{C_y}\times\frac{L}{۲})=\circ \Rightarrow M_B=\frac{PL}{۴}$$

مرحله دوم: برای محاسبه مقدار تغییرمکان نقطه B، باید بار واحد قائم در نقطه B اعمال گردد و سپس نمودار لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری واحد به صورت مقابل رسم شود:





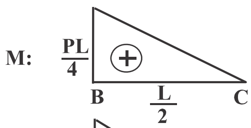


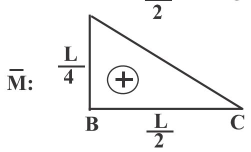
$$^{+}\circlearrowright\sum M_A=\circ \Rightarrow (\bar{R}_C\times L)-(۱\times\frac{L}{۲})=\circ \Rightarrow \bar{R}_C=\frac{۱}{۲}$$

$$^{+}\uparrow\sum F_y=\circ \Rightarrow \bar{R}_{A_y}+\bar{R}_C-۱=\circ \Rightarrow \bar{R}_{A_y}=\frac{۱}{۲}$$

$$^{+}\circlearrowright\sum M_B=\circ \Rightarrow \bar{M}_B-(\bar{R}_C\times\frac{L}{۲})=\circ \Rightarrow \bar{M}_B=\frac{L}{۴}$$

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور می‌توان مقدار $\int M\bar{M}dx$ را برای قسمت BC به‌صورت زیر با کمک نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی و واحد به‌دست آورد:



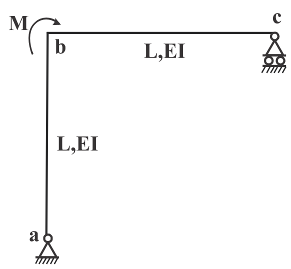


$$\int_B^C M\bar{M}dx=\frac{(\frac{PL}{۴})(\frac{L}{۴})\times\frac{L}{۲}}{۳}\Rightarrow \int_B^C M\bar{M}dx=\frac{PL^۳}{۹۶}$$

مرحله چهارم: بنابراین با قراردادن مقدار $\int M\bar{M}dx$ در رابطه کار مجازی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\Delta_B=\int\frac{M\bar{M}dx}{EI}=\int_A^B\frac{M\bar{M}dx}{EI}+\int_B^C\frac{M\bar{M}dx}{EI}\Rightarrow \Delta_B=\circ+(\frac{PL^۳}{۹۶}\times\frac{۱}{EI})\Rightarrow \Delta_B=\frac{PL^۳}{۹۶EI}$$

مثال۱۲: جابه‌جایی نقطه C چه مقدار است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۵)

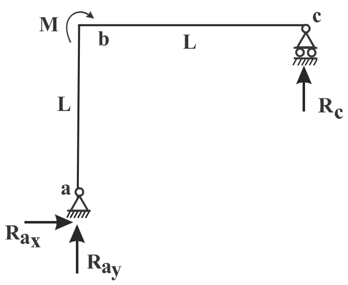


۱) $\frac{ML^۲}{EI}$　　۲) $\frac{ML^۲}{۳EI}$

۳) $\frac{۲ML^۲}{۳EI}$　　۴) صفر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه مقدار جابه‌جایی نقطه C در قاب معین می‌توان از روش کار مجازی استفاده نمود. با توجه به این‌که برای اعضای قاب فقط مقدار صلبیت خمشی اعضا ارائه شده است، پس با انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: برای رسم نمودار لنگر خمشی اعضا قاب تحت اثر بارگذاری اصلی داریم:

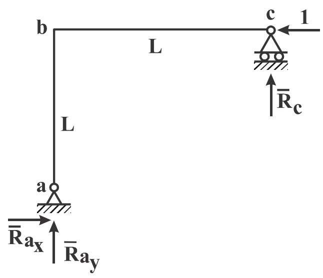


$$^{+}\circlearrowright\sum M_a=\circ\Rightarrow (R_c\times L)-M=\circ\Rightarrow R_c=\frac{M}{L}$$

$$^{+}\uparrow\sum F_y=\circ\Rightarrow R_c+R_{a_y}=\circ\Rightarrow R_{a_y}=\frac{-M}{L}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=\circ\Rightarrow R_{a_x}=\circ$$

مرحله دوم: برای محاسبه جابه‌جایی نقطه C باید بار واحد افقی را در نقطه c اعمال نماییم و نمودارهای لنگر خمشی برای قاب تحت بارگذاری واحد را رسم کنیم:



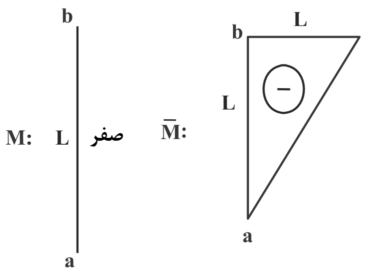
$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_a = \circ \Rightarrow (\bar{R}_c \times L) + (۱ \times L) = \circ \Rightarrow \bar{R}_c = -۱$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = \circ \Rightarrow \bar{R}_{a_y} + \bar{R}_c = \circ \Rightarrow \bar{R}_{a_y} = ۱$$

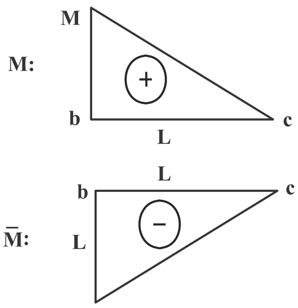
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = \circ \Rightarrow \bar{R}_{a_x} - ۱ = \circ \Rightarrow \bar{R}_{a_x} = ۱$$

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روش ترسیمی مور می‌توان مقادیر $\int M\bar{M}d_x$ را برای اعضای قاب به کمک نمودارهای لنگر خمشی تحت اثر بارگذاری اصلی و واحد به صورت زیر بدست آورد:

قسمت‌های ab و bc:



$$\int_a^b M\bar{M}dx = \circ$$



$$\int_b^c M\bar{M}dx = \frac{M \times (-L) \times L}{۳}$$

$$\Rightarrow \int_b^c M\bar{M}dx = \frac{-ML^۲}{۳}$$

مرحله چهارم: بنابراین با قرار دادن مقادیر بدست آمده از مرحله سوم در رابطه کار مجازی داریم:

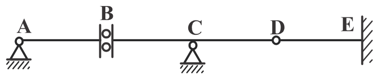
$$\Delta_C = \int \frac{M\bar{M}dx}{EI} = \int_a^b \frac{M\bar{M}dx}{EI} + \int_b^c \frac{M\bar{M}dx}{EI} \Rightarrow \Delta_C = (\circ \times \frac{۱}{EI}) + (\frac{-ML^۲}{۳} \times \frac{۱}{EI}) \Rightarrow \Delta_C = \frac{-ML^۲}{۳EI}$$

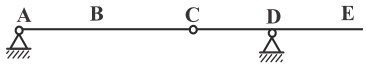
علامت منفی به معنای این است که جهت اعمال نیروی واحد خلاف جهت تغییر مکان نقطه C می‌باشد.

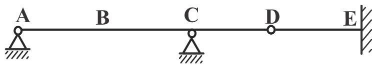
فصل پنجم

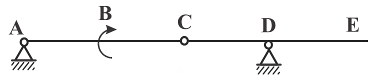
«بررسی روش تیر مزدوج و روش‌های هندسی در محاسبه خیز و شیب تیرها»

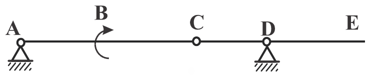
مثال۱: تیر مزدوج تیر شکل زیر مطابق کدام گزینه است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)



۱) 

۲) 

۳) 

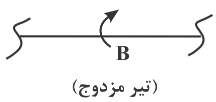
۴) 

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به منظور رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر به تکیه‌گاه‌ها از تیر اصلی به تیر مزدوج را به صورت زیر تغییر دهیم:

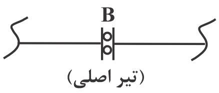
نقطه A:

شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = 0 & \Rightarrow & M_A = 0 \\ \theta_A \neq 0 & \Rightarrow & V_A \neq 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

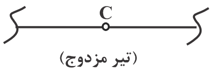
نقطه B:



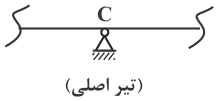
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_{L(B)} \neq y_{R(B)} & \Rightarrow & M_{L(B)} \neq M_{R(B)} \\ \theta_{L(B)} = \theta_{R(B)} & \Rightarrow & V_{L(B)} = V_{R(B)} \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



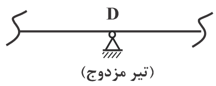
نقطه C:



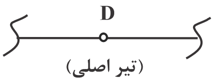
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_C = 0 & \Rightarrow & M_C = 0 \\ \theta_{L(C)} = \theta_{R(C)} & \Rightarrow & V_{L(C)} = V_{R(C)} \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



نقطه D:

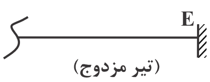


شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_D \neq 0 & \Rightarrow & M_D \neq 0 \\ \theta_{L(D)} \neq \theta_{R(D)} & \Rightarrow & V_{L(D)} \neq V_{R(D)} \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

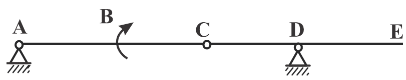


نقطه E:

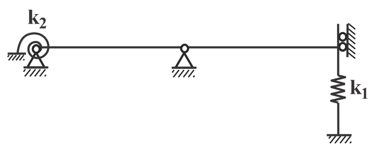
شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_E = 0 & \Rightarrow & M_E = 0 \\ \theta_E = 0 & \Rightarrow & V_E = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی



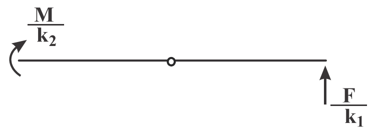
بنابراین تیر مزدوج حاصل به صورت زیر رسم می‌شود:

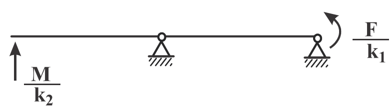


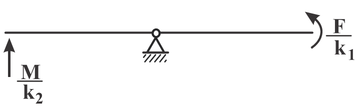
مثال۲: تیر مزدوج شکل مقابل کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۶)



۱) 

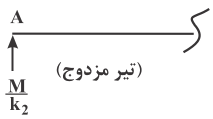
۲) 

۳) 

۴) 

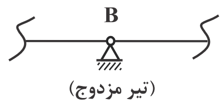
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر و تکیه‌گاه‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم. پس داریم:

نقطه A:

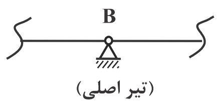


شرایط مرزی استاتیکی $\begin{cases} y_A = 0 & \Rightarrow & M_A = 0 \\ \theta_A = \dfrac{M}{k_2} & \Rightarrow & V_A = \dfrac{M}{k_2} \end{cases}$ شرایط مرزی هندسی

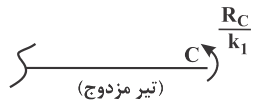
نقطه B:



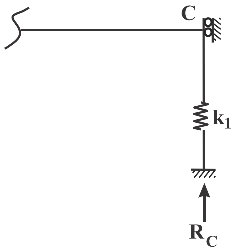
$$\text{شرایط مرزی استاتیکی}\left\{\begin{array}{l} M_B = 0 \\ V_{L(B)} \neq V_{R(B)} \end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} y_B = 0 \\ \theta_{L(B)} \neq \theta_{R(B)} \end{array}\right.\text{شرایط مرزی هندسی}$$



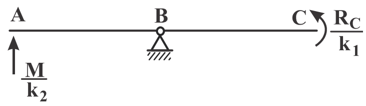
نقطه C:



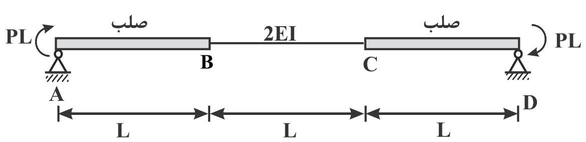
$$\text{شرایط مرزی استاتیکی}\left\{\begin{array}{l} M_C = \frac{R_C}{k_1} \\ V_C = 0 \end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} y_C = \frac{R_C}{k_1} \\ \theta_C = 0 \end{array}\right.\text{شرایط مرزی هندسی}$$



بنابراین تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده به صورت زیر رسم می‌شود:



مثال ۳: مقدار چرخش نقطه A در تیر زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۶)

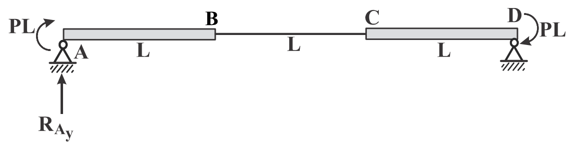


۱) $\frac{PL^2}{72EI}$ ۲) $\frac{PL^2}{36EI}$

۳) $\frac{PL^2}{108EI}$ ۴) $\frac{PL^2}{18EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه چرخش (دوران) نقطه A می‌توان از روش تیر مزدوج با انجام مراحل زیر استفاده نمود:

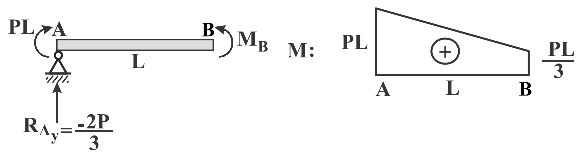
مرحله اول: نمودار لنگر خمشی تیر را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_D = 0 \Rightarrow (R_{A_y} \times 3L) + PL + PL = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_y} \times 3L = -2PL \Rightarrow R_{A_y} = -\frac{2P}{3}$$

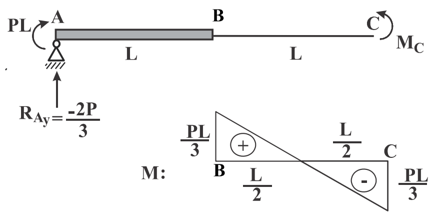
قسمت AB:



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B - PL - (R_{A_y} \times L) = 0$$

$$\Rightarrow M_B = PL + (\frac{-2P}{3} \times L) \Rightarrow M_B = \frac{PL}{3}$$

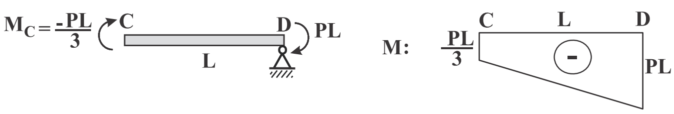
قسمت BC:



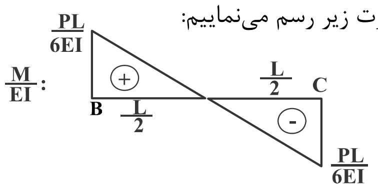
$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = 0 \Rightarrow M_C - PL - (R_{A_y} \times 2L) = 0$$

$$\Rightarrow M_C = PL + (\frac{-2P}{3} \times 2L) \Rightarrow M_C = \frac{-PL}{3}$$

قسمت CD:



مرحله دوم: نمودار $\frac{M}{EI}$ را برای هر قسمت از تیر به صورت زیر رسم می‌نماییم:

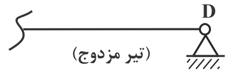


توجه داشته باشید در قسمت AB و CD تیر صلب بوده و صلبیت محوری آن در این قسمت‌ها برابر بی‌نهایت است بنابراین داریم: $\frac{M}{EI} = 0$

مرحله سوم: برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید نقاط اتصال تکیه‌گاه‌ها و تیر را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم، پس داریم:

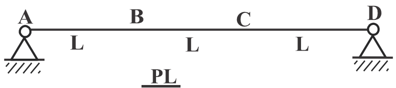
نقطه A: 

شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{matrix} M_A = ۰ \\ V_A \neq ۰ \end{matrix}\right.$ $\begin{matrix} \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix} y_A = ۰ \\ \theta_A \neq ۰ \end{matrix}\right.$ شرایط مرزی هندسی

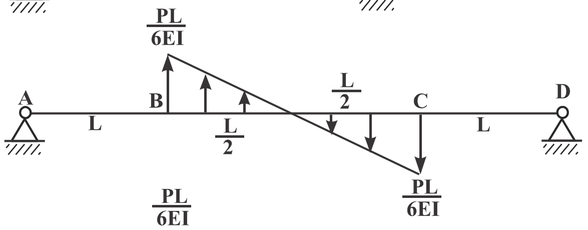
نقطه D: 

شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{matrix} M_D = ۰ \\ V_D \neq ۰ \end{matrix}\right.$ $\begin{matrix} \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix} y_D = ۰ \\ \theta_D \neq ۰ \end{matrix}\right.$ شرایط مرزی هندسی

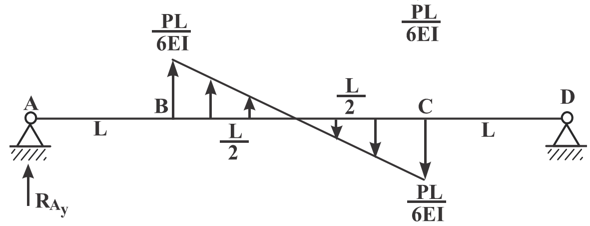
بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت مقابل رسم می‌گردد:



مرحله چهارم: حال با قرار دادن نمودار $\frac{M}{EI}$ برای قسمت‌های مختلف تیر اصلی (بدست آمده از مرحله دوم) بر روی تیر مزدوج (بدست آمده از مرحله سوم) به صورت مقابل داریم:



مرحله پنجم: برای محاسبه چرخش (دوران) نقطه A از تیر اصلی، باید مقدار برش (عکس‌العمل تکیه‌گاهی) نقطه A از روی تیر مزدوج را بدست آوریم، پس می‌توان نوشت:



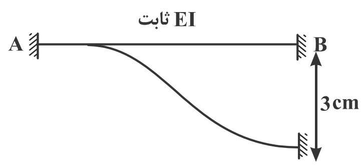
$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_D = ۰ \Rightarrow (R_{A_y} \times ۳L) + \left[(\frac{PL}{۶EI} \times \frac{L}{۲} \times \frac{۱}{۲}) \times (\frac{۲}{۳}(\frac{L}{۲}) + \frac{L}{۲} + L) \right] - \left[(\frac{PL}{۶EI} \times \frac{L}{۲} \times \frac{۱}{۲}) \times (\frac{۱}{۳}(\frac{L}{۲}) + L) \right] = ۰$$

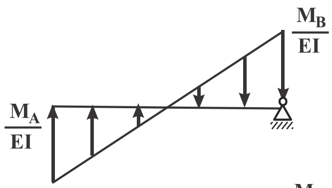
$$(R_{A_y} \times ۳L) + \left[\frac{PL^۲}{۲۴EI} \times \frac{۱۱L}{۶} \right] - \left[\frac{PL^۲}{۲۴EI} \times \frac{۷L}{۶} \right] = ۰ \Rightarrow R_{A_y} \times ۳L = \frac{-PL^۳}{۳۶EI} \Rightarrow R_{A_y} = \frac{-PL^۲}{۱۰۸EI}$$

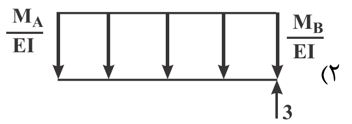
بنابراین داریم:

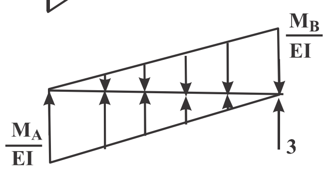
$$\theta_{A(\text{تیر اصلی})} = R_{A_y(\text{تیر مزدوج})} = \frac{-PL^۲}{۱۰۸EI}$$

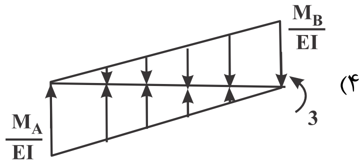
مثال۴: در تیر شکل زیر تکیه‌گاه B، ۳ سانتی‌متر نشست کرده است، تیر مزدوج این تیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۸)



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

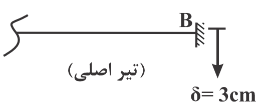
پاسخ: گزینه «۴» برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید دو نقطه A و B را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم:

نقطه A: 

شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{matrix} M_A = ۰ \\ V_A = ۰ \end{matrix}\right.$ $\begin{matrix} \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix} y_A = ۰ \\ \theta_A = ۰ \end{matrix}\right.$ شرایط مرزی هندسی

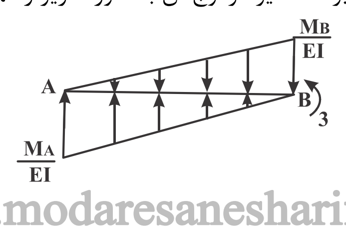
نقطه B: 

شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{matrix} M_B = ۳ \\ V_B = ۰ \end{matrix}\right.$ $\begin{matrix} \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix} y_B = ۳cm \\ \theta_B = ۰ \end{matrix}\right.$ شرایط مرزی هندسی

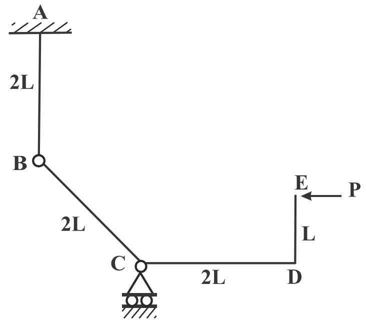


بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت مقابل می‌باشد:

البته با اعمال نمودار لنگر خمشی از تیر اصلی و تقسیم آن بر EI، تیر مزدوج آن به صورت زیر رسم می‌شود.



مثال۵: در سازه مقابل زاویه بین مماس‌های رسم شده به نمودار تغییر شکل سازه بین نقطه B و C چقدر است؟ (EI ثابت) (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۰)



۱) $\frac{PL^{۲}}{۳EI}$

۲) $\frac{۲PL^{۲}}{EI}$

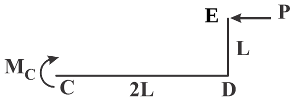
۳) $\frac{۳PL^{۲}}{EI}$

۴) $\frac{PL^{۲}}{EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به منظور محاسبه زاویه بین مماس‌های رسم شده بین دو نقطه B و C می‌توان از روش لنگر سطح و قضیه اول آن به صورت زیر استفاده نمود. پس داریم:

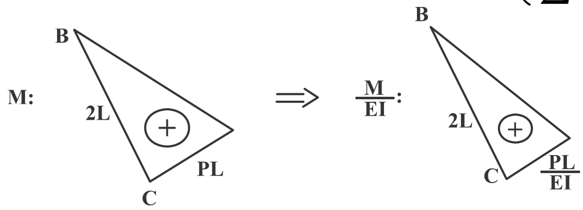
مرحله اول: رسم نمودار لنگر خمشی برای قسمت BC

ابتدا قسمت CDE را جدا کرده و داریم:



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = ۰ \Rightarrow M_C - (P \times L) = ۰ \Rightarrow M_C = PL$$

مرحله دوم: رسم نمودار $\frac{M}{EI}$ برای قسمت BC



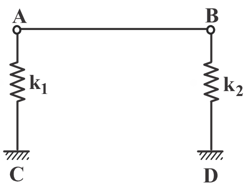
مرحله سوم: محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ برای قسمت BC

$$S_{BC} = \frac{\frac{PL}{EI} \times ۲L}{۲} = \frac{PL^{۲}}{EI}$$

در نتیجه اختلاف شیب (دوران) دو نقطه B و C برابر است با:

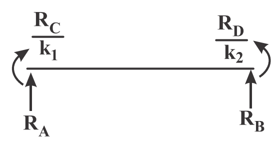
$$\theta_{C/B} = \theta_C - \theta_B = \int_B^C \frac{Mdx}{EI} = S_{BC} \Rightarrow \theta_{C/B} = \frac{PL^{۲}}{EI}$$

مثال۶: تیر مزدوج سازه زیر کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۱)



۱)

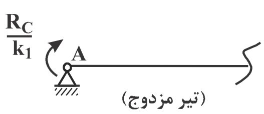

۲)


۳)


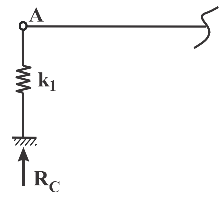
۴)


☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای رسم تیر مزدوج تیر نشان داده شده باید دو نقطه A و B را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم، پس داریم:

نقطه A:

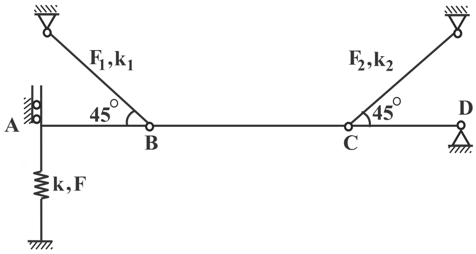


شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{lll} M_A = \frac{R_C}{k_۱} & \Leftarrow & y_A = \frac{R_C}{k_۱} \\ V_A \neq ۰ & \Leftarrow & \theta_A \neq ۰ \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی

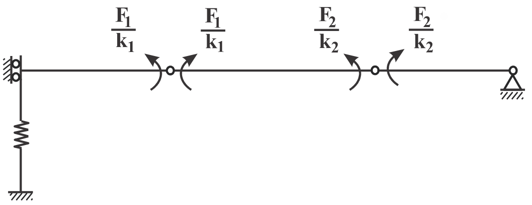


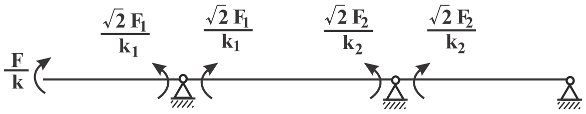
با توجه به اینکه نقطه B مشابه نقطه A است، پس تیر مزدوج تیر نشان داده شده برابر است با:

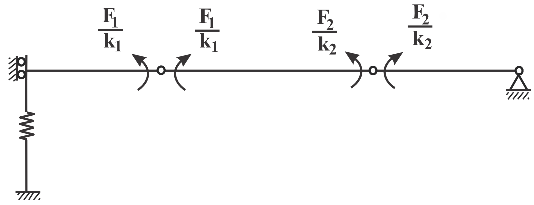
مثال۷: تیر مزدوج سازه نشان داده شده کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۱)



۱)

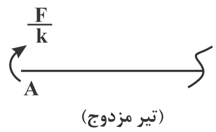

۲)


۳)


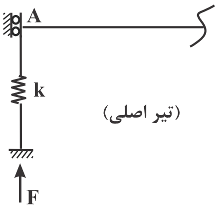
۴)


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جهت رسم تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر به تکیه‌گاه‌ها و مفصل‌ها را از تیـر اصـلی بـه تیـر مـزدوج تغییر دهیم. پس داریم:

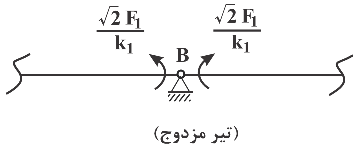
نقطه A:



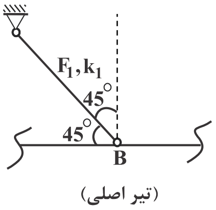
شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} y_A = \frac{F}{k} \Rightarrow M_A = \frac{F}{k} \\ \theta_A = 0 \Rightarrow V_A = 0 \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی



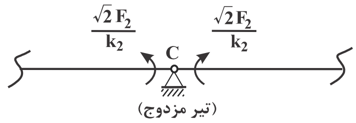
نقطه B:



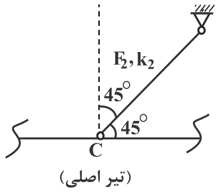
شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} y_B = \frac{F_1}{k_1\cos 45^\circ} \Rightarrow M_B = \frac{F_1}{k_1\cos 45^\circ} \\ \theta_{L(B)} \neq \theta_{R(B)} \Rightarrow V_{L(B)} \neq V_{R(B)} \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی



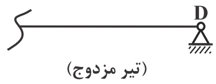
نقطه C:



شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} y_C = \frac{F_2}{k_2\cos 45^\circ} \Rightarrow M_C = \frac{F_2}{k_2\cos 45^\circ} \\ \theta_{L(C)} \neq \theta_{R(C)} \Rightarrow V_{L(C)} \neq V_{R(C)} \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی

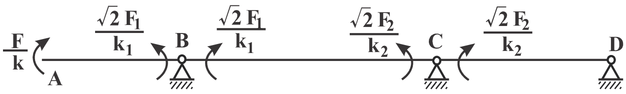


نقطه D:

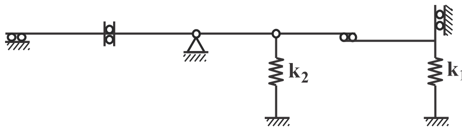


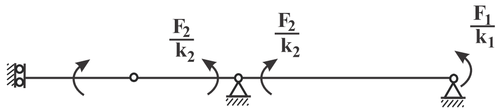
شرایط مرزی استاتیکی $\left\{\begin{array}{l} y_D = 0 \Rightarrow M_D = 0 \\ \theta_D \neq 0 \Rightarrow V_D \neq 0 \end{array}\right\}$ شرایط مرزی هندسی

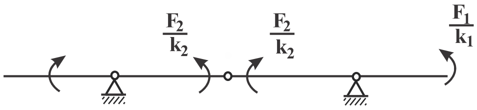
بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت زیر رسم می‌گردد:

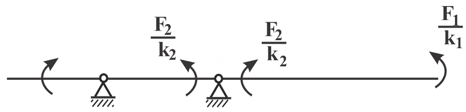


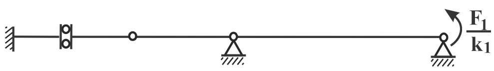
مثال ۸: تیر مزدوج تیر نشان داده شده کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۲)



۱)


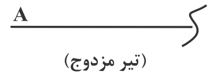
۲)


۳)


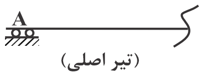
۴)


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به منظور رسم تیر مزدوج برای تیر نشان داده شده باید تمام نقاط اتصال تیر با تکیه‌گاه‌ها و مفصل‌ها را از تیر اصلی به تیر مزدوج تغییر دهیم. پس داریم:

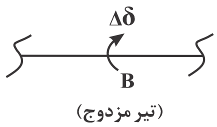
نقطه A:



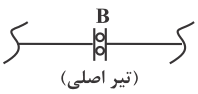
شرایط مرزی استاتیکی
$$\begin{cases} y_A = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ \theta_A = 0 \Rightarrow V_A = 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی هندسی



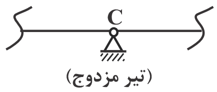
نقطه B:



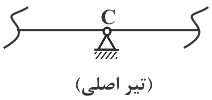
شرایط مرزی استاتیکی
$$\begin{cases} y_{L(B)} \neq y_{R(B)} \Rightarrow M_{L(B)} \neq M_{R(B)} \\ |y_{L(B)} - y_{R(B)}| = \Delta\delta \quad |M_{L(B)} - M_{R(B)}| = \Delta\delta \\ \theta_{L(B)} = \theta_{R(B)} \neq 0 \Rightarrow V_{L(B)} = V_{R(B)} \neq 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی هندسی



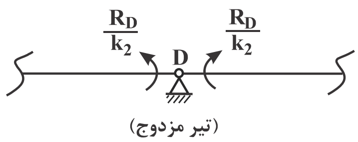
نقطه C:



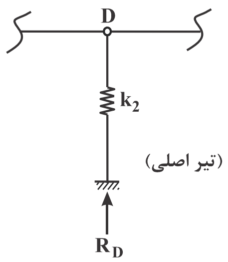
شرایط مرزی استاتیکی
$$\begin{cases} y_C = 0 \Rightarrow M_C = 0 \\ \theta_{L(C)} \neq \theta_{R(C)} \Rightarrow V_{L(C)} \neq V_{R(C)} \end{cases}$$
شرایط مرزی هندسی



نقطه D:

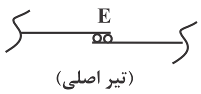


شرایط مرزی استاتیکی
$$\begin{cases} y_D = \frac{R_D}{k_2} \Rightarrow M_D = \frac{R_D}{k_2} \\ \theta_{L(D)} \neq \theta_{R(D)} \Rightarrow V_{L(D)} \neq V_{R(D)} \end{cases}$$
شرایط مرزی هندسی

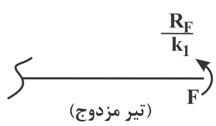


نقطه E:

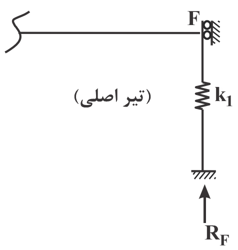
شرایط مرزی استاتیکی
$$\begin{cases} y_{L(E)} = y_{R(E)} \neq 0 \Rightarrow M_{L(E)} = M_{R(E)} \neq 0 \\ \theta_{L(E)} = \theta_{R(E)} \neq 0 \Rightarrow V_{L(E)} = V_{R(E)} \neq 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی هندسی



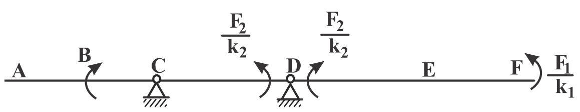
نقطه F:



شرایط مرزی استاتیکی
$$\begin{cases} y_F = \frac{R_F}{k_1} \Rightarrow M_F = \frac{R_F}{k_1} \\ \theta_F = 0 \Rightarrow V_F = 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی هندسی



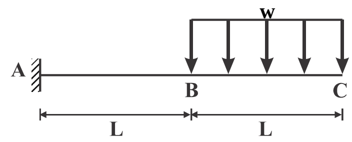
بنابراین تیر مزدوج تیر نشان داده شده به صورت زیر رسم می‌شود:



فصل ششم

« محاسبه خیز و شیب سازه‌های معین با استفاده از روابط حفظی »

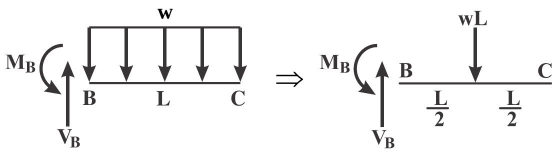
مثال۱: خیز نقطه B در تیر مقابل کدام است؟ (EI ثابت) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۱)



۱) $\frac{5wL^4}{12EI}$ ۲) $\frac{7wL^4}{12EI}$

۳) $\frac{wL^4}{3EI}$ ۴) $\frac{wL^4}{4EI}$

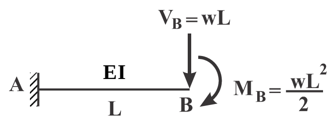
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه خیز نقطه B باید تیر را از نقطه B مقطع زده و به صورت زیر نیرو و لنگر وارد بر نقطه B را تعیین کنیم. پس داریم:



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B - (wL \times \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow M_B = \frac{wL^2}{2}$$

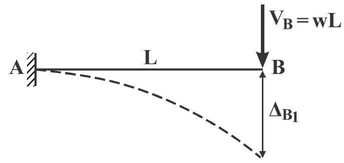
$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B - wL = 0 \Rightarrow V_B = wL$$

حال برای تیر کنسول AB خواهیم داشت:



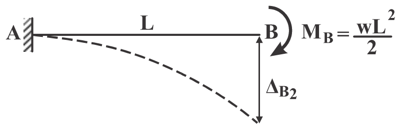
= بارگذاری اول + بارگذاری دوم

بارگذاری اول:



$$\downarrow \Delta_{B_1} = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B_1} = \frac{wL \times L^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B_1} = \frac{wL^4}{3EI}$$

بارگذاری دوم:

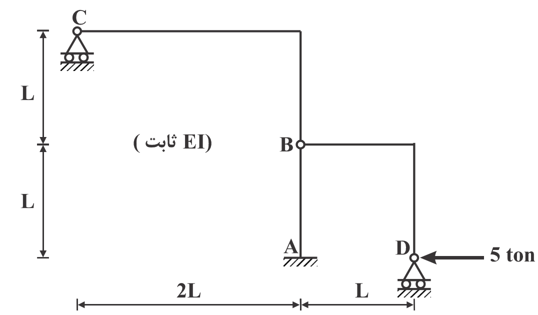


$$\downarrow \Delta_{B_2} = \frac{M_B L^2}{2EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B_2} = \frac{(\frac{wL^2}{2})L^2}{2EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{B_2} = \frac{wL^4}{4EI}$$

بنابراین خیز نقطه B برابر است با:

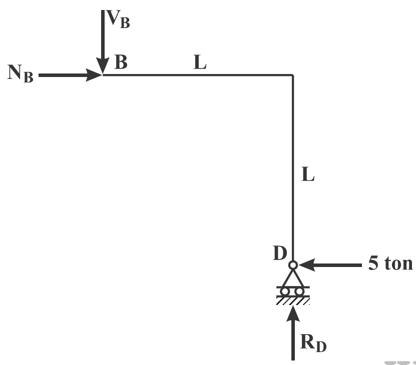
$$\Delta_B = \Delta_{B_1} + \Delta_{B_2} \Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{wL^4}{3EI} + \frac{wL^4}{4EI} = \frac{7wL^4}{12EI}$$

مثال۲: در سازه شکل مقابل تکیه‌گاه C به اندازه ۱cm در جهت قائم نشست کرده و بار افقی در نقطه D بر آن اثر می‌کند. با در نظر گرفتن اثر خمش، جابه‌جایی افقی نقطه B چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)

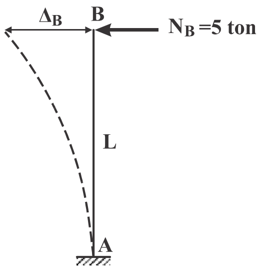


۱) $\frac{5L^3}{EI}$ ۲) $\frac{5L^3}{3EI}$

۳) $\frac{10L^3}{EI}$ ۴) $\frac{5L^3}{3EI} + 1$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه سازه معین است، بنابراین نشست‌های تکیه‌گاهی در سازه نیرو ایجاد نکرده و در نتیجه نشست در نقطه C در تغییر مکان نقطه B تأثیر ندارد. پس تغییر مکان نقطه B تنها در اثر نیروی ۵ton در سازه ایجاد می‌گردد. از طرفی با توجه به اینکه قسمت AB تیر کنسول می‌باشد، با استفاده از روابط حفظی تیرهای کنسولی تغییر مکان نقطه B به‌دست می‌آید.



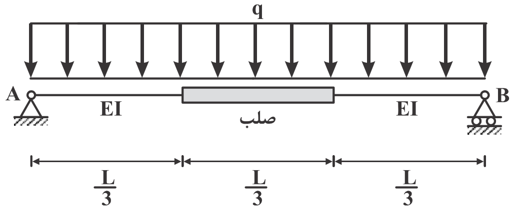
برای این منظور ابتدا قسمت BD را جدا کرده و داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \Rightarrow N_B - ۵ = ۰ \Rightarrow N_B = ۵\text{ton}$$

حال برای تیر کنسول AB داریم:

$$\Delta_B = \frac{N_B L^۳}{۳EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{۵L^۳}{۳EI}$$

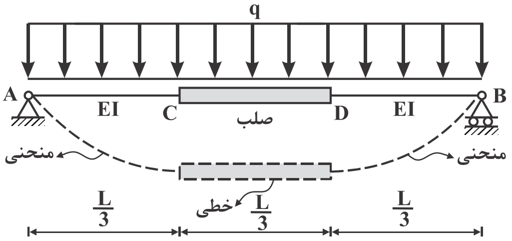
مثال ۳: در تیر شکل مقابل تغییر مکان قائم جسم صلب کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۲)



۱) $\frac{qL^۴}{۱۶۲EI}$ ۲) $\frac{qL^۴}{۶۴۸EI}$

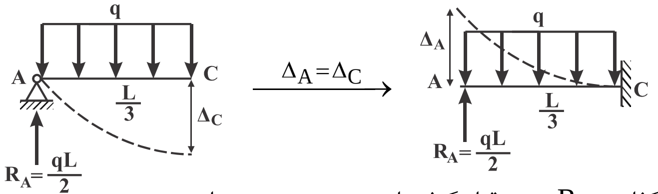
۳) $\frac{qL^۴}{۲۱۶EI}$ ۴) $\frac{qL^۴}{۶۴EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با دقت در تیر مشاهده می‌شود که این تیر متقارن و تحت اثر بارگذاری متقارن نیز قرار گرفته است. بنابراین به علت اینکه قسمت CD صلب است، تغییر شکل آن به صورت خطی و قسمت‌های AC و DB به علت صلبیت خمشی یکسان هر دو قسمت به صورت منحنی تغییر شکل می‌دهند. پس به صورت مقابل داریم:



حال برای محاسبه تغییر مکان قائم جسم صلب CD در نظر داشته باشید که تغییر مکان نقاط C و D برابر است یعنی قسمت CD دوران ندارد $(\theta_C = \theta_D = ۰)$. از طرفی تغییر شکل قسمت‌های AC و DB به نحوی است که می‌توان فرض زیر را برای قسمت‌های AC و CD در نظر گرفت:
نقاط C و D را به صورت تکیه‌گاه گیردار برای تیر کنسول AC و DB فرض نموده و تمام بارگذاری‌های وارد بر قسمت‌های AC و DB را به آن نیز اعمال نماییم. یعنی خواهیم داشت:

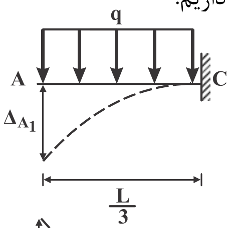
قسمت‌های AC و DB مشابه هستند و کافی است یکی از آنها مثلاً AC را بررسی نماییم.



بارگذاری دوم + بارگذاری اول =

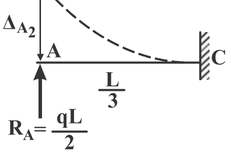
حال برای محاسبه تغییر مکان نقطه A در تیر کنسول AC که تحت اثر دو بارگذاری R_A و q قرار گرفته است، به صورت زیر داریم:

بارگذاری اول:



$$\downarrow \Delta_{A_۱} = \frac{q(\frac{L}{۳})^۴}{۸EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{A_۱} = \frac{qL^۴}{۳^۴ \times ۸EI} = \frac{qL^۴}{(۸۱\times ۸)EI}$$

بارگذاری دوم:



$$\uparrow \Delta_{A_۲} = \frac{R_A(\frac{L}{۳})^۳}{۳EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{A_۲} = \frac{(\frac{qL}{۲})(\frac{L}{۳})^۳}{۳EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{A_۲} = \frac{qL^۴}{(۸۱\times ۲)EI}$$

بنابراین با توجه به اینکه تغییر مکان نهایی نقطه A باید رو به بالا باشد، پس جهت بالا را به عنوان جهت مثبت در نظر گرفته و تغییر مکان نقطه A تحت اثر هر دو بارگذاری برابر است با:

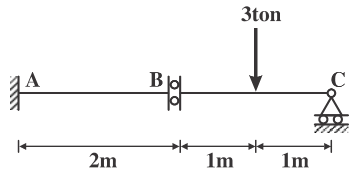
$$\uparrow \Delta_A = \downarrow \Delta_{A_۱} + \uparrow \Delta_{A_۲} \Rightarrow \uparrow \Delta_A = (\frac{-qL^۴}{(۸۱\times ۸)EI}) + (\frac{qL^۴}{(۸۱\times ۲)EI}) \Rightarrow \uparrow \Delta_A = \frac{۳qL^۴}{(۸\times ۸۱)EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_A = \frac{qL^۴}{۲۱۶EI}$$

در نتیجه تغییر مکان نقطه C برابر با تغییر مکان نقطه A است و داریم:

$$\Delta_C = \frac{qL^۴}{۲۱۶EI}$$

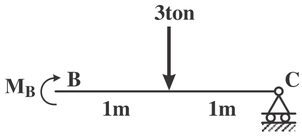
مثال۴: در تیر شکل زیر تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B برحسب mm کدام است؟ ($EI = 1000\ ton.m^2$)

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)



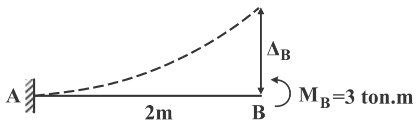
۱) صفر
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه مقدار تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B در نظر داشته باشید که عضو AB از سازه، تیر کنسول است. بنابراین با استفاده از روابط حفظی برای تیرهای کنسول می‌توان مقدار تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B را تعیین نمود. برای این منظور ابتدا قسمت BC را جدا کرده و داریم:



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = 0 \Rightarrow M_B - (3\times 1) = 0 \Rightarrow M_B = 3\ ton.m$$

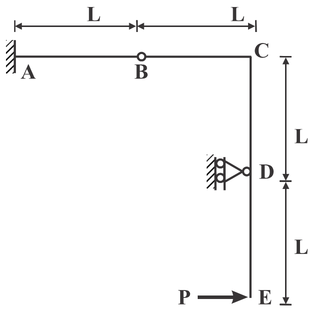
حال با بررسی تیر کنسول AB خواهیم داشت:



$$\uparrow \Delta_B = \frac{M_B L^2}{2EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_B = \frac{3\times 2^2}{2\times 1000} = 0/006m = 6mm$$

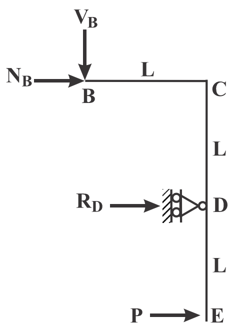
مثال۵: در سازه نشان داده شده، جابه‌جایی قائم مفصل B چقدر است؟ (EI برای کلیه اعضا یکسان است)

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۶)



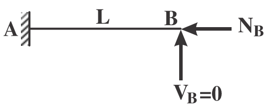
۱) صفر
۲) $\frac{PL^3}{EI}$
۳) $\frac{PL^3}{3EI}$
۴) $\frac{2PL^3}{3EI}$

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که مشاهده می‌شود عضو AB از قاب به صورت تیر کنسول می‌باشد، بنابراین برای محاسبه تغییر مکان قائم مفصل B می‌توان از روابط حفظی تیرهای کنسول استفاده نمود. برای این منظور ابتدا قسمت BCDE را جدا کرده و داریم:



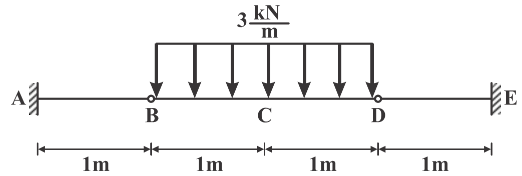
$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B = 0$$

سپس با بررسی تیر کنسول AB خواهیم داشت:



$$\Delta_B = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{0\times L^3}{3EI} = 0$$

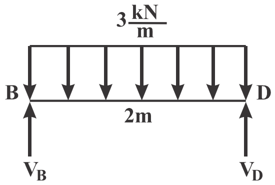
مثال۶: در شکل مقابل، Δ_C را تعیین کنید. (EI ثابت فرض شود) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۶)



۱) $\frac{۱}{EI}$ ۲) $\frac{۱/۵}{EI}$

۳) $\frac{۱/۶۲۵}{EI}$ ۴) $\frac{۰/۶۲۵}{EI}$

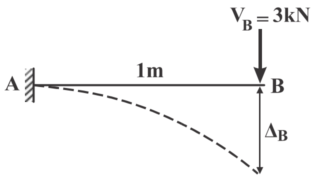
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با کمی دقت در تیر مشاهده می‌شود که می‌توان قسمت BCD را به صورت تیر دو سر مفصل در نظر گرفت، البته نقـاط B و D دارای تغییر مکان به سمت پایین هستند که با توجه به متقارن بودن سازه و بارگذاری، این تغییر مکان‌ها برابر هستند. پس با این موارد می‌توان فـرض کـرد که تیر دو سر مفصل BCD علاوه بر بارگذاری بار گسترده $۳\frac{kN}{m}$ تحت اثر نشست‌های تکیه‌گاهی مفاصل B و D (تغییر مکان قائم نقـاط B و D) قـرار دارد. بنابراین ابتدا باید تغییر مکان نقاط B و D را برای تیرهای کنسول AB و DE به صورت زیر به‌دست آوریم، برای این منظور قسـمت BCD را از تیر جدا کرده و داریم:



$$^{+}\circlearrowleft \sum M_C = ۰ \Rightarrow (V_B \times ۲) - (۳ \times ۲ \times \frac{۲}{۲}) = ۰ \Rightarrow V_B = ۳\,kN$$

$$^{+}\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow V_B + V_C - (۳ \times ۲) = ۰ \Rightarrow ۳ + V_D - ۶ = ۰ \Rightarrow V_D = ۳\,kN$$

حال برای تیر کنسول AB خواهیم داشت:

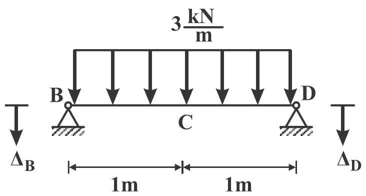


$$\downarrow \Delta_B = \frac{V_B L^۳}{۳EI} = \frac{۳ \times ۱^۳}{۳EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{۱}{EI}$$

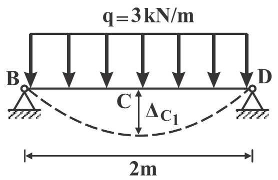
به علت تقارن داریم:

$$\Delta_B = \Delta_D = \frac{۱}{EI}$$

بنابراین برای تیر دو سر مفصل BCD می‌توان نوشت:

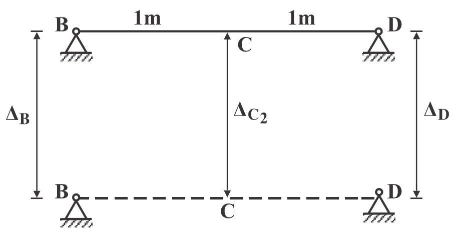


همان‌طور که مشاهده می‌شود تیر دو سر مفصل BCD تحت اثر هم‌زمان بارگذاری با بار گسترده $۳\frac{kN}{m}$ و نشست‌های تکیه‌گاهی Δ_B و Δ_D قرار دارد. پس داریم:



۱) تغییر مکان نقطه C تحت اثر بارگذاری با بار گسترده $۳\frac{kN}{m}$:

$$\downarrow \Delta_{C_۱} = \frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI} = \frac{۵ \times ۳ \times ۲^۴}{۳۸۴\,EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{C_۱} = \frac{۵}{۸EI}$$



۲) تغییر مکان نقطه C تحت اثر نشست‌های تکیه‌گاهی Δ_B و Δ_D:

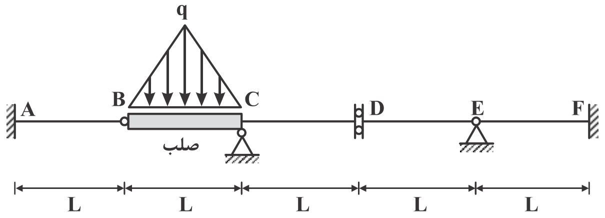
$$\Delta_B = \Delta_D \Rightarrow \downarrow \Delta_{C_۲} = \Delta_B = \Delta_D \Rightarrow \downarrow \Delta_{C_۲} = \frac{۱}{EI}$$

در نهایت تغییر مکان نقطه C برابر است با:

$$\Delta_C = \downarrow \Delta_{C_۱} + \downarrow \Delta_{C_۲} \Rightarrow \Delta_C = \frac{۵}{۸EI} + \frac{۱}{EI} = \frac{۱۳}{۸EI} = \frac{۱/۶۲۵}{EI}$$

◆ ◆ ◆ ◆

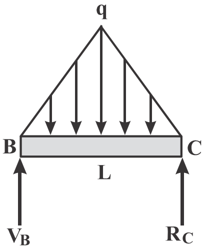
مثال۷: تغییر مکان سمت چپ مفصل برشی D کدام است؟ (EI ثابت) (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۰)



۱) $\frac{qL^4}{6EI}$ ۲) $\frac{qL^4}{3EI}$

۳) $\frac{qL^4}{12EI}$ ۴) $\frac{qL^4}{8EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دقت داشته باشید در این سازه قسمت AB به صورت تیر کنسول بوده که توسط یک مفصل خمشی بـه عضـو صـلب BC متصـل شده است. بنابراین با محاسبه تغییر مکان قائم نقطه B می‌توان تغییر مکان قائم نقطه D را به‌دست آورد.

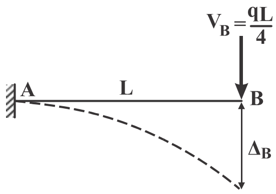


توجه داشته باشید که عضو CD با عضو صلب BC اتصال پیوسته دارد. پس ابتدا عضو صلب BC را جدا کرده و داریم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_C = 0 \Rightarrow (V_B \times L) - (\frac{q \times L}{2} \times \frac{L}{2}) = 0$$

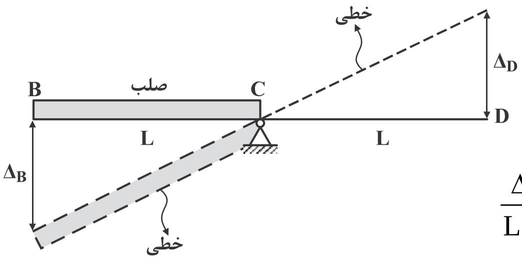
$$\Rightarrow V_B \times L = \frac{qL^2}{4} \Rightarrow V_B = \frac{qL}{4}$$

سپس تغییر مکان قائم نقطه B را به‌دست می‌آوریم:



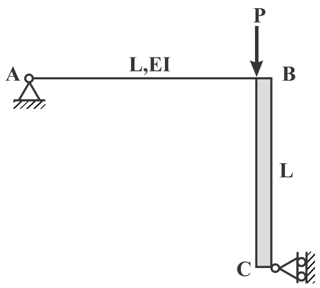
$$\downarrow \Delta_B = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{\frac{qL}{4} \times L^3}{3EI} = \frac{qL^4}{12EI}$$

در ادامه مطابق شکل زیر تغییر مکان قائم نقطه D در سمت چپ مفصل برشی به‌دست می‌آید:



$$\frac{\Delta_B}{L_{BC}} = \frac{\Delta_D}{L_{CD}} \Rightarrow \frac{\Delta_B}{L} = \frac{\Delta_D}{L} \Rightarrow \Delta_D = \Delta_B = \frac{qL^4}{12EI}$$

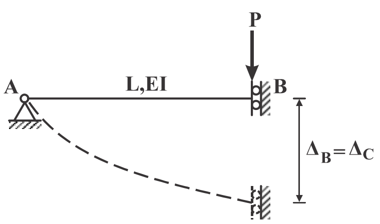
مثال۸: تغییر مکان تکیه‌گاه C کدام است؟ (میله BC صلب است) (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۱)



۱) $\frac{PL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{PL^3}{12EI}$

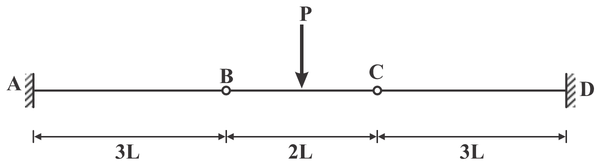
۳) $\frac{PL^3}{24EI}$ ۴) $\frac{PL^3}{48EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با کمی دقت در شکل مشاهده می‌شود که نقطه C می‌تواند تغییر مکـان قائم داشته باشد، از طرفی قسمت BC صلب است و در واقع امکان دوران هـم نمـی‌توانـد داشـته باشد (یعنی $\theta_B = 0$). بنابراین می‌توان گفت که نقطه B همانند یـک تکیـه‌گـاه لغزنـده گیـردار می‌باشد. پس سازه را به صورت یک تیر یک سـر مفصـل و یـک سـر لغزنـده گیـردار AB فـرض می‌نماییم. بنابراین تغییر مکان قائم نقطه B برابر با تغییر مکان نقطه C می‌باشد و داریم:



$$\Delta_B = \Delta_C = \frac{PL^3}{3EI}$$

مثال۹: تیر متقارن روبه‌رو حاوی مفصل در نقاط B و C است. تغییر مکان قائم نقطه B بعد از اعمال بار متمرکز P در وسط بخش BC چقدر است؟ (EI ثابت) (مهندسی هوافضا ـ آزاد ۹۲)



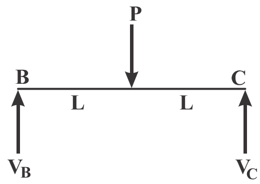
۱) $\frac{۹PL^۳}{EI}$

۲) $\frac{۹PL^۳}{۲EI}$

۳) $\frac{۱۶PL^۳}{۳EI}$

۴) $\frac{۸PL^۳}{۳EI}$

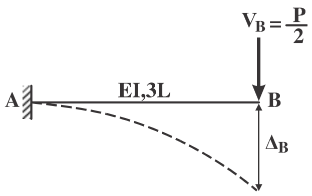
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه قسمت AB از سازه به صورت تیر کنسول است، بنابراین برای محاسبه تغییر مکان قائم نقطه B می‌توان از روابط حفظی تیرهای کنسول استفاده نمود. برای این منظور ابتدا قسمت BC را جدا کرده و به صورت زیر داریم:



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = ۰ \Rightarrow (V_B \times ۲L) - (P \times L) = ۰$$

$$\Rightarrow V_B \times ۲L = PL \Rightarrow V_B = \frac{P}{۲}$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = ۰ \Rightarrow V_B + V_C - P = ۰ \Rightarrow V_C = \frac{P}{۲}$$



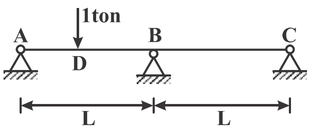
بنابراین برای تیر کنسول AB خواهیم داشت:

$$\downarrow \Delta_B = \frac{V_B(۳L)^۳}{۳EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{(\frac{P}{۲}) \times ۳^۳ L^۳}{۳EI} = \frac{۹PL^۳}{۲EI}$$

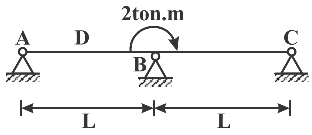
فصل هفتم

«بررسی انرژی کرنشی و قضایای کاستلیانو و بتی ـ ماکسول در سازه‌ها»

مثال۱: تیر ABC تحت بارگذاری (الف) و (ب) قرار گرفته است. اگر تحت اثر بارگذاری (الف)، $\theta_B = ۰/۰۱$ باشد، تغییر مکان نقطه D تحت اثر بارگذاری (ب) چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)



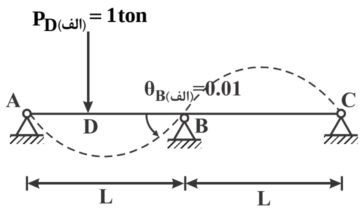
(الف)



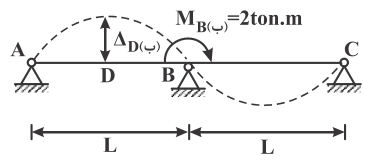
(ب)

۱) ۰/۰۱L
۲) ۰/۰۲L
۳) ۱cm
۴) ۲cm

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مشاهده می‌شود که هندسه تغییر شکل سازه‌ها رسم نشده است. از طرفی در مورد صلبیت خمشی سازه‌ها صحبتی نشده بنابراین فرض می‌کنیم که سازه‌ها دارای صلبیت خمشی یکسانی هستند. پس ابتدا به صورت زیر هندسه تغییر شکل سازه‌ها را رسم کرده و سپس بارگذاری و تغییر شکل‌های آنها را مشخص می‌کنیم:



(الف)



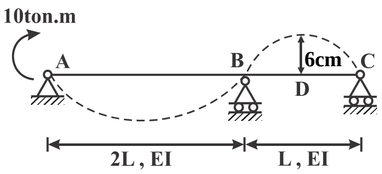
(ب)

بنابراین قضیه بتی ـ ماکسول به صورت مقابل ارائه می‌گردد: $P_{D(\text{الف})} \times \Delta_{D(\text{ب})} = M_{B(\text{ب})} \times \theta_{B(\text{الف})}$

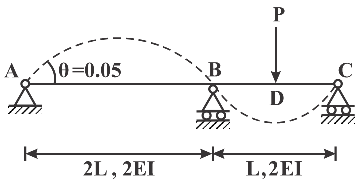
مشاهده می‌شود که دوران نقطه B در سازه (الف) ($\theta_{B(\text{الف})}$) خلاف جهت لنگر نقطه B در سازه (ب) ($M_{B(\text{ب})}$) می‌باشد، پس حاصل ضرب آنها در رابطه منفی است. همچنین تغییر مکان نقطه D در سازه (ب) ($\Delta_{D(\text{ب})}$) خلاف جهت نیروی نقطه D در سازه (الف) ($P_{D(\text{الف})}$) است پس حاصل ضرب آنها در رابطه منفی خواهد بود. بنابراین مقدار تغییر مکان نقطه D در سازه (ب) برابر است با:

$$-(۱ \times \Delta_{D(\text{ب})}) = -(۲ \times ۰/۰۱) \Rightarrow \Delta_D = ۰/۰۲m = ۲cm$$

مثال۲: با توجه به دو سازه مقابل مقدار نیروی P برابر چند ton است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)



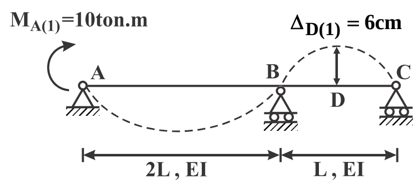
(۱)



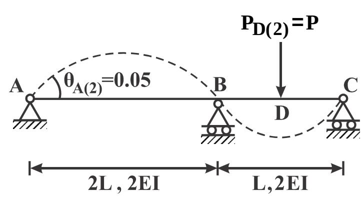
(۲)

۱) $\frac{۵۰}{۳}$
۲) $\frac{۲۰}{۳}$
۳) ۵
۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه صلبیت خمشی سازه (۲) دو برابر سازه (۱) است ($(EI)_۲ = ۲(EI)_۱$) بنابراین مطابق شکل زیر بارگذاری‌ها و تغییر شکل سازه‌ها را مشخص کرده و داریم:



(۱)



(۲)

پس قضیه بتی ـ ماکسول در شرایطی که سازه‌های (۱) و (۲) صلبیت خمشی یکسانی ندارند به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$M_{A(۱)} \times ((EI)_۲ \times \theta_{A(۲)}) = P_{D(۲)} \times ((EI)_۱ \times \Delta_{D(۱)})$$

با توجه به شکل‌های بالا مشاهده می‌شود تغییر مکان نقطه D از سازه (۱) $(\Delta_{D(1)})$ در خلاف جهت نیروی وارد بر نقطه D در سازه (۲) $(P_{D(2)})$ است و در نتیجه علامت حاصل ضرب آنها در رابطه بالا منفی است. از طرفی دوران نقطه A در سازه (۲) $(\theta_{A(2)})$ در خلاف جهت لنگر وارد بر نقطه A در سازه (۱) $(M_{A(1)})$ است پس حاصل ضرب آنها در رابطه بالا منفی خواهد بود. بنابراین به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$-[10\times(2(EI)_1\times 0/05)]=-[P\times((EI)_1\times 0/06m)]\Rightarrow 1=P\times 0/06\Rightarrow P=\frac{1}{0/06}ton=\frac{50}{3}ton$$

مثال۳: انرژی کرنشی تیرهای (۱)، (۲) و (۳) در شکل‌های زیر به ترتیب برابر U_1، U_2 و U_3 می‌باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (EI در تیرها یکسان است) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۵)

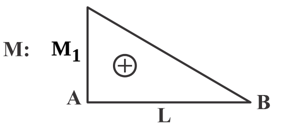
(۱) (۲) (۳)

۱) $U_3=U_1+U_2$ ۲) $U_3<U_1+U_2$ ۳) $U_3>U_1+U_2$ ۴) هیچکدام

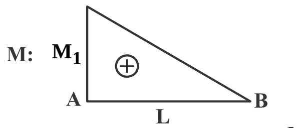
پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه انرژی کرنشی هر یک از تیرهای نشان داده شده توجه داشته باشید که فقط لنگر متمرکز بر آنها وارد شده و انرژی کرنشی این سه تیر ناشی از خمش است. انرژی کرنشی تیرها را می‌توان با استفاده از روش ترسیمی مور و محاسبه مقدار $\int M^2dx$ به‌دست آورد. پس می‌توان برای هر تیر به صورت زیر داشته باشیم:

تیر (۱):

$$M_A=M_1\quad,\quad M_B=0$$

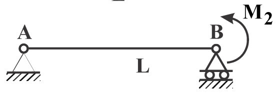


$$\int_A^B M^2dx=\frac{M_1\times M_1\times L}{3}\Rightarrow\int_A^B M^2dx=\frac{M_1^2L}{3}$$

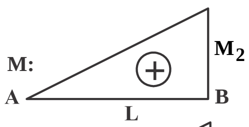


$$U_{M(1)}=\int\frac{M^2dx}{2EI}\Rightarrow U_{M(1)}=(\frac{M_1^2L}{3}\times\frac{1}{2EI})=\frac{M_1^2L}{6EI}$$

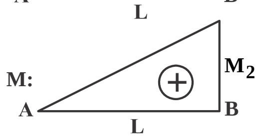
تیر (۲):



$$M_A=0\quad,\quad M_B=M_2$$

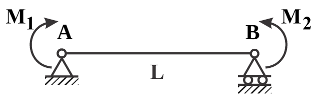


$$\int_A^B M^2dx=\frac{M_2\times M_2\times L}{3}\Rightarrow\int_A^B M^2dx=\frac{M_2^2L}{3}$$



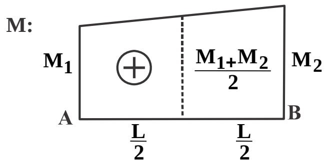
$$U_{M(2)}=\int\frac{M^2dx}{2EI}\Rightarrow U_{M(2)}=(\frac{M_2^2L}{3}\times\frac{1}{2EI})=\frac{M_2^2L}{6EI}$$

تیر (۳):



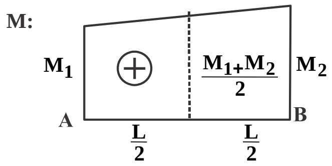
$$M_A=M_1\quad,\quad M_B=M_2$$

(فرض می‌کنیم M_2 بزرگتر از M_1 است)



$$\int_A^B M^2dx=[M_1\times M_1+4(\frac{M_1+M_2}{2})\times(\frac{M_1+M_2}{2})+M_2\times M_2]\times\frac{L}{6}$$

$$\Rightarrow\int_A^B M^2dx=\frac{[M_1^2+(M_1+M_2)^2+M_2^2]L}{6}$$



$$U_{M(3)}=\int\frac{M^2dx}{2EI}\Rightarrow U_{M(3)}=(\frac{(M_1^2+(M_1+M_2)^2+M_2^2)L}{6})\times\frac{1}{2EI}$$

$$\Rightarrow U_{M(3)}=\frac{(M_1^2+(M_1+M_2)^2+M_2^2)L}{12EI}=\frac{2(M_1^2+M_2^2)L}{12EI}+\frac{2M_1M_2L}{12EI}$$

$$\Rightarrow U_{M(3)}=\frac{L}{6EI}[(M_1^2+M_2^2)+M_1M_2]$$

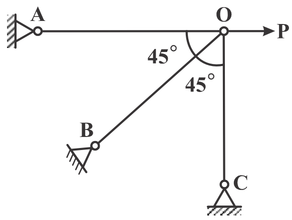
حال با توجه به گزینه‌ها مقادیر انرژی کرنشی به‌دست آمده در تیرهای (۱) و (۲) را با هم جمع کرده و داریم:

$$U_{M(1)}+U_{M(2)}=\frac{M_1^2L}{6EI}+\frac{M_2^2L}{6EI}=\frac{L}{6EI}(M_1^2+M_2^2)$$

در نهایت با مقایسه مقدار $U_{M(1)}+U_{M(2)}$ و $U_{M(3)}$ مشخص است که مقدار $U_{M(3)}$ بزرگتر از $U_{M(1)}+U_{M(2)}$ است و خواهیم داشت:

$$U_{M(3)}>U_{M(1)}+U_{M(2)}$$

مثال۴: انرژی کرنشی خرپای زیر به صورت $U=\frac{AE}{4L}(3\Delta_1^2+3\Delta_2^2+2\Delta_1\Delta_2)$ می‌باشد که در این رابطه Δ_1 و Δ_2 به ترتیب تغییر مکـان افقــی و قائم مفصل O می‌باشد. قدر مطلق نسبت $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ برای بارگذاری داده شده چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۶)



۱) ۳/۵

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود در صورت سؤال انرژی کرنشی خرپا تابعی از تغییر مکان‌های افقی و قائم نقطه O می‌باشد. بنـابراین به منظور تعیین مقدار $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

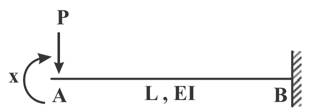
با توجه به شکل سؤال مشخص است که نیروی خارجی در جهت قائم به مفصل O وارد نمی‌گردد بنابراین با توجه به قضیه اول کاستلیانو می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_2}=\text{O نیروی قائم خارجی وارد بر نقطه}\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial \Delta_2}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial \Delta_2}[\frac{AE}{4L}(3\Delta_1^2+3\Delta_2^2+2\Delta_1\Delta_2)]=0$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{4L}\times\frac{\partial}{\partial \Delta_2}(3\Delta_1^2+3\Delta_2^2+2\Delta_1\Delta_2)=0\Rightarrow\frac{AE}{4L}(0+6\Delta_2+2\Delta_1)=0$$

$$\Rightarrow 6\Delta_2+2\Delta_1=0\Rightarrow\Delta_1=-3\Delta_2\Rightarrow\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=-3\Rightarrow\left|\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right|=3$$

مثال۵: مقدار لنگر مجهول x چقدر باشد تا انرژی ذخیره شده در تیر حداقل گردد؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۶)



۱) PL

۲) $2PL$

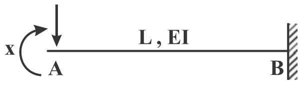
۳) $\frac{PL}{4}$

۴) $\frac{PL}{2}$

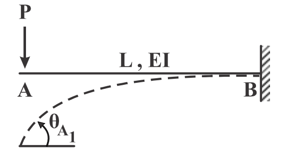
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره شده مقدار لنگر x چقدر باشد تا انرژی ذخیره شده در تیر حداقل گردد، یعنی باید از انرژی کرنشی نسبت به لنگر x مشتق‌گیری جزئی انجام می‌دهیم. پس به صورت زیر برای نقطه A یعنی محل اعمال لنگر x می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}=0 & \text{(حداقل شدن انرژی کرنشی)}\\ \frac{\partial U}{\partial x}=\theta_A & \text{(قضیه دوم کاستلیانو)}\end{cases}\Rightarrow\theta_A=0$$

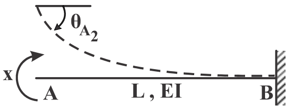
بنابراین کافی است مقدار دوران در تیر نشان داده شده در نقطه A برابر صفر باشد. پس با استفاده از روابط حفظی برای تیرهای کنسول داریم:



= بارگذاری اول + بارگذاری دوم



بارگذاری اول: (دوران در جهت پاد ساعتگرد) $\theta_{A_1}=\frac{-PL^2}{2EI}$

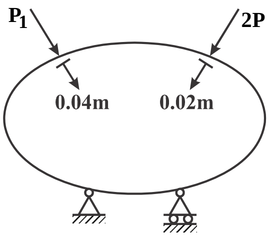


بارگذاری دوم: (دوران در جهت ساعتگرد) $\curvearrowright \theta_{A_2} = \frac{xL}{EI}$

بنابراین دوران نقطه A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید: $\theta_A = \curvearrowleft \theta_{A_1} + \curvearrowright \theta_{A_2} \Rightarrow \theta_A = \frac{-PL^2}{2EI} + \frac{xL}{EI}$

در نتیجه مقدار لنگر x برای اینکه انرژی کرنشی حداقل شود برابر است با: $\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{-PL^2}{2EI} + \frac{xL}{EI} = 0 \Rightarrow \frac{xL}{EI} = \frac{PL^2}{2EI} \Rightarrow x = \frac{PL}{2}$

مثال۶: یک سازه الاستیک خطی مطابق شکل زیر مفروض است. اگر انرژی تغییر شکل این سازه را برحسب نیروهای وارد شده به صورت $U = U(P)$ بیان کنیم، کدام رابطه زیر صحیح است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۹)



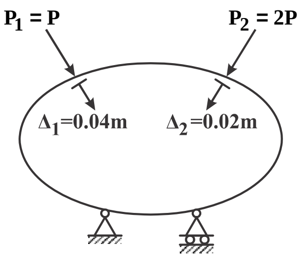
۱) $\frac{\partial U}{\partial P} = 0/08\,m$

۲) $\frac{\partial U}{\partial P} = 0/05\,m$

۳) $\frac{\partial U}{\partial P} = 0/06\,m$

۴) $\frac{\partial U}{\partial P} = 0/04\,m$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره شده انرژی کرنشی سازه تابعی از نیروهای وارد بر آن است ($U = U(P)$)، بنابراین با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو مقدار $\frac{\partial U}{\partial P}$ را تعیین می‌کنیم:

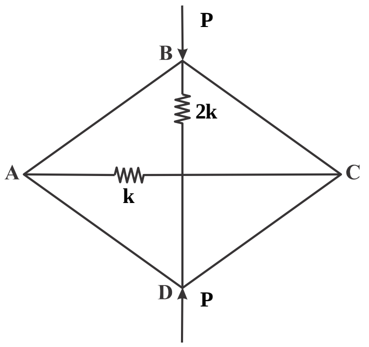


$$U = f(P_1, P_2)$$

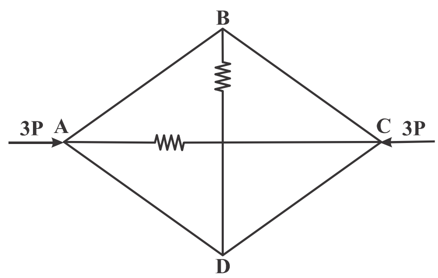
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \left(\frac{\partial U}{\partial P_1} \times \frac{\partial P_1}{\partial P}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial P_2} \times \frac{\partial P_2}{\partial P}\right) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \left(\Delta_1 \times \frac{\partial}{\partial P}(P)\right) + \left(\Delta_2 \times \frac{\partial}{\partial P}(2P)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = (0/04 \times 1) + (0/02 \times 2) = 0/04 + 0/04 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = 0/08\,m$$

مثال۷: اگر تحت بارگذاری نشان داده شده در سازه (الف)، نیروی ایجاد شده در فنر افقی برابر F_0 باشد، آنگاه تحت بارگذاری سازه (ب) چه نیرویی در فنر قائم آن ایجاد می‌شود؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۱)



(الف)



(ب)

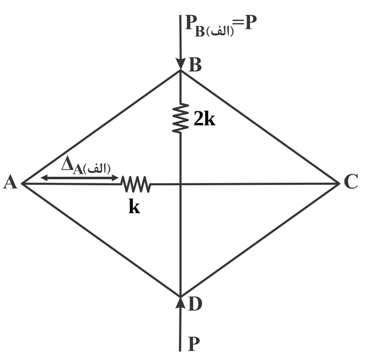
۱) $2F_0$

۲) $4F_0$

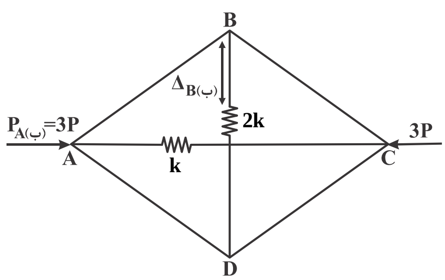
۳) $6F_0$

۴) $8F_0$

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود در سازه‌ها فنرهای انتقالی وجود دارد که در واقع تغییر مکان در راستای نیروی وارد بر آن نقطه را با تغییر شکل فنر می‌توان نشان داد و محاسبه نمود. بنابراین مطابق شکل‌های مقابل نیروها و تغییر مکان‌های آن در هر دو سازه نشان داده می‌شود:



(الف)



(ب)

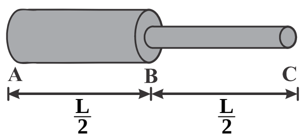
پس قضیه بتی ـ ماکسول به صورت زیر ارائه می‌شود:
$$P_{B(\text{الف})}\times\Delta_{B(\text{ب})}=P_{A(\text{ب})}\times\Delta_{A(\text{الف})}$$

همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود تغییر مکان‌ها و بارهای وارد بر نقطه‌های A و B خلاف جهت هم هستند و در نتیجه حاصل ضرب آنها در رابطه بالا با علامت منفی است. با توجه به اینکه در صورت سؤال اشاره شده که نیروی فنر افقی در سازه (الف) برابر $F_۰$ است، پس تغییر مکان فنر افقی در سازه (الف) یعنی $\Delta_{A(\text{الف})}$ برابر است با:
$$\Delta_{A(\text{الف})}=\frac{F_۰}{k}$$

بنابراین مقدار تغییر مکان فنر قائم در سازه (ب) $(\Delta_{B(\text{ب})})$ به صورت مقابل تعیین می‌شود:
$$-(P\times\Delta_{B(\text{ب})})=-(۳P\times(\frac{F_۰}{k}))\Rightarrow\Delta_{B(\text{ب})}=\frac{۳F_۰}{k}$$

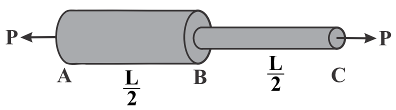
در نهایت مقدار نیروی فنر قائم در سازه (ب) برابر است با:
$$\begin{cases}\Delta_{B(\text{ب})}=\dfrac{۳F_۰}{k}\\[2mm]\Delta_{B(\text{ب})}=\dfrac{F'}{۲k}\end{cases}\Rightarrow\frac{F'}{۲k}=\frac{۳F_۰}{k}\Rightarrow F'=۶F_۰$$

مثال۸: قطر عضو AB را چند برابر قطر BC در نظر بگیریم تا انرژی جذب شده تحت نیروی محوری P برابر $\frac{۵}{۶}$ انرژی ذخیره شده در صورت استفاده از عضو یکنواخت به طول L و مقطع BC باشد؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۳)



۱) ۲
۲) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) قابل محاسبه نیست

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» دقت داشته باشید نیروی متمرکز محوری P به سازه در حالت اول و دوم به صورت زیر اعمال می‌گردد و مقدار انرژی کرنشی در هر حالت تعیین می‌گردد:

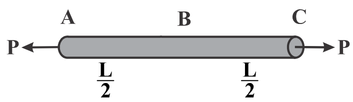


حالت اول: در این حالت مقدار انرژی کرنشی تنها ناشی از نیروی متمرکز محوری P می‌باشد و برابر است با:

$$U_{N(۱)}=\int\frac{N^۲dx}{۲EA}\xrightarrow{\text{به دلیل اینکه نیروی محوری متمرکز است}}U_{N(۱)}=\sum\frac{N^۲L}{۲EA}\Rightarrow U_{N(۱)}=\frac{N_{AB}^۲\times L_{AB}}{۲(EA)_{AB}}+\frac{N_{BC}^۲\times L_{BC}}{۲(EA)_{BC}}$$

$$\Rightarrow U_{N(۱)}=\frac{P^۲\times\frac{L}{۲}}{۲E\times A_{AB}}+\frac{P^۲\times\frac{L}{۲}}{۲E\times A_{BC}}=\frac{P^۲L}{۴E\times A_{AB}}+\frac{P^۲L}{۴E\times A_{BC}}$$

حالت دوم: در این حالت هم مشابه حالت قبل مقدار انرژی کرنشی تنها ناشی از نیروی متمرکز محوری P می‌باشد و داریم:



$$U_{N(۲)}=\sum\frac{N^۲L}{۲EA}\Rightarrow U_{N(۲)}=\frac{N_{AB}^۲\times L_{AB}}{۲(EA)_{AB}}+\frac{N_{BC}^۲\times L_{BC}}{۲(EA)_{BC}}$$

$$\Rightarrow U_{N(۲)}=\frac{P^۲\times\frac{L}{۲}}{۲E\times A_{BC}}+\frac{P^۲\times\frac{L}{۲}}{۲E\times A_{BC}}=\frac{P^۲L}{۴E\times A_{BC}}+\frac{P^۲L}{۴E\times A_{BC}}\Rightarrow U_{N(۲)}=\frac{P^۲L}{۲E\times A_{BC}}$$

توجه داشته باشید در حالت دوم مساحت تمام مقاطع برابر قسمت BC می‌باشد $(A_{AB}=A_{BC})$ در نهایت براساس صورت سؤال داریم:

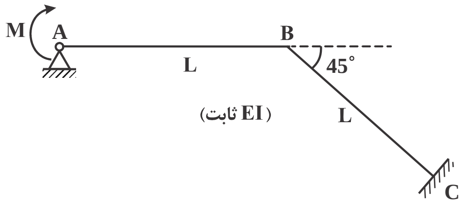
$$U_{N(۱)}=\frac{۵}{۶}U_{N(۲)}\Rightarrow(\frac{P^۲L}{۴E\times A_{AB}}+\frac{P^۲L}{۴E\times A_{BC}})=\frac{۵}{۶}(\frac{P^۲L}{۲E\times A_{BC}})\Rightarrow\frac{P^۲L}{۴E}(\frac{۱}{A_{AB}}+\frac{۱}{A_{BC}})=\frac{۵}{۶}(\frac{P^۲L}{۲E\times A_{BC}})$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{A_{AB}}+\frac{۱}{A_{BC}}=\frac{۵}{۳A_{BC}}\Rightarrow\frac{۱}{A_{AB}}=\frac{۲}{۳A_{BC}}\Rightarrow\frac{A_{BC}}{A_{AB}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{(\frac{\pi D^۲}{۴})_{BC}}{(\frac{\pi D^۲}{۴})_{AB}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{D_{BC}^۲}{D_{AB}^۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow D_{AB}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}D_{BC}$$

فصل هشتم

« بررسی سازه‌های نامعین به روش نیرو و استفاده از روابط حفظی »

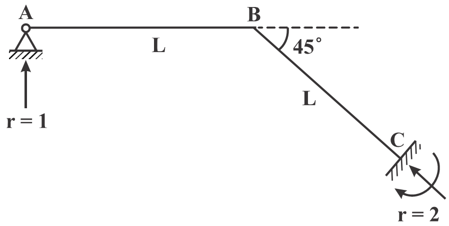
مثال۱: دوران نقطه A در اثر لنگر M در نقطه A چقدر است؟ (از تغییر شکل محوری اعضا صرف‌نظر می شود) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)



۱) $\frac{۲ML}{۵EI}$ ۲) $\frac{۲ML}{۳EI}$

۳) $\frac{۲ML}{۷EI}$ ۴) $\frac{۳ML}{۷EI}$

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود این تیر از اتصال دو قسمت AB و BC به صورت پیوسته در نقطه B تشکیل شده است. بنابراین تیر نامعین است و با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

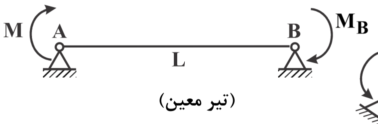


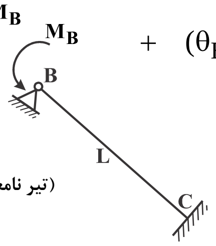
مرحله اول: درجه نامعینی تیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} c = ۰ \\ r = ۲ + ۱ = ۳ \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + ۲) \Rightarrow DI = ۳ - (۰ + ۲) = ۱$$

بنابراین تیر یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل تیر یک‌درجه نامعین ABC به یک تیر معین AB و یک تیر نامعین BC که به صورت پیوسته در نقطه B اتصال دارند، می‌توان تیرها را از نقطه B جدا نمود و برای هر دو تیر در این نقطه یک تکیه‌گاه مفصلی با لنگرهای مختلف‌الجهت M در نظر گرفت و معادله سازگاری آن را به صورت زیر تعریف نمود:





$+ \quad (\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)})$

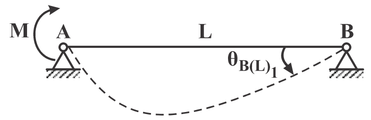
(معادله سازگاری)

مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)}$ به‌صورت زیر داریم:

تیر AB:

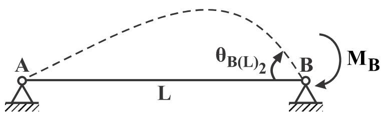
= بارگذاری اول + بارگذاری دوم

بارگذاری اول:



$\theta_{B(L)_۱} = \frac{ML}{۶EI}$

بارگذاری دوم:

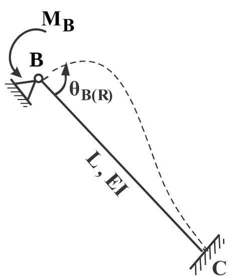


$\theta_{B(L)_۲} = \frac{M_B L}{۳EI}$

بنابراین دوران نقطه B در تیر AB برابر است با:

$$\theta_{B(L)} = \theta_{B(L)_۱} + \theta_{B(L)_۲} \Rightarrow \theta_{B(L)} = \frac{-ML}{۶EI} + \frac{M_B L}{۳EI}$$

تیر BC:



روابط حفظی تیرهای نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سرگیردار: $\theta_{B(R)} = \frac{M_B L}{۴EI}$

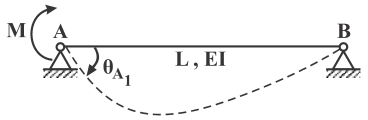
بنابراین با حل معادله سازگاری به‌صورت زیر مقدار لنگر M_B برابر است با:

$$\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)} \Rightarrow \frac{-ML}{۶EI} + \frac{M_B L}{۳EI} = \frac{-M_B L}{۴EI} \Rightarrow \frac{۷M_B L}{۱۲EI} = \frac{ML}{۶EI} \Rightarrow M_B = \frac{۲M}{۷}$$

در نهایت مقدار دوران در نقطه A به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

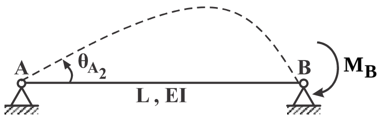
= بارگذاری اول + بارگذاری دوم

بارگذاری اول:



$$\left(\theta_{A_1} = \frac{ML}{3EI}\right.$$

بارگذاری دوم:



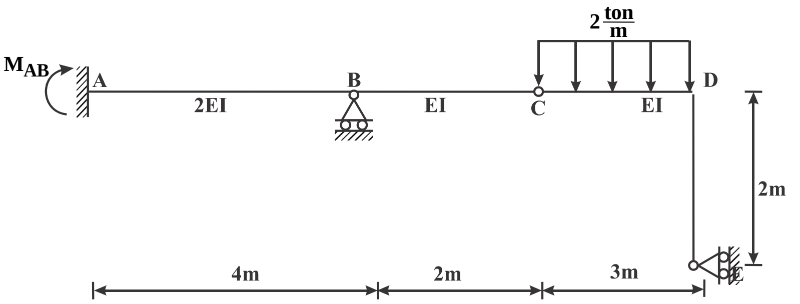
$$\left(\theta_{A_2} = \frac{M_B L}{6EI}\right.$$

$$\Rightarrow \left(\theta_{A_2} = \frac{\frac{2M}{7}\times L}{6EI} = \frac{ML}{21EI}\right.$$

بنابراین دوران نقطه A برابر است با:

$$\theta_A = \left(\theta_{A_1} + \left(\theta_{A_2} \Rightarrow \theta_A = \frac{ML}{3EI} - \frac{ML}{21EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{2ML}{7EI}\right.\right.$$

مثال۲: میزان M_{AB} برحسب ton.m چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)



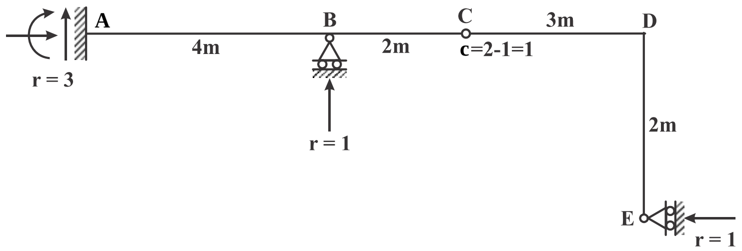
۱) ۱۲

۲) ۶

۳) ۴/۵

۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشخص است که این سازه نامعین است. سپس برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} می‌توان با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر نوشت:

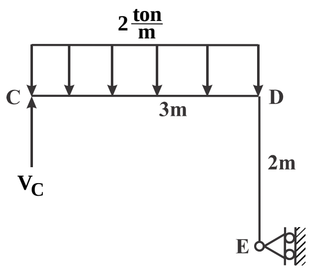


مرحله اول: درجه نامعینی سازه را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} c = 1 \\ k = 0 \\ r = 3+1+1 = 5 \end{cases}$$

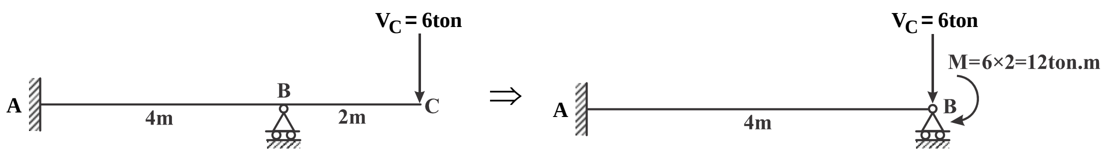
$$\Rightarrow DI = (r+3k)-(c+3) = (5+0)-(1+3) = 1$$

بنابراین این سازه یک درجه نامعین است.



مرحله دوم: حال برای محاسبه مقدار لنگر تکیه‌گاه گیردار A می‌توان ابتدا سازه را از نقطه C جدا نمود و سپس نیروی برش در نقطه C را به نقطه B انتقال داد تا بارگذاری‌های وارد بر تیر نامعین یک سر گیردار و یک سر مفصل AB مشخص گردد:

$$^{+}\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_C - (3\times 2) = 0 \Rightarrow V_C = 6\ \text{ton}$$



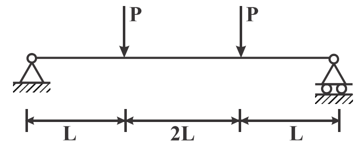
مرحله سوم: بنابراین برای تیر نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار با استفاده از روابط حفظی مربوطه به آن، می‌توان مقدار لنگر M_{AB} را تعیین کرد:

روابط حفظی تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار : $M_{AB} = \frac{M}{2} \Rightarrow M_{AB} = \frac{12}{2} = 6\ \text{ton.m}$

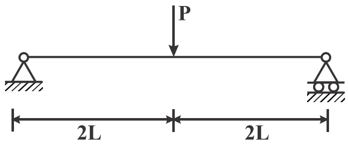
توجه داشته باشید به علت اینکه نیروی V_C دقیقاً روی تکیه‌گاه غلتکی B اعمال شده است و تمام سهم آن به عکس‌العمل تکیه‌گاه C یعنی R_C می‌رسد، بنابراین در محاسبه لنگر تکیه‌گاه A نقشی ندارد.

مثال ۳: اگر تغییر شکل حداکثر مربوط به حالت‌های (الف) و (ب) مطابق زیر داده شده باشد، نیروی به‌وجود آمده در تکیه‌گاه فنری در حالت (ج) چقدر خواهد بود؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

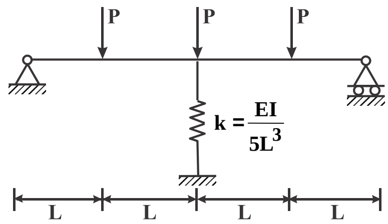
الف) $\Delta_{max} = \frac{۱۱PL^۳}{۶EI}$



ب) $\Delta_{max} = \frac{۴PL^۳}{۳EI}$



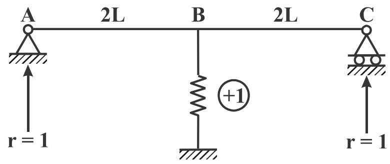
ج)



۱) P ۲) ۲P ۳) $\frac{P}{۲}$ ۴) $\frac{۳P}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با کمی دقت در شکل (ج) مشاهده می‌شود که این سازه نامعین است و از اتصال تیر معین و فنر انتقالی تشکیل شده است. از طرفی مشاهده می‌شود که بارگذاری (ج) برابر با مجموع بارگذاری‌های (الف) و (ب) می‌باشد. پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

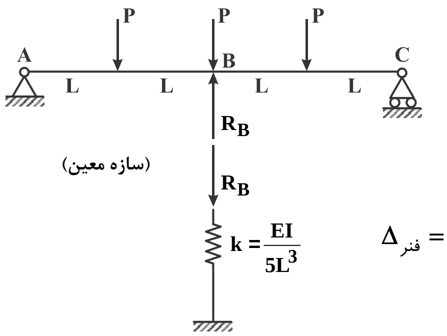
مرحله اول: درجه نامعینی سازه برابر است با:



$$\begin{cases} c = ۰ \\ r = ۱+۱ = ۲ \end{cases} \Rightarrow DI = [r-(c+۲)]+۱ \Rightarrow DI = [۲-(۰+۲)]+۱ = ۱$$

بنابراین این سازه یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل سازه یک درجه نامعین به یک سازه معین کافی است فنر انتقالی را از سازه جدا کرده و معادله سازگاری آن را به صورت زیر تعریف نماییم:



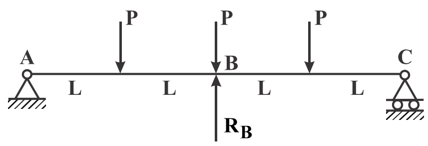
(سازه معین)

$$(\Delta_B = \Delta_{فنر}) \quad +$$

(معادله سازگاری)

$$\Delta_{فنر} = \frac{R_B}{k}$$

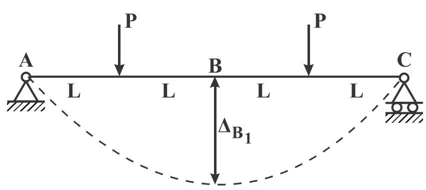
مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\Delta_B = \Delta_{فنر}$ به صورت زیر داریم:



= بارگذاری (الف) + بارگذاری (ب) + R_B بارگذاری

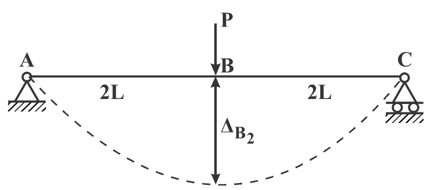
بارگذاری (الف):

$$\downarrow \Delta_{B_۱} = \frac{۱۱PL^۳}{۶EI}$$

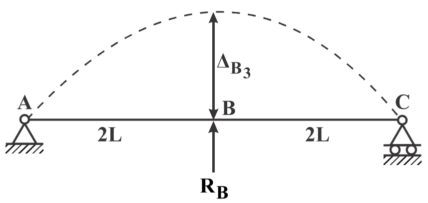


بارگذاری (ب):

$$\downarrow \Delta_{B_۲} = \frac{۴PL^۳}{۳EI}$$



R_B بارگذاری:



$$\uparrow \Delta_{B_۳} = \frac{R_B(۴L)^۳}{۴۸EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{B_۳} = \frac{R_B(۶۴L^۳)}{۴۸EI} \Rightarrow \uparrow \Delta_{B_۳} = \frac{۴R_BL^۳}{۳EI}$$

بنابراین تغییر مکان نقطه B برابر است با:

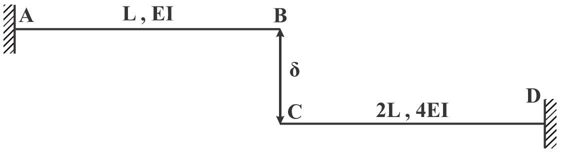
$$\Delta_B = \downarrow \Delta_{B_۱} + \downarrow \Delta_{B_۲} + \uparrow \Delta_{B_۳} \Rightarrow \Delta_B = \frac{۱۱PL^۳}{۶EI} + \frac{۴PL^۳}{۳EI} - \frac{۴R_BL^۳}{۳EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{۱۱PL^۳+۸PL^۳}{۶EI} - \frac{۴R_BL^۳}{۳EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{۱۹PL^۳}{۶EI} - \frac{۴R_BL^۳}{۳EI}$$

حال معادله سازگاری را به صورت زیر حل می‌نماییم:

$$\Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} \Rightarrow \frac{۱۹PL^۳}{۶EI} - \frac{۴R_BL^۳}{۳EI} = \frac{R_B}{\frac{EI}{۵L^۳}} \Rightarrow \frac{۱۹PL^۳}{۶EI} = \frac{۵R_BL^۳}{EI} + \frac{۴R_BL^۳}{۳EI} \Rightarrow \frac{۱۹PL^۳}{۶EI} = \frac{۱۹R_BL^۳}{۳EI} \Rightarrow R_B = \frac{P}{۲}$$

مثال۴: تیر طره‌ای AB و CD مطابق شکل فاصله $\delta = ۰/۰۱L$ از یکدیگر دارند، اگر با استفاده از جک دو تیر به یکدیگر مفصل شوند، عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۱)

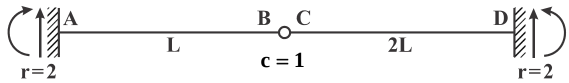


۱) $\frac{۰/۰۱EI}{L^۲}$ ۲) $\frac{۰/۰۲EI}{L^۲}$

۳) $\frac{۰/۰۳EI}{L^۲}$ ۴) $\frac{۰/۰۱EI}{۳L^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که مشاهده می‌شود دو تیر معین AB و CD به فاصله δ از هم قرار دارند و اگر نقاط B و C به هم متصل شوند یک مفصل ایجاد می‌گردد و در این صورت سازه ABCD نامعین می‌شود. پس با انجام مراحل زیر و با استفاده از روش نیرو داریم:

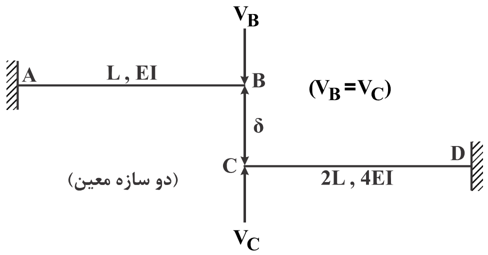
مرحله اول: درجه نامعینی سازه ABCD را بعد از اتصال مفصلی در نقطه‌های B و C به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} c = ۱ \\ r = ۲ + ۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + ۲) \Rightarrow DI = ۴ - (۱ + ۲) = ۱$$

بنابراین سازه حاصل یک درجه نامعین است.

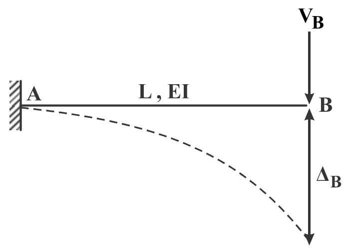
مرحله دوم: برای تبدیل سازه یک درجه نامعین به دو سازه معین که با فاصله δ از هم قرار دارند، معادله سازگاری زیر را تعریف می‌نماییم:



$$+ \quad \underset{\text{(معادله سازگاری)}}{(\Delta_B + \Delta_C = \delta)}$$

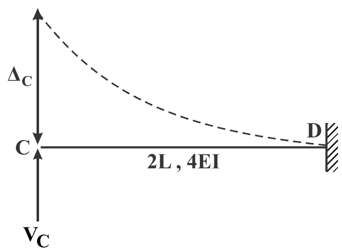
مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\Delta_B + \Delta_C = \delta$ به صورت زیر داریم:

تیر AB:



$$\Delta_B = \frac{V_BL^۳}{۳EI}$$

تیر CD:



$$\Delta_C = \frac{V_C(۲L)^۳}{۳(۴EI)} \Rightarrow \Delta_C = \frac{V_C(۸L^۳)}{۱۲EI}$$

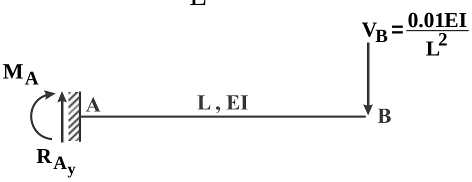
$$\Rightarrow \Delta_C = \frac{۲V_CL^۳}{۳EI}$$

بنابراین با حل معادله سازگاری، مقدار نیروی V_B یا V_C به‌دست می‌آید:

$$\Delta_B + \Delta_C = \delta \Rightarrow \frac{V_BL^۳}{۳EI} + \frac{۲V_CL^۳}{۳EI} = \delta \xrightarrow[\delta = ۰/۰۱L]{V_B = V_C} \frac{V_BL^۳}{۳EI} + \frac{۲V_BL^۳}{۳EI} = ۰/۰۱L \Rightarrow \frac{V_BL^۳}{EI} = ۰/۰۱L$$

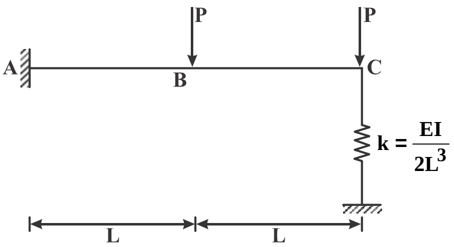
$$\Rightarrow V_B = V_C = \frac{۰/۰۱EI}{L^۲}$$

حال برای محاسبه عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A می‌توان نوشت:



$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{A_y} - V_B = ۰ \Rightarrow R_{A_y} = V_B = \frac{۰/۰۱EI}{L^۲}$$

مثال۵: در شکل زیر نیروی ایجاد شده در فنر کدام است؟ (EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)



۱) P

۲) $\frac{3P}{2}$

۳) $\frac{3P}{8}$

۴) $\frac{3P}{4}$

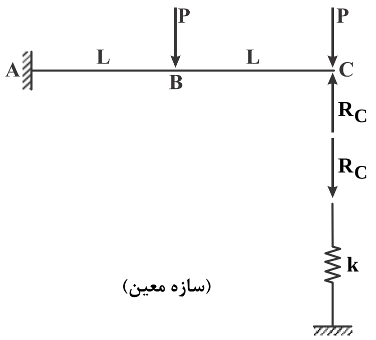
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه نامعین از اتصال یک سازه معین و پایدار ABC با یک فنر انتقالی تشکیل شده است. بنابراین با استفاده از روش نیرو سازه نامعین را به‌صورت زیر تحلیل می‌نماییم:

مرحله اول: درجه نامعینی سازه را به‌صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow DI = [r-(c+2)]+1 \Rightarrow DI = [2-(0+2)]+1 = 1$$

بنابراین سازه یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل این سازه یک درجه نامعین به سازه معین کافی است قید فنر انتقالی را حذف کرده و با قرار دادن عکس‌العمل آن در نقطه C، معادله سازگاری آن را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

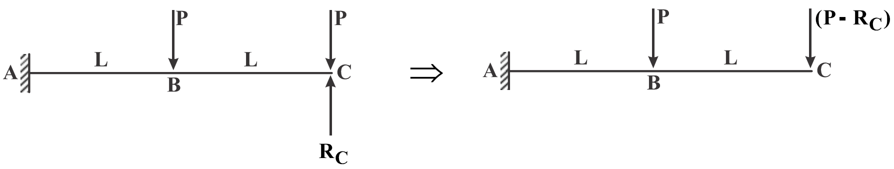


$$+ \qquad (\Delta_C = \Delta_{\text{فنر}})$$

(معادله سازگاری)

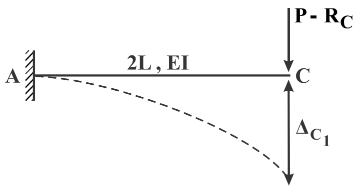
$$\Delta_{\text{فنر}} = \frac{R_C}{k}$$

مرحله سوم: حال معادله سازگاری ($\Delta_C = \Delta_{\text{فنر}}$) را براساس سازه معین حاصل شده به‌صورت زیر حل می‌کنیم:



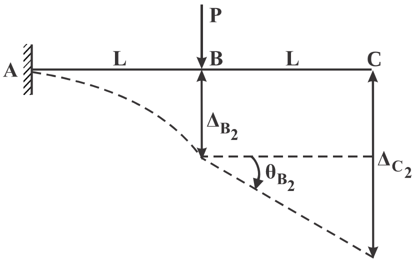
بارگذاری دوم + بارگذاری اول =

بارگذاری اول:



$$\downarrow \Delta_{C_1} = \frac{(P-R_C)(2L^3)}{3EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{C_1} = \frac{8(P-R_C)L^3}{3EI}$$

بارگذاری دوم:



$$\Delta_{B_2} = \frac{PL^3}{3EI} \text{ و } \theta_{B_2} = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\downarrow \Delta_{C_2} = \Delta_{B_2} + (\theta_{B_2} \times L)$$

$$\downarrow \Delta_{C_2} = \frac{PL^3}{3EI} + (\frac{PL^2}{2EI} \times L) = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{2EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_{C_2} = \frac{5PL^3}{6EI}$$

پس تغییر مکان نقطه C برابر است با:

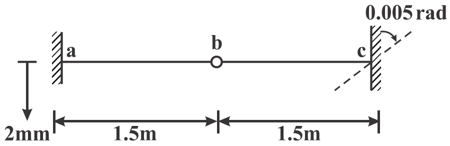
$$\Delta_C = \downarrow \Delta_{C_1} + \downarrow \Delta_{C_2} \Rightarrow \downarrow \Delta_C = \frac{8(P-R_C)L^3}{3EI} + \frac{5PL^3}{6EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_C = \frac{8PL^3}{3EI} - \frac{8R_CL^3}{3EI} + \frac{5PL^3}{6EI} \Rightarrow \downarrow \Delta_C = \frac{7PL^3}{2EI} - \frac{8R_CL^3}{3EI}$$

حال با قرار دادن Δ_C بدست آمده در معادله سازگاری، مقدار نیروی فنر (R_C) تعیین می‌شود:

$$\Delta_C = \Delta_{\text{فنر}} \xrightarrow{\Delta_{\text{فنر}} = \frac{R_C}{k}} \frac{7PL^3}{2EI} - \frac{R_CL^3}{3EI} = \frac{R_C}{\frac{EI}{2L^3}} \Rightarrow \frac{7PL^3}{2EI} - \frac{8R_CL^3}{3EI} = \frac{2R_CL^3}{EI} \Rightarrow \frac{7PL^3}{2EI} = \frac{14R_CL^3}{3EI} \Rightarrow R_C = \frac{3P}{4}$$

مثال۶: در تیر شکل زیر نشست و چرخش تکیه‌گاهی نشان داده شده بر سازه اثر کرده است. لنگر در تکیه‌گاه a چند kg.m است؟ $(EI = ۱۳۵ton.m^۲)$

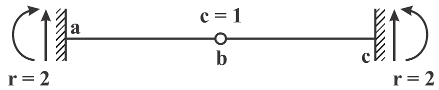
(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)



۱) ۴۰۵
۲) ۴۹۵
۳) ۸۵۵
۴) ۹۴۵

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت در شکل صورت سؤال می‌توان گفت که این تیر نامعین است و از اتصال دو تیر معین ab و bc توسط مفصل خمشی b تشکیل شده است. از طرفی تکیه‌گاه a دارای نشست و تکیه‌گاه c دارای دوران است. بنابراین با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

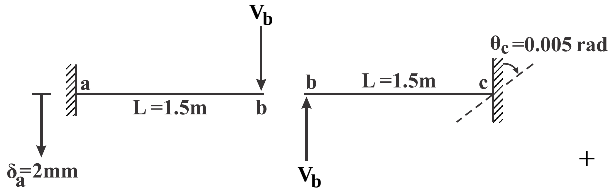
مرحله اول: درجه نامعینی این سازه برابر است با:



$$\begin{cases} c = ۱ \\ r = ۲ + ۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c + ۲) \Rightarrow DI = ۴ - (۱ + ۲) = ۱$$

بنابراین این سازه یک درجه نامعین است.

مرحله دوم: برای تبدیل سازه یک درجه نامعین به دو سازه معین ab و bc کافی است این دو سازه معین را از نقطه c جدا کرده و معادله سازگاری آن را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

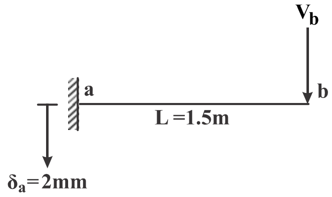


$$+ \quad (\Delta_{b(L)} = \Delta_{b(R)})$$

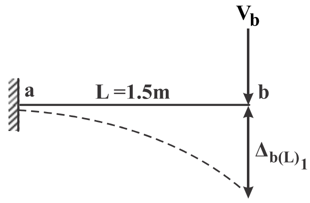
(دو سازه معین) (معادله سازگاری)

مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\Delta_{b(L)} = \Delta_{b(R)}$ به‌صورت زیر داریم:

تیر ab: نشست تکیه‌گاه a + بارگذاری V_b =

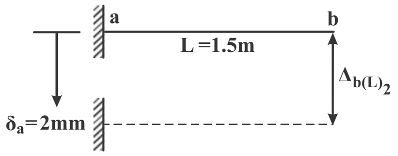


بارگذاری V_b:



$$\downarrow \Delta_{b(L)_۱} = \frac{V_b L^۳}{۳EI}$$

نشست تکیه‌گاه a:

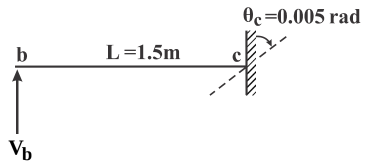


$$\downarrow \Delta_{b(L)_۲} = \delta_a = ۲mm$$
$$\Rightarrow \downarrow \Delta_{b(L)_۲} = ۰/۰۰۲m$$

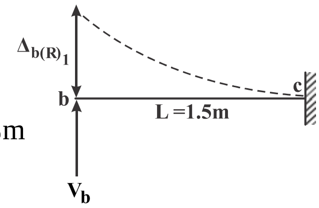
پس تغییر مکان نقطه b در تیر ab برابر است با:

$$\Delta_{b(L)} = \downarrow \Delta_{b(L)_۱} + \downarrow \Delta_{b(L)_۲} \Rightarrow \downarrow \Delta_{b(L)} = \frac{V_b L^۳}{۳EI} + ۰/۰۰۲m$$

تیر bc: دوران تکیه‌گاه c+ بارگذاری V_b =

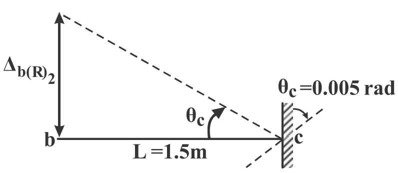


بارگذاری V_b:



$$\uparrow \Delta_{b(R)_۱} = \frac{V_b L^۳}{۳EI}$$

دوران تکیه‌گاه c:

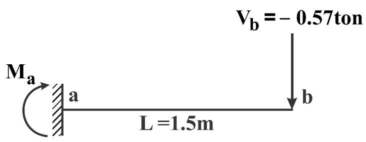


$$\uparrow \Delta_{b(R)_۲} = \theta_c \times L$$
$$\Rightarrow \uparrow \Delta_{b(R)_۲} = ۰/۰۰۵ \times ۱/۵ = ۰/۰۰۷۵m$$

در نهایت با حل معادله سازگاری به‌صورت زیر مقدار نیروی V_b بدست می‌آید:

$$\downarrow \Delta_{b(L)} = \uparrow \Delta_{b(R)} \Rightarrow \frac{V_b L^۳}{۳EI} + ۰/۰۰۲ = \frac{-V_b L^۳}{۳EI} - ۰/۰۰۷۵ \Rightarrow \frac{۲V_b L^۳}{۳EI} = -۰/۰۰۹۵$$

$$\xrightarrow[L=۱/۵m]{EI=۱۳۵ton.m^۲} \frac{۲ \times V_b \times (۱/۵)^۲}{۳ \times ۱۳۵} = -۰/۰۰۹۵ \Rightarrow V_b = -۰/۵۷ton$$

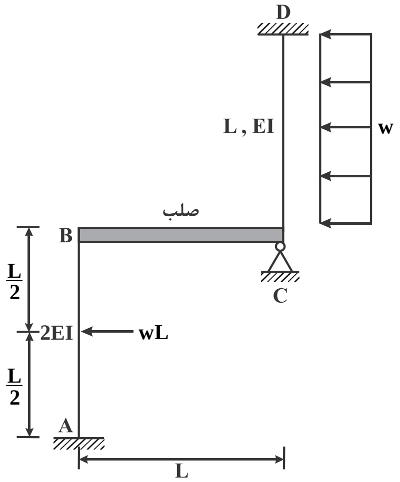


بنابراین لنگر در تکیه‌گاه a برابر است با:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_a = 0 \Rightarrow M_a + (V_b \times L) = 0 \Rightarrow M_a = -V_b \times L$$

$$\Rightarrow M_a = -(-0/57ton)\times 1/5m = 0/855 ton.m \Rightarrow M_a = 855 kg.m$$

مثال۷: لنگر در تکیه‌گاه‌های گیردار A و D کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۷)



۱) $M_A = M_D = \dfrac{wL^2}{8}$

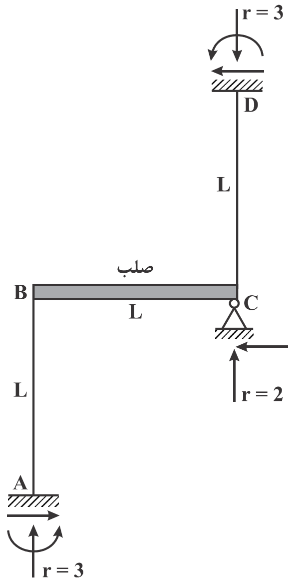
۲) $M_A = \dfrac{wL^2}{8}, M_D = \dfrac{wL^2}{12}$

۳) $M_A = \dfrac{3wL^2}{8}, M_D = \dfrac{3wL^2}{16}$

۴) $M_A = M_D = \dfrac{wL^2}{12}$

پاسخ: گزینه«۲» با کمی‌دقت در شکل صورت سوال مشاهده می‌شود که این قاب نامعین است. پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

مرحله اول: درجه نامعینی سازه را به‌صورت زیر بدست می‌آوریم:

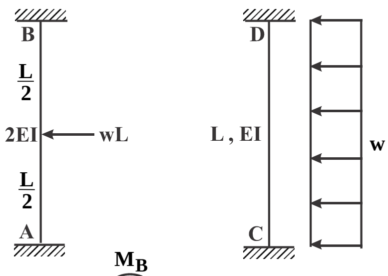


$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 3+3+2 = 8 \\ k = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow DI = (r+3k)-(c+3)$$

$$\Rightarrow DI = (8+0)-(0+3) = 5$$

بنابراین سازه پنج درجه نامعین است.

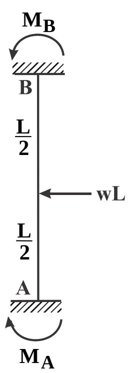


مرحله‌دوم: با کمی دقت در شکل می‌توان گفت نقاط B و C به علت وجود عضو صلب BC و شرایط تکیه‌گاهی در نقاط D و C و هم‌چنین نقطه A، امکان تغییرمکان افقی و قائم و دوران را ندارد و بنابراین می‌توان عضو صلب BC را از سازه حذف و تکیه‌گاه گیردار را برای نقاط B و C به‌صورت روبه‌رو درنظر گرفت:

همان‌طور که مشاهده می‌شود تیرهای نامعین AB و CD به صورت دوسرگیردار می‌باشند.

مرحله‌سوم: بنابراین برای محاسبه لنگر در نقاط A و D داریم:

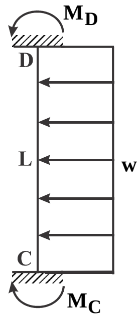
لنگر M_A:



$M_A = M_B = \dfrac{PL}{8}$: روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار

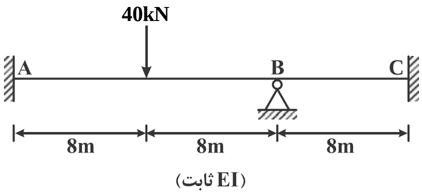
$$\xrightarrow{P=wL} M_A = M_B = \frac{wL \times L}{8} \Rightarrow M_A = M_B = \frac{wL^2}{8}$$

لنگر M_D:



$M_C = M_D = \frac{wL^۲}{۱۲}$: روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار

مثال۸: در سازه شکل مقابل مقدار شیب تیر در محل B کدام گزینه است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۱)

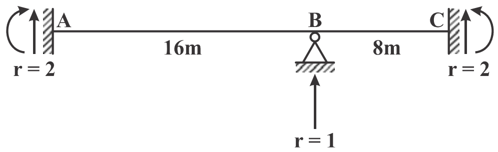


۱) $\frac{۸۰}{۳EI}$ ۲) $\frac{۱۶۰}{۳EI}$

۳) $\frac{۲۴۰}{۳EI}$ ۴) $\frac{۳۲۰}{۳EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تیر نشان داده شده نامعین است، پس با استفاده از روش نیرو و انجام مراحل زیر داریم:

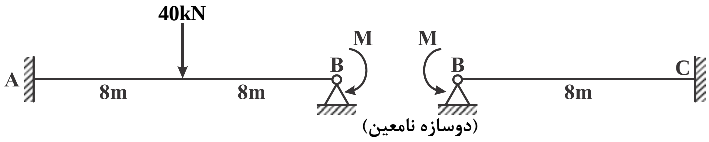
مرحله اول: درجه نامعینی تیر به‌صورت زیر بدست می‌آید:



$$\begin{cases} r = ۲+۲+۱ = ۵ \\ c = ۰ \end{cases} \Rightarrow DI = r - (c+۲) \Rightarrow DI = ۵ - (۰+۲) \Rightarrow DI = ۳$$

بنابراین تیر سه درجه نامعین است.

مرحله دوم: با توجه به اینکه تیر پیوسته است، می‌توان این تیر سه درجه نامعین را به دو تیر نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سر گیردار AB و BC تبدیل نمود. کافی است با اعمال لنگرهای مختلف‌الجهت M در طرفین نقطه B و تعریف معادله سازگاری به‌صورت زیر نوشت:

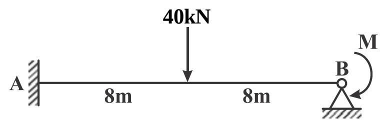


$+ \ (\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)})$

(معادله سازگاری)

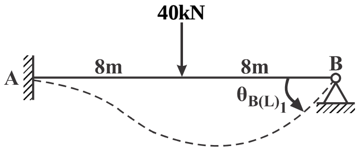
مرحله سوم: برای حل معادله سازگاری $\theta_{B(L)} = \theta_{B(R)}$ به‌صورت زیر داریم:

تیر AB :



= بارگذاری اول + بارگذاری دوم

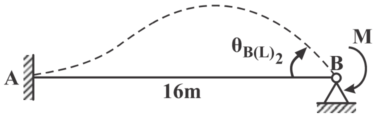
بارگذاری اول:



$\theta_{B(L)_۱} = \frac{PL^۲}{۳۲EI}$: روابط حفظی تیرهای نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سرگیردار

$$\Rightarrow \theta_{B(L)_۱} = \frac{۴۰\times(۱۶)^۲}{۳۲EI} \Rightarrow \theta_{B(L)_۱} = \frac{۳۲۰}{EI}$$

بارگذاری دوم:



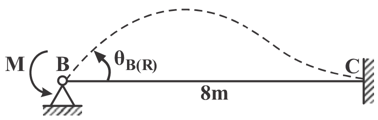
$\theta_{B(L)_۲} = \frac{ML}{۴EI}$: روابط حفظی تیرهای نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سرگیردار

$$\Rightarrow \theta_{B(L)_۲} = \frac{M\times۱۶}{۴EI} \Rightarrow \theta_{B(L)_۲} = \frac{۴M}{EI}$$

پس دوران نقطه B در تیر AB برابر است با:

$$\theta_{B(L)} = \theta_{B(L)_۱} + \theta_{B(L)_۲} \Rightarrow \theta_{B(L)} = -\frac{۳۲۰}{EI} + \frac{۴M}{EI}$$

تیر BC :



$\theta_{B(R)} = \frac{ML}{۴EI}$: روابط حفظی تیرهای نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سرگیردار

$$\Rightarrow \theta_{B(R)} = \frac{M\times۸}{۴EI} \Rightarrow \theta_{B(R)} = \frac{۲M}{EI}$$

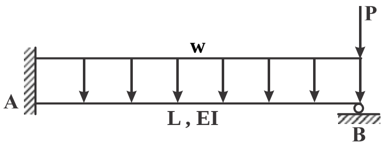
بنابراین با حل معادله سازگاری، مقدار M برابر است با:

$$\theta_{B(L)}=\theta_{B(R)} \Rightarrow -\frac{۳۲۰}{EI}+\frac{۴M}{EI}=\frac{-۲M}{EI} \Rightarrow \frac{۶M}{EI}=\frac{۳۲۰}{EI} \Rightarrow M=\frac{۳۲۰}{۶}=\frac{۱۶۰}{۳}kN.m$$

حال برای محاسبه مقدار شیب در نقطه B داریم:

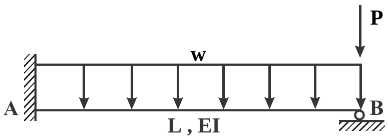
$$\theta_B=\theta_{B(L)}=\theta_{B(R)} \Rightarrow \theta_B=\theta_{B(R)}=\frac{۲M}{EI} \Rightarrow \theta_B=\frac{۲\times\frac{۱۶۰}{۳}}{EI}=\frac{۳۲۰}{۳EI}$$

مثال۹: مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است؟ (مهندسی در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۲)



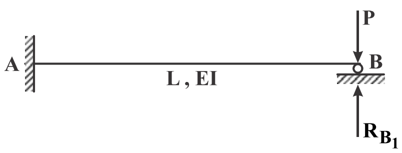
۱) $\frac{۳wL}{۸}+P$
۲) $\frac{wL}{۲}+P$
۳) صفر
۴) $\frac{۳wL}{۲}+P$

پاسخ: گزینه «۱» تیر نشان داده شده تیر نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سرگیردار است که تحت اثر دوبارگذاری مختلف قـرار گرفتـه اسـت. بنـابراین بـا استفاده از روابط حفظی تیرهای نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سرگیردار به‌صورت زیر داریم:



بارگذاری دوم + بارگذاری اول =

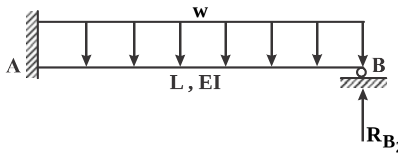
بارگذاری اول:



$$^{+}\uparrow\sum F_y=۰ \Rightarrow R_{B_۱}-P=۰ \Rightarrow \uparrow R_{B_۱}=P$$

دقت داشته باشید در این حالت به علت اینکه بار P دقیقاً روی تکیه‌گاه غلتکی B اعمال شده است، عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A سهمی از این نیرو ندارد.

بارگذاری دوم:



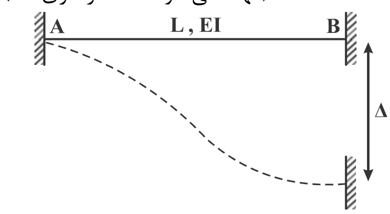
روابط حفظی تیرهای نامعین یک‌سر مفصل و یک‌سرگیردار: $\uparrow R_{B_۲}=\frac{۳wL}{۸}$

بنابراین مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه B برابر است با:

$$R_B=\uparrow R_{B_۱}+\uparrow R_{B_۲} \Rightarrow R_B=P+\frac{۳wL}{۸}$$

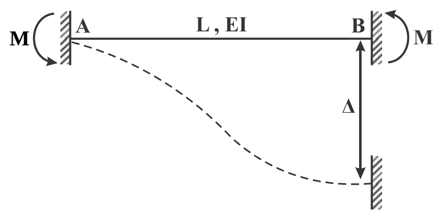
مثال۱۰: در صورتی‌که به تیر دوسرگیردار زیر یک جابه‌جایی قائم Δ اعمال شود، گشتاور تکیه‌گاهی ایجاد شده چقدر خواهد بود؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)



۱) $\frac{۳EI\Delta}{L^۲}$
۲) $\frac{۲EI\Delta}{L^۲}$
۳) $\frac{۶EI\Delta}{L^۲}$
۴) $\frac{EI\Delta}{L^۲}$

پاسخ: گزینه «۳» تیر نشان داده شده دوسرگیردار و نامعین است. بنابراین برای محاسبه مقدار لنگر ایجاد شده از تکیه‌گاه‌ها تحت‌اثر نشست تکیه‌گاهی Δ، می‌توان از روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار به‌صورت زیر استفاده نمود:



روابط حفظی تیرهای نامعین دوسرگیردار: $M=\frac{۶EI\Delta}{L^۲}$

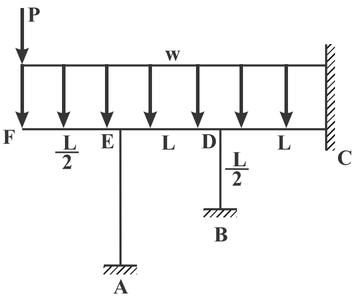
بنابراین مقدار لنگر در تکیه‌گاه‌های A و B برابر است:

$$M=\frac{۶EI\Delta}{L^۲}$$

فصل نهم

«بررسی سازه‌های نامعین به روش تغییر مکان (روش شیب افت)»

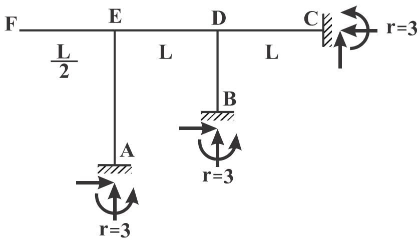
مثال۱: مقدار لنگر در تکیه‌گاه B با کدام رابطه برابر است؟ (EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)



۱) $\frac{2EI\theta_D}{L^2}$ ۲) $\frac{2EI\theta_B}{L}$

۳) $\frac{4EI\theta_B}{L^2}$ ۴) $\frac{4EI\theta_D}{L}$

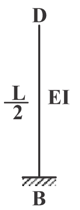
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل صورت سؤال به نظر می‌رسد که سازه نـامعین اسـت، پـس ابتدا درجه نامعینی سازه را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:



$$\begin{cases} r = 3+3+3 = 9 \\ c = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow DI = (r+3k)-(c+3) \Rightarrow DI = (9+0)-(0+3) = 6$$

بنابراین سازه ۶ درجه نامعین است.

همان‌طور که مشاهده شد درجه نامعین سازه زیاد است، پس برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه B از روش شیب افت به صورت مقابل داریم:
با توجه به اینکه نقطه B در قسمت BD قرار دارد، پس قسمت BD را به صورت مقابل از سازه جدا کرده و داریم:

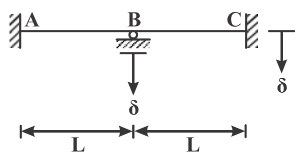


$$\begin{cases} \theta_B = 0 & (\text{تکیه‌گاه گیردار } B) \\ FEM_{BD} = 0 & (\text{قسمت } BD \text{ فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BD} = 0 & (\text{نقاط } B \text{ و } D \text{ تغییر مکان افقی ندارند}) \\ (EI)_{BD} = EI \;\text{ و }\; L_{BD} = \frac{L}{2} \end{cases}$$

بنابراین براساس رابطه روش شیب افت داریم:

$$M_{BD} = \frac{2(EI)_{BD}}{L_{BD}}(2\theta_B + \theta_D - 3\psi_{BD}) + FEM_{BD} \Rightarrow M_{BD} = \frac{2EI}{\frac{L}{2}}(0+\theta_D-0)+0 \Rightarrow M_{BD} = \frac{4EI\theta_D}{L}$$

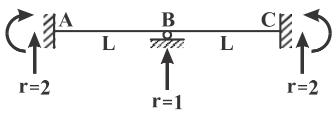
مثال۲: در تیر ممتد شکل مقابل با صلبیت خمشی ثابت EI تحت نشست‌های تکیه‌گاهی نشان داده شده، لنگر M_{AB} کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)



۱) $\frac{3EI\delta}{L^2}$ ۲) $\frac{6EI\delta}{L^2}$

۳) $\frac{7/5EI\delta}{L^2}$ ۴) $\frac{4/5EI\delta}{L^2}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا درجه نامعینی تیر را به‌دست می‌آوریم:



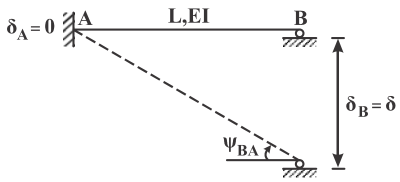
$$\begin{cases} c = 0 \\ r = 2+2+1 = 5 \end{cases} \Rightarrow DI = r-(c+2) \Rightarrow DI = 5-(0+2) = 3$$

بنابراین تیر ۳ درجه نامعین است. پس برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} در این تیر می‌توان از روش شیب افت به‌صورت زیر استفاده نمود:
توجه داشته باشید تیر در نقطه B پیوسته است، پس با تعریف معادله تعادل لنگر در نقطه B به صورت زیر، ابتدا مقدار دوران نقطه B را به‌دست می‌آوریم:

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{BA} = 0$$

حال برای محاسبه مقادیر لنگر M_{BA} و M_{BC} با استفاده از رابطه شیب افت می‌توان نوشت:

قسمت BA:

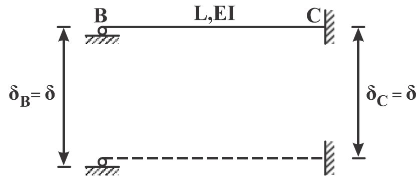


$$\begin{cases} \theta_A = ۰ & (\text{تکیه‌گاه گیردار } A) \\ FEM_{BA} = ۰ & (\text{قسمت } BA \text{ فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BA} = \dfrac{\delta_B - \delta_A}{L_{BA}} \Rightarrow \psi_{BA} = \dfrac{\delta - ۰}{L} = \dfrac{\delta}{L} & (\text{جهت چرخش محور عضو ساعتگرد است}) \\ L_{BA} = L \text{ و } (EI)_{BA} = EI \end{cases}$$

$$M_{BA} = \frac{۲(EI)_{BA}}{L_{BA}}(۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B + ۰ - ۳(\frac{\delta}{L})) + ۰$$

$$\Rightarrow M_{BA} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B + ۰ - ۳(\frac{\delta}{L})) + ۰ \Rightarrow M_{BA} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B - \frac{۳\delta}{L})$$

قسمت BC:



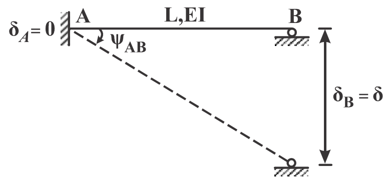
$$\begin{cases} \theta_C = ۰ & (\text{تکیه‌گاه گیردار } C) \\ FEM_{BC} = ۰ & (\text{قسمت } BC \text{ فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{BC} = \dfrac{\delta_B - \delta_C}{L_{BC}} \Rightarrow \psi_{BC} = \dfrac{\delta - \delta}{L} = ۰ \\ L_{BC} = L \text{ و } (EI)_{BC} = EI \end{cases}$$

$$M_{BC} = \frac{۲(EI)_{BC}}{L_{BC}}(۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}) + FEM_{BC} \Rightarrow M_{BC} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B + ۰ - ۰) + ۰ \Rightarrow M_{BC} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B)$$

در نهایت با حل معادله تعادل لنگر در نقطه A به صورت زیر مقدار θ_B تعیین می‌شود:

$$M_{BC} + M_{BA} = ۰ \Rightarrow \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B) + \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B - \frac{۳\delta}{L}) = ۰ \Rightarrow \frac{۲EI}{L}(۲\theta_B - \frac{۳\delta}{L} + ۲\theta_B) = ۰ \Rightarrow ۴\theta_B - \frac{۳\delta}{L} = ۰ \Rightarrow \theta_B = \frac{۳\delta}{۴L}$$

حال برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} مطابق شکل زیر داریم:

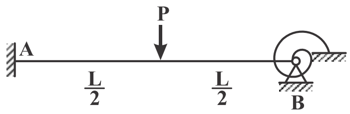


$$\begin{cases} \theta_A = ۰ & (\text{تکیه‌گاه گیردار } A) \quad \theta_B = \dfrac{۳\delta}{۴L} \\ FEM_{AB} = ۰ & (\text{قسمت } AB \text{ فاقد بارگذاری است}) \\ \psi_{AB} = \dfrac{\delta_B - \delta_A}{L_{AB}} \Rightarrow \psi_{AB} = \dfrac{\delta - ۰}{L} = \dfrac{\delta}{L} & (\text{جهت چرخش محور عضو ساعتگرد است}) \\ L_{AB} = L \text{ و } (EI)_{AB} = EI \end{cases}$$

$$M_{AB} = \frac{۲(EI)_{AB}}{L_{AB}}(۲\theta_A + \theta_B - ۳\psi_{AB}) + FEM_{AB} \Rightarrow M_{AB} = \frac{۲EI}{L}(۰ + \frac{۳\delta}{۴L} - ۳(\frac{\delta}{L})) + ۰ \Rightarrow M_{AB} = \frac{۲EI}{L}(\frac{۳\delta}{۴L} - \frac{۳\delta}{L})$$

$$\Rightarrow M_{AB} = \frac{۲EI}{L}(\frac{-۹\delta}{۴L}) \Rightarrow M_{AB} = \frac{-۹EI\delta}{۲L^۲} = -\frac{۴/۵EI\delta}{L^۲}$$

مثال۳: در تیر مقابل لنگر در فنر پیچشی واقع در تکیه‌گاه B کدام است؟ ($k_\theta = \frac{۲EI}{L}$ و EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)

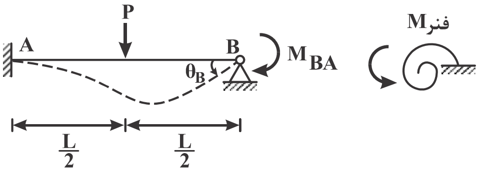


۱) $\frac{PL}{۱۲}$　　۲) $\frac{PL}{۱۶}$

۳) $\frac{PL}{۲۴}$　　۴) $\frac{PL}{۸}$

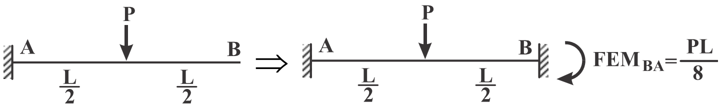
پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود این تیر نامعین است. از طرفی فنر دورانی در تکیه‌گاه مفصلی B قرار گرفته است. بنابراین با استفاده از روش شیب افت به صورت زیر داریم:

ابتدا فنر دورانی را از نقطه B جدا کرده و معادله تعادل لنگر و دوران را در نقطه B تعریف می‌کنیم:



$$\begin{cases} M_{BA} = M_{فنر} & \text{(جهت ساعتگرد)} \\ \theta_B = -\theta_{فنر} & \text{(جهت پادساعتگرد)} \end{cases}$$

حال برای محاسبه مقدار لنگر M_{AB} با استفاده از روش شیب افت داریم:



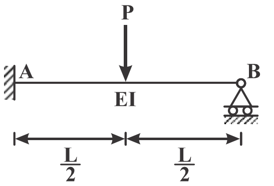
$$\begin{cases} \theta_A = ۰ \text{ (تکیه‌گاه گیردار A) و } \theta_B = -\theta_{فنر} \\ FEM_{BA} = \frac{PL}{۸} \\ \psi_{BA} = ۰ \quad \text{(نقاط A و B تغییر مکان قائم ندارند)} \\ L_{BA} = L \text{ و } (EI)_{BA} = EI \end{cases}$$

$$M_{BA} = \frac{۲(EI)_{BA}}{L_{BA}}(۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{۲EI}{L}(۲(-\theta_{فنر}) + ۰ - ۰) + \frac{PL}{۸}$$

$$\Rightarrow M_{BA} = \frac{-۴EI\theta_{فنر}}{L} + \frac{PL}{۸} \xrightarrow[M_{BA}=M_{فنر}]{\theta_{فنر}=\frac{M_{فنر}}{k_\theta}} M_{فنر} = -\frac{۴EI(\frac{M_{فنر}}{k_\theta})}{L} + \frac{PL}{۸} \Rightarrow M_{فنر} = \frac{-۴EIM_{فنر}}{k_\theta L} + \frac{PL}{۸}$$

$$\xrightarrow{k_\theta=\frac{۲EI}{L}} M_{فنر} = \frac{-۴EIM_{فنر}}{\frac{۲EI}{L} \times L} + \frac{PL}{۸} \Rightarrow M_{فنر} = -۲M_{فنر} + \frac{PL}{۸} \Rightarrow ۳M_{فنر} = \frac{PL}{۸} \Rightarrow M_{فنر} = \frac{PL}{۲۴}$$

مثال ۴: اگر تکیه‌گاه B به اندازه ۱cm نشست پیدا کند، لنگر M_A را حساب کنید. (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)



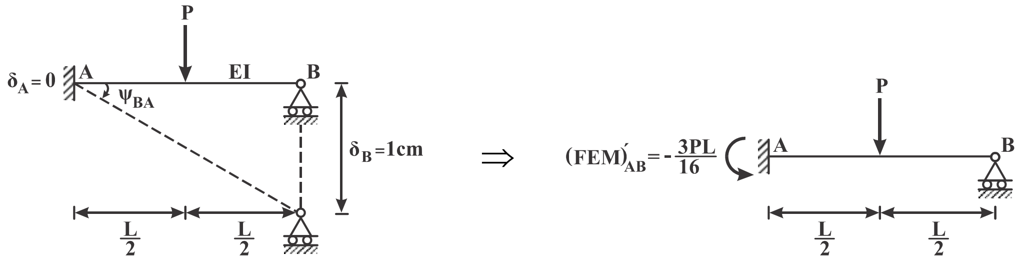
۱) $M_A = \frac{-PL}{۸} - \frac{۳EI}{L^۲}$

۲) $M_A = \frac{-۳PL}{۱۶} - \frac{۶EI}{L^۲}$

۳) $M_A = \frac{-۳PL}{۱۶} - \frac{۳EI}{L^۲}$

۴) $M_A = \frac{-PL}{۸} - \frac{۶EI}{L^۲}$

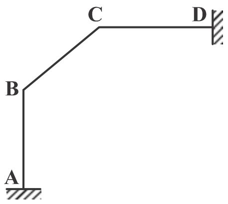
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که مشاهده می‌شود این تیر یک سرگیردار و یک سر مفصل است که نامعین می‌باشد. بنابراین با توجه به اینکه تکیه‌گاه B به اندازه ۱cm نشست دارد، می‌توان با استفاده از حالت خاص اول در روش شیب افت به صورت زیر مقدار لنگر M_A را به‌دست آورد:



$$\begin{cases} \theta_A = ۰ & \text{(تکیه‌گاه‌گیردار A)} \\ (FEM)'_{AB} = \frac{-۳PL}{۱۶} \\ \psi_{AB} = \frac{\delta_B - \delta_A}{L_{AB}} \Rightarrow \psi_{AB} = \frac{۱-۰}{L} = \frac{۱}{L} & \text{(جهت چرخش محور عضو ساعتگرد است)} \\ L_{AB} = L \text{ و } (EI)_{AB} = EI \end{cases}$$

$$M_{AB} = \frac{۳(EI)_{AB}}{L_{AB}}(\theta_A - \psi_{AB}) + (FEM)'_{AB} \Rightarrow M_{AB} = \frac{۳EI}{L}(۰ - \frac{۱}{L}) + (\frac{-۳PL}{۱۶}) \Rightarrow M_{AB} = \frac{-۳EI}{L^۲} - \frac{۳PL}{۱۶}$$

مثال ۵: سازه شکل مقابل کلاً چند Δ مستقل دارد؟ (جابه‌جایی هر گره: Δ) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)



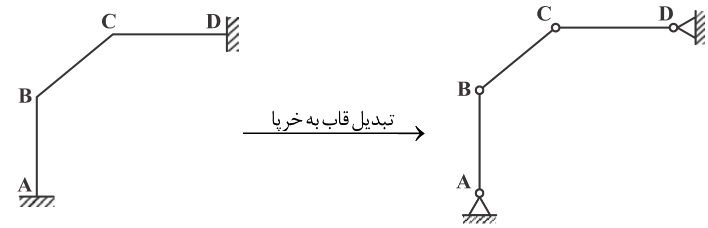
۱) صفر

۲) یک

۳) دو

۴) سه

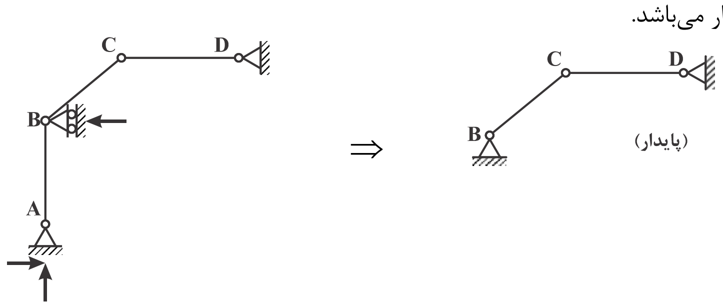
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه تعداد درجه آزادی انتقالی در این قاب، باید این قاب را به یک خرپا تبدیل کنیم. برای این منظور کافی است تمام نقاط اتصال داخلی و تکیه‌گاهی قاب را به مفصل تبدیل نماییم:



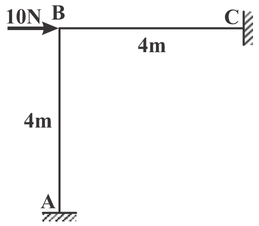
همان‌طور که مشاهده می‌شود خرپای حاصل شده ناپایدار است، بنابراین برای پایدار شدن این خرپا می‌توان یک تکیه‌گاه غلتکی به نقطه B اضافه نمود. پس قسمت AB توسط سه عکس‌العمل مناسب به زمین متصل شده و پایدار است. حال می‌توان این قسمت را به صورت زمین فرض نمود. قسمت BCD سه مفصل بوده و توسط عکس‌العمل‌های مناسب به زمین متصل شده و پایدار می‌باشد.

بنابراین درجه آزادی انتقالی این سازه برابر یک است:

$(N_\Delta = ۱)$



مثال۶: لنگر در C کدام است؟ (EI ثابت) (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۳)



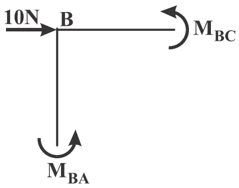
۱) $-۱۶kN.m$

۲) $۱۶kN.m$

۳) $-۸kN.m$

۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود قاب نامعین است. بنابراین برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه C (M_{CB})، با استفاده از روش شیب افت به صورت زیر داریم:



با توجه به اینکه نقطه B در قاب پیوسته است، معادله تعادل لنگر را حول نقطه B به صورت زیر تعریف نموده و داریم:

$$\overset{+}{\circlearrowright}\sum M_B = ۰ \Rightarrow M_{BC} + M_{BA} = ۰$$

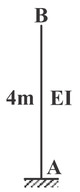
حال با استفاده از رابطه روش شیب افت مقادیر M_{BA} و M_{BC} را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

قسمت BC:

$$\begin{cases} \theta_C = ۰ & \text{(تکیه‌گاه گیردار C)} \\ FEM_{BC} = ۰ & \text{(قسمت BC فاقد بارگذاری است)} \\ \psi_{BC} = ۰ & \text{(نقاط B و C تغییر مکان قائم ندارند)} \\ L_{BC} = ۴m \text{ و } (EI)_{BC} = EI \end{cases}$$

$$M_{BC} = \frac{۲(EI)_{BC}}{L_{BC}}(۲\theta_B + \theta_C - ۳\psi_{BC}) + FEM_{BC} \Rightarrow M_{BC} = \frac{۲EI}{۴}(۲\theta_B + ۰ - ۰) + ۰ \Rightarrow M_{BC} = EI\theta_B$$

قسمت BA:



$$\begin{cases} \theta_A = ۰ & \text{(تکیه‌گاه گیردار A)} \\ FEM_{BA} = ۰ & \text{(قسمت BA فاقد بارگذاری است)} \\ \psi_{BA} = ۰ & \text{(نقاط B و A تغییر مکان افقی ندارند)} \\ L_{BA} = ۴m \text{ و } (EI)_{BA} = EI \end{cases}$$

$$M_{BA} = \frac{۲(EI)_{BA}}{L_{BA}}(۲\theta_B + \theta_A - ۳\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{۲EI}{۴}(۲\theta_B + ۰ - ۰) + ۰ \Rightarrow M_{BA} = EI\theta_B$$

حال با حل معادله تعادل لنگر در نقطه B داریم:

$$M_{BC} + M_{BA} = ۰ \Rightarrow EI\theta_B + EI\theta_B = ۰ \Rightarrow ۲EI\theta_B = ۰ \Rightarrow \theta_B = ۰$$

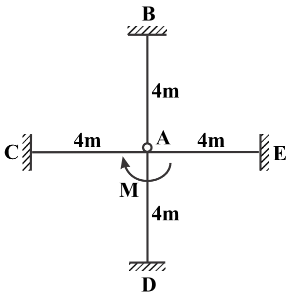
در نهایت با توجه به شرایط یکسان BC و CB، مقدار لنگر در نقطه C یعنی M_{CB} برابر است با:

$$M_{CB} = \frac{۲(EI)_{CB}}{L_{CB}}(۲\theta_C + \theta_B - ۳\psi_{CB}) + FEM_{CB} \Rightarrow M_{CB} = \frac{۲EI}{۴}(۰ + ۰ - ۰) + ۰ \Rightarrow M_{CB} = ۰$$

فصل دهم

«بررسی تحلیل‌سازه‌ها به روش مدلسازی با فنر»

مثال۱: در سازه مقابل لنگر M_{DA} کدام است؟ (EI ثابت) (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)



۱) $\frac{M}{۸}$

۲) $\frac{M}{۶}$

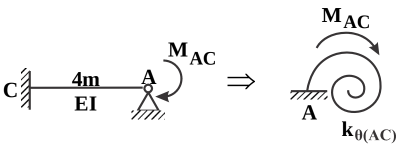
۳) $\frac{M}{۴}$

۴) $\frac{M}{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه از اعضایی تشکیل شده است که در نقطه A به یکدیگر متصل شده‌اند و از طرفی لنگر خمشی متمرکز M در محل اتصال اعضای سازه یعنی نقطه A اعمال شده است. بنابراین می‌توان این سازه را به‌صورت اتصال موازی چهار فنر دورانی در نظر گرفت. پس سختی دورانی هر یک از اعضای سازه را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

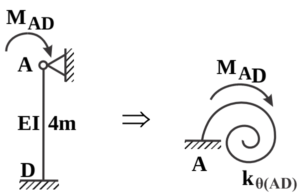
قسمت AB: محل اتصال این قسمت و لنگر متمرکز M به‌صورت مفصلی است، بنابراین این قسمت از سازه در تحمل لنگر خمشی نقشی نداشته و سختی دورانی ندارد پس مقدار لنگر و سختی فنر دورانی آن برابر صفر است: $k_{\theta(AB)} = ۰$ و $M_{AB} = ۰$

قسمت AC: محل اتصال این قسمت و لنگر خمشی M (نقطه A) به‌صورت پیوسته است، بنابراین در قسمت AC، در نقطه A یک تکیه‌گاه مفصلی قرار می‌دهیم و مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت برابر است با:



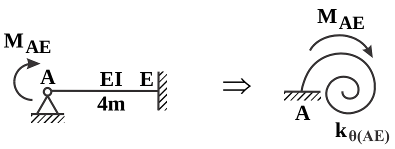
$$k_{\theta(AC)} = \frac{۴(EI)_{AC}}{L_{AC}} \Rightarrow k_{\theta(AC)} = \frac{۴EI}{۴} \Rightarrow k_{\theta(AC)} = EI$$

قسمت AD: محل اتصال این قسمت و لنگر خمشی (نقطه A) به‌صورت پیوسته است، بنابراین در قسمت AD، در نقطه A یک تکیه‌گاه مفصلی قرار می‌دهیم و مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت به صورت زیر تعیین می‌شود:



$$k_{\theta(AD)} = \frac{۴(EI)_{AD}}{L_{AD}} \Rightarrow k_{\theta(AD)} = \frac{۴EI}{۴} \Rightarrow k_{\theta(AD)} = EI$$

قسمت AE: محل اتصال این قسمت و لنگر خمشی M (نقطه A) به‌صورت پیوسته است بنابراین در قسمت AE در نقطه A یک تکیه‌گاه مفصلی قرار می‌دهیم و مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت برابر است با:

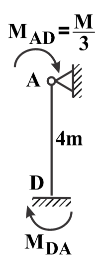


$$k_{\theta(AE)} = \frac{۴(EI)_{AE}}{L_{AE}} \Rightarrow k_{\theta(AE)} = \frac{۴EI}{۴} \Rightarrow k_{\theta(AE)} = EI$$

حال برای تعیین مقدار لنگر در نقطه D (M_{DA}) ابتدا باید مقدار لنگر در قسمت AD یعنی نقطه A را به‌دست آوریم، پس با توجه به اتصال موازی فنرهای دورانی داریم:

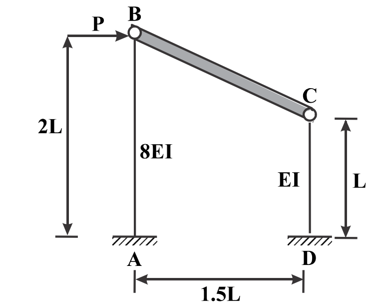
$$M_{AD} = \frac{k_{\theta(AD)}}{k_{\theta(AD)} + k_{\theta(AE)} + k_{\theta(AC)} + k_{\theta(AB)}} \times M \Rightarrow M_{AD} = \frac{EI}{EI + EI + EI + ۰} \times M \Rightarrow M_{AD} = \frac{M}{۳}$$

بنابراین برای قسمت AD می‌توان نوشت:



روابط حفظی تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار: $M_{DA} = \frac{M_{AD}}{۲} \Rightarrow M_{DA} = \frac{\frac{M}{۳}}{۲} \Rightarrow M_{DA} = \frac{M}{۶}$

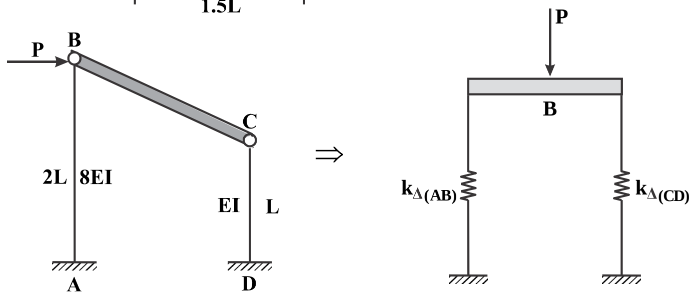
مثال۲: انرژی ذخیره شده در سازه مقابل کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۱)



۱) $\frac{P^{۲}L^{۳}}{۳EI}$ ۲) $\frac{P^{۲}L^{۳}}{۶EI}$

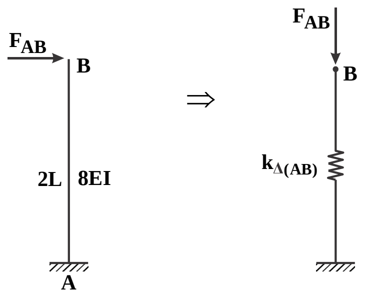
۳) $\frac{P^{۲}L^{۳}}{۱۲EI}$ ۴) $\frac{P^{۲}L^{۳}}{۲۴EI}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به شکل صورت سؤال برای محاسبه انرژی کرنشی در این سازه کافی است تغییر مکان محل اثر نیروی P یعنی نقطه B را به‌دست آوریم. همان‌طور که مشاهده می‌شود می‌توان این سازه را از اتصال دو ستون معین و پایدار AB و CD توسط میله صلب BC در نظر گرفت. البته دقت داشته باشید به علت وجود عضو صلب BC نقاط B و C تغییر مکان افقی یکسانی دارند. پس می‌توان این سازه را به صورت اتصال دو فنر موازی فرض نمود:



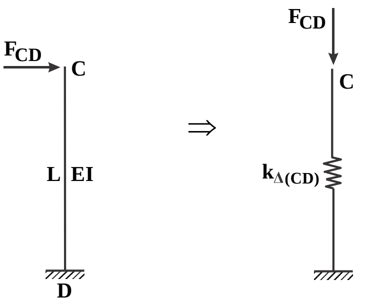
حال برای محاسبه مقادیر سختی فنرهای انتقالی AB و CD می‌توان نوشت:

فنر انتقالی AB:



$$k_{\Delta(AB)}=\frac{۳(EI)_{AB}}{L_{AB}^{۳}}\Rightarrow k_{\Delta(AB)}=\frac{۳(۸EI)}{(۲L)^{۳}}=\frac{۳EI}{L^{۳}}$$

فنر انتقالی CD:



$$k_{\Delta(CD)}=\frac{۳(EI)_{CD}}{L_{CD}^{۳}}=\frac{۳EI}{L^{۳}}$$

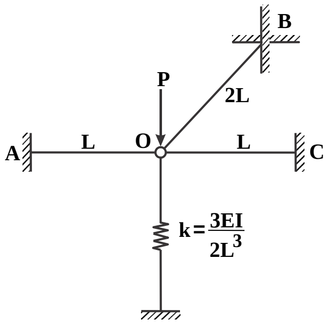
در نهایت برای محاسبه تغییر مکان نقطه B به صورت زیر داریم:

$$\Delta_B=\frac{P}{k_{\Delta(AB)}+k_{\Delta(CD)}}\Rightarrow \Delta_B=\frac{P}{\frac{۳EI}{L^{۳}}+\frac{۳EI}{L^{۳}}}\Rightarrow \Delta_B=\frac{P}{\frac{۶EI}{L^{۳}}}\Rightarrow \Delta_B=\frac{PL^{۳}}{۶EI}$$

بنابراین انرژی کرنشی این سازه برابر است با:

$$U=\frac{P\times\Delta_B}{۲}\Rightarrow U=\frac{P\times\frac{PL^{۳}}{۶EI}}{۲}\Rightarrow U=\frac{P^{۲}L^{۳}}{۱۲EI}$$

مثال۳: در سازه مسطح شکل مقابل بار P عمود بر صفحه سازه در نقطه O به آن اعمال می‌شود. لنگر خمشی ایجاد شده در تکیه‌گاه B چقدر است؟ (صلبیت خمشی اعضا AO و CO برابر با $\frac{EI}{۲}$ و صلبیت خمشی عضو BO برابر ۴EI است.) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)



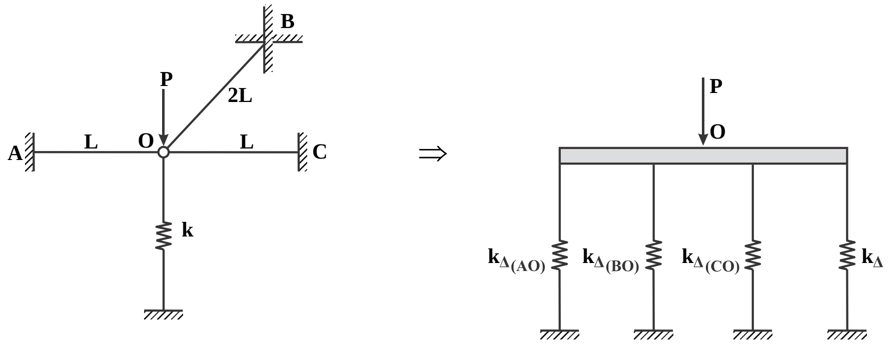
۱) $\frac{PL}{۲}$

۲) $\frac{PL}{۴}$

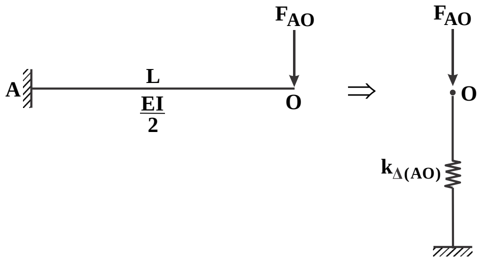
۳) $\frac{۳PL}{۴}$

۴) $\frac{۳PL}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که مشاهده می‌شود این سازه از اتصال سه تیر معین و پایدار CO،AO وBO به همراه یک فنر انتقالی تشکیل شده است که در نقطه O نیروی P بر آن اعمال می‌گردد. بنابراین تغییر مکان نقطه اعمال بار P که محل اتصال است، برای تمام اعضا یکسان می‌باشد و می‌توان این سازه را به صورت اتصال چهار فنر انتقالی موازی در نظر گرفت. پس داریم:

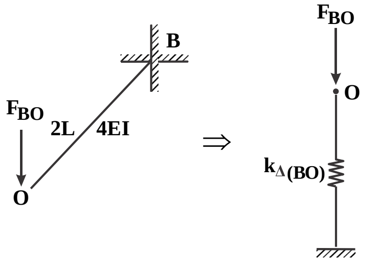


فنر انتقالی AO:



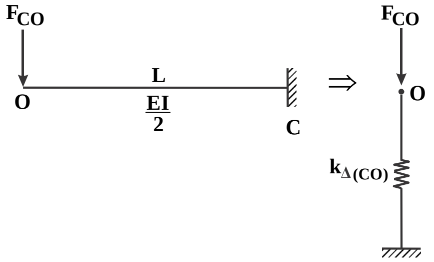
$$k_{\Delta(AO)}=\frac{۳(EI)_{AO}}{L_{AO}^{۳}}\Rightarrow k_{\Delta(AO)}=\frac{۳(\frac{EI}{۲})}{L^{۳}}=\frac{۳EI}{۲L^{۳}}$$

فنر انتقالی BO:



$$k_{\Delta(BO)}=\frac{۳(EI)_{BO}}{L_{BO}^{۳}}\Rightarrow k_{\Delta(BO)}=\frac{۳(۴EI)}{(۲L)^{۳}}=\frac{۳EI}{۲L^{۳}}$$

فنر انتقالی CO:

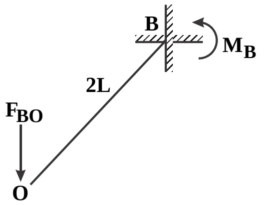


$$k_{\Delta(CO)}=\frac{۳(EI)_{CO}}{L_{CO}^{۳}}\Rightarrow k_{\Delta(CO)}=\frac{۳(\frac{EI}{۲})}{L^{۳}}=\frac{۳EI}{۲L^{۳}}$$

بنابراین به علت اینکه در اتصال موازی فنرها، نیروی هر فنر به نسبت سختی فنرها توزیع می‌شود، پس نیروی فنر انتقالی BO برابر است با:

$$F_{BO}=\frac{k_{\Delta(BO)}}{k_{\Delta(BO)}+k_{\Delta(CO)}+k_{\Delta(AO)}+k_{\Delta}}\times P\Rightarrow F_{BO}=\frac{\frac{۳EI}{۲L^{۳}}}{\frac{۳EI}{۲L^{۳}}+\frac{۳EI}{۲L^{۳}}+\frac{۳EI}{۲L^{۳}}+\frac{۳EI}{۲L^{۳}}}\times P\Rightarrow F_{BO}=\frac{P}{۴}$$

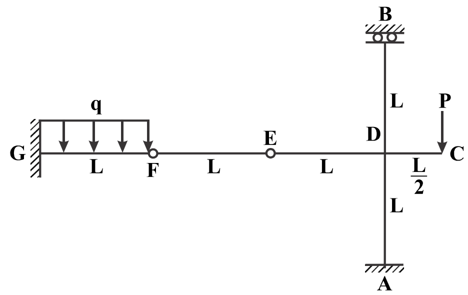
در نهایت برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه B داریم:



$$\stackrel{+}{\circlearrowleft}\sum M_B=۰\Rightarrow(F_{BO}\times ۲L)+M_B=۰$$

$$\Rightarrow M_B+(\frac{P}{۴}\times ۲L)=۰\Rightarrow M_B=-\frac{PL}{۲}$$

مثال۴: در قاب مقابل لنگر تکیه‌گاه گیردار A کدام است؟ (EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۷)



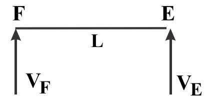
۱) $\frac{PL}{۵}$

۲) $\frac{PL}{۴}$

۳) $\frac{PL}{۸}$

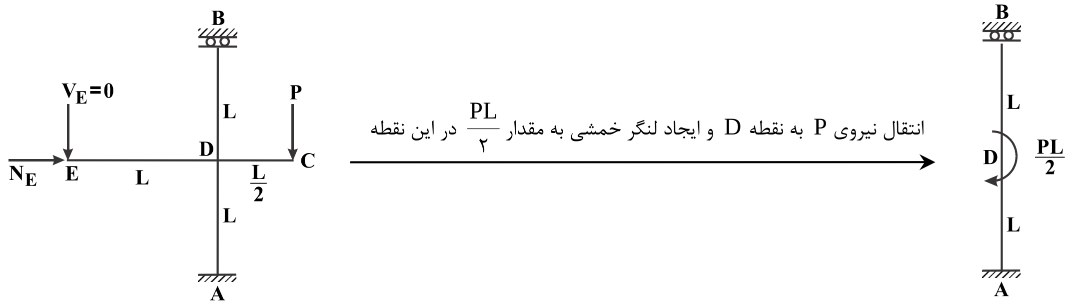
۴) $\frac{PL}{۱۰}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل صورت سؤال، سمت راست مفصل E را در نظر بگیرید. ابتدا باید مقدار نیروی برشی در نقطه E را به‌دست آوریم. توجه داشته باشید سمت چپ نقطه E از دو قسمت GF و EF تشکیل شده است. پس برای تعیین مقدار نیروی برشی در نقطه E قسمت EF را در نظر می‌گیریم:

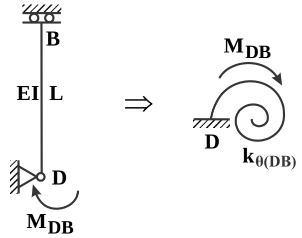


$$+\circlearrowleft \sum M_F = ۰ \Rightarrow V_E \times L = ۰ \Rightarrow V_E = ۰$$

بنابراین برای سمت راست نقطه E می‌توان نوشت:

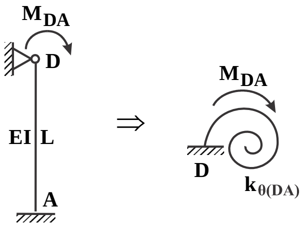


حال می‌توان این سازه را به صورت اتصال دو عضو DB و DA در نظر گرفت که در محل اتصال یعنی نقطه D لنگر متمرکز $\frac{PL}{۲}$ اعمال شده است. بنابراین می‌توان گفت این سازه به صورت اتصال موازی دو فنر دورانی فرض می‌شود. پس مقدار سختی دورانی هر فنر دورانی به‌صورت زیر تعیین می‌شود:



قسمت DB: محل اتصال این قسمت و لنگر $\frac{PL}{۲}$ به‌صورت پیوسته است، بنابراین با فرض تکیه‌گاه مفصلی در نقطه D، مقدار سختی فنر دورانی این قسمت را به‌دست می‌آوریم:

$$k_{\theta(DB)} = \frac{(EI)_{DB}}{L_{DB}} \Rightarrow k_{\theta(DB)} = \frac{EI}{L}$$



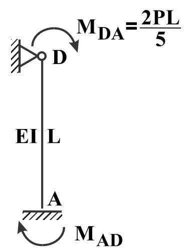
قسمت DA: محل اتصال این قسمت و لنگر $\frac{PL}{۲}$ به‌صورت پیوسته است، بنابراین با فرض تکیه‌گاه مفصلی در نقطه D، مقدار سختی فنر دورانی برای این قسمت تعیین می‌شود:

$$k_{\theta(DA)} = \frac{۴(EI)_{DA}}{L_{DA}} \Rightarrow k_{\theta(DA)} = \frac{۴EI}{L}$$

بنابراین برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه A (M_{AD}) باید ابتدا مقدار لنگر M_{DA} را به‌دست آوریم. پس با توجه به اتصال موازی فنرهای دورانی داریم:

$$M_{DA} = \frac{k_{\theta(DA)}}{k_{\theta(DA)} + k_{\theta(DB)}} \times (\frac{PL}{۲}) \Rightarrow M_{DA} = \frac{\frac{۴EI}{L}}{\frac{۴EI}{L} + \frac{EI}{L}} \times (\frac{PL}{۲}) \Rightarrow M_{DA} = \frac{\frac{۴EI}{L}}{\frac{۵EI}{L}} \times (\frac{PL}{۲}) \Rightarrow M_{DA} = \frac{۲PL}{۵}$$

در نهایت برای قسمت DA داریم:

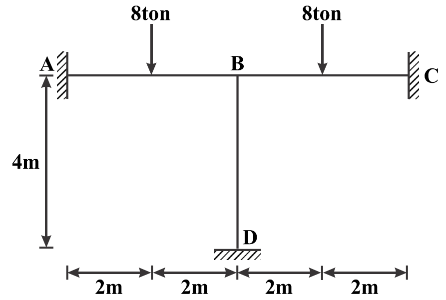


$$M_{AD} = \frac{M_{DA}}{۲} \Rightarrow M_{AD} = \frac{\frac{۲PL}{۵}}{۲} \Rightarrow M_{AD} = \frac{PL}{۵}$$
: روابط حفظی تیرهای نامعین یک سر مفصل و یک سر گیردار

فصل یازدهم

«تحلیل سازه‌ها با استفاده از خواص تقارن»

مثال۱: M_A را برحسب ton.m حساب کنید. (EI ثابت است) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)



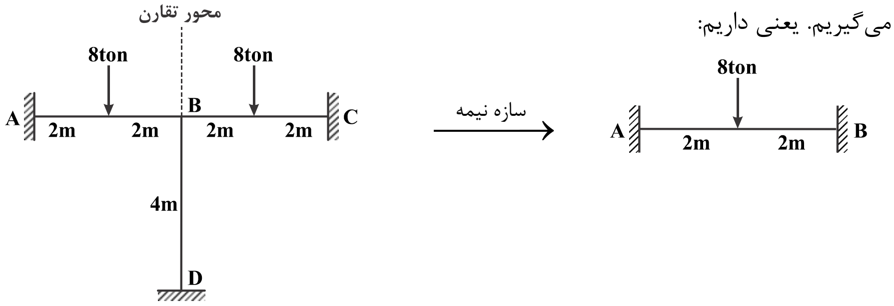
۱) ۲−

۲) ۴−

۳) ۸−

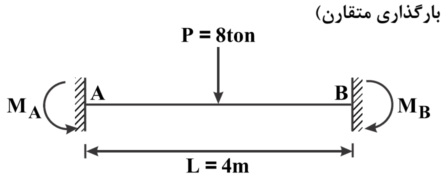
۴) ۱۶−

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود سازه متقارن است و تحت اثر بارگذاری متقارن قرار دارد. با توجه به اینکه محور تقارن سازه بر روی عضو BD با صلبیت خمشی (EI) و فاقد صلبیت محوری $(EA=\circ)$ قرار دارد، بنابراین برای سازه نیمه، عضو BD را حذف کرده و به‌جای آن در نقطه B، تکیه‌گاه گیردار در نظر می‌گیریم. یعنی داریم:



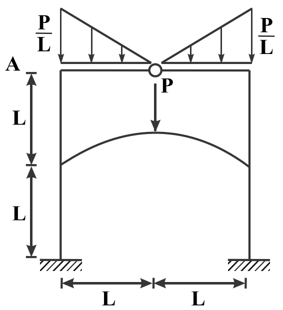
(سازه متقارن تحت بارگذاری متقارن)

حال با استفاده از روابط حفظی تیرهای نامعین دو سرگیردار مطابق شکل زیر داریم:



$$M_A=-\frac{PL}{۸}\Rightarrow M_A=-\frac{۸\times۴}{۸}\Rightarrow M_A=-۴ton.m$$

مثال۲: لنگر داخلی در گره A کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۰)



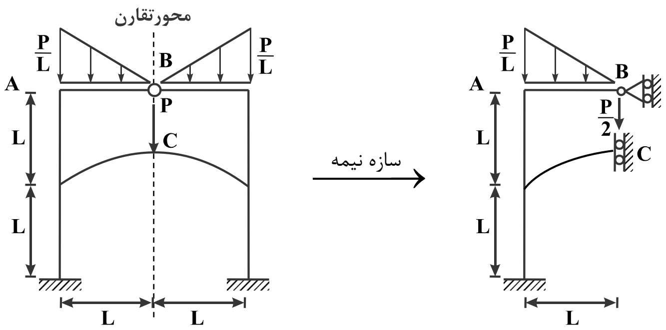
۱) $\frac{PL}{۳}$

۲) $\frac{PL}{۶}$

۳) PL

۴) $\frac{PL}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به شکل صورت سؤال مشخص است که این قاب متقارن و بارگذاری وارد بر آن نیز متقارن می‌باشد. پس ابتدا محور تقارن را رسم می‌کنیم. توجه داشته باشید در محل برخورد محور تقارن در نقطه B، به علت وجود مفصل خمشی و در نقطه C برای سازه نیمه به ترتیب تکیه‌گاه غلتکی در جهت عمود بر محور تقارن و تکیه‌گاه لغزنده گیردار در نظر می‌گیریم. یعنی داریم:

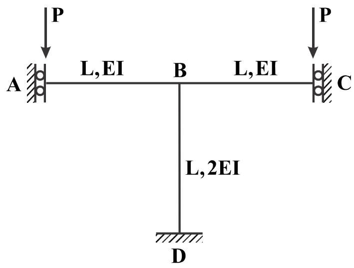


(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری متقارن)

حال برای محاسبه مقدار لنگر در نقطه A سازه نیمه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
بنابراین با در نظر گرفتن قسمت AB به صورت زیر داریم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A=\circ\Rightarrow M_A+(\frac{P}{L}\times L\times\frac{۱}{۲})\times\frac{L}{۳}=\circ\Rightarrow M_A+\frac{PL}{۶}=\circ\Rightarrow M_A=-\frac{PL}{۶}$$

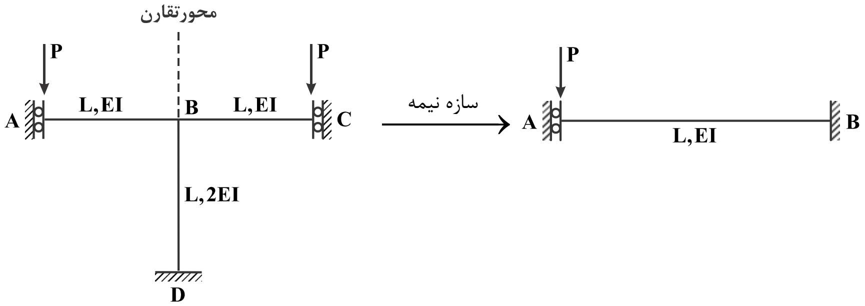
مثال ۳: تغییر مکان تکیه‌گاه غلتکی برشی A کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۱)



۱) $\frac{PL^۳}{۳EI}$ ۲) $\frac{PL^۳}{۶EI}$

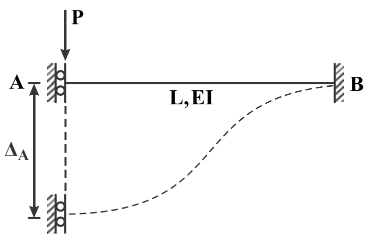
۳) $\frac{PL^۳}{۱۲EI}$ ۴) $\frac{PL^۳}{۲۴EI}$

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشاهده می‌شود که این سازه متقارن است و تحت اثر بارگذاری متقارن قرار دارد. بنابراین محور تقارن آن را رسم کرده و به علت اینکه روی محور تقارن، عضو BD با صلبیت خمشی ۲EI وجود دارد، برای سازه نیمه یک تکیه‌گاه گیردار به جای این عضو در نظر گرفته و داریم:



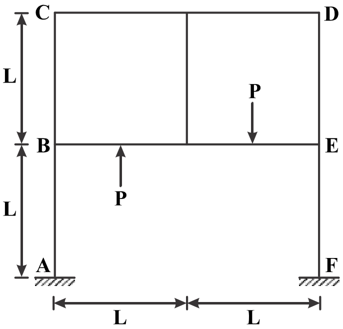
(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری متقارن)

پس در ادامه کافی است سازه نیمه AB را مورد بررسی قرار دهیم. حال برای محاسبه مقدار تغییر مکان تکیه‌گاه A به صورت زیر با استفاده از روابط حفظی تیرهای نامعین یک سرگیردار و یک سر لغزنده گیردار داریم:



$$\Delta_A=\frac{PL^۳}{۱۲EI}$$: روابط حفظی تیرهای نامعین یک سرگیردار و یک سر لغزنده گیردار

مثال۴: در سیستم سازه‌ای زیر، عکس‌العمل افقی در تکیه‌گاه A کدام است؟ (صلبیت همه اعضا یکسان است.) (مهندسی عمران ـ دکتری ۹۲)



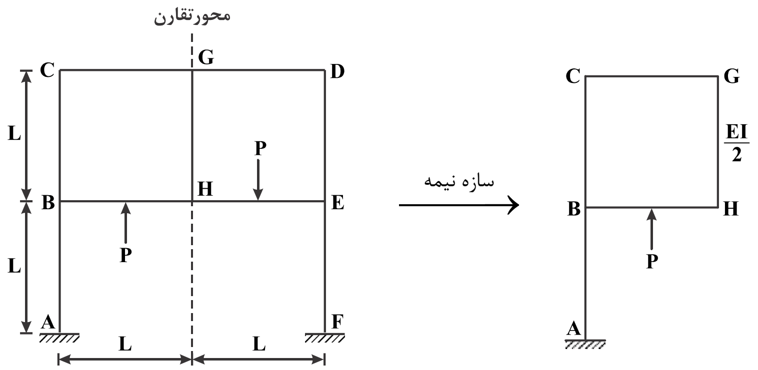
۱) صفر

۲) $\frac{P}{2}$

۳) $\frac{P}{4}$

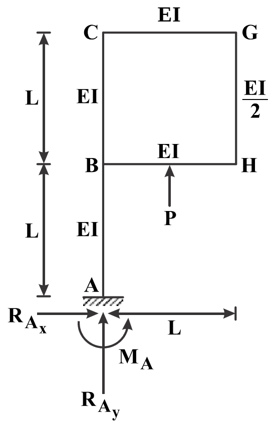
۴) P

پاسخ: گزینه «۱» با کمی دقت در شکل صورت سؤال مشاهده می‌شود که این سازه متقارن است و تحت اثر بارگذاری پادمتقارن قرار دارد. پس با رسم محور تقارن سازه برای سازه نیمه فقط عضو GH صلبیت خمشی‌اش نصف می‌شود و به صورت مقابل داریم:



(سازه متقارن تحت اثر بارگذاری پادمتقارن)

بنابراین برای محاسبه مقدار عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A، سازه نیمه ABCGH را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه سازه ABCGH را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{A_x} = 0$$

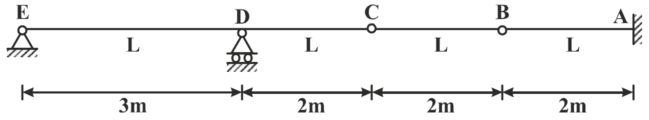
بنابراین مقدار عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A برابر صفر است.

فصل دوازدهم

«بررسی خط تأثیر در سازه‌ها»

مثال۱: اگر یک بار منفرد ۳ تن بر روی تیر شکل زیر حرکت کند، اندازه ماکزیمم عکس‌العمل تکیه‌گاه D چند تن است؟

(مهندسی عمران ـ سراسری ۷۷)



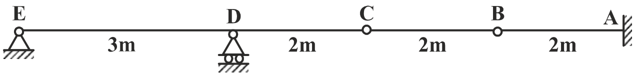
۱) ۳   ۲) ۵

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه یک بار متمرکز ۳ تن بر روی تیر حرکت می‌کند و می‌خواهیم حداکثر مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه D را به دست آوریم، گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول: رسم نمودار خط تأثیر تکیه‌گاه D

برای این منظور کافی است مراحل زیر را انجام دهیم:



مرحله اول: حذف تکیه‌گاه D از سازه

مرحله دوم: اعمال تغییرمکان واحد در نقطه D و رسم تغییرشکل سازه

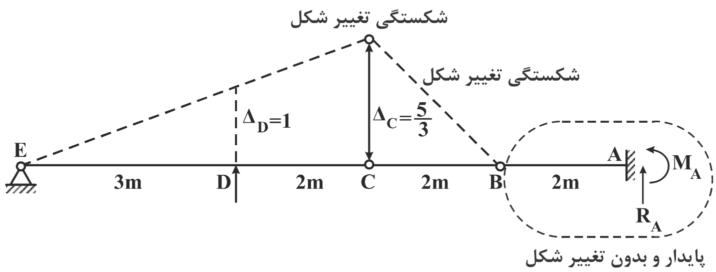
با اعمال بار فرضی در نقطه D و تغییرمکان واحد در این نقطه به صورت زیر داریم:

ـ مفصل خمشی C: به علت اینکه در نقطه D تغییرمکان واحد اعمال شده است، بنابراین مقدار بالا آمدن مفصل خمشی C به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{\Delta_D}{L_{ED}}=\frac{\Delta_C}{L_{EC}}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{\Delta_C}{۵}\Rightarrow\Delta_C=\frac{۵}{۳}$$

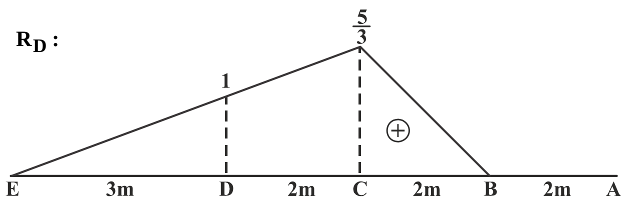
توجه داشته باشید در مفصل خمشی همواره شکستگی تغییر شکل ایجاد می‌شود.

ـ مفصل خمشی B: در یک مفصل خمشی همواره شکستگی در تغییر شکل داریم. توجه داشته باشید قسمت AB دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب است، پس این قسمت پایدار و بدون تغییر شکل می‌باشد. بنابراین تغییر شکل سازه به صورت زیر رسم می‌شود:



مرحله سوم: رسم تغییر شکل سازه به عنوان نمودار خط تأثیر

نمودار خط تأثیر تکیه‌گاه D به صورت مقابل رسم می‌گردد:



گام دوم: تعیین محل و مقدار حداکثر ارتفاع خط تأثیر در نمودار خط تأثیر تکیه‌گاه D

با توجه به نمودار خط تأثیر رسم شده در گام اول، مشاهده می‌شود که در نقطه C حداکثر ارتفاع خط تأثیر ایجاد شده است که مقدار آن برابر است با:

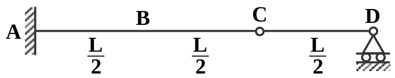
$$h_{max}=\frac{۵}{۳}$$

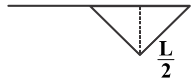
گام سوم: تعیین حداکثر مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه D

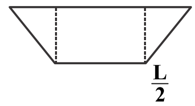
با استفاده از رابطه زیر برای حداکثر مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه D داریم:

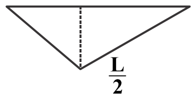
$$R_{D(max)}=P\times h_{max}\Rightarrow R_{D(max)}=۳\times\frac{۵}{۳}=۵\,\text{ton}$$

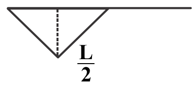
مثال۲: منحنی خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه B چگونه است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۵)



۱) 

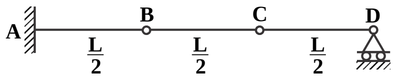
۲) 

۳) 

۴) 

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای رسم خط تأثیر لنگر در نقطه B از روش مولر برسلاو به صورت زیر داریم

مرحله اول: قراردادن مفصل خمشی در نقطه B



مرحله دوم: اعمال دوران در طرفین مفصل خمشی B به نحوی که مجموع دوران طرفین برابر واحد باشد و رسم تغییر شکل سازه

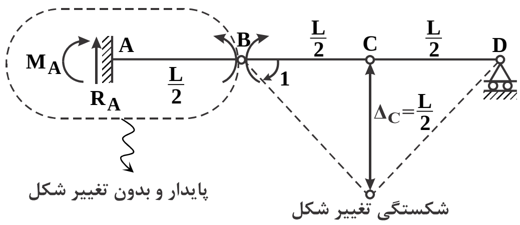
ـ قسمت AB : این قسمت دارای دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی مناسب است، پس پایدار و بدون تغییر شکل می‌باشد.

ـ مفصل خمشی B : به علت اینکه سمت چپ مفصل خمشی B ثابت و بدون تغییرشکل است، بنابراین تمام دوران واحد به سمت راست مفصل خمشی B اعمال می‌گردد.

ـ مفصل خمشی C : در مفصل خمشی همواره شکستگی مشاهده می‌شود. به علت اینکه سمت راست مفصل خمشی B به اندازه واحد دوران داشته است، پس مقدار تغییرمکان نقطه C به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta_C = ۱ \times \frac{L}{۲} = \frac{L}{۲}$$

بنابراین تغییرشکل سازه به صورت زیر رسم می‌گردد:



مرحله سوم: رسم تغییرشکل سازه به عنوان نمودار خط تأثیر

نمودار خط تأثیر لنگر در نقطه B به صورت مقابل رسم می‌گردد: