سؤالات آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ اگر $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x^2+5x-3}{x-2}-ax-b)=0$ باشد، b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$، کدام است؟

۱) $\frac{25}{48}$ ۲) $\frac{23}{48}$ ۳) $\frac{13}{24}$ ۴) $\frac{11}{24}$

۳ـ مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه قائم ایجاد شود، وقتی حجم این استوانه بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۴ـ حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{e^2}$ ۳) e ۴) e^2

۵ـ حاصل $\int_4^9\frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $Ln4$ ۴) $Ln5$

۶ـ طول قوس منحنی بسته $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۷ـ حاصل $\int_a^b f(a+b-x)dx-\int_a^b f(x)dx$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $a+b$ ۳) $b-a$ ۴) $f(a+b)$

۸ـ سطح محدود به منحنی $y=\sin x$ و محور xها در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ را حول خط $y=1$ دوران می‌دهیم، حجم حاصل کدام است؟

۱) $\pi(2+\frac{\pi}{2})$ ۲) $\pi(2+\pi)$ ۳) $\frac{3}{2}\pi^2$ ۴) $\frac{3}{2}\pi$

۹ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&3\end{bmatrix}$ باشد، درایه واقع در سطر اول و ستون دوم ماتریس A^{-1}، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰ـ حاصل $Arctg\sqrt{2x-y}+Arcsin(2x-y+1)$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۱ـ صفحه قائم بر منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^2+t-2\\y=2t^2-5t+3\end{cases}$ در نقطه (۴،۱) واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳/۲ ۲) ۴/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۶

۱۲ـ از رابطه $Ln\sqrt{x^2+y^2}-Arctg\frac{y}{x}=Ln2-\frac{\pi}{3}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(1,\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $2+\sqrt{3}$ ۳) $-2-\sqrt{3}$ ۴) $-2+\sqrt{3}$

۱۳ـ صفحه مماس بر رویه $z = 2x^2 - y^2 + 2xy$ در نقطه (۱,۲,۳) محور zها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۵

۱۴ـ دیفرانسیل کامل تابع دومتغیری $z = x^2e^{3y-2x}$ در نقطه (۳,۲) به ازای $dx = 0/03$ و $dy = 0/02$ کدام است؟

۱) $0/18$ ۲) $0/16$ ۳) $0/14$ ۴) $0/12$

۱۵ـ در تابع دومتغیری $u = (1-2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}$، حاصل $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}$، کدام است؟

۱) $(x-y)u^3$ ۲) $(x+y)u^3$ ۳) xyu^3 ۴) y^2u^3

سؤالات آزمون مجموعه مدیریت

توجه: برای رشته مدیریت مجموعاً ۸ سؤال ریاضی طرح شده است که سؤالات ۱، ۲، ۵، ۹، ۱۴ و ۱۵ مشترک با رشته حسابداری به علاوه‌ی دو سؤال زیر را شامل می‌شود.

۱۶ـ مساحت ناحیه محدود به دو منحنی $y = \frac{8}{x^2+4}$ و $x^2 = 4y$، کدام است؟

۱) $\pi - \frac{2}{3}$ ۲) $\pi - \frac{4}{3}$ ۳) $2\pi - \frac{2}{3}$ ۴) $2\pi - \frac{4}{3}$

۱۷ـ سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ داده شده است. فصل مشترک‌های دوبه‌دو صفحات نسبت به هم چگونه است؟

۱) موازی ۲) عمود ۳) منطبق ۴) متقاطع

پاسخنامه آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ گزینه «۴» طبق صورت سؤال حاصل یک حد برابر صفر شده است. باید مقدار b را معلوم کنیم؛ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۲x^۲+۵x^۲-۳+(x-۲)(-ax-b)}{x-۲}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۲x^۲+۵x-۳+ax^۲-bx+۲ax+۲b}{x-۲}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(۲-a)x^۲+(۵-b+۲a)x+۲b-۳}{x-۲}\right)$$

حالا خوب دقت کنید؛ حاصل این حد را طراح برابر با صفر در نظر گرفته است. اگر قرار باشد ضریب $x^۲$ و x برابر با صفر نباشند، حاصل این حد هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. (چون $x\to\infty$) پس این دو ضریب باید برابر با صفر شوند:

$$\begin{cases}۲-a=۰\\ ۵-b+۲a=۰\end{cases}\Rightarrow a=۲\ \Rightarrow ۵-b+۲\times۲=۰\ \Rightarrow b=۹$$

۲ـ گزینه «۱» سری از نوع تلسکوپی می‌باشد که البته اختلاف اندیس‌ها بیشتر از ۱ واحد است. واضح است ابتدا باید کسر را تفکیک کنیم:

$$\frac{۱}{n(n+۴)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+۴}\Rightarrow ۱=A(n+۴)+Bn\ \Rightarrow ۱=(A+B)n+۴A$$

چون سمت چپ فقط عدد داریم، پس ضریب n در سمت راست باید صفر شود، یعنی $A+B=۰$ و در نتیجه $A=-B$. از طرفی $۴A$ باید برابر با یک شود، پس $۴A=۱$ و یا $A=\frac{۱}{۴}$ پس $B=-\frac{۱}{۴}$، بنابراین سری به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۴)}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\frac{۱}{۴}}{n}+\frac{-\frac{۱}{۴}}{n+۴}=\frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۴}\right)$$

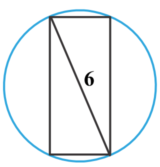
قبل از ادامه‌ی حل به یادآوری زیر توجه کنید:

> **یادآوری:** در سری‌های تلسکوپی اگر اختلاف اندیس‌های مجموع داخل سیگما، از یک واحد بیشتر باشد، باید به جای جمله اول به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات اول را با هم جمع کنیم و به جای جمله آخر به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات آخر را با هم جمع کنیم، به عنوان مثال داریم:
>
> $$\sum_{k=۱}^{n}(f_k-f_{k+۳})=(\underbrace{f_۱+f_۲+f_۳}_{\text{مجموع سه جمله اول}})-(\underbrace{f_{n+۱}+f_{n+۲}+f_{n+۳}}_{\text{مجموع سه جمله آخر}})$$
>
> در این مثال اختلاف اندیس‌ها برابر ۳ است.
>
> و در حالت خاص اگر حد بالای سیگما ∞ باشد، آن‌گاه چون جملات آخر در ∞ تقریباً با هم برابر هستند، می‌توانیم عدد اختلاف اندیس‌ها را در جمله آخر ضرب کنیم و آن را به‌صورت زیر بنویسیم، به مثال مقابل توجه کنید:
>
> $$\sum_{k=۱}^{\infty}(f_k-f_{k+۲})=(\underbrace{f_۱+f_۲}_{\text{مجموع دو جمله اول}})-۲\times(\underbrace{\lim_{k\to+\infty}f_{k+۲}}_{\text{مجموع دو جمله آخر}})$$
>
> در این مثال، اختلاف اندیس‌ها برابر با <u>۲</u> است.

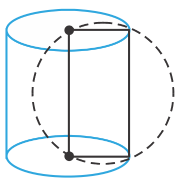
با توجه با توضیحات فوق داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۴)}=\frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۴}\right)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-۴\times\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۴}\right)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱۲+۶+۴+۳}{۱۲}\right)=\frac{۲۵}{۴۸}$$

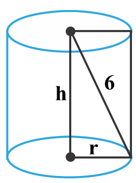
۳ـ گزینه «۲» در شکل (۱) با توجه به صورت سؤال مستطیلی، را محاط در دایره‌ای به شعاع $r=۶$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله برای آن که استوانه قائم ایجاد شود باید مستطیل را حول یکی از طول اضلاع خود دوران دهیم لذا شکل شماره (۲) پدید می‌آید.



(1)


(2)

برای راحتی حل مسئله استوانه پدید آمده را به تنهایی به صورت شکل (۳) در نظر می‌گیریم. دقت کنید عدد ۶ همان قطر دایره شکل (۱) است که در صورت سؤال داده شده است. h ارتفاع استوانه می‌باشد که همان طول مستطیل و r عرض مستطیل است. طراح ارتفاع (h) با شرط این که حجم استوانه ماکزیمم باشد را از ما خواسته است.



(3)

می‌دانیم حجم استوانه برابر $V=\pi r^۲h$ می‌باشد، در حل این‌گونه سؤالات باید حجم را برحسب یک متغیر بنویسیم؛ چون h مورد سؤال است باید r را برحسب h بنویسیم. اما رابطه بین h و r چیست؟ با توجه به مثلث قائم‌الزاویه پدید آمده در شکل (۳) رابطه فیثاغورث را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}r^۲+h^۲=۳۶\ \Rightarrow r^۲=۳۶-h^۲\\ V=\pi r^۲h\ \Rightarrow V=\pi(۳۶-h^۲)h=۳۶\pi h-\pi h^۳\end{cases}$$

برای محاسبه ماکزیمم حجم از تابع $V=۳۶\pi h-\pi h^۳$ برحسب h مشتق می‌گیریم و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$V'=۳۶\pi-۳\pi h^۲\xrightarrow{V'=۰}۳۶\pi-۳\pi h^۲=۰\ \Rightarrow ۳۶\pi=۳\pi h^۲\ \Rightarrow h^۲=۱۲\ \Rightarrow h=\sqrt{۱۲}\ \Rightarrow h=۲\sqrt{۳}$$

۴ـ گزینه «۱» وقتی به جای x ها عدد $\frac{\pi}{4}$ را قرار دهیم به حالت ابهام 1^{∞} می‌رسیم.

$$(tg\frac{\pi}{2} \Rightarrow \infty \ , \ tg\frac{\pi}{4}=1) \Rightarrow 1^{\infty}$$

بنابراین از فرمول مقابل باید استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to\alpha} u^{v} = e^{\lim\limits_{x\to\alpha}(u-1)v}$$

در این سؤال $u = tgx$ و $v = tg2x$ پس داریم:

$$\text{حاصل حد} = e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})}(tgx-1)tg2x}$$

اگر حد بالای توان e را L بنامیم، با یک حد روبه‌رو هستیم که حالت ابهام $0\times\infty$ را دارد. برای حل لازم است آن را به $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل کنیم.

اگر به جای tg2x بنویسیم $\frac{1}{cotg2x}$ داریم:

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{tgx-1}{cotg2x}\right) \xrightarrow{\text{هوپیتال}} L = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1+tg^{2}x}{-2(1+cotg^{2}2x)} = \frac{1+tg^{2}\frac{\pi}{4}}{-2(1+cot\,g)^{2}\frac{\pi}{4}}) = \frac{2}{-2} = -1$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر با e^{-1} یا $\frac{1}{e}$ است.

۵ـ گزینه «۳» با توجه به وجود رادیکال زیر انتگرال از تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ کمک می‌گیریم:

$$\sqrt{x}=u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du \xrightarrow{\sqrt{x}=u} \Rightarrow \frac{1}{2u}dx = du \Rightarrow dx = (2u)du$$

از طرفی به ازای $x=2$ آنگاه $u=\sqrt{4}=2$ و به ازای $x=9$ آنگاه $u=\sqrt{9}=3$، پس انتگرال برحسب متغیر جدید u به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

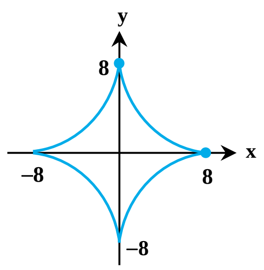
$$I = \int_{2}^{3}\frac{2udu}{u^{2}-u} = 2\int_{2}^{3}\frac{udu}{u(u-1)} = 2\int_{2}^{3}\frac{du}{u-1} = 2\left[Ln|u-1|\right]_{2}^{3} = 2(Ln|3-1|-Ln|2-1|) = 2(Ln2-0) = 2Ln2 = Ln4$$

۶ـ گزینه «۴» در معادله‌ی $\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{y^{2}}=4$ جایگزینی $-x$ به جای x، همچنین جایگزینی $-y$ به جای y، معادله را تغییر نمی‌دهد.

به عبارتی در این رابطه داریم:

$$f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x,-y)$$

بنابراین این منحنی نسبت به محورهای مختصات تقارن دارد، در نتیجه می‌توانیم طول قوس این منحنی را در ربع اول بـه‌دسـت آورده و حاصل را ۴ برابر کنیم. محل برخورد این نمودار با محورهای مختصات در ربع اول در $x=8$ و $y=8$ است. برای محاسـبه‌ی اِلمـان طـول قـوس، ابتـدا y' را بـا اسـتفاده از مشتق‌گیری ضمنی محاسبه می‌کنیم:



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4 \Rightarrow y' = -\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow 1+y'^{2} = 1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^{2}$$

در نتیجه داریم:

$$dL = \sqrt{1+y'^{2}}dx = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = 2x^{-\frac{1}{3}}dx$$

با انتگرال‌گیری در بازه‌ی $0 \le x \le 8$ و چهار برابر کردنِ جواب، به طول قوسِ منحنی می‌رسیم:

$$L = 4\times\int_{0}^{8}\sqrt{1+y'^{2}}dx = 4\int_{0}^{8}2x^{-\frac{1}{3}}dx = 4\left[\frac{3}{2}2x^{\frac{2}{3}}\right]_{0}^{8} = 6\times 8 = 48$$

۷ـ گزینه «۱» طبق نکته گفته شده در کتاب همواره $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(a+b-x)dx$، بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر با صفر مـی‌شـود. اگـر نکته را به یاد نداشته باشیم، به این شکل انتگرال مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$I_{1}=\int_{a}^{b}f(a+b-x)dx$$

با فرض $a+b-x=u$ آنگاه $-dx=du$ از طرفی برای حدود برحسب متغیری خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=a \Rightarrow a+b-a=u \Rightarrow u=b \\ x=b \Rightarrow a+b-b=u \Rightarrow u=a \end{cases} \Rightarrow I_{1}=\int_{b}^{a}f(u)(-du) = -\int_{b}^{a}f(u)du$$

می‌دانیم اگر حدود بالا و پایین عوض شود، باید انتگرال در یک صفر ضرب شود، پس $I_{1}=\int_{a}^{b}f(u)du$ که این انتگرال مساوی $\int_{b}^{a}f(x)dx$ است. فقط شکل ظاهری متغیرهای زیر انتگرال فرق می‌کند.

۸ـ گزینه «۳» حجم حاصل از دوران ناحیه بین منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ و خط $y=k$ حول خط $y=k$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V=\pi\int_a^b |f(x)-k|^2 dx \Rightarrow V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)^2 dx$$

پس داریم:

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+1-2\sin x)dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos 2x}{2}+1-2\sin x)dx=\pi(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2x)+x+2\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi((\frac{\pi}{4}-\underbrace{\frac{1}{4}(\sin\pi)}_{0}+\frac{\pi}{2}+\underbrace{2\cos\frac{\pi}{2}}_{0})-(-\frac{\pi}{4}-0-\frac{\pi}{2}+\underbrace{2\cos(-\frac{\pi}{2})}_{0}))=\pi(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})=\pi(\pi+\frac{\pi}{2})=\pi(\frac{3\pi}{2})=\frac{3}{2}\pi^2$$

توجه داشته باشید که برای محاسبه انتگرال از رابطه $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده کرده‌ایم.

۹ـ گزینه «۲» ابتدا دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$|A|=1(3\times 5-1\times 6)-2(3\times 4-2\times 6)+3(1\times 4-2\times 5)=9-18=-9$$

درایه a_{12} در A^{-1} سؤال شده است. پس داریم:

$$\text{همسازه سطر دوم و ستون اول}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1(2\times 3-3\times 1)=-3$$

بنابراین داریم:

$$\text{درایه سطر اول و ستون دوم}=-\frac{3}{-9}=\frac{1}{3}$$

۱۰ـ گزینه «۲» سؤال ساده‌ای است! به ازای هر x و y دلخواه باید تساوی برقرار باشد. فرض می‌کنیم $x=y=0$ آنگاه داریم:

$$\text{حاصل عبارت}=\text{Arctg}(0)+\text{Arcsin}(2\times 0-0+1)=0+\text{Arcsin}1=\frac{\pi}{2}$$

۱۱ـ گزینه «۴» باید در صورت سؤال گفته می‌شد خط قائم بر منحنی. با توجه به اینکه خط قائم از نقطه $(4,1)$ می‌گذرد، ابتدا باید در روابط داده شده به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، تا از روی آن بتوانیم t را بیابیم.

$$4=t^2+t-2\Rightarrow t^2+t=6\Rightarrow t=2$$

به ازای $t=2$ مقدار y نیز برابر ۱ می‌باشد، پس $t=2$ قابل قبول است. حال باید شیب را با استفاده از مشتق توابع پارامتری به دست آوریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t-5}{2t+1}\xrightarrow{t=2}\frac{8-5}{5}=\frac{3}{5}$$

پس شیب قائم برابر $-\frac{5}{3}$ می‌باشد. اکنون معادله خط موردنظر را می‌نویسیم:

$$y-1=-\frac{5}{3}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}+1\Rightarrow y=-\frac{5}{3}x+\frac{23}{3}$$

بر روی محور x ها باید $y=0$ باشد، پس داریم:

$$0=-\frac{5}{3}x+\frac{23}{3}\Rightarrow\frac{5}{3}x=\frac{23}{3}\Rightarrow x=\frac{23}{5}=4/6$$

۱۲ـ گزینه «۳» می‌توان از مشتق ضمنی کمک گرفت. توجه کنید که:

$$\text{Ln}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق تابع نسبت به } y}=-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}(1,\sqrt{3})=-\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2\times 1}{1^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{-\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2\times\sqrt{3}}{1^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\frac{1}{1}}{1+(\sqrt{3})^2}}=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}}=-\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=-\frac{3+1+2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1}=-\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}=-2-\sqrt{3}$$

۱۳ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن معادله صفحه مماس بر رویه باید ابتدا بردار گرادیان رویه را به دست آوریم، پس داریم:

$$f: 2x^2 - y^2 + 2xy - z = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla f} = (4x+2y, -2y+2x, -1) \xrightarrow{(1,2,3)} (4+4, -4+2, -1) = (8, -2, -1)$$

معادله صفحه مماس در نقطه (x_0, y_0, z_0) برابر است با:

$$f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f_z(z-z_0) = 0$$

$$8(x-1) - 2(y-2) - 1\times(z-3) = 0$$

$$8x - 8 - 2y + 4 - z + 3 = 0 \Rightarrow 8x - 2y - z = 1$$

اگر این صفحه مماس محور zها را قطع کند در آن نقطه $x = y = 0$ می‌باشند، پس داریم:

$$0 - 0 - z = 1 \Rightarrow z = -1$$

پس این صفحه مماس محور zها را با ارتفاع ۱− قطع می‌کند.

توجه مهم: البته سؤال ایراد داشته است چون نقطه‌ی (۱,۲,۳) روی رویه قرار ندارد و این اشکال علمی دارد. اما حل فوق با نادیده گرفتن این اشکال ارائه شده است. لازم به ذکر است سازمان سنجش این سؤال را در کلید نهایی و تصحیح کارنامه‌ها حذف کرد که احتمالاً به این دلیل بوده است.

۱۴ـ گزینه «۱» دیفرانسیل شامل تابع z به صورت زیر است:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{3y-2x} - 2e^{3y-2x}.x^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(3,2) = 6e^{-6} - 2\times 9e^{6-2} = -12$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3e^{3y-2x})(x^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(3,2) = 3e^{6-6}.3^2 = 27$$

باتوجه به این‌که $dx = \frac{3}{100}$ و $dy = \frac{2}{100}$ داریم:

$$dz = -12\times\frac{3}{100} + 27\times\frac{2}{100} = \frac{-36+54}{100} = \frac{18}{100} = 0/18$$

۱۵ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(-2y)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}(-2x+2y)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}(-2xy)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(+2xy-2y^2)(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-1}{1}(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}[-2xy+2xy-2y^2] = -\frac{1}{2}(1-2xy+y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2y^2) = [(1-2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}]^3(y)^2 = y^2u^3$$

۱۶ـ گزینه «۴» ابتدا باید محل تلاقی دو منحنی را حساب کنیم:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = \dfrac{8}{x^2+4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 = 32 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

با فرض $x^2 = A$ داریم:

$$A^2 + 4A - 32 = 0 \Rightarrow (A+8)(A-4) = 0 \Rightarrow A = -8 \text{ و } A = 4$$

چون $x^2 = -8$ نمی‌تواند باشد، پس $x^2 = 4$ و بنابراین $x = \pm 2$ خواهد بود. لذا داریم:

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

با استفاده از زوج بودن تابع زیر انتگرال، بازه را از صفر تا ۲ می‌نویسیم و حاصل را ۲ برابر می‌کنیم.

$$S = 2\int_0^2\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = 16\int_0^2\frac{dx}{x^2+4} - \frac{2}{4}\int_0^2 x^2dx = 16\times\frac{1}{2}[\operatorname{Arctg}\frac{x}{2}]_0^2 - \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}]_0^2 = 8\operatorname{Arctg}(1) - \frac{1}{2}(\frac{8}{3}) = 8(\frac{\pi}{4}) - \frac{4}{3} = 2\pi - \frac{4}{3}$$

۱۷ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از معادله ماتریسی داده شده، معادله‌ی سه صفحه را به دست می‌آوریم.

$$(1): x - 2y + 3z = 4 \quad , \quad (2): 2x + 3y - z = 1 \quad , \quad (3): 4x - y + 5z = 9$$

از معادله‌ی (۲)، z را به دست می‌آوریم و آن را در معادله‌های (۱) و (۳) قرار می‌دهیم تا فصل مشترک دوبه‌دوی صفحات را بیابیم.

$$z = 2x + 3y - 1 \xrightarrow{\text{در } (1)} x - 2y + 3(2x+3y-1) = 4 \Rightarrow x - 2y + 6x + 9y - 3 = 4 \Rightarrow 7x + 7y = 7 \Rightarrow x + y = 1$$

اکنون z را در معادله (۳) نیز قرار می‌دهیم.

$$4x - y + 5(2x+3y-1) = 9 \Rightarrow 4x - y + 10x + 15y - 5 = 9 \Rightarrow 14x + 14y = 14 \Rightarrow x + y = 1$$

با توجه به اینکه معادله فصل مشترک دو صفحه به صورت $x + y = 1$ می‌باشد، پس دو فصل مشترک برهم منطبق هستند.

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ فقط با جایگشت، با حروف کلمه اقتصاد بدون توجه به معنا، چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۳۶۰　۲) ۲۴۰　۳) ۱۹۲　۴) ۱۲۰

۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(1+3+\cdots+(2n-1))^{\frac{3}{2}}}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$　۲) $\frac{1}{5}$　۳) $\frac{1}{4}$　۴) $\frac{1}{3}$

۳ـ حاصل عبارت $z=\dfrac{i^{80}-i+1}{i^4+i}$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$　۲) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$　۳) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　۴) $-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$

۴ـ حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(tgx)^{\cos x}$ کدام است؟

۱) e^1　۲) ۰　۳) e　۴) ۱

۵ـ نقطه $M(2,3)$ مختصات نقطه مینیمم تابع $y=\dfrac{ax^3+b}{x^2}$ است. مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) ۸　۲) ۷　۳) ۶　۴) ۵

۶ـ اگر $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ باشد، مقدار $f^{-1}(\frac{1}{2})$، کدام است؟

۱) $-Ln3$　۲) $-Ln2$　۳) $Ln3$　۴) $Ln2$

۷ـ یکی از نقاط بحرانی تابع $\begin{cases}y=t^2+2t\\x=t^2-2t\end{cases}$، کدام است؟

۱) $(0,3)$　۲) $(3,-1)$　۳) $(-1,4)$　۴) $(-2,0)$

۸ـ در تابع f با ضابطه $f(x)=Ln(2^x+1)$، دامنه و بازه پیوستگی آن کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ و $(-\infty,+\infty)$　۲) $\mathbb{R}$ و $(-\infty,0)$　۳) $\mathbb{R}^-$ و $(-\infty,+\infty)$　۴) $\mathbb{R}^+$ و $(0,-\infty)$

۹ـ اگر $f(1)=10$ و به ازای هر $1\le x\le 4$ داشته باشیم $f'(x)\ge 2$، کمترین مقدار ممکن برای $f(4)$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۱۶　۴) ۱۸

۱۰ـ چهار جمله اول بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، کدام است؟

۱) $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots$　۲) $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots$

۳) $1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$　۴) $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$

۱۱ـ اگر $f(x)=\int_0^x(1-t^2)e^{t^2}dt$، در کدام بازه تابع f صعودی است؟

۱) $(2,\infty)$　۲) $(-1,1)$　۳) $(-1,\infty)$　۴) $(-2,2)$

۱۲ـ حاصل انتگرال $\int_{-2}^{1}x[x]|x|dx$، کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۱۳ـ اگر x مقدار کالا و y قیمت آن باشد، تابع هزینه کل تولید بنگاهی $TC=2x^2+3x+8$ است و تابع تقاضا $y=-x+17$ است، به‌ازای کدام مقدار تولید، سود بنگاه ۷ واحد پول می‌شود؟

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۶

۱۴ـ ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & m & ۱ \end{pmatrix}$ مفروض است. اگر حاصل‌ضرب مقادیر ویژه ۴۵ باشد، m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۵ـ مرتبه (Rank) ماتریس زیر، کدام است؟

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ -۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰ \\ -۱ & -۲ & -۳ & -۴ & -۵ \end{bmatrix}$$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۶ـ حد تابع زیر، کدام است؟

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} (x^۲+y^۲)Ln(x^۲+y^۲)$$

۱) $-\infty$ ۲) ∞ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۷ـ برد تابع $f(x,y)=\sqrt{\frac{۲x^۲-۳y^۲}{۲x^۲+۳y^۲}}$، کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۱,\infty)$ ۳) $\mathbb{R}^-$ ۴) $\mathbb{R}^+$

۱۸ـ اگر f تابع مشتق‌پذیر و $z=\frac{-y}{x}+f(y^۲-x^۲)$، آنگاه حاصل عبارت $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $y=۲$ و $x=۱$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹ـ اگر $u=x^۲+y^۲$، $v=x^۲-y^۲$ باشد، مقدار $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ (ژاکوبین) در نقطه (۱,۱)، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) -۸

۲۰ـ وضعیت تابع $z=۲x^۲y+xy^۲$ در نقطه (۰,۱)، از نظر تحدب چگونه است؟

۱) محدب ۲) مقعر ۳) اکیداً محدب ۴) اکیداً مقعر

۲۱ـ طول و عرض نقطه بحرانی تابع مقید $\begin{cases} z=x^۲+y^۲ \\ x-y=۳ \end{cases}$، کدام است؟

۱) $(\frac{۵}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۳}{۲},\frac{-۳}{۲})$ ۳) $(۲,-۱)$ ۴) $(۲,۱)$

۲۲ـ تابع مطلوبیت مصرف‌کننده‌ای $u=q_۱q_۲$، بودجه تخصیصی ۲۰۰، قیمت کالای اول $p_۱=۵$ و قیمت کالای دوم $p_۲=۱۰$ است. اگر بودجه تخصیصی یک واحد تغییر کند، مطلوبیت چه مقدار تغییر می‌نماید؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲ ۴) ۱/۸

۲۳ـ جواب معادله دیفرانسیل $xy'-y=x^۲$ با شرایط اولیه $y(۱)=۲$، کدام است؟

۱) $y=x^۲+x$ ۲) $y=x^۲-x$ ۳) $y=x^۲+x+۱$ ۴) $y=x^۲-x+۱$

۲۴ـ سطح محصور بین منحنی $y=\frac{۱}{x^۲+x+۱}$ و محور xها در تمامی ربع اول، کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۴\sqrt{۳}}$

۲۵ـ به ازای کدام مقدار a، مجانب‌های تابع $y=x+۱+\sqrt{ax^۲+۱}$ برهم عمودند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۹۹

۱ـ گزینه «۳» توجه داشته باشید که در حروف کلمه داده شده، «الف» دو بار تکرار شده است. پس برای حل کامل این سؤال، باید آن را به چند دسته تقسیم کنیم:

۱ـ هیچ حرف تکراری وجود نداشته باشد: در این حالت از ۵ حرف سازنده کلمه اقتصاد، باید ۴ حرف غیرتکراری انتخاب کنیم، سپس تعداد حالت‌های این انتخاب را در تعداد جایگشت‌های آن ضرب کنیم:

$$\binom{۵}{۴}\times ۴! = ۱۲۰$$

۲) حرف «الف» یک بار تکرار شده باشد: در این حالت برای دو حرف باقی‌مانده نیز ۴ انتخاب خواهیم داشت. جایگشت‌های این چهار حرف را در نظر می‌گیریم، با این نکته که نصف جایگشت‌ها به خاطر تکرار یک حرف، تکراری است پس باید حاصل را بر دو تقسیم کنیم. پس داریم:

$$\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۲}\times\frac{۴!}{۲} = ۱\times ۶\times ۱۲ = ۷۲$$

پس در مجموع خواهیم داشت:

$$۱۲۰+۷۲ = ۱۹۲$$

۲ـ گزینه «۴» ابتدا توجه داشته باشید که در مخرج مجموع اعداد فرد از ۱ تا $۲n-۱$ را داریم که همواره برابر $n^۲$ است. پس با جایگذاری این عبارت داریم:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{(۱+۳+\cdots+(۲n-۱))^{\frac{۳}{۲}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{(n^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^۳}{۳}}{n^۳} = \frac{۱}{۳}$$

توجه داشته باشید که در صورت کسر از هم‌ارزی $۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲ \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^۳}{۳}$ استفاده کرده‌ایم.

۳ـ گزینه «۲» به راحتی با جایگذاری $i^۲ = -۱$ داریم:

$$z = \frac{i^{۸۰}-i+۱}{i^۴+i} = \frac{(i^۲)^{۴۰}-i+۱}{(i^۲)^۲+i} = \frac{۲-i}{۱+i}\times\frac{۱-i}{۱-i} = \frac{۲-۱-۳i}{۱+۱} = \frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}i$$

۴ـ گزینه «۴» حد داده شده به فرم ∞° مبهم است. در نتیجه داریم:

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}(\mathrm{tg}\,x)^{\cos x} \Rightarrow \mathrm{Ln}\,A = \mathrm{Ln}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}(\mathrm{tg}\,x)^{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\mathrm{Ln}(\mathrm{tg}\,x)^{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\cos x\,\mathrm{Ln}(\mathrm{tg}\,x)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\mathrm{Ln}(\mathrm{tg}x)}{\frac{۱}{\cos x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{HOP}} \mathrm{Ln}\,A = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\frac{۱+\mathrm{tg}^۲x}{\mathrm{tg}\,x}}{\frac{\sin x}{\cos^۲ x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{(۱+\mathrm{tg}^۲x)\cos^۲ x}{\sin x\times\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\frac{۱}{\cos^۲ x}\times\cos^۲ x}{\frac{\sin^۲ x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\cos x}{\sin^۲ x} = ۰ \Rightarrow A = e^{\circ} = ۱$$

۵ـ گزینه «۴» با محاسبه نقاط بحرانی تابع (ابتدا می‌توانیم تابع کسری داده شده را ساده کنیم و سپس از آن مشتق بگیریم.) مختصات نقطه‌ی داده شده را در خود تابع قرار می‌دهیم و داریم:

$$y = ax+\frac{b}{x^۲}$$

$$۳ = ۲a+\frac{b}{۴} \quad (۱)$$

$$y' = a-\frac{۲b}{x^۳} = ۰ \Rightarrow x^۳ = \frac{۲b}{a} \Rightarrow ۲^۳ = ۸ = \frac{۲b}{a} \Rightarrow b = ۴a \quad (۲)$$

$$(۲),(۱) \Rightarrow ۳ = ۲a+a = ۳a \Rightarrow a = ۱\ ,\ b = ۴ \Rightarrow a+b = ۵$$

۶ـ گزینه «۳» با روش محاسبه‌ی مستقیم معکوس تابع داریم:

$$f^{-1}(\tfrac{1}{2})=x \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow 1+e^{-x}=2-2e^{-x} \Rightarrow 3e^{-x}=1 \Rightarrow e^{x}=3 \Rightarrow x=\mathrm{Ln}3$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به روش محاسبه نقاط بحرانی از روی مشتق تابع داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{2t-2} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \\ t\to 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\to\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow A(3,-1) \\ t\to 1 \Rightarrow B(-1,3) \end{cases}$$

۸ـ گزینه «۱» برای محاسبه دامنه داریم:

$$2^{x}+1>0 \xrightarrow{\forall x\in\mathbb{R}\,;\,2^{x}>0} 2^{x}+1>0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

از طرفی تابع $\mathrm{Ln}u$ برای هر $u>0$ پیوسته است، پس چون $2^{x}+1>0$ این تابع همواره در دامنه خود پیوسته است.

۹ـ گزینه «۳» با استفاده از قضیه مقدار میانگین در بازه $(1,4)$ خواهیم داشت:

$$\exists c\in(1,4): f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}\geq 2 \Rightarrow \frac{f(4)-10}{3}\geq 2 \Rightarrow f(4)\geq 6+10 \Rightarrow f(4)\geq 16$$

۱۰ـ گزینه «۱» با استفاده از هم‌ارزی برنولی داریم:

$$f(x)=(1-x^{2})^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(-x^{2})+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^{2})^{2}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(-x^{2})^{3}+\cdots=1+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{3}{8}x^{4}+\frac{5}{16}x^{6}+\cdots$$

۱۱ـ گزینه «۲» باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن مشتق تابع نامنفی باشد. در این صورت داریم:

$$f(x)=\int_{0}^{x}(1-t^{2})e^{t^{2}}dt$$

$$f'(x)=(1-x^{2})e^{x^{2}}>0 \xrightarrow{e^{x^{2}}>0} 1-x^{2}>0 \Rightarrow x^{2}<1 \Rightarrow -1<x<1$$

۱۲ـ گزینه «۴» با توجه به حضور قدرمطلق و جزء صحیح، انتگرال را به بازه‌های کوچک‌تر می‌شکنیم:

$$I=\int_{-2}^{1}x[x]|x|dx=\int_{-2}^{-1}x(-2)(-x)dx+\int_{-1}^{0}x(-1)(-x)dx+\int_{0}^{1}x(0)(x)dx=\int_{-2}^{-1}2x^{2}dx+\int_{-1}^{0}x^{2}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{2}{3}x^{3}\Big)_{-2}^{-1}+\frac{1}{3}x^{3}\Big)_{-1}^{0}=\frac{2}{3}(-1+8)+\frac{1}{3}(0+1)=5$$

۱۳ـ گزینه «۱» با توجه به رابطه سود داریم:

$$\pi=TR-TC=QP-TC=x(-x+17)-(2x^{2}+3x+8)=-3x^{2}+14x-8=7$$

$$\Rightarrow 3x^{2}-14x+15=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-45}}{3}=\frac{7\pm 2}{3} \to \begin{cases} x=3 & \checkmark \\ x=\frac{5}{3} & \times\ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

۱۴ـ گزینه «۲» کافی است به خاطر داشته باشید که حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس، برابر با دترمینان آن است. پس داریم:

$$|A|=1\times(1-0)-2(2-0)+3(2m-0)=45 \Rightarrow 1-4+6m=45 \Rightarrow 6m=48 \Rightarrow m=8$$

۱۵ـ گزینه «۴» باید حداکثر تعداد سطرها و ستون‌های مستقل ماتریس را به دست آوریم. با بررسی سطرهای ماتریس واضح است که سطر سوم دو برابر سطر اول و سطر چهارم قرینه‌ی سطر اول است. پس مرتبه حداکثر ۲ خواهد بود. از طرفی واضح است که سطر دوم و اول از هم مستقل هستند (زیرا هیچ‌یک مضربی از دیگری نیست) پس مرتبه‌ی ماتریس دقیقاً ۲ است.

۱۶ـ گزینه «۳» با تبدیل حد داده شده به مختصات قطبی به راحتی داریم:

$$L=\lim_{r\to 0^+} r^2 \operatorname{Ln} r^2=\lim_{r\to 0^+} 2r^2 \operatorname{Ln} r=0$$

توجه کنید در تساوی آخر از این نکته‌ی مهم استفاده کردیم که همواره با شرط $\alpha,\beta>0$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}(\log_b x)^{\beta}=0$$

---

۱۷ ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که $2x^2$ و $3y^2$ عباراتی همواره مثبت می‌باشند همواره $2x^2+3y^2\geq 2x^2-3y^2$ می‌باشد، پس با تقسیم دو طرف نامساوی بر $2x^2+3y^2$ داریم:

$$0\leq \frac{2x^2-3y^2}{2x^2+3y^2}\leq 1 \Rightarrow R_f=[0,1]$$

۱۸ـ گزینه «۳»

روش اول: با محاسبه مستقیم مشتق جزئی داریم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{y}{x^2}-2xf'(y^2-x^2)\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{-1}{x}+2yf'(y^2-x^2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^2}{x^2}-1=\frac{4}{1}-1=3$$

روش دوم: با فرض $f(y^2-x^2)=y^2-x^2$ داریم:

$$z=\frac{-y}{x}+y^2-x^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{y}{x^2}-2x\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{-1}{x}+2y\end{aligned}\quad\Rightarrow y\left(\frac{y}{x^2}-2x\right)+x\left(\frac{-1}{x}+2y\right)=\frac{y^2}{x^2}-2\cancel{xy}-1+2\cancel{xy}=\frac{y^2}{x^2}-1\xrightarrow[x=1]{y=2}4-1=3$$

۱۹ـ گزینه «۴» با کمک دترمینان ژاکوبین داریم:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2x & -2y\end{vmatrix}\xrightarrow{(1,1)}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-4-4=-8$$

۲۰ـ «هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.» باید وضعیت معین مثبت یا معین منفی بودن ماتریس هسین تابع را بررسی کنیم. در این صورت داریم:

$$H=\begin{bmatrix}z_{xx} & z_{xy}\\ z_{yx} & z_{yy}\end{bmatrix}$$

$$z_x=4xy+y^2\Rightarrow z_{xx}=4y\quad ;\quad z_{xy}=4x+2y=z_{yx}$$

$$z_y=2x^2+2xy\Rightarrow z_{yy}=2x$$

$$\Rightarrow H=\begin{bmatrix}4y & 4x+2y\\ 4x+2y & 2x\end{bmatrix}\xrightarrow{(0,1)}H=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{cases}H_1=4>0\\ H_2=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0\end{cases}$$

پس ماتریس هسین نامعین است و این یعنی نقطه مذکور زینی است.

۲۱ـ گزینه «۲» در واقع باید نقطه بحرانی تابع دو متغیره $f(x,y)=x^2+y^2$ را با شرط $x-y=3$ به دست آوریم. برای این کار با یک جایگذاری ساده داریم:

$$f(x)=x^2+(x-3)^2\Rightarrow f'(x)=2x+2(x-3)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$$

۲۲ـ گزینه «۳» با توجه به این‌که $p_1=5$ و $p_2=10$ می‌باشد، خط بودجه به صورت $5q_1+10q_2=200$ است، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$U=q_1q_2 \qquad V=5q_1+10q_2-200=0$$

$$\frac{U_{q_1}}{V_{q_1}}=\frac{U_{q_2}}{V_{q_2}} \Rightarrow \frac{q_2}{5}=\frac{q_1}{10} \Rightarrow q_1=2q_2$$

اکنون با جایگذاری این رابطه در معادله خط بودجه داریم:

$$5q_1+10q_2=200 \Rightarrow 5(2q_2)+10q_2=200 \Rightarrow 10q_2+10q_2=200 \Rightarrow 20q_2=200 \Rightarrow q_2=10 \Rightarrow q_1=2(10)=20$$

پس مقدار مطلوبیت برابر است با: $U=q_1q_2=20(10)=200$

حالا اگر بودجه به اندازه ۱ واحد اضافه شود، داریم:

$$5q_1+10q_2=201 \xrightarrow{q_1=2q_2} 10q_2+10q_2=201 \Rightarrow 20q_2=201 \Rightarrow q_2=10/05 \Rightarrow q_1=20/1$$

پس مطلوبیت در این حالت برابر است با: $U=(20/1)(10/05)=202/005$

پس مطلوبیت حدود ۲ واحد تغییر می‌کند.

۲۳ـ گزینه «۱»

روش اول: با استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی تفکیک‌ناپذیر (جدانشدنی) داریم:

$$xy'-y=x^2 \xrightarrow{\div x} y'-\frac{1}{x}y=x$$

$$y=e^{-\int f(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int f(x)dx}dx+c\right)$$

$$y=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+c\right)$$

$$y=e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx+c\right)$$

$$y=e^{Lnx}\left(\int xe^{-Lnx}dx+c\right)$$

$$y=x\left(\int x(\frac{1}{x})dx+c\right)=x(x+c)=x^2+cx$$

با توجه به شرط $y(1)=2$ داریم: $2=(1)^2+c(1) \Rightarrow c=1 \Rightarrow y=x^2+x$

روش دوم: با بازنویسی معادله به صورت مقابل داریم: $xy'-y=x^2 \Rightarrow \frac{xy'-y}{x^2}=1 \Rightarrow (\frac{y}{x})'=1 \Rightarrow \frac{y}{x}=x+c \Rightarrow y=x^2+cx$

$$y(1)=2 \Rightarrow 2=1+c \Rightarrow c=1 \Rightarrow y=x^2+x$$

۲۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه همواره $y>0$ پس حد انتگرال مساحت از $x=0$ تا بی‌نهایت خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$S=\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}=\int_0^\infty \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}tg^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Big|_0^\infty=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

۲۵ـ گزینه «۲» توجه داشته باشید تابع داده شده فاقد مجانب قائم است. حالا وضعیت مجانب‌های مایل آن را بررسی می‌کنیم:

$$y=x+1+\sqrt{ax^2+1}\sim x+1+\sqrt{a}|x| \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty \Rightarrow y\simeq(1+\sqrt{a})x+1 \\ x\to-\infty \Rightarrow y\simeq(1-\sqrt{a})x+1 \end{cases}$$

$$m_1m_2=-1 \Rightarrow (1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})=-1 \Rightarrow 1-a=-1 \Rightarrow a=2$$