مدرسان شریف

فصل اول

اعداد و توابع مختلط

درسنامه (۱): اعداد مختلط و خواص آن

مثال ۱: حاصل $A=(1+2i)(i+2)$ برابر است با:

۱) $5i$ ۲) $-5i$ ۳) $4+5i$ ۴) $4-5i$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از ضرب عدد مختلط داریم:

$$A=(1+2i)(2+i)=2+i+4i+2i^2=2+5i-2=5i$$

مثال ۲: حاصل $A=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ کدام است؟

۱) i ۲) $-i$ ۳) 4 ۴) -4

پاسخ: گزینه «۱» عبارت را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}i^2}{(\sqrt{3})^2-i^2}=\frac{4i}{4}=i$$

مثال ۳: حاصل $A=\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ کدام است؟

۱) $\frac{i}{10}$ ۲) $-\frac{i}{10}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{1}{10}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید پرانتزها را در هم ضرب کرده و سپس با استفاده از $i^2=-1$، مخرج را ساده کنیم:

$$A=\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}=\frac{1}{(2+i+2i+i^2)(3+i)}=\frac{1}{(1+3i)(3+i)}\Rightarrow A=\frac{1}{3+i+9i+3i^2}=\frac{1}{10i}=\frac{1}{10i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{10i^2}=-\frac{i}{10}$$

مثال ۴: مقدار $\frac{i^{36}-i^{27}}{i^{124}-i^{12}+i^5}$ برابر کدام است؟

۱) $1-i$ ۲) $1+i$ ۳) $i-1$ ۴) $-i-1$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $i^2=-1$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{i^{36}-i^{27}}{i^{124}-i^{12}+i^5}=\frac{(i^2)^{18}-(i^2)^{13}i}{(i^2)^{62}-(i^2)^6+(i^2)^2i}=\frac{(-1)^{18}-(-1)^{13}i}{(-1)^{62}-(-1)^6+(-1)^2i}=\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i-1}{-1}=1-i$$

مثال ۵: حاصل $S=\frac{1+i^{1390}+i^{1391}+i^{1392}+i^{1393}}{1-(i^{2011}+i^{2012}+i^{2013}+i^{2014})}$، کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) $-i$

پاسخ: گزینه «۲» طبق نکته‌ی فوق مجموع هر چهار توان متوالی از i برابر با صفر است. پس مجموع چهار توان i در صورت و مخرج صفرند، بنابراین فقط اعداد ۱ در صورت و مخرج باقی می‌مانند. پس $S=\frac{1}{1}=1$ می‌شود.

مثال ۶: فرض کنید $z \in C$ و $|z+ai| = |z+bi|$ (a و b اعداد حقیقی و $a \neq b$)، در این صورت مقدار $z-\bar{z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-(a+b)i$ ۲) $-(a-b)i$ ۳) $(a-b)i$ ۴) $(a+b)i$

پاسخ: گزینه «۱» با فرض $z = x+iy$ داریم:

$$|x+iy+ai| = |x+iy+bi| \Rightarrow x^2+(y+a)^2 = x^2+(y+b)^2 \Rightarrow y+a = \pm(y+b) \Rightarrow y = -(\frac{a+b}{2}) \quad (1)$$

$$z-\bar{z} = (x+iy)-(x-iy) = 2yi \xrightarrow{(1)} z-\bar{z} = 2[-(\frac{a+b}{2})]i = -(a+b)i$$

مثال ۷: در معادله مختلط $3x+2iy-ix+5y = 7+5i$، مقادیر اعداد حقیقی x و y کدام است؟

۱) $x=-1\,, y=2$ ۲) $x=1\,, y=-2$ ۳) $x=0\,, y=-2$ ۴) $x=1\,, y=0$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طرف چپ تساوی را مرتب می‌کنیم:

$$(3x+5y)+(2y-x)i = 7+5i$$

برای این که تساوی فوق برقرار باشد، لازم است مقادیر حقیقی و موهومی در طرفین تساوی با یکدیگر برابر باشند، یعنی داریم:

$$\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 2y-x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y=7 \\ 6y-3x=15 \end{cases} \Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y=2\,, x=-1$$

مثال ۸: معادله‌ی خط $2x+3y=5$ در صفحه‌ی مختلط دارای چه معادله‌ای است؟

۱) $(3i-2)z+(3+2i)\bar{z} = 5i$ ۲) $(2i-3)z+(3+2i)\bar{z} = 5i$ ۳) $(3+2i)z+(3i-2)\bar{z} = 10i$ ۴) $(3+2i)z+(2i-3)\bar{z} = 10i$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$، لذا داریم:

$$2(\frac{z+\bar{z}}{2})+3(\frac{z-\bar{z}}{2i}) = 5 \Rightarrow z+\bar{z}+\frac{3}{2i}(z-\bar{z}) = 5 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 2i} (2i)z+(2i)\bar{z}+3z-3\bar{z} = 10i \Rightarrow (2i+3)z+(2i-3)\bar{z} = 10i$$

مثال ۹: حاصل عبارت $k = \frac{\sqrt{1+z^2}+iz}{z-i\sqrt{1+z^2}}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $-i$ ۳) ۱-   ۴) $+i$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با ضرب کردن مزدوج عبارت مخرج، در صورت و مخرج کسر داریم:

$$k = \frac{(\sqrt{1+z^2}+iz)(z+i\sqrt{1+z^2})}{(z-i\sqrt{1+z^2})(z+i\sqrt{1+z^2})} = \frac{z\sqrt{1+z^2}+i(1+z^2)+iz^2+i^2z\sqrt{1+z^2}}{z^2-i^2(1+z^2)} = \frac{i(2z^2+1)}{2z^2+1} = i$$

روش دوم: راه حل ساده‌تر این است که با توجه به عبارت‌های صورت و مخرج، کسر را در عبارت $\frac{i}{i}$ ضرب کنیم و i را در صورت کسر، پشت پرانتز، نگه داشته و i در مخرج کسر را، در پرانتز ضرب کنیم:

$$\frac{(\sqrt{1+z^2}+iz)}{(z-i\sqrt{1+z^2})}\times\frac{i}{i} = \frac{i(\sqrt{1+z^2}+iz)}{(iz+\sqrt{1+z^2})} = i$$

مثال ۱۰: اگر $|z|=1$، آنگاه حاصل $|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}|$ برابر کدام گزینه است؟ (a و b اعدادی مختلط هستند، که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی $|z|^2 = z\bar{z}$ داریم:

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|^2 = (\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}})(\overline{\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}}) = (\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}})(\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{b\bar{z}+a})$$

چون $|z|=1$ می‌باشد، لذا $z\bar{z} = |z|^2 = 1$، پس $\bar{z} = \frac{1}{z}$ می‌باشد و داریم:

$$|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}|^2 = (\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}})(\frac{\bar{a}\frac{1}{z}+\bar{b}}{b(\frac{1}{z})+a}) = (\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}})(\frac{\frac{\bar{a}+\bar{b}z}{z}}{\frac{b+az}{z}}) = (\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}})(\frac{\bar{a}+\bar{b}z}{b+az}) = 1$$

مثال۱۱: فرض کنید $w=\frac{az+b}{cz+d}$، که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی هستند. می‌توان گفت: در تساوی $\frac{w-\bar{w}}{z-\bar{z}}=\frac{k}{|cz+d|^2}$ مقدار k برابر با .... می‌باشد و با شرط $k>0$، مقادیر z و w .... هم علامت هستند.

(با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه تهران)

۱) $ad-bc$، موهومی ۲) $ad-bc$، حقیقی ۳) $\frac{a}{c}+b$، موهومی ۴) $\frac{a}{c}+b$، حقیقی

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا $w-\bar{w}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$w-\bar{w}=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-\left(\overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right)=\frac{az+b}{cz+d}-\overline{\frac{az+b}{cz+d}}$$

با توجه به خواص اعداد مختلط و توجه به اینکه مزدوج هر عدد حقیقی خودش است، داریم:

$$w-\bar{w}=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}=\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)-(a\bar{z}+b)(cz+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}=\frac{acz\bar{z}+azd+bc\bar{z}+bd-a\bar{z}cz-a\bar{z}d-bcz-bd}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}$$

پس از ساده کردن صورت کسر داریم:

$$w-\bar{w}=\frac{ad(z-\bar{z})-bc(z-\bar{z})}{(cz+d)\overline{(cz+d)}}=\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}\Rightarrow \frac{w-\bar{w}}{z-\bar{z}}=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}$$

بنابراین با توجه به صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت $k=ad-bc$ می‌باشد. خُب نقطه‌چین اول پُر شد! سراغ پُر کردن نقطه‌چین بعدی می‌رویم!

حل قسمت دوم راحت است، چون می‌دانیم « $w-\bar{w}$ » برابر با «دو برابر قسمت موهومی w » و « $z-\bar{z}$ » برابر با «دو برابر قسمت موهومی z» است، یعنی داریم:

$$\frac{\text{قسمت موهومی } w}{\text{قسمت موهومی } z}=\frac{k}{|cz+d|^2}$$

با توجه به اینکه k و $|cz+d|$ مثبت هستند، پس هر علامتی که قسمت موهومی z داشته باشد، قسمت موهومی w نیز همان علامت را خواهد داشت.

مثال۱۲: اگر $z_1=3-4i$, $z_2=3i-4$ آنگاه حاصل $A=\frac{z_1.z_2}{z_1\times z_2}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{24}$ ۲) $-\frac{7}{24}$ ۳) $-\frac{24}{7}$ ۴) $\frac{24}{7}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_1.z_2=(3)(-4)+(-4)(3)=-24\\ z_1\times z_2=(3)(3)-(-4)(-4)=-7\end{cases}\Rightarrow A=\frac{z_1.z_2}{z_1\times z_2}=\frac{24}{7}$$

مثال۱۳: اگر $z=i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$، آن‌گاه فرم قطبی z کدام است؟

۱) $(2,\frac{\pi}{6})$ ۲) $(2,\frac{\pi}{3})$ ۳) $(4,\frac{\pi}{6})$ ۴) $(4,\frac{\pi}{3})$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم تا عبارت ساده شود:

$$z=(i-i^2\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)=(i+\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)=(\sqrt{3}+i)^2=(\sqrt{3})^2+i^2+2\sqrt{3}i=3-1+2\sqrt{3}i=2+2\sqrt{3}i$$

ابتدا اندازه‌ی z را حساب می‌کنیم:

$$r=|z|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+4\times 3}=\sqrt{16}=4$$

حالا باید آرگومان z را حساب کنیم و لذا داریم:

$$\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})=\mathrm{Arctg}(\frac{2\sqrt{3}}{2})=\mathrm{Arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

چون θ در ربع اول قرار دارد، بنابراین همان $\theta=\frac{\pi}{3}$ مورد قبول است. پس $z=(4,\frac{\pi}{3})$، فرم قطبی مطلوب است.

مثال۱۴: اگر $z_1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$ و $z_2=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$، مقدار $\frac{z_1^4}{z_2}$ کدام است؟

۱) $-i$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) i

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا اعداد داده شده را به فرم نمایی می‌نویسیم. یعنی؛ $z_1=e^{\frac{\pi}{5}i}$ و $z_2=e^{-\frac{\pi}{5}i}$، و داریم:

$$\frac{z_1^4}{z_2}=\frac{(e^{\frac{\pi}{5}i})^4}{e^{-\frac{\pi}{5}i}}=e^{\frac{4\pi}{5}i}.e^{\frac{\pi}{5}i}=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

مثال ۱۵: حاصل i^{-i} برابر چیست؟

۱) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ ۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$، لذا داریم:
$$i^{-i} = (e^{\frac{\pi}{2}i})^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۱۶: حاصل $(2+2\sqrt{3}i)^5$ کدام است؟

۱) $1024\measuredangle 60^\circ$ ۲) $1024\measuredangle 300^\circ$ ۳) $256\sqrt{2}\measuredangle 30^\circ$ ۴) $256\sqrt{2}\measuredangle 60^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم $2+2\sqrt{3}i = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$، بنابراین داریم:
$$(2+2\sqrt{3}i)^5 = (4e^{\frac{\pi}{3}i})^5 = 4^5(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1024\angle 300^\circ$$

مثال ۱۷: حاصل عبارت $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تقسیم دو عبارت بر هم و توان ۸ برای صورت کسر بهتر است در مختصات نمایی سؤال را حل کنیم:
$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \ ,\ -1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})} = \frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^8}{2^7\times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{8\pi}{3}i}}{e^{\frac{2\pi}{3}i}} = e^{\frac{6\pi}{3}i} = 1$$

مثال ۱۸: حاصل $z = 1+i+i^2+\dots+i^{1392}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{i+1}{i-1}$ ۴) $-\frac{i+1}{i-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با شرط $k \neq 1$، به ازای هر k همواره رابطه‌ی مقابل را داریم:
$$1+k+k^2+\dots+k^{n-1} = \frac{k^n-1}{k-1}$$

با توجه به صورت سؤال خواهیم داشت:
$$z = \frac{i^{1393}-1}{i-1} = \frac{i(i)^{1392}-1}{i-1} = \frac{i(i^2)^{696}-1}{i-1} = \frac{i(-1)^{696}-1}{i-1} = \frac{i-1}{i-1} = 1$$

مثال ۱۹: حاصل $A = (1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ کدام است؟

۱) $2^{n+1}\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}]$ ۲) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2} - i\sin\frac{n\alpha}{2}]$

۳) $2^{n+1}\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2} - i\sin\frac{n\alpha}{2}]$ ۴) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$، و همچنین $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$، با جایگذاری این مقادیر در رابطه داریم:
$$A = (1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2})^n$$

با فاکتورگیری از عبارت $2\cos\frac{\alpha}{2}$ داریم:
$$A = [2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2})]^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}]$$

مثال ۲۰: اگر تابع $f(x)=(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-ax\sin n\alpha$ بر $x^۲+۱$ بخش‌پذیر باشد، حاصل $a-b$ چقدر باید باشد؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲- ‏ ۳) ۱- ‏ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه تابع $f(x)$ بر $x^۲+۱$ بخش‌پذیر باشد، باید ریشه‌های معادله $x^۲+۱=۰$ را بدست آوریم و آن‌ها را در ضابطه‌ی $f(x)$ به جای xها قرار دهیم. هر دو ریشه باید $f(x)$ را صفر کنند. پس اول ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$x^۲+۱=۰\Rightarrow(x-i)(x+i)=۰\Rightarrow x=\pm i$$

$$f(i)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-ai\sin n\alpha=۰\Rightarrow\cos n\alpha+i\sin n\alpha+b\cos n\alpha-ai\sin n\alpha=۰\Rightarrow(۱+b)(\cos n\alpha)+i(۱-a)\sin n\alpha=۰$$

برای صفر شدن سمت چپ باید مقادیر حقیقی و موهومی صفر شوند، بنابراین $b=-۱$ و $a=۱$ می‌شود. اگر قرار دهیم $x=-i$ داریم:

$$f(-i)=(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-a(-i)\sin n\alpha=۰\Rightarrow\cos n\alpha-i\sin n\alpha+b\cos n\alpha+ai\sin n\alpha=۰$$

$$\Rightarrow(۱+b)\cos n\alpha+i(a-۱)\sin n\alpha=۰\Rightarrow b=-۱\,,\,a=۱$$

بنابراین $a-b=۱-(-۱)=۲$ می‌شود.

مثال ۲۱: حاصل $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $e^{\sin x}\cos(\sin x)$ ‏ ۲) $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ ‏ ۳) $e^{\cos x}\cos(\sin\pi x)$ ‏ ۴) $e^{\sin x}\cos(\sin\pi x)$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{u^n}{n!}=e^u$، اگر فرض کنیم در این سری $u=e^{ix}$ آن‌گاه داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}=e^{e^{ix}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}=e^{e^{ix}}=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}.e^{i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]$$

اما سری داده شده در صورت سؤال قسمت حقیقی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$ است، پس جواب سؤال، به صورت $e^{\cos x}(\cos(\sin x))$ است.

واضح است اگر مقدار $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ خواسته شده بود، حاصل برابر با $e^{\cos x}\sin(\sin x)$ می‌شد.

مثال ۲۲: حاصل $z=\sqrt{۱+\sqrt{۳}i}$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{۱+\sqrt{۳}i}$ ‏ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ‏ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+i$ ‏ ۴) $\sqrt{\sqrt{۳}+i}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $۱+\sqrt{۳}i=۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$، پس باید ریشه‌های دوم این عدد را حساب کنیم، بنابراین داریم:

$$z=\sqrt{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}=\sqrt{۲}e^{i(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲})}=\sqrt{۲}[\cos(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲})+i\sin(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲})]\Rightarrow k=۰\Rightarrow z=\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶})=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{i}{۲})=\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{i\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال ۲۳: یکی از کعب‌های عدد $z=\frac{۱+i}{۱+i+(۱-i)^۲}$ به کدام صورت است؟

۱) $\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳}$ ‏ ۲) $\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}$ ‏ ۳) $\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}$ ‏ ۴) $\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا عبارت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و در نهایت پس از نوشتن فرم نمایی z، ریشه‌های سوم z را حساب می‌کنیم:

$$z=\frac{۱+i}{۱+i+(۱-i)^۲}=\frac{۱+i}{۱+i+۱+i^۲-۲i}=\frac{۱+i}{۱-i}\xrightarrow[\text{در عبارت }(۱+i)]{\text{ضرب صورت و مخرج}}z=\frac{۱+i}{۱-i}\times\frac{۱+i}{۱+i}=\frac{(۱+i)^۲}{۱-i^۲}=\frac{۱+i^۲+۲i}{+۲}=i\Rightarrow z=e^{\frac{\pi}{۲}i}$$

$$\sqrt[۳]{z}=\sqrt[۳]{۱}[\cos(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}{۳})+i\sin(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}{۳})]\xrightarrow{k=۰}\sqrt[۳]{z}=\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}$$

مثال ۲۴: اگر $z=-۱$ ، آنگاه مقدار آرگومان $z^{\frac{۲}{۳}}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$
۲) $\frac{۵\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ یا $\frac{۴\pi}{۳}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$ یا $\frac{۴\pi}{۳}$ یا ۲π

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $z=-۱$ را می‌توان به صورت $z=e^{i\pi}$ نوشت و بنابراین $r=۱$ و $\theta=\pi$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$z^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۱}e^{i(\frac{\pi+۲k\pi}{۳})}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}z^{\frac{۲}{۳}}=e^{i(\frac{\pi+۲k\pi}{۳})\times ۲}=e^{i[\frac{۲}{۳}(\pi+۲k\pi)]}\quad,\quad k=۰,۱,۲\Rightarrow \arg(z^{\frac{۲}{۳}})=\frac{۲}{۳}(\pi+۲k\pi)\quad,\quad k=۰,۱,۲$$

آرگومان $z^{\frac{۲}{۳}}$ می‌تواند هر کدام از سه مقدار زیر باشد که به ازای سه مقدار k به دست می‌آید:

$$k=۰\Rightarrow \arg(z^{\frac{۲}{۳}})=\frac{۲\pi}{۳}\quad,\quad k=۱\Rightarrow \arg(z^{\frac{۲}{۳}})=\frac{۲}{۳}(۳\pi)=۲\pi\quad,\quad k=۲\Rightarrow \arg(z^{\frac{۲}{۳}})=\frac{۲}{۳}(۵\pi)=\frac{۱۰\pi}{۳}$$

البته می‌دانیم که $\frac{۱۰\pi}{۳}=۲\pi+\frac{۴\pi}{۳}$ همان زاویه‌ی $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

مثال ۲۵: اگر ۱، ω ، $\omega^۲$ ، $\omega^۳$ ، $\omega^۴$ ریشه‌های پنجم واحد باشند، آنگاه حاصل $A=(۳-\omega)(۳-\omega^۲)(۳-\omega^۳)(۳-\omega^۴)$ کدام است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۱۲۱
۳) ۲۴۳
۴) ۲۴۲

پاسخ: گزینه «۲» طبق تساوی سمت راست، به ازای $z=۳$ و $k=۵$ داریم:

$$A=۱+۳+۳^۲+\cdots+۳^۴=\frac{۳^۵-۱}{۳-۱}=۱۲۱$$

مثال ۲۶: اگر ۱، ω ، $\omega^۲$ ، $\omega^۳$ و... $\omega^{۱۳۹۴}$ ریشه‌های «۱۳۹۵ام» واحد باشند، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A=(۱۳۹۴-\omega)(۱۳۹۴-\omega^۲)(۱۳۹۴-\omega^۳)\cdots(۱۳۹۴-\omega^{۱۳۹۵})$$

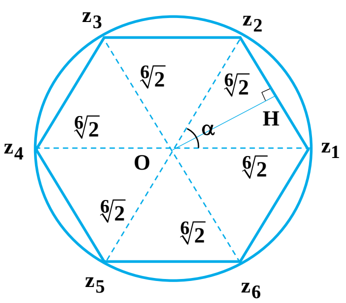
۱) ۰
۲) $(۱۳۹۵)^{۱۳۹۴}-۱$
۳) $(۱۳۹۴)^{۱۳۹۵}-۱$
۴) $(۱۳۹۴)^{۱۳۹۵}$

پاسخ: گزینه «۳» دقت کنید در این سؤال پرانتزها به اندازه ۱۳۹۵ تا هستند، یعنی باید از تساوی سمت چپ استفاده کنیم؛ با توجه به نکته گفته شده، در این سؤال $n=۱۳۹۵$ و $z=۱۳۹۴$ می‌باشد و با توجه به تساوی سمت چپ داریم:

$$A=(۱۳۹۴)^{۱۳۹۵}-۱$$

مثال ۲۷: ریشه‌های ششم عدد ۲ رئوس یک شش ضلعی منتظم را تشکیل داده‌اند. اگر مساحت این شش ضلعی را S بنامیم، مقدار S برابر با کدام گزینه است؟

۱) $۳\sqrt[۳]{۳}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$
۲) $۳\sqrt{۳}\times\sqrt[۶]{۲}$
۳) $۳\sqrt{۳}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲})$
۴) $۹\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt{۲}$



پاسخ: گزینه «۳» طبق مطالب گفته شده، این ریشه‌ها بر روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[۶]{۲}$ قرار می‌گیرند که فاصله آن‌ها بر روی دایره $\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۶}$ می‌باشد. مثلاً طول کمان $\overset{\frown}{z_۱z_۲}$ برابر با $\frac{\pi}{۳}$ است، چون این کمان رو به‌روی زاویه‌ی مرکزی α است، لذا $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. در مثلث $oz_۱z_۲$ زاویه‌ی رأس برابر با $\frac{\pi}{۳}$ است و چون اندازه‌ی دو ساق برابر با $\sqrt[۶]{۲}$ می‌باشد، بنابراین دو زاویه‌ی دیگر مثلث با هم برابر و اجباراً مساوی $\frac{\pi}{۳}$ هستند و این یعنی مثلث $o\overset{\Delta}{z_۱}z_۲$ متساوی‌الاضلاع است. اگر ارتفاع OH را رسم کنیم در مثلث $\overset{\Delta}{OHz_۱}$ داریم:

$$\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{OH}{Oz_۱}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{OH}{\sqrt[۶]{۲}}\Rightarrow OH=\sqrt[۶]{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین مساحت مثلث $o\overset{\Delta}{z_۱}z_۲$ به صورت مقابل است:

$$o\overset{\Delta}{z_۱}z_۲=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{\sqrt[۶]{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt[۶]{۲}}{۲}=\frac{\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt{۳}}{۴}$$

چون ۶ مثلث به این شکل داریم، بنابراین مساحت ۶ ضلعی ۶ برابر مساحت مثلث $o\overset{\Delta}{z_۱}z_۲$ است:

$$S=۶\times(\frac{\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt{۳}}{۴})=\frac{۳}{۲}\times\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲})$$

مثال ۲۸: اگر نقطه‌ی $z=-1+i$، یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^7+az^3+2b=0$ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۲ ۴) -12

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کنند، با قرار دادن $z=-1+i$ در معادله داده شده، داریم:

$$z^7+az^3+2b=0 \Rightarrow (-1+i)^7+a(-1+i)^3+2b=0$$

$$((-1+i)^2)^3(-1+i)+a(-1+i)^2(-1+i)+2b=0 \Rightarrow (1+i^2-2i)^3(-1+i)+a(1+i^2-2i)(-1+i)+2b=0 \Rightarrow$$

$$-8(i^2)i(-1+i)+a(2i-2i^2)+2b=0 \Rightarrow -8i+8i^2+2ai+2a+2b=0$$

$$-8+2a+2b+i(2a-8)=0 \Rightarrow \begin{cases}-8+2a+2b=0\\ 2a-8=0 \Rightarrow a=4\end{cases} \Rightarrow -8+8+2b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \mathbf{a+b=4}$$

روش دیگر: البته با توجه به اینکه توان z، ۷ و ۳ می‌باشد و راه‌حل فوق می‌تواند توأم با خطا باشد، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم توجه کنید که چون نقطه در ربع دوم قرار دارد لذا $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$، بنابراین داریم:

$$z^7=(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^7=2^3\times\sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{4}}=8\sqrt{2}[\cos(\frac{21\pi}{4})+i\sin(\frac{21\pi}{4})]=8\sqrt{2}[\cos(5\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(5\pi+\frac{\pi}{4})] \Rightarrow$$

$$z^7=-8\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-i8\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=-8-8\times i=-8-8i$$

$$z^3=(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^3=2\times\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}=2\sqrt{2}[\cos(\frac{9\pi}{4})+i\sin(\frac{9\pi}{4})]=2\sqrt{2}[\cos(2\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(2\pi+\frac{\pi}{4})] \Rightarrow$$

$$z^3=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+i2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+i2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2+2i$$

حالا مقادیر فوق را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$z^7+az^3+2b=0 \Rightarrow -8-8i+2a+(2a)i+2b=0 \Rightarrow (2a+2b-8)+(2a-8)i=0 \Rightarrow a=4, b=0$$

مثال ۲۹: یکی از ریشه‌های معادله $z^2+(2i-3)z+5-i=0$ کدام است؟

۱) $1-i$ ۲) $2+3i$ ۳) $2-3i$ ۴) $-1-i$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید دلتای معادله را تشکیل دهیم:

$$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(2i-3)^2-4(1)(5-i)}=\sqrt{4i^2+9-12i-20+4i}=\sqrt{-15-8i}=\sqrt{(1-4i)^2}=1-4i$$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2i-3)\pm(1-4i)}{2\times 1} \Rightarrow \begin{cases}z_1=\dfrac{-2i+3+1-4i}{2}=\dfrac{4-6i}{2}=2-3i\\ z_2=\dfrac{-2i+3-1+4i}{2}=\dfrac{2+2i}{2}=1+i\end{cases}$$

مثال ۳۰: اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادله‌ی $z^2-2z+4=0$ باشند، حاصل $A=z_1^6+z_2^6-3z_1^3z_2^3$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) -128 ۳) -64 ۴) ۱۲۸

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به معادله‌ی داده شده، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{4}{1}=4$ است، بنابراین $z_1z_2=4$ می‌شود. پس فقط کافیست $z_1^6+z_2^6$ حساب شود. برای این منظور لازم است ریشه‌های معادله حساب شود:

$$z^2-2z+4=0 \Rightarrow z_{1,2}=1\pm\sqrt{-3}=1\pm i\sqrt{3} \Rightarrow z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z_1^6+z_2^6=2^6e^{6i\times\frac{\pi}{3}}+2^6e^{-i6\times\frac{\pi}{3}}=2^6\cos(2\pi)+i2^6\sin 2\pi+2^6\cos(-2\pi)-i2^6\sin 2\pi=2^6\times 1+2^6\times 1=2\times 2^6=2^7=128$$

بنابراین داریم:

$$z_1^6+z_2^6-3z_1^3z_2^3=128-3(4)^3=128-192=\mathbf{-64}$$

مثال ۳۱: کدام‌یک از گزینه‌های زیر از ریشه‌های معادله‌ی $z^8+z^4+1=0$ <u>نیست</u>؟

۱) $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ۳) $\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا معادله داده شده را به یک معادله درجه ۲ تبدیل می‌کنیم و سپس ریشه‌های این معادله را بدست می‌آوریم و بنابراین داریم:

$$(z^4)^2+z^4+1=0 \xrightarrow{z^4=x} x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta=1-4=-3 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z=\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}} \quad , \quad r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \quad , \quad tg\theta=\sqrt{3} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \theta=\frac{4\pi}{3}$$

$$z=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4})\begin{cases} k=0\Rightarrow z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \Rightarrow \text{پس گزینه (۲) ریشه‌ی معادله است} \\ k=1\Rightarrow z=\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6}) & \Rightarrow \text{پس گزینه (۱) ریشه‌ی معادله است} \\ k=2\Rightarrow z=\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3}) & \Rightarrow \text{پس گزینه (۳) ریشه‌ی معادله است} \end{cases}$$

مثال ۳۲: اگر $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ آنگاه حاصل $z^n+\frac{1}{z^n}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $2\sin n\theta$ ۲) $2\cos n\theta$ ۳) $(2\cos\theta)^n$ ۴) $(2\sin\theta)^n$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به فرض، مقدار z را حساب می‌کنیم:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z^2-2z\cos\theta+1=0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}}{1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}$$

$$z=\cos\theta\pm i\sqrt{\sin^2\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$$

اگر $z=e^{i\theta}$، آنگاه $\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$، لذا داریم:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

اگر $z=e^{-i\theta}$ آنگاه $\frac{1}{z}=e^{i\theta}$، لذا داریم:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{-in\theta}+e^{in\theta}=(\cos n\theta-i\sin n\theta)+(\cos n\theta+i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

همان‌طور که ملاحظه کردید در هر دو حالت مقدار عبارت برابر $2\cos n\theta$ به دست آمد.

مثال ۳۳: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^3-7z^2+25z-39=0$ برابر با <u>۳</u> است. دو ریشه‌ی دیگر کدامند؟

۱) ۱- و ۱۳ ۲) ۱- و ۵ ۳) $2-3i$ و $2+3i$ ۴) $3-2i$ و $3+2i$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که یک ریشه $z=3$ است لذا معادله را بر $(z-3)$ تقسیم می‌کنیم. تقسیم را از دبیرستان بلدیم!

$$\begin{array}{l|l} z^3-7z^2+25z-39 & z-3 \\ \underline{-(z^3-3z^2)} & z^2-4z+13 \\ -4z^2+25z-39 & \\ \underline{-(-4z^2+12z)} & \\ 13z-39 & \\ \underline{-(13z-39)} & \\ 0 & \end{array}$$

با توجه به تقسیم مقابل، معادله به شکل زیر است:

$$(z-3)(z^2-4z+13)=0$$

همان‌طور که می‌بینید با یک معادله‌ی درجه‌ی دوم راحت برخورد کرده‌ایم، لذا داریم:

$$z_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm3i$$

مثال ۳۴: یکی از جوابهای معادله $۱+z+z^۲+z^۳+z^۴=۰$ کدام است؟

۱) $\cos\frac{۴\pi}{۷}+i\sin\frac{۴\pi}{۷}$ ۲) $\cos\frac{۴\pi}{۷}-i\sin\frac{۴\pi}{۷}$ ۳) $\cos\frac{۳\pi}{۵}+i\sin\frac{۳\pi}{۵}$ ۴) $\cos\frac{۲\pi}{۵}+i\sin\frac{۲\pi}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عبارت داده شده در سمت چپ، یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_۱=۱$، قدرنسبت $q=z$ و تعداد جملات $n=۵$ است، لذا داریم:

$$\frac{۱(۱-z^۵)}{۱-z}=۰\Rightarrow ۱-z^۵=۰\Rightarrow z^۵=۱$$

باید ریشه‌های پنجم عدد یک را به دست بیاوریم:

$$z=e^{\frac{۲k\pi i}{n}}\xrightarrow{n=۵}z=\cos\frac{۲k\pi}{۵}+i\sin\frac{۲k\pi}{۵}$$

به ازای $k=۱$ یکی از جواب‌ها به صورت زیر است:

$$z=\cos\frac{۲\pi}{۵}+i\sin\frac{۲\pi}{۵}$$

مثال ۳۵: ریشه‌های معادله $z^۴+z^۲+۱=۰$ به صورت $\pm a\pm ib$ هستند، $b^۲-a^۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به راحتی واضح است یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_۱=۱$، قدر نسبت $q=z^۲$، و تعداد جملات $n=۳$، را داریم:

پس می‌توان نوشت: $A=\frac{۱(۱-(z^۲)^۳)}{۱-z^۲}$ و بنابراین سمت چپ برابر با $\frac{۱-z^۶}{۱-z^۲}$ است. $(k=۰,۱,\cdots,۵)$

$$z^۶-۱=۰\Rightarrow z^۶=۱\Rightarrow z=۱e^{\frac{۲k\pi+۰}{۶}}=e^{\frac{k\pi}{۳}}$$

که به ازای $k=۰$ و $k=۳$، آن‌گاه $z=\pm۱$ می‌شود و لذا غیر قابل قبول هستند. (چون $۱-z^۲\neq۰$) و لذا داریم:

$$z_۱=e^{i\frac{\pi}{۳}}=\cos(\frac{\pi}{۳})+i\sin(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\qquad z_۲=e^{i\frac{۲\pi}{۳}}=\cos(\frac{۲\pi}{۳})+i\sin(\frac{۲\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$z_۳=e^{i\frac{۴\pi}{۳}}=\cos(\frac{۴\pi}{۳})+i\sin(\frac{۴\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}-i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\qquad z_۴=e^{i\frac{۵\pi}{۳}}=\cos(\frac{۵\pi}{۳})+i\sin(\frac{۵\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}-i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین $a=\pm\frac{۱}{۲}$ و $b=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و لذا داریم:

$$b^۲-a^۲=(\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲-(\pm\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳۶: ریشه‌های معادله‌ی $۱-iz-z^۲+iz^۳+z^۴-iz^۵=۰$ به صورت $\cos\alpha+i\sin\alpha$ هستند، بیشترین مقدار α در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷\pi}{۱۰}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» سمت چپ معادله‌ی فوق یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_۱=۱$ و قدر نسبت $q=-iz$ و تعداد جملات $n=۶$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\frac{۱[۱-(-iz)^۶]}{۱-(-iz)}=۰\Rightarrow\frac{۱-i^۶z^۶}{۱+iz}=۰\Rightarrow\frac{۱+z^۶}{۱+iz}=۰\Rightarrow z^۶+۱=۰\Rightarrow z^۶=-۱$$

بنابراین باید ریشه‌های ششم عدد ۱- را حساب کنیم، چون $-۱=e^{i\pi}$، لذا داریم:

$$z=۱\times e^{i\frac{۲k\pi+\pi}{۶}}=e^{i(\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶})}\qquad k=۰,۱,\ldots,۵$$

به ازای $k=۵$، داریم:

$$\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۰\pi+\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

بنابراین بیشترین مقدار α برابر با $\frac{۱۱\pi}{۶}$ است.

$$z=\cos(\frac{۱۱\pi}{۶})+i\sin(\frac{۱۱\pi}{۶})$$

مثال ۳۷: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^5+z^3+z=z^4+z^2+1$ کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۱) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ۲) $e^{\frac{5\pi}{3}i}$ ۳) $e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ۴) $e^{\frac{\pi}{6}i}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تمام عبارات سمت راست را به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

$$1-z+z^2-z^3+z^4-z^5=0$$

واضح است سمت چپ یک تصاعد هندسی با جمله اول $t_1=1$، قدر نسبت $q=-z$ و تعداد جملات $n=6$ است، لذا داریم:

$$\frac{1(1-z^6)}{1-(-z)}=0 \Rightarrow \frac{1-z^6}{1+z}=0 \Rightarrow 1-z^6=0 \Rightarrow z^6=1 \quad , \quad (z\neq -1)$$

بنابراین باید ریشه‌های ششم عدد 1 را حساب کنیم:

$$z=\sqrt[6]{1}e^{i\frac{2k\pi}{6}}=e^{i\frac{k\pi}{3}} \xrightarrow{k=5} z=e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

مثال ۳۸: تمام ریشه‌های معادله‌ی $z^n+3z^{n-1}+3z^{n-2}+\dots+3z+2=0$ ، کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی‌شریف)

۱) $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=0,1,\dots,n-1$

۲) $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=1,\dots,n-1$

۳) $z=-2\ ,z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=0,\dots,n-1$

۴) $z=-2\ ,z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=1,\dots,n-1$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$z^n+z^{n-1}+\dots+z+2(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)=0 \Rightarrow z(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)+2(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)=0 \Rightarrow$$
$$(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)(z+2)=0$$

یکی از جواب‌ها برابر با $z=-2$ است و «$n-1$» ریشه‌ی دیگر، از حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1=0 \xrightarrow{\text{تصاعد هندسی است}} \frac{z^n-1}{z-1}=0 \xrightarrow{z\neq 1} z^n-1=0 \Rightarrow z^n=1$$

بنابراین داریم:

$$z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\quad (z\neq 1)\ ,\ k=1,\dots,n-1$$

k نمی‌تواند مساوی صفر باشد، چون $z=1$ جزو ریشه‌ها نیست.

مثال ۳۹: اگر z ریشه‌ی هفتم عدد یک باشد و $z\neq 1$، آنگاه مقدار $A=1+2z+3z^2+\dots+7z^6$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{z-1}$ ۲) $\frac{7}{z-1}$ ۳) $\frac{1}{z-1}$ ۴) $\frac{56}{z-1}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید، تساوی مقابل را با توجه به فرمول سری هندسی داریم:

$$z+z^2+z^3+z^4+\dots+z^7=\frac{z(1-z^7)}{1-z}=\frac{z^8-z}{z-1}$$

از طرفین تساوی فوق نسبت به z مشتق می‌گیریم:

$$1+2z+3z^2+\dots+7z^6=\frac{(8z^7-1)(z-1)-1(z^8-z)}{(z-1)^2}$$

چون $z^7=1$، لذا داریم:

$$\xrightarrow{z^7=1} 1+2z+\dots+7z^6=\frac{(8\times 1-1)(z-1)-(1\times z-z)}{(z-1)^2} \Rightarrow 1+2z+\dots+7z^6=\frac{7}{z-1}$$

مثال ۴۰: اگر $z+1=\sum_{p=1}^{6}[\sin\frac{2p\pi}{7}-i\cos\frac{2p\pi}{7}]$، آنگاه مقدار z کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه MIT)

۱) $-i+1$ ۲) $-i-1$ ۳) $i-1$ ۴) i

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید با توجه به فرمول اویلر داریم: $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ و بنابراین از $-i$ فاکتور می‌گیریم، تا فرم استاندارد حاصل شود:

$$S=\sum_{p=1}^{6}[\sin\frac{2p\pi}{7}-i\cos\frac{2p\pi}{7}]=-i\sum_{p=1}^{6}[\cos(\frac{2p\pi}{7})+i\sin(\frac{2p\pi}{7})]=-i\sum_{p=1}^{6}e^{\frac{2p\pi}{7}i}=-i[e^{\frac{2\pi}{7}i}+e^{\frac{4\pi}{7}i}+\dots+e^{\frac{12\pi}{7}i}]$$

عبارت داخل کروشه یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول و قدر نسبت $e^{\frac{2\pi}{7}i}$ و جمله‌ی آخر $e^{\frac{12\pi}{7}i}$ می‌باشد، بنابراین طبق فرمول داریم:

$$S=-i\frac{e^{\frac{2\pi}{7}i}[1-e^{\frac{12\pi}{7}i}]}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}=-i\frac{[e^{\frac{2\pi}{7}i}-e^{2\pi i}]}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}=-i[\frac{-(1-e^{\frac{2\pi}{7}i})}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}]=(-i)\times(-1)=i$$

بنابراین $z+1=i$ و لذا $z=i-1$ می‌باشد.

مثال۴۱: اگر $x_n=\cos(\frac{\pi}{4^n})+i\sin(\frac{\pi}{4^n})$ و $\prod_{n=1}^{\infty}x_n=\frac{1}{4}z$، آنگاه مقدار z کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $2+i2\sqrt{3}$ ۳) $4+i4\sqrt{3}$ ۴) $1+i\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۲» به راحتی با توجه به فرمول $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ داریم:

$$\prod_{n=1}^{\infty}x_n=\prod_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{4^n}}=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4^2}}\times e^{i\frac{\pi}{4^3}}\times\cdots=e^{i[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4^2}+\frac{\pi}{4^3}+\cdots]}$$

همان‌طور که می‌بینید عبارت داخل کروشه یک تصاعد هندسی نامحدود با جمله‌ی اول $a=\frac{\pi}{4}$ و قدرنسبت $q=\frac{1}{4}$ می‌باشد که می‌دانیم حد مجموع آن برابر با $\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{4}}$ و یا به عبارت دیگر برابر با $\frac{\pi}{3}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{z}{4}=\prod_{n=1}^{\infty}x_n=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z=2+i2\sqrt{3}$$

مثال۴۲: اگر z یکی از ریشه‌های موهومی nام عدد یک باشد، آنگاه حاصل عبارت $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $n(n-1)$

پاسخ: گزینه «۱» چون z یکی از ریشه‌های nام موهومی عدد یک است، لذا $z^n=1$ و $z\neq 1$ است، چون گفته شده z یکی از ریشه‌های موهومی عدد یک است. پس $z^n-1=0$ می‌باشد، لذا داریم:

$$z^n-1=0\Rightarrow(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=0$$

با توجه به معادله به دست آمده باید یکی از پرانتزها برابر عدد صفر شود.

$$z-1=0\Rightarrow z=1\quad \text{یا}\quad 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$$

از طرفی گفتیم $z=1$ قابل قبول نیست، پس حتماً تساوی $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$ برقرار می‌باشد.

مثال۴۳: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(z+1)^6+(z-1)^6=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}+2+i}{\sqrt{3}+2-i}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}-2+i}{\sqrt{3}+2-i}$ ۳) $\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}+2+i}{\sqrt{3}-2+i}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر فرض کنیم $z\neq 1$، آن‌گاه می‌توانیم طرفین را بر $(z-1)^6$ تقسیم کنیم.

$$\frac{(z+1)^6}{(z-1)^6}+1=0\Rightarrow(\frac{z+1}{z-1})^6=-1$$

با فرض $w=\frac{z+1}{z-1}$، آن‌گاه $w^6=-1$، پس باید ریشه‌های ششم $\underline{\underline{-1}}$ را حساب کنیم و از آن‌جایی که $-1=1\times e^{i\pi}$، لذا داریم:

$$w=1\times e^{\frac{2k\pi+\pi}{6}}=\cos(\frac{2k\pi+\pi}{6})+i\sin(\frac{2k\pi+\pi}{6})$$

اما چون فرض کرده بودیم $w=\frac{z+1}{z-1}$، لذا داریم:

$$w(z-1)=z+1\Rightarrow wz-w=z+1\Rightarrow z(w-1)=w+1\Rightarrow z=\frac{w+1}{w-1}$$

و بنابراین داریم:

$$z=\frac{\cos(\frac{2k\pi+\pi}{6})+i\sin(\frac{2k\pi+\pi}{6})+1}{\cos(\frac{2k\pi+\pi}{6})+i\sin(\frac{2k\pi+\pi}{6})-1}\xrightarrow{k=0}z=\frac{\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})+1}{\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})-1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+2+i}{\sqrt{3}-2+i}$$

مثال۴۴: ریشه‌های معادله $z^n-\bar{z}=0$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $e^{i\frac{k\pi}{n+1}}$ ۲) $e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$ ۳) $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ۴) $e^{i\frac{k\pi}{n}}$

پاسخ: گزینه «۲» با فرض $z=e^{i\theta}$، آن‌گاه $\bar{z}=e^{-i\theta}$ و $z^n=e^{in\theta}$، لذا داریم:

$$z^n=\bar{z}\Rightarrow e^{in\theta}=e^{-i\theta}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } e^{-i\theta}}\frac{e^{in\theta}}{e^{-i\theta}}=1\Rightarrow e^{in\theta}\times e^{i\theta}=1$$

$$e^{i(n+1)\theta}=1\xrightarrow{e^{i(2k\pi)}=1}e^{i(n+1)\theta}=e^{i(2k\pi)}\Rightarrow i(n+1)\theta=i(2k\pi)\Rightarrow(n+1)\theta=2k\pi\Rightarrow\theta=\frac{2k\pi}{n+1}$$

پس $z=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$ ریشه‌های معادله هستند.

مثال ۴۵: در معادله $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ مجموع ریشه‌ها برابر .... و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر .... می‌باشد.

۱) -1 و -1 ۲) -1 و 1 ۳) 1 و -1 ۴) 1 و 1

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که گفتیم؛ مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{a_1}{a_0}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$ است، پس مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{1}{1}=-1$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{(-1)^5\times 1}{1}=-1$ است.

مثال ۴۶: مساحت شکلی که معادله‌ی آن در صفحه‌ی مختلط به صورت $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=\sqrt{2}$ می‌باشد، چقدر است؟

۱) 2π ۲) 6π ۳) 8π ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۳» با تعریف $z=x+iy$ داریم:

$$\left|\frac{x+iy+i}{x+iy-i}\right|=\sqrt{2}\Rightarrow |x+i(y+1)|=\sqrt{2}\,|x+i(y-1)|\Rightarrow\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{2}.\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2+y^2+2y+1=2(x^2+y^2-2y+1)\Rightarrow x^2+y^2-6y+1=0\Rightarrow x^2+(y-3)^2-8=0\Rightarrow x^2+(y-3)^2=8$$

منحنی فوق معادله‌ی دایره‌ای به شعاع $\sqrt{8}$ است و لذا مساحت آن $S=\pi R^2=\pi(\sqrt{8})^2=8\pi$ است.

مثال ۴۷: مکان هندسی نقاط $z=x+iy$ واقع در صفحه مختلط که در تساوی $|\frac{z+1}{z-1}|=4$ صدق کنند، کدام است؟

۱) $(x-\frac{17}{15})^2+y^2=(\frac{8}{15})^2$ ۲) $(x-\frac{1}{15})^2+y^2=(\frac{8}{15})^2$ ۳) $(x+\frac{1}{15})^2+y^2=(\frac{8}{15})^2$ ۴) $(x+\frac{17}{15})^2+y^2=(\frac{8}{15})^2$

پاسخ: گزینه «۱»

$$|\frac{z+1}{z-1}|=4\Rightarrow\frac{|(x+1)+iy|}{|(x-1)+iy|}=4\Rightarrow|(x+1)+iy|=4|(x-1)+iy|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x+1)^2+y^2=16[(x-1)^2+y^2]\Rightarrow 15x^2+15y^2-34x+15=0\Rightarrow x^2+y^2-\frac{34}{15}x+1=0\Rightarrow(x-\frac{17}{15})^2+y^2=(\frac{8}{15})^2$$

مثال ۴۸: مکان هندسی معادله $|z-4i|+|z+4i|=10$ که در آن z یک متغیر مختلط است، کدام است؟

۱) یک دایره به مرکز $4i$ و شعاع ۱
۲) یک کره به مرکز $4i$ و شعاع ۱
۳) یک مربع با ضلع ۳
۴) یک بیضی به کانون‌های $\pm 4i$ و قطر بزرگ ۱۰

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه $10>8=|8i|=|4i-(-4i)|$، لذا معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک بیضی می‌باشد و از این رو گزینه «۴» صحیح است.

مثال ۴۹: نمودار معادله $x^2+y-2x=0$ کدام است؟

۱) بیضی ۲) دایره ۳) سهمی ۴) هذلولی

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به بند (۴) مطالب فوق ضریب y^2 صفر است، لذا معادله‌ی ذکر شده مربوط به **سهمی** می‌باشد.

مثال ۵۰: مکان هندسی همه نقاطی از صفحه که در رابطه‌ی $|z-1|-|1+\mathrm{Re}z|=0$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) سهمی ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) دایره

پاسخ: گزینه «۱» با فرض اینکه $z=x+iy$، در این صورت $\mathrm{Re}z=x$ و لذا داریم:

$$|x+iy-1|-|1+x|=0\Rightarrow(x-1)^2+y^2-(1+x)^2=0\Rightarrow x^2+1-2x+y^2-1-x^2-2x=0\Rightarrow y^2=4x$$

که **معادله‌ی یک سهمی** است.

مثال۵۱: مکان هندسی نقطه‌ی $M(x,y)$ متناظر با عدد مختلط و غیرحقیقی z که در رابطه‌ی $\overline{z}^3+\overline{z}^2-2\overline{z}=z^3+z^2-2z$ صدق کند، کدام است؟

۱) نیم‌دایره ۲) هذلولی یا خط ۳) سهمی ۴) بیضی یا خط

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید توجه کنید سمت راست تساوی مزدوج سمت چپ تساوی است، چرا که همواره داریم: $\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3=\overline{z_1+z_2+z_3}$
و بنابراین داریم:

$$\overline{z}^3+\overline{z}^2-2\overline{z}=\overline{z^3+z^2-2z}$$

در واقع اگر سمت چپ w باشد، سمت راست $\overline{w}$ است، پس تساوی $w=\overline{w}$ را داریم و این یعنی $\mathrm{Im}(w)=0$ است. پس کافیست قسمت موهومی سمت چپ را حساب کرده و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$(x+iy)^3+(x+iy)^2-2(x+iy)=x^3+(iy)^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+x^2+(iy)^2+i2xy-2x-2iy$$
$$=x^3-iy^3+i3x^2y-3xy^2+x^2-y^2+i2xy-2x-(2y)i\Rightarrow \mathrm{Im}(w)=-y^3+3x^2y+2xy-2y$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}(w)=y(-y^2+3x^2+2x-2)=0\Rightarrow 3x^2+2x-y^2-2=0 \text{ یا } y=0$$

معادله‌ی فوق، نشان‌دهنده‌ی خط افقی $y=0$ یا یک **هذلولی** است. البته اگر نخواهید از نکات فوق استفاده کنید، می‌توانید فرض کنید $z=x+iy$ و $\overline{z}=x-iy$ و محاسبات را در طرفین انجام دهید و در نهایت به نتیجه‌ی فوق برسید.

مثال۵۲: اگر $z=x+iy$، آنگاه کلیه نقاطی از صفحه z که به ازای آنها $\mathrm{Re}(\frac{z-i}{z+i})<1$ و $\mathrm{Im}(\frac{z-i}{z+i})<a$ ($a>0$ ثابت) عبارتست از ...
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) نیمه پائینی درون دایره $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$
۲) نیمه بالائی درون دایرهٔ $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$
۳) نیمه بالائی بیرون دایرهٔ $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$
۴) نیمه پائینی بیرون دایرهٔ $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}-\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}i$$
$$\mathrm{Re}(\frac{z-i}{z+i})=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}<1\Rightarrow x^2+y^2-1<x^2+y^2+2y+1\Rightarrow y>-1 \quad (1)$$
$$\mathrm{Im}(\frac{z-i}{z+i})=\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}<a\Rightarrow -\frac{2x}{a}<x^2+(y+1)^2\Rightarrow x^2+(y+1)^2+\frac{2x}{a}>0\Rightarrow (x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2>\frac{1}{a^2}$$

مثال۵۳: i^{-i} برابر چیست؟
(مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰)

۱) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ ۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۳) 1 ۴) -1

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$، لذا داریم:

$$i^{-i}=(e^{\frac{\pi}{2}i})^{-i}=e^{\frac{\pi}{2}}$$

مثال۵۴: اگر داشته باشیم $z^6=1$، یکی از اعداد z کدام است؟
(مهندسی معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ ۳) $\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$ ۴) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $1=e^{0\times i}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\sqrt[6]{z}=\sqrt[6]{1}[\cos(\frac{2k\pi}{6})+i\sin(\frac{2k\pi}{6})]\xrightarrow{k=2}z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

مثال۵۵: اگر z یک عدد مختلط باشد، $|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z|$ برابر کدام است؟
(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $|z|$ ۲) $\frac{1}{2}|z|$ ۳) $\frac{1}{2}|z+1|$ ۴) $|z-i|$

پاسخ: گزینه «۱»

$$|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z|=|z(e^{\frac{\pi}{3}i}-1)|=|z|.|e^{\frac{\pi}{3}i}-1|=|z||\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-1|=|z||-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}|=|z|\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=|z|\sqrt{\frac{4}{4}}=|z|$$

مثال ۵۶: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط و α و β اعداد حقیقی غیرمنفی با شرط $\alpha+\beta=1$ باشند، مکان هندسی نقاط نظیر $z=\alpha z_1+\beta z_2$ چگونه است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) خط گذرنده بر دو نقطه متناظر z_1 و z_2
۲) دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه نظیر z_1 و z_2
۳) بیضی به کانون‌های نقاط نظیر z_1 و z_2
۴) پاره خط واصل به دو نقطه متناظر z_1 و z_2

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم معادله پاره‌خط واصل بین دو نقطه z_1 و z_2 بصورت مقابل می‌باشد: $z=(1-k)z_1+kz_2$

بنابراین مکان هندسی $z=\alpha z_1+\beta z_2$ را با توجه به شرط $\alpha+\beta=1$ بصورت مقابل می‌نویسیم: $z=(1-\beta)z_1+\beta z_2$

در نتیجه مکان هندسی فوق، پاره‌خط واصل بین دو نقطه z_1 و z_2 می‌باشد.

مثال ۵۷: اگر $Z_m=\cos\frac{\pi}{2^m}+i\sin\frac{\pi}{2^m}$ آنگاه مقدار $\prod_{m=1}^{\infty}Z_m$ برابر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) -1
۲) 1
۳) πi
۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$z_m=e^{\frac{\pi}{2^m}i}\Rightarrow\prod_{m=1}^{\infty}z_m=e^{\frac{\pi i}{2}}.e^{\frac{\pi i}{2^2}}.e^{\frac{\pi i}{2^3}}\cdots=e^{i\pi(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots)}$$

سری موجود در توان یک سری هندسی همگرا با $a_1=\frac{1}{2}$ و $q=\frac{1}{2}$ است و داریم:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1\Rightarrow\prod_{m=1}^{\infty}z_m=e^{\pi i}=-1$$

مثال ۵۸: قسمت حقیقی یکی از ریشه‌های معادله $z^3+i=0$ که در آن $i^2=-1$ است برابر است با: (مهندسی مکانیک «کلیه گرایش‌ها» ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) $-\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۲» در واقع یکی از ریشه‌های سوم $-i$ را باید محاسبه کنیم:

$$-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}\Rightarrow r=1\ ,\ \theta=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sqrt[3]{-i}=\cos(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}}{3})+i\sin(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}}{3})\ ,\ k=0,1,2$$

قسمت حقیقی برابر $\cos(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}}{3})$ می‌باشد که به ازای $k=0$ برابر $\cos(-\frac{\pi}{6})$ یا همان $\frac{\sqrt{3}}{2}$ خواهد بود.

مثال ۵۹: فرض کنیم که عدد مختلط z ریشه معادله $5z^{10}-11z^6+7z-1=0$ باشد در این صورت: (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $\bar{z}$ نیز ریشه معادله می‌باشد.
۲) $\bar{z}$ ریشه معادله نمی‌باشد.
۳) $z+\bar{z}$ نیز ریشه معادله می‌باشد.
۴) $z-\bar{z}$ نیز ریشه معادله می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۱» اگر z ریشه چند جمله‌ای درجه n و غیر ثابت $p(z)$ با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه $\bar{z}$ نیز همواره ریشه $p(z)$ خواهد بود.

مثال ۶۰: هرگاه $z=x+iy$ و $\bar{z}$ مزدوج z باشد، معادله $z\bar{z}=36$ معرف چه شکلی است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) دایره
۲) هذلولی
۳) بیضی
۴) سهمی

پاسخ: گزینه «۱»

$$z.\bar{z}=36\Rightarrow(x+iy)(x-iy)=36\Rightarrow x^2+y^2=36$$

معادله دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۶ می‌باشد.

مثال ۶۱: معادله دایره به مرکز $(-2,1)$ و شعاع ۴ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $|z+2-i|=4$
۲) $|z+2+i|=4$
۳) $|z-2+i|=4$
۴) $|z-2-i|=4$

پاسخ: گزینه «۱» در متن درس اشاره شد که معادله دایره‌ای به مرکز $z_0=x_0+iy_0$ و شعاع a به صورت $|z-z_0|=a$ می‌باشد.

مثال ۶۲: معادله $|\frac{z-3i}{z+i}|=1$ در صفحه z ها معرف کدام شکل است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) بیضی ۲) خط $y=0$ ۳) خط‌های $y=x$, $y=-x$ ۴) خط $y=1$

پاسخ: گزینه «۴»

$$|\frac{z-3i}{z+i}|=1 \Rightarrow |x+iy-3i|=|x+iy+i| \Rightarrow x^2+(y-3)^2=x^2+(y+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2+9-6y=x^2+y^2+1+2y \Rightarrow 8y=8 \Rightarrow y=1$$

مثال ۶۳: معادله $|z-2|=|z+4|$ که در آن z عددی مختلط است نمایشگر چه نقاطی از صفحه مختلط است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) دایره ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) خط راست

پاسخ: گزینه «۴» $|z-2|=|z+4| \Rightarrow |x+iy-2|=|x+iy+4| \Rightarrow (x-2)^2+y^2=(x+4)^2+y^2 \Rightarrow x^2+4-4x=x^2+16+8x \Rightarrow x=-1$

مثال ۶۴: مکان اعداد مختلط $z=x+iy$ که در تساوی $\sqrt{2}=|\frac{z+i}{z-i}|$ صدق کند، کدام است؟

(مهندسی معدن ـ سراسری ۸۰ و مهندسی مکانیک «ساخت و تولید» ـ آزاد ۸۳)

۱) خط $x=y$ ۲) دایره‌ای به مرکز $(3,0)$ و شعاع $2\sqrt{2}$

۳) دایره‌ای به مرکز $(0,3)$ و شعاع $2\sqrt{2}$ ۴) دایره‌ای به مرکز $(1,1)$ و شعاع $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$|\frac{z+i}{z-i}|=\sqrt{2} \Rightarrow |\frac{x+iy+i}{x+iy-i}|=\sqrt{2} \Rightarrow |x+i(y+1)|=\sqrt{2}\,|x+i(y-1)|$$

$$x^2+(y+1)^2=2(x^2+(y-1)^2) \Rightarrow x^2+y^2+2y+1=2x^2+2y^2-4y+2 \Rightarrow x^2+y^2-6y+1=0 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=8$$

مثال ۶۵: مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که در تساوی $|z-1-3i|=|z-1+i|$ صدق کند، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $z=x+i$ ۲) $z=1-iy$ ۳) $z=z-i$ ۴) $z=1+iy$

پاسخ: گزینه «۱»

$$|z-1+i|=|z-1-3i| \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(y-3)^2$$

$$\Rightarrow (y+1)^2=(y-3)^2 \Rightarrow y^2+2y+1=y^2-6y+9 \Rightarrow 8y=8 \Rightarrow y=1 \Rightarrow z=1+xi$$

مثال ۶۶: معادله $|z-1|+|z+1|=2\sqrt{2}$ نمایش‌دهنده چه شکلی در صفحه مختلط می‌باشد؟ (مهندسی مکانیک «ساخت و تولید» ـ آزاد ۸۴)

۱) بیضی ۲) دایره ۳) خط ۴) سهمی

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به متن کتاب، معادله‌ی $|z-z_1|+|z-z_2|=a$ وقتی که $|z_1-z_2|< a$ باشد، معادله یک بیضی می‌باشد.

مثال ۶۷: فرض کنید z نقطه‌ای بر دایره واحد $|z|=1$ باشد. $\mathrm{Arg}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{4}(z\neq -1)$

۲) $\begin{cases} 0 \ , & \text{اگر } \mathrm{Re}\,z>0 \\ \pi \ , & \text{اگر } \mathrm{Re}\,z<0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \ , & \text{اگر } \mathrm{Im}\,z>0 \\ -\frac{\pi}{2} \ , & \text{اگر } \mathrm{Im}\,z<0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \ , & \text{اگر } \mathrm{Im}\,z>0 \\ \frac{\pi}{2} \ , & \text{اگر } \mathrm{Im}\,z<0 \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-x-iy}{1+x+iy}=\frac{(1-x-iy)(1+x-iy)}{(1+x)^2+y^2}=\frac{1+x-iy-x-x^2+ixy-iy-ixy-y^2}{(x+1)^2+y^2}=\frac{1-x^2-2iy-y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

چون z روی دایره $x^2+y^2=1$ واقع است لذا داریم:

$$\frac{1-z}{1+z}=-\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{y>0} \frac{-2y}{(x+1)^2+y^2}<0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(\frac{-2y}{(x+1)^2+y^2}i)=-\frac{\pi}{2} \\ \xrightarrow{y<0} \frac{-2y}{(x+1)^2+y^2}>0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(\frac{-2y}{(x+1)^2+y^2}i)=+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تذکر: توجه شود مخرج کسر $\frac{-2y}{(x+1)^2+y^2}$ در واقع همان $|1+z|^2$ می‌باشد که همواره مثبت است.

مثال ۶۸: اگر a و b دو عدد مختلط ثابت باشند، مکان نقطه M نظیر عدد مختلط z از رابطه $z.\bar{z}-a.\bar{z}-\bar{a}.z+a.\bar{a}=b.\bar{b}$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳، MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) دایره ۲) نیم‌دایره ۳) بیضی ۴) هذلولی

پاسخ: گزینه «۱»

$$z.\bar{z}-a.\bar{z}-\bar{a}.z+a.\bar{a}=b.\bar{b}\Rightarrow \bar{z}(z-a)-\bar{a}(z-a)=|b|^2\Rightarrow(\bar{z}-\bar{a})(z-a)=|b|^2=\overline{(z-a)}(z-a)=|b|^2\Rightarrow|z-a|^2=b^2$$

مثال ۶۹: فرض کنیم z_1 و z_2 دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمی که $\left|\frac{z_1-\bar{z}_2}{z_1+\bar{z}_2}\right|=1$. در این صورت کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(مهندسی مواد و معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $\operatorname{Re}(z_1z_2)>0$ (قسمت حقیقی z_1z_2) ۲) $\operatorname{Re}(z_1z_2)<0$

۳) $\operatorname{Re}(z_1z_2)=0$ ۴) $\operatorname{Im}(z_1z_2)>0$ (قسمت موهومی z_1z_2)

پاسخ: گزینه «۳»

$$\left|\frac{z_1-\bar{z}_2}{z_1+\bar{z}_2}\right|=1\Rightarrow\left|\frac{x_1+iy_1-x_2+iy_2}{x_1+iy_1+x_2-iy_2}\right|=1\Rightarrow(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2=(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2\Rightarrow x_1x_2-y_1y_2=0\Rightarrow\operatorname{Re}(z_1.z_2)=0$$

مثال ۷۰: مقدار $w=[(\frac{e}{2})(-1-i\sqrt{3})]^{3\pi i}$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۵)

۱) $w=-\exp(2\pi^2)$ ۲) $w=\exp(2\pi^2)$ ۳) $w=-\exp(\pi^2)$ ۴) $w=\exp(i\pi^2)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$w=[-e(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)]^{3\pi i}=(-1)^{3\pi i}\times e^{3\pi i}\times(e^{\frac{\pi}{3}i})^{3\pi i}=(e^{-\pi i})^{3\pi i}\times(-1)\times e^{-\pi^2}=-e^{2\pi^2}$$

مثال ۷۱: فرض کنیم $z_1=3+i\sqrt{5}$ و $z_1\neq z_2$ عددی باشد که در معادلات $|z_1|=|z_2|$ و نیز $|1-z_1|=|1-z_2|$ صدق می‌کند در این صورت:

(مهندسی نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $z_2=3-i\sqrt{5}$ ۲) $z_2<z_1$

۳) $z_1>z_2$ ۴) z_1 و z_2 نسبت به محور y متقارن‌اند.

پاسخ: گزینه «۱»

$$|1-z_1|=|1-z_2|\Rightarrow|1-(3+i\sqrt{5})|=|1-(x+iy)|\Rightarrow|-2-i\sqrt{5}|=|(1-x)-iy|\Rightarrow$$

$$4+5=(1-x)^2+y^2\Rightarrow x^2+y^2-2x=8\quad,\quad(1)$$

$$|z_1|=|z_2|\Rightarrow|3+i\sqrt{5}|=|x+iy|\Rightarrow 9+5=x^2+y^2\Rightarrow x^2+y^2=14\quad,\quad(2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)}-2x=8-14\Rightarrow x=3\xrightarrow{\text{در رابطه (۲) قرار می‌دهیم}}y=\pm\sqrt{5}$$

که با توجه به شرط $z_1\neq z_2$ ، $y=-\sqrt{5}$ قابل قبول است.

مثال ۷۲: اگر $z_\circ=r_\circ e^{i\theta_\circ}$ و $z=re^{i\theta}$، آنگاه مقدار $|z-z_\circ|^2$ بر حسب مختصات قطبی z و $z_\circ$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $r_\circ^2-2rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)+r^2$ ۲) $r_\circ^2-2rr_\circ\cos(\theta+\theta_\circ)+r^2$ ۳) $r_\circ^2+2rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)+r^2$ ۴) $r_\circ^2-rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)+r^2$

پاسخ: گزینه «۱»

$$|z-z_\circ|=|r\cos\theta+ir\sin\theta-r_\circ\cos\theta_\circ-ir_\circ\sin\theta_\circ|=|(r\cos\theta-r_\circ\cos\theta_\circ)+i(r\sin\theta-r_\circ\sin\theta_\circ)|$$

$$\Rightarrow|z-z_\circ|^2=(r\cos\theta-r_\circ\cos\theta_\circ)^2+(r\sin\theta-r_\circ\sin\theta_\circ)^2$$

$$=r^2\cos^2\theta+r_\circ^2\cos^2\theta_\circ-2rr_\circ\cos\theta\cos\theta_\circ+r^2\sin^2\theta+r_\circ^2\sin^2\theta_\circ-2rr_\circ\sin\theta\sin\theta_\circ$$

$$=r^2+r_\circ^2-2rr_\circ(\cos\theta\cos\theta_\circ+\sin\theta\sin\theta_\circ)=r^2+r_\circ^2-2rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)$$

مثال ۷۳: اگر γ,β,α اعداد مختلط با قدرمطلق واحد باشند به قسمی که $|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|=|\alpha\beta\gamma|$، مقدار $|\alpha+\beta+\gamma|$ کدام است؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا طرفین تساوی داده شده را بر $\alpha\beta\gamma$ تقسیم می‌کنیم:

$$\left|\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right|=\left|\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right| \Rightarrow \left|\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right|=1$$

از طرفی می‌دانیم این سه عدد، اعدادی مختلط با قدر مطلق واحد می‌باشند؛ پس برای هر کدام از آن‌ها، عکسشان برابر با مزدوج آن‌ها است. چون اگر $z=e^{i\theta}$، آن‌گاه $\frac{1}{z}=e^{-i\theta}=\overline{z}$، با این توضیح داریم:

$$|\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}|=1 \Rightarrow |\overline{\alpha+\beta+\gamma}|=1 \Rightarrow |\alpha+\beta+\gamma|=1$$

مثال ۷۴: نقاط $z_1\neq 0$ و $z_2\neq 0$ با فرض $z_1\neq z_2$ در صفحه‌ی مختلط مفروض هستند. شرط اینکه نقطه‌ی مبدأ یعنی $z=0$ نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط واصل بین z_1 و z_2 باشد این است که:

(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ ۲) $|z_1-z_2|=|z_1|+|z_2|$ ۳) $\big||z_1|-|z_2|\big|=|z_1-z_2|$ ۴) $|z_1|-|z_2|=|z_1-z_2|$

(ε یک عدد مثبت است. $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

برای اینکه خط واصل z_1 و z_2 از نقطه‌ی صفر بگذرد باید داشته باشیم:

$$z_1=x_1+iy_1$$

$$z_2=x_2+iy_2 \xrightarrow{\text{چون امتداد خط بین } z_2, z_1 \text{ از نقطه صفر می‌گذرد}} m=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{x_1} \qquad (1)$$

$$|z_1-z_2|=|x_1+iy_1-x_2-iy_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$\Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2)}$$

$$|z_1-z_2|=\sqrt{x_1^2\left(1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)+x_2^2\left(1+\left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2\right)-2x_1x_2\left(1+\frac{y_1y_2}{x_1x_2}\right)} \xrightarrow{(1)} |z_1-z_2|=\sqrt{x_1^2\left(1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)+x_2^2\left(1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)-2x_1x_2\left(1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}\times\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{1+\left(\frac{y_1}{x_2}\right)^2}\,.\,|x_1-x_2| \qquad (2)$$

از آن جایی که خط واصل بین z_1 و z_2 باید از نقطه‌ی $z=0$ عبور کند لذا همواره x_1 و x_2 مختلف‌العلامت هستند، لذا می‌توان نوشت:

$$|x_1-x_2|=|x_1|+|x_2| \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{(3),(2)} |z_1-z_2|=\sqrt{1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}\times(|x_1|+|x_2|)$$

$$\Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{x_1^2\times\left(1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)}+\sqrt{x_2^2\left(1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)} \xrightarrow{\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}} |z_1-z_2|=\sqrt{x_1^2\left(1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right)}+\sqrt{x_2^2\left(1+\left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|z_1|+|z_2|$$

مثال ۷۵: برای اعداد مختلط z و w، عبارت $|z+w|^2+|z-w|^2$ برابر کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

(توجه: $\overline{z}$ مکمل مختلط z و $\overline{w}$ مکمل مختلط w است.)

۱) $2(|z|^2+|w|^2)$ ۲) $2(|z|^2-|w|^2)$ ۳) $2(|z|^2-z\overline{w}-w\overline{z}+|w|^2)$ ۴) $2(|z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}-|w|^2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$|z+w|^2+|z-w|^2=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})+|z|^2+|w|^2-2\operatorname{Re}(z\overline{w})=2(|z|^2+|w|^2)$$

مثال ۷۶: جواب‌های معادله $z^2-(7+i)z+24+7i=0$ عبارتند از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) $3-4i$ و $3+4i$ ۲) $4+3i$ و $3-4i$ ۳) $4-3i$ و $3+4i$ ۴) $4-3i$ و $4+3i$

پاسخ: گزینه «۳» در تابع درجه دوم $az^2+bz+c=0$، اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$z_1+z_2=\frac{-b}{a}\quad,\quad z_1.z_2=\frac{c}{a}$$

برای معادله داده شده در مساله $z_1+z_2=7+i$ که فقط گزینه ۳ این شرط را ارضاء می‌کند.

مثال ۷۷: اگر $|\frac{z-a}{z-\bar{a}}|\le\frac{1}{2}$ و $z\ne\bar{a}$، آنگاه: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $|z|\ge\frac{1}{3}|\bar{a}|$ ۲) $|z|\le 2|a|$ ۳) $|z|\ge 2|\bar{a}|$ ۴) $|z|\le 3|a|$

پاسخ: گزینه «۴»

$$|z|-|a|\le|z-a|\le|z|+|a|\quad,\quad |a|=|\bar{a}|$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|\le\frac{1}{2}\Rightarrow 2|z-a|\le|z-\bar{a}|\\ 2|z-a|\ge 2|z|-2|a|\\ |z-\bar{a}|\le|z|+|a|\end{array}\right\}\Rightarrow 2|z|-2|a|\le 2|z-a|\le|z-\bar{a}|\le|z|+|a|\Rightarrow 2|z|-2|a|\le|z|+|a|\Rightarrow|z|\le 3|a|$$

مثال ۷۸: دستگاهی متشکل از دو معادله با یک مجهول مشترک z مفروض است: $\begin{cases}|z+16|+|z|=20\\|z+8|=7\end{cases}$ می‌توان گفت که دستگاه مزبور در میدان اعداد مختلط: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۷)

۱) دارای چهار جواب متمایز است. ۲) دارای سه جواب متمایز است. ۳) دارای دو جواب متمایز است. ۴) دارای یک جواب است.

پاسخ: گزینه «۱» با تغییر متغیر $w=z+8$ به دستگاه ساده‌تر زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases}|w+8|+|w-8|=20\\|w|=7\end{cases}$$

به ازای هر جواب w یک جواب برای z داریم.

فرض کنیم $w=x+iy$ باشد. با محاسبه‌ی قدر مطلق‌ها داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{(x-8)^2+y^2}=20\\\sqrt{x^2+y^2}=7\end{cases}$$

در اولین معادله، اتحادها را باز می‌کنیم. از معادله‌ی دوم $x^2+y^2=49$ است. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\sqrt{x^2+y^2+16x+64}+\sqrt{x^2+y^2-16x+64}=20\Rightarrow\sqrt{16x+113}+\sqrt{-16x+113}=20$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$16x+113-16x+113+2\sqrt{113^2-256x^2}=400\Rightarrow\sqrt{113^2-256x^2}=87$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x^2=\frac{113^2-87^2}{256}>0$$

و با توجه به معادله‌ی $x^2+y^2=49$ داریم:

$$y^2=49-\frac{113^2-87^2}{256}>0$$

بنابراین دو جواب مختلف برای x و دو جواب هم برای y خواهیم داشت. دستگاه دارای چهار جواب مختلف است. برای اطمینان بیشتر توجه کنید که: $\frac{113^2-87^2}{256}=\frac{5200}{256}\simeq 20$ است. (البته با رسم شکل ناحیه هم می‌توان دستگاه را حل کرد که تلاقی یک دایره با یک بیضی را داریم که در چهار نقطه همدیگر را قطع می‌کنند و اگر بر ترسیم شکل مسلط باشید این روش ساده‌تر است!)

مثال ۷۹: حاصل سری $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{3^k}$ $(\theta>0)$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\sin\theta}{10-6\cos\theta}$ ۲) $\frac{1-\cos\theta}{10-6\cos\theta}$ ۳) $\frac{3-3\cos\theta}{10-6\cos\theta}$ ۴) $\frac{3\sin\theta}{10-6\cos\theta}$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{3^k}=\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}}{3^k})=\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{e^{i\theta}}{3})^k)=\mathrm{Im}(\frac{\frac{e^{i\theta}}{3}}{1-\frac{e^{i\theta}}{3}})=\mathrm{Im}(\frac{e^{i\theta}}{3-e^{i\theta}})=\mathrm{Im}(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{3-\cos\theta-i\sin\theta})$$

$$=\mathrm{Im}(\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)[(3-\cos\theta)+i\sin\theta]}{(3-\cos\theta)^2+\sin^2\theta})=\frac{3\sin\theta}{10-6\cos\theta}$$

مثال ۸۰: اگر ε ریشه nام اصلی واحد باشد، یعنی $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$، آن‌گاه حاصل عبارت $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $n-1$ ۲) n ۳) $n+1$ ۴) $2n$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم که $\varepsilon,\varepsilon^2,\dots,\varepsilon^{n-1}$ ریشه‌های معادله $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1=0$ می‌باشند. با تجزیه معادله فوق به حاصل‌ضرب عوامل آن، داریم:

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1=(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)(z-\varepsilon^3)\cdots(z-\varepsilon^{n-1})$$

با جایگذاری $z=1$ در طرفین رابطه فوق خواهیم داشت:

$$n=(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})$$

مثال ۸۱: $P(z)=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\dots+a_{2n-2}z^{2n-2}+a_{2n}z^{2n}$ یک چندجمله‌ای از متغیر مختلط z و با ضرایب مختلط است که فقط توان‌های زوج z را دارد. می‌توان گفت که ریشه‌های معادله‌ی $P(z)=0$ در صفحه z: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۸)

۱) پراکنده و نظم خاصی ندارند. ۲) نسبت به مبدأ متقارن هستند.

۳) نسبت به محور حقیقی متقارن هستند. ۴) نسبت به محور موهومی متقارن هستند.

پاسخ: گزینه «۲» اگر فرض کنیم z_0 ریشه معادله $P(z)=0$ باشد در آن صورت خواهیم داشت: $a_0+a_2(z_0)^2+a_4(z_0)^4+\dots+a_{2n}(z_0)^{2n}=0$

با تغییر z_0 به $-z_0$ خواهیم دید که $-z_0$ نیز در معادله صدق می‌کند.

$$a_0+a_2(-z_0)^2+a_4(-z_0)^4+\dots+a_{2n}(-z_0)^{2n}=a_0+a_2z_0^2+a_4z_0^4+\dots+a_{2n}z_0^{2n}=0$$

بنابراین اگر $z_0=x_0+iy_0$ در معادله صدق کند، $-z_0=-x_0-iy_0$ نیز در معادله صدق خواهد کرد. و لذا می‌توان گفت که ریشه‌های معادله $P(z)=0$ نسبت به مبدأ متقارن هستند.

مثال ۸۲: معادل $z=\frac{1}{4+3i}$ در مختصات قطبی کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{5}e^{-i\mathrm{Arc}\tan\frac{4}{3}}$ ۲) $\frac{1}{5}e^{i\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4}}$

۳) $\frac{1}{5}[\sin(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})+i\cos(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})]$ ۴) $\frac{1}{5}[\cos(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})+i\sin(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})]$

پاسخ: گزینه «۴»

$$z=\frac{1}{4+3i}=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}e^{i\mathrm{Arctg}(\frac{3}{4})}}=\frac{1}{5}e^{-i\mathrm{Arctg}\frac{3}{4}}=\frac{1}{5}[\cos(-\mathrm{Arctg}\frac{3}{4})+i\sin(-\mathrm{Arctg}\frac{3}{4})]$$

مثال ۸۳: اگر مدول $z=a+bi$ برابر ۱ باشد آنگاه z کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2-ix}{3+ix}$ ۲) $\frac{1-2ix}{1+ix}$ ۳) $\frac{1-ix}{1+ix}$ ۴) $\frac{3-ix}{1+ix}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه مدول و یا همان اندازه $z=a+ib$ برابر یک است، باید ببینیم مدول کدام‌یک از گزینه‌های دیگر برابر یک می‌شود. دقت کنید، چون توابع کسری هستند، بهتر است اندازه آنها در صورت و مخرج را جداگانه حساب کرده و بر هم تقسیم کنیم، هر کدام یک شد، جواب است. به راحتی واضح است مدول عبارت گزینه (۳) برابر یک است:

$$\text{اندازه}\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)=\frac{\sqrt{1+(-1)^2}}{\sqrt{1+1^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

مثال ۸۴: اعداد مختلط $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ را در نظر می‌گیریم. مزدوج مختلط z را با $\bar{z}$ نمایش دهیم. مساحت متوازی‌الاضلاعی در صفحهٔ مختلط که دو پهلوی مجاورش بردارهای z_1 و z_2 باشند، برابر است با: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۹۰)

۱) $|\mathrm{Re}(z_1z_2)|$ ۲) $|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)|$ ۳) $|\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)|$ ۴) $|\mathrm{Im}(z_1z_2)|$

پاسخ: گزینه «۳» اگر دو بردار a و b اضلاع متوازی‌الاضلاعی باشند، مساحت حاصل برابر است با: $A=|a\times b|$

حال که دو بردار $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ اضلاع متوازی الاضلاع می‌باشند، مساحت محصور به آن‌ها عبارت است از:

$$A=|z_1\times z_2|=|(x_1+iy_1)\times(x_2+iy_2)|$$

$$z_1\times z_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & y_1 & 0\\ x_2 & y_2 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow z_1\times z_2=(x_1y_2-x_2y_1)\ \Rightarrow A=|x_1y_2-x_2y_1|$$

اگر گزینه‌ها را محاسبه کنیم، گزینهٔ سوم معادل عبارت فوق است:

$$(z_1\bar{z}_2)=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i$$

$$\mathrm{Im}\,z_1\bar{z}_2=x_2y_1-x_1y_2\ \Rightarrow|\mathrm{Im}\,z_1\bar{z}_2|=|x_2y_1-x_1y_2|$$

ملاحظه می‌شود که همان عبارت بالا به دست آمد.

مثال ۸۵: فرض کنیم $a>1$ یک عدد حقیقی محض باشد. در این صورت ریشه‌های دوم $z=a+i$ کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $\pm\sqrt[4]{a^2-1}\exp(i\theta)$ که در آن $\theta=\mathrm{Arg}(a+i)$ می‌باشد

۲) $\pm\sqrt[4]{a^2+1}\exp(i\theta)$ که در آن $\theta=\mathrm{Arg}(a+i)$ می‌باشد

۳) $\pm\sqrt[4]{a^2-1}\exp(i\frac{\theta}{2})$ که در آن $\theta=\mathrm{Arg}(a+i)$ می‌باشد

۴) $\pm\sqrt[4]{a^2+1}\exp(i\frac{\theta}{2})$ که در آن $\theta=\mathrm{Arg}(a+i)$ می‌باشد

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا z را به صورت $re^{i\theta}$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} z=a+i\ \Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+1}\\ \theta=\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}(a+i)\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{a+i}=\sqrt{(\sqrt{a^2+1})e^{i\theta}}=\sqrt[4]{a^2+1}\,e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{2})}\quad k=0,1$$

با جایگذاری $k=0,1$ در رابطه فوق داریم:

$$\sqrt{a+i}=\begin{cases}\sqrt[4]{a^2+1}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\\ \sqrt[4]{a^2+1}\,e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\pi}=-\sqrt[4]{a^2+1}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{a+i}=\pm\sqrt[4]{a^2+1}\exp(i\frac{\theta}{2})$$

مثال ۸۶: چند عدد مختلط (غیرحقیقی) در رابطه $\frac{\bar{z}}{z+\bar{z}}=z$ صدق می‌کند؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) هیچ عددی ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) سه عدد

پاسخ: گزینه «۱» با طرفین ـ وسطین کردن رابطه، داریم:

$$\frac{\bar{z}}{z+\bar{z}}=z\ \Rightarrow\bar{z}=z\bar{z}+z^2$$

با فرض $z=x+iy$ خواهیم داشت:

$$x-iy=x^2+y^2+x^2-y^2+i2xy\ \Rightarrow\begin{cases}x=2x^2\\ y=-2xy\end{cases}\Rightarrow \text{معادله جواب غیرحقیقی ندارد}$$

مثال ۸۷: معادله $|z-2|=|z+2i|$ چه نقاطی را در صفحه مختلط نشان می‌دهد؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۱)

۱) نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم
۲) نقاط روی نیمساز ربع دوم
۳) نقاط روی نیمساز ربع چهارم
۴) نقاط روی عمود منصف پاره‌خط واصل بین نقاط $(0,-2)$ و $(2,0)$

پاسخ: گزینه «۴» در حالت کلی معادله $|z-z_0|=|z-z_1|$ بیان‌کننده مجموعه نقاط روی عمود منصف پاره خط واصل بین z_0 و z_1 است.

$$|z-2|=|z+2i| \Rightarrow \begin{cases} z_0=2 \\ z_1=-2i \end{cases}$$

مثال ۸۸: اگر z_1 و z_2 جواب‌های معادله $z^2+z+1=i$ باشند، $|z_1-z_2|$ کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sqrt{10}$
۲) $\sqrt{5}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را حساب می‌کنیم:

$$z^2+z+1-i=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1-4(1)(1-i)=1-4+4i=4i-3 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4i-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{4i-3}}{2}$$

$$|z_1-z_2|=|(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{4i-3}}{2})-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4i-3}}{2})|=|\frac{2\sqrt{4i-3}}{2}|=|\sqrt{4i-3}|=\sqrt{\sqrt{4^2+3^2}}=\sqrt{\sqrt{25}}=\sqrt{5}$$

درسنامه۲: توابع مختلط

مثال۱: اگر $|e^{-iz}|\le 1$، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $y\le 0$ ۲) $y=0$ ۳) $x\ge 0$ ۴) $x=0$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه اندازه عدد مختلط e^{-iz} باید کوچکتر یا مساوی یک باشد، داریم: $e^{-iz}=e^{-i(x+iy)}=e^{y-ix}\Rightarrow |e^{y-ix}|<1$
اندازه e^{y-ix} باید کوچکتر یا مساوی یک باشد و می‌دانیم اندازه این عدد مختلط برابر e^{y} می‌باشد و این عبارت زمانی کوچکتر یا مساوی یک می‌شود که $y\le 0$ باشد.

مثال۲: معادله $\cos z=2$ وقتی که z عددی مختلط باشد:

۱) دارای بی‌نهایت جواب حقیقی است.
۲) دارای هیچ جوابی نیست چون $-1<\cos z<1$ است.
۳) دارای بی‌نهایت جواب مختلط است.
۴) دارای تعداد محدودی جواب مختلط است.

پاسخ: گزینه «۳»

$$\cos z=\cos x.\cosh y-i\sin x.\sinh y=2\xrightarrow{\text{مقدار قسمت موهومی باید صفر باشد}}\sin x.\sinh y=0\quad ,(1)$$

در این قسمت دو حالت را باید در نظر بگیریم، یا $\sin x=0$ و یا $\sinh y=0$ است:
اگر $\sin x=0$ باشد، آنگاه $x=k\pi$ خواهد بود و می‌دانیم وقتی $x=k\pi$ باشد، آنگاه می‌توان نوشت: $\cos x=(-1)^k$، لذا داریم:

$$(-1)^k\cosh y=2\Rightarrow \cosh y=\pm 2\xrightarrow{\cosh y>0}\cosh y=2$$

از معادله‌ی فوق، دو مقدار برای y بدست می‌آید که چون این دو مقدار y به ازای xهای مختلف، $(x=2k\pi)$ حاصل می‌شوند، z دارای بیشمار جواب مختلط است.
هر چند نیازی به بررسی نیست، اما حالت دیگر معادله (۱) را نیز بررسی می‌کنیم. اگر $\sinh y=0$ آنگاه بر طبق اتحاد $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$ مقدار $\cosh y=1$ می‌شود و آنگاه داریم: $\cos x\times 1=2\Rightarrow \cos x=2\Rightarrow$ امکان ندارد

مثال۳: معادله $tgz=i$ ....

۱) فقط ریشه حقیقی دارد.
۲) فقط ریشه موهومی دارد.
۳) هم ریشه موهومی و هم ریشه حقیقی دارد.
۴) ریشه ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به مقادیر $\sin z$ و $\cos z$ به راحتی مقدار tgz برای ما مشخص است:

$$tgz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=i\Rightarrow\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=i^2\Rightarrow e^{2iz}-1=-1\times(e^{2iz}+1)\Rightarrow 2e^{2iz}=0\Rightarrow$$ معادله ریشه ندارد.

مثال۴: حاصل عبارت $A=Ln(4+4\sqrt{3}i)$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) $Ln2+\pi i$ ۲) $3Ln2\frac{\pi}{6}i$ ۳) $Ln2+\frac{\pi}{4}i$ ۴) $3Ln2+\frac{\pi}{3}i$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $4+4\sqrt{3}i=8e^{\frac{\pi}{3}i}$، بنابراین داریم:

$$A=Ln(8e^{\frac{\pi}{3}i})=Ln8+\frac{\pi}{3}i=3Ln2+\frac{\pi}{3}i$$

مثال۵: تابع Lnz با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

۱) $\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)+iArctg\frac{y}{x}$ ۲) $\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)-iArctg\frac{y}{x}$ ۳) $Ln(x^2+y^2)+iArctg\frac{y}{x}$ ۴) $Ln(x^2+y^2)-iArctg\frac{y}{x}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$Lnz=Ln|z|+i\theta=Ln\sqrt{x^2+y^2}+iArctg\frac{y}{x}=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)+iArctg\frac{y}{x}$$

مثال۶: اگر z یک عدد مختلط غیرصفر، $Lnz=Lnr+i\theta$ و $-\frac{5\pi}{6}\le\theta\le\frac{7\pi}{6}$ باشد، آنگاه $Ln(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$ برابر است با:

۱) $\frac{i\pi}{3}$ ۲) $-\frac{i2\pi}{3}$ ۳) $-\frac{i\pi}{3}$ ۴) $Ln\sqrt{3}+\frac{i\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا اندازه و آرگومان عبارت جلوی تابع Ln را حساب می‌کنیم:

$$z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow |z|=1\ ,\ Argz=-\frac{2\pi}{3}\Rightarrow Lnz=Ln|z|+iArgz=Ln1+i(-\frac{2\pi}{3})=-i\frac{2\pi}{3}$$

مثال ۷: کدام‌یک از تساوی‌های زیر نادرست است؟

۱) $Ln(-۴) = ۲Ln۲ + ۳\pi i$ ۲) $Ln(۳i) = Ln۳ - \frac{۳\pi}{۲}i$ ۳) $Ln(\sqrt{۳} - i) = Ln۲ - \frac{\pi}{۳}i$ ۴) $Ln(-\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}i) = i\frac{۴\pi}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این مثال محدوده‌ی θ مشخص نشده است، بنابراین از فرم کلی Lnz استفاده می‌کنیم و به جای k عدد صحیح مناسب را قرار می‌دهیم. حالا تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱) : $Ln(-۴) = Ln|-۴| + i(۲k\pi + \pi) \xrightarrow{k=۱} Ln(-۴) = ۲Ln۲ + i۳\pi$

بررسی گزینه (۲) : $Ln(۳i) = Ln۳ + i(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}) \xrightarrow{k=-۱} Ln(۳i) = Ln۳ - \frac{۳\pi}{۲}i$

بررسی گزینه (۳) : $Ln(\sqrt{۳} - i) = Ln۲ + i(۲k\pi - \frac{\pi}{۶})$

با توجه به تساوی داده شده در گزینه (۳)، به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی‌توان به $-i\frac{\pi}{۳}$ رسید، پس این گزینه نادرست است:

$$i(۲k\pi - \frac{\pi}{۶}) = -i\frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۲k\pi = \frac{-\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow ۲k = -\frac{۱}{۶} \Rightarrow k = -\frac{۱}{۱۲} \text{ (غلط)}$$

بررسی گزینه (۴) : $Ln(-\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = Ln۱ + i(۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳}) \xrightarrow{k=۰} Ln(-\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = i(\frac{۴\pi}{۳})$

مثال ۸: اگر $i^{a+ib} = a + ib$، مقدار $a^۲ + b^۲$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $e^{-b(۴k+۱)\frac{\pi}{۲}}$ ۲) $e^{-b(۴k+۱)\pi}$ ۳) $e^{b(۴k+۱)\frac{\pi}{۲}}$ ۴) $e^{b(۴k+۱)\frac{\pi}{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به فرض داده شده با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$i^{a+ib} = a + ib \Rightarrow (a+ib)Lni = Ln(a+ib) \Rightarrow (a+ib)[Ln۱ + i(۲k\pi + \frac{\pi}{۲})] = Ln\sqrt{a^۲ + b^۲} + i(۲k\pi + tg^{-۱}\frac{b}{a})$$

در سمت راست تساوی $Ln\sqrt{a^۲ + b^۲}$ را می‌توان به صورت $\frac{۱}{۲}Ln(a^۲ + b^۲)$ نوشت. اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی را در طرفین تساوی تفکیک کنیم، داریم:

$$[aLn۱ - b(۲k\pi + \frac{\pi}{۲})] + i[bLn۱ + a(۲k\pi + \frac{\pi}{۲})] = \frac{۱}{۲}Ln(a^۲ + b^۲) + i(۲k\pi + tg^{-۱}\frac{b}{a})$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی، داریم:

$$-b(\frac{۴k\pi + \pi}{۲}) = \frac{۱}{۲}Ln(a^۲ + b^۲) \Rightarrow -b(۴k+۱)\pi = Ln(a^۲ + b^۲) \Rightarrow \mathbf{a^۲ + b^۲ = e^{-b(۴k+۱)\pi}}$$

مثال ۹: حاصل $\sin[iLn(\frac{۱ + ie^{-i\frac{\pi}{۸}}}{۱ - ie^{i\frac{\pi}{۸}}})]$ برابر کدام گزینه است؟ (مقدار اصلی Ln موردنظر می‌باشد.)

۱) $-\cos\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{۸}$ ۳) $-\sin\frac{\pi}{۸}$ ۴) $\sin\frac{\pi}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا عبارت جلوی Ln را با توجه به فرمول $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$، به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$A = \frac{۱ + ie^{-i\frac{\pi}{۸}}}{۱ - ie^{i\frac{\pi}{۸}}} = \frac{۱ + i(\cos\frac{\pi}{۸} - i\sin\frac{\pi}{۸})}{۱ - i(\cos\frac{\pi}{۸} + i\sin\frac{\pi}{۸})} = \frac{۱ + \sin\frac{\pi}{۸} + i\cos\frac{\pi}{۸}}{۱ + \sin\frac{\pi}{۸} - i\cos\frac{\pi}{۸}}$$

با ضرب عبارت در مزدوج مخرج داریم:

$$A = \frac{(۱ + \sin\frac{\pi}{۸} + i\cos\frac{\pi}{۸})(۱ + \sin\frac{\pi}{۸} + i\cos\frac{\pi}{۸})}{(۱ + \sin\frac{\pi}{۸})^۲ + \cos^۲\frac{\pi}{۸}} = \frac{(۱ + \sin\frac{\pi}{۸})^۲ + ۲i\cos\frac{\pi}{۸}(۱ + \sin\frac{\pi}{۸}) - \cos^۲\frac{\pi}{۸}}{(۱ + \sin\frac{\pi}{۸})^۲ + \cos^۲\frac{\pi}{۸}}$$

با استفاده از فرمول می‌دانیم: $۱ - \sin^۲\frac{\pi}{۸} = \cos^۲\frac{\pi}{۸}$ و یا $(۱ - \sin\frac{\pi}{۸})(۱ + \sin\frac{\pi}{۸}) = \cos^۲\frac{\pi}{۸}$، با فاکتورگیری از $۱ + \sin\frac{\pi}{۸}$ در صورت و مخرج داریم:

$$A = \frac{(۱ + \sin\frac{\pi}{۸})[(۱ + \sin\frac{\pi}{۸}) + ۲i\cos\frac{\pi}{۸} - (۱ - \sin\frac{\pi}{۸})]}{(۱ + \sin\frac{\pi}{۸})(۱ + \sin\frac{\pi}{۸} + ۱ - \sin\frac{\pi}{۸})}$$

با ساده کردن $۱ + \sin\frac{\pi}{۸}$ از صورت و مخرج داریم:

$$A = \frac{۲(\sin\frac{\pi}{۸} + i\cos\frac{\pi}{۸})}{۲} = \sin\frac{\pi}{۸} + i\cos\frac{\pi}{۸} = i(\cos\frac{\pi}{۸} - i\sin\frac{\pi}{۸}) = ie^{-i\frac{\pi}{۸}}$$

بنابراین LnA برابر است با: $Lnie^{-i\frac{\pi}{8}}$ و به عبارت ساده‌تر برابر است با:

$$LnA=Lni.e^{-i\frac{\pi}{8}}=Lni+Lne^{-i\frac{\pi}{8}}=i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{8}=i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})$$

و چون در سؤال مقدار عبارت $\sin i[LnA]$ خواسته شده، لذا داریم:

$$\sin i[i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})]=\sin(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8})=-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})=-\cos\frac{\pi}{8}$$

مثال ۱۰: قسمت موهومی تابع مختلط $w=i^{Ln(1+i)}$ برابر کدام گزینه است؟ (Ln را شاخه اصلی در نظر بگیرید.)

۱) $\sin(\frac{\pi}{4}Ln2)$

۲) $e^{-\frac{\pi^2}{8}}.\cos(\frac{\pi}{4}Ln2)$

۳) $\cos(\frac{\pi}{4}Ln2)$

۴) $e^{-\frac{\pi^2}{8}}\sin(\frac{\pi}{4}Ln2)$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مقدار اصلی $Ln(1+i)$ را حساب می‌کنیم:

$$Ln(1+i)=Ln\sqrt{1+1}+i\,tg^{-1}1=Ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}Ln2+i\frac{\pi}{4}\Rightarrow w=i^{Ln(1+i)}=i^{(\frac{1}{2}Ln2+i\frac{\pi}{4})}$$

می‌دانیم $i=e^{Lni}$، پس به جای i می‌توانیم e^{Lni} قرار دهیم:

$$w=e^{Lni(\frac{1}{2}Ln2+i\frac{\pi}{4})}\xrightarrow{Lni=Ln1+i\frac{\pi}{2}}w=e^{i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}Ln2+i\frac{\pi}{4})}=e^{-\frac{\pi^2}{8}+\frac{i\pi}{4}Ln2}$$

$$\Rightarrow w=e^{-\frac{\pi^2}{8}}.e^{i\frac{\pi}{4}Ln2}=e^{-\frac{\pi^2}{8}}[\cos(\frac{\pi}{4}Ln2)+i\sin(\frac{\pi}{4}Ln2)]=e^{-\frac{\pi^2}{8}}.\cos(\frac{\pi}{4}Ln2)+ie^{-\frac{\pi^2}{8}}.\sin(\frac{\pi}{4}Ln2)$$

مثال ۱۱: قسمت حقیقی عدد مختلط $z=(1+i\sqrt{3})^{(1+i\sqrt{3})}$، برابر کدام گزینه است؟ (مقدار اصلی موردنظر است)

۱) $e^{Ln2+\frac{\pi}{3}}\cos(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{\sqrt{3}})$

۲) $e^{Ln2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\cos(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{3})$

۳) $e^{(Ln2-\frac{\pi}{3})}\cos(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{\sqrt{3}})$

۴) $e^{(Ln2-\frac{\pi}{\sqrt{3}})}\cos(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{3})$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تساوی $a^b=e^{bLna}$ به تست پاسخ می‌دهیم:

$$z=e^{(1+i\sqrt{3})Ln(1+i\sqrt{3})}$$

مقدار اصلی $Ln(1+i\sqrt{3})$ برابر است با $Ln\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}+i\,tg^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}$ و به عبارت دیگر برابر $Ln2+i\frac{\pi}{3}$ می‌باشد، لذا z برابر است با:

$$z=e^{(1+i\sqrt{3})(Ln2+i\frac{\pi}{3})}=e^{[Ln2+i\frac{\pi}{3}+i\sqrt{3}Ln2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi]}=e^{[Ln2-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+i(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{3})]}$$

با توجه به رابطه $e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y$، قسمت حقیقی به شکل زیر است:

$$z \text{ قسمت حقیقی }=e^{Ln2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}\cos(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{3})$$

دقت کنید $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ برابر $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ است و مقدار فوق برابر گزینه (۴) است.

مثال ۱۲: فرض کنید $f(z)=\sqrt{z(z-1)(z-2)}$، اگر $f(-1)=-\sqrt{6}i$، آنگاه مقدار $f(i)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $i\sqrt[4]{10}e^{-\frac{i}{2}tg^{-1}(\frac{1}{3})}$

۲) $-\sqrt[4]{10}e^{\frac{i}{2}tg^{-1}(\frac{1}{3})}$

۳) $\sqrt[4]{10}e^{\frac{i}{2}tg^{-1}(\frac{1}{3})}$

۴) $\sqrt[4]{10}e^{-\frac{i}{2}tg^{-1}(\frac{1}{3})}$

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم $w=z(z-1)(z-2)$ باشد. هرگاه $w=re^{i\theta}$ نمایش قطبی w باشد، آن‌گاه تابع $f=w^{\frac{1}{2}}$ دارای دو مقدار است:

$$w^{\frac{1}{2}}=(z(z-1)(z-2))^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{2})}\qquad k=0,1$$

به عبارتی تابع $f=w^{\frac{1}{2}}$ یکی از دو مقدار زیر را نشان می‌دهد:

$$\text{اگر}\ k=0\Rightarrow f(z)=w^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\quad,\quad \text{اگر}\ k=1\Rightarrow f(z)=w^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}=e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\pi}=-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

از شرط $f(-1)=-\sqrt{6}i$ مشخص می‌کنیم که با کدام مقدار از $f(z)$ سروکار داریم. در $z=-1$ داریم:
$$w=(-1)(-2)(-3)=-6=6e^{i\pi}$$
به ازای $k=0$ داریم:
$$f(-1)=\sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{2}}=\sqrt{6}\,i$$
و به ازای $k=1$ داریم:
$$f(-1)=-\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{2}}=-\sqrt{6}\,i$$
بنابراین در این سؤال حالت $k=1$ موردنظر بوده است. به این ترتیب می‌توانیم مقدار $f(i)$ را حساب کنیم:
$$z=i\ \Rightarrow w=i(i-1)(i-2)=-(i+1)(i-2)=3+i$$
برای $w=3+i$ داریم $r=\sqrt{10}$ و $\theta=tg^{-1}(\frac{1}{3})$، پس خواهیم داشت:
$$f(-1)=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}=-\sqrt[4]{10}\,e^{\frac{i}{2}tg^{-1}(\frac{1}{3})}$$

مثال ۱۳: از معادله $\cosh z=-1$، مقدار z کدام است؟

۱) $z=n\pi$ ۲) $z=(2n+1)\pi$ ۳) $z=i(2n+1)\pi$ ۴) $z=in\pi$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$، بنابراین داریم:
$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=-1\Rightarrow e^z+\frac{1}{e^z}=-2\ \Rightarrow \frac{(e^z)^2+1}{e^z}=-2$$
$$\Rightarrow (e^z)^2+2e^z+1=0\ \Rightarrow (e^z+1)^2=0\ \Rightarrow e^z=-1\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} z=Ln(-1)$$
می‌دانیم $-1=e^{i\pi}$ لذا داریم:
$$Ln(-1)=Ln1+i(\pi+2n\pi)=i(2n+1)\pi\ \Rightarrow z=Ln(-1)=i(2n+1)\pi$$

مثال ۱۴: اگر $\sin(a+ib)=x+iy$ و $x+iy=\cosh(u+iv)$ آن‌گاه کدام گزینه زیر صحیح **نیست**؟

۱) $\frac{x^2}{\cosh^2 b}+\frac{y^2}{\sinh^2 b}=1$ ۲) $\frac{x^2}{\sin^2 a}-\frac{y^2}{\cos^2 a}=1$ ۳) $\frac{x^2}{\cosh^2 u}-\frac{y^2}{\sinh^2 u}=1$ ۴) $x^2\sec^2 v-y^2\cos ec^2 v=1$

پاسخ: گزینه «۳» تساوی زیر را طبق فرمول‌ها می‌دانیم:
$$\sin(a+ib)=\sin a\cosh b+i\cos a\sinh b$$
$$\cosh(u+iv)=\cosh u\cos v+i\sinh u\sin v$$
از تساوی $\sin(a+ib)=x+iy$ خواهیم داشت: $x=\sin a\cosh b$ و $y=\cos a\sinh b$. به عبارت دیگر $\frac{x}{\cosh b}=\sin a$ و $\frac{y}{\sinh b}=\cos a$ و یا $\frac{x}{\sin a}=\cosh b$ و $\frac{y}{\cos a}=\sinh b$. اکنون از روابط بین توابع مثلثاتی $\sin a$ و $\cos a$ و همچنین روابط بین توابع هیپربولیکِ $\sinh a$ و $\cosh a$ استفاده می‌کنیم که معادلات زیر حاصل می‌شود:
$$(\frac{x}{\cosh b})^2+(\frac{y}{\sinh b})^2=\sin^2 a+\cos^2 a=1$$
$$(\frac{x}{\sin a})^2-(\frac{y}{\cos a})^2=\cosh^2 b-\sinh^2 b=1$$
پس گزینه‌های (۱) و (۲) برقرار هستند. اکنون به تساوی $x+iy=\cosh(u+iv)$ توجه می‌کنیم. با متحد قرار دادن بخش‌های حقیقی و موهومی داریم:
$$y=\sinh u\sin v \text{ و } x=\cosh u\cos v$$
با استفاده از همان روابط قبلی داریم:
$$(\frac{x}{\cosh u})^2+(\frac{y}{\sinh u})^2=\cos^2 v+\sin^2 v=1$$
که نتیجه می‌شود گزینه (۳)، شکل نادرست این معادله است. در ضمن گزینه (۴) معادله‌ی درستی است:
$$x^2\sec^2 v-y^2\cos ec^2 v=\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$$

مثال ۱۵: مقدار $arctgh(1+2i)$ کدام است؟ $(k\in z)$

۱) $\frac{1}{2}Ln2+i\pi(k+\frac{3}{8})$ ۲) $\frac{1}{4}Ln2+i\pi(k+\frac{3}{8})$ ۳) $\frac{1}{4}Ln2-i2\pi(k+\frac{3}{8})$ ۴) $\frac{1}{2}Ln2+i2\pi(k+\frac{3}{8})$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تساوی $arctghz=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+z}{1-z})$ داریم:
$$arctgh(1+2i)=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+1+2i}{1-1-2i})=\frac{1}{2}Ln(\frac{2+2i}{-2i})=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+i}{-i})=\frac{1}{2}Ln(i-1)=\frac{1}{2}[Ln\sqrt{2}+i(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)]=\frac{1}{2}Ln2^{\frac{1}{2}}+i(k\pi+\frac{3\pi}{8})=\frac{1}{4}Ln2+i(k\pi+\frac{3\pi}{8})$$

مثال ۱۶: جواب‌های معادله $\sin z = ۲$ کدام است؟

۱) $z=(۲n+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲}+Ln(۲+\sqrt{۳})$
۲) $z=(۲n+\frac{۱}{۲})\pi-Ln(۲+\sqrt{۳})$
۳) $z=۲n\pi+iLn(۲\pm\sqrt{۳})$
۴) $z=(۲n+\frac{۱}{۲})\pi-iLn(۲\pm\sqrt{۳})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: فرض کنیم فرمول را حفظ هستید، در این صورت به راحتی داریم:

$$\sin z=۲\Rightarrow z=\text{Arc}\sin ۲$$

$$z=-iLn[i(۲)+\sqrt{۱-(۲)^۲}]=-iLn(۲i+\sqrt{-۳})=-iLn(۲i\pm\sqrt{۳}i)=-iLni(۲\pm\sqrt{۳})=-i[Lni+Ln(۲\pm\sqrt{۳})]+۲n\pi$$

$$\Rightarrow z=-i\times i\frac{\pi}{۲}-iLn(۲\pm\sqrt{۳})+۲n\pi=(۲n+\frac{۱}{۲})\pi-iLn(۲\pm\sqrt{۳})$$

روش دوم: با توجه به تساوی بخش‌های حقیقی و موهومی طرفین معادله را حل می‌کنیم:

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=۲$$

بنابراین می‌توان دستگاه مقابل را تشکیل داد:

$$\begin{cases}\sin x\cosh y=۲\\ \cos x\sinh y=۰\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم داریم $\cos x=۰$ یا $\sinh y=۰$. اگر $\sinh y=۰$ باشد، $y=۰$ است. زیرا تنها ریشه‌ی $\sinh y$ در مبدأ است. با جایگذاری $y=۰$ در معادله‌ی اول داریم $\sin x=۲$ که غیر ممکن است. بنابراین داریم $\cos x=۰$ یعنی $x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$، با جایگذاری در معادله‌ی اول خواهیم داشت:

$$[\sin(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}]\cosh y=۲\Rightarrow(-۱)^k\cosh y=۲$$

می‌دانیم که تابع حقیقی $\cosh y$ همواره مثبت است. پس اگر k فرد باشد به معادله‌ی نامکن $-\cosh y=۲$ می‌رسیم. در نتیجه k زوج است $(k=۲n)$ و خواهیم داشت:

$$(-۱)^{۲n}\cosh y=۲\Rightarrow\cosh y=۲\Rightarrow\frac{e^y+e^{-y}}{۲}=۲\Rightarrow e^{۲y}+۱=۴e^y\Rightarrow e^{۲y}-۴e^y+۱=۰$$

یک معادله‌ی درجه‌ی دو داریم که مجهول آن e^y است:

$$\Delta=۱۶-۴=۱۲\Rightarrow e^y=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}\Rightarrow y=Ln(۲\pm\sqrt{۳})$$

با جمع‌بندی موارد فوق، جواب به صورت $z=x+iy$ است که $x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}=(۴n+۱)\frac{\pi}{۲}$ و $y=Ln(۲\pm\sqrt{۳})$ باشد.

به عبارتی جواب‌های معادله عبارتند از نقاط مقابل:

$$z=(۲n+\frac{۱}{۲})\pi+iLn(۲\pm\sqrt{۳})\quad,\quad(n\in\mathbb{Z})$$

اکنون به این مطلب دقت کنید: در مورد اعداد $۲\pm\sqrt{۳}$ توجه کنید که این دو عدد معکوس یکدیگر هستند یعنی:

$$۲+\sqrt{۳}=\frac{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}{(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}$$

بنابراین:

$$Ln(۲+\sqrt{۳})=Ln\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=-Ln(۲-\sqrt{۳})\quad,\quad Ln(۲-\sqrt{۳})=Ln\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=-Ln(۲+\sqrt{۳})$$

پس عبارت‌های $Ln(۲\pm\sqrt{۳})$ و $-Ln(۲\pm\sqrt{۳})$ مقادیر یکسانی به ما می‌دهند.

بنابراین اگر جواب این مسأله را به صورت $z=(۲n+\frac{۱}{۲})\pi-iLn(۲\pm\sqrt{۳})$ بنویسیم نیز فرقی نمی‌کند.

مثال ۱۷: مقدار $\cosh^{-۱}z$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $Ln[z-(۱-z^۲)^{\frac{۱}{۲}}]$
۲) $Ln[۲z+(z^۲-۱)^{\frac{۱}{۲}}]$
۳) $Ln[z+(۱-z^۲)^{\frac{۱}{۲}}]$
۴) $Ln[z+(z^۲-۱)^{\frac{۱}{۲}}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$w=\cosh^{-۱}z\Rightarrow\cosh w=z\Rightarrow\frac{e^w+e^{-w}}{۲}=z\Rightarrow e^w+e^{-w}=۲z\Rightarrow e^w+\frac{۱}{e^w}=۲z$$

$$\Rightarrow e^{۲w}-۲ze^w+۱=۰\Rightarrow(e^w)^۲-۲ze^w+۱=۰$$

با فرض $A=e^w$ با یک معادله درجه دوم رو به‌رو هستیم و به راحتی داریم:

$$A^۲-۲zA+۱=۰\Rightarrow A=\frac{z\pm\sqrt{z^۲-۱}}{۱}\xrightarrow{A=e^w}e^w=z\pm\sqrt{z^۲-۱}\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}w=Ln(z\pm\sqrt{z^۲-۱})$$

کافیست یکی از علامت‌های مثبت یا منفی را به دلخواه در نظر بگیریم. بنابراین پاسخ $w=Ln(z+\sqrt{z^۲-۱})$ می‌باشد.

مثال ۱۸: مقدار اصلی $(1-i)^{4i}$، کدامیک از گزینه‌های زیر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\exp(2i\,\mathrm{Log}3).\exp(-\pi)$
۲) $\exp(4i\,\mathrm{Log}3).\exp(\pi)$
۳) $\exp(2i\,\mathrm{Log}2).\exp(\pi)$
۴) $\exp(3i\,\mathrm{Log}2).\exp(\pi)$

پاسخ: گزینه «۳» برای هر عدد مختلط $z\neq 0$ همواره $z^c=e^{c\mathrm{Ln}z}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$(1-i)^{4i}=e^{4i\mathrm{Ln}(1-i)}=e^{4i(\mathrm{Ln}|1-i|+i\mathrm{Arg}(1-i))}=e^{4i(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{i\pi}{4})}=e^{2i\mathrm{Ln}2+\pi}=e^{2i\mathrm{Ln}2}.e^{\pi}$$

مثال ۱۹: مقدار اصلی $(1-i)^{1+i}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $e^{\frac{\pi}{4}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$
۲) $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2})+i\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2})\right]$
۳) $\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}\left[\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{4})\right]$
۴) $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})\right]$

پاسخ: گزینه «۴»

$$A=(1-i)^{1+i}=e^{(1+i)\mathrm{Ln}(1-i)}=e^{(1+i)(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})}=e^{\mathrm{Ln}\sqrt{2}+i\mathrm{Ln}\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}=e^{\mathrm{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}.e^{i[\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}]}$$

$$e^{\mathrm{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}=e^{\mathrm{Ln}\sqrt{2}}.e^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\Rightarrow A=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})]$$

مثال ۲۰: هرگاه $f(z)=z^{\log z}$ (لگاریتم شاخه اصلی) باشد، در این صورت $f(-1)$ برابر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱
۲) e^{π^2}
۳) $e^{-\pi^2}$
۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۳»

$$z^{\mathrm{Ln}z}=e^{\mathrm{Ln}z.\mathrm{Ln}z}=e^{\mathrm{Ln}(-1).\mathrm{Ln}(-1)}=e^{[\mathrm{Ln}(-1)]^2}=e^{[\mathrm{Ln}1+i\pi]^2}=e^{-\pi^2}$$

مثال ۲۱: اگر $z=x+iy$ باشد، می‌توان گفت معادلهٔ $e^z=-2$ .... (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) دارای ریشه نیست.
۲) فقط ریشهٔ حقیقی دارد.
۳) فقط ریشهٔ موهومی دارد.
۴) دارای بینهایت ریشه است.

پاسخ: گزینه «۴» فرم قطبی عدد ۲- را به صورت $2e^{i(2k+1)\pi}$ می‌نویسیم.

$$e^z=-2\Rightarrow e^z=2e^{i(2k+1)\pi}$$

حالا از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow z=\mathrm{Ln}(2e^{i(2k+1)\pi})=\mathrm{Ln}2+i(2k+1)\pi\quad;\quad(k\in\mathbb{Z})$$

مثال ۲۲: اگر $w=f(z)=2iz+6\bar{z}$ باشد مطلوب است u و v و تابع f در نقطه $z=\frac{1}{2}+4i$. (مهندسی مکانیک «ساخت و تولید» ـ آزاد ۸۰)

۱) $u(x,y)=2x-6y$ و $v(x,y)=6x-2y$ و $f(\frac{1}{2}+4i)=-5-23i$
۲) $u(x,y)=6x-2y$ و $v(x,y)=2x-6y$ و $f(\frac{1}{2}+4i)=-5-23i$
۳) $u(x,y)=2x-6y$ و $v(x,y)=3x-y$ و $f(\frac{1}{2}+4i)=-5+23i$
۴) $u(x,y)=6x-2y$ و $v(x,y)=2x-6y$ و $f(\frac{1}{2}+4i)=5+23i$

پاسخ: گزینه «۲»

$$z=\frac{1}{2}+4i\Rightarrow\bar{z}=\frac{1}{2}-4i$$

$$f(z)=2iz+6\bar{z}=2i(\frac{1}{2}+4i)+6(\frac{1}{2}-4i)=-5-23i$$

$$f(z)=2iz+6\bar{z}=2i(x+iy)+6(x-iy)=6x-2y+i(2x-6y)$$

مثال ۲۳: مقدار اصلی عدد مختلط $(-1)^i$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱-
۲) $e^{-\pi}$
۳) ۱
۴) e^{π}

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $e^{\pi i}=-1$، لذا داریم:

$$(-1)^i=(e^{\pi i})^i=e^{-\pi}$$

مثال ۲۴: اگر داشته باشیم $z=x+iy$ و $w=u+iv$ و $w=\frac{۲}{z}$، مقدار x برحسب v و u کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{-v}{u^{۲}+v^{۲}}$ ۲) $\frac{uv}{u^{۲}+v^{۲}}$ ۳) $\frac{۲u}{u^{۲}+v^{۲}}$ ۴) $\frac{۲u-v}{u^{۲}+v^{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$w=\frac{۲}{x+iy}=\frac{۲(x-iy)}{x^{۲}+y^{۲}}=\frac{۲x}{x^{۲}+y^{۲}}-i\frac{۲y}{x^{۲}+y^{۲}}$$

$$\left.\begin{aligned}&u=\frac{۲x}{x^{۲}+y^{۲}}\Rightarrow u^{۲}=\frac{۴x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\\&v=-\frac{۲y}{x^{۲}+y^{۲}}\Rightarrow v^{۲}=\frac{۴y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow u^{۲}+v^{۲}=\frac{۴(x^{۲}+y^{۲})}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}=\frac{۴}{x^{۲}+y^{۲}}$$

$$\left.\begin{aligned}&u=\frac{۲x}{x^{۲}+y^{۲}}\\&u^{۲}+v^{۲}=\frac{۴}{x^{۲}+y^{۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{u}{u^{۲}+v^{۲}}=\frac{x}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲u}{u^{۲}+v^{۲}}$$

توضیح: به روش تستی حل سؤال با استفاده از نقطه‌گذاری فکر کنید!

مثال ۲۵: هرگاه $A=(-i)^{i}$ آنگاه مقدار اصلی A کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) e ۲) $e^{-۱}$ ۳) $e^{\frac{\pi}{۲}}$ ۳) $e^{\frac{-\pi}{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم $-i=e^{-\frac{\pi}{۲}i}$ لذا داریم:

$$(-i)^{i}=[e^{-\frac{\pi}{۲}i}]^{i}=e^{\frac{\pi}{۲}}$$

مثال ۲۶: مقدار اصلی $Ln(-۴)$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $۲Ln۲$ ۲) $۲Ln۲-i\pi$ ۳) $۲Ln۲+i\pi$ ۴) $۲Ln۲-i\frac{\pi}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$-۴=۴e^{i\pi}\Rightarrow Ln(-۴)=Ln۴+i\pi=۲Ln۲+i\pi$$

مثال ۲۷: مجموعه جواب‌های معادلهٔ $\sin z=۲i$ ($z=x+iy$ مختلط) کدام‌اند؟(Z مجموعه اعداد صحیح است)

(مهندسی مکانیک و مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) تهی است.

۲) $z_k=k\pi+iLn(\sqrt{۵}-۲),k\in Z$

۳) $z_k=k\pi+iLn(\sqrt{۵}+۲(-۱)^{k}),k\in Z$

۴) $z_k=k\pi+iLn(\sqrt{۵}+۲),k\in Z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=۲i\Rightarrow\begin{cases}\sin x\cosh y=۰\Rightarrow\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\\\cos x\sinh y=۲\end{cases}$$

$$\cos x.\sinh y=۲\Rightarrow\cos k\pi.\sinh y=۲\Rightarrow(-۱)^{k}.\sinh y=۲\Rightarrow\sinh y=۲(-۱)^{k}$$

$$\Rightarrow\frac{e^{y}-e^{-y}}{۲}=۲(-۱)^{k}\Rightarrow e^{y}-e^{-y}=۴(-۱)^{k}$$

$$\Rightarrow e^{۲y}-۴(-۱)^{k}e^{y}-۱=۰\Rightarrow e^{y}=۲(-۱)^{k}\pm\sqrt{۵}\xrightarrow{e^{y}>۰}y=Ln[(\sqrt{۵}+۲(-۱)^{k})]$$

مثال ۲۸: اگر w یک تابع مختلط باشد، آنگاه $w=u(x,y)+iv(x,y)$. در تابع $w=\frac{1}{1-z}$ مقادیر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $u(x,y)=\frac{1-x}{1+y}$ و $v(x,y)=\frac{1-y}{1-x}$

۲) $u(x,y)=\frac{y}{1-x}$ و $v(x,y)=\frac{x}{1-y}$

۳) $u(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$ و $v(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$

۴) $u(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$ و $v(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$w=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-(x+iy)}=\frac{1}{(1-x)-iy}=\frac{(1-x)+iy}{(1-x)^2+y^2}=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}+i\frac{y}{(1-x)^2+y^2}=u+iv$$

مثال ۲۹: قدرمطلق و آرگومان عدد مختلط $w=e^{\bar{z}-i}$ کدامند؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶ و ۸۹)

۱) $\begin{cases}|w|=e^{x+1}\\ \arg w=-y\end{cases}$

۲) $|w|=e^{x+1}$

۳) $\begin{cases}|w|=e^{x}\\ \arg w=-(y+1)\end{cases}$

۴) $\begin{cases}|w|=e^{x}\\ \arg w=y+1\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$e^{\bar{z}-i}=e^{x-iy-i}=e^x.e^{-i(y+1)}\Rightarrow |w|=e^x\Rightarrow \arg w=-(y+1)$$

مثال ۳۰: حاصل $z=\sin^{-1}2$ کدام است؟

(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۶)

۱) $(2n+1)\frac{\pi}{2}-i\cosh^{-1}(2)$

۲) $z=(2n\pi-\frac{\pi}{2})+i\cosh^{-1}(2)$

۳) $z=2n\pi+\frac{\pi}{2}+i\cosh^{-1}(2)$

۴) چون $-1\le\sin z\le1$، لذا مسأله جواب ندارد.

پاسخ: گزینه «۳»

$$\sin^{-1}z=-iLn(iz+\sqrt{1-z^2})\Rightarrow \sin^{-1}2=-iLn(i2+\sqrt{1-4})=-iLn(i2\pm i\sqrt{3})$$

$$=-iLni(2\pm\sqrt{3})=-i\left[Lni+Ln(2\pm\sqrt{3})\right]=-i\left[i(2\pi n+\frac{\pi}{2})\pm Ln(2+\sqrt{3})\right]=2\pi n+\frac{\pi}{2}\pm iLn(2+\sqrt{3})=2\pi n+\frac{\pi}{2}\pm i\cosh^{-1}2$$

تذکر: $Ln(2-\sqrt{3})=Ln(\frac{1}{2+\sqrt{3}})=-Ln(2+\sqrt{3})$

مثال ۳۱: مقدار اصلی $(-3)^{3-i}$ عبارت است از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) $27e^{\pi}[\cos(3\pi-Ln3)-i\sin(3\pi-Ln3)]$

۲) $27e^{\pi}[\cos(3\pi+Ln3)+i\sin(3\pi+Ln3)]$

۳) $27e^{\pi}[\cos(3\pi+Ln3)-i\sin(3\pi+Ln3)]$

۴) $27e^{\pi}[\cos(3\pi-Ln3)+i\sin(3\pi-Ln3)]$

پاسخ: گزینه «۴»

$$a^z=e^{zLna}\ ,\ Lnz=Lnr+i\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}(-3)^{3-i}=e^{(3-i)Ln(-3)}\\ Ln(-3)=Ln3+i\pi\end{array}\right\}\Rightarrow(-3)^{3-i}=e^{(3-i)(Ln3+i\pi)}=e^{3Ln3+3\pi i-Ln3i+\pi}$$

$$=e^{3Ln3}.e^{\pi}.e^{(3\pi-Ln3)i}=27.e^{\pi}[\cos(3\pi-Ln3)+i\sin(3\pi-Ln3)]$$

مثال ۳۲: مقدار اصلی i^i کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۳ و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\exp(-\frac{\pi}{2})$

۲) $\exp(-\frac{\pi}{3})$

۳) $\exp(\pi)$

۴) $\exp(2\pi)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i}\Rightarrow i^i=(e^{\frac{\pi}{2}i})^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۳۳: مجموعه‌ی مقادیر $\log(i^2)$ را با A نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی مقادیر $2\log i$ را با B نمایش می‌دهیم. کدام یک از چهارگزاره‌ی زیر درست است؟ (ϕ مجموعه‌ی تهی است.)
(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۷)

۱) $A\subset B$ ۲) $A\cap B=\phi$ ۳) $B\subset A$ ۴) $A=B$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا طبق تعریف داریم:

$$\log z=\mathrm{Ln}|z|+i\mathrm{Arg}z\ ,\ \mathrm{Arg}z=2k\pi+\theta\ ,\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

حال طبق مطلب فوق داریم:

$$A=\log i^2=\log -1=\mathrm{Ln}1+i(2k\pi+\pi)=i(2k\pi+\pi)\ ,\ k=0,1,2,\dots$$

$$B=2\log i=2\times(\mathrm{Ln}1+i(2k\pi+\frac{\pi}{2}))=i(4k\pi+\pi)\ ,\ k=0,1,2,\dots$$

ملاحظه می‌شود که $2\log i$ زیر مجموعه‌ای از $\log i^2$ می‌باشد.

مثال ۳۴: مقدار $(1+i)^{2-i}$ کدام است؟
(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $e^2\cos\sqrt{2}+ie^{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{2}+1)+i\cos(\frac{\pi}{2}+1)$

۳) $2e^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2})+i\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2})]$ ۴) $\frac{\pi}{4}e^2[\cos(\mathrm{Ln}\cos\sqrt{2})+i\sin(\mathrm{Ln}\cos\sqrt{2})]$

پاسخ: گزینه «۳» با Ln گرفتن از طرفین و با فرض اینکه مقدار اصلی مدنظر طراح می‌باشد، داریم:

$$z=(1+i)^{2-i}\Rightarrow \mathrm{Ln}z=(2-i)\mathrm{Ln}(1+i)=(2\mathrm{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{4})-i(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{\pi}{2})$$

$$z=e^{(2\mathrm{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{4})}.e^{-i(\mathrm{Ln}\sqrt{2}-\frac{\pi}{2})}$$

با توجه به تساوی $2\mathrm{Ln}\sqrt{2}=\mathrm{Ln}(\sqrt{2})^2=\mathrm{Ln}2$ و همچنین رابطه $e^{\mathrm{Ln}a}=a$ داریم:

$$z=(e^{\mathrm{Ln}2}.e^{\frac{\pi}{4}})(e^{-i\mathrm{Ln}\sqrt{2}}.e^{+i\frac{\pi}{2}})=2e^{\frac{\pi}{4}}\{[\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2})-i\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2})].i\}=2e^{\frac{\pi}{4}}[i\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2})+\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2})]$$

مثال ۳۵: مقدار $itgx$ برابر است با:
(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۹)

۱) $tg(ix)$ ۲) $\cot g(ix)$ ۳) $\cot gh(ix)$ ۴) $tgh(ix)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}$$

پس $itgx$ برابر $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$ می‌شود. از طرفی می‌دانیم $tghx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ و اگر به جای x در طرفین تساوی فوق ix قرار دهیم، داریم:

$$tgh(ix)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=itgx$$

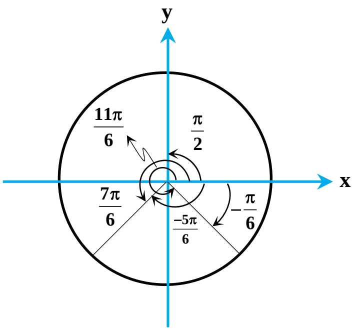
البته با دانستن فرمول‌های $\sin x=-i\sinh ix$ و $\cos x=\cosh ix$ به راحتی مقدار tgx بر حسب توابع هیپربولیک مختلط به دست می‌آید:

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow tgx=\frac{-i\sinh ix}{\cosh ix}\Rightarrow itgx=\frac{\sinh(ix)}{\cosh(ix)}=tgh(ix)$$

مثال ۳۶: زوایای $(-i)^{\frac{۱}{۳}}$ برابر هستند با: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۹)

۱) -۱۵۰° و -۳۰° و ۹۰° ۲) ۱۸۰° و $\pm ۶۰^\circ$ ۳) -۹۰° و ۳۰° و ۱۵۰° ۴) ۰° و $\pm ۱۲۰^\circ$

پاسخ: گزینه «۱» با نوشتن $z = e^{i(\theta+۲k\pi)}$ می‌توان زوایای خواسته شده را به دست آورد:



$$\sqrt[۳]{-i} = \sqrt{۱} \times e^{i(\frac{\theta+۲k\pi}{۳})}$$

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{-۱}{۰} = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \sqrt[۳]{-i} = e^{i(\frac{۳\pi+۴k\pi}{۶})} \quad , \quad k = ۰,۱,۲,\ldots$$

حال اگر زوایای حاصل را روی دایره‌ی مثلثاتی رسم کنیم به جواب می‌رسیم:

$$k = ۰ \Rightarrow \theta = \frac{۳\pi+۰}{۶} = \frac{\pi}{۲}, k = ۱ \Rightarrow \theta = \frac{۳\pi+۴\pi}{۶} = \frac{۷\pi}{۶}, k = ۲ \Rightarrow \theta = \frac{۳\pi+۸\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}$$

در نتیجه فقط گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۳۷: برای کدام شاخه از تابع لگاریتم مختلط یعنی $\log z = \mathrm{Ln}|z| + i\arg z$، نیم خط $\mathrm{Re}z = ۰$ و $\mathrm{Im}z > ۰$ بریدگی شاخه‌ای (branch cut) است؟

(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۹۰)

۱) $-\frac{\pi}{۲} \le \arg z < \frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $۰ \le \arg z < ۲\pi$ ۳) $-\frac{۳\pi}{۲} \le \arg z < \frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\pi \le \arg z < \pi$

پاسخ: گزینه «۳» به ازای Argz های مختلف خطوط شاخه‌ای متفاوتی برای تابع لگاریتم مختلط $\log z$ ایجاد می‌شود. به طور کلی برای $\alpha \le \mathrm{Arg}z < ۲\pi + \alpha$، محور $\theta = \alpha$ خط شاخه‌ای تابع محسوب می‌شود، برای نیم‌خط مطرح شده در صورت سؤال در واقع محور $\theta = \frac{\pi}{۲}$ یا $-\frac{۳\pi}{۲}$ می‌باشد، لذا Argz برای این‌که این محور بریدگی شاخه‌ای تابع لگاریتم مختلط باشد، طبق نکته فوق برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} \le \mathrm{Arg}z < ۲\pi + \frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad -\frac{۳\pi}{۲} \le \mathrm{Arg}z < ۲\pi - \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۲} \le \mathrm{Arg}z < \frac{۵\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad -\frac{۳\pi}{۲} \le \mathrm{Arg}z < \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۳۸: معادل $(۲+۲i)^{-۱}$ کدام گزینه است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}[\cos(\frac{\pi}{۴}) + i\sin(\frac{\pi}{۴})]$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۴}) + i\sin(\frac{\pi}{۴})]$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۴}) - i\sin(\frac{\pi}{۴})]$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}[\cos(\frac{\pi}{۴}) - i\sin(\frac{\pi}{۴})]$

پاسخ: گزینه «۴» ساده‌ترین سؤال ممکن برای طرح در آزمون‌های کارشناسی ارشد درس ریاضی مهندسی! به راحتی داریم:

$$(۲+۲i)^{-۱} = \frac{۱}{۲+۲i} = \frac{۱}{۲+۲i} \times \frac{۲-۲i}{۲-۲i} = \frac{۲-۲i}{۲^۲-(۲i)^۲} = \frac{۲-۲i}{۴+۴} = \frac{۲}{۸} - \frac{۲}{۸}i = \frac{۱}{۴}(۱-i) = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۲}e^{-i\frac{\pi}{۴}}) = \frac{\sqrt{۲}}{۴}(\cos(\frac{\pi}{۴}) - i\sin(\frac{\pi}{۴}))$$

درسنامه۳: حد و پیوستگی، مشتق‌پذیری، روابط کوشی ریمان و توابع تحلیلی

مثال ۱: هرگاه $f(z)=\frac{xy}{x^2-y^2}+i(2xy)$، آنگاه $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) ۱ ۳) i ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۴» مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2-y^2}$ موجود نیست، چون اگر روی خط $y=mx$ به نقطه $(0,0)$ نزدیک شویم، داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2-y^2}\overset{y=mx}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x(mx)}{x^2-(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1-m^2)}=\frac{m}{1-m^2}$$

چون جواب به m بستگی دارد (یعنی به ازای مقادیر مختلف m، حاصل حد مقادیر مختلفی پیدا می‌کند و این با تعریف منحصر به فرد بودن حد تابع در تناقض است) پس حد موجود نیست. دقت کنید دیگر لازم نیست مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2xy$ را بررسی کنیم، چون برای وجود حد باید حد هر دو قسمت وجود داشته باشد.

مثال ۲: مقدار $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \text{حاصل حد}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z^2}{2}}{z^2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۳: حاصل $\lim\limits_{z\to i}\frac{|\sqrt{5}+2z|-3i\bar{z}}{1+z^2}$، وقتی z روی مسیر $\text{Arg}(z-i)=\frac{\pi}{2}$ به سمت i میل می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به توضیحات صورت سؤال لازم است روی مسیر داده شده حد را حساب کنیم، در واقع در این مسیر، اندازه تغییر کرده ولی آرگومان ثابت و برابر $\frac{\pi}{2}$ است. با فرض $z-i=re^{i\theta}$ داریم:

$$z-i=re^{i\frac{\pi}{2}}\xrightarrow{e^{i\frac{\pi}{2}}=i} z-i=r(i)\Rightarrow z=(r+1)i$$

حالا باید تابع داده شده را بر حسب r بنویسیم:

$$\frac{|\sqrt{5}+2z|-3i\bar{z}}{1+z^2}=\frac{|\sqrt{5}+2(r+1)i|-3i(r+1)(-i)}{1+[(r+1)i]^2}=\frac{\sqrt{5+4(r+1)^2}-3(r+1)}{1-(r+1)^2}$$

حالا باید حد این تابع را وقتی $r\to 0$ حساب کنیم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{5+4(r+1)^2}-3(r+1)}{1-(r+1)^2}=\frac{0}{0}=\lim_{r\to 0}\frac{\frac{8(r+1)}{2\sqrt{5+4(r+1)^2}}-3}{-2(r+1)}=\frac{\frac{8}{6}-3}{-2}=\frac{-\frac{5}{3}}{-2}=\frac{5}{6}$$

مثال ۴: $f(z)=e^{\frac{1}{z+1}}$ را در نظر بگیرید. وقتی z روی خط $y=-1-x$ در ربع دوم به سمت نقطه‌ی $z=-1$ میل می‌کند، مقداری که $|f(z)|$ در حالت حدی به خود می‌گیرد، چقدر است؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z+1}}=e^{\frac{1}{x+iy+1}}\xrightarrow{y=-1-x} f(z)=e^{\frac{1}{x+i(-1-x)+1}}=e^{\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{1-i}}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم}}$$

$$f(z)=e^{\frac{1}{x+1}\times\frac{1+i}{2}}=e^{\frac{1}{2(x+1)}}.e^{i(\frac{1}{2(x+1)})}$$

سؤال از ما اندازه‌ی $f(z)$ را در حالت حدی خواسته است. اولاً دقت کنید اندازه‌ی قسمت دوم یعنی $e^{i\frac{1}{2(x+1)}}$ برابر ۱ است، بنابراین اندازه‌ی $e^{\frac{1}{2(x+1)}}$ در حالت حدی باید حساب شود. سؤال گفته z روی خط $y=-1-x$ به سمت نقطه‌ی $z=-1$ می‌رود، اولاً برای این که $z=x+iy$، برابر ۱- شود، لازم است

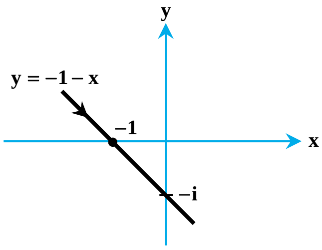
$x=-۱$ شود (تا y هم صفر شود و در نتیجه $z=-۱$ باشد.) ثانیاً چون گفته شده در ربع دوم، یعنی x از مقادیر کمتر از -۱ به سمت $z=-۱$ می‌رود و این یعنی $x\to(-۱)^-$، بنابراین داریم:

$$\lim_{z\to-۱}|f(z)|=\lim_{x\to(-۱)^-} e^{\frac{۱}{۲(x+۱)}}=e^{\frac{۱}{۲(-۱-\varepsilon+۱)}}=e^{\frac{۱}{-۲\varepsilon}}=e^{-\infty}=۰$$

روش دوم: وقتی z روی خط $y=-۱-x$ در ربع دوم به سمت $z=-۱$ میل می‌کند، می‌توان چنین نوشت: $z+۱=re^{i\frac{۳\pi}{۴}}$

$$e^{\frac{۱}{z+۱}}=e^{\frac{۱}{re^{i\frac{۳\pi}{۴}}}}=e^{\frac{۱}{r}e^{-i\frac{۳\pi}{۴}}}=e^{\frac{۱}{r}(\cos\frac{۳\pi}{۴}-i\sin\frac{۳\pi}{۴})}$$

$$|e^{\frac{۱}{z+۱}}|=e^{\frac{۱}{r}\cos\frac{۳\pi}{۴}}=e^{-\frac{۱}{\sqrt{۲}r}}\Rightarrow \lim_{z\to-۱}|e^{\frac{۱}{z+۱}}|=\lim_{r\to۰}e^{-\frac{۱}{\sqrt{۲}r}}=e^{-\infty}=۰$$



مثال ۵: کدامیک از توابع زیر در مبدأ مختصات حد دارند؟

۱) $\frac{x-y}{x+y}$ ۲) $\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ ۳) $\frac{x^۲y^۲}{x^۲-y^۲}$ ۴) $\frac{x^۲y^۲}{|x|+|y|}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به توضیحات فوق، فقط گزینه (۴) در مبدأ مختصات حد دارد و حد آن برابر صفر است.

در گزینه (۱) درجه صورت و مخرج با هم برابر است. پس حد وجود ندارد. در گزینه (۲) نیز درجه صورت و مخرج با هم برابر است، پس حد وجود ندارد.
در گزینه (۳) با وجود اینکه درجه صورت از مخرج بیشتر است، ولی بازهم حد وجود ندارد. زیرا مخرج کسر در نقاطی به جزء مبدأ نیز صفر می‌شود.

مثال ۶: مشتق تابع $f(x+iy)=\begin{cases}\frac{x^۲y^۶(x+iy)}{x^۴+y^{۱۲}} & , z\neq۰\\ ۰ & , z=۰\end{cases}$**، در نقطه صفر کدام است؟**

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) در $z=۰$ مشتق وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(۰)=\lim_{z\to۰}\frac{f(z)-f(۰)}{z-۰}\xrightarrow{f(۰)=۰}f'(۰)=\lim_{z\to۰}\frac{f(z)}{z}\Rightarrow f'(۰)=\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{\frac{x^۲y^۶(x+iy)}{x^۴+y^{۱۲}}}{(x+iy)}=\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x^۲y^۶}{x^۴+y^{۱۲}}$$

اگر روی مسیر $y^۶=mx^۲$ به مبدأ نزدیک شویم آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{mx^۴}{x^۴+m^۲x^۴}=\frac{m}{۱+m^۲}=\text{حد}$$

چون حد به m وابسته است، پس حد موجود نیست. در این مثال نمی‌توانیم با استفاده از نمایش قطبی $f'(۰)$ را بررسی کنیم. زیرا شرط استفاده از این روش آن است که هر یک از جملات مخرج هم‌درجه باشند. در این مثال جملات مخرج یعنی $x^۴+y^{۱۲}$ هم‌درجه نیستند.

مثال ۷: تابع $f(z)=|z|^۲+i\bar{z}+۱$ **در کدام نقطه مشتق‌پذیر است؟**

۱) $-i$ ۲) ۱ ۳) i ۴) در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا بخش‌های حقیقی و موهومی f را با فرض $z=x+iy$ مشخص می‌کنیم:

$$f(z)=|z|^۲+i\bar{z}+۱=x^۲+y^۲+i(x-iy)+۱=(\underbrace{x^۲+y^۲+y+۱}_{u})+i\underbrace{x}_{v}$$

حالا شرایط کوشی ریمان را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۰\\ ۲y+۱=-۱\end{cases}\Rightarrow (x,y)=(۰,-۱)$$

بنابراین تابع f فقط در نقطه‌ی $z=۰-i=-i$ مشتق‌پذیر است. توجه کنید که مشتق‌های جزئی u و v به وضوح پیوسته‌اند.

مثال ۸: تابع f با ضابطه $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z} & ; z\neq 0\\ 0 & ; z=0\end{cases}$ مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

۱) f در $z=0$ پیوسته نیست.

۲) در $z=0$ روابط کوشی ریمان برقرار نیستند، ولی تابع مشتق دارد.

۳) در $z=0$ تابع f پیوسته است و روابط کوشی ریمان نیز برقرار است.

۴) در $z=0$ تابع f مشتق ندارد و روابط کوشی ریمان نیز برقرار نیستند.

پاسخ: گزینه «۳» پیوستگی و مشتق‌پذیری را در مختصات قطبی بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{-2i\theta}}{re^{i\theta}}=\lim_{r\to 0}\frac{re^{-2i\theta}}{e^{i\theta}}=0=f(0)\Rightarrow$$ تابع f در $z=0$ پیوسته است.

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{r^2e^{-2i\theta}}{r^2e^{2i\theta}}=e^{-4i\theta}\quad\Rightarrow$$ جواب به θ بستگی دارد، پس $f'(0)$ وجود ندارد.

برای بررسی شرایط کوشی ریمان ابتدا باید u و v را مشخص کنیم. برای هر $z\neq 0$ داریم:

$$f(z)=\frac{\bar{z}^2}{z}=\frac{\bar{z}^2}{z}\times\frac{\bar{z}}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}^3}{|z|^2}=\frac{(x-iy)^3}{x^2+y^2}=\frac{(x^3-3xy^2)+i(y^3-3x^2y)}{x^2+y^2}=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}+i\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$$

در ضمن در $z=0$ داریم؛ $f(0)=0$، پس $u(0,0)=0$ و $v(0,0)=0$.

$$\begin{cases}u_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^3}=1,\ u_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y^3}=0\\ v_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^3}=0,\ v_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^3}{y^3}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}\Rightarrow$$ کوشی ریمان برقرار است

مثال ۹: اگر $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}$ و $g(z)=\sqrt{|xy|}$، آن‌گاه کدام گزینه در مورد این توابع در $z=0$ صحیح است؟

۱) توابع f و g پیوسته هستند و در توابع f و g، روابط کوشی ریمان برقرار نیستند و لذا مشتق‌پذیر هم نیستند.

۲) تابع f ناپیوسته و تابع g پیوسته است و در تابع g روابط کوشی ریمان برقرار هستند و تابع مشتق‌پذیر نیست.

۳) تابع f ناپیوسته و تابع g پیوسته است و روابط کوشی ریمان برای تابع g برقرار هستند و g مشتق‌پذیر هم می‌باشد.

۴) توابع f و g پیوسته هستند و برای تابع g روابط کوشی ریمان برقرار هستند، ولی g مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۴» پیوسته بودن f و g در $z=0$ واضح است. بدون آن که حالت مبهمی رخ دهد داریم: $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\dfrac{\operatorname{Im}(0)}{1+|0|}=0\ ,\ \lim\limits_{z\to 0} g(z)=\sqrt{0}=0$.

اکنون روی مسیر $\Delta z=\Delta x$ با توجه به آن که $f(\Delta x)=\dfrac{\operatorname{Im}(\Delta x)}{1+|\Delta x|}=0$ است، داریم:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

اما روی مسیر $\Delta z=i\Delta y$ با توجه به آن که $f(i\Delta y)=\dfrac{\operatorname{Im}(i\Delta y)}{1+|i\Delta y|}=\dfrac{\Delta y}{1+|\Delta y|}$ داریم:

$$f'(0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(i\Delta y)-f(0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y(1+|\Delta y|)}=1$$

یکسان نبودن جواب‌ها نشان می‌دهد شرایط کوشی ـ ریمان در $z=0$ برقرار نیستند. در نتیجه $f'(0)$ هم وجود ندارد.

در تابع $g(z)$ به وضوح بخش حقیقی $u=\sqrt{|xy|}$ و بخش موهومی $v=0$ است.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

پس روابط کوشی ریمان در مبدأ برقرار هستند. اما اگر تعریف مشتق را روی مسیر $y=mx$ بنویسیم، داریم:

$$g'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{g(z)-g(0)}{z-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}-0}{x+iy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{\sqrt{|mx^2|}-0}{x(1+im)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{m}}{1+im}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{m}}{1+mi} & ; x>0\\ \dfrac{-\sqrt{m}}{1+im} & ; x<0\end{cases}$$

چون حد به m بستگی دارد، پس $g'(0)$ موجود نیست. با جمع‌بندی نتایج به دست آمده می‌بینیم که f و g هر دو در مبدأ پیوسته‌اند، شرایط کوشی ریمان فقط برای g برقرار است و هیچکدام مشتق‌پذیر نیستند. به این ترتیب گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال۱۰: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تحلیلی باشد که در تساوی $Re[f'(z)]=x^۳-۳xy^۲-۲x$ صدق می‌کند، آن‌گاه ضریب $x^۲y^۲$ در ضابطه‌ی $u(x,y)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$		۲) $-\frac{۳}{۴}$		۳) $-\frac{۳}{۲}$		۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانیم مشتق تابع تحلیلی $f(z)$ برابر با $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ است.

با توجه به ضابطه قسمت حقیقی $f'(z)$ که در صورت سؤال داده شده است، داریم: $Re[f'(z)]=x^۳-۳xy^۲-۲x$

پس می‌توان تساوی مقابل را نتیجه گرفت: $\frac{\partial u}{\partial x}=x^۳-۳xy^۲-۲x$

با انتگرال‌گیری نسبت به x از دو طرف معادله فوق خواهیم داشت: $u(x,y)=\frac{x^۴}{۴}-۳\frac{x^۲}{۲}y^۲-x^۲+h(y)\Rightarrow x^۲y^۲\ \text{ضریب}=-\frac{۳}{۲}$

مثال۱۱: اگر تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ دارای قسمت حقیقی $u(x,y)=\sin x\cosh y+۲\cos x\sinh y+x^۲-y^۲+۴xy$ باشد، آن‌گاه مقدار $f'(۰)$ برابر با کدام گزینه می‌شود؟

۱) $۱+۲i$		۲) $۱-۲i$		۳) $۱-i$		۴) $۱+i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $f(z)=u+iv$ آنگاه $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$. بنابراین داریم:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(۰,۰)}=(\cos x\cdot\cosh y-۲\sin x\cdot\sinh y+۲x+۴y)|_{(۰,۰)}=۱\quad,\quad\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(۰,۰)}=(\sin x\cdot\sinh y+۲\cos x\cdot\cosh y-۲y+۴x)|_{(۰,۰)}=۲$$

بنابراین $f'(۰)=۱-۲i$ خواهد بود.

مثال۱۲: کدام عبارت در مورد مشتق تابع $f(z)=[(Re z)^۲+i(Im z)^۲]^۲$ صحیح است؟

۱) f مشتق‌پذیر نیست.		۲) f فقط در $(۰,۰)$ دارای مشتق است.

۳) f روی $y=x^۲$ مشتق‌پذیر است.		۴) مقدار مشتق f در نقطه‌ی $(۱,۱)$ برابر $۴+۴i$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا قسمت‌های حقیقی و موهومی f را مشخص می‌کنیم: $f(z)=f(x+iy)=(x^۲+iy^۲)^۲=(x^۴-y^۴)+i۲x^۲y^۲$

پس $u(x,y)=x^۴-y^۴$ و $v(x,y)=۲x^۲y^۲$ بخش‌های حقیقی و موهومی f هستند. اگر شرایط کوشی ریمان را بنویسیم داریم:

$$\begin{cases}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴x^۳=۴x^۲y\\-۴y^۳=-۴xy^۲\end{cases}$$

هرگاه $x=۰$ باشد، $y=۰$ است. پس در نقطه‌ی $(۰,۰)$ این شرایط برقرار هستند. هرگاه $x\neq۰$ باشد از معادله‌ی اول داریم $x=y$ و از معادله‌ی دوم هم $x=y$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب تابع f روی خط $y=x$ مشتق‌پذیر است و در این نقاط مشتق f برابر است با: $f'(z)=u_x+iv_x=۴x^۳+i۴xy^۲$

پس به ازای $x=y=۱$ داریم: $f'(۱+i)=۴+۴i$.

مثال۱۳: اگر تابع $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آن‌گاه $f'(z)$ کدام است؟

۱) $(\cos\theta-i\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial r}$		۲) $\frac{۱}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)\frac{\partial f}{d\theta}$		۳) $-\frac{۱}{r}(\sin\theta-i\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}$		۴) $(\cos\theta+i\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial r}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که تابع تحلیلی است، پس شرایط قضیه کوشی ریمان در آن صدق می‌کند. می‌دانیم شرایط قضیه کوشی ریمان در مختصات قطبی (به جز در مبدأ) به صورت مقابل می‌باشد:

$$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)\xrightarrow{\text{تابع تحلیلی است}}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{۱}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

و مشتق تابع به صورت مقابل قابل محاسبه است:

$$f'(z)=(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r})e^{-i\theta}=\frac{۱}{r}(\frac{\partial v}{\partial\theta}-i\frac{\partial u}{\partial\theta})e^{-i\theta}\qquad(*)$$

از رابطه‌ی اویلر می‌دانیم:

$$e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$$

در رابطه‌ی (*)، عبارت سمت راست را در $-i^۲$ که برابر با «یک» است، ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{r}(\frac{\partial v}{\partial\theta}-i\frac{\partial u}{\partial\theta})e^{-i\theta}\ \underline{\underline{\times(-i^۲)}}\ \frac{-i}{r}(\frac{\partial v}{\partial\theta}-i\frac{\partial u}{\partial\theta})\times ie^{-i\theta}=\frac{-۱}{r}(\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta})\times i(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{-۱}{r}(\sin\theta+i\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\quad,\ (I)$$

از طرفی عبارت سمت چپ در رابطه‌ی (*) را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r})e^{-i\theta}=\frac{\partial f}{\partial r}(\cos\theta-i\sin\theta)\quad,\ (II)$$

پس با توجه به (I) و (II)، $f'(z)$ برابر با هر کدام از مقادیر مقابل است:

$$f'(z)=(\cos\theta-i\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{-۱}{r}(\sin\theta+i\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

پس فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۱۴: می‌دانیم تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ در نقطه $z_0=1-i$ تحلیلی است و $f'(z_0)=+1+i$. در این صورت مقدار $u_r v_\theta+u_\theta v_r$ در نقطه مذکور کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}i$ ۲) $-4i$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که در نقطه‌ی مذکور داریم: $z_0=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow r=\sqrt{2}\ ,\ \theta=-\frac{\pi}{4}$

از طرفی طبق تعریف مشتق z به صورت $f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}$ و لذا مشتق $z_0=1-i$ برابر با $1+i$ درصورت سؤال داده شده است. نظر به این که فرم قطبی $1+i$ به صورت $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ است، داریم: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{+i\frac{\pi}{4}}(u_r+iv_r) \Rightarrow u_r=\sqrt{2}\ ,\ v_r=0$

چون $v_\theta=ru_r$ لذا $v_\theta=2$ و چون $v_r=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}$ لذا $u_\theta=0$ خواهد بود. پس داریم: $u_r v_\theta+u_\theta v_r=2\sqrt{2}-0=2\sqrt{2}$

مثال ۱۵: تابع $f(z)=|z|^2$:

۱) در هیچ‌جا تحلیلی نیست. ۲) در همه جا مشتق‌پذیر است. ۳) در $x=0$ مشتق‌پذیر است. ۴) در $y=0$ مشتق‌پذیر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2 \Rightarrow u=x^2+y^2\ ,\ v=0$$

$$u_x=2x\ ,\ v_y=0\ ,\ u_y=2y\ ,\ -v_x=0$$

شرایط کوشی ریمان فقط در $2y=0$ و $2x=0$ یا همان نقطه $x=0$ و $y=0$ برقرار است، پس تابع در هیچ‌جا تحلیلی نیست.

مثال ۱۶: فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) $-e$ ۲) e ۳) $-2e$ ۴) $2e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه شود چون تابع تحلیلی می‌باشد لذا روابط کوشی ریمان برقرارند و (۱) $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\xrightarrow{(1)} f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2y.\sin 2xy\times e^{x^2-y^2}-i(-2ye^{x^2-y^2}.\cos 2xy-2x\sin 2xy\times e^{x^2-y^2})$$

$$z=1 \Rightarrow x=1\ ,\ y=0\ ,\ f'(1)=2e$$

مثال ۱۷: اگر تابع $w=x^2+\alpha y^2-2xy+i(\beta x^2-y^2+2xy)$، تحلیلی باشد، حاصل $\beta-\alpha$ برابر کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون f تحلیلی است باید در شرایط قضیه کوشی ریمان صدق کند، با توجه به ضابطه f داریم:

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2+\alpha y^2-2xy \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}=2\alpha y-2x \\ v=\beta x^2-y^2+2xy \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}=2\beta x+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2\alpha y-2x=-(2\beta x+2y) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\beta=2 \Rightarrow \beta=1 \\ 2\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \beta-\alpha=1-(-1)=2$$

مثال ۱۸: هرگاه $f(z)=u(x,y)+iv(x)$ تابعی تحلیلی باشد، $f(z)$ کدام است؟ (C عددی مختلط و k عددی حقیقی است)

۱) $ki\bar{z}+C$ ۲) $k\bar{z}+C$ ۳) $-kiz+C$ ۴) $kz+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون تابع تحلیلی است، پس $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$، اما دقت کنید با توجه به این‌که v تابعی فقط بر حسب x است، لذا $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ و نتیجتاً $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ می‌شود و این یعنی تابع u فقط بر حسب y است. از طرفی چون $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ پس داریم: $\frac{\partial u(y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x)}{\partial x}$

دو تابع داریم که مشتق آن‌ها بر حسب دو متغیر برابر با هم شده و این فقط در یک حالت اتفاق می‌افتد که این دو عبارت مساوی عدد ثابتی مثل k باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial y}=k \Rightarrow u=ky+C_1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-k \Rightarrow v=-kx+C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(z)=(ky+C_1)+i(-kx+C_2) \Rightarrow f(z)=-ki(\underbrace{x+iy}_{z})+\underbrace{C_1+iC_2}_{C} \Rightarrow f(z)=-kiz+C$$

مثال ۱۹: تابع $f(z)=x+i\sin y$ در کدام نقاط تحلیلی است؟

۱) $y=2k\pi$ ۲) تابع هیچ‌جا تحلیلی نیست. ۳) $y=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ۴) تابع همه‌جا تحلیلی است.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به شرط کوشی ریمان داریم:

$$\begin{cases}u=x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=1 , \frac{\partial u}{\partial y}=0\\ v=\sin y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=\cos y , \frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 1=\cos y \Rightarrow y=2k\pi\end{cases}$$

تابع $f(z)$ به ازای $y=2k\pi$ یک تابع حقیقی می‌باشد و در نتیجه نمی‌تواند تحلیلی باشد.

مثال ۲۰: اگر $f(z)=e^{x-iy}$ و $g(z)=e^{-y+ix}$، آن‌گاه کدام گزینه در مورد تابع f و g درست است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه Berkeley)

۱) تابع f در هیچ‌جا تحلیلی نیست و تابع g در تمام صفحه تحلیلی است.

۲) تابع f در همه‌جا تحلیلی است ولی تابع g در هیچ‌جا تحلیلی نیست.

۳) هر دو تابع f و g در تمام صفحه تحلیلی هستند.

۴) هر دو تابع f و g، فقط روی خطوط $y=\pm x$ تحلیلی هستند.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا $f(z)$ را به صورت $f(z)=u+iv$ می‌نویسیم:

$$f(x)=e^{x-iy}=e^{x}\cos y-ie^{x}\sin y \rightarrow \begin{cases}u=e^{x}\cos y\\ v=-e^{x}\sin y\end{cases}$$

حالا برقراری شرایط کوشی ریمان را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ \begin{cases}u_x=e^{x}\cos y\\ v_y=-e^{x}\cos y\end{cases} \Rightarrow u_x=v_y \rightarrow 2e^{x}\cos y=0 \rightarrow y=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$2)\ \begin{cases}u_y=-e^{x}\sin y\\ -v_x=+e^{x}\sin y\end{cases} \Rightarrow v_x=-u_y \rightarrow 2e^{x}\sin y=0 \rightarrow y=k\pi$$

مشاهده می‌شود که جواب‌های بدست آمده در دو معادله‌ی قضیه کوشی ریمان هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند، پس تابع در هیچ جا تحلیلی نیست.

$$g(x)=e^{-y+ix}=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x \Rightarrow \begin{cases}u=e^{-y}\cos x\\ v=e^{-y}\sin x\end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases}u_x=-e^{-y}\sin x\\ v_y=-e^{-y}\sin x\end{cases} \rightarrow u_x=v_y \quad , \quad 2)\ \begin{cases}u_y=-e^{-y}\cos x\\ -v_x=-e^{-y}\cos x\end{cases} \rightarrow u_y=-v_x$$

با توجه به اینکه شرایط کوشی ریمان برای $g(z)$ در تمام صفحه‌ی مختلط برقرار است و مشتقات جزئی مرتبه اول دو تابع u و v پیوسته هستند، پس تابع $g(z)$ در همه‌جا مشتق‌پذیر و تحلیلی است.

مثال ۲۱: تابع $f(z)=\mathrm{Ln}\frac{1-z}{1+z}$ در چه ناحیه‌ای پیوسته <u>نیست</u>؟ (شاخه اصلی Ln مورد نظر است.)

۱) $\mathrm{Im}\,z=0 , -1\le \mathrm{Re}\,z\le 1$ ۲) $\mathrm{Im}\,z<-1 , \mathrm{Re}\,z>1$ ۳) $\mathrm{Im}\,z=1 , \mathrm{Re}\,z>-1$ ۴) $\mathrm{Im}\,z=0 , \mathrm{Re}\,z\le -1$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید قسمت‌های حقیقی و موهومی عبارت جلوی Ln را مشخص کنیم:

$$f(z)=\mathrm{Ln}(\frac{1-z}{1+z})=\mathrm{Ln}(\frac{1-x-iy}{1+x+iy})=\mathrm{Ln}[\frac{(1-x)-iy}{(1+x)+iy}\times\frac{(1+x)-iy}{(1+x)-iy}]=\mathrm{Ln}[\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}+i\frac{-2y}{(1+x)^2+y^2}]$$

با توجه به مثبت بودن مخرج‌های قسمت‌های حقیقی و موهومی عبارت جلوی Ln، شرایط زیر را داریم:

$$\begin{cases}1-x^2-y^2\le 0\\ y=0\end{cases} \xrightarrow{y=0} \begin{cases}1-x^2\le 0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2\ge 1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge 1 \text{ یا } x\le -1\\ y=0\end{cases}$$

بنابراین تابع در ناحیه $\mathrm{Im}\,z=0$ و $\mathrm{Re}\,z\le -1$ و $\mathrm{Re}\,z\ge 1$، پیوسته نیست. یعنی گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۲۲: تابع $\mathrm{Ln}(e^{iz}+2)$ در کدام نقاط غیر تحلیلی است؟ (n عددی صحیح است)

۱) $\begin{cases} x=(2n+1)\pi \\ y\le -\mathrm{Ln}2 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x=2n\pi \\ y\le -\mathrm{Ln}2 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x=(2n+1)\pi \\ y\le -\mathrm{Ln}2+1 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x=2n\pi \\ y\le -\mathrm{Ln}2+1 \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع $w=\mathrm{Ln}(f(z))$ در نقاطی غیر تحلیلی است که $\mathrm{Re}(f(z))\le 0$ و $\mathrm{Im}(f(z))=0$ باشد. بنابراین برای $w=\mathrm{Ln}(e^{iz}+2)$ باید ناحیه‌ای را پیدا کنیم که $\mathrm{Re}(e^{iz}+2)\le 0$ و $\mathrm{Im}(e^{iz}+2)=0$ باشد:

$$e^{iz}+2=e^{i(x+iy)}+2=e^{-y}(\cos x+i\sin x)+2=(2+e^{-y}\cos x)+ie^{-y}\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(e^{iz}+2)=e^{-y}\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \mathrm{Re}(e^{iz}+2)=2+e^{-y}\cos x\le 0 \Rightarrow e^{-y}\cos x\le -2 \xrightarrow{x=k\pi} e^{-y}\cos(k\pi)\le -2 \Rightarrow e^{-y}(-1)^k\le -2 \end{cases}$$

برقراری نامساوی اخیر برای مقادیر زوج k، غیر ممکن است، زیرا e^{-y} همواره مثبت است و نمی‌تواند از ۲- کمتر باشد! بنابراین k باید فرد باشد. به عبارتی $x=(2n+1)\pi$ و $-e^{-y}\le -2$ پس $e^{-y}\ge 2$ در نتیجه $-y\ge \mathrm{Ln}2$ پس $y\le -\mathrm{Ln}2$.

مثال ۲۳: مجموعه نقاطی که تابع $f(z)=(1+iz^2)^{1+z}$ در آن‌جا غیر تحلیلی می‌باشد، کدام است؟ (شاخه‌ی اصلی مدنظر است.)

۱) $\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid x=y\ ,\ |x|>\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ ۲) $\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid x=y\ ,\ |x|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

۳) $\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid x=-y\ ,\ |x|>\frac{1}{2}\}$ ۴) $\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid x=-y\ ,\ |x|\ge\frac{1}{2}\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌توانیم تابع $f(z)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(z)=(1+iz^2)^{1+z}=e^{(1+z)\mathrm{Ln}(1+iz^2)}=e^{1+z}.e^{\mathrm{Ln}(1+iz^2)}=e.e^z.e^{\mathrm{Ln}(1+iz^2)}$$

تابع e^z تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشد که در همه نقاط صفحه مختلط تحلیلی است. بنابراین کافی است فقط نقاط غیرتحلیلی عبارت $\mathrm{Ln}(1+iz^2)$ را به دست آوریم. برای این منظور باید داشته باشیم: $\mathrm{Im}[1+iz^2]=0 \quad , \quad \mathrm{Re}[1+iz^2]\le 0$

بنابراین داریم: $z=x+iy\Rightarrow 1+iz^2=1+i(x+iy)^2=1+i(x^2-y^2+2ixy)=(1-2xy)+i(x^2-y^2)$

پس دستگاه زیر را داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \Rightarrow |x|=|y| \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-y \end{cases} \\ 1-2xy\le 0 \quad , \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} \text{اگر}: x=y \Rightarrow 1-2x^2\le 0 \Rightarrow 2x^2\ge 1 \Rightarrow |x|\ge\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{اگر}: x=-y \Rightarrow 1+2x^2\le 0 \Rightarrow 2x^2\le -1 \ \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

بنابراین نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ برابر با نقاطی است که در آنها $x=y$ و $|x|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌باشد.

مثال ۲۴: مجموعه نقاطی که تابع $f(z)=\frac{|z-1|^2}{\bar{z}-1}+|x|+iy$ تحلیلی است، کدام است؟

۱) $\{x<0\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z\ne 1\}$ ۲) $\{x\ge 0\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z\ne 1\}$ ۳) $\{x\le 0\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z\ne 1\}$ ۴) $\{x>0\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z\ne 1\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا تابع $f(z)$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{|z-1|^2}{\bar{z}-1}+|x|+iy=\frac{(z-1)\overline{(z-1)}}{(\bar{z}-1)}+|x|+iy \xrightarrow{z\ne 1} f(z)=z-1+|x|+iy \Rightarrow \begin{cases} u=x+|x|-1 \\ v=2y \end{cases}$$

برای بدست آوردن ناحیه تحلیلی تابع، از شرایط قضیه کوشی ریمان استفاده می‌کنیم:

$$x>0 \ \text{اگر} \Rightarrow \begin{cases} u_x=2 \\ v_y=2 \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y \ ,\ \begin{cases} u_y=0 \\ -v_x=0 \end{cases} \Rightarrow u_y=-v_x \ ,\ x<0 \ \text{اگر} \Rightarrow \begin{cases} u_x=0 \\ v_y=2 \end{cases} \Rightarrow u_x\ne v_y$$

پس فقط برای $x>0$ شرایط کوشی ریمان برقرار است.

مثال ۲۵: تابع $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$:

۱) همه جا مشتق‌پذیر است. ۲) تنها در مبدأ مختصات تحلیلی نیست. ۳) دارای خط شاخه‌ای است. ۴) هیچ‌جا تحلیلی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ممکن است در نگاه اول با توجه به وجود $\bar{z}$ در ضابطه تابع، گزینه (۴) انتخاب شود!؟ اما با کمی دقت ملاحظه می‌گردد با توجه به رابطه $|z|^2=z.\bar{z}$ عامل $\bar{z}$ از ضابطه تابع حذف خواهد شد.

$$f(z)=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}=\frac{1}{z}$$

بنابراین تابع در تمام نقاط غیر از نقطه $z=0$ تحلیلی است.

مثال ۲۶: اگر $\mathbb{R}$ تمام صفحهٔ $z=x+iy$ و $f(z)=y^2-x^2+i(y^2+x^2)$ باشد، در این‌صورت: (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(z)$ در $\mathbb{R}$ تحلیلی نیست. ۲) $f'(z)$ در $\mathbb{R}$ موجود است.

۳) $f'(z)$ در امتداد خطوط $y=\pm x$ موجود است. ۴) $f'(z)$ در $\mathbb{R}$ موجود و $f(z)$ در $\mathbb{R}$ تحلیلی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l}u=y^2-x^2\\ v=x^2+y^2\end{array}\right\}\Rightarrow u_x=-2x\ ,\ u_y=2y\ ,\ v_x=2x\ ,\ v_y=2y$$

با توجه به معادلات کوشی ریمان داریم:

$$\left.\begin{array}{l}u_x=v_y\ \ \Rightarrow -2x=2y\\ v_x=-u_y\ \ \Rightarrow 2x=-2y\end{array}\right\}\Rightarrow y=-x$$

تابع فقط روی خط $y=-x$ مشتق‌پذیر است و لذا در هیچ‌جا تحلیلی نیست، زیرا هر همسایگی روی خط $y=-x$ شامل نقاطی است که f در آنها مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۲۷: اگر $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$ و $f(z)=z\bar{z}$ ، کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(z)$ در صفحه z تحلیلی نیست. ۲) $f(z)$ فقط در $z=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۳) $f(z)$ در همهٔ نقاط صفحهٔ z تحلیلی است. ۴) $f(z)$ در همهٔ نقاط صفحهٔ z دارای مشتق نسبت به z است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به علت وجود $\bar{z}$ در ترکیب تابع $f(z)$، (که قابل حذف هم از ضابطه f نیست!) تابع f نمی‌تواند تحلیلی باشد.

مثال ۲۸: کدام تابع در ناحیه محصور توسط دایره $\gamma: |z|=1$ تحلیلی است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰ و ۸۱)

۱) $f(z)=(x+y)+ixy$ ۲) $f(z)=x^2-y^2+i2xy$ ۳) $f(z)=xy+i(x+y)$ ۴) $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم z^2 تابعی تحلیلی است $\Leftarrow$ $f(z)=x^2-y^2+i2xy=z^2$

برای بررسی بقیه گزینه‌ها می‌توان از معادلات کوشی ریمان استفاده کرد.

مثال ۲۹: اگر $f(z)=u+iv$ و $\overline{f(z)}$ هر دو تحلیلی باشند، کدام مورد صحیح است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) u فقط تابعی از y است. ۲) u فقط تابعی از x است. ۳) u مقداری است ثابت. ۴) u تابعی از x و y است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون f تابعی تحلیلی است لذا روابط کوشی ریمان برقرار می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad (1)\quad ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad (2)$$

چون $\bar{f}$ نیز تحلیلی است، لذا داریم:

$$\bar{f}=u-iv=u+i(-v)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}\quad (3)\quad ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\quad (4)$$

$$((1)+(3)\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0\ \ ,\ \ (2)+(4)\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=0)\Rightarrow$$ تابعی ثابت است u

مثال۳۰: تابع $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2+1}}$ را در نظر می‌گیریم. وقتی z روی خط $y=x+1$ در ربع اول و با xهای کاهشی به سمت نقطه $z=i$ میل کند، مقداری که $f(z)$ به خود می‌گیرد برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) $+1$ ۳) $-\infty$ ۴) بی‌نهایت

پاسخ: گزینه «۴»

$$e^{-\frac{1}{z^2+1}}=e^{-\frac{1}{x^2-y^2+i2xy+1}}\Rightarrow e^{-\frac{1}{x^2-(x+1)^2+i2x(x+1)+1}}=e^{-\frac{1}{x^2-x^2-2x-1+i2x^2+i2x+1}}=e^{-\frac{1}{-2x+i2x^2+i2x}}$$

وقتی روی خط $y=x+1$ به نقطه i نزدیک می‌شویم یعنی اینکه x به سمت 0^+ نزدیک می‌گردد.

$$\Rightarrow \lim_{z\to i} e^{-\frac{1}{z^2+1}}=\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{-2x+i2x^2+i2x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x(-1+ix+i)}}=\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x(-1+i)}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{-1-i}{2x(+2)}}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{4x}}.e^{\frac{i}{4x}}\right)=e^{+\infty}.1=+\infty$$

مثال۳۱: تابع $g(z)=z|z^2|$: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) در مجموعه تک عضوی $\{0\}$ تحلیلی است.
۲) در مجموعه تک عضوی $\{0\}$ مشتق‌پذیر است.
۳) در تمام C تحلیلی است.
۴) در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» برای اینکه یک تابع در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد باید معادلات کوشی ریمان برقرار باشد. با توجه به اینکه فرم مختلط معادله کوشی ریمان به صورت $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}=0$ است، لذا داریم:

$$g(z)=z|z^2|=z^2.\bar{z}\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}=z^2$$

عبارت $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ فقط در $z=0$ برابر صفر خواهد بود و فقط در این نقطه مشتق‌پذیر است، اما چون در هیچ همسایگی آن مشتق‌پذیر نیست، لذا در $z=0$ تحلیلی نیست.

مثال۳۲: کدامیک از گزاره‌های زیر، در مورد تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^3}{z^2} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$ صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)

۱) در مبدأ O پیوسته نیست.
۲) در مبدأ O مشتق‌پذیر نیست، اما در روابط کوشی ریمان نیز در این نقطه صدق می‌کند.
۳) در مبدأ O مشتق‌پذیر نیست و در روابط کوشی ریمان نیز در این نقطه صدق نمی‌کند.
۴) در مبدأ O پیوسته است و در روابط کوشی ریمان نیز در این نقطه صدق می‌کند.

پاسخ: گزینه «۳»

برای هر $z\neq 0$ داریم:

$$|f(z)|=\left|\frac{(\bar{z})^3}{z^2}\right|=\frac{|z|^3}{|z|^2}=|z|$$

بنابراین وقتی $z\to 0$ میل کند خواهیم داشت:

$$\lim_{z\to 0}|f(z)|=\lim_{z\to 0}|z|=0$$

پس f در مبدأ پیوسته است.

اکنون با معین کردن بخش‌های حقیقی و موهومی $f(z)$، شرایط کوشی ریمان را بررسی می‌کنیم.

$$f(z)=\frac{(\bar{z})^3}{z^2}\times\frac{(\bar{z})^2}{(\bar{z})^2}=\frac{(\bar{z})^5}{|z|^4}=\frac{(x-iy)^5}{(x^2+y^2)^2}$$

با استفاده از بسط دو جمله‌ای در صورت کسر داریم:

$$(x-iy)^5=x^5-i\binom{5}{1}x^4y-\binom{5}{2}x^3y^2+i\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}xy^4-iy^5$$

پس قسمت‌های حقیقی و موهومی $f=u+iv$ چنین هستند:

$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5-10x^3y^2+5xy^4}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (0,0)\end{cases}\quad,\quad v(x,y)=\begin{cases}\frac{-5x^4y+10x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (0,0)\end{cases}$$

با استفاده از تعریف مشتق مقادیر u_x و v_y را در مبدأ بدست می‌آوریم:

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=1 \quad , \quad v_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=-1$$

پس $u_x \neq v_y$ است و شرایط کوشی ریمان در مبدأ برقرار نیست. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

روش ساده‌تر: در بررسی هم‌زمان شرایط مشتق‌پذیری و کوشی ریمان، همان‌طور که در متن کتاب گفتیم اگر روی دو مسیر افقی و عمودی ثابت کنیم تابع در نقطه‌ای مشتق ندارد، می‌توان گفت شرایط کوشی ریمان هم در آن نقطه برقرار نیست. روی مسیر $\Delta y=0$، داریم: $\Delta z=\Delta x$، حالا اگر مقدار $f'(0)$ را بررسی کنیم، خواهیم داشت:

$$L_1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\overline{\Delta x})^3}{(\Delta x)^3}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3}=1 \ ,$$ (دقت کنید که همواره $\overline{\Delta x}=\Delta x$ است.)

اما روی مسیر $\Delta x=0$، داریم: $\Delta z=i\Delta y$. حالا اگر مقدار $f'(0)$ را بررسی کنیم، خواهیم داشت:

$$L_2=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(i\Delta y)-f(0)}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{(\overline{i\Delta y})^3}{(i\Delta y)^2}}{(i\Delta y)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(-i\Delta y)^3}{(i\Delta y)^3}=-1$$

پس به طور همزمان نتیجه می‌شود که تابع در مبدأ مشتق‌پذیر نیست و شرایط کوشی ریمان نیز در مبدأ برقرار نیستند.

مثال ۳۳: اگر f یک تابع تام (entire) و یک به یک باشد آنگاه f': (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ثابت است.
۲) یک به یک است.
۳) پوشا است.
۴) یک چند جمله‌ای غیرثابت است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قضیه‌ی لیوویل می‌گوید هر تابع تام و کران‌دار، یک تابع ثابت است. همچنین طبق نتیجه‌ی لیوویل هیچ تابع تام و یک به یکی به جز چند جمله‌ای‌های از درجه‌ی یک وجود ندارد. پس تنها تابع تام و یک به یک تابع $f(z)=az+b$ (برای $a\neq 0$) است. لذا $f'(z)=a$ عددی ثابت است.
البته این جور سؤالات بیشتر برای رشته ریاضی می‌آید که این درس نیز از بین دروس آزمون کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی حذف شده است.

مثال ۳۴: اگر $u+iv$ که در آن v,u هر دو توابعی از x و y هستند، در شرایطی کوشی ریمان صدق کند، آنگاه در صورتی $v+iu$ تحلیلی است که: (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۷)

۱) $u=f(x), v=g(y)$
۲) $u=\text{const.}, v=\text{const.}$
۳) $u=f(y), v=g(x)$
۴) بدون شرط خاصی همواره تحلیلی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $f(z)=u+iv$ تابعی است که در معادلات کوشی ریمان صدق می‌کند، لذا داریم: $u_x=v_y \ , \ u_y=-v_x \qquad (1)$

اگر قرار باشد تابع $g(z)=v+iu$ تحلیلی باشد، باید در شرایط کوشی ریمان صدق کند، باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} u_y=-v_x \xrightarrow{(1)} u_y=-u_y \Rightarrow u_y=0 \\ u_x=v_y \xrightarrow{(1)} u_x=-u_x \Rightarrow u_x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow u \text{ ثابت است}$$

و

$$\left.\begin{array}{l} v_x=u_y \xrightarrow{(1)} v_x=-v_x \Rightarrow v_x=0 \\ v_y=-u_x \xrightarrow{(1)} v_y=v_y \Rightarrow v_y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow v \text{ ثابت است}$$

درسنامه ۴: توابع همساز و بدست آوردن مزدوج همساز

مثال ۱: تابع $f(r,\theta)=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta$ کدام شرایط را دارد؟

۱) هارمونیک (همساز) نیست.
۲) فقط در ناحیه $0<r<1$ هارمونیک است.
۳) فقط در ناحیه $0<\theta<\pi$ هارمونیک است.
۴) هارمونیک است.

پاسخ: گزینه «۴» سؤال را می‌توانیم با استفاده از معادله لاپلاس در مختصات قطبی جواب دهیم؛ اما راحت‌تر است که معادله را در مختصات دکارتی نوشته و از معادله لاپلاس در مختصات دکارتی کمک بگیریم:

$f(x,y)=x^2-y^2 \Rightarrow f_x=2x\ ,\ f_{xx}=2\ ,\ f_y=-2y\ ,\ f_{yy}=-2$

$f_{xx}+f_{yy}=0 \Rightarrow$ هارمونیک (همساز) است. f

مثال ۲: هرگاه $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد، آنگاه مقدار A از تساوی $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|Ref(z)|^2=A|f'(z)|^2$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» اگر فرض کنیم $f(z)=u+iv$، آنگاه $Ref(z)=u$ بنابراین $|Ref(z)|^2=u^2$، پس عبارت سمت چپ تساوی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})u^2=\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2}$

طبق قاعده مشتق‌گیری نسبی داریم:

$\frac{\partial u^2}{\partial x}=2u(\frac{\partial u}{\partial x}) \Rightarrow \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u^2}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(2u.\frac{\partial u}{\partial x})\overset{*}{=}2(\frac{\partial u}{\partial x})^2+2u\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

دقت کنید در مشتق‌گیری نهایی (قسمت *) وقتی می‌خواهیم مشتق عبارت $2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$ را نسبت به x حساب کنیم، چون با ضرب دو عبارت روبه‌رو هستیم، لذا از قاعده مشتق حاصل‌ضرب استفاده کردیم. یعنی وقتی می‌خواهیم از 2u نسبت به x مشتق بگیریم، چون خود u تابعی از x می‌باشد، لذا مشتق آن برابر $2(\frac{\partial u}{\partial x})$ می‌شود که با ضرب آن در $\frac{\partial u}{\partial x}$ برابر $2(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ شده است. همچنین مشتق عبارت دوم (یعنی $\frac{\partial u}{\partial x}$) برابر $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ می‌شود که با ضرب آن در 2u حاصل برابر $2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ شده است.

به همین ترتیب اگر نسبت به y مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2}=2(\frac{\partial u}{\partial y})^2+2u\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

پس مقدار سمت چپ تساوی برابر است با:

مقدار سمت چپ $=2(\frac{\partial u}{\partial x})^2+2u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+2(\frac{\partial u}{\partial y})^2+2u(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]+2u[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]$

از طرفی در صورت سؤال گفته شده تابع f تابعی تحلیلی می‌باشد و این یعنی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$، پس عبارت فوق برابر $2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]$ می‌شود. از طرفی چون $f(z)$ تابعی تحلیلی می‌باشد، پس $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ لذا $|f'(z)|^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$ خواهد بود. پس داریم:

$2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]=A[(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2] \Rightarrow A=2$

روش تستی: البته برای حل راحت‌تر سؤال می‌توانستیم مثلاً $f(z)=z$ فرض کرده و سریع به جواب برسیم.

مثال ۳: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تحلیلی باشد و $u(x,y)=y^3-3x^2y$، آنگاه مزدوج همساز u کدام گزینه است؟

۱) $v(x,y)=x^3-2y^2x+c$
۲) $v(x,y)=x^3+2y^2x+c$
۳) $v(x,y)=x^3-3y^2x+c$
۴) $v(x,y)=x^3+3y^2x+c$

پاسخ: گزینه «۳»

مرحله اول: همان‌طور که گفتیم، اول $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$u(x,y)=y^3-3x^2y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-6xy$

مرحله دوم: چون $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ می‌باشد، لذا داریم:

$\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} v=\int(-6xy)dy+h(x)=-3xy^2+h(x) \quad (*)$

مرحله سوم: حالا باید از طرفین تساوی فوق نسبت به x مشتق بگیریم و آن را مساوی $-\frac{\partial u}{\partial y}$ قرار دهیم.

$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+h'(x)$

مرحله چهارم: دقت کنید u را از اول داشتیم پس به راحتی $-\frac{\partial u}{\partial y}=-۳y^۲+۳x^۲$، لذا خواهیم داشت: $-۳y^۲+h'(x)=-۳y^۲+۳x^۲ \Rightarrow h'(x)=۳x^۲$

اگر از طرفین تساوی فوق نسبت به x انتگرال بگیریم، ضابطه $h(x)$ تعیین می‌شود: $h(x)=\int ۳x^۲dx+c \Rightarrow h(x)=x^۳+c$

با قرار دادن عبارت به دست آمده به جای $h(x)$ در تساوی $(*)$، ضابطه $v(x,y)$ به راحتی تعیین می‌شود:

$$\boxed{v(x,y)=-۳xy^۲+x^۳+c}$$

توضیح: این تست را مرحله‌ای حل کردیم که به طور کامل بر حل این‌گونه مسائل مسلط شوید. طبیعی است سرعت حل در روز امتحان بسیار بالا است!

مثال ۴: اگر $f(z)=u+iv$، تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$ باشد، آن‌گاه با شرط $f(۰)=۰$، مقدار $f(-i)$ کدام است؟

۱) $-e^{i}$ ۲) e^{i} ۳) e^{-i} ۴) $-e^{-i}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد، v را می‌توان از شرایط کوشی ریمان بدست آورد:

$$u=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$$

$$u_x=v_y \to u_x=-e^{-x}(x\sin y-y\cos y)+e^{-x}(\sin y)$$

$$=e^{-x}(-x\sin y+y\cos y+\sin y) \Rightarrow v_y=e^{-x}y\cos y+e^{-x}\sin y-e^{-x}x\sin y$$

$$v=e^{-x}(y\sin y+\cos y-\cos y+x\cos y)+g(x)=e^{-x}(y\sin y+x\cos y)+g(x)$$

$$v_x=-u_y \Rightarrow -e^{-x}(y\sin y+x\cos y)+e^{-x}(\cos y)+g'(x)=-e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\sin y)$$

$$\Rightarrow g'(x)=۰ \to g(x)=c$$

$$\Rightarrow f(۰)=۰ \to \begin{cases}u(۰,۰)=۰\\ v(۰,۰)=c\end{cases} \to c=۰ \quad \Rightarrow f(-i) \to \begin{cases}u(۰,-۱)=\cos ۱\\ v(۰,-۱)=\sin ۱\end{cases} \to f(-i)=\cos ۱+i\sin ۱=e^{i}$$

مثال ۵: اگر تابع $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x,y)=(x^۲-y^۲+۱)^۲-۴x^۲y^۲$ باشد، آنگاه با شرط $v(۰,۰)=۰$ مقدار $v(۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=۴x(x^۲-y^۲+۱)-۸xy^۲ \xrightarrow{\text{از طرفین نسبت به } y \text{ انتگرال می‌گیریم}} v=\int[۴x(x^۲-y^۲+۱)-۸xy^۲]dy+h(x)$$

$$=۴x^۳y-۴xy^۳+۴xy+h(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=۱۲x^۲y-۴y^۳+۴y+h'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow ۱۲x^۲y-۴y^۳+۴y+h'(x)=۱۲x^۲y-۴y^۳+۴y$$

$$\Rightarrow h'(x)=۰ \Rightarrow h(x)=k \Rightarrow v(x,y)=۴x^۳y-۴xy^۳+۴xy+k \xrightarrow{v(۰,۰)=۰} k=۰ \Rightarrow v(۱,۱)=۴$$

روش دوم: چون u را داده‌اند و دنبال v هستیم، رابطه به شکل زیر است:

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int(\text{عبارتی که از حذف } y \text{ از ضابطه‌ی } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود})dx=\int[۲(۲x)(x^۲-y^۲+۱)-۸xy^۲]dy-\int(۰)dy$$

دقت کنید اگر جملات شامل y را از $\frac{\partial u}{\partial y}$ حذف کنیم، هیچ چیزی باقی نمی‌ماند!

$$v=۴x^۳y-\frac{۴xy^۳}{۳}+۴xy-\frac{۸xy^۳}{۳}+c \Rightarrow v=۴x^۳y-۴xy^۳+۴xy+c \xrightarrow{v(۰,۰)} ۰=۰-۰+۰+c \Rightarrow c=۰ \Rightarrow v(۱,۱)=۴$$

مثال ۶: اگر قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی در صفحه مختلط z به صورت $u(x,y)=y^3+Ay-Bx^2y$ و B,A مقادیر ثابت باشند آنگاه:

۱) A دلخواه و $B=3$ ۲) $A=B=3$ ۳) B دلخواه و $A=3$ ۴) B,A هر دو دلخواه

پاسخ: گزینه «۱» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: هرگاه $f(z)=u+vi$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه v,u توابع همساز یکدیگرند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Rightarrow -2By+6y=0\Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow u=y^3+Ay-3x^2y\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-6xy=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow v=\int -6xydy=-3xy^2+h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+h'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2+A-3x^2)$$

$$\Rightarrow -3y^2+h'(x)=-3y^2-A+3x^2\ \Rightarrow h'(x)=-A+3x^2\ \Rightarrow h(x)=-Ax+x^3+c\ \Rightarrow v=-3xy^2-Ax+x^3+c$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\ \Rightarrow 6x-6x=0\Rightarrow$ همواره برقرار است و به A وابسته نمی‌باشد.

روش دوم: به عنوان تمرین، $v(x,y)$ را با استفاده از روش دوم نیز به دست می‌آوریم:

$$v=\int(-2Bxy)\,dy-\int(A-Bx^2)\,dx=-2Bx[\frac{y^2}{2}]-Ax-\frac{Bx^3}{3}+c$$

مثال ۷: در صورتی که تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $v=-\sin x.\sinh y$ آنگاه داریم:

۱) $u=-\cos x.\cosh y+c$ ۲) $u=\cos x.\cos y+c$ ۳) $u=\cos x.\cosh y+c$ ۴) مقدار تابع u مشخص نیست.

پاسخ: گزینه «۳» چون v داده شده است، لذا داریم:

$u=\int(\frac{\partial v}{\partial y})\,dx-\int($ تابعی که از حذف x از ضابطه‌ی $\frac{\partial v}{\partial x}$ حاصل می‌شود $)dy=\int(-\sin x)\cosh y dx-\int(0)\,dy=\cos x\cosh y+c$

مثال ۸: اگر تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد و $v=r^2\cos 2\theta+r\sin\theta$ ، آنگاه $u(r,\theta)$ کدام است؟

۱) $u(r,\theta)=-r^2\sin\theta+r\cos 2\theta+c$ ۲) $u(r,\theta)=r^2\cos\theta+r\sin 2\theta+c$

۳) $u(r,\theta)=r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$ ۴) $u(r,\theta)=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$

پاسخ: گزینه «۴» این سؤال را نیز به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: ابتدا $\frac{\partial v}{\partial\theta}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=-2r^2\sin 2\theta+r\cos\theta$$

چون تابع تحلیلی است باید $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$ برقرار باشد.

$$\frac{1}{r}(-2r^2\sin 2\theta+r\cos\theta)=\frac{\partial u}{\partial r}\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=-2r\sin 2\theta+\cos\theta$$

حال از طرفین تساوی فوق نسبت به r انتگرال می‌گیریم:

$$u=\int(-2r\sin 2\theta+\cos\theta)dr+f(\theta)\ \Rightarrow \boldsymbol{u=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+f(\theta)}$$

مجدداً از طرفین این رابطه نسبت به θ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی $-r(\frac{\partial v}{\partial r})$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta+f'(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=2r\cos 2\theta+\sin\theta\ \Rightarrow -r\frac{\partial v}{\partial r}=-2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta$$

$$-r\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial\theta}\ \Rightarrow -2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta=-2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta+f'(\theta)$$

$$\Rightarrow f'(\theta)=0\ \Rightarrow f(\theta)=c\ \Rightarrow u(r,\theta)=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$$

روش دوم: چون ضابطه‌ی v داده شده است، لذا داریم:

$u=\int\frac{1}{r}(\frac{\partial v}{\partial\theta})dr-\int($ عبارتی که از حذف عبارات شامل r از تابع $\frac{\partial v}{\partial r}$ حاصل می‌شود $)d\theta$

$$\Rightarrow u=\int\frac{1}{r}(-2r^2\sin 2\theta+r\cos\theta)dr-\int(0)d\theta=\int(-2r\sin 2\theta+\cos\theta)\,dr=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$$

مثال ۹: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد و $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$، ضابطه $f(z)$ کدام است؟

۱) $2e^{z^2}+c$ ۲) $e^{z^2}+c$ ۳) $e^{-z^2}+ic$ ۴) $e^{z^2}+\sin(z)$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy+(-2y\sin 2xy)e^{x^2-y^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy+(-2x\sin 2xy)e^{x^2-y^2}$$

حالا به جای تمام x ها، z و به جای تمام y ها، صفر قرار می‌دهیم:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=2ze^{z^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z,0)=0$$

چون تابع $f(z)$ تابعی تحلیلی است، پس $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$، لذا داریم:
$$f'(z)=2ze^{z^2}-i\times 0 \Rightarrow f'(z)=2ze^{z^2}$$

اگر از طرفین این رابطه نسبت به z انتگرال بگیریم، به راحتی $f(z)$ به دست می‌آید:
$$f(z)=\int 2ze^{z^2}dz=e^{z^2}+c$$

توضیح: شاید لازم باشد، نظر شما عزیزان را به این موضوع جلب کنم که اگر می‌خواستیم از روش‌های قبلی ضابطه $f(z)$ را تعیین کنیم، باید v را حساب می‌کردیم و این یعنی پس از محاسبه $\frac{\partial u}{\partial x}$، از آن نسبت به y انتگرال می‌گرفتیم. دوست دارید، امتحان کنید!!

مثال ۱۰: اگر تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$، یک تابع تحلیلی باشد و $u(r,\theta)=r^{-4}\cos 4\theta$، ضابطه $f(z)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) z^2+k ۲) $z^{-2}+k$ ۳) $z^{-4}+k$ ۴) z^4+k

پاسخ: گزینه «۳»

$$u=r^{-4}\cos 4\theta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=-4r^{-5}\cos 4\theta \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-4r^{-4}\sin 4\theta$$

حالا به جای r، z و به جای θ، صفر قرار می‌دهیم:
$$\frac{\partial u}{\partial r}(z,0)=-4z^{-5}\cos(0)=-4z^{-5} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-4z^{-4}\sin(0)=0$$
$$f'(z)=[\frac{\partial u}{\partial r}+i(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta})]e^{-i\theta}=[-4z^{-5}+i\times 0]e^{-i(0)}=-4z^{-5}$$

اگر از طرفین رابطه فوق انتگرال بگیریم به راحتی $f(z)$ به دست می‌آید:
$$f(z)=\int(-4z^{-5})dz=-4(\frac{z^{-5+1}}{-5+1})+k=z^{-4}+k$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در بیشتر اوقات وقتی در گزینه‌ها $f(z)$ بر حسب z داده شده استفاده از روش دوم مناسب‌تر است.

مثال ۱۱: اگر تابع $f(z)$ همساز باشد و $\text{Re}[f'(z)]=3x^2-4y-3y^2$ با شرط $f(1+i)=0$، $f'(0)=0$ مقدار $f(i)$ کدام است؟

۱) $6-i$ ۲) $6+i$ ۳) $6-5i$ ۴) $6-2i$

پاسخ: گزینه «۳» برای تابع $f(z)=u+iv$، می‌دانیم $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$، یعنی قسمت حقیقی $f'(z)$ که در صورت سؤال داده شده برابر $\frac{\partial u}{\partial x}$ است:
$$\text{Re}[f'(z)]=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2$$

حالا به جای x، z و به جای y، عدد صفر را قرار می‌دهیم: $\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=3z^2$

$$u=\int(3x^2-4y-3y^2)dx=x^3-4xy-3xy^2+f(y)$$

از طرفی با مشتق‌گیری از تابع u نسبت به y داریم:
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4x-6xy+f'(y)$$

دوباره اگر به جای x، z و به جای y عدد صفر را قرار دهیم، $\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با: $\frac{\partial u}{\partial y}=-4z+f'(0)=-4z$

بنابراین $f'(z)$ برابر است با:
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=3z^2-i[(-4z)]=3z^2+i4z \xrightarrow{\text{با انتگرال‌گیری نسبت به z}} f(z)=z^3+2iz^2+C$$

با استفاده از شرط داده شده برای مسئله $(f(1+i)=0)$ مقدار C را حساب می‌کنیم:
$$f(1+i)=(1+i)^3+2i(1+i)^2+C=0$$
$$\Rightarrow 1+i^3+3i^2+3i+2i(\underbrace{1+i^2}_{0}+2i)+C=0 \Rightarrow 1-i-3+3i+4i^2+C=0 \Rightarrow C=6-2i$$
$$\Rightarrow f(z)=z^3+2iz^2+6-2i$$

حالا به راحتی $f(i)$ به دست می‌آید:
$$f(i)=i^3+2i(i)^2+6-2i=-i-2i+6-2i=6-5i$$

مثال ۱۲: اگر قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ به صورت $u(x,y)=e^{-x}(x\cos y+y\sin y)$ تعریف شده باشد، مقدار $f'(i)$ کدام است؟

۱) ie^{-i}
۲) $e^{-i}(1-i)$
۳) $e^{-i}(i-1)$
۴) $-ie^{-i}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مقدار u، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}(x\cos y)+e^{-x}\cos y-e^{-x}y\sin y \xrightarrow[y=0]{x=z} \frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=-ze^{-z}\cos(0)+e^{-z}\cos(0)-0=-ze^{-z}+e^{-z}$$

از طرفی با محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial y}$ و قرار دادن صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-xe^{-x}\sin y+e^{-x}\sin y+e^{-x}y\cos y=0$$

با توجه به فرمول $f'(z)$ بر حسب مشتقات جزئی u، داریم:

$$\Rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=-ze^{-z}+e^{-z}$$

بنابراین مقدار $f'(i)$ برابر است با:

$$f'(i)=-ie^{-i}+e^{-i}=e^{-i}(1-i)$$

مثال ۱۳: اگر تابع $f(z)=u+iv$، تحلیلی باشد و قسمت حقیقی آن $u=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$ باشد، آنگاه ضابطه‌ی $f(z)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $f(z)=\cot gz+C$
۲) $f(z)=\cot gz+i(2tgz)+C$
۳) $f(z)=tgz+i\cot gz+C$
۴) $f(z)=2tgz+i\cot gz+C$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$$u=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{[4\cos 2x(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)]-[(4\sin 2x)(2\sin 2x)]}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}$$

با توجه به عبارت به دست آمده برای $\frac{\partial u}{\partial x}$، واضح است که استفاده از روش اصلی، اوضاع را خیلی وخیم! خواهد کرد و باید از روش دیگری که گفتیم استفاده شود؛ پس لازم است به جای x، z و به جای y عدد صفر را قرار دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=\frac{[4\cos 2z(e^0+e^0-2\cos 2z)]-[(4\sin 2z)(2\sin 2z)]}{(e^0+e^0-2\cos 2z)^2}=\frac{8\cos 2z-8\cos^2 2z-8\sin^2 2z}{(2-2\cos 2z)^2}$$

$$=\frac{8\cos 2z-8(\cos^2 2z+\sin^2 2z)}{(2-2\cos 2z)^2}=\frac{8\cos 2z-8}{4(1-\cos 2z)^2}=\frac{8(\cos 2z-1)}{4(1-\cos 2z)^2}=-\frac{2}{1-\cos 2z}$$

از طرفی با محاسبه $\frac{\partial u}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-(2e^{2y}-2e^{-2y})2\sin 2x}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}$$

با قرار دادن $y=0$ مقدار $\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر صفر می‌شود، اما می‌دانیم $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ و چون $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ پس $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}$ و با توجه به مقدار به دست آمده برای $\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم:

$$f'(z)=-\frac{2}{1-\cos 2z}\xrightarrow{2\sin^2 z=1-\cos 2z} f'(z)=-\frac{2}{2\sin^2 z}=-\frac{1}{\sin^2 z}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق به راحتی ضابطه‌ی $f(z)$ به دست می‌آید:

$$f(z)=\int-(\frac{dz}{\sin^2 z})=\cot gz+C$$

مثال ۱۴: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $u+v=\dfrac{\sinh ۲x+\sin ۲y}{\cosh ۲x+\cos ۲y}$، ضابطه‌ی تابع $f(z)$ کدام گزینه است؟

۱) $\text{tgh}۲z+C$ ۲) $(۱+i)\text{tgh}z$ ۳) $\text{tgh}z+C$ ۴) $(۱+i)\text{tgh}۲z+C$

پاسخ: گزینه «۳» این تست بسیار جالب و البته کمی هم سخت می‌باشد و راه‌حل ابتکاری دارد. دقت کنید با توجه به این که سؤال به ما $u+v$ را داده، لازم است «$u+v$» را به عنوان قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع جدید تعریف کنیم:

$$\begin{cases} f(z)=u+iv \\ if(z)=iu-v \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} if(z)+f(z)=u-v+i(u+v) \Rightarrow (۱+i)f(z)=u-v+i(u+v)$$

با فرض $F(z)=(۱+i)f(z)$ و $U=u-v$ و $V=u+v$، تابع تحلیلی $F(z)=U+iV$ را داریم که قسمت موهومی آن (یعنی $V=u+v$) داده شده است.

حالا مانند بقیه مثال‌های حل شده به این تست نیز پاسخ می‌دهیم.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{۲\cosh ۲x(\cosh ۲x+\cos ۲y)-۲\sinh ۲x(\sinh ۲x+\sin ۲y)}{(\cosh ۲x+\cos ۲y)^۲}$$

با قرار دادن z به جای x و عدد صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(z,۰)=\frac{۲\cosh ۲z(\cosh ۲z+۱)-۲\sinh^۲ ۲z}{(\cosh ۲z+۱)^۲}=\frac{۲(\cosh^۲ ۲z-\sinh^۲ ۲z+\cosh ۲z)}{(\cosh ۲z+۱)^۲}=\frac{۲}{۱+\cosh ۲z}$$

از طرفی با محاسبه $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{[۲\cos ۲y(\cosh ۲x+\cos ۲y)]-[-۲\sin ۲y(\sinh ۲x+\sin ۲y)]}{(\cosh ۲x+\cos ۲y)^۲}$$

مجدداً با قرار دادن z به جای x و صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{۲}{\cosh ۲z+۱}$$

با توجه به این که $F'(z)=\dfrac{\partial V}{\partial y}+i\dfrac{\partial V}{\partial x}$، لذا داریم:

$$F'(z)=\frac{۲}{\cosh ۲z+۱}+i(\frac{۲}{\cosh ۲z+۱})=\frac{۲(۱+i)}{\cosh ۲z+۱}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم:

$$F(z)=۲(۱+i)\int\frac{dz}{۱+\cosh ۲z}=۲(۱+i)\int\frac{dz}{۲\cosh^۲ z}=(۱+i)\text{tgh}z+C_۱$$

اما در ابتدا $F(z)=(۱+i)f(z)$ می‌باشد و لذا ضابطه‌ی $f(z)$ برابر است با:

$$f(z)=\frac{F(z)}{۱+i}=\mathbf{tghz+C}$$

مثال ۱۵: در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$، اگر قسمت حقیقی برابر $u(x,y)=x^۴-۶x^۲y^۲+y^۴$ باشد، ضابطه‌ی $f(z)$ کدام است؟

۱) $f(z)=۱/۶z^۴+C$ ۲) $f(z)=z^۴+C$ ۳) $f(z)=۰/۵z^۴+C$ ۴) $f(z)=۴z^۴+C$

پاسخ: گزینه «۲» شرط اولیه نداریم، پس $z_۰=۰$ را انتخاب می‌کنیم و داریم: $f(z)=۲u(\frac{z}{۲},\frac{-iz}{۲})+C$، یعنی با قرار دادن $\frac{z}{۲}$ به جای x و $-\frac{iz}{۲}$ به جای y در ضابطه u داریم:

$$f(z)=۲[(\frac{z}{۲})^۴-۶(\frac{z}{۲})^۲(\frac{-iz}{۲})^۲+(\frac{-iz}{۲})^۴+C]=۲[\frac{z^۴}{۱۶}+\frac{۶z^۴}{۱۶}+\frac{z^۴}{۱۶}]+C=\mathbf{z^۴+C}$$

مثال ۱۶: اگر $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد، $u(x,y)=۲e^x\cos y$، آن‌گاه ضابطه $f(z)$ با فرض $f(۰)=۲$ کدام است؟

۱) $f(z)=۲e^z$ ۲) $f(z)=۲e^{z^۲}$ ۳) $f(z)=۲e^{۲z}$ ۴) $f(z)=۲e^{\frac{z}{۲}}$

پاسخ: گزینه «۱» اگر $z_۰=۰$ و $c_۰=۲$ در نظر گرفته شود، آنگاه $\bar{z}_۰=۰$ و داریم:

$$f(z)=۲u(\frac{z}{۲},\frac{z}{۲i})-۲=۲\times۲e^{\frac{z}{۲}}\cos(\frac{z}{۲i})-۲$$

از طرفی می‌دانیم $\cosh iz=\cos z$، لذا داریم:

$$\cos(\frac{z}{۲i})=\cos(\frac{-iz}{۲})=\cosh(\frac{z}{۲})$$

و چون $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{۲}$، لذا خواهیم داشت:

$$f(z)=۴e^{\frac{z}{۲}}[\frac{e^{\frac{z}{۲}}+e^{\frac{-z}{۲}}}{۲}]-۲=۲e^z+۲-۲=۲e^z$$

مثال ۱۷: فرض کنید $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ، در ناحیه R که شامل قسمتی از محور حقیقی است، تحلیلی باشد.

اگر $w=\frac{y(x^2+y^2-1)+ix(x^2+y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$ ، آن‌گاه ضابطه‌ی $f(z)$ بر حسب z کدام است؟

۱) $\frac{-2iz}{1+z}$ ۲) $\frac{2iz}{1+z^2}$ ۳) $\frac{iz}{1+z^2}$ ۴) $\frac{-iz}{1+z^2}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$w=\frac{y(x^2+y^2-1)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}+i\frac{x(x^2+y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=u(x,y)+iv(x,y)$$

حالا با توجه به نکته‌ی فوق خواهیم داشت:

$$w=f(z)=u(z,0)+iv(z,0)=0+i\frac{z(z^2+1)}{(z^2+1)^2}=\frac{iz}{z^2+1}$$

توجه مهم: فقط وقتی با اطمینان می‌توان از این روش استفاده کرد که مطمئن باشیم خط $y=0$ (محور x ها) در دامنه‌ی f قرار دارد.

مثال ۱۸: اگر تابع دو متغیری $u(x,y)=x^2-y^2-2x+4$ مشخص‌کننده خطوط $x^2-y^2-2x+4=k_1$ و $k_1\in R$ در یک میدان باشد، آنگاه مسیرهای قائم کدامند؟

۱) $v(x,y)=2xy+2y=k_2$ ۲) $v(x,y)=2xy-2y=k_2$ ۳) $v(x,y)=2x^2y^2-y=k_2$ ۴) $v(x,y)=-2xy-2y=k_2$

پاسخ: گزینه «۲» طبق توضیحات داده شده داریم:

$$v=\int(\frac{\partial u}{\partial x})dy-\int(0)dx=\int(2x-2)dy=2xy-2y=k_2$$

مثال ۱۹: هارمونیک مزدوج (conjugate Harmonic Function) تابع $u(x,y)=2x(3-y)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $2x(3+y)$ ۲) x^2-y^2 ۳) $-2x(3+y)$ ۴) $x^2-(3-y)^2$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$u=2x(3-y)\Rightarrow u_x=2(3-y)=v_y\xrightarrow{\text{از طرفین نسبت به } y \text{ انتگرال می‌گیریم}}v=\int 2(3-y)dy=6y-y^2+h(x)\qquad(1)$$

از طرفی می‌دانیم باید $v_x=-u_y$ باشد، لذا داریم:

$$v_x=h'(x)=2x\Rightarrow h(x)=x^2+c\xrightarrow{\text{در رابطه (۱) قرار می‌دهیم}}v=6y-y^2+x^2+c_1=x^2-(3-y)^2+c$$

اگر $c=0$ فرض شود، گزینه (۴) می‌تواند جواب باشد.

مثال ۲۰: اگر $u(x,y)=y^3-3x^2y$ ، آنگاه مزدوج هارمونیک u، کدامیک از گزینه‌های زیر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $-3xy^2+x^3+c$ ۲) $-3x^2y+x^3+c$ ۳) $-2x^2y^2+x^3+c$ ۴) $-4xy+y^2+c$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

از معادلات کوشی ریمان برای به دست آوردن مزدوج همساز استفاده می‌کنیم:

$$u(x,y)=y^3-3x^2y\Rightarrow u_x=-6xy=v_y\Rightarrow v=\int -6xydy=-3xy^2+h(x)$$

$$v_x=-u_y\Rightarrow -3y^2+h'(x)=-3y^2+3x^2\Rightarrow h'(x)=3x^2\Rightarrow h(x)=x^3+c\Rightarrow v=-3xy^2+x^3+c$$

مثال ۲۱: با کدام مقادیر a و b تابع $u(x,y)=x^2+ay^2+bxy$ همساز است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $a=b=+1$ ۲) $a=-1$, b دلخواه ۳) $a=-1$ و فقط $b=0$ ۴) هیچ مقدار a و b

پاسخ: گزینه «۲»

$$u=x^2+ay^2+bxy\Rightarrow\begin{cases}u_x=2x+by\Rightarrow u_{xx}=2\\u_y=2ay+bx\Rightarrow u_{yy}=2a\end{cases}\xrightarrow{u_{xx}+u_{yy}=0}2+2a=0\Rightarrow a=-1$$

مثال ۲۲: اگر $u = x^2 - y^2 + 2x$ مزدوج همساز و تابع متناظر آن $w = f(z)$ کدام‌اند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $v = 2xy$ و $f(z) = 2z(z-1)$
۲) $v = xy + 2y$ و $f(z) = 2z(z+1)$
۳) $v = 2xy - 2y$ و $f(z) = z(z+2)$
۴) $v = y(2x+2)$ و $f(z) = z^2 + 2z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

از شرایط کوشی ریمان داریم:

$$v_x = -u_y = 2y \quad , \quad v_y = u_x = 2x + 2$$

با انتگرال‌گیری و حذف عبارات شامل x از v_y داریم:

$$v = \int 2y dx + \int (\cancel{2x} + 2) dy = 2xy + 2y$$

و از اینجا خواهیم داشت:

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy + 2x + i2y = z^2 + 2z$$

(البته ثابت انتگرال را $c = 0$ گرفتیم).

مثال ۲۳: فرض کنید $u = x^3 - 3y^2x, z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد. f کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) iz
۲) z^3
۳) ze^z
۴) $z^3 + 3z^2 + 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول:

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - iy^3 + i3x^2y - 3xy^2 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

u قسمت حقیقی تابع z^3 و v قسمت موهومی تابع z^3 می‌باشد.

روش دوم: طبق نکته گفته شده در متن کتاب داریم:

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 \\ u_y = -6xy \end{cases} \quad , \quad f'(z) = u_x - iu_y = 3x^2 - 3y^2 + i6xy \xrightarrow[y=0]{x=z} f'(z) = 3z^2 \Rightarrow f(z) = z^3 + c$$

مثال ۲۴: اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ به ازای $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ یک تابع تحلیلی باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ $(i^2 = -1)$ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۴ـ مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $v(x,y) = 3x^2y$
۲) $v(x,y) = 3x^2y - y^3$
۳) $v(x,y) = 3y^2x$
۴) $v(x,y) = 3y^2x - x^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$u = x^3 - 3xy^2 \quad , \quad v = 3x^2y - y^3$$

مثال ۲۵: برای اینکه تابع $u(x,y) = x^3 + \alpha x^2y + \beta xy^2 + y^3$ همساز باشد باید: (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\beta = \alpha = -3$
۲) $\alpha = -2 = \beta$
۳) $\beta = -3, \alpha = 3$
۴) $\beta = 3, \alpha = -3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$u = x^3 + \alpha x^2y + \beta xy^2 + y^3 \Rightarrow \begin{cases} u_x = 3x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 \Rightarrow u_{xx} = 6x + 2\alpha y \\ u_y = \alpha x^2 + 2\beta xy + 3y^2 \Rightarrow u_{yy} = 2\beta x + 6y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط همساز بودن}} u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow 6x + 2\alpha y + 6y + 2\beta x = 0 \Rightarrow (2\beta + 6)x + (2\alpha + 6)y = 0 \Rightarrow \beta = -3 \ , \ \alpha = -3$$

مثال ۲۶: اگر داشته باشیم $F(z)=F(re^{j\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$، چنانچه تابع F تحلیلی بوده و داشته باشیم: $u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta$، کدام گزینه $F(r,\theta)$ را معرفی می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) $F(z)=z^2+ic$
۲) $F(z)=\frac{1}{z^2}+ic$
۳) $F(z)=(z+\bar{z})+ic$
۴) $F(z)=z\bar{z}+ic$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\end{cases}\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta}=r.\frac{\partial u}{\partial r}=r[2r\cos 2\theta]=2r^2\cos 2\theta \Rightarrow v=r^2\sin 2\theta+f(r) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{1}{r}(-2r^2.\sin 2\theta)=2r\sin 2\theta \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 2r\sin 2\theta+f'(r)=2r\sin 2\theta \Rightarrow f'(r)=0 \Rightarrow f(r)=c$$

$$F(z)=u+iv=r^2\cos 2\theta+i[r^2\sin 2\theta+c]=r^2[\cos 2\theta+i\sin 2\theta]+ic=z^2+ic$$

مثال ۲۷: اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=x+e^x\cos y$ باشد، $f'(1)$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $1+e$
۲) $1-e$
۳) $e+2i$
۴) $(1+e)+i$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=1+e^x\cos y-i(-e^x\sin y) \Rightarrow f'(1)=1+e$$

توجه شود $1=1+0i$ و لذا $x=1$ و $y=0$ در محاسبات فوق منظور شده است.

مثال ۲۸: اگر u درحوزه D همساز باشد، آنگاه تابع $f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ در حوزه D: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) تحلیلی است.
۲) تحلیلی نمی‌باشد.
۳) یک تابع ثابت است.
۴) فقط در یک نقطه تحلیلی است.

پاسخ: گزینه «۱» هر تابع همساز مانند u قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است. لذا تابع f تحلیلی خواهد بود.

مثال ۲۹: فرض کنید $v(x,y)=y^3-3x^2y$ و تابع $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)-iv(x,y)$ تحلیلی باشد و $f(0)=0$. تابع $u(x,y)$ کدام است؟
(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $3xy^2-x^3$
۲) x^3-3x^2y
۳) x^3-3xy^2
۴) y^3-3xy^2

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$f(z)=u-i(y^3-3x^2y) \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}(y^3-3x^2y)=-3y^2+3x^2 \Rightarrow u(x,y)=x^3-3xy^2+f(y)$$

مثال ۳۰: کدام تابع همساز است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

۱) $u=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$
۲) $u=x^3-3y^2x+\cosh y\cos x$
۳) $u=(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}$
۴) $u=\sqrt{x^2+y^2}+x$

پاسخ: گزینه «۲» تابع x^3-3y^2x همساز بوده، تابع $\cosh y.\cos x$ نیز که قسمت حقیقی تابع $f(z)=\cos z$ می‌باشد به علت اینکه تابع $f(z)$ تحلیلی است، همساز می‌باشد، لذا جمع این دو تابع نیز همساز خواهد بود.

مثال۳۱: آیا تابع $v=-\sin x\sinh y$ می‌تواند قسمت موهومی یک تابع تحلیلی f باشد؟ (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)
اگر پاسخ مثبت است، تابع هارمونیک $u=\operatorname{Re}f(z)$ را نیز به دست آورید.

۱) بله، چون تابع $w=\sin z$ تحلیلی است. $u=\cos x\cosh y+g(y)$
۲) بله، چون تابع $w=\cosh z$ یک تابع تحلیلی است، $u=\cosh x\sin y$
۳) بله، چون در معادله لاپلاس صدق می‌کند و دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته است، $u=\cos x\cosh y+c$
۴) بله، چون تابع $w=\sin z$ تحلیلی است. $u=\cos x\cosh y+g(y)$

پاسخ: گزینه «۳»

$$w=\cos z=\cos(x+yi)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y\Rightarrow u=\cos x\cosh y \,\&\, v=-\sin x\sinh y$$

$$w=u+vi$$

چون تابع $w=\cos z$ در همه‌جا تحلیلی است لذا v,u در معادله لاپلاس صدق می‌کند و نیز دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته است.

تذکر: متأسفانه گزینه‌های (۱) و (۴) در آزمون شبیه به هم داده شده‌اند که خوشبختانه گزینه صحیح نیستند.

مثال۳۲: فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$ است. $f'(1)$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $2\cos1+2i\sin1$
۲) $\cos1-2i\sin1$
۳) $2\cos1+i\sin1$
۴) $\cos1-i\sin1$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=u+vi\Rightarrow f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}i \\ \text{چون } f(z) \text{ تحلیلی است}\Rightarrow -\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}i$$

$$u(x,y)=e^{-2xy}.\sin(x^2-y^2)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2ye^{-2xy}.\sin(x^2-y^2)+2x.e^{-2xy}.\cos(x^2-y^2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2xe^{-2xy}.\sin(x^2-y^2)-2y.e^{-2xy}.\cos(x^2-y^2)\end{cases}$$

حال می‌توان مقدار $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ را در نقطه $z=1\,(x=1,y=0)$ بدست آورد و به جواب مسأله رسید، اما برای ساده‌تر شدن با تبدیل $x\to z,\ y\to 0$ داریم:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}i=2z\cos(z^2)-(-2z\sin(z^2))i\Rightarrow f'(1)=2\cos(1)+2i\sin(1)$$

مثال۳۳: اگر $u=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ باشد، تابع $f(z)$ عبارت است از:
(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ (بیوتکنولوژی و داروسازی) ـ سراسری ۸۹)

۱) z^2
۲) $\dfrac{1}{z^2}$
۳) e^{2z}
۴) e^{z^2}

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\cos2xy+(-2y\sin2xy)e^{x^2-y^2}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\cos2xy+(-2x\sin2xy)e^{x^2-y^2}$$

چون تابع $f(z)$ تابعی تحلیلی است، پس $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$، حال اگر فرض کنیم z روی محور افقی باشد داریم $z=x$ و $y=0$.

حالا به جای تمام x ها، z و به جای تمام y ها، صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=2ze^{z^2}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}(z,0)=0$$

لذا داریم:

$$f'(z)=2ze^{z^2}-i\times0\Rightarrow f'(z)=2ze^{z^2}$$

اگر از طرفین این رابطه نسبت به z انتگرال بگیریم، به راحتی $f(z)$ به دست می‌آید:

$$f(z)=\int 2ze^{z^2}dz=e^{z^2}+c$$

مثال ۳۴: اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)=2x-x^3+3x^2y$ باشد و $v(0,0)=1$، آنگاه $v(1,2)$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) -6 ۲) -1 ۳) ۳ ۴) ۷

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از معادلات کوشی ریمان داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{-\partial u}{\partial y}=+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2-3x^2+6xy=\frac{\partial v}{\partial y}\xrightarrow{\int} v=\int(2-3x^2+6xy)dy \Rightarrow v=2y-3x^2y+3xy^2+h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-6xy+3y^2+h'(x)=\frac{-\partial u}{\partial y}=-3x^2$$

$$\Rightarrow h'(x)=+6xy-3x^2-3y^2 \Rightarrow h(x)=3x^2y-x^3-3xy^2+c \xrightarrow[h(0,0)=1]{v(0,0)=1} c=1$$

$$\Rightarrow v=2y-x^3+1 \xrightarrow{(1,2)} v(1,2)=4-1+1=4$$

* دقت کنید ما تست را برای این‌که طراح ناراحت نشود! حل کردیم، (می‌دانیم $h(x)$ باید تابعی بر حسب x به دست آید، در صورتی که $h(x)$ بر حسب x و y به دست آمده است و لذا تست غلط است.) در واقع $u(x,y)$، اصلاً همساز ندارد، چون در معادله‌ی لاپلاس صدق نمی‌کند.

مثال ۳۵: تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن $u(x,y)=2^x\cos(y\text{Ln}2)$ است کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $f(z)=2^z+ic$ ۲) $f(z)=z(\text{Ln}2)^z+ic$ ۳) $f(z)=(\text{Ln}2)^z+ic$ ۴) $f(z)=z2^z+ic$

پاسخ: گزینه «۱» چون $f(z)$ خواسته شده، مطابق متن کتاب از تابع $u(x,y)$ مشتق گرفته و به جای x، z و به جای y، صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2^x\text{Ln}2\cos(y\text{Ln}2)\to\dfrac{\partial u}{\partial x}(z,0)=2^z\text{Ln}2\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2^x(-\text{Ln}2\sin(y\text{Ln}2))\to\dfrac{\partial u}{\partial y}(z,0)=0\end{cases}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2^z\text{Ln}2 \Rightarrow f(z)=\int 2^z\text{Ln}2dz=2^z+K\xrightarrow{K=ic} f(z)=2^z+ic$$

طبق نکته داریم:

$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0)=2^z+iv(z,0)$$

فقط گزینه (۱) چنین شرایطی داره (یعنی جمله‌ای که ضریب i نداره برابر با 2^z میشه)

حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست!

(روش رد گزینه ها)

اعداد و توابع مختلط

در این قسمت ۲۲ تست از آزمون های کارشناسی ارشد و دکتری این فصل رو براتــون انتخاب کردم که قراره با هم به اونا کَلَکْ بزنیم!

مثال ۱: تابع $\varphi(x,y) = x^3 - 3xy^2$ در همه نقاط هارمونیک (همساز) می‌باشد. تابع مختلط تحلیلی G از متغیّر Z را به گونه‌ای تعیین نمایید که $ReG = \varphi$.

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $(x^3 - 3xy^2) + i(3xy^2 - y^3 + c)$
۲) $(x^3 - 3xy^2) + i(4xy - y^2 + c)$
۳) $(x^3 - 3xy^2) + i(4xy^2 + y^2 + c)$
۴) $(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + c)$

پاسخ: گزینه «۴» چون $u_x = 3x^2 - 3y^2$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از v اون نسبت به y مشتق گرفتیم، برابر با v_x بِشه، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

مثال ۲: اگر $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ آنگاه مزدوج هارمونیک (همساز) u، کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $-3x^2y + y^3 + c$
۲) $-3xy^2 + x^3 + c$
۳) $-3x^2y + x^3 + c$
۴) $-3xy^2 + y^3 + c$

پاسخ: گزینه «۲» چون $u_x = -6xy$ پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به y مشتق گرفتیم برابر با v_x بشه، فقط گزینه (۲) چنین شرایطی داره

مثال ۳: فرض کنید $v(x,y) = y^3 - 3x^2y$ و تابع $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y)$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$. تابع $u(x,y)$ کدام است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $3xy^2 - x^3$
۲) $x^3 - 3x^2y$
۳) $x^3 - 3xy^2$
۴) $y^3 - 3xy^2$

پاسخ: گزینه «۳» چون $v_y = -(3y^2 - 3x^2)$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به x مشتق گرفتیم، برابر با v_y بشه، فقط گزینه (۳) چنین شرایطی داره

مثال ۴: اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ به ازای $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ یک تابع تحلیلی باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ $(i^2 = -1)$

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۴ـ مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $v(x,y) = 3x^2y$
۲) $v(x,y) = 3x^2y - y^3$
۳) $v(x,y) = 3y^2x$
۴) $v(x,y) = 3y^2x - x^3$

پاسخ: گزینه «۲» چون $u_x = 3x^2 - 3y^2$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به y مشتق گرفتیم، برابر با u_x بشه، فقط گزینه (۲) چنین شرایطی داره

مثال ۵: اگر $u = x^2 - y^2 + 2x$، آنگاه مزدوج همساز و تابع متناظر آن $w = f(z)$ کدام‌اند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $f(z) = 2z(z-1)$ و $v = 2xy$
۲) $f(z) = 2z(z+1)$ و $v = xy + 2y$
۳) $f(z) = z(z+2)$ و $v = 2xy - 2y$
۴) $f(z) = z^2 + 2z$ و $v = y(2x+2)$

پاسخ: گزینه «۴» چون $u_x = 2x + 2$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از ضابطه‌ی v اون نسبت به y مشتق گرفتیم، برابر با $2x + 2$ باشه، فقط گزینه (۴) این شرایط رو داره

مثال ۶: اگر $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ و $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$، آنگاه مزدوج هارمونیک u، کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $-3xy^2 + x^3 + c$
۲) $-3x^2y + x^3 + c$
۳) $-2x^2y^2 + x^3 + c$
۴) $-4xy + y^2 + c$

پاسخ: گزینه «۱» چون $u_x = -6xy$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به y مشتق بگیریم، برابر با u_x بشه، فقط گزینه (۱) این شرایط رو داره

مثال ۷: اگر $f(z)=f(x+jy)=u(x,y)+jv(x,y)$ یک تابع تحلیلی باشد که در آن: $u(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$ و $(j=\sqrt{-1})$ آنگاه $v(x,y)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $e^{-x}(y\sin y+x\cos y)$
۲) $e^{-y}(x\sin y+y\cos y)$
۳) $e^{-x}(x\sin x+y\cos x)$
۴) $e^{-y}(y\sin y+x\cos y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با یه مشتق‌گیری ساده به راحتی معلومه $u_x=-e^{-x}x\sin y+e^{-x}y\cos y+e^{-x}\sin y$، حالا باید تو گزینه‌ها ببینیم کدوم گزینه هستش که اگه از اون نسبت به y مشتق بگیریم، برابر با u_x میشه، طبیعیه گزینه‌ای جوابه که e^{-x} داشته باشه و این یعنی گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن و یکی از گزینه های (۱) یا (۳) جوابه، از بین اونا با مشتق‌گیری معلوم میشه گزینه (۱) جوابه

مثال ۸: هارمونیک مزدوج (conjugate Harmonic Function) تابع $u(x,y)=2x(3-y)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $2x(3+y)$
۲) x^2-y^2
۳) $-2x(3+y)$
۴) $x^2-(3-y)^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به راحتی معلومه $u_x=2(3-y)$، حالا تو گزینه‌ها باید ببینیم کدوم گزینه هستش که اگه از اون نسبت به y مشتق بگیریم، برابر با $2(3-y)$ میشه، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

مثال ۹: تابع پتانسیل $u(r,\theta)=\ln r+r\cos\theta$ در مختصات قطبی داده شده است. تابع مزدوج همساز (conjugate Harmonic) آن، یعنی $v(r,\theta)$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\theta-r\sin\theta+A$
۲) $\theta+r\sin\theta+A$
۳) $r+r\sin\theta+A$
۴) $\theta-r\sin\theta+A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $u_r=\frac{1}{r}+\cos\theta$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به θ مشتق گرفتیم و بعد تقسیم بر r کردیم، برابر با u_r بشه، فقط گزینه (۲) چنین شرایطی داره

مثال ۱۰: فرض کنید $u=x^3-3y^2x, z=x+iy$ و $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد. f کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) iz
۲) z^3
۳) ze^z
۴) z^3+3z^2+1

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گزینه‌ای جوابه که اگه تو ضابطه‌ی u به جای x ها، z و به جای y ها، صفر قرار دادیم، اون قسمت که ضریب i نیست، برابر با $u(z,0)$ بشه، پس گزینه (۲) جوابه

مثال ۱۱: تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ است کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $f(z)=2^z+ic$
۲) $f(z)=z(\ln 2)^z+ic$
۳) $f(z)=(\ln 2)^z+ic$
۴) $f(z)=z2^z+ic$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همون‌طور که گفتیم $f(z)=u(z,0)+iv(z,0)$ میشه، پس داریم: $f(z)=2^z\cos(0)+iv(z,0)=2^z+iv(z,0)$

خُب ما کاری با $iv(z,0)$ نداریم، همین‌طوری معلومه گزینه (۱) جوابه چون فقط تو گزینه (۱) قسمت حقیقی برابر با 2^z داده شده

مثال ۱۲: اگر داشته باشیم $F(z)=F(re^{j\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$، چنانچه تابع F تحلیلی بوده و داشته باشیم: $u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta$، کدام گزینه $F(r,\theta)$ را معرفی می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) $F(z)=z^2+ic$
۲) $F(z)=\frac{1}{z^2}+ic$
۳) $F(z)=(z+\bar{z})+ic$
۴) $F(z)=z\bar{z}+ic$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قسمت حقیقی $F(z)$ (یعنی اون قسمت که با ضریب i همراه نیست) باید برابر با $u(z,0)$ باشه، یعنی باید برابر با $z^2\cos(0)=z^2$ باشه، و این یعنی گزینه (۱) جوابه

مثال ۱۳: اگر $u = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ باشد، تابع $f(z)$ عبارت است از:

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ (بیوتکنولوژی و داروسازی) ـ سراسری ۸۹)

۱) z^2 ۲) $\frac{1}{z^2}$ ۳) e^{2z} ۴) e^{z^2}

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: توجه کنید که $u(z,0) = e^{z^2}$، پس $f(z) = e^{z^2}$ و لذا گزینه (۴) جوابه

روش دوم: یه جور دیگه هم میشه این سؤال رو جواب داد. به ازای $z = 1$، (یعنی $x = 1$ و $y = 0$) مقدار حقیقی تابع $f(z)$ برابر با $e^1 = e$ میشه، حالا به من بگو ببینم تو کدوم گزینه اگه $z = 1$ قرار بِدیم، قسمت حقیقی اون برابر با e میشه!؟ جون من داری فکر میکنی!؟

مثال ۱۴: اگر $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد و $u = -r^3\sin 3\theta$، تابع $f(z)$ بر حسب z کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) $-z^3 + ik$ ۲) $-iz^3 + ik$ ۳) $iz^3 + ik$ ۴) $z^3 + ik$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه تو همه‌ی گزینه‌ها z^3 داریم، می‌تونیم $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ قرار بدیم و z^3 رو حساب کنیم:

$$z^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 \xrightarrow{\text{فرمول دموآور}} z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

اما همون‌طور که تو صورت سؤال هم می‌بینین، قسمت حقیقی تابع $f(z)$ به صورت $-r^3\sin 3\theta$ داده شده، بنابراین z^3 باید در i ضرب بِشه، یعنی گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۵: اگر w یک تابع مختلط باشد، آنگاه $w = u(x,y) + iv(x,y)$. در تابع $w = \frac{1}{1-z}$ مقادیر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $u(x,y) = \frac{1-x}{1+y}$ و $v(x,y) = \frac{1-y}{1-x}$

۲) $u(x,y) = \frac{y}{1-x}$ و $v(x,y) = \frac{x}{1-y}$

۳) $u(x,y) = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2}$ و $v(x,y) = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2}$

۴) $u(x,y) = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2}$ و $v(x,y) = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به ازای $z = 0$ تابع w برابر با $\underline{1}$ میشه، یعنی به ازای $x = y = 0$ باید $u = 1$ و $v = 0$ تولید بِشه. تنها گزینه‌ای کـه ایـن شـرایط رو داره گزینه (۴) هستش (تو گزینه‌های (۲) و (۳) که $u = 0$ میشه و تو گزینه (۱)، $v = 1$ میشه که غلطه)

مثال ۱۶: اگر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع مختلط $w = \tan z$ باشند و $z = x + iy$ آنگاه: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $u = \frac{\sin x\cosh y}{(\cosh y)^2 - \sin^2 x}$ و $v = \frac{\cos x\sinh y}{(\cosh y)^2 - \sin^2 x}$

۲) $u = \frac{\sin x\cos x}{(\cosh y)^2 - \sin^2 x}$ و $v = \frac{\cosh y\sinh y}{(\cosh y)^2 - \sin^2 x}$

۳) $u = \frac{\cos x\sinh y}{\cos^2 x + (\sinh y)^2}$ و $v = \frac{\sin x\cosh y}{\cos^2 x + (\sinh y)^2}$

۴) $u = \frac{\cosh y\sinh y}{\cos^2 x + (\sinh y)^2}$ و $v = \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x + (\sinh y)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» خُب به ازای $z = x + 0(i)$، یعنی به ازای $y = 0$، مقدار tgz برابر با tgx میشه و می‌دونـیم $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ هسـتش و در واقـع بـه ازای $y = 0$ باید $u = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $v = 0$ بِشه، تنها گزینه‌ای که این شرایط رو داره گزینه (۲) هستش $u = \frac{\sin x\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

مثال ۱۷: اگر $z=x+iy$ یک عدد مختلط، $\operatorname{Re} z$ قسمت حقیقی آن و $\operatorname{Im} z$ قسمت موهومی آن باشد، آنگاه مقدار $2x\operatorname{Re}(z^{n+1})-(x^2+y^2)\operatorname{Re}(z^n)$، کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) صفر　　۲) $\operatorname{Re}(z^{n+2})$　　۳) $\operatorname{Im}(z^{n+2})$　　۴) $\operatorname{Re}(z^{n+1})-\operatorname{Im}(z^{n+1})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگه فرض کنیم $z=2$ و $n=1$ اونوقت داریم:

$$A=2x\operatorname{Re}(z^{n+1})-(x^2+y^2)\operatorname{Re}(z^n)\xrightarrow[n=1]{y=0,x=2}A=2\times2\times2^{1+1}-(2^2+0)2^1=16-8=8$$

حالا تو گزینه‌ها به جای z، عدد ۲ و به جای n عدد ۱ رو قرار میدیم هر کدوم برابر با ۸ شد، جوابه! گزینه‌های (۱) و (۳) که نیاز به بررسی ندارن (چون هر دو صفرن)، مقدار گزینه (۴) هم که برابر $2^{1+1}-0=4$ میشه، پس میره کنار! بنابراین به راحتی معلوم میشه گزینه (۲) جوابه، چون $2^{1+2}=2^3=8$ میشه

مثال ۱۸: اگر α,β,γ اعداد مختلط با قدرمطلق واحد باشند به قسمی که $|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|=|\alpha\beta\gamma|$، مقدار $|\alpha+\beta+\gamma|$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{2}{3}$　　۳) ۱　　۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون برای α، β و γ هیچ شرطی جز این که اعداد باید مختلط و با اندازه‌ی واحد باشند، نداریم، پس می‌تونیم اعداد $\alpha=1$ و $\beta=-1$ و $\gamma=1$، انتخاب کنیم که تو رابطه داده شده تو صورت سؤال هم صدق می‌کنن، پس داریم:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\\ \gamma=1\end{cases}\xrightarrow{\text{تو شرط صورت سوال صدق می‌کنن}}|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|=|\alpha\beta\gamma|\Rightarrow|\alpha+\beta+\gamma|=1$$

پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۹: نقاط $z_1\neq0$ و $z_2\neq0$ با فرض $z_1\neq z_2$ در صفحه‌ی مختلط مفروض هستند. شرط اینکه نقطه‌ی مبدأ یعنی $z=0$ نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط واصل بین z_1 و z_2 باشد این است که: (دکترای برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$　　۲) $|z_1-z_2|=|z_1|+|z_2|$　　۳) $\big||z_1|-|z_2|\big|=|z_1-z_2|$　　۴) $|z_1|-|z_2|=|z_1-z_2|$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافیه نقطه‌های z_1 و z_2 رو به شرطی که پاره‌خط واصل اون‌ها از نقطه‌ی $z=0$ عبور کنه، انتخاب کنیم و در گزینه‌ها قرار بدیم تا گزینه‌ی صحیح معلوم بِشه:

$z_1=1\quad,\quad z_2=-2$

گزینه ۱ : $|1-2|=|1|+|-2|\Rightarrow1=3$　غ. ق. ق.

گزینه ۲ : $|1-(-2)|=|1|+|-2|\Rightarrow3=3$　لذا این گزینه صحیح است.

گزینه ۳ : $\big||1|-|-2|\big|=|1-(-2)|\Rightarrow1=3$　غ. ق. ق.

گزینه ۴ : $|1|-|-2|=|1-(-2)|\Rightarrow-1=3$　غ. ق. ق.

مثال ۲۰: مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ که در آن x یک عدد حقیقی است، برابر است با : (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{2\sin x}{5-4\sin x}$　　۲) $\frac{2\cos x}{5-4\sin x}$　　۳) $\frac{2\sin x}{5-4\cos x}$　　۴) $\frac{2\cos x}{5-4\cos x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به ازای $x=0$ مقدار سری برابر با صفر میشه، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن، چون به ازای $x=0$، برابر با صفر نمیشن!

از طرفی به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^n}=\overbrace{\boxed{\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}}}^{\frac{1}{2}}+\overbrace{\boxed{\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{2^3}}}^{-\frac{1}{8}}+\overbrace{\boxed{\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{2^5}}}^{\frac{1}{32}}+\cdots$$

خیلی معلومه که مقدار سری به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ عددی کمتر از $\frac{1}{2}$ میشه، حالا اگه گزینه‌های (۱) و (۳) رو با هم مقایسه کنیم معلوم میشه مقدار گزینه (۱) به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر با ۲ میشه، پس این گزینه غلطه و گزینه (۳) که مقدار اون به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر $\frac{2}{5}$ میشه، جوابه

مثال۲۱: حاصل سری $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{3^k}$ $(\theta>0)$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\sin\theta}{10-6\cos\theta}$ ۲) $\frac{1-\cos\theta}{10-6\cos\theta}$ ۳) $\frac{3-3\cos\theta}{10-6\cos\theta}$ ۴) $\frac{3\sin\theta}{10-6\cos\theta}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به ازای $\theta=\pi$، مقدار سری برابر با صفر میشه، بنابراین گزینه‌هایی که به ازای $\theta=\pi$ مقدارشون صفر نمیشه، غلطن، یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) همین اولِ کاری می‌پَرن! بین گزینه‌های (۱) و (۴) می‌تونیم مثلاً به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ ببینیم کدوم مقدارش نزدیک‌تر به سری میشه!؟

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{3^k}\Rightarrow S(\theta=\frac{\pi}{2})=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{3}+\frac{\sin\pi}{3^2}+\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{3^3}+\cdots\simeq\frac{1}{3}-\frac{1}{27}+\cdots$$

فعلاً برای دوری از محاسبات، همون جمله‌ی اول رو در نظر می‌گیریم، (چون تقریب خوبی هم هست!) در واقع گزینه‌ای جوابه که به عدد $\frac{1}{3}$ نزدیک‌تر باشه (همون جمله‌ی اول رو برداشتیم!)

$$\text{مقدار گزینه (۴) به ازای } \theta=\frac{\pi}{2} = \frac{3\sin(\frac{\pi}{2})}{10-6\cos(\frac{\pi}{2})}=\frac{3}{10}\simeq\frac{1}{3} \quad , \quad \text{مقدار گزینه (۱) به ازای } \theta=\frac{\pi}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{10-6\cos(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{10}$$

پس گزینه (۴) جوابه

مدرسان شریف

فصل دوم

« نگاشت »

مثال ۱: نیم‌صفحه $y>\circ$ تحت نگاشت $w=(۱+i)z$ بر روی کدام ناحیه نگاشته خواهد شد؟

۱) $u+v=۱$ ‏ ۲) $u<v$ ‏ ۳) $u+v=-۱$ ‏ ۴) $u>v$

پاسخ : گزینه «۲» با فرض $z=x+iy$ و $w=u+iv$ داریم:

$$u+iv=(۱+i)(x+iy)=x-y+i(x+y)\Rightarrow\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}\Rightarrow y=\frac{v-u}{۲}\xrightarrow{\text{چون } y>\circ \text{ است}}v-u>\circ\Rightarrow u<v$$

مثال ۲: نگاشت $w=iz+i$ نیم‌صفحه $x>\circ$ را بر روی کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) $u>۱$ ‏ ۲) $v>۱$ ‏ ۳) $v>\frac{۱}{۲}$ ‏ ۴) $u>\frac{۱}{۲}$ و $v<۱$

پاسخ : گزینه «۲»

$$w=iz+i=i(x+iy)+i=-y+i(x+۱)=u+iv$$

$$v=x+۱\Rightarrow x=v-۱\xrightarrow{x>\circ}v-۱>\circ\Rightarrow v>۱$$

مثال ۳: تصویر میدان $\{z\in C;\operatorname{Re}z>\circ,\operatorname{Im}z>\circ,(\operatorname{Re}z)(\operatorname{Im}z)>۱\}$ تحت نگاشت $w=z^۲$ کدام است؟

۱) $\{w\in C;\operatorname{Im}w>۱\}$ ‏ ۲) $\{w\in C;\operatorname{Im}w>۲\}$

۳) $\{w\in C;\operatorname{Re}w>۱\}$ ‏ ۴) $\{w\in C;(\operatorname{Re}w)(\operatorname{Im}w)>۱\}$

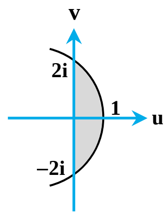
پاسخ : گزینه «۲» اگر فرض کنیم $z=x+iy$ و $w=u+iv$، تحت نگاشت $w=z^۲$ داریم:

$$w=z^۲\Rightarrow u+iv=(x+iy)^۲\Rightarrow u+iv=x^۲-y^۲+i۲xy$$

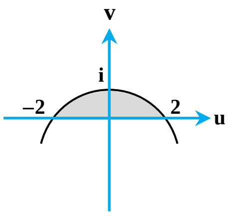
پس $u=x^۲-y^۲$ و $v=۲xy$. از طرفی ناحیه‌ی داده شده در سؤال به صورت $\{xy>۱\ ,\ x>\circ\ ,\ y>\circ\}$ می‌باشد که ناحیه‌ی مرزهای آن به صورت زیر است:

$$xy>۱\Rightarrow ۲xy>۲\Rightarrow v>۲$$

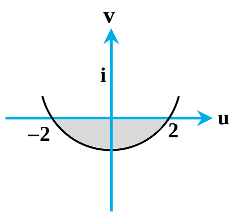
مثال ۴: تابع $w=z^۲$ ناحیه مثلثی بین خطوط $y=\pm x$ و $y=۱$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟



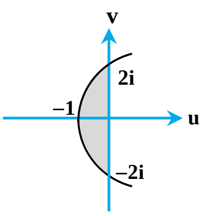
(۱)



(۲)



(۳)

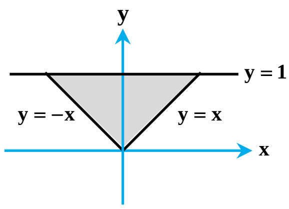


(۴)

پاسخ : گزینه «۴»

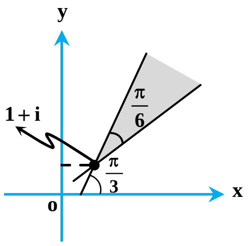
با توجه به نگاشت $w=z^۲$ داریم:

$$w=(x+iy)^۲=x^۲-y^۲+۲ixy\Rightarrow\begin{cases}u=x^۲-y^۲\\ v=۲xy\end{cases}$$



تصویر خط $y=1$ تحت نگاشت w با توجه به روابط به دست آمده برای u و v به صورت $\mathbf{u=x^2-1}$ و $\mathbf{v=2x}$ است که آن را می‌توان به صورت $\mathbf{v^2=4(u+1)}$ نوشت که یک سهمی افقی با رأس $(-1,0)$ است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. همین‌جا پاسخ به تست تمام است ولی برای تمرین بیشتر بررسی‌های دقیق‌تر را نیز انجام می‌دهیم. تصویر خط $y=x$، به صورت $\mathbf{u=0}$ و $\mathbf{v=2x^2}$ و برای خط $y=-x$، $\mathbf{u=0}$ و $\mathbf{v=-2x^2}$ و در نتیجه تصویر خط $y=\pm x$ به صورت پاره‌خط $\mathbf{u=0}$ و $\mathbf{-2\le v\le 2}$ است. (دقت کنید $-2x^2\le v\le 2x^2$ و چون $-1<x<1$، لذا $-2\le v\le 2$ به دست آمد.)

مثال ۵: نگاشتی که ناحیه داده شده در شکل زیر را به کل نیم‌صفحه بالایی بنگارد، کدام است؟



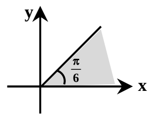
۱) $w=[z-(1+i)]^3$

۲) $w=[z-(1+i)]^6$

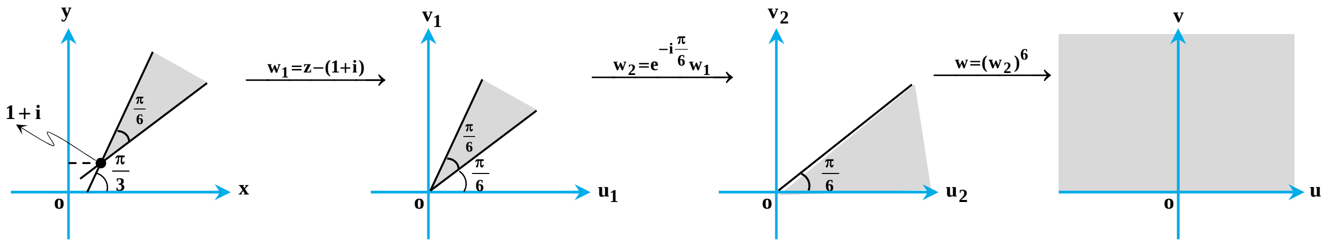
۳) $w=-[z-(1+i)]^3$

۴) $w=-[z-(1+i)]^6$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به اینکه توسط نگاشت $w=z^n$، ناحیه $0\le \operatorname{Arg}z<\frac{\pi}{n}$ بر روی نیم‌صفحه بالایی نگاشته می‌شود، ابتدا باید ناحیه را به صورت



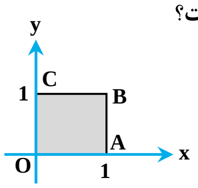
تبدیل کنیم و سپس با نگاشت $w=z^6$ این ناحیه را به کل نیم‌صفحه فوقانی بنگاریم. برای این کار ابتدا شکل داده شده را با نگاشت $w_1=z-(1+i)$ انتقال می‌دهیم و سپس با نگاشت $w_2=e^{-i\frac{\pi}{6}}w_1$ به اندازه $-\frac{\pi}{6}$ دوران می‌دهیم.



دقت کنید در نهایت w به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$w=(w_2)^6=(e^{\frac{-i\pi}{6}})^6[z-(1+i)]^6=e^{-i\pi}[z-(1+i)]^6=-[z-(1+i)]^6$$

مثال ۶: ناحیه‌ی نشان داده شده در شکل زیر تحت نگاشت $w=z^2$ به ناحیه‌ی D' تبدیل می‌شود. مساحت D' چقدر است؟



۱) $\frac{11}{6}$

۲) $\frac{8}{3}$

۳) $\frac{11}{12}$

۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا نگاشت $w=z^2$ را به شکل مقابل می‌نویسیم:

$$w=z^2=x^2-y^2+2ixy \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u=x^2-y^2} \\ \mathbf{v=2xy} \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم هر چهار خط به چه ناحیه‌هائی تبدیل خواهند شد.

ابتدا OA را بررسی می‌کنیم که تساوی $y=0$ و نامساوی $0\le x\le 1$، را می‌توان برای آن نوشت. تبدیل پاره‌خط OA به صورت زیر است:

$$\mathbf{0\le u\le 1\ ,\ v=0}$$

تبدیل AB تحت این نگاشت، با توجه به $x=1$، به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} u=1-y^2 \\ v=2y \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u=1-\frac{v^2}{4}}$$

تبدیل BC تحت این نگاشت، با توجه به $y=1$ برابر است با:

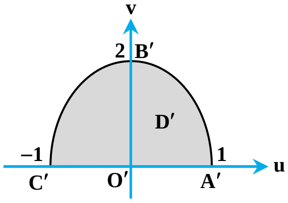
$$\begin{cases} u=x^2-1 \\ v=2x \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u=\frac{v^2}{4}-1}$$

تبدیل CO، با توجه به $x=0$ برابر است با:

$$\begin{cases} u=-y^2 \\ v=0 \end{cases} \xrightarrow{0\le y\le 1} -1\le -y^2\le 0 \Rightarrow \mathbf{-1\le u\le 0}$$

از چهار رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم؛ $-1 \le u \le 1$ و دو منحنی قرینه‌ی یکدیگر (نسبت به محور v) به شکل زیر داریم:

$$u = \frac{v^2}{4} - 1 \ , \ u = 1 - \frac{v^2}{4}$$



و با رسم خطوط و منحنی‌ها شکل مقابل را داریم:

با توجه به شکل مساحت را با استفاده از انتگرال حساب می‌کنیم.

$$S = 2\int_0^2 (1 - \frac{v^2}{4})dv = 2[v - \frac{v^3}{12}]_0^2 = 2(2 - \frac{8}{12}) = 2 \times \frac{16}{12} = \frac{8}{3}$$

دقت کنید نقطه‌ی برخورد منحنی $u = \frac{v^2}{4} - 1$ یا $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ با محور v به ازای $u = 0$، برابر $v = 2$ به دست می‌آید که در بازه‌ی انتگرال‌گیری لحاظ شد.

توجه: در ادامه‌ی فصل فرمولی برای محاسبه‌ی راحت‌تر مساحت، برای این‌گونه سؤالات ارائه می‌شود.

مثال ۷: ناحیه $\frac{\pi}{4} \le Argz \le \frac{\pi}{2}$، تحت کدام نگاشت به ناحیه‌ی $\pi \le Argw \le \frac{7\pi}{4}$ تبدیل می‌شود؟

۱) $w = e^{\frac{\pi}{4}i} z^4$
۲) $w = e^{\frac{\pi}{4}i} z^3$
۳) $w = -e^{\frac{\pi}{4}i} z^4$
۴) $w = e^{-\frac{\pi}{4}i} z^3$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با کمی دقت در گزینه‌ها مشخص است ناحیه چند برابر شده و یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ پیدا کرده است. ابتدا ناحیه توسط نگاشت $w_1 = z^3$ تبدیل به $\frac{3\pi}{4} \le Argw_1 \le \frac{3\pi}{2}$ شده و سپس با یک **دوران** به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ به ناحیه $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \le Argw \le \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ و یا به عبارت دیگر به ناحیه‌ی $\pi \le Argw \le \frac{7\pi}{4}$ تبدیل شده است.

مثال ۸: نگاشت $w = \frac{z^2}{a^2} - 1$ یک نقطه از لمنیسکات $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ را روی کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) روی دایره واحد
۲) خارج دایره واحد
۳) روی دایره واحد در نیم‌صفحه‌ی بالایی
۴) روی دایره واحد در نیم‌صفحه‌ی پایینی

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا بخش‌های حقیقی و موهومی w را مشخص می‌کنیم:

$$w = \frac{(x+iy)^2}{a^2} - 1 = (\frac{x^2 - y^2}{a^2} - 1) + i\frac{2xy}{a^2}$$

در دستگاه قطبی داریم $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. بنابراین:

$$w = [\frac{r^2}{a^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 1] + i\frac{2r^2}{a^2}\cos\theta\sin\theta = [\frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta - 1] + i\frac{r^2}{a^2}\sin 2\theta$$

حالا اگر z نقطه‌ای روی منحنی $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ باشد، خواهیم داشت:

$$v = Im(w) = \frac{r^2}{a^2}\sin 2\theta = 2\cos 2\theta \sin 2\theta = \sin 4\theta \quad , \quad u = Re(w) = \frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta - 1 = 2\cos^2 2\theta - 1 = \cos 4\theta$$

بنابراین $u^2 + v^2 = \cos^2 4\theta + \sin^2 4\theta = 1$، پس هر نقطه روی لمنیسکات، روی دایره‌ی واحد در صفحه‌ی w نگاشته می‌شود.

مثال ۹: دیسک $|z-1| \le 1$، تحت نگاشت $w = z^2$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟

۱) درونِ کاردیویید $r = 2(1+\cos\theta)$
۲) درون کاردیویید $r = 1 + \cos\theta$
۳) خارج از دلوار $r = 2(1-\cos\theta)$
۴) درون دلوار $r = 1 - \cos\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که در این پاسخ، r_1 و θ_1 مختصات مربوط به z و r_2 و θ_2 مختصات مربوط به w هستند. دیسک $|z-1| \le 1$ درون دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و شعاع واحد است. معادله‌ی مرز این ناحیه چنین است:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

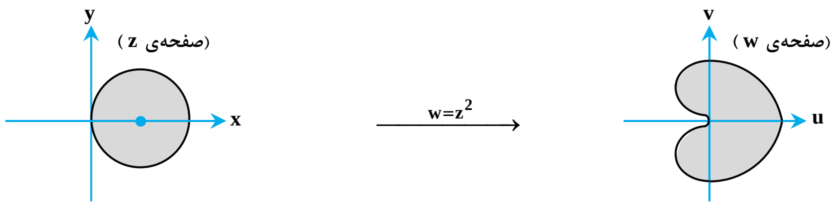
در مختصات قطبی $x = r_1\cos\theta_1$ و $x^2 + y^2 = r_1^2$ است. بنابراین معادله‌ی مرز، $r_1 = 2\cos\theta$ است. با جایگذاری $z = r_1 e^{i\theta_1}$ در نگاشت $w = z^2$ خواهیم داشت:

$$w = r_1^2 e^{i2\theta_1}$$

بنابراین در صفحه‌ی w داریم:

$$\begin{cases} r_2 = r_1^2 = (2\cos\theta_1)^2 = 4\cos^2\theta_1 = 4\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta_1) = 2(1+\cos 2\theta_1) \\ \theta_2 = 2\theta_1 \end{cases}$$

بنابراین در صفحه‌ی w به معادله‌ی $r_2 = 2(1+\cos\theta_2)$ رسیده‌ایم که یک کاردیویید است.

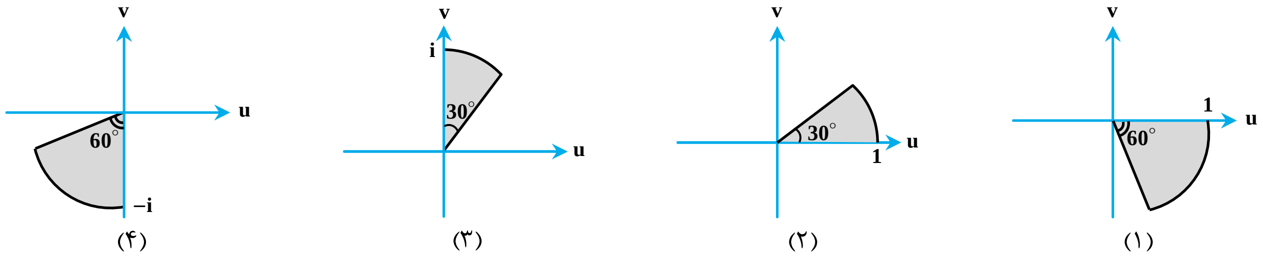


$|z-1| = 1 \Leftrightarrow r_1 = 2\cos\theta_1$　　　　　　　$r_2 = 2(1+\cos\theta_2)$

$z = r_1 e^{i\theta_1}$　　　　　　　$w = r_2\, e^{i\theta_2}$

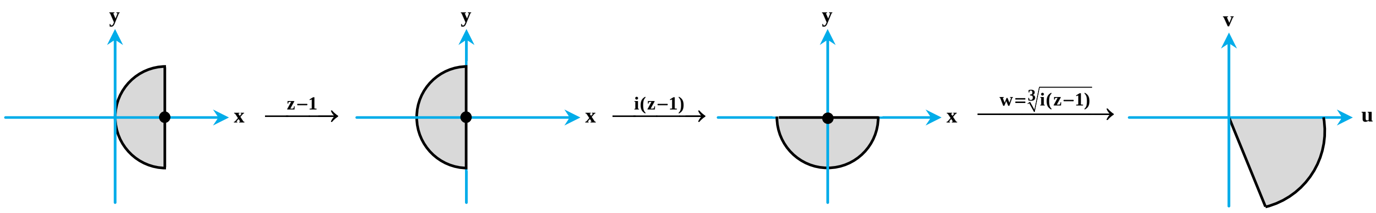
در ضمن توجه کنید که نگاشت $w = z^2$ پیوسته است و نواحی کران‌دار را به نواحی کران‌دار می‌برد. بنابراین ناحیه‌ی درونِ این کاردیویید بدست خواهد آمد نه بیرون آن.

مثال ۱۰: **ناحیه $D = \{z : |z-1| \le 1 , \operatorname{Re} z \le 1\}$، توسط نگاشت $w = \sqrt[3]{i(z-1)}$ به کدام ناحیه تصویر می‌شود؟**



پاسخ : گزینه «۱» ناحیه‌ی D نیمه‌ی چپ دیسک به مرکز $(1,0)$ و شعاع یک است. انتقال $z-1$ مرکز آن را به مبدأ می‌آورد. سپس ضریب $i(z-1)$ دورانی به اندازه‌ی $+90$ درجه ایجاد می‌کند. در این ناحیه داریم $0 \le r \le 1$ و $-\pi \le \theta \le 0$. اکنون نگاشت ریشه‌ی سوم، از r، ریشه‌ی سوم می‌گیرد و θ را بر سه تقسیم می‌کند. بنابراین داریم:

$$-\frac{\pi}{3} \le \operatorname{Arg} w \le 0 \quad , \quad 0 \le |w| \le 1$$



توضیح: هرگاه یک نگاشت را به ترکیب چند نگاشت ساده‌تر تبدیل می‌کنیم، ترتیب نگاشت‌ها مهم است و روی جواب اثر می‌گذارد. برای آنکه ترتیب درست را تشخیص دهیم، به ضابطه‌ی $w = f(z)$ دقت می‌کنیم.

مثلاً در نگاشت $w = \sqrt[3]{i(z-1)}$ وقتی به جای z عددی را قرار می‌دهیم، اولین کار آن است که یک واحد از z کم کنیم. سپس نتیجه‌ی به دست آمده در i ضرب می‌شود و در پایان ریشه‌ی سوم گرفته می‌شود.

مثال ۱۱: **خطوط $x = 1$ و $y = 1$ توسط نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به ترتیب بر روی کدام دایره‌ها نگاشته می‌شوند؟**

۱) دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۲) دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۳) دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(0,-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۴) دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(0,-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \Rightarrow 1 = \frac{u}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2-u = 0 \Rightarrow (u-\frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{v}{u^2+v^2} \Rightarrow 1 = -\frac{v}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2+v = 0 \Rightarrow u^2 + (v+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

مثال ۱۲: تصویر خط $y = x + \frac{1}{2}$ به وسیله نگاشت $w = \frac{1}{z}$ کدام است؟

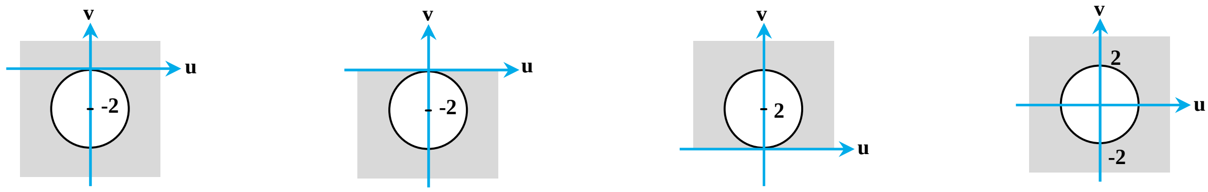
۱) خطی که از مبدأ می‌گذرد. ۲) خطی که از مبدأ نمی‌گذرد. ۳) دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد. ۴) دایره‌ای که از مبدأ نمی‌گذرد.

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ رابطه‌های $x = \frac{u}{u^2+v^2}$ و $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$ را داریم و چون $y = x + \frac{1}{2}$، لذا با جایگذاری داریم:

$$-\frac{v}{u^2+v^2} = \frac{u}{u^2+v^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{v}{u^2+v^2} = \frac{2u+u^2+v^2}{2(u^2+v^2)} \Rightarrow u^2+v^2+2u+2v = 0$$

معادله فوق دایره‌ای است که از مبدأ عبور می‌کند. البته با توجه به نکات فوق چون خط از مبدأ عبور نمی‌کند، به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند.

مثال ۱۳: تصویر ناحیه $0 < y < \frac{1}{4}$ به وسیله تبدیل $w = \frac{1}{z}$ کدام ناحیه است؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ : گزینه «۳»

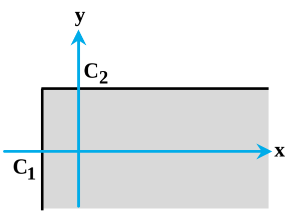
$$0 < y < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < \frac{-v}{u^2+v^2} < \frac{1}{4} \Rightarrow u^2+v^2+4v > 0 \Rightarrow u^2+(v+2)^2 > 4$$

با توجه به نکات فوق، چون خط $y = \frac{1}{4}$ از مبدأ عبور نمی‌کند، تصویر آن دایره‌ای می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند و چون $y < \frac{1}{4}$ پس ناحیه مزبور خارج دایره‌ای به مرکز $(0,-2)$ و شعاع ۲ می‌باشد. از طرفی چون $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$ و $y > 0$ می‌باشد، پس $v < 0$. لذا گزینه (۳) جواب است.

مثال ۱۴: تصویر ناحیه $x > C_1$ و $y < C_2$ از صفحه z به صفحه $w = u + iv$ تحت تبدیل (نگاشت) $w = \frac{1}{z}$، در کدام‌یک از حالات زیر کراندار نیست؟

۱) $C_1 < 0$ ، $C_2 < 0$ ۲) $C_1 < 0$ ، $C_2 > 0$ ۳) $C_1 > 0$ ، $C_2 < 0$ ۴) $C_1 > 0$ ، $C_2 > 0$

پاسخ: گزینه «۲» ناحیه مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:



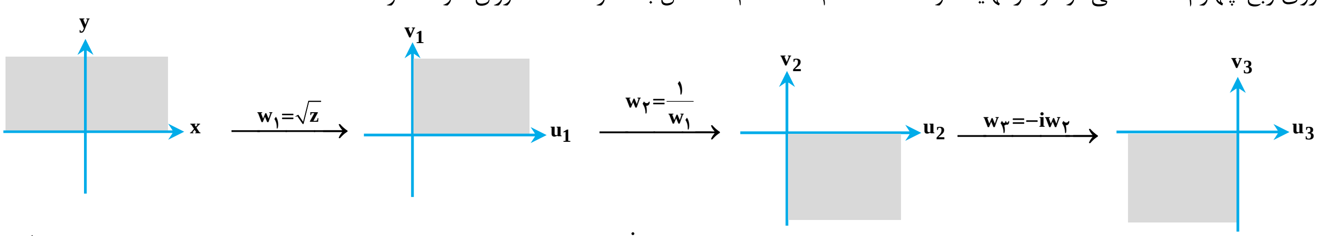
تبدیل (نگاشت) مورد نظر را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم: $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

همان طور که مشخص است، این نگاشت در $r = 0$ کراندار نیست و به سمت بی‌نهایت می‌رود. بنابراین مطابق شکل اگر منطقه هاشور زده نقطه مبدأ را در برگیرد $(r = 0)$ آنگاه تبدیل کراندار نخواهد بود. برای این منظور باید $C_1 < 0$ و $C_2 > 0$ باشد.

مثال ۱۵: ناحیه $0 \le \theta \le \pi$ تحت تبدیل $w = -\frac{i}{\sqrt{z}}$ کدام است؟

۱) ربع سوم ۲) ربع دوم ۳) ربع دوم و سوم ۴) ربع چهارم

پاسخ : گزینه «۱» توسط نگاشت $w_1 = \sqrt{z}$ ناحیه $0 \le \theta \le \pi$ به ناحیه $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ تبدیل خواهد شد و می‌دانیم توسط نگاشت $w_2 = \frac{1}{w_1}$، ربع اول بر روی ربع چهارم نگاشته می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w_3 = -iw_2$ شکل به اندازه -90° دوران خواهد کرد.



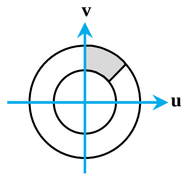
برای تشخیص ترتیب درست کارها، تصور کنید عددی را به جای z در نگاشت $w = -\frac{i}{\sqrt{z}}$ قرار داده باشید. ابتدا $\sqrt{z}$ محاسبه می‌شود، سپس به $\frac{1}{\sqrt{z}}$ دست می‌آید و در پایان جواب در $-i$ ضرب می‌شود.

مثال ۱۶: نقش ناحیه زاویه‌ای $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ با تبدیل $w=-\frac{i}{z^2}$ عبارتست از:

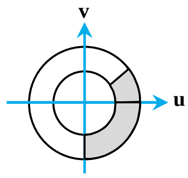
۱) $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ ۲) $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ ۳) $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi$

پاسخ : گزینه «۲» ناحیه $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ تحت نگاشت $w_1=z^2$ به ناحیه $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ تبدیل می‌شود و نگاشت $w_2=\frac{1}{z^2}$ این ناحیه را به ربـع چهـارم می‌نگارد و در نهایت $w_3=-iw_2$ ناحیه را -90° دوران می‌دهد. پس ناحیه $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ جواب است.

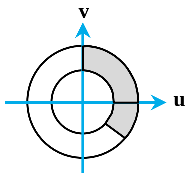
مثال ۱۷: تبدیل یافته ناحیه $D=\{(x,y)|1\le x\le 2\ ,\ \frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$ تحت نگاشت $w=e^z$ کدام است؟



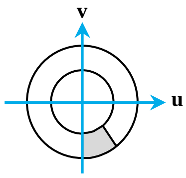
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ : گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l} r=e^x\\ \varphi=y\end{array}\right\} \Rightarrow 1\le x\le 2 \Rightarrow e^1\le r\le e^2 \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۸: نگاشت $f(z)=e^z$، ناحیه $D=\{(x,y):x\le 0\ ,\ 0\le y\le\pi\}$ را بر روی کدامیک از نواحی زیر می‌نگارد؟

۱) $\{(u,v)|u^2+v^2\ge 1\ ,\ u\ge 0\}$ ۲) $\{(u,v)|u^2+v^2\le 1\ ,\ v\ge 0\}$

۳) $\{(u,v)|u^2+v^2\le 1\ ,\ u\le 0\}$ ۴) $\{(u,v)|u^2+v^2\ge 1\ ,\ v\ge 0\}$

پاسخ : گزینه «۲» خط $x=0$ بر روی دایره‌ای به شعاع $r=e^0=1$ نگاشته می‌شود، لذا ناحیه $-\infty<x<0$ داخل دایره $r\le 1$ نگاشته می‌شود.
از طرفی چون $0\le y\le\pi$ لذا نیم‌دایره بالایی جواب است.

مثال ۱۹: اگر منحنی C_1 دارای معادله‌ی $z=t+i\cosh t$ و منحنی C_2 دارای معادله‌ی $z=\sinh t+i(t+1)$ باشد و تحت نگاشـت $w=e^{\pi z}$، ایـن دو منحنی به دو منحنی C'_1 و C'_2 تبدیل شوند، زاویه بین دو منحنی C'_1 و C'_2 در نقطه‌ی $A'(w=-1)$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ : گزینه «۱» اولاً نگاشت $w=e^{\pi z}$ در نقطه $z=-1$ همدیس است و بنابراین زاویه‌ی بین دو منحنی C'_1 و C'_2 برابر زاویـه‌ی بـین دو منحنـی C_1 و C_2 است. $e^{\pi z}=-1\Rightarrow z=i$

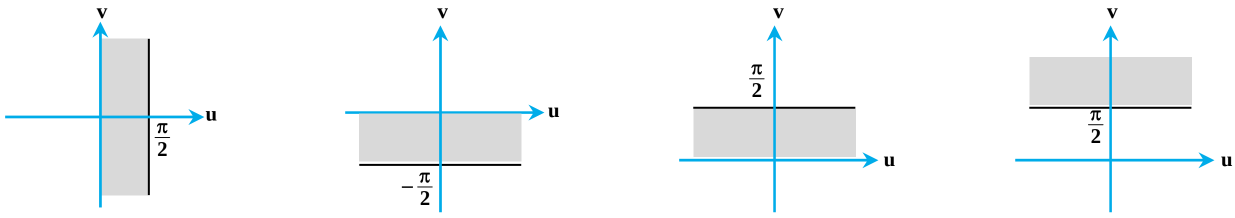
با قرار دادن $z=i$ در معادله‌ی دو منحنی C_1 و C_2، $t=0$ حاصل می‌شود. اما ضریب زاویه منحنی‌های C_1 و C_2 به شکل زیر حساب می‌شود:

$$C_1:\begin{cases}x=t\\ y=\cosh t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=1\\ y'=\sinh t\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sinh t}{1}=\sinh t \quad \text{و} \quad C_2:\begin{cases}x=\sinh t\\ y=t+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_t=\cosh t\\ y'_t=1\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh t}$$

از طرفی می‌دانیم $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ و $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$. با قرار دادن $t=0$ در روابط فوق شیب منحنی‌های C_1 و C_2 به راحتی حساب می‌شود:

$$\begin{cases}m_1=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\sinh(0)=\frac{e^0-e^0}{2}=0\\ m_2=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{\cosh(0)}=\frac{1}{\frac{e^0+e^0}{2}}=1\end{cases}\Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{0-1}{1+0(1)}\right|=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۰: تصویر مجموعه نقاط $y \ge ۰$ و $x > ۱$ توسط شاخه اصلی تابع $\mathrm{Ln}(z-۱)$ کدام ناحیه از صفحه w خواهد بود؟



(۴) (۳) (۲) (۱)

پاسخ : گزینه «۲»

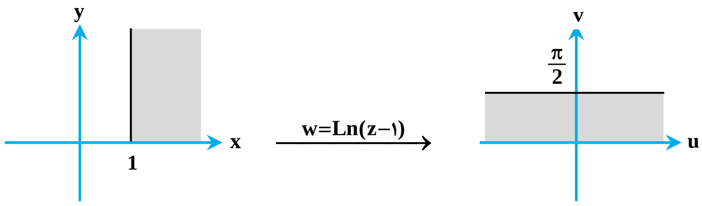
$$w = \mathrm{Ln}(z-۱) = \mathrm{Ln}[(x-۱)+iy] = \mathrm{Ln}r + i\theta \Rightarrow u+iv = \mathrm{Ln}r + i\theta \Rightarrow u = \mathrm{Ln}r \;,\; v = \theta$$

$$r = \sqrt{(x-۱)^۲ + y^۲} \quad , \quad \theta = \mathrm{Arctg}\frac{y}{x-۱}$$

با توجه به تغییرات $x > ۱$ و $y \ge ۰$، تغییرات r بین صفر تا ∞ خواهد بود $(۰ < r < \infty)$ از طرفی چون $۰ \le y < \infty$ لذا $\mathrm{Arctg}\frac{y}{x-۱}$ بین صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، یعنی $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ می‌باشد.

$$u = \mathrm{Ln}r \xrightarrow{۰<r<\infty} -\infty < \mathrm{Ln}r < +\infty \Rightarrow -\infty < u < +\infty$$

$$v = \theta \Rightarrow ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$$



مثال ۲۱: هرگاه $z = x+iy$ و $w = u+iv$، آنگاه تحت نگاشت $w = \sin z$ خط $x = \frac{\pi}{۴}$ به کدامیک از منحنی‌های زیر تبدیل خواهد شد؟

۱) $u^۲ + v^۲ = \frac{۱}{۲}$
۲) $u^۲ + v^۲ = \frac{۱}{۴}$
۳) $u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$
۴) $u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه «۳» به راحتی با توجه به مطلب گفته شده داریم:

$$\frac{u^۲}{\sin^۲(\frac{\pi}{۴})} - \frac{v^۲}{\cos^۲(\frac{\pi}{۴})} = ۱ \Rightarrow ۲u^۲ - ۲v^۲ = ۱ \Rightarrow u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$$

البته جواب کامل‌تر شاخه‌ی سمت راستِ هذلولیِ $u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۲۲: نگاشت $w = \sin(\frac{\pi z}{۲a})$، نیم‌خط $x = \frac{a}{۲}$ و $y > ۰$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟

۱) $u^۲ + v^۲ = \frac{۱}{۲}$ در ربع اول مختصات
۲) $u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$ در ربع اول و چهارم مختصات
۳) $u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$ در ربع اول مختصات
۴) $u^۲ + v^۲ = \frac{۱}{۲}$ در ربع اول و چهارم مختصات

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنیم $w_۱ = \frac{\pi z}{۲a}$ باشد. روی نیم‌خط $x = \frac{a}{۲}$ و $y > ۰$ داریم:

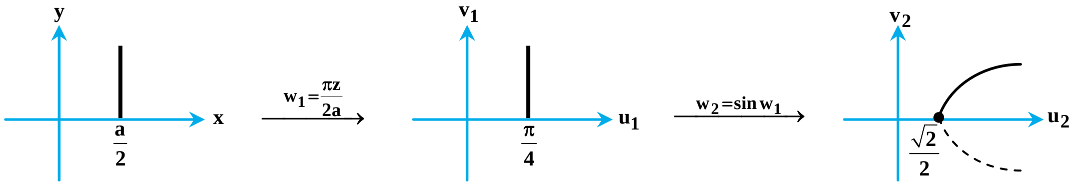
$$w_۱ = \frac{\pi}{۲a}(\frac{a}{۲} + iy) = \frac{\pi}{۴} + i\frac{\pi}{۲a}y = u_۱ + iv_۱$$

پس $w_۱$ روی خط $u_۱ = \frac{\pi}{۴}$ در ناحیه‌ی $v_۱ = \frac{\pi}{۲a}y > ۰$ قرار دارد.

تحت نگاشت $w_۲ = \sin w_۱$، خط عمودی $u_۱ = \frac{\pi}{۴}$ تبدیل به هذلولی مقابل می‌گردد:

$$\sin(u_۱ + iv_۱) = \underbrace{\sin u_۱ \cosh v_۱}_{u} + i\underbrace{\cos u_۱ \sinh v_۱}_{v}$$

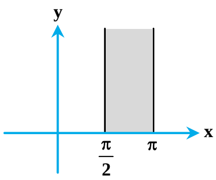
$$\begin{cases} u = \sin u_۱ \cosh v_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cosh v_۱ \\ v = \cos u_۱ \sinh v_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sinh v_۱ \end{cases} \Rightarrow u^۲ - v^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cosh v_۱)^۲ - (\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sinh v_۱)^۲ \Rightarrow u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$$



توضیح تکمیلی: با دقت کردن به علامتِ u و v متوجه می‌شویم که از هذلولیِ $u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$ فقط آن بخش که در ربع اول قرار دارد، بدست خواهد آمد.

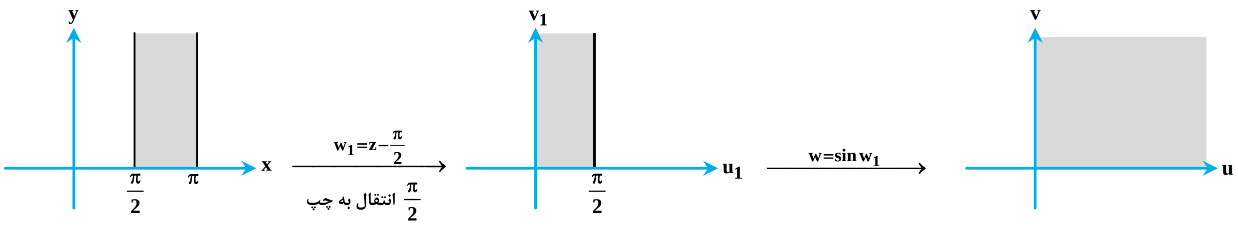
در واقع چون شرط $y > ۰$ را داریم و $v_۱ = \frac{\pi}{۲a}y$، لذا $v_۱ > ۰$ است. پس $\cosh v_۱ > ۰$ و $\sinh v_۱ > ۰$. به همین دلیل u و v هر دو مثبت هستند و ربع اولِ هذلولی بدست می‌آید. دقت کنید که چون $v_۱ > ۰$ است داریم $e^{v_۱} > e^{-v_۱}$ به همین دلیل $\frac{e^{v_۱} \pm e^{-v_۱}}{۲} > ۰$ می‌شود.

مثال ۲۳: نگاشت $w = -\cos z$ ناحیه نیم‌نوار $\{y \ge ۰, \frac{\pi}{۲} \le x \le \pi\}$ از صفحه‌ی z را به چه ناحیه‌ای از صفحه‌ی w تبدیل می‌کند؟



۱) ربع اول
۲) ربع دوم
۳) نیم‌نوار $۰ \le y \le ۱$ و $y \ge ۰$
۴) نیم‌نوار $-۱ \le x \le ۰$ و $y \ge ۰$

پاسخ : گزینه «۱» می‌توانیم $w = -\cos z$ را به صورت $w = \sin(z - \frac{\pi}{۲})$ بنویسیم و لذا داریم:



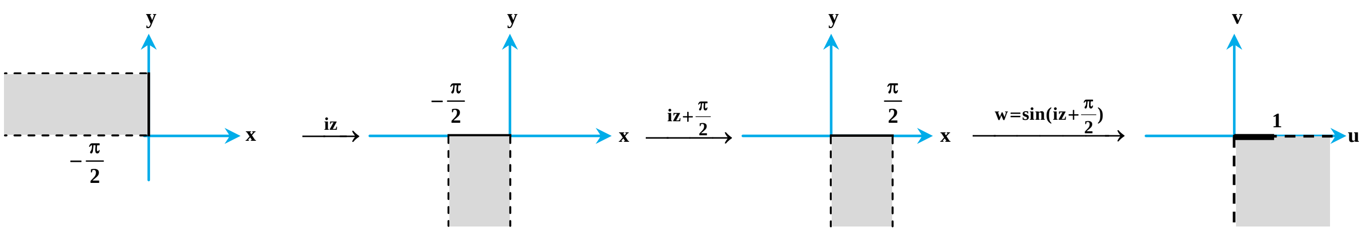
مثال ۲۴: تصویر نیم نوار $۰ < y < \frac{\pi}{۲}$ و $x \le ۰$ تحت نگاشت $w = \cosh(z)$ کدام است؟

۱) ربع اول
۲) ربع چهارم
۳) نیم صفحه‌ی $\operatorname{Im} w > ۰$
۴) نیم صفحه‌ی $\operatorname{Re} w > ۰$

پاسخ: گزینه «۲» از آنجا که رفتار $\sin z$ را روی این نوع از نیم نوارها می‌شناسیم، رابطه‌ی این نگاشت را با $\sin z$ تعیین می‌کنیم:

$$w = \cosh z = \cos iz = \sin(iz + \frac{\pi}{۲})$$

با ضرب i در z؛ نیم نوار داده شده دورانی ۹۰ درجه را در جهت مثلثاتی خواهد داشت. سپس انتقال $+\frac{\pi}{۲}$ این نیم نوار را به نیم نوار $y \le ۰$، $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ تبدیل می‌کند. در نهایت نگاشت سینوس؛ این ناحیه را به ربع چهارم از صفحه‌ی w می‌نگارد.



توضیح: خطوطی که با خط‌چین نشان داده شده است، جزء ناحیه نیستند. در آخرین تصویر؛ پاره‌خط $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ که روی محور xها است توسط w به پاره‌خط $[۰,۱]$ تبدیل شده است. به همین علت این قسمت جزو ناحیه است.

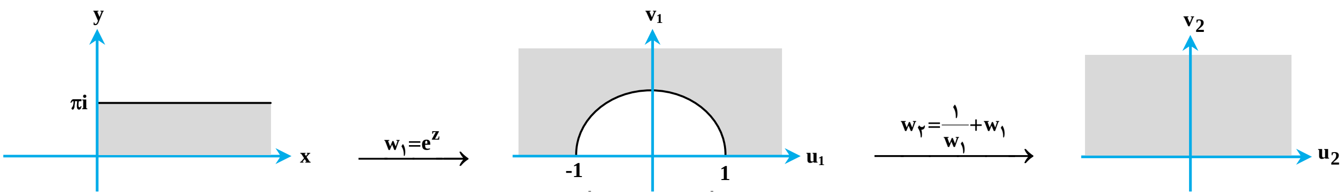
مثال ۲۵: تابع $w=2\cosh z$ قلمرو $\operatorname{Re} z\ge 0$ و $0\le \operatorname{Im} z\le \pi$ را به روی چه قلمرویی در صفحه w می‌نگارد؟

۱) $\operatorname{Re}(w)\ge 0$ ۲) $\operatorname{Im}(w)\ge 0$ ۳) $\operatorname{Re}(w)\le 0$ ۴) $\operatorname{Im}(w)\le 0$

پاسخ : گزینه «۲»

$$w=2\cosh z=2\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)=e^{z}+\frac{1}{e^{z}}$$

با فرض $w_1=e^{z}$ می‌دانیم این نگاشت ناحیه $\operatorname{Re} z>0$ و $0<\operatorname{Im} z<\pi$ را به بیرون نیم‌دایره نشان داده شده در شکل می‌نگارد.



توجه کنید که $w=w_1+\frac{1}{w_1}$ یک نگاشت ژوکوفسکی می‌باشد. با توجه به تعریف این نگاشت، ناحیه ایجاد شده به نیم صفحه بالایی یعنی ناحیه $\operatorname{Im} w>0$ نگاشته می‌شود.

مثال ۲۶: ناحیه‌ی $1<|z|<2$، تحت نگاشت $w=z+\frac{1}{z}$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟

۱) درون و روی بیضی به کانون‌های ± 2 غیر از خط واصل آن‌ها
۲) فقط درون بیضی به کانون‌های ± 2 غیر از خط واصل آن‌ها
۳) درون و روی بیضی به کانون‌های ± 2 با خط واصل آن‌ها
۴) فقط درون بیضی به کانون‌های ± 2 با خط واصل آن‌ها

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به نکات گفته شده در متن درس، اگر $r=1$، در این صورت $v=0$ و $-2\le u\le 2$. حال اگر $r=2$ معادله زیر را داریم:

$$\frac{u^2}{(2+\frac{1}{2})^2}+\frac{v^2}{(2-\frac{1}{2})^2}=1\Rightarrow \frac{u^2}{\frac{25}{4}}+\frac{v^2}{\frac{9}{4}}=1$$

معادله‌ی کلی بیضی به فرم $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$ می‌باشد. در این مسئله $a^2=\frac{25}{4}$ و $b^2=\frac{9}{4}$ است و کانون‌های آن مطابق رابطه زیر حساب می‌شود:

$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{9}{4}}=\pm\sqrt{\frac{16}{4}}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

لذا تصویر $|z|=2$ بیضی‌ای به کانون‌های ± 2 می‌باشد. اما دقت کنید علامت تساوی در ناحیه $1<|z|<2$ وجود ندارد $(r\neq 2\ ,\ r\neq 1)$ پس روی بیضی و خط واصل دو کانون جزء ناحیه نیست.

مثال ۲۷: دایره $|z|=\frac{a+b}{2}$، تحت نگاشت $w=z+\frac{a^2-b^2}{4z}$، به کدام شکل تبدیل می‌شود؟

۱) دایره با شعاع a^2-b^2 ۲) بیضی ۳) دایره با شعاع $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ ۴) بخشی از هذلولی

پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن w، بهتر است z را در مختصات قطبی نمایش دهیم، یعنی $z=re^{i\theta}$.

$$w=re^{i\theta}+\frac{\frac{(a^2-b^2)}{4}}{re^{i\theta}}\Rightarrow\begin{cases}u=(r+\frac{1}{4r}(a^2-b^2))\cos\theta\\ v=(r-\frac{1}{4r}(a^2-b^2))\sin\theta\end{cases}\xrightarrow{r=\frac{a+b}{2}}\begin{cases}u=a\cos\theta\\ v=b\sin\theta\end{cases}\to\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

پس ناحیه‌ی تبدیل یافته، بیضی با شعاع‌های a و b است.

مثال ۲۸: نگاشت $w=\frac{z^2-i}{z^2+i}$، ربع اول را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) درون نیم دایره بالایی دایره واحد
۲) درون نیم‌دایره پایینی دایره واحد
۳) درون دایره واحد
۴) بیرون دایره واحد

پاسخ : گزینه «۳» نگاشت فوق ترکیبی از نگاشت‌های مقابل است:

$$w_1=z^2\quad,\quad w=\frac{w_1-i}{w_1+i}$$

ابتدا ربع اول (یعنی ناحیه $0<\operatorname{Arg} z<\frac{\pi}{2}$) تحت نگاشت $w_1=z^2$ به ناحیه $0<\operatorname{Arg} w_1<\pi$ تبدیل می‌شود، سپس باید تصویر این ناحیه تحت نگاشت w حساب شود. با توجه به این که نقطه‌ی $z_0=i$ بالای محور حقیقی قرار دارد، لذا نیم‌صفحه‌ی فوقانی (یعنی $0<\operatorname{Arg} z<\pi$) به درون دایره واحد نگاشته می‌شود.

مثال۲۹: تبدیل دو خطی که نیمه بالایی صفحه z را به درون دایره یکه در صفحه w چنان بنگارد که $z = i$ به $w = 0$ و نقطه $z = \infty$ به $w = -1$ تبدیل شود، کدام گزینه است؟

۱) $w = 2(\frac{i-z}{i+z})$　　۲) $w = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(\frac{i-z}{i+z})$　　۳) $w = \frac{i-z}{i+z}$　　۴) $w = e^{i\pi}(\frac{i-z}{i+z})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» می‌دانیم نگاشت فوق به صورت $w = e^{i\alpha}(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0})$ می‌باشد، اما با توجه به شرط صورت سؤال داریم:

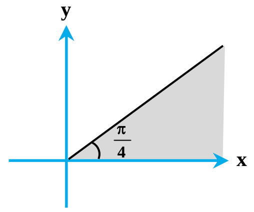
$$z = i \Rightarrow w = 0 \Rightarrow 0 = e^{i\alpha}(\frac{i-z_0}{i-\bar{z}_0}) \Rightarrow i = z_0$$

$$z = \infty \Rightarrow w = -1 \Rightarrow -1 = e^{i\alpha}(\frac{\infty - z_0}{\infty - \bar{z}_0}) \Rightarrow -1 = 1\times e^{i\alpha} \Rightarrow e^{i\alpha} = -1$$

دقت کنید چون نقطه داده شده $z = \infty$ می‌باشد، لذا نسبت کسر داخل پرانتز را برابر یک قرار دادیم.

پس دو قسمت مجهول یعنی z_0 و $e^{i\alpha}$ مشخص شد و نگاشت فوق به صورت مقابل خواهد بود: $w = (-1)(\frac{z-i}{z+i}) = \frac{i-z}{i+z}$

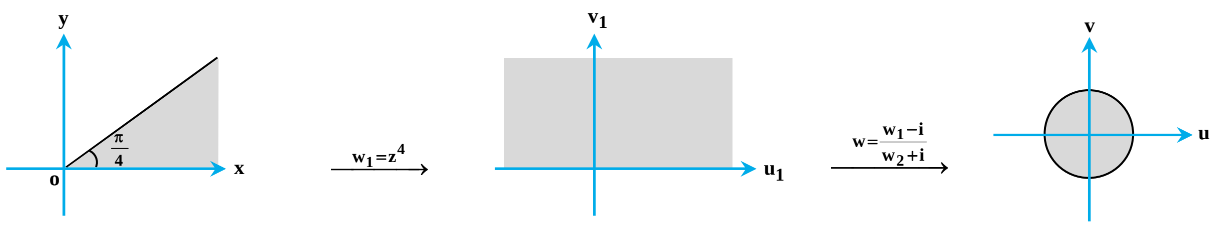
مثال۳۰: نگاشتی که ناحیه نشان داده شده را به داخل دایره واحد می‌نگارد، کدام است؟



۱) $w = \frac{2z^4+i}{z^4-i}$　　۲) $w = \frac{z^4+i}{z^4-i}$

۳) $w = \frac{2z^4-i}{z^4+i}$　　۴) $w = \frac{z^4-i}{z^4+i}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به این‌که ناحیه‌ی نهایی درون دایره واحد است، لذا نمی‌توان با یک تبدیل خطی به آن رسید. ابتدا با تبدیل $w_1 = z^4$ ناحیه فوق را به نیم صفحه‌ی بالایی نگاشته و سپس با تبدیل $w = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$، نیم صفحه‌ی فوقانی به داخل دایره واحد نگاشته می‌شود:

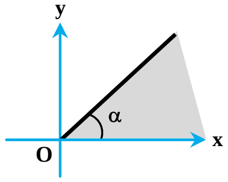


مثال۳۱: ناحیه دوم صفحه مختلط z با کدام تبدیل به درون دایره واحد نگاشته می‌شود؟

۱) $w = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2-1}{z^2+1}$　　۲) $w = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2+i}{z^2-i}$　　۳) $w = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2-i}{z^2+i}$　　۴) $w = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2+1}{z^2-1}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها ابتدا تحت نگاشت $w_1 = z^2$ ربع دوم (یعنی ناحیه‌ی $\frac{\pi}{2} \le Argz \le \pi$) به ناحیه $\pi \le Argw_1 \le 2\pi$ و یا به عبارت دیگر به ناحیه‌ی $Im(w_1) \le 0$ تبدیل می‌شود. با توجه به مطالبی که گفتیم، برای این که ناحیه $Im(w_1) \le 0$ به درون دایره واحد نگاشته شود، باید $Im(z_0) < 0$ و با توجه به گزینه‌ها باید $z_0 = -i$ باشد.

مثال ۳۲: تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ای با زاویه α در ربع اول از صفحه z که در شکل زیر نمایش داده شده است، تحت نگاشت $w=\frac{i-z^{(\frac{\pi}{\alpha})}}{i+z^{(\frac{\pi}{\alpha})}}$ کدام است؟



۱) درون و روی نیم‌دایره یکه فوقانی
۲) درون نیم‌دایره یکه تحتانی
۳) بیرون دایره یکه
۴) درون و روی دایره یکه

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم $w_1=z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ و $w_2=\frac{i-w_1}{i+w_1}$ باشند. اگر نگاشت w_1 را در فرم قطبی بنویسیم، خواهیم داشت:

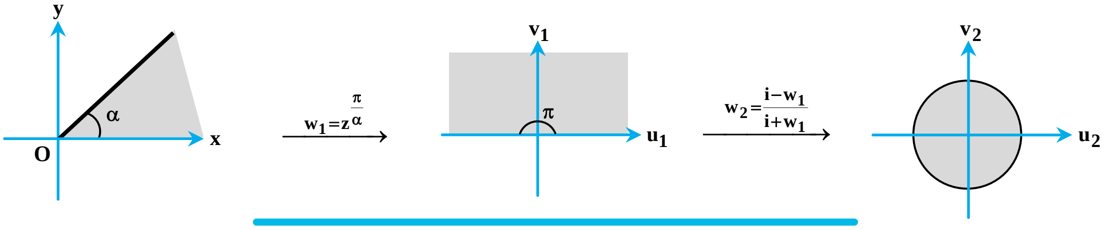
$$z=re^{i\theta}\Rightarrow w_1=r^{\frac{\pi}{\alpha}}e^{i\frac{\pi}{\alpha}\theta}$$

بنابراین نگاشت w_1، r را به توان $\frac{\pi}{\alpha}$ می‌رساند و θ را در $\frac{\pi}{\alpha}$ ضرب می‌کند. در صفحه‌ی z، ناحیه‌ای را داریم که در آن $0\le r<\infty$ و $0\le\theta\le\alpha$ است.

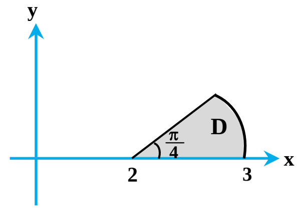
بنابراین در صفحه‌ی w_1 خواهیم داشت: $0\le r<\infty$ و $0\le\theta\le\alpha\times\frac{\pi}{\alpha}=\pi$

اکنون نیم‌صفحه‌ی $\mathrm{Im}\,w_1>0$ را در اختیار داریم. حالا نگاشت $w_2=\frac{i-w_1}{i+w_1}=-\frac{w_1-i}{w_1+i}$ یک نگاشت موبیوس است که نقطه‌ی $+i$ را به مبدأ می‌نگارد.

در واقع w_2 را می‌توان به شکل $w_2=e^{i\pi}\frac{w_1-i}{w_1-\bar{i}}$ نوشت که فرم استاندارد موبیوس است. این نگاشت نیم‌صفحه‌ی $\mathrm{Im}\,w_1\ge 0$ را به درون و روی دایره‌ی واحد می‌نگارد.



مثال ۳۳: ناحیه D در صفحه z، تحت کدام یک از نگاشت‌های زیر به ربع اول صفحه w تبدیل می‌شود؟



۱) $e^{\frac{\pi}{2}i}\frac{(z-2)^4+i}{(z-2)^2-i}$
۲) $e^{-\frac{\pi}{2}i}\frac{(z-2)^4+1}{(z-2)^4-1}$
۳) $e^{\frac{\pi}{2}i}\frac{(z+2)^4+i}{(z-2)^2-i}$
۴) $e^{-\frac{\pi}{2}i}\frac{(z-2)^4-1}{(z-2)^4+1}$

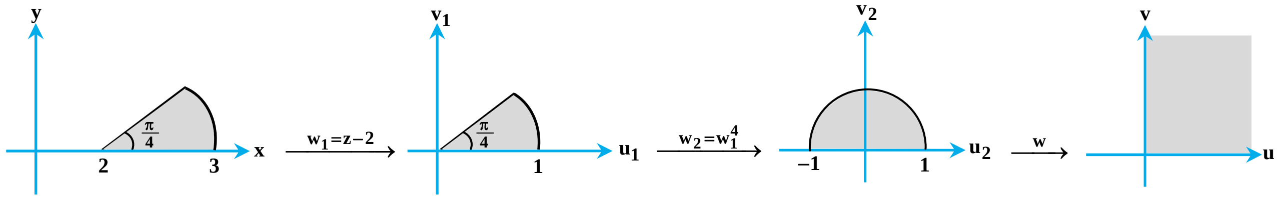
پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که می‌دانیم نگاشتی مانند $w=e^{i\pi}(\frac{z-i}{z+i})$ و به عبارت دیگر $w=-(\frac{z-i}{z+i})$، نیم صفحه‌ی بالایی را به داخل دایره واحد می‌نگارد، به نظر می‌رسد در این تست باید روش معکوس را طی کنیم، یعنی دنبال نگاشتی باشیم که دایره واحد را به نیم صفحه‌ی بالایی بنگارد.

$$w=-(\frac{z-i}{z+i})\Rightarrow wz+iw=-z+i\Rightarrow z(w+1)=-i(w-1)\Rightarrow z=-i(\frac{w-1}{w+1})\xrightarrow{\text{معکوس}}w=-i(\frac{z-1}{z+1})$$

پس تحت این نگاشت دایره یکه تبدیل به نیم صفحه‌ی بالایی می‌شود. اما صورت سؤال در مورد «ربع اول» صحبت کرده است، برای این که ببینیم این نگاشت نیم‌دایره بالایی را به ربع اول صفحه می‌نگارد یا نیم‌دایره پایینی را، می‌توانیم یک نقطه مانند $z=i$ را از نیم‌دایره بالایی انتخاب کنیم:

$$w=-i(\frac{i-1}{i+1})=-i[\frac{(i-1)(i-1)}{i^2-1}]=-i(\frac{i^2+1-2i}{-2})=\frac{i}{2}(-1+1-2i)=-i^2=+1$$

پس هر نقطه بر روی نیم‌دایره بالایی بر روی ربع اول نگاشته می‌شود. لذا باید اول صورت مسئله را به یک نیم دایره (بالایی) تبدیل کنیم: برای این کار ابتدا با نگاشت $w_1=z-2$ ناحیه را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و سپس با $w_2=w_1^4$، ناحیه را به نیم دایره بالایی تبدیل می‌کنیم.



پس نگاشت به شکل $w=-i[\frac{(z-2)^4-1}{(z-2)^4+1}]$ و چون $e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$ لذا نگاشت به صورت $w=e^{-\frac{\pi}{2}i}[\frac{(z-2)^4-1}{(z-2)^4+1}]$ می‌باشد.

مثال ۳۴: تبدیل خطی کسری که به ترتیب $-i$، 0 و i را روی 0، ∞ و -1 می‌نگارد، کدام است؟

۱) $w=\frac{z-i}{2z}$ ۲) $w=\frac{z-i}{-2z}$ ۳) $w=\frac{z+i}{2z}$ ۴) $w=\frac{z+i}{-2z}$

پاسخ : گزینه «۴» دقت شود اگر $z=i$ را در گزینه‌ها قرار دهیم باید $w=-1$ حاصل شود که فقط گزینه (۴) این شرایط را دارد.

مثال ۳۵: نگاشتی که نقاط $z_1=0$، $z_2=1$ و $z_3=\infty$ را به ترتیب به نقاط $w_1=-1$، $w_2=-i$ و $w_3=1$ می‌نگارد، دایره $|z|=1$ را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) تمام محور حقیقی ۲) قسمت منفی محور موهومی ۳) تمام محور موهومی ۴) قسمت مثبت محور موهومی

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا با استفاده از رابطه‌ی بیان شده در بالا، تبدیل $w=f(z)$ را بدست می‌آوریم:

$$(\frac{w-w_1}{w-w_3})(\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1})=(\frac{z-z_1}{z-z_3})(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1})$$

با جایگذاری مقادیر مورد نظر داریم:

$$\frac{w+1}{w-1}\times\frac{-i-1}{-i+1}=\frac{z-0}{z-\infty}\times\frac{1-\infty}{1-0}$$

در سمت راست دقت کنید که؛ $\frac{1-\infty}{z-\infty}=1$ است (در واقع منظور، $\lim\limits_{z_3\to\infty}\frac{1-z_3}{z-z_3}=1$ است).

در سمت چپ نیز داریم:

$$\frac{-i-1}{-i+1}=-\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=-\frac{2i}{2}=-i$$

در نتیجه خواهیم داشت: $z=-i\frac{w+1}{w-1}$. حال اگر $|z|=1$ باشد داریم:

$$|-i\frac{w+1}{w-1}|=1\Rightarrow|w+1|=|w-1|\Rightarrow(u+1)^2+v^2=(u-1)^2+v^2\Rightarrow 2u=-2u\Rightarrow u=0$$

در صفحه‌ی w خط $u=0$ همان محور موهومی است.

مثال ۳۶: تابع $H(u,v)=1+\frac{2}{\pi}\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}(\frac{w+1}{w-1})]$، در صفحه $u-v$ در ناحیه‌ی بالای محور $u=0$، همساز است. اگر $w=f(z)$ نگاشتی خطی ـ کسری باشد که سه نقطه‌ی $w_1=-1$، $w_2=0$ و $w_3=1$ را به ترتیب به سه نقطه نظیر آن در صفحه z یعنی $z_3=1$، $z_2=-i$ و $z_1=-1$ بنگارد، آن‌گاه معادله‌ی $H(u,v)$ در صفحه‌ی $x-y$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{2}{\pi}[\arg(1+z)-\arg(1-z)]$ ۲) $\frac{1}{\pi}[\arg(1+z)-\arg(1-z)]$ ۳) $\frac{2}{\pi}[\arg(1-z)-\arg(1+z)]$ ۴) $\frac{1}{\pi}[\arg(1-z)-\arg(1+z)]$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا ضابطه‌ی نگاشت خطی ـ کسری گفته شده را می‌نویسیم:

$$\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}=\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}\Rightarrow(\frac{z+1}{z-1})(\frac{-i-1}{-i+1})=(\frac{w+1}{w-1})(\frac{0-1}{0+1})\Rightarrow\frac{w+1}{w-1}=(\frac{z+1}{z-1})(\frac{1+i}{1-i})$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه داده شده، خواهیم داشت:

$$H(u,v)=1+\frac{2}{\pi}\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}\frac{(z+1)}{(z-1)}\cdot\frac{(1+i)}{(1-i)}]=1+\frac{2}{\pi}\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}(\frac{z+1}{z-1})+\mathrm{Ln}(\frac{1+i}{1-i})]$$

با توجه به رابطه $\frac{1+i}{1-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ خواهیم داشت:

$$H(u,v)=1+\frac{2}{\pi}\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}(\frac{z+1}{z-1})+i\frac{\pi}{2}]=2+\frac{2}{\pi}\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}]$$

بدیهی است که $\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}]$ برابر آرگومان عدد مختلط $\frac{z+1}{z-1}$ می‌باشد و لذا داریم:

$$H(u,v)=2+\frac{2}{\pi}\arg(\frac{z+1}{z-1})=2+\frac{2}{\pi}[\arg(z+1)-\arg(z-1)]$$

با توجه به رابطه $\arg(z-1)=\pi+\arg(1-z)$ خواهیم داشت:

$$H(u,v)=2+\frac{2}{\pi}[\arg(z+1)-\pi-\arg(1-z)]=\frac{2}{\pi}[\arg(1+z)-\arg(1-z)]$$

مثال ۳۷: تصویر قرص بسته $|z-۲|\le ۱$ تحت نگاشت $w=(۱+i)z+۲i$ کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز $۲+۴i$ و شعاع $\sqrt{۲}$
۲) دایره‌ای به مرکز $۲+۲i$ و شعاع $\sqrt{۲}$
۳) دایره‌ای به مرکز $۲+۴i$ و شعاع ۲
۴) دایره‌ای به مرکز $۲+۲i$ و شعاع ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به دست آوردن ناحیه موردنظر توسط نگاشت فوق به صورت هندسی با توجه به مطالبی که در مورد نگاشت $w=az+b$ گفتیم، ممکن است، اما به لحاظ جبری به دست آوردن ناحیه راحت‌تر است:

$$w=(۱+i)z+۲i\ \Rightarrow z=\frac{۱}{۱+i}(w-۲i)$$

$$|z-۲|\le ۱\ \Rightarrow \left|\frac{۱}{۱+i}(w-۲i)-۲\right|\le ۱\ \Rightarrow |w-۲i-۲-۲i|\le|۱+i|\ \Rightarrow |\mathbf{w-۲-۴i}|\le\sqrt{۲}$$

که معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $۲+۴i$ و شعاع $\sqrt{۲}$ می‌باشد.

مثال ۳۸: تصویر ناحیه $\{z: |z-۱|<۱\ ,\ \mathrm{Im}(z)>۰\}$ تحت تبدیل $w=\frac{z}{z-۲}$ کدامیک از نواحی زیر است؟

۱) ربع اول
۲) ربع دوم
۳) ربع سوم
۴) ربع چهارم

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$w=\frac{z}{z-۲}\ \Rightarrow zw-۲w-z=۰\ \Rightarrow z(w-۱)=۲w\ \Rightarrow z=\frac{۲w}{w-۱}\ \Rightarrow z-۱=\frac{w+۱}{w-۱}\xrightarrow{|z-۱|<۱}\left|\frac{w+۱}{w-۱}\right|<۱\ \Rightarrow |w+۱|<|w-۱|$$

با توجه به نامساوی فوق ملاحظه می‌گردد نقاطی مدنظر هستند که فاصله آنها تا نقطه $u=-۱$ کوچکتر از فاصله این نقاط تا نقطه $u=۱$ باشد، پس ربع دوم و یا سوم می‌تواند جواب باشد. از طرفی داریم:

$$\mathrm{Im}(z)>۰\ \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{۲w}{w-۱}\right)>۰\ \Rightarrow \mathrm{Im}\left[\frac{w(\bar{w}-۱)}{|w-۱|^۲}\right]>۰ \Rightarrow \mathrm{Im}[|w|^۲-w]>۰\ \Rightarrow \mathrm{Im}(w)<۰$$

و لذا ناحیه سوم، جواب است.

مثال ۳۹: نقش ناحیه محصور بین دوایر $|z-۱|=۱$ و $|z-i|=۱$ توسط نگاشت $w=\frac{۱}{z}$ کدام است؟

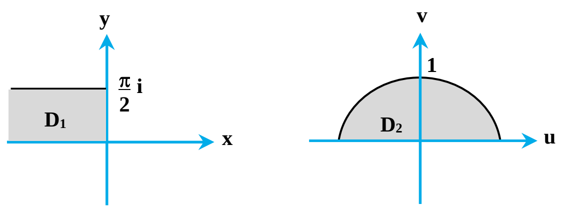
۱) $u>\frac{۱}{۲}$ و $v>\frac{۱}{۲}$
۲) $u>\frac{۱}{۲}$ و $v<-\frac{۱}{۲}$
۳) $u<\frac{۱}{۲}$ و $v<-\frac{۱}{۲}$
۴) $u<\frac{۱}{۲}$ و $v>-\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$w=\frac{۱}{z}\ \Rightarrow z=\frac{۱}{w}\ \Rightarrow z-۱=\frac{۱-w}{w}\ \text{و}\ z-i=\frac{۱-iw}{w}\ \Rightarrow \left|\frac{w-۱}{w}\right|<۱\ \text{و}\ \left|\frac{w+i}{w}\right|<۱\ \Rightarrow |w-۱|<|w|\ \text{و}\ |w+i|<|w|$$

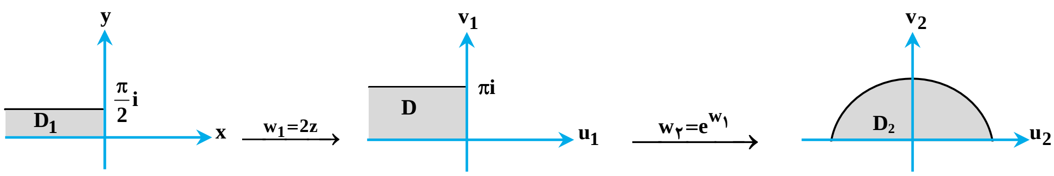
$|w-۱|<|w|$ یعنی نقاطی که فاصله آنها تا نقطه $u=۱$ کمتر از فاصله آنها تا نقطه $u=۰$ باشد، که واضح است باید $u>\frac{۱}{۲}$ باشد و به همین ترتیب از نامساوی $|w+i|<|w|$ نامساوی $v<-\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود.

مثال ۴۰: تبدیلی که حوزه $D_۱$ را بر روی حوزه $D_۲$ می‌نگارد، کدام است؟



۱) $w=e^z$
۲) $w=z+\frac{۱}{z}$
۳) $w=\frac{\pi i}{\pi i-۴z}$
۴) $w=e^{۲z}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا تحت تبدیل $w_۱=۲z$ ناحیه $D_۱$ به ناحیه D و سپس با تبدیل $w_۲=e^{w_۱}$ ناحیه D به ناحیه $D_۲$ تبدیل می‌شود.



مثال۴۱: تبدیلی که قطاع $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ از دایره‌ی واحد در صفحه z را به روی نیمه بالایی صفحه w می‌نگارد کدام است؟

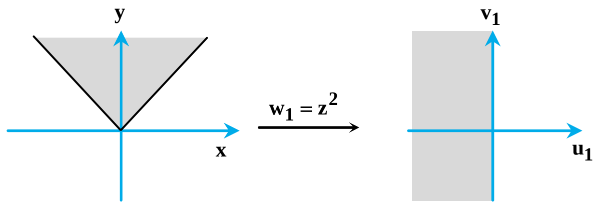
۱) $w = -(\frac{z^3+1}{z^3-1})^2$ ۲) $w = (\frac{z^3-1}{z^3+1})^3$ ۳) $w = (\frac{z^3+1}{z^3-1})^3$ ۴) $w = -(\frac{z^3-1}{z^3+1})^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» این قطاع ابتدا به وسیله تبدیل $w_1 = z^3$ به روی نیم‌دایره نگاشته می‌شود و سپس توسط تبدیل $w_2 = -i\frac{w_1-1}{w_1+1}$ این ناحیه به روی ربع اول و در نهایت توسط تبدیل $w_3 = (w_2)^2$ ناحیه به نیم‌صفحه بالایی صفحه w نگاشته می‌شود.

مثال۴۲: نگاشتی که ناحیه $y \geq |x|$ را به داخل دایره یکه می‌نگارد، کدام است؟

۱) $w = \frac{1+z^2}{-2i(1-z^2)}$ ۲) $w = \frac{1+z^2}{i(1-z^2)}$ ۳) $w = \frac{1-z^2}{i(1+z^2)}$ ۴) $w = \frac{1-z^2}{2i(1+z^2)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها ابتدا اثر نگاشت $w_1 = z^2$ را بررسی می‌کنیم:



حالا طبق یک نگاشت خطی ـ کسری باید نیم‌صفحه چپ به دایره واحد نگاشت شود. می‌توانیم ابتدا با دوران $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1 = iw_1$ ناحیه را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم تا نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Im} w_1 < 0$ بدست آید. سپس از نگاشت موبیوس استفاده می‌کنیم که نیم‌صفحه‌ی پایینی را به درون دایره‌ی واحد تصویر کند. این نگاشت می‌تواند به شکل $w_3 = e^{i\alpha}\frac{w_2 - z_0}{w_2 - \bar{z}_0}$ باشد که $\operatorname{Im} z_0 < 0$ است. با انتخاب $z_0 = -i$ خواهیم داشت:

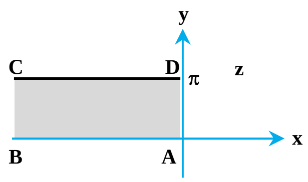
$$w_3 = e^{i\alpha}\frac{w_2+i}{w_2-i} = e^{i\alpha}\frac{iw_1+i}{iw_1-i} = e^{i\alpha}\frac{w_1+1}{w_1-1} = e^{i\alpha}\frac{z^2+1}{z^2-1}$$

با توجه به دلخواه بودنِ α می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که: $e^{i\alpha} = \frac{1}{-i} = i$ شود. به ازای $\alpha = \frac{\pi}{2}$ داریم: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ بنابراین: $w_3 = i\frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{z^2+1}{i(1-z^2)}$

مثال۴۳: نگاشتی که ناحیه‌ی بسته $\{z = x+iy : x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ را به روی نیم قرص واحد $\begin{cases} |w| \leq 1 \\ v = \operatorname{Im} w \geq 0 \end{cases}$ بنگارد، کدام است.

۱) $w = e^z$ ۲) $w = e^{-z}$ ۳) $w = 2e^z$ ۴) $w = 2e^{-z}$

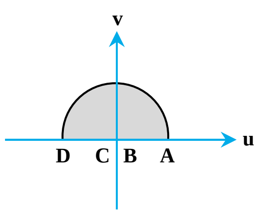
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ناحیه‌ی تعریف شده در صفحه‌ی z، مطابق شکل مقابل است.



می‌دانیم که تحت تبدیل e^z می‌توان نوار نیمه متناهی را به دایره‌ی واحد نگاشت:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y \end{cases}$$

مرز ناحیه‌ی داده شده از یک پاره‌خط و دو نیم‌خط تشکیل شده است، آن‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:



نیم‌خط AB : $x \leq 0, y = 0 \rightarrow \begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$

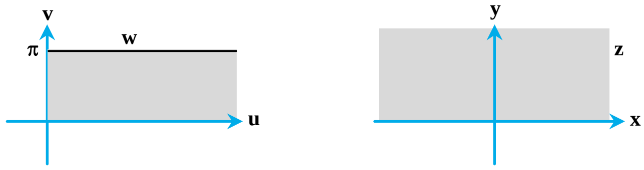
نیم‌خط DC : $x \leq 0, y = \pi \rightarrow \begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ \theta = \pi \end{cases}$

پاره‌خط AD : $x = 0, 0 \leq y \leq \pi \rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

مثال ۴۴: نگاشتی که ناحیه $\{w \mid \mathrm{Re}(w) \geq 0 \ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(w) \leq \pi\}$ در صفحه‌ی w را به ناحیه $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ در صفحه‌ی z می‌نگارد، کدام است؟

۱) $z = \cosh w$ ۲) $z = \sinh w$ ۳) $z = \cos w$ ۴) $z = \sin w$

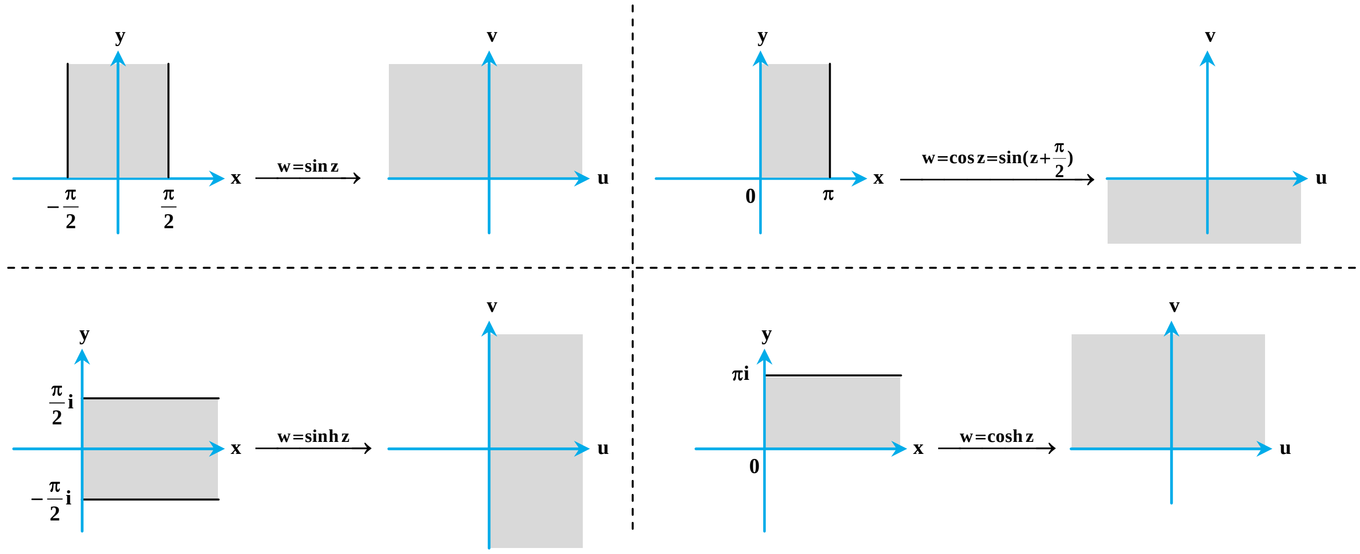
☑ **پاسخ:** گزینه «۱»



با توجه به ضابطه $\cosh w$ بر حسب u و v و همچنین نوشتن $z = x + iy$ داریم: $x = \cosh u.\cos v$, $y = \sinh u.\sin v$

در ناحیه داده شده $0 \leq v \leq \pi$ است و $u \geq 0$. بنابراین $0 \leq \sin v \leq 1$ و $-1 \leq \cos v \leq 1$ و $0 \leq \sinh u < \infty$ و $1 \leq \cosh u < \infty$. به این ترتیب در صفحه‌ی z خواهیم داشت: $-\infty < x < +\infty$ و $0 \leq y < \infty$. در نتیجه نگاشت $z = \cosh w$ نوار داده شده را به نیم صفحه‌ی $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ تصویر می‌کند.

توضیح کامل‌تر: تصویر نوارهای قائم و افقی به عرض یا طول π توسط نگاشت‌های معروف زیر، موضوع برخی از تست‌ها هستند و لازم است آن‌ها را به خاطر داشته باشید. در این نگاشت‌ها دامنه را با z و برد را با w نشان داده‌ایم.



در واقع همان‌طور که قبلاً گفتیم، می‌توانید فقط $w = \sin z$ را به خاطر بسپارید و سپس $\cos z$ را به صورت $\sin(z + \frac{\pi}{2})$ بررسی کنید. $\sinh z$ و $\cosh z$ همان رفتار توابع مثلثاتی را برای نوارهای افقی ارائه می‌دهند.

مثال ۴۵: ناحیه‌ای از صفحه z که تصویرش تحت تبدیل $w = z^2$ حوزه‌ای مستطیلی در صفحه w و محدود به خطوط $u = 1$، $u = 2$، $v = 1$ و $v = 2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\begin{cases} 2 \leq x^2 - y^2 \\ 0 \leq xy \leq 1 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2 \\ 1 \leq xy \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq xy \leq 1 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} 0 \leq x^2 - y^2 \leq 1 \\ xy \geq 2 \end{cases}$

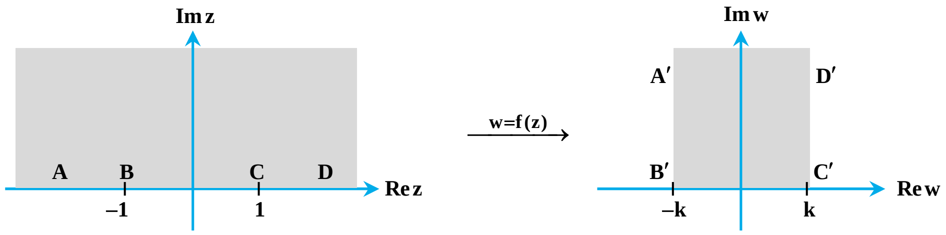
☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

اکنون در صفحه‌ی w می‌خواهیم $1 \leq u \leq 2$ و $1 \leq v \leq 2$ باشد. پس در صفحه‌ی z داریم:

$$\begin{cases} 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2 \\ 1 \leq 2xy \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq xy \leq 1 \end{cases}$$

مثال ۴۶: تبدیلی که نگاشت نشان داده شده در شکل زیر را انجام می‌دهد. کدام است؟



۱) $w=\frac{2k}{\pi}\text{Arcsin}\,z$

۲) $w=\frac{4k}{\pi}\text{Arctg}\,z$

۳) $w=-\frac{2k}{\pi}\text{Arcsin}\,z$

۴) $w=-\frac{4k}{\pi}\text{Arctg}\,z$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به نگاشت کریستوفل ـ شوارتز، برای این سؤال داریم: $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\pi}{2}\ ,\ x_1=-1\ ,\ x_2=1$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی نگاشت، نتیجه می‌شود:

$$f(z)=A\int(z+1)^{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}}(z-1)^{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}}dz+B=A\int(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}dz+B=A\int(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}dz+B=A\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}+B=A(\arcsin z)+B$$

با توجه به متقارن بودن شکل واضح است که $z=0$ باید به $w=0$ نگاشته شود، در نتیجه داریم: $f(0)=0\Rightarrow A[\arcsin(0)]+B=0\Rightarrow B=0$

همچنین واضح است نقطه $x=-1$ به نقطه‌ی k تبدیل شده، پس: $f(-1)=-k$ و داریم: $f(-1)=A[\arcsin(-1)]=A(-\frac{\pi}{2})$

بنابراین $A(-\frac{\pi}{2})=-k$ و لذا $A=\frac{2k}{\pi}$. پس تبدیل موردنظر عبارت است از: $f(z)=\frac{2k}{\pi}\arcsin z$

مثال ۴۷: نگاشت $w=\int\frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{4}}}$، ناحیه $\text{Im}\,z>0$ را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع

۲) مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۳) مربع

۴) مستطیل

پاسخ: گزینه «۲» با تجزیه‌ی مخرج می‌توانیم نگاشت داده شده را به این صورت بنویسیم:

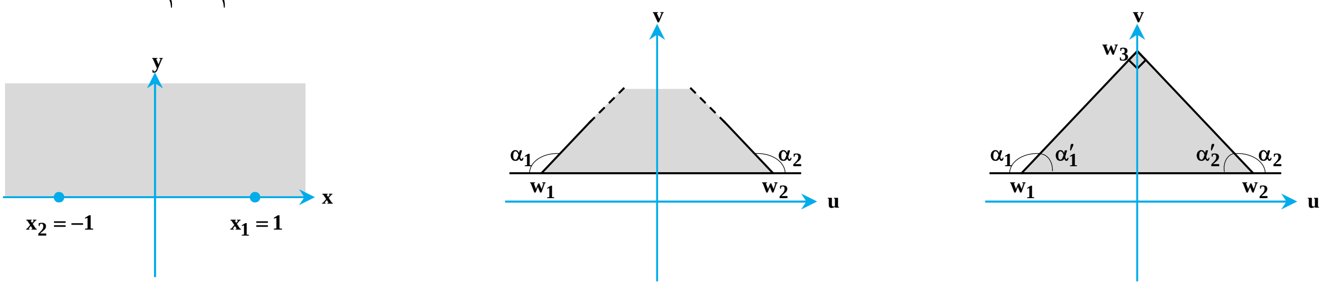
$$w=\int\frac{dz}{(1-z)^{\frac{3}{4}}(1+z)^{\frac{3}{4}}}=\int(1-z)^{-\frac{3}{4}}(1+z)^{-\frac{3}{4}}dz$$

برای آن‌که به فرم استاندارد نگاشت کریستوفل ـ شوارتز برسیم، لازم است عوامل زیر انتگرال به صورت $(z-x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(z-x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}$ در آیند.

بنابراین از -1 در پرانتز اول فاکتور می‌گیریم. $w=(-1)^{-\frac{3}{4}}\int(z-1)^{-\frac{3}{4}}(z+1)^{-\frac{3}{4}}dz$

این یک نگاشت کریستوفل ـ شوارتز است که عدد ثابت $c=(-1)^{-\frac{3}{4}}$ هم در آن ضرب شده است. با ضرب یک عدد ثابت، نوع چند ضلعی تغییر نخواهد کرد. بنابراین این ضریب ثابت تأثیری بر جواب ما ندارد. این نگاشت نقاط $x_1=1$ و $x_2=-1$ را بـه نقـاط $w_1=f(1)$ و $w_2=f(-1)$ مـی‌نگـارد. بنـابراین یـک چند ضلعی ایجاد می‌کند که w_1 و w_2 دو تا از رئوس آن هستند. رأس دیگر ممکن است در بی‌نهایت باشد یا یک نقطه از صفحه‌ی w باشد. این بستگی به زوایای داخلی در نقاط w_1 و w_2 دارد. از طرفی داریم: $-\frac{\alpha_1}{\pi}=-\frac{3}{4}$ و $-\frac{\alpha_2}{\pi}=-\frac{3}{4}$ به عبارتی $\alpha_1=\alpha_2=\frac{3\pi}{4}$ است.

α_1 و α_2 زوایای خارجی مربوط به آن چند ضلعی در نقاط w_1 و w_2 هستند. بنابراین زوایای داخلی برابرند با: $\alpha'_1=\alpha'_2=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$



بنابراین تنها رأس باقی مانده از امتداد اضلاع زوایای α'_1 و α'_2 بدست می‌آید. با توجه به آن‌که $\alpha'_1=\alpha'_2=\frac{\pi}{4}$ است، زاویه‌ی سوم ۹۰ درجـه خواهـد بـود و یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود. در شکل بالا ابتدا w_1 و w_2 و زوایای خارجی را نشان داده‌ایم، سپس بـا امتـداد اضـلاع بـه رأس سـوم رسیده‌ایم.

توجه: برای پاسخ دادن به سؤال نیازی نیست محل دقیق w_1 و w_2 مشخص شود.

مثال ۴۸: نقاط ثابت نگاشت $w=\dfrac{۲iz-۱}{z+۲i}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-i$ و ۱ ۳) $\pm i$ ۴) i و -۱

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به توضیحات فوق داریم:

$$\frac{۲iz-۱}{z+۲i}=z\Rightarrow z^۲+۲iz=۲iz-۱\Rightarrow z^۲=-۱\Rightarrow z=\pm i$$

مثال ۴۹: تبدیل یافته‌ی دایره $z=\cos t+i\sin t$، $(۰\le t<۲\pi)$ تحت نگاشت $w=\dfrac{z}{\bar{z}}$ کدام است؟

۱) دایره به شعاع ۲ و مرکز $(۰,-۱)$
۲) دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و مرکز مبدأ
۳) دایره به شعاع یک و مرکز مبدأ
۴) دایره به شعاع یک و مرکز $(۰,-۱)$

پاسخ : گزینه «۳» از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. برای دایره‌ی $z=\cos t+i\sin t$ داریم $z=e^{it}$. با جایگذاری در w داریم:

$$w=\frac{z}{\bar{z}}=\frac{e^{it}}{e^{-it}}=e^{i۲t}$$

می‌دانیم منحنی $w=e^{i۲t}$ دایره‌ی واحد را در صفحه‌ی w نشان می‌دهد. ($|w|=۱$).

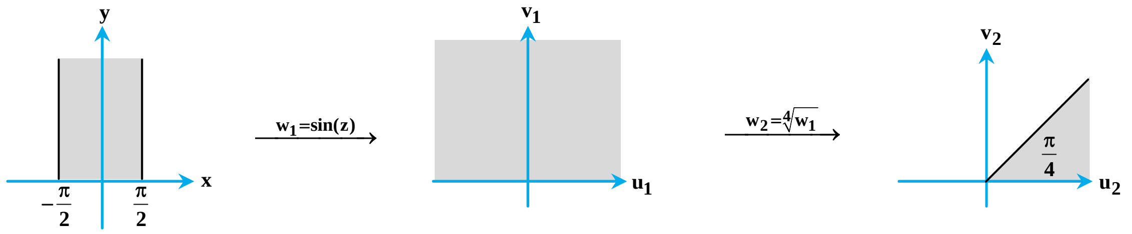
مثال ۵۰: نوار نیمه متناهی $\{y\ge ۰\ ,\ |x|\le\frac{\pi}{۲}\}$، تحت نگاشت $w=\sqrt[۴]{\sin z}$ به کدام ناحیه نگاشته می‌شود؟

(با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه Berkeley)

۱) قسمتی از ربع اول که بالای خط $u=v$ قرار دارد.
۲) قسمتی از ربع اول که زیر خط $u=v$ قرار دارد.
۳) قسمتی از ربع اول که بالای خط $v=u+۱$ قرار دارد.
۴) قسمتی از ربع اول که زیر خط $v=u+۱$ قرار دارد.

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تأثیر نگاشت $\sin(z)$ و سپس $\sqrt[۴]{\sin z}$ را بررسی می‌کنیم. ناحیه‌ی داده شده دارای بخش‌هایی در ربع اول و دوم است.

در این ناحیه $\frac{-\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}$ و $y\ge ۰$ است.



بخش‌های حقیقی و موهومی $\sin z$ چنین هستند:

$v=\mathrm{Im}(\sin z)=\cos x\sinh y$ $u=\mathrm{Re}(\sin z)=\sin x\cosh y$

در ناحیه‌ی داده شده داریم $-۱\le\sin x\le ۱$ و $۰\le\cos x\le ۱$ و $۱\le\cosh y<\infty$ و $۰\le\sinh y<\infty$. پس خواهیم داشت $-\infty<u<+\infty$ و $۰\le v<\infty$.

پس نگاشت $w_۱=\sin z$ ناحیه داده شده را به نیم صفحه‌ی بالایی $v\ge ۰$ تصویر می‌کند. در این ناحیه $۰\le\theta\le\pi$ و $۰\le r<\infty$ است. اکنون نگاشت $w_۲=\sqrt[۴]{w_۱}$ این ناحیه را به ناحیه‌ی $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ و $۰\le r<\infty$ تصویر خواهد کرد. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مثال ۵۱: تصویر ناحیه $۲\mathrm{Im}\,z>\mathrm{Ln}۲$ تحت نگاشت $w=e^{iz}\sin z$ کدام است؟

۱) درون دایره‌ای به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$
۲) درون دایره‌ای به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۴}$
۳) درون دایره‌ای به مرکز $(۰,\frac{۱}{۲})$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$
۴) درون دایره‌ای به مرکز $(۰,\frac{۱}{۲})$ و شعاع $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا نگاشت داده شده را به شکل مقابل باز نویسی می‌کنیم:

$$w=e^{iz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}\right)\Rightarrow w=\frac{e^{۲iz}}{۲i}-\frac{۱}{۲i}$$

با توجه به نگاشت فوق که در واقع ترکیبی از چند نگاشت است، ابتدا ناحیه‌ی $\mathrm{Im}\,z>\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۲$، به صورت زیر تحت نگاشت $w_۱=e^{۲iz}$ به ناحیه‌ی $|w_۱|<\frac{۱}{۲}$ تبدیل می‌شود:

$$w_۱=e^{۲iz}=e^{۲i(x+iy)}=e^{-۲y}.e^{۲ix}\Rightarrow|w_۱|=e^{-۲y}$$

چون ناحیه داده شده به صورت $\operatorname{Im} z > \frac{1}{2}\operatorname{Ln}2$ و یا $y > \frac{1}{2}\operatorname{Ln}2$ می‌باشد، بنابراین داریم:
$$|w_1| < e^{-2\times\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2} \Rightarrow |w_1| < e^{-\operatorname{Ln}2} \Rightarrow |w_1| < \frac{1}{2}$$

از طرفی تصویر ناحیه‌ی $|w_1| < \frac{1}{2}$ تحت نگاشت $w_2 = \frac{1}{2i}w_1$ به صورت مقابل است:
$$|w_1| = |2iw_2| < \frac{1}{2} \Rightarrow |w_2| < \frac{1}{4}$$

$$w = w_2 - \frac{1}{2i} \Rightarrow w + \frac{1}{2i} = w_2 \xrightarrow{\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}} w - \frac{i}{2} = w_2 \Rightarrow |w_2| = |w - \frac{i}{2}| \xrightarrow{|w_2| < \frac{1}{4}} |w - \frac{1}{2}i| < \frac{1}{4}$$

که معادله دایره‌ای به شعاع $(0, \frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{4}$ است.

تذکر: در این تست با توجه به «گزینه‌ها» چون تمام تصویرهای نهایی دایره می‌باشند، فقط اندازه‌هایی که تغییر می‌کنند را در نگاشت‌ها مورد بررسی قرار دادیم و از دوران و چرخش‌هایی که نگاشت‌ها ایجاد می‌کردند، صرف‌نظر کردیم. (دایره را هر چقدر بچرخانیم باز هم دایره است!)

مثال ۵۲: **دیسک $|z| < 1$، تحت نگاشت $w = (\frac{1-z}{1+z})^{-2}$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟** (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه Stanford)

۱) نیم‌صفحه بالایی به جز نیم خط $u \le 0, v = 0$

۲) تمام صفحه به جز نیم خط $u \le 0, v = 0$

۳) نیم صفحه پایینی به جز نیم خط $u \ge 0, v = 0$

۴) تمام صفحه به جز نیم خط $u \ge 0, v = 0$

پاسخ: گزینه «۲» می‌توانیم با معکوس کردن کسر، علامت منفی را از توان حذف کنیم:
$$w = (\frac{1+z}{1-z})^2$$

ابتدا بخش‌های حقیقی و موهومی $w_1 = \frac{1+z}{1-z}$ را مشخص می‌کنیم.
$$w_1 = \frac{(1+x)+iy}{(1-x)-iy} \times \frac{(1-x)+iy}{(1-x)+iy} = \frac{(1-x^2-y^2)+2iy}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(w_1) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2-2x+1} \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \operatorname{Re} w_1 = \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos\theta+1} \\ \operatorname{Im}(w_1) = \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2-2x+1} \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \operatorname{Im} w_1 = \frac{2r\sin\theta}{r^2-2r\cos\theta+1} \end{cases}$$

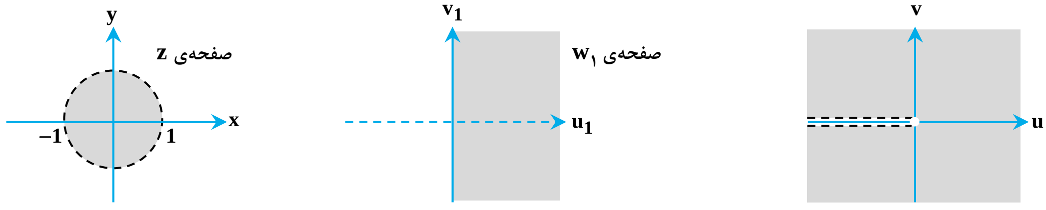
حالا توجه کنید که در دیسک $|z| < 1$ داریم: $0 \le r < 1$ و $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$. در مخرج کسرهای فوق عبارت $r^2 - 2r\cos\theta + 1$ را داریم. این عبارت یک چند جمله‌ای درجه دو بر حسب r است. $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 \le 0$ است. بنابراین، این چند جمله‌ای، تغییر علامت نمی‌دهد. به ازای $r = 0$ مقدارش $+1$ است، پس همواره نامنفی خواهد بود: $0 \le r^2 - 2r\cos\theta + 1$

همچنین در صورت کسرها $0 < 1 - r^2 \le 1$ و $-2 \le 2r\sin\theta \le 2$ است. به این ترتیب، $0 < \operatorname{Re} w_1 < \infty$ و $-\infty < \operatorname{Im} w_1 < +\infty$ خواهد بود. پس نگاشت $w_1 = \frac{1+z}{1-z}$ ناحیه‌ی $|z| < 1$ را به نیم‌صفحه‌ی $0 < \operatorname{Re} w_1$ در صفحه‌ی w_1 می‌نگارد.

باید ببینیم نگاشت $w = w_1^2$ این نیم صفحه را به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌کند. در صفحه‌ی w_1 داریم $-\frac{\pi}{2} < \arg w_1 < \frac{\pi}{2}$ و $0 \le |w_1| < \infty$.

نگاشت $w = w_1^2$ آرگومان را دو برابر می‌کند و اندازه‌ها را به توان ۲ می‌رساند. بنابراین در صفحه‌ی w داریم:
$$\begin{cases} -\pi < \arg w = 2\arg w_1 < \pi \\ 0 \le |w| = |w_1|^2 < \infty \end{cases}$$

به عبارتی در صفحه‌ی w داریم $-\pi < \theta < \pi$. نیم‌خطِ $\theta = \pi$ بخشی از تصویر نیست. روی این نیم‌خط داریم $v = 0$ و $u \le 0$.



$(|z| < 1)$ — $0 < \operatorname{Re} w_1 < \infty$, $-\infty < \operatorname{Im} w_1 < +\infty$ — $-\pi < \arg w < \pi$

می‌بینیم که همه‌ی صفحه‌ی w به جز نیم‌خطِ $(u \le 0, v = 0)$ بدست آمده است.

مثال ۵۳: تحت تبدیل $w = i\operatorname{Arctg}\frac{1-z}{1+z}$ درون و روی دایره واحد از صفحه z به کدام ناحیه در صفحه w تصویر می‌شود؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Im} w \le k\pi+\pi$ ۲) $2k\pi+\pi \le \operatorname{Im} w \le 2k\pi+2\pi$

۳) $2k\pi \le \operatorname{Im} w \le 2k\pi+\pi$ ۴) $k\pi \le \operatorname{Im} w \le k\pi+\frac{\pi}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا بررسی می‌کنیم تحت نگاشت $w_1 = \frac{1-z}{1+z}$، ناحیه $|z| \le 1$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود:

$$w_1 = \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow w_1 + w_1 z = 1 - z \Rightarrow z(w_1+1) = 1 - w_1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1-w_1}{1+w_1} \xrightarrow{|z|\le 1} \left|\frac{1-w_1}{1+w_1}\right| \le 1 \Rightarrow |1-w_1| \le |1+w_1| \Rightarrow (1-u_1)^2 + v_1^2 \le (1+u_1)^2 + v_1^2$$

$$\Rightarrow 1 + u_1^2 - 2u_1 \le 1 + u_1^2 + 2u_1 \Rightarrow 4u_1 \ge 0 \Rightarrow \mathbf{u_1 \ge 0}$$

پس ناحیه به نیم صفحه سمت راست تبدیل شد. از طرفی از فصل اول کتاب می‌دانیم $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+z}{i-z}$ و بنابراین نگاشت $w = i\operatorname{Arctg} w_1$ به صورت مقابل ساده می‌شود:

$$w = i\left(\frac{i}{2}\right)\operatorname{Ln}\left(\frac{i+w_1}{i-w_1}\right) \Rightarrow \mathbf{w = -\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{i+w_1}{i-w_1}\right)}$$

اما می‌دانیم تصویر $u_1 \ge 0$ تحت نگاشت $\frac{i+w_1}{i-w_1}$، $w_2 =$ نیم صفحه پایینی صفحه یعنی $v_2 \le 0$ می‌باشد (در واقـع بـا محاسـبه‌ی قسـمت موهـومی داریـم $v_2 = \frac{-2u_1}{u_1^2+(1-v_1)^2}$) و حالا باید ببینیم این ناحیه تحت نگاشت $w_3 = \operatorname{Ln} w_2$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود:

$$w_3 = \operatorname{Ln} w_2 \Rightarrow w_2 = e^{w_3} \Rightarrow u_2 + i v_2 = e^{u_3}(\cos v_3 + i \sin v_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = e^{u_3}\cos v_3 \\ v_2 = e^{u_3}\sin v_3 \xrightarrow{v_2 \le 0} e^{u_3}\sin v_3 \le 0 \xrightarrow{e^{u_3}>0} \sin v_3 \le 0 \Rightarrow 2k\pi+\pi \le v_3 \le 2k\pi+2\pi \end{cases}$$

با توجه به نگاشت $w_4 = \frac{1}{2}w_3$، ناحیه به صورت مقابل خواهد شد:

$$k\pi+\frac{\pi}{2} \le v_4 \le k\pi+\pi \Rightarrow k\pi+\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Im} w_4 \le k\pi+\pi$$

اما مواظب باشید علامت منفی را فراموش نکنید و به اشتباه گزینه (۱) را انتخاب کنید؛ چون $w = -w_4$ و ناحیه‌ی فوق با دورانی به اندازه π همراه خواهد بود، بنابراین تصویر نهایی به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{k\pi \le \operatorname{Im} w \le k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۵۴: اگر $D = \{z : -\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Re} z \le \frac{\pi}{2}\}$ نگاشت $w = \tan\frac{z}{2}$ نوار بیکران D را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) $\{w : |w| \le 1\}$ ۲) $\{w : |w| > 1\}$ ۳) $\{w : -\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Re} w \le \frac{\pi}{2}\}$ ۴) $\{w : -1 \le \operatorname{Re} w \le 1\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$w = \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}}{i\left(e^{i\frac{z}{2}} + e^{-i\frac{z}{2}}\right)} = \frac{e^{iz}-1}{i(e^{iz}+1)} \Rightarrow \mathbf{w = -i\left(\frac{e^{iz}-1}{e^{iz}+1}\right)}$$

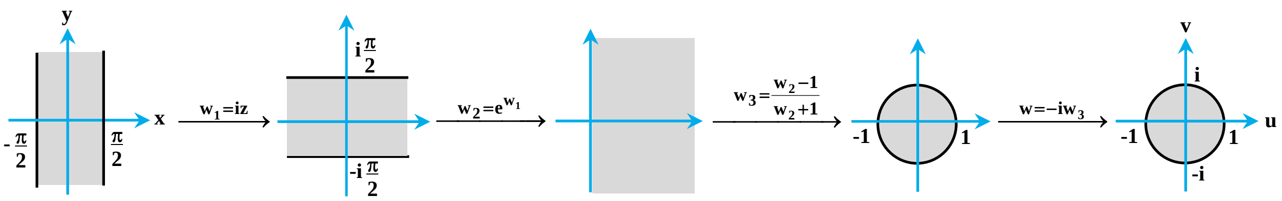
نگاشت $w = \operatorname{tg}\frac{z}{2}$ را می‌توان ترکیبی از نگاشت‌های مقابل در نظر گرفت:

$$w_1 = iz \quad , \quad w_2 = e^{w_1} \quad , \quad w_3 = \frac{w_2-1}{w_2+1} \quad , \quad w = -iw_3$$

همان‌طور که در شکل مشخص است، ابتدا توسط نگاشت $w_1 = iz$، ناحیه‌ی مزبور 90° می‌چرخد و بعد از آن با نگاشت $w_2 = e^{w_1}$ ناحیه به وجود آمده به ربع‌های اول و چهارم به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \Rightarrow e^{-\infty} < r < e^{+\infty} \Rightarrow 0 < r < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

سپس با نگاشت $w_3 = \frac{w_2-1}{w_2+1}$ (همانطور که در متن درس اشاره شد، ربع اول و چهارم، یعنی ناحیه $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ را به دایره واحد تبدیل می‌کند) ناحیه به دایره واحد نگاشته می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w = -iw_3$ دایره فقط می‌چرخد.



مثال ۵۵: **مساحت شکل حاصل از تبدیل دایره یکه، تحت نگاشت $f(z) = z + \frac{z^2}{2}$، در صفحه w چقدر است؟**(از سؤالات پایان ترم دانشگاه Harward)

۱) π ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم D دایره‌ی $x^2 + y^2 \le 1$ و D' تصویر آن باشد. D' مساحت ناحیه‌ی $= \iint_D |f'(z)|^2 \, dydx$

با محاسبه‌ی $|f'(z)|^2$ ادامه می‌دهیم: $|f'(z)|^2 = |1+z|^2 = |1+x+iy|^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2x + 1$

اکنون در مختصات قطبی برای ناحیه‌ی D داریم: $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le r \le 1$. در نتیجه مقدار S در دستگاه قطبی چنین بدست می‌آید:

$$S = \iint_D (x^2 + y^2 + 2x + 1) dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 2r\cos\theta + 1) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{r^4}{4} + \frac{2r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^2}{2}) \Big|_0^1 d\theta$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}) d\theta = [\frac{3}{4}\theta + \frac{2}{3}\sin\theta]_0^{2\pi} = \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

مثال ۵۶: **مساحت تصویر ناحیه‌ی $D = \{x + iy | 0 \le x \le Ln2 \, ; -\frac{\pi}{4} \le y < \frac{\pi}{4}\}$، تحت نگاشت $f(z) = e^{4z}$ کدام است؟**

۱) $(2^8 - 1)\pi$ ۲) $\frac{2^8 - 1}{2}\pi$ ۳) $(2^7 - 1)\pi$ ۴) $\frac{(2^7 - 1)}{2}\pi$

پاسخ: گزینه «۱» نگاشت $f(z) = e^{az}$ در ناحیه‌ی D به شرطی یک‌به‌یک است که بازه‌ی تغییر ay بازه‌ای با طول کمتر از 2π باشد.

برای مثال نگاشت $f(z) = e^{2z}$ در ناحیه‌ی $0 \le y < \pi$ یک‌به‌یک است؛ زیرا در این ناحیه $0 \le 2y < 2\pi$ است. اما این نگاشت در ناحیه‌ی $0 \le y < \frac{3\pi}{2}$ یک‌به‌یک نیست؛ زیرا در این صورت داریم $0 \le 2y < 3\pi$ و طول این بازه بیشتر از 2π است.

در این سؤال چون در ناحیه‌ی D داریم $-\frac{\pi}{4} \le y < \frac{\pi}{4}$ بنابراین $-\pi \le 4y < \pi$ است. بازه‌ی $[-\pi, \pi)$ به طول 2π است، لذا می‌توانیم از انتگرال دوگانه استفاده کنیم.

روش اول: ابتدا $|f'(z)|^2$ را حساب می‌کنیم: $J = |f'(z)|^2 = |4e^{4z}|^2 = 16e^{8x}$

کران‌های x و y در ناحیه‌ی D واضح هستند: $-\frac{\pi}{4} \le y < \frac{\pi}{4}$، $0 \le x \le Ln2$، بنابراین مساحت D' (تصویر D) برابر است با:

$$D' \text{مساحت ناحیه} = \int_0^{Ln2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 16e^{8x} dy\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{Ln2} 16e^{8x} dx = \pi e^{8x} \Big|_0^{Ln2} = (2^8 - 1)\pi$$

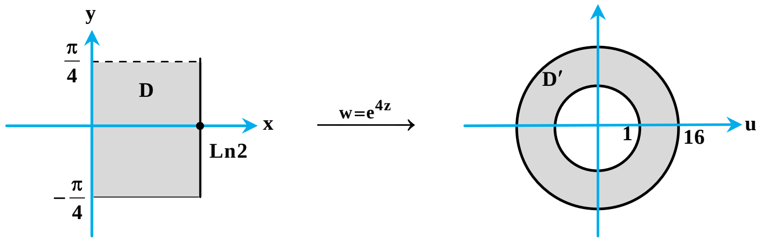
روش دوم: برای نشان دادن اینکه جواب یکسان بدست می‌آید، از روش عادی هم مساحت را حساب می‌کنیم.

یعنی ناحیه‌ی D' را بدست می‌آوریم و مساحت آن را به صورت مستقیم محاسبه می‌کنیم. در نگاشت $f(z) = e^{4z}$ داریم:

$$w = f(z) = e^{4x} e^{4iy} \Rightarrow \begin{cases} r = e^{4x} \\ \theta = 4y \end{cases}$$

در ناحیه‌ی D داریم $0 \le x \le Ln2$ و $-\frac{\pi}{4} \le y < \frac{\pi}{4}$، بنابراین در صفحه‌ی w و آن هم در مختصات قطبی $1 \le r \le 16$ و $-\pi \le \theta \le \pi$ است.

پس ناحیه‌ی D' بین دو دایره‌ی $r = 1$ و $r = 16$ قرار دارد.



پس مساحت D' برابر است با: D' مساحت ناحیه $=$ مساحت دایره‌ای با شعاع ۱۶ $-$ مساحت دایره‌ای با شعاع یک $= (16^2 - 1)\pi = (2^8 - 1)\pi$

مثال ۵۷: نگاشت $w = e^{3z}$ ناحیه‌ی $D = \{x+iy \mid -\infty < x \le 0 \;,\; 0 \le y \le \pi\}$ را به ناحیه‌ی D' در صفحه‌ی w تصویر می‌کند. مساحت D' کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ‏ ۲) π ‏ ۳) 2π ‏ ۴) $\frac{5}{2}\pi$

پاسخ: گزینه «۲»

روش نادرست: در اینجا $0 \le \arg w = 3y \le 3\pi$ است، پس طول این بازه بیشتر از 2π است و نباید انتگرال دوگانه بگیریم. یعنی اگر از راه انتگرال برویم به پاسخ غلط زیر می‌رسیم:

$$\text{مساحت ناحیه } D' = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy$$

$$|f'(z)|^2 = |3e^{3z}|^2 = 9e^{6x}$$

$$\text{مساحت } D' = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\pi} 9e^{6x} dydx = \int_{-\infty}^{0} 9\pi e^{6x} dx = \frac{9\pi}{6} e^{6x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

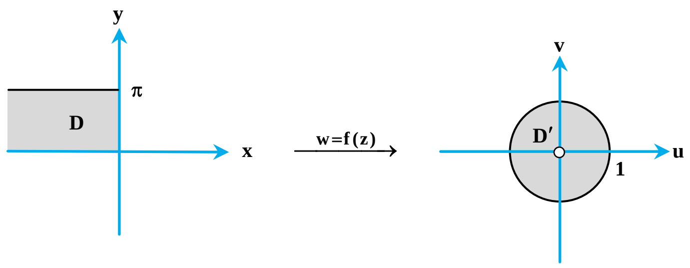
با حل هندسی مسأله خواهیم دید که این پاسخ غلط است.

روش صحیح: راه حل هندسی و بدست آوردن ناحیه D':

$$w = e^{3z} = e^{3x}e^{i3y} \Rightarrow \theta = 3y \;\text{ و }\; r = e^{3x}$$

در ناحیه‌ی D، $-\infty < x \le 0$ و $0 \le y \le \pi$ است. پس در ناحیه‌ی D' داریم:

$$0 \le \theta \le 3\pi \;\text{ و }\; 0 < r \le 1$$



بنابراین D' دیسک واحد است به جز نقطه‌ی $z = 0$ و مساحت آن π خواهد بود.

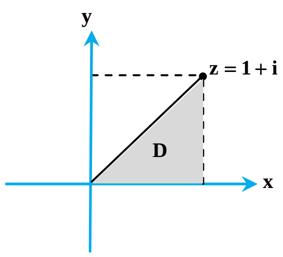
مثال ۵۸: نگاشت $f(x+iy) = x^2 + iy^2$ ناحیه‌ی D را به ناحیه‌ای با کدام مساحت تصویر خواهد کرد؟

۱) ۱

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۲



پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که چون در ناحیه‌ی D، $x \ge 0$ و $y \ge 0$ است، این نگاشت یک به یک است. اگر در ناحیه‌ی D، x یا y تغییر علامت می‌داد دیگر x^2 و y^2 توابعی یک به یک نبودند؛ یعنی $f(z)$ یک به یک نبود (زیرا x^2 با $(-x)^2$ و همچنین y^2 با $(-y)^2$ برابر است). با توجه به آن‌که نوشتن ضابطه‌ی f به صورت $f(z)$ مشکل است، استفاده از فرمول ژاکوبین تنها راه است:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = y^2 \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4xy \Rightarrow \text{مساحت ناحیه } D' = \iint_D 4xy\, dydx$$

ناحیه‌ی D بین خطوط $y = 0$ و $y = x$ در محدوده‌ی $0 \le x \le 1$ قرار دارد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{مساحت ناحیه } D' = \int_0^1\int_0^x 4xy\, dydx = \int_0^1 2xy^2\Big|_0^x dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

مثال ۵۹: نگاشت $w=f(z)$ تحلیلی و برای آن $|f'(z)|=2$ است. اگر دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ در صفحه‌ی z توسط این نگاشت بـه صـفحه‌ی w نگاشته شود، آنگاه مساحت شکل حاصل در صفحه‌ی w چند برابر π است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر $|f'(z)|^2$ عدد ثابت باشد، آنگاه داریم:

$$\text{مساحت ناحیه } D' = \iint_D |f'(z)|^2 dy\,dx = |f'(z)|^2 \iint_D dy\,dx = |f'(z)|^2 \times (\text{مساحت ناحیه } D)$$

در واقع مساحت ناحیه D' از ضرب کردن $|f'(z)|^2$ در مساحت ناحیه D بدست می‌آید: $\text{مساحت ناحیه } D' = 2^2 \times (\text{مساحت ناحیه } D) = 4\times(\pi\times 2^2) = 16\pi$

مثال ۶۰: نگاشت $w=z^2-2z$ نیم‌خط‌های $C_1: x=1, y\geq 0$ و $C_2: y=x-1, x\geq 1$ را به ترتیب به منحنی‌های γ_1 و γ_2 تصویر مـی‌کنـد. زاویـه‌ی بین γ_1 و γ_2 در محل برخورد آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) 0

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: با استفاده از نکته‌ی فوق، توجه کنید که نگاشت $f(z)=z^2-2z$ یک چند جمله‌ای است و همه‌جا مشتق‌پذیر است. محل برخـورد C_1 و C_2 در $x=y=1$ است. پس آن‌ها در نقطه‌ی $z=1$ برخورد می‌کنند. در این نقطه داریم:

$$f'(z)=2z-2 \Rightarrow f'(1)=0$$
$$f''(z)=2 \Rightarrow f''(1)\neq 0$$

چون مشتق مرتبه ۲ غیر صفر و مشتق مرتبه‌ی اول صفر است، بنابراین این نگاشت زاویه‌ی C_1 و C_2 را ۲ برابر خواهد کرد. و چون در صـفحه‌ی z زاویـه‌ی بین دو خط C_1 و C_2، $\frac{\pi}{4}$ است، پس γ_1 و γ_2 زاویه‌ی $\frac{\pi}{2}$ با هم دارند. (به شکل دقت کنید.)

روش دوم: یافتن γ_1 و γ_2 از طریق نگاشت: بخش‌های حقیقی و موهومی w را مشخص می‌کنیم:

$$w=(x+iy)^2-2(x+iy)=(x^2-y^2-2x)+i(2xy-2y)$$

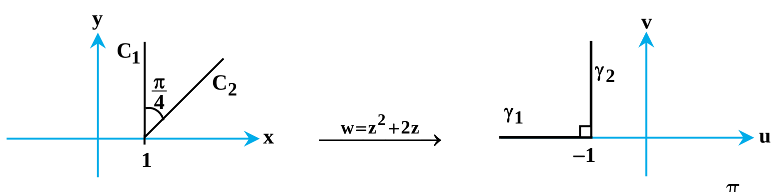
بنابراین $u=x^2-y^2-2x$ و $v=2xy-2y$ است. روی نیم‌خط C_1 داریم $x=1$ و $y\geq 0$. بنابراین داریم:

$$\gamma_1: \begin{cases} u=-1-y^2\leq -1 \\ v=2y-2y=0 \end{cases}$$

پس γ_1 نیم‌خط افقیِ $v=0$ است با شرط $u\leq -1$. روی C_2 داریم: $y=x-1$ و $x\geq 1$. بنابراین داریم:

$$\gamma_2: \begin{cases} u=x^2-(x-1)^2-2x=-1 \\ v=2x(x-1)-2(x-1)=2(x-1)^2\geq 0 \end{cases}$$

پس γ_2 نیم‌خط $u=-1$ است با شرط $v\geq 0$.



γ_1 و γ_2 بر هم عمودند و زاویه‌ی آن‌ها با هم $\frac{\pi}{2}$ است.

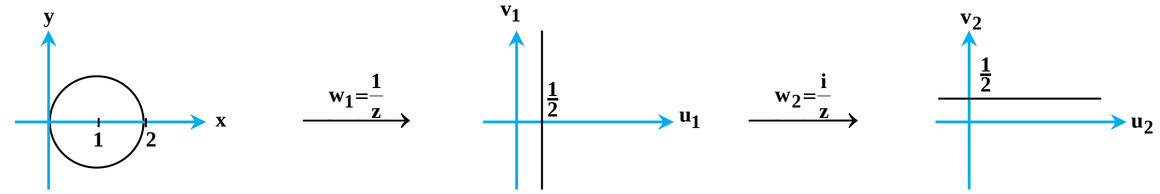
مثال ۶۱: تبدیل $f(z)=\frac{i}{z}$ دایره $|z-1|=1$ را به کدام شکل تبدیل می‌کند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) خط موازی محور موهومی در صفحه $f(z)$
۲) خط موازی محور حقیقی در صفحه $f(z)$
۳) دایره به مرکز $\frac{-i}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$
۴) دایره به مرکز $\frac{i}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$

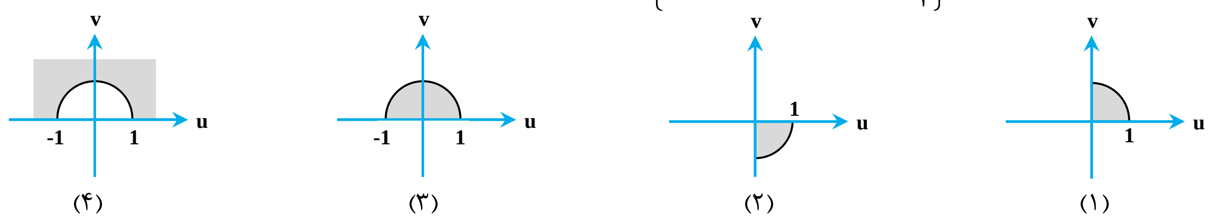
پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:
$$|z-1|=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2x=0$$

با فرض $w=u+iv=\frac{1}{z}$ و با استفاده از روابط $x=\frac{u}{u^2+v^2}$ و $y=-\frac{v}{u^2+v^2}$ رابطه فوق به صورت زیر خواهد شد:
$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}-\frac{2u}{u^2+v^2}=0 \Rightarrow 1-2u=0 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$$

و با تبدیل $w_2=iw_1$ ناحیه به اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران خواهد کرد:



مثال ۶۲: نگاشت $w=e^z$ ناحیه $D=\left\{z \mid Re(z)\le 0, 0\le Im(z)\le \frac{\pi}{2}\right\}$ را به کدام ناحیه تصویر می‌کند؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)



پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:
$$w=e^z=e^{Re(z)+i\,Im(z)} \Rightarrow \begin{cases} |w|=e^{Re(z)}=e^x \xrightarrow{-\infty<x\le 0} |w|\le 1 \\ Arg(w)=Im(z) \Rightarrow 0\le Arg(w)\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

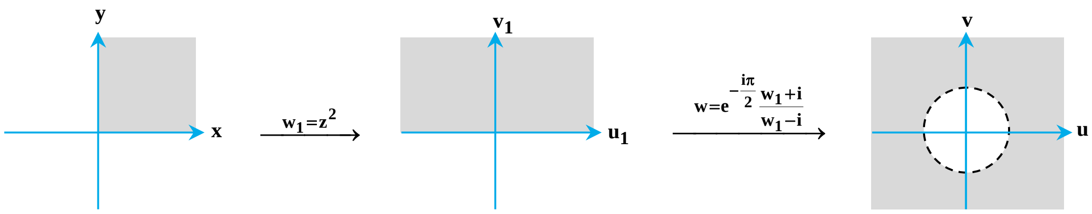
مثال ۶۳: نگاشت $w=\frac{z^2+i}{iz^2+1}$ ، ربع اول صفحهٔ $z(0<x$ و $y>0)$ را به کدام ناحیه از صفحهٔ w تبدیل می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) نیم دایره بالایی از دایرهٔ یکه
۲) خارج دایره یکه
۳) بالای محور u و خارج از نیم‌دایره یکه
۴) داخل دایره یکه

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با فاکتورگیری از i در مخرج کسر خواهیم داشت:
$$w=\frac{1}{i}\frac{z^2+i}{z^2-i}=-i\left(\frac{z^2+i}{z^2-i}\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2+i}{z^2-i}$$

بنابراین نگاشت موردنظر از ترکیب نگاشت‌های $w_1=z^2$ و $w=e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{w_1+i}{w_1-i}$ ساخته شده است. ابتدا نگاشت z^2 با دو برابر کردنِ آرگومان، ربع اول صفحهٔ z را به نیم صفحهٔ بالایی در صفحهٔ w_1 تصویر می‌کند. آن‌گاه نگاشت w که یک نگاشت موبیوس است نیم صفحه بالایی را به خارج از دایرهٔ واحد می نگارد.



دقت کنید که $w=e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{w_1-(-i)}{w_1-(-i)}$ است و همه می‌دانیم $Im(-i)<0$ می‌باشد!

مثال ۶۴: تصویر ناحیه $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$ توسط تابع $w = iz^2$: (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) ربع اول مختصات ۲) ربع دوم مختصات ۳) ربع سوم مختصات ۴) ناحیه بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$0 \le \arg(z) \le \frac{\pi}{4} \xrightarrow{w_1=z^2} 0 \le \arg(w_1) \le \frac{\pi}{2}$$

در نهایت $w_2 = iw_1$ ناحیه را به اندازه $+\frac{\pi}{2}$ دوران می‌دهد لذا $\frac{\pi}{2} \le \arg(w_2) \le \pi$

مثال ۶۵: نگاشت $T(z) = \sin z$ ، خط $x = c$ ، به طوری‌که $0 < c < \frac{\pi}{2}$ ، را در صفحه به کدامیک از منحنی‌های زیر می‌نگارد؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) خط ۲) هذلولی ۳) دایره ۴) بیضی

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به توضیحات متن درس ناحیه مزبور یک هذلولی با معادله $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$ خواهد بود. البته تنها یکی از شاخه‌های هذلولی به دست می‌آید.

مثال ۶۶: خم C_1 با معادله $z = e^{i\theta}$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ در صفحه xy به خم C_2 در صفحه uv توسط تبدیل $w = z + \frac{1}{z}$ نگاشته می‌شود. خم C_2 کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) دایره ۲) بیضی

۳) قطعه خط $-1 \le u \le 1$ بر محور افقی u ۴) قطعه خط $-2 \le u \le 2$ بر محور افقی u

پاسخ: گزینه «۴»

$$w = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta = u + iv$$

$$v = 0 \ , \ u = 2\cos\theta \xrightarrow{-1 \le \cos\theta \le 1} -2 \le 2\cos\theta \le 2$$

مثال ۶۷: نقاط ثابت در تبدیل $f(z) = \frac{z-1}{4z+1}$ چگونه‌اند؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) دو نقطهٔ متمایز روی محور موهومی ۲) یک نقطه در صفحه xy

۳) یک نقطه روی محور حقیقی و یک نقطه روی محور موهومی ۴) فاقد نقطه ثابت

پاسخ: گزینه «۱»

$$z = \frac{z-1}{4z+1} \Rightarrow 4z^2 + z = z - 1 \Rightarrow 4z^2 = -1 \Rightarrow z^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow z = \pm\frac{1}{2}i$$

مثال ۶۸: نگاشت $w = \operatorname{Ln} z$ ناحیهٔ $\operatorname{Re}(z) > 0$ از صفحهٔ z را به کدام ناحیه در صفحه w تبدیل می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\operatorname{Im}(w) > 0$ ۲) $\operatorname{Im}(w) < 0$ ۳) $0 < \operatorname{Im}(w) < \pi$ ۴) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(w) < \frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$z = re^{i\theta} \to \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(re^{i\theta}) = \operatorname{Ln} r + i\theta = u + iv = w$$

چون $\operatorname{Re} z > 0$ در نتیجه $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ بنابراین داریم:

$$\operatorname{Im} w = \theta \ , \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w < \frac{\pi}{2}$$

مثال ۶۹: مطلوب است تصویر خط $\operatorname{Re}(z) = 1$ تحت نگاشت $f(z) = z^2$. (مهندسی مکانیک «کلیه گرایشها» ـ آزاد ۸۱)

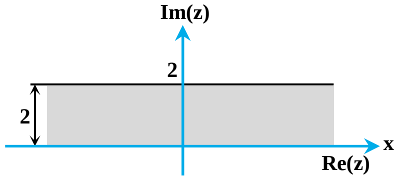
۱) $u = 2y \ , \ v = 1 + y^2$ ۲) $u = 2y \ , \ v = 1 - y^2$ ۳) $u = 1 + y^2 \ , \ v = 2y$ ۴) $u = 1 - y^2 \ , \ v = 2y$

پاسخ: گزینه «۴»

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy) \xrightarrow{x=\operatorname{Re}(z)=1} w = 1 - y^2 + i2y = u + iv \Rightarrow u = 1 - y^2 \ , \ v = 2y$$

مثال۷۰: ناحیه هاشور زده شده در صفحه z ؛ $(\circ < Im(z) < ۲)$ با نگاشت $w = e^{\frac{\pi z}{۲}}$ به کدام ناحیه از صفحهٔ مختلط w تبدیل می‌شود؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)



۱) $Im(w) < \circ$

۲) $Im(w) > \circ$

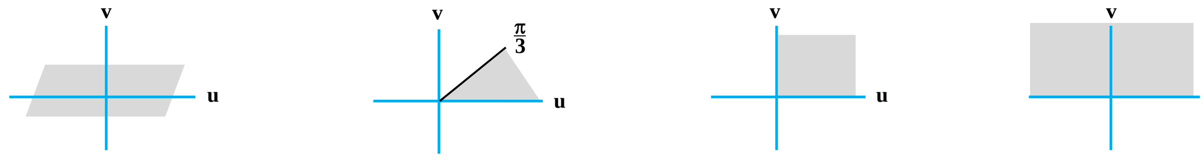
۳) $Re(w) > \circ$

۴) $Re(w) < \circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تحت نگاشت $w_۱ = \frac{\pi}{۲} z$ ناحیه هاشورزده به $\circ \le Im(w_۱) \le \pi$ تبدیل می‌شود و می‌دانیم این ناحیه تحت نگاشت $w_۲ = e^{w_۱}$ بـه $Im(w) > \circ$ تبدیل می‌شود.

مثال۷۱: نگاشت $w = z^{\frac{۱}{۳}}$ ناحیه $\circ \le \theta \le \pi$ را روی کدام ناحیه می‌نگارد؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)



(۱) (۲) (۳) (۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تحت نگاشت $z^{\frac{۱}{۳}}$ ناحیه $\circ \le \theta \le \pi$ به $\circ \le \theta \le \frac{\pi}{۳}$ تبدیل خواهد شد.

مثال۷۲: نگاشت $w = (۱+i)z$ کدام ویژگی را دارد؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) ابعاد را ۲ برابر می‌کند و شکل را $+\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌دهد.

۲) ابعاد را $\sqrt{۲}$ برابر می‌کند و شکل را $-\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌دهد.

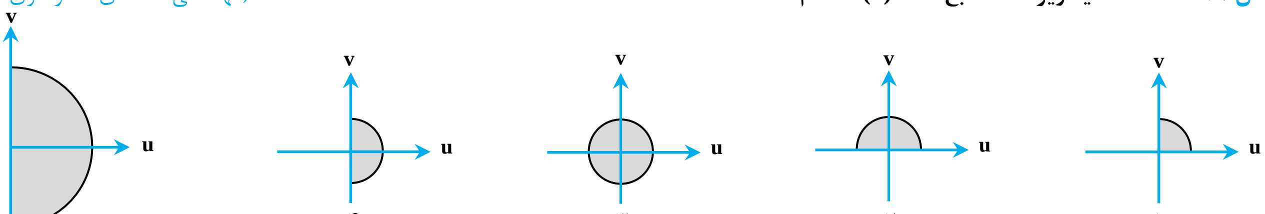
۳) ابعاد را $\sqrt{۲}$ برابر می‌کند و شکل را $+\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌دهد.

۴) ابعاد را ۲ برابر می‌کند و شکل را $-\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌دهد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون $۱+i = \sqrt{۲}.e^{i\frac{\pi}{۴}}$ پس اندازه $\sqrt{۲}$ برابرشده و زاویه $+\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌کند.

مثال۷۳: نگاشت ناحیه زیر تحت تابع $f(z) = z^۴$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)



(۴) (۳) (۲) (۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ناحیه $-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ تحت نگاشت $z^۴$ به $-۲\pi \le \theta \le ۲\pi$ تبدیل خواهد شد.

مثال۷۴: با کدام تبدیل می‌توان ناحیه $D = \{(x,y); y \le \circ\}$ از صفحهٔ z را به درون دایره یکه به مرکز مبدأ تصویر کرد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $w = e^{i\theta} \frac{z^۲ - i}{z^۲ + i}$

۲) $w = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i}$

۳) $w = e^{i\theta} \frac{z^۲ + i}{z^۲ - i}$

۴) $w = e^{i\theta} \frac{z + i}{z - i}$

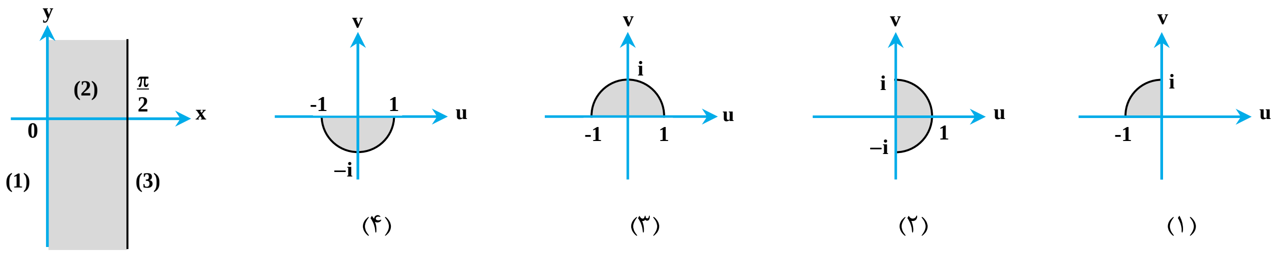
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

نگاشت $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_\circ}{z - \bar{z}_\circ}$ همان‌طور که در متن درس آمده است، نگاشت موبیوس نام دارد. اگر $Im z_\circ > \circ$ باشد؛ نیم‌صفحه‌ی $Im z > \circ$ را به درون و نیم‌صفحه‌ی $Im z < \circ$ را به بیرون دایره‌ی واحد تصویر می‌کند. اما اگر $Im z_\circ < \circ$ باشد، نیم‌صفحه‌ی $Im z < \circ$ را به درون و $Im z > \circ$ را به بیرون دایره‌ی واحد می‌نگارد.

در این تست، D نیم‌صفحه‌ی $y = Im z < \circ$ است. بنابراین باید $z_\circ$ را طوری انتخاب کنیم کـه $Im z_\circ < \circ$ باشـد. بـه ازای $z_\circ = -i$ گزینـه‌ی (۴) بدست خواهد آمد:

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - (-i)}{z - \overline{(-i)}} = e^{i\theta} \frac{z + i}{z - i}$$

مثال۷۵: نوار هاشورخورده نشان داده شده در صفحه $z = x + iy$ تحت نگاشت $w = (\tan\frac{z}{۲})^۲$ به کدامیک از نـواحی زیـر در صـفحه $w = u + iv$ تبدیل می‌گردد؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

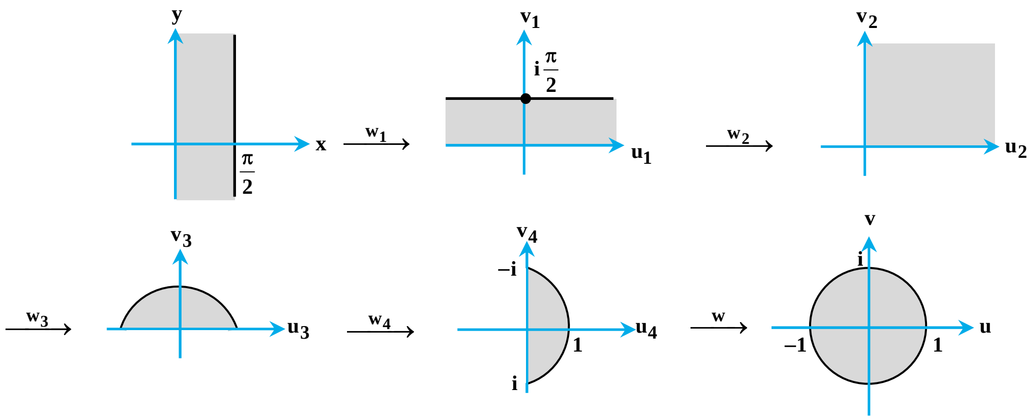


(۴) (۳) (۲) (۱)

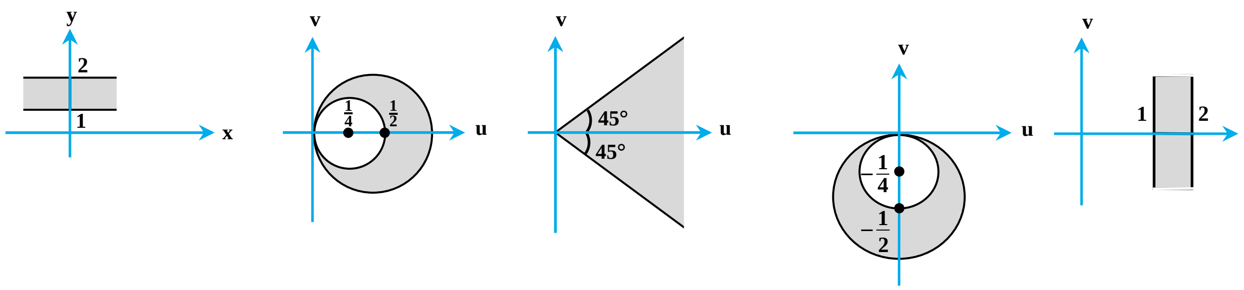
☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$w = (tg\frac{z}{۲})^۲ = \left(\frac{e^{\frac{iz}{۲}} - e^{\frac{-iz}{۲}}}{i(e^{\frac{iz}{۲}} + e^{-\frac{iz}{۲}})}\right)^۲ = \left(\frac{e^{iz} - ۱}{i(e^{iz} + ۱)}\right)^۲$$

$$w_۱ = iz \to w_۲ = e^{w_۱} \to w_۳ = \frac{w_۲ - ۱}{w_۲ + ۱} = ۱ - \frac{۲}{w_۲ + ۱} \to w_۴ = -iw_۳ \to w = (w_۴)^۲$$



مثال۷۶: تصویر ناحیه هاشور خوردهٔ زیر تحت تبدیل $w = \frac{۱}{z}$ مطابق با کدام شکل است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)



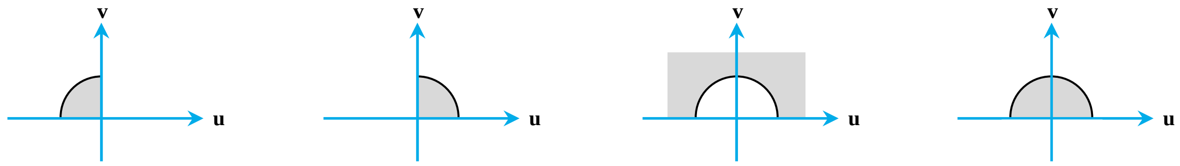
(۴) (۳) (۲) (۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$y = \frac{-v}{u^۲ + v^۲} \Rightarrow \begin{cases} ۱ = \frac{-v}{u^۲ + v^۲} \Rightarrow v^۲ + u^۲ + v = ۰ \Rightarrow u^۲ + (v + \frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \\ ۲ = \frac{-v}{u^۲ + v^۲} \Rightarrow ۲(u^۲ + v^۲) + v = ۰ \Rightarrow u^۲ + (v + \frac{۱}{۴})^۲ = \frac{۱}{۱۶} \end{cases}$$

با توجه به معادله دایره‌ها واضح است که گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۷۷: مبدل ناحیه $0 \le x$ و $0 \le y \le \pi$ با تبدیل $w = e^z$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)



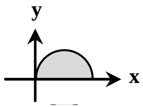
(۴) (۳) (۲) (۱)

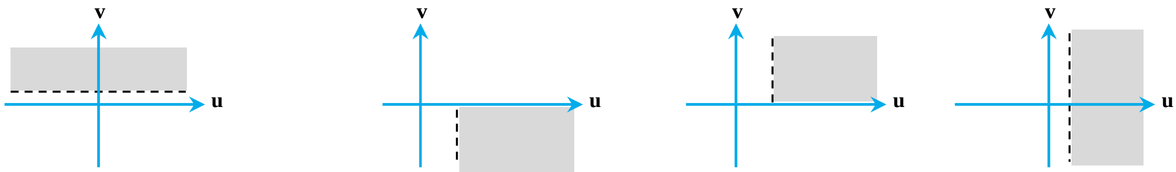
پاسخ: گزینه «۱»

$$w = e^z = e^x . e^{iy} \Rightarrow r = e^x \ , \ \theta = y$$

$$\begin{cases} -\infty < x \le 0 \Rightarrow e^{-\infty} < e^x \le e^0 \Rightarrow 0 < e^x \le 1 \Rightarrow 0 < r \le 1 \\ 0 \le y \le \pi \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

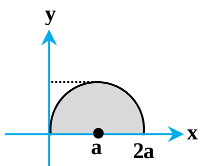
با توجه به دو معادله به دست آمده نیم‌دایره فوقانی (نیم‌دایره‌ای به شعاع یک) جواب تست می‌باشد.

مثال ۷۸: مبدل نقاط داخل نیم‌دایره  با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ کدام ناحیه است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۳)



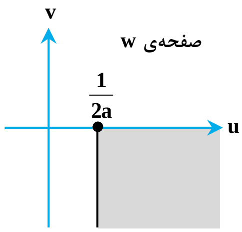
(۴) (۳) (۲) (۱)

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:



$0 \le \theta \le \pi$
$0 \le r \le 2a\cos\theta$

فرض کنیم نیم دایره‌ی داده شده به مرکز $(a, 0)$ و شعاع a باشد. اگر چه در شکل داده شده، مرز نیم‌دایره هم جزء آن رسم شده است، اما در متن سؤال تأکید شده که نقاطِ داخل نیم‌دایره را در نظر بگیریم. پس معادله‌ی آن به صورت $(x-a)^2 + y^2 < a^2$، $y \ge 0$ است. با باز کردن اتحاد داریم $0 \le x^2 + y^2 < 2ax$ که در دستگاه قطبی به شکل $0 \le r^2 < 2ar\cos\theta$ یا معادل آن، $0 \le r < 2a\cos\theta$ بیان می‌شود. البته $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ است. نگاشت $w = \frac{1}{z}$ در فرم قطبی به صورت $w = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ نوشته می‌شود، یعنی r را وارونه و θ را قرینه می‌کند. بنابراین در صفحه‌ی w خواهیم داشت: $w = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$



پس: $u = \frac{1}{r}\cos\theta \ , \ v = -\frac{1}{r}\sin\theta$

از محدودیتِ $0 \le r < 2a\cos\theta$ خواهیم داشت: $\frac{1}{2a\cos\theta} < \frac{1}{r} < \infty$

بنابراین داریم: $\frac{1}{2a} < u < \infty \quad , \quad -\infty < v < -\frac{\sin\theta}{2a\cos\theta}$

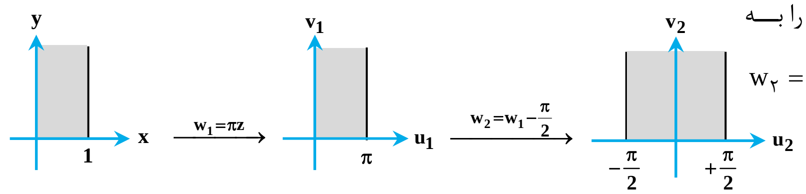
به عبارتی $v < -\frac{1}{2a}\tan\theta$. در بازه‌ی $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ داریم $0 \le \tan\theta < \infty$، بنابراین $-\infty < v < 0$ خواهد بود.

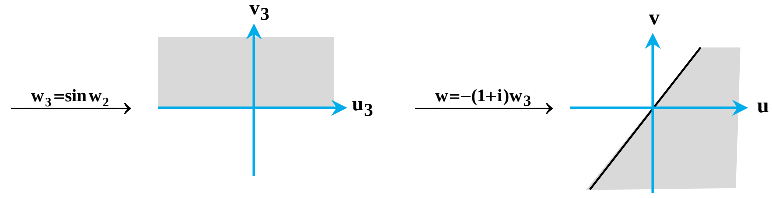
توجه: یک راه این است که بگوییم: تبدیل $w = \frac{1}{z}$ نقاط ربع اول را به ربع چهارم می‌برد. پس فقط گزینه (۳) صحیح است.

مثال ۷۹: نگاشت $w=(1+i)\cos\pi z$ ، نیم نوار $(0\le x\le 1, y\ge 0)$ از صفحهٔ z را به چه ناحیه‌ای در صفحهٔ w تبدیل می‌کند؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $u-v\ge 0$ ۲) $u-v\le 0$ ۳) $u+v\ge 0$ ۴) $u+v\le 0$

پاسخ: گزینه «۱» نگاشت $w_1=\pi z$ ناحیه را به صورت $0\le x\le \pi$ و $y\ge 0$ تبدیل می‌کند و نگاشت $w_2=w_1-\frac{\pi}{2}$ ناحیه را به صورت $y\ge 0$ و $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}$ تبدیل می‌کند.





و می‌دانیم $\sin w_2$ نیم نوار $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}$ و $y\ge 0$ را به نیم صفحه فوقانی تبدیل می‌کند و در نهایت $w=-(1+i)w_3=e^{-3\frac{\pi}{4}i}w_3$ این ناحیه را بـه انـدازه $-3\frac{\pi}{4}$ دوران می‌دهد. یعنی ۱۳۵ درجه در جهت عکس مثلثاتی. ناحیه‌ی بدست آمده زیر خطِ $v=u$ است یعنی $v\le u$ به عبارتی $u-v\ge 0$.

مثال ۸۰: تصویر دایره $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{1}{z}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $v=u+\frac{1}{2}$ ۲) $u+v+\frac{1}{2}=0$ ۳) $(u+1)^2+(v-1)^2=\frac{1}{2}$ ۴) $(u-1)^2+(v+1)^2=\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بـدون حـل پاسـخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2\Rightarrow x^2+y^2+2x-2y=0\Rightarrow \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2u}{u^2+v^2}+\frac{2v}{u^2+v^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2(v+u)}{u^2+v^2}=0\Rightarrow \frac{2v+2u+1}{u^2+v^2}=0\Rightarrow 2u+2v+1=0\Rightarrow u+v+\frac{1}{2}=0$$

مثال ۸۱: تبدیل $w=T(z)=k\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}$ مفروض است که در آن k و $z_0\ne 0$ ثابت‌اند و $|k|=1$, $|z_0|<1$. این تبدیل داخل دایره به مرکز ∘ و به شعاع واحد در صفحه z را می‌نگارد (تصویر می‌کند) بر: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) یک نیم‌صفحه در صفحه مختلط w
۲) درون دایره به مرکز ۱ و به شعاع $|z_0|$
۳) درون دایره به مرکز ∘ و به شعاع $\frac{1}{|z_0|}$ در صفحه مختلط w
۴) درون دایرهٔ به مرکز ∘ و به شعاع واحد در صفحه مختلط w

پاسخ: گزینه «۴» نگاشت $w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}$ که در آن α یک عدد حقیقی دلخـواه و z_0 یـک عـدد مخـتلط دلخـواه بـا شـرط $|z_0|<1$ مـی‌باشـد، ناحیه $|z|<1$ را به ناحیه $|w|<1$ می‌نگارد. از آنجا که $|e^{i\alpha}|=1$ می‌باشد، لذا نگاشت $T(z)=k\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}$ همان عملکرد گفته شده را دارد و از این رو گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۸۲: تصویر دایرهٔ $|z|=R$ $(R\ne 1)$ تحت نگاشت $w=z+\frac{1}{z}$ عبارتست از: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) دایره ۲) هذلولی ۳) یک بیضی ۴) خط مستقیم

پاسخ: گزینه «۳» نگاشت موردنظر یک تبدیل ژوکوفسکی می‌باشد و چون $R\ne 1$ تصویر دایره موردنظر یک بیضی می‌باشد.

مثال ۸۳: **کدام نگاشت موبیوس نقاط $\infty,1,0$ را به ترتیب به نقاط ۱ و $\frac{1-i}{2}$ و ۰ می‌نگارد.** (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{i}{z+i}$ ۲) $\frac{-i}{z-i}$ ۳) $\frac{iz+2}{iz+1}-1$ ۴) $\frac{iz+2}{iz+i}-1$

پاسخ: گزینه «۲ و ۳»

$$f(z)=\frac{-i}{z-i} \Rightarrow f(1)=\frac{-i(1+i)}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}$$

گزینه (۲) درست است که این تبدیل را انجام خواهد داد. البته از فرمول داده شده در متن درس نیز می‌توان تست را حل کرد. اما گزینه‌های (۲) و (۳) با هم برابرند. زیرا داریم:

$$\text{گزینه (۳)}=\frac{iz+2}{iz+1}-1=\frac{iz+2-iz-1}{iz+1}=\frac{1}{iz+1}=\frac{1}{iz+1}\times\frac{-i}{-i}=\frac{-i}{z-i}=\text{گزینه (۲)}$$

مثال ۸۴: **نگاشت $w=e^{3iz}$ نوار $A=\{z=x+iy\ ;\ |x|<\frac{\pi}{6}\}$ را به کدام یک از ناحیه‌های زیر تبدیل می‌کند؟** (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۴)

۱) نیمه بالای صفحه w ۲) نیمه پائین صفحه w ۳) نیمه سمت چپ صفحه w ۴) نیمه سمت راست صفحه w

پاسخ: گزینه «۴» تبدیل $w_1=3z$ ناحیه را به $|x|<\frac{\pi}{2}$ می‌نگارد و تبدیل $w_2=iw_1$ ناحیه را به $|y|<\frac{\pi}{2}$ می‌نگارد و تبدیل $w_3=e^{w_2}$ ناحیه مذکور را به نیمه راست صفحه w خواهد نگاشت.

مثال ۸۵: **اگر با یک تبدیل خطی کسری $-i$، -1 و i در صفحه z به ترتیب به ۰، ۱ و ∞ در صفحه توسعه یافته w برده شوند، آنگاه نیمه بالایی صفحه w تصویر چه ناحیه‌ای از صفحه z است؟** (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) نیمه پائین صفحه z ۲) نیمه چپ صفحه z
۳) داخل دایره واحد به مرکز مبدأ (و به شعاع یک) ۴) بیرون دایره واحد به مرکز مبدأ (به شعاع یک)

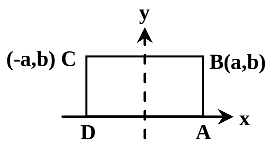
پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases}z_1=-i\\ z_2=-1\\ z_3=i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}w_1=0\\ w_2=1\\ w_3=\infty\end{cases} \Rightarrow \frac{w-w_1}{w-w_3}\times\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

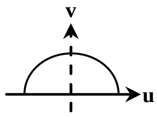
$$\Rightarrow \frac{(w-0)}{w-\infty}\cdot\frac{1-\infty}{1-0}=\frac{z+i}{z-i}\times\frac{-1-i}{-1+i} \Rightarrow w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z+i}{z-i}=\frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}(\frac{z-i}{z+i})}=\frac{1}{w_1}$$

نگاشت $w_1=e^{-i\frac{\pi}{2}}(\frac{z-i}{z+i})$ نیم صفحه بالایی $\operatorname{Im} z\ge 0$ را به داخل دایره یکه تصویر می‌کند و در مرحله‌ی بعد آن نگاشت $w=\frac{1}{w_1}$، ناحیه داخل دایره را به ناحیه خارج دایره یکه تصویر می‌نماید.

مثال ۸۶: **تصویر ناحیه واقع در داخل مسیر بسته ABCD**



تحت نگاشت $(w=u+iv)w=\sin z$ عبارت است از:

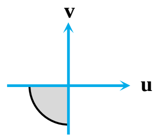


(ناحیه درون نیمه بالایی یک قرص بیضوی) مقدار ثابت a چیست؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

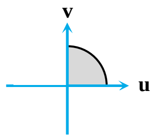
۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ: گزینه «۳» نگاشت $w=\sin z$ خط‌های عمودی را تبدیل به هذلولی می‌نماید که با توجه به شکل حاصل در ناحیهw و عدم حضور شکل هذلولی در شکل می‌توان نتیجه گرفت که a فقط می‌تواند برابر $\frac{\pi}{2}$ گردد. نگاشت $w=\sin z$ خط قائم $x=\frac{\pi}{2}$ را روی محور حقیقی تصویر می‌نماید.

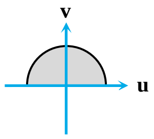
مثال ۸۷: نگاشت e^z ناحیه $\{z : \operatorname{Re}\{z\} \le ۰ \,,\, ۰ \le \operatorname{Im} z \le \frac{\pi}{۲}\}$ را به کدام ناحیه زیر تصویر می‌کند؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)



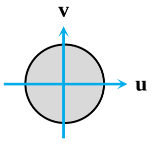
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۲»

$$e^z = e^x . e^{iy} \Rightarrow \left|e^z\right| = e^x \le e^{\circ} = ۱ \;,\; ۰ \le \operatorname{Arg}(e^z) = y \le \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۸۸: تعیین کنید تبدیل $w = e^{ia}(\frac{z - z_{\circ}}{z - \bar{z}_{\circ}})$ که در آن a یک عدد حقیقی ثابت و $\operatorname{Im}(z_{\circ}) < ۰$ است، نیم صفحه پایینی $\operatorname{Im} z \le ۰$ را به کدام یک از ناحیه‌های داده شده می‌نگارد: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\operatorname{Im} w \le ۰$ ‏ ۲) $\operatorname{Im} w \ge ۰$ ‏ ۳) $|w| \ge ۱$ ‏ ۴) $|w| \le ۱$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

تبدیل خطی ـ کسری $w = e^{ia}\frac{z - z_{\circ}}{z - \bar{z}_{\circ}}$، $\operatorname{Im} z_{\circ} > ۰$، $a \in \mathbb{R}$ ناحیه $\operatorname{Im} z \ge ۰$ را به روی قرص $|w| \le ۱$ می‌نگارد و تصویر نیم‌صفحه $\operatorname{Im} z \le ۰$ تحت w برابر تصویر $\operatorname{Im} z \ge ۰$ تحت $\bar{w}$ است که $\bar{w} = e^{-ia}\frac{\bar{z} - \bar{z}_{\circ}}{\bar{z} - z_{\circ}}$ و چون $\bar{w}$ نیز یک تبدیل خطی ـ کسری است، تصویر $\operatorname{Im} z \ge ۰$ تحت $\bar{w}$ ناحیه $|w| \le ۱$ می‌باشد.

مثال ۸۹: فرض کنید $\varphi(z) = \frac{a - z}{۱ - \bar{a}z} \,,\, a \ne ۰ \,,\, |a| < ۱$ برای $|z| < ۱$. فرض کنید c دایره $|z| = \frac{۱}{۲}$ و c' دایره تصویر آن تحت نگاشت φ باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) تصویر هر قطر از دایره c، قطری از دایره c' است.

۲) وترهایی از دایره c که قطر نیستند وجود دارند که تصویر آنها قطری از دایره c' می‌شود.

۳) چون c' دارای تعداد نامتناهی قطر است پس تعداد نامتناهی قطر و وتر از دایره c وجود دارند که تصویر آنها قطری از c' می‌شود.

۴) فقط یک قطر از c وجود دارد که بر قطری از دایره c' نگاشته می‌شود.

پاسخ: گزینه «۴» هر تبدیل خطی کسری به صورت $w = e^{i\alpha}\frac{z - z_{\circ}}{\bar{z}_{\circ}z - ۱}$ (از جمله $w = \frac{a - z}{۱ - \bar{a}z}$) که در آن α عددی حقیقی و $|z_{\circ}| < ۱$، به روش یک به یک قرص دایره‌ای $|z| \le ۱$ را بر روی قرص $|w| \le ۱$ می‌نگارد. بنابراین فقط یک قطر از c وجود دارد که بر قطری از c' نگاشته می‌شود.

مثال ۹۰: ناحیهٔ قطاعی $r \le ۲ \,,\, -\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$ در صفحه z را با نگاشت $w = z^۲$ تبدیل می‌کنیم. مساحت شکل حاصل از تبدیل در صفحهٔ w برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ‏ ۲) $\frac{۸\pi}{۳}$ ‏ ۳) $\frac{۱۶\pi}{۳}$ ‏ ۴) $\frac{۳۲\pi}{۳}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

روش اول: بخش‌های حقیقی و موهومی $w = z^۲$ را تعیین می‌کنیم:

$$w = (x + iy)^۲ = (x^۲ - y^۲) + i۲xy$$

بنابراین $u = \operatorname{Re} w = x^۲ - y^۲$ و $v = \operatorname{Im} w = ۲xy$. فرض کنیم ناحیهٔ D در صفحهٔ $x - y$، ناحیهٔ قطاعی $r \le ۲$ و $-\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$ باشد. هرگاه D' تصویر D تحت نگاشت $w = z^۲$ باشد، مساحت D' برابر است با $\iint_{D'} dv\,du$. با محاسبه‌ی ژاکوبینِ دستگاه جدید، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را به D منتقل می‌کنیم.

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲x & -۲y \\ ۲y & ۲x \end{vmatrix} = ۴(x^۲ + y^۲) = ۴r^۲$$

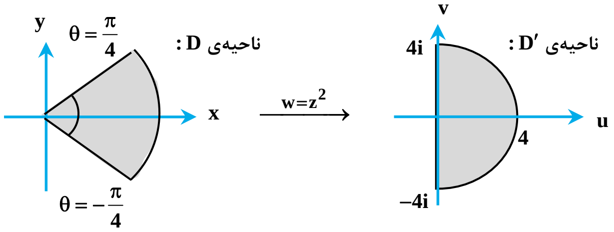
بنابراین با توجه به آن‌که در ناحیه‌ی D، $۰ \le r \le ۲$ و $-\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$ است، خواهیم داشت:

$$D' \text{ مساحت} = \iint_{D'} dv\,du = \iint_D |J|\,dy\,dx = \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{۰}^{۲} ۴r^۲ r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} ۴\frac{r^۴}{۴}\Big|_{۰}^{۲} d\theta = ۱۶\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} d\theta = ۱۶\frac{\pi}{۲} = ۸\pi$$

روش دوم: نگاشت $w=z^۲$ در مختصات قطبی به صورت $f(re^{i\theta})=r^۲e^{i۲\theta}$ است، یعنی آرگومان را دو برابر می‌کند و اندازه‌ها را به توان ۲ می‌رساند. در ناحیه‌ی D داریم $۰\le r\le ۲$ و $-\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$. بنابراین در تصویر این ناحیه (D′) خواهیم داشت:

$$-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\ ,\ ۰\le r\le ۴$$

پس D′ نیم‌دایره‌ای به شعاع ۴ است. $D'\ \text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\pi(۴)^۲=۸\pi$

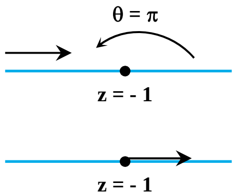


✍ **مثال ۹۱:** برای تبدیل $w=f(z)$ از صفحه z به صفحه w داریم $\frac{dw}{dz}=k(\frac{z+۱}{z-۱})^{\frac{۱}{۲}}$ که در آن k ضریب ثابتی است. وقتی متغیر z در امتداد محور x به سمت راست حرکت می‌کند، در حین عبور از نقطه ۱-، نقطه تصویر w در امتداد حرکتش چه تغییری ایجاد می‌شود؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) دوران به اندازه π ۲) دوران به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ ۳) دوران به اندازه $-\pi$ ۴) دوران به اندازه $-\frac{\pi}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تست را به دو روش تحلیل می‌کنیم. ابتدا با بررسی مفهومی آن داریم:

روش اول:



$$\frac{dw}{dz}=k(\frac{z+۱}{z-۱})^{\frac{۱}{۲}}\quad;\quad dw=dz[k(\frac{z+۱}{z-۱})^{\frac{۱}{۲}}]$$

$$\operatorname{Arg}(dw)=\operatorname{Arg}(dz)+\operatorname{Arg}(k(\frac{z+۱}{z-۱})^{\frac{۱}{۲}})$$

$$\operatorname{Arg}(dw)=\operatorname{Arg}(dz)+\operatorname{Arg}k+\frac{۱}{۲}\operatorname{Arg}(z+۱)-\frac{۱}{۲}\operatorname{Arg}(z-۱)$$

هر گاه متغیر z در امتداد محور x به سمت راست حرکت کند، در حین عبور از نقطه ۱-، داریم: $dz=dx+idy=dx\ge۰$ است. زیرا y تغییر نمی‌کند و تغییرات x مثبت است. پس $\arg dz=۰$ است. k عددی ثابت است و Argk تغییری نمی‌کند. $z-۱=x-۱<۰$ است. اما $z+۱=x+۱$ تغییر علامت می‌دهد. وقتی $x<-۱$ باشد $x+۱<۰$ و آرگومان آن π است. اما وقتی $x>-۱$ می‌شود $x+۱>۰$ و آرگومان آن صفر می‌شود.

لذا تغییر آرگومان $\operatorname{Arg}(z+۱)$ به اندازه $-\pi$ می‌باشد و بقیه عوامل ثابت باقی می‌مانند، لذا:

$$\operatorname{Arg}dw=۰+۰+\frac{۱}{۲}(-\pi)-۰\Rightarrow\operatorname{Arg}dw=\frac{-\pi}{۲}$$

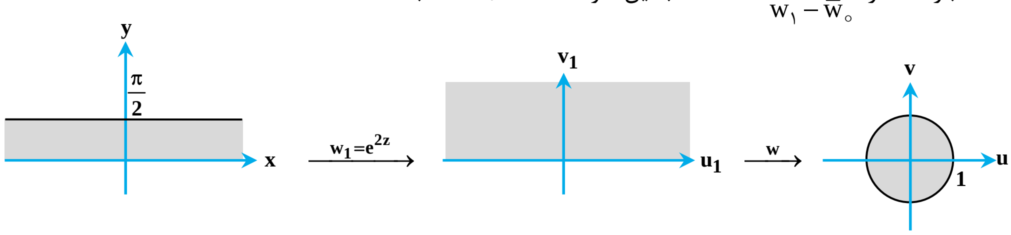
روش دوم: اگر تابع $f'(z)=k(\frac{z+۱}{z-۱})^{\frac{۱}{۲}}$ را به صورت مقابل بنویسیم: $f'(z)=k(z+۱)^{\frac{۱}{۲}}(z-۱)^{-\frac{۱}{۲}}$

با توجه به مبحث نگاشت کریستوفل شوارتز واضح است $\alpha=-\frac{\pi}{۲}$.

✍ **مثال ۹۲:** کدامیک از تبدیل‌های زیر نوار $(-\infty<x<\infty,۰\le y\le\frac{\pi}{۲})$ را به درون قرص واحد می‌نگارد؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{e^z-i}{e^z+i}$ ۲) $\frac{e^z+۲i}{e^z-۲i}$ ۳) $\frac{e^{۲z}+۲-i}{e^{۲z}+۲+i}$ ۴) $\frac{e^{۲z}-۲+i}{e^{۲z}+۲+i}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نگاشت $w_۱=e^{۲z}$، ناحیه داده شده را به نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Im}(w_۱)\ge۰$ می‌نگارد. همچنین نگاشتی که نیم‌صفحه $\operatorname{Im}w_۱>۰$ را به داخل دایره یکه تصویر کند عبارتست از: $w=e^{i\theta}\frac{w_۱-w_۰}{w_۱-\overline{w}_۰}$ با این شرط که $\operatorname{Im}w_۰>۰$ باشد.



با در نظر گرفتن $w_۰=-۲+i$ خواهیم داشت: $w=\frac{w_۱+۲-i}{w_۱+۲+i}=\frac{e^{۲z}+۲-i}{e^{۲z}+۲+i}$

مثال ۹۳: تحت نگاشت $w=f(z)=\frac{1}{z}$ تصویر خط $2y+3x-1=0$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶)

۱) دایره‌ای که مبدأ خارج از آن قرار دارد.
۲) دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد.
۳) دایره‌ای که مبدأ درون آن قرار دارد.
۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۲»

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u}{u^2+v^2}\\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}\end{cases}\Rightarrow 2y+3x-1=\frac{-2v}{u^2+v^2}+\frac{3u}{u^2+v^2}-1=0\Rightarrow u^2+v^2-3u+2v=0$$

معادله دایره‌ای است که از مبدأ می‌گذرد.

مثال ۹۴: تابع مختلط $w=f(z)=\frac{1}{z}$ را در نظر بگیرید. این تابع، حوزه‌ی $D=\{z:x>1,y>0\}$ در صفحه‌ی $z=x+iy$ را به کدام یک از چهار حوزه‌ی D_1 تا D_4 در صفحه‌ی $w=u+iv$ می‌نگارد؟ (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) $D_1=\{w:|w|<1,u>0\}$
۲) $D_2=\{w:|w|<1,u<0\}$
۳) $D_3=\{w:|w-0.5|<0.5,v<0\}$
۴) $D_4=\{w:|w-0.5|<0.5,v>0\}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$w=f(z)=\frac{1}{z}\Rightarrow z=\frac{1}{w}\Rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم}}x+iy=\frac{(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}\Rightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

طبق ناحیه‌ی داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\frac{u}{u^2+v^2}>1\Rightarrow u^2+v^2<u\Rightarrow u^2-u+v^2<0\Rightarrow(u^2-u+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+v^2<0\Rightarrow(u-\frac{1}{2})^2+v^2<\frac{1}{4}\Rightarrow|w-0.5|^2<\frac{1}{4}\Rightarrow|w-0.5|<\frac{1}{2}$$

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Rightarrow u=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$v=\frac{-y}{x^2+y^2}\xrightarrow[\text{طبق ناحیه‌ی داده شده } y>0]{\text{مخرج کسر همواره مثبت است}}\frac{-y}{x^2+y^2}<0\Rightarrow v<0$$

مثال ۹۵: تبدیل $w=\frac{i(z-i)}{z+i}$ نیم‌صفحه بالایی در صفحه z ها را به کدام ناحیه در صفحه w ها می‌نگارد؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

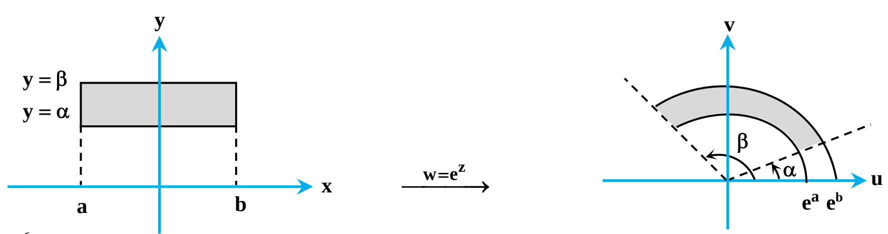
۱) درون دایره یکه
۲) نیم‌صفحه بالایی
۳) نیم‌صفحه پایینی
۴) نیم‌صفحه راست

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به مطالب گفته شده در متن کتاب، تبدیل $w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ با فرض $\operatorname{Im} z_0>0$ نیم صفحه فوقانی $\operatorname{Im} z>0$ را به داخل دایره واحد $|w|<1$ می‌نگارد.

مثال ۹۶: ناحیه $1\le|w|\le e$ و $0.5<\phi<1$ در صفحه w ها تصویر چه ناحیه‌ای از صفحه z ها تحت تبدیل $w=e^z$ می‌باشد؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) $0\le y\le 1$ و $0.5<x<1$
۲) $0.5<y<1$ و $1\le x\le e$
۳) $0.5<y<1$ و $0\le x\le 1$
۴) $1\le y\le e$ و $0.5<x<1$

پاسخ: گزینه «۳»



$$\begin{cases}0.5<\phi<1\\ \alpha=0.5\quad\Rightarrow 0.5<y<1\\ \beta=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\le|w|\le e\\ e^a=1\Rightarrow a=0\quad\Rightarrow 0\le x\le 1\\ e^b=e\Rightarrow b=1\end{cases}$$

مثال ۹۷: تبدیل خطی کسری را بیابید که سه نقطه $z_1=0$ و $z_2=-i$ و $z_3=-1$ در صفحه z را به ترتیب به سه نقطه $w_1=i$ و $w_2=1$ و $w_3=0$ در صفحه w منتقل نماید.
(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $w=i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ ۲) $w=-i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ ۳) $w=+i\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ ۴) $w=-i\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$\frac{w-i}{w-0}\cdot\frac{1-0}{1-i}=\frac{z-0}{z+1}\cdot\frac{-i+1}{-i-0}\Rightarrow\frac{w-i}{w}\cdot\frac{1}{1-i}=\frac{z}{z+1}\cdot\frac{1-i}{-i}\Rightarrow\frac{w-i}{w}=\frac{z}{z+1}\cdot\frac{1-i}{-i}\times\frac{i}{i}\times(1-i)=\frac{z}{z+1}.i(1-1-2i)=\frac{+2z}{z+1}$$

$$\Rightarrow\frac{w-i}{w}=1-\frac{i}{w}=\frac{+2z}{z+1}\Rightarrow\frac{i}{w}=1-\frac{2z}{z+1}\Rightarrow\frac{i}{w}=\frac{1-z}{z+1}\Rightarrow w=\frac{z+1}{1-z}i=-i(\frac{z+1}{z-1})$$

مثال ۹۸: تابع مختلط $w=\frac{z+1}{z+2}$ ، دایره $|z+1|=1$ را به چه ناحیه یا منحنی‌ای می‌نگارد؟
(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\operatorname{Re}(w)=\frac{1}{2}$ ۲) $\operatorname{Im}(w)=0/2$ ۳) $2x+iy$ ۴) $-5+3i$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

بخش‌های حقیقی و موهومی w را مشخص می‌کنیم. البته در ابتدا با تقسیم صورت بر مخرج، کار را ساده‌تر می‌کنیم:

$$w=\frac{z+1}{z+2}=\frac{(z+2)-1}{z+2}=1-\frac{1}{z+2}=1-\frac{1}{(x+2)+iy}\times\frac{(x+2)-iy}{(x+2)-iy}=1-\frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}+i\frac{y}{(x+2)^2+y^2}$$

بنابراین داریم:

$$u=1-\frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}=1-\frac{x+2}{x^2+y^2+4x+4}\quad,\quad v=\frac{y}{(x+2)^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2+4x+4}$$

حال روی دایره‌ی $|z+1|=1$ داریم: $(x+1)^2+y^2=1$، یعنی $x^2+y^2+2x=0$. با جایگذاری این معادله در u و v خواهیم داشت:

$$\begin{cases}u=1-\frac{x+2}{2x+4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ v=\frac{y}{2x+4}\end{cases}$$

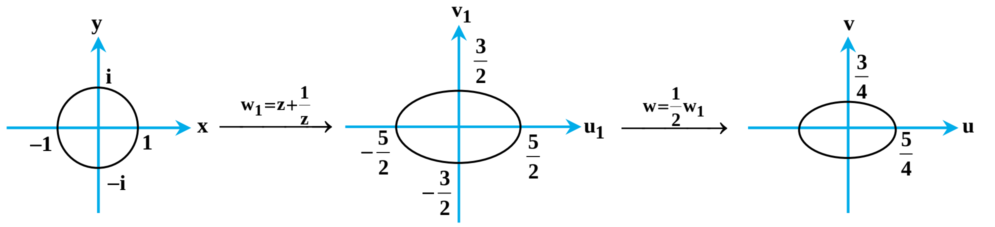
بنابراین خطِ $\operatorname{Re}w=u=\frac{1}{2}$ بدست می‌آید.

مثال ۹۹: نگاشت $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ دایره $|z|=2$ را بر کدام‌یک از منحنی‌های زیر می‌نگارد؟
(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$
۲) یک بیضی که قطر آن موازی محورها نیست.
۳) یک بیضی که قطر کوچک آن موازی محور حقیقی است.
۴) یک بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور حقیقی است.

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم نگاشت $w_1=z+\frac{1}{z}$ نقاط روی دایره $|z|=R$ را به یک بیضی به صورت زیر می‌نگارد:

$$\frac{u^2}{(R+\frac{1}{R})^2}+\frac{v^2}{(R-\frac{1}{R})^2}=1\xrightarrow{R=2}\frac{u^2}{\frac{25}{4}}+\frac{v^2}{\frac{9}{4}}=1$$



و نگاشت $w=\frac{1}{2}w_1$ یک انقباض است. پس جواب یک بیضی است، که قطر بزرگ آن موازی محور حقیقی است.

مثال۱۰۰: نگاشت $f(z)=\sin z$ خطوط موازی محور x ها و خطوط موازی محور y ها را به ترتیب به کدام یک تبدیل می‌کند؟
(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

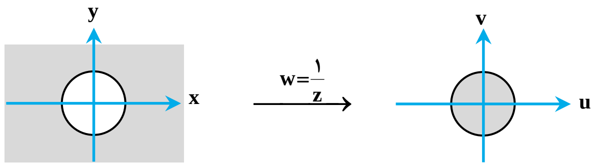
۱) مستطیل‌های گذرنده از مبدأ
۲) دایره
۳) خطوط موازی محور yها و خطوط موازی محور xها
۴) بیضی و هذلولی

پاسخ: گزینه «۴» نگاشت $w=\sin z$ خطوط موازی محور xها $(y=c)$ را به بیضی و خطوط موازی محور yها $(x=c)$ را به هذلولی تبدیل می‌کند.

مثال۱۰۱: تبدیل $w=\frac{1}{z}$:
(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۷)

۱) تمام صفحه z را بر تمام صفحه w می‌نگارد.
۲) ربع اول صفحه z را روی نیم صفحه بالایی w می‌نگارد.
۳) سطح خارج دایره در صفحه z را روی سطح داخل دایره در صفحه w می‌نگارد.
۴) سطح داخل دایره را در صفحه z به سطح خارج دایره در صفحه w می‌نگارد.

پاسخ: گزینه «۳» تابع $w=\frac{1}{z}$ در نقطه $z=0$ غیرتحلیلی است، اما در $z=\infty$ تحلیلی است. بنابراین کلیه نقاط خارج دایره در صفحه z را به نقاط داخل دایره در صفحه w می‌نگارد.



مثال۱۰۲: نگاشت $w=\cos \pi z$ ، نیم‌نوار $0\le x\le 1$ و $y\ge 0$ از صفحه‌ی z را به چه ناحیه‌ای از صفحه‌ی w تبدیل می‌کند؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

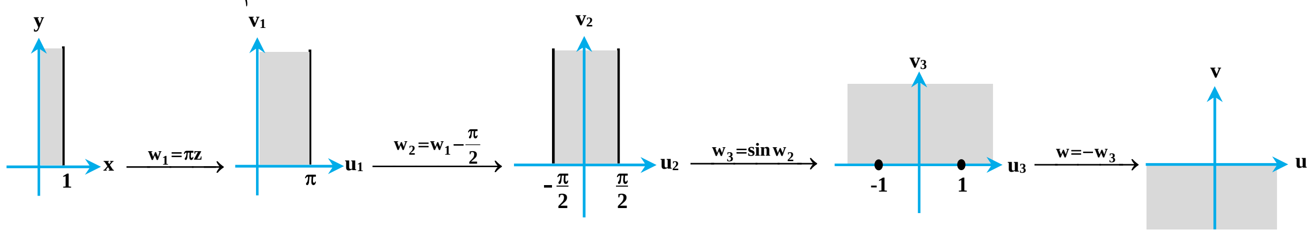
۱) $y\le 0$
۲) $x\le 0$
۳) $y\ge 0$
۴) $x\ge 0$

پاسخ: گزینه «۱»

$$w=\cos \pi z=-\sin(\pi z-\frac{\pi}{2})$$

نگاشت w را می‌توان ترکیبی از نگاشت‌های روبرو در نظر گرفت:

$$w_1=\pi z \quad , \quad w_2=w_1-\frac{\pi}{2} \quad , \quad w_3=\sin w_2 \quad , \quad w=-w_3$$



مثال۱۰۳: تصویر دایره‌ی $x^2+y^2-ax=0$ ($a\neq 0$ ثابت) تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ (از صفحه $z=x+iy$ به صفحه $w=u+iv$)، کدام است؟
(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $v=a$
۲) $u^2+v^2+av=0$
۳) $u^2+v^2-au=0$
۴) $u=\frac{1}{a}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i=u+iv$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \\ x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله دایره $x^2+y^2-ax=0$ داریم:

$$\frac{1}{u^2+v^2}-a(\frac{u}{u^2+v^2})=0 \Rightarrow 1-au=0 \Rightarrow u=\frac{1}{a}$$

مثال ۱۰۴: خط $y=\frac{x}{۲}$ از صفحه‌ی مختلط z، $(z=x+iy)$ تحت نگاشت $w=\frac{۱}{z}$، به کدام منحنی در صفحه‌ی w، $(w=u+iv)$ تبدیل می‌شود؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $v=-۲u$ ۲) $v=+\frac{۱}{۲}u$ ۳) $v=+۲u$ ۴) $v=-\frac{۱}{۲}u$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$w=\frac{۱}{z}=\frac{۱}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^۲+y^۲}=\frac{x}{x^۲+y^۲}-i\frac{y}{x^۲+y^۲}\Rightarrow u=\frac{x}{x^۲+y^۲}\ ,\ v=\frac{-y}{x^۲+y^۲}$$

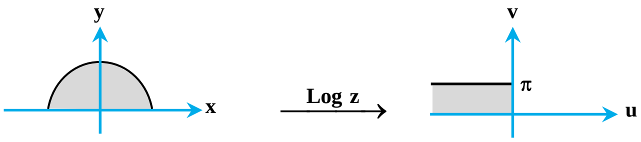
$$\Rightarrow x=\frac{u}{u^۲+v^۲}\ ,\ y=\frac{-v}{u^۲+v^۲}\ \Rightarrow y=\frac{x}{۲}\Rightarrow\frac{-v}{u^۲+v^۲}=\frac{u}{۲(u^۲+v^۲)}\Rightarrow v=-\frac{۱}{۲}u$$

مثال ۱۰۵: کدام تابع ناحیه‌ی $|z|\le ۱$ و $y\ge ۰$ را به نیم نوار $u\le ۰$ و $۰\le v\le\pi$ می‌نگارد؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۸)

۱) $g(z)=e^z$ ۲) $h(z)=\frac{۱}{۲}+z$ ۳) $f(z)=\log z$ (شاخه اصلی) ۴) $k(z)=(z+۱)^۲$

پاسخ: گزینه «۳» در مورد $w=\log z$ داریم $u=\text{Lnr}$ و $v=\theta$. پس $-\infty<u\le ۰$ و $۰\le v\le\pi$ است.



مثال ۱۰۶: تحت تبدیل $w=f(z)=\frac{z^۲+۲i}{۳z}$ چه نقاطی ثابت می‌مانند؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+i),\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱-i)$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱-i),\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱+i)$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+i),\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱+i)$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱-i),\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱-i)$

پاسخ: گزینه «۱» نقطه‌ی ثابت، نقطه‌ای است که $f(z)=z$ باشد، لذا داریم:

$$w=z$$

$$w=\frac{z^۲+۲i}{۳z}\Rightarrow z=\frac{z^۲+۲i}{۳z}\Rightarrow ۳z.z=z^۲+۲i$$

$$۳z^۲=z^۲+۲i\qquad ۲z^۲=۲i\ \Rightarrow z^۲=i$$

$$\Rightarrow z^۲=\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}\ \Rightarrow z=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{۲}+۲k\pi}{۲}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{۲}+۲k\pi}{۲}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۴}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{۴}+k\pi\right)\Rightarrow\begin{cases}k=۰\Rightarrow z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+i)\\ k=۱\Rightarrow z=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱-i)\end{cases}$$

مثال ۱۰۷: کدام خانواده از دایره‌ها بیانگر نگاشت خطوط موازی $y=x+c$ (در صفحه zها) تحت تابع $w=\frac{۱}{z}$ هستند؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $c(u^۲+v^۲)+u+v=c^۲$ ۲) $u^۲+v^۲+c(u+v)=c^۲$ ۳) $c(u^۲+v^۲)+u+v=۰$ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$x=\frac{u}{u^۲+v^۲}\quad\text{و}\quad y=\frac{-v}{u^۲+v^۲}$$

$$y=x+c\Rightarrow\frac{-v}{u^۲+v^۲}=\frac{u}{u^۲+v^۲}+c=\frac{u+(u^۲+v^۲)c}{u^۲+v^۲}\ \Rightarrow -v=u+(u^۲+v^۲)c\ \Rightarrow u+v+(u^۲+v^۲)c=۰$$

مثال ۱۰۸: فرض کنید α یک عدد مختلط باشد که $|\alpha| \neq 0,1$. اگر دایره‌ای که از α و $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ می‌گذرد با دایره یکه $|z|=1$ زاویه‌ی α بسازد، در این صورت:

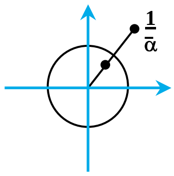
(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\alpha < \frac{\pi}{2}$

۲) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

۳) $\alpha > \frac{\pi}{2}$

۴) α می‌تواند حاده یا منفرجه یا قائمه باشد.



پاسخ: گزینه «۲» $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ تصویر نقطه α نسبت به دایره واحد می‌باشد. امتداد خط واصل بین دو نقطه α و $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ از مرکز دایره یکه عبور می‌کند. از دبیرستان می‌دانیم هر دایره‌ای که از نقطه α و تصویر آن نسبت به دایره واحد عبور کند، بر دایره واحد عمود خواهد بود. بنابراین $\alpha = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

مثال ۱۰۹: خط $x=a$, $0<a<\frac{\pi}{2}$ ثابت، و خط $x=\frac{\pi}{2}$ در صفحه xy توسط تبدیل $w=\sin z$ نگاشته می‌شوند به $(w=u+iv)$:

(مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $(\frac{u}{\sin a})^2-(\frac{v}{\cos a})^2=1$ و خط $v=0$ در صفحه w

۲) $(\frac{u}{\cosh a})^2-(\frac{v}{\sinh a})^2=1$ و نیم خط $u\geq 1, v=0$ در صفحه w

۳) $(\frac{u}{\sin a})^2+(\frac{v}{\cos a})^2=1$، و نیم خط $u\geq 1, v=0$ در صفحه w

۴) شاخه راست هذلولی $(\frac{u}{\sin a})^2-(\frac{v}{\cos a})^2=1$ و نیم خط $v=0$, $u\geq 1$ در صفحه w

پاسخ: گزینه «۴» نقش هر خط ثابت $x=c$ تحت نگاشت $w=\sin z$ بصورت مقابل می‌باشد:

$$\frac{u^2}{\sin^2 x}-\frac{v^2}{\cos^2 x}=1$$

پس تصویر خط $x=\frac{\pi}{2}$ تحت نگاشت $w=\sin z$ بصورت $u\geq 1, v=0$ می‌باشد.

مثال ۱۱۰: ناحیه $\text{Im}(z)\leq 1$ از صفحه z تحت نگاشت وارون $(w=\frac{1}{z})$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $|w-\frac{1}{2}|\geq \frac{1}{2}$

۲) $|w-\frac{i}{2}|\geq \frac{1}{2}$

۳) $|w+\frac{1}{2}|\geq \frac{1}{2}$

۴) $|w+\frac{i}{2}|\geq \frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با جایگذاری $z=\frac{1}{w}$ در معادله $\text{Im}(z)\leq 1$ خواهیم داشت:

$$\text{Im}(\frac{1}{w})\leq 1 \Rightarrow \text{Im}(\frac{1}{u+iv})\leq 1 \Rightarrow \text{Im}(\frac{u-iv}{u^2+v^2})\leq 1 \Rightarrow \frac{-v}{u^2+v^2}\leq 1$$

$$u^2+v^2+v\geq 0 \Rightarrow (u)^2+(v+\frac{1}{2})^2\geq \frac{1}{4}$$

رابطه فوق نشان دهنده نقاط خارج دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{i}{2})$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$ می‌باشد که می‌توان آنرا به صورت روبرو نوشت: $|w+\frac{i}{2}|\geq \frac{1}{2}$

مثال ۱۱۱: اگر $D:\{z=x+iy : y=2x+1\}$ و $w=\frac{1}{z}$ آنگاه تصویر D تحت تابع w کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) $(u-1)^2+(v-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

۲) $(u+1)^2+(v-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$

۳) $(u-1)^2+(v+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

۴) $(u+1)^2+(v+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» چون $w=\frac{1}{z}$ پس $z=\frac{1}{w}$. فرض کنیم $w=u+iv$ در این صورت داریم:

$$z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}=(\frac{u}{u^2+v^2})+(\frac{-v}{u^2+v^2})i=x+iy$$

چون در D داریم $y=2x+1$ پس اگر $z=\frac{1}{w}$ بخواهد در D باشد، باید داشته باشیم.

$$(\frac{-v}{u^2+v^2})=2(\frac{u}{u^2+v^2})+1 \Rightarrow \frac{-v}{\cancel{u^2+v^2}}=\frac{2u+u^2+v^2}{\cancel{u^2+v^2}} \Rightarrow u^2+2u+v^2+v=0 \Rightarrow (u+1)^2+(v+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$$

مثال ۱۱۲: تصویر خط $x=\frac{-\pi}{4}$ در صفحه z، تحت نگاشت $w=u+iv=\sin z$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) قسمتی از هذلولی $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ که در ربع دوم قرار دارد. ۲) شاخه سمت راست هذلولی $u^2-v^2=\frac{1}{2}$

۳) قسمتی از هذلولی $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ که در ربع چهارم قرار دارد. ۴) شاخه سمت چپ هذلولی $u^2-v^2=\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» تصویر خط $x=c$ تحت نگاشت $w=\sin z$ به صورت هذلولی مقابل می‌باشد:
$$\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

چون $c=-\frac{\pi}{2}$، داریم:
$$\frac{u^2}{\sin^2(-\frac{\pi}{4})}-\frac{v^2}{\cos^2(-\frac{\pi}{4})}=1 \Rightarrow +2u^2-2v^2=1 \Rightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}$$

خط عمودی $x=k$ $(0<k<\frac{\pi}{2})$ تحت نگاشت $w=\sin z$ به شاخه سمت راست هذلولی $\frac{u^2}{\sin^2 k}-\frac{v^2}{\cos^2 k}=1$ تبدیل می‌گردد. همچنین خط عمودی $x=k$، $(-\frac{\pi}{2}<k<0)$ تحت نگاشت $w=\sin z$ به شاخه سمت چپ هذلولی فوق تبدیل می‌گردد. بنابراین تصویر خط $x=-\frac{\pi}{4}$، شاخه سمت چپ هذلولی تبدیل می‌شود.

مثال ۱۱۳: کدام تبدیل $|z|<3$ را روی $|w-1-i|>6$ تصویر می‌کند؟ (مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $w=\frac{1-i}{z}$ ۲) $w=(1-i)+\frac{18}{z}$ ۳) $w=(1-i)+2z$ ۴) $w=(1-i)+\frac{1}{z}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. متأسفانه یک اشتباه تایپی در صورت سؤال باعث شده این سؤال جالب به یک تست غلط تبدیل شود. اما اگر صورت سؤال به شکل $|w-1+i|>6$ اصلاح شود جواب گزینه‌ی (۲) است و پاسخ آن چنین خواهد بود:

در ناحیه‌ی $|z|<3$ داریم $0\le r<3$ و $-\pi<\theta\le\pi$. نگاشت $w_1=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$، r را وارونه می‌کند و θ را قرینه می‌کند. پس در صفحه‌ی w_1 داریم:

$\begin{cases} r\to\frac{1}{r} \\ \theta\to-\theta \end{cases}$ بنابراین در این صفحه، $\frac{1}{3}<r<\infty$ و $-\pi<\theta\le\pi$ است. این ناحیه، بیرون دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{1}{3}$ است. اگر آن را در ۱۸ ضرب کنیم $(w_2=18w_1)$ ناحیه‌ی بیرون از دایره‌ای به شعاع ۶ حاصل می‌شود. حال کافیست توسط نگاشت $w=(1-i)+w_2$ مرکز آن را به $1-i$ انتقال دهیم.

نتیجه آن است که:
$$w=(1-i)+w_2=(1-i)+18w_1=(1-i)+\frac{18}{z}$$

مثال ۱۱۴: تصویر نیم صفحه بالایی $(\operatorname{Im} z>0)$ توسط تبدیل $w=\operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+1}$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $0<\operatorname{Im} w<\pi$ ۲) $\pi\le\operatorname{Im} w\le 2\pi$ ۳) $\frac{\pi}{2}\le\operatorname{Im} w\le\frac{3\pi}{2}$ ۴) $-\frac{\pi}{2}\le\operatorname{Im} w\le\frac{\pi}{2}$

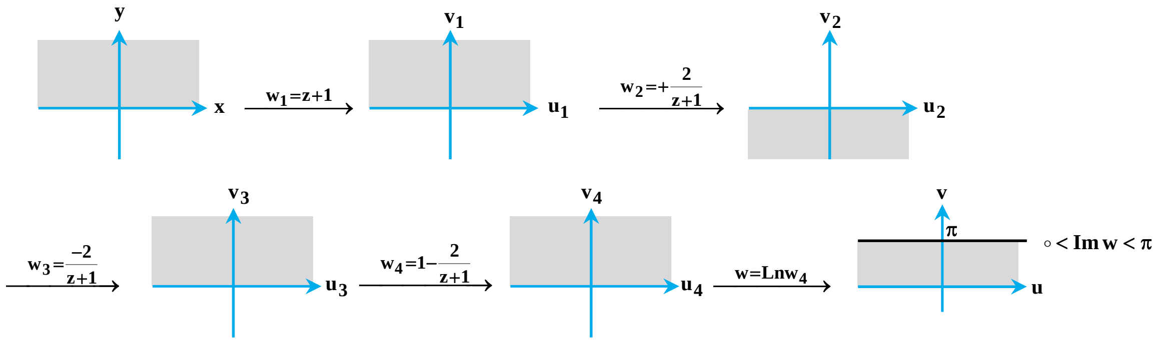
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عبارت جلوی Ln را ساده می‌کنیم:
$$\operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+1}=\operatorname{Ln}\frac{z+1-2}{z+1}=\operatorname{Ln}(1+\frac{-2}{z+1})$$

انتقال $w_1=z+1$، نیم‌صفحه‌ی بالایی را به روی خودش می‌نگارد. در صفحه‌ی w_1 داریم $0\le\theta\le\pi$ و $0\le r<\infty$. نگاشت $w_2=\frac{2}{w_1}$ در فرم قطبی چنین عمل می‌کند:
$$w_2=\frac{2}{re^{i\theta}}=\frac{2}{r}e^{-i\theta}$$

بنابراین اندازه‌ها وارونه شده و البته ۲ برابر می‌شوند. آرگومان‌ها هم قرینه می‌شوند. در صفحه‌ی w_2 داریم: $0<r<\infty \ , \ -\pi\le\theta\le 0$

یعنی نیم‌صفحه‌ی پایینی حاصل می‌شود. نگاشت $w_3=-w_2$ این ناحیه را قرینه کرده و به نیم‌صفحه‌ی بالایی تبدیل می‌کند. سپس نگاشت $w_4=1+w_3$ این ناحیه را یک واحد به سمت راست می‌برد که باز هم نیم صفحه بالایی حاصل خواهد شد. اکنون داریم $0\le r<\infty$ و $0\le\theta\le\pi$

بنابراین $-\infty<\operatorname{Ln} r<+\infty$ و به این ترتیب در نگاشت $w=\operatorname{Ln} w_4=\operatorname{Ln} r+i\theta$، خواهیم داشت $-\infty<u<+\infty$ و $0\le v\le\pi$.



مثال ۱۱۵: نگاشت $w=\dfrac{z}{۱-z}$ نیم صفحه بالایی صفحه zها را به کدام ناحیه در صفحه wها می‌نگارد؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

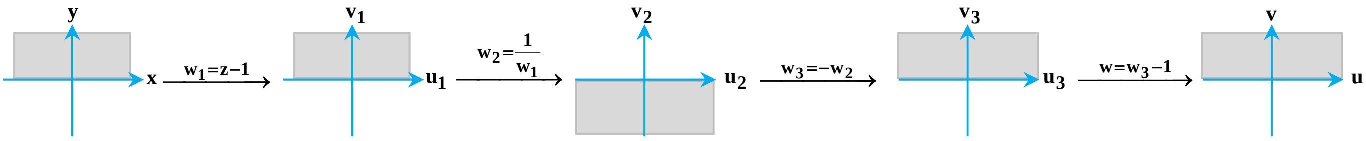
۱) فقط ربع اول ۲) فقط ربع سوم ۳) فقط نیمه بالایی ۴) فقط نیمه پایینی

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا با ساده کردن ضابطه نگاشت داریم: $\dfrac{z}{۱-z}=\dfrac{z-۱+۱}{۱-z}=-۱+\dfrac{۱}{۱-z}=-۱-\dfrac{۱}{z-۱}$

فرض کنیم $w_۱=z-۱$ ، $w_۲=\dfrac{۱}{w_۱}=\dfrac{۱}{z-۱}$ ، $w_۳=-w_۲=-\dfrac{۱}{z-۱}$ و $w=w_۳-۱=-۱-\dfrac{۱}{z-۱}$ باشد. انتقال $w_۱=z-۱$ تأثیری روی نیم‌صفحه‌ی بالایی ندارد. در صفحه‌ی $w_۱$ داریم $\circ\le r<\infty$ و $\circ<\theta<\pi$. نگاشت $w_۲$ اندازه‌ها را وارونه و θ را قرینه می‌کند، پس در صفحه‌ی $w_۲$ داریم: $-\pi\le\theta\le\circ$ و $\circ\le r<\infty$ یعنی نیم‌صفحه‌ی پایینی بدست می‌آید.

$w_۳=-w_۱$ در واقع دوران ۱۸۰ درجه است، زیرا $-۱=e^{i\pi}$ است. دوباره به نیم‌صفحه‌ی بالایی می‌رسیم. در پایان انتقالِ $w=w_۳-۱$ تأثیری روی ناحیه ندارد و در نهایت نیم‌صفحه‌ی $v>\circ$ جواب است.



مثال ۱۱۶: نگاشت ناحیه $D=\{z=x+iy\,|\,\text{Re}\,z\ge ۲\ \&\ \text{Im}\,z\le ۲\}$ تحت تابع $w=f(z)=e^z$ ، عبارت است از:
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $\text{Arg}w\ge ۲\ ,\ |w|\le e^{-۲}$ ۲) $\text{Arg}w\ge ۲\ ,\ |w|\le e^{۲}$ ۳) $\text{Arg}w\le ۲\ ,\ |w|\ge e^{-۲}$ ۴) $\text{Arg}w\le ۲\ ,\ |w|\ge e^{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا اندازه و آرگومان e^z را مشخص می‌کنیم: $w=e^z=e^{x+iy}\Rightarrow\begin{cases}|w|=e^x\\ \text{Arg}w=y\end{cases}$

$$D=\{z\,|\,\text{Re}\,z\ge ۲\ ,\ \text{Im}\,z\le ۲\}\Rightarrow\begin{cases}x\ge ۲\\ y\le ۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|w|=e^x\ge e^۲\\ \text{Arg}w=y\le ۲\end{cases}$$

مثال ۱۱۷: نگاشت ناحیه خارج از دایره واحد در نیمه بالایی صفحه zها تحت تابع $w=z+\dfrac{۱}{z}$ ، عبارت است از:
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) نیمه بالایی صفحه wها و خارج از دایره واحد ۲) نقاط درون نیمه بالایی دایره واحد
۳) نیمه بالایی صفحه wها ۴) نیمه پایینی صفحه wها

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

تحت نگاشت $w=u+iv=z+\dfrac{۱}{z}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases}u=(r+\frac{۱}{r})\cos\theta\\ v=(r-\frac{۱}{r})\sin\theta\end{cases}\xrightarrow[r>۱]{\circ<\theta<\pi}\begin{cases}-\infty<u<\infty\\ v>\circ\end{cases}$$

توضیح: البته اگر رابطه‌ی فوق نیز در خاطر شما نبود، با انتخاب نقاط خارج دایره واحد به راحتی به جواب می‌رسیدید!

مثال ۱۱۸: دایره‌ای به مرکز نقطه z_0 و به شعاع ρ_0 به قسمی که $|z_0| = \rho_0$، در صفحه z، مفروض است. در اثر تبدیل $w = \frac{1}{z}$، معادله این دایره به کدام رابطه در صفحه w تبدیل می‌شود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)

۱) $1 + 2\mathrm{Re}(\overline{z}_0\overline{w}) = 0$ ۲) $1 - 2\mathrm{Re}(z_0 w) = 0$ ۳) $1 + 2\mathrm{Re}(z_0 w) = 0$ ۴) $1 - 2\mathrm{Re}(\overline{z}_0 w) = 0$

پاسخ: گزینه «۲» دایره‌ی ذکر شده دارای معادله‌ی زیر است:

$$|z - z_0| = |z_0|$$

نگاشت داده شده به صورت $w = \frac{1}{z}$ است، پس داریم:

$$\left|\frac{1}{w} - z_0\right| = |z_0| \Rightarrow |1 - wz_0| = |wz_0| \Rightarrow \sqrt{(1 - wz_0)(1 - \overline{wz_0})} = \sqrt{(wz_0)(\overline{wz_0})}$$

$$\Rightarrow 1 - wz_0 - \overline{wz_0} + (wz_0)(\overline{wz_0}) = (wz_0)(\overline{wz_0}) \Rightarrow 1 - (wz_0) + (\overline{wz_0}) = 0 \Rightarrow 1 - 2\mathrm{Re}(wz_0) = 0$$

مثال ۱۱۹: تبدیل $T(z) = \frac{z}{z-1}$، محور اعداد حقیقی را به کدام مجموعه تبدیل می‌کند؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) محور اعداد حقیقی ۲) نیم‌محور راست اعداد حقیقی ۳) یک دایره ۴) یک نیم‌دایره

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با فرض $z = x + iy$، سعی می‌کنیم $T(z)$ را به صورت $T = u + iv$ بنویسیم:

$$T = \frac{x+iy}{x+iy-1} = \frac{(x+iy)[(x-1)-iy]}{(x-1)^2-(iy)^2} = \frac{x(x-1)-ixy+iy(x-1)-i^2y^2}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2-x-iy+y^2}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2} + \frac{i(-y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$u = \frac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2} \quad , \quad v = -\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

سؤال پرسیده محور حقیقی به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود. محور حقیقی در صفحه z یعنی $y = 0$ و لذا با قرار دادن $y = 0$ در تساوی‌های فوق داریم:

$$u = \frac{x^2-x}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1} \quad , \quad v = 0$$

معادلات فوق ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که فقط u مقدار دارد و همواره $v = 0$ است. این ناحیه نشان‌دهنده‌ی محور اعداد حقیقی در صفحه $u - v$ است.

مثال ۱۲۰: نگاشت $w = \frac{z^2+i}{iz^2+1}$، ربع اول صفحه‌ی z را به کدام ناحیه از صفحه‌ی w تبدیل می‌کند؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲)

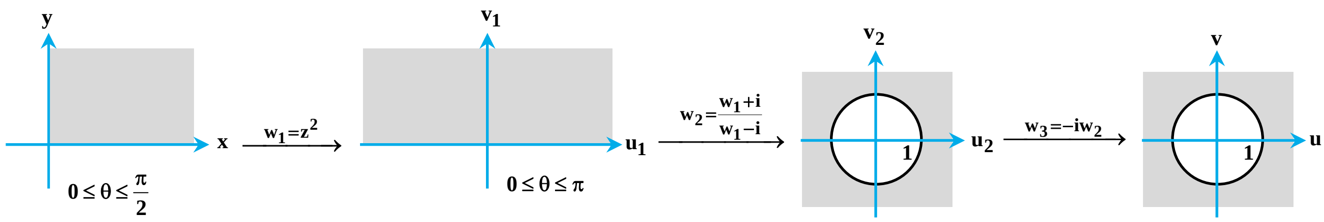
۱) بالای محور x و خارج از نیم‌دایره‌ی یکه به مرکز O ۲) خارج دایره‌ی یکه به مرکز O

۳) داخل دایره‌ی یکه به مرکز O ۴) نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی یکه به مرکز O

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ترکیب اصلی این نگاشت دو نگاشت توانی و موبیوسی می‌باشد، داریم:

$$w = \frac{z^2+i}{i(z^2+\frac{1}{i})} = -i\frac{z^2+i}{z^2-i}$$



بنابراین نگاشت به بیرون دایره یکه واحد نگاشته می‌شود و پاسخ گزینه ۲ است.

توضیح در مورد نگاشت w_2: مطابق متن کتاب، نگاشت $w = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$، ناحیه $\mathrm{Im}\, z \le 0$ را به **بیرون دایره واحد** می‌نگارد (اگر $\mathrm{Im}(z_0)$ منفی باشد) و عکس این ناحیه را به **درون دایره واحد** می‌نگارد (اگر $\mathrm{Im}\, z_0$ مثبت باشد). در این سؤال $z_0 = -i$، بنابراین نگاشت w_2، ناحیه $\mathrm{Im}\, z \ge 0$ را به بیرون دایره واحد می‌نگارد.

مثال۱۲۱: نگاشت خط $y=c_1$، تحت تابع $w=\frac{1}{z}$، کدام است؟ (مهندسی نانومواد و ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)

۱) $u^2-v^2-\frac{v}{c_1}=0$ ۲) $u^2+v^2-\frac{v}{c_1}=0$ ۳) $u^2-v^2+\frac{v}{c_1}=0$ ۴) $u^2+v^2+\frac{v}{c_1}=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$w=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2-(iy)^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

بنابراین می‌توانیم x و y را بر حسب u و v به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases} \xrightarrow{y=c_1} c_1=-\frac{v}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2=-\frac{v}{c_1} \Rightarrow u^2+v^2+\frac{v}{c_1}=0$$

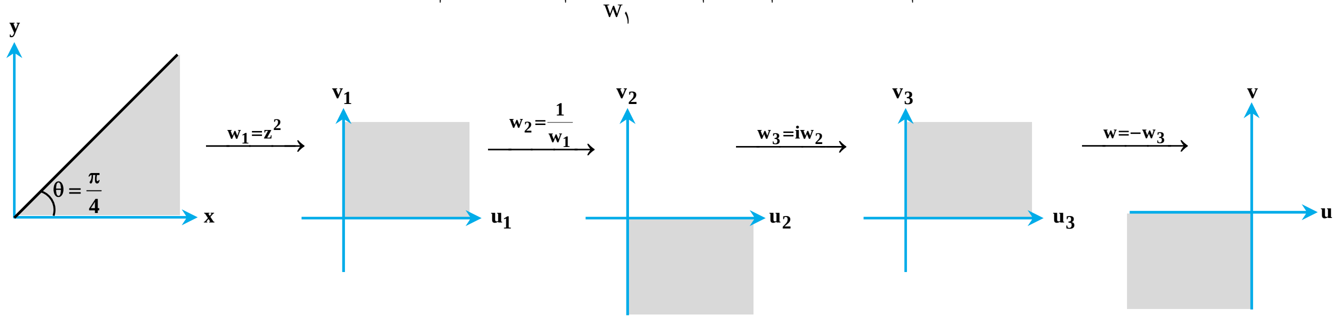
مثال۱۲۲: ناحیه‌ی $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ در صفحه‌ی z تحت نگاشت $w=\frac{-i}{z^2}$، به کدام ناحیه در صفحه‌ی w تبدیل می‌شود؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) ربع اول ۲) ربع دوم ۳) ربع سوم ۴) ربع چهارم

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بـدون حـل پاسـخ داده شده است. اما با وجود این حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

نگاشت فوق ترکیب نگاشت‌های زیر است:

$$w_1=z^2 \quad , \quad w_2=\frac{1}{w_1} \quad , \quad w_3=iw_2 \quad , \quad w=-w_3$$



مثال۱۲۳: تبدیل خطی ـ کسری $w=f(z)=\frac{iz}{z-1}$، نیم‌صفحه $\operatorname{Im} z\ge 0$ را به چه ناحیه‌ای تصویر می‌کند؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۹۲)

۱) نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Im}(w)\ge 0$ ۲) نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Im}(w)\le 0$ ۳) نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Re}(w)\le 0$ ۴) نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Re}(w)\ge 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$f(x+iy)=\frac{i(x+iy)}{(x-1)+iy}=\frac{i(x+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}=\frac{i(x^2-x+y^2-iy)}{(x-1)^2+y^2}\Rightarrow\frac{i(x^2-x+y^2)+y}{(x-1)^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases} u=\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2} \\ v=\dfrac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$$

مرز ناحیه $\operatorname{Im}(z)\ge 0$، محور $y=0$ است که تحت نگاشت فوق به $u=0$ تصویر می‌شود. حال برای تشخیص این‌که تصویر در نیمه راست خط $u=0$ است یا نیمه چپ خط $u=0$، نقطه‌ای در نیم صفحه $\operatorname{Im}(z)\ge 0$ انتخاب و تصویر آن‌را بدست می‌آوریم:

$$z=2+i \xrightarrow{\frac{iz}{z-1}} w=(\frac{1}{2})+i(\frac{3}{2})$$

پس تصویر ناحیه فوق، نیم صفحه $\operatorname{Re}(w)\ge 0$ است.

حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست!

(روش رد گزینه ها)

نگاشت

۴۰ تست در فصل نگاشت واجد شرایط کَلَکْ زدن بودن که با هم اونارو مرور می کنیم!

مثال ۱: نگاشت $w=\frac{z}{1-z}$ نیم صفحه بالایی صفحه zها را به کدام ناحیه در صفحه wها می‌نگارد؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) فقط ربع اول
۲) فقط ربع سوم
۳) فقط نیمه بالایی
۴) فقط نیمه پایینی

پاسخ: گزینه «۳» می‌تونیم اول یه نقطه تو نیم‌صفحه‌ی بالایی رو تو ضابطه‌ی w امتحان کنیم. نقطه‌ی $z=1+i$ مناسبِ و به ازای اون داریم:

$$w=\frac{z}{1-z}=\frac{1+i}{1-(1+i)}=\frac{1+i}{-i}=-\frac{1}{i}-1=i-1$$

خُب نقطه‌ی به دست اومده تو ربع دوم که اتفاقاً تو نیم صفحه بالایی هم هست، قرار داره، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) همگی به اتفاق غلطن

مثال ۲: دایره $|z+i|=1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به کدام منحنی از صفحه $w=u+iv$ تبدیل می‌شود؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $v=\frac{1}{2}$
۲) $v=-\frac{1}{2}$
۳) $v=1$
۴) $u^2+(v+1)^2=1$

پاسخ: گزینه «۱» می‌تونیم مثلاً نقطه‌ی $z=1-i$ رو که تو ناحیه $|z+i|=1$ قرار داره رو امتحان کنیم.

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{1-i^2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow v=\frac{1}{2}$$

پس گزینه (۱) جوابه (البته مشخصه که با جایگذاری $v=\frac{1}{2}$ و $u=\frac{1}{2}$ گزینه (۴) صحیح نیست.)

مثال ۳: خط $y=\frac{x}{2}$ از صفحه‌ی مختلط z، $(z=x+iy)$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$، به کدام منحنی در صفحه‌ی w، $(w=u+iv)$ تبدیل می‌شود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $v=-2u$
۲) $v=+\frac{1}{2}u$
۳) $v=+2u$
۴) $v=-\frac{1}{2}u$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال ساده و اصطلاحاً خوراکِ!! می‌تونیم مثلاً $x=2$ و $y=1$ رو انتخاب کنیم، یعنی $z=2+i$. حالا اونو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار میدیم:

$$w=\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{4-i^2}=\frac{2-i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

خُب همون‌طور که می‌بینین، تو رابطه‌ی بالا $u=\frac{2}{5}$ و $v=-\frac{1}{5}$ و این یعنی $v=-\frac{1}{2}u$، پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۴: نگاشت $w=\frac{z-1}{z-2}$ نقاط واقع بر منحنی $|z+1|=3$ را بر کدام منحنی می‌نگارد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) دایره‌ای که مرکز آن مبدأ مختصات است.
۲) خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد.
۳) دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد.
۴) خطی موازی محور مختلط.

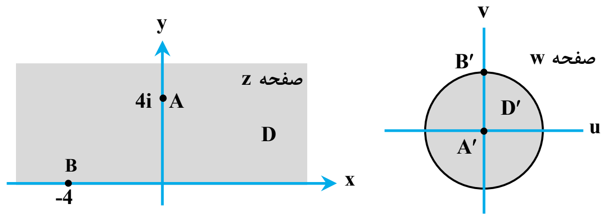
پاسخ: گزینه «۴» اولین کار اینه که یه نقطه روی منحنی انتخاب کنیم که به ما اطلاعات خوبی بِده. نقطه‌ی $z=2$ تو ضابطه‌ی منحنی صدق میکنه و وقتی تو ضابطه‌ی نگاشت قرار میدیم، می‌فهمیم که $w\to\infty$ و این یعنی نقطه‌ی $z=2$ به ناحیه‌ای تبدیل میشه که نامحدودِ، مثلاً دایره نیست! (حتماً می‌دونین که دایره نمی‌تونه به ناحیه نامحدود باشه!) این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن! چون دایره هستن! پس یکی از گزینه‌های (۲) و (۴) جوابه. گزینه (۲) میگه ناحیه‌ای که توسط این نگاشت به وجود میاد، شامل مبدأ $(w=0)$ هم هست، اما اگه قرار باشه توسط این نگاشت به مبدأ یعنی $w=0$ برسیم، باید $z=1$ باشه (صورت کسر صفر بِشه) اما $z=1$ نمی‌تونه باشه، چون روی منحنی $|z+1|=3$ قرار نداره، پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۵: در مورد نگاشت $w=\frac{2z-1}{z-2}$ کدام گزاره زیر صحیح است؟ (مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۱)

۱) این نگاشت صفحه z را روی صفحه w می‌نگارد.
۲) این نگاشت قرص واحد را به قرص واحد می‌نگارد.
۳) این نگاشت نیم‌صفحه فوقانی را به قرص واحد می‌نگارد.
۴) این نگاشت نیم‌صفحه راست را به نیم‌صفحه چپ می‌نگارد.

پاسخ: گزینه «۲» گزینه (۱) که خیلی غلطه و نیاز به توضیح نداره! گزینه (۴) هم راحت رو میشه! چون اگه مثلاً $z=3$ قرار بِدیم (یعنی یه نقطه تو نیم صفحه‌ی سمت راست انتخاب کنیم)، اونوقت $w=5$ و این یعنی نقطه‌ای تو نیم صفحه‌ی سمت راست، پس گزینه (۴) غلطه! اگه نقطه‌ی $z=2+i$ رو از نیم‌صفحه بالایی انتخاب کنیم، این نقطه توسط نگاشت به صورت $w=\frac{2(2+i)-1}{i}$ و یا به عبارت ساده‌تر به صورت $w=\frac{3+2i}{i}=2-3i$ در میاد که اصلاً درون دایره واحد قرار نداره، پس گزینه (۳) هم غلطه

مثال۶: **تابع تحلیلی که حوزهٔ D را به حوزهٔ D' تبدیل کند به طوری که نقاط A و B مطابق شکل به نقاط A' و B' دایره یکه تصویر شـوند، کـدام است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $w = \dfrac{z-i}{-iz+1}$

۲) $w = \dfrac{z+4i}{z-4i}$

۳) $w = -\dfrac{z^2+i}{iz^2+2}$

۴) $w = \dfrac{z-4i}{z+4i}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نقطهی A به نقطهی A' تبدیل شده، یعنی گزینهای جوابه که اگه به جای zهای اون، ۴i قرار بِدیم، مقدارش برابر بـا صـفر بشـه.

فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره $\quad w = f(4i) = \dfrac{4i-4i}{4i+4i} = 0$

مثال۷: **تبدیل خطی کسری کــه بــه ترتیب نقاط۱- ، i و ۱+i، در صفحه z را بر روی نقاط ۰، ∞ و ۲+i در صفحه w تصویر میکند، کدام است؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $w = \dfrac{z+1}{z-i}$ ۲) $w = \sqrt{2}\dfrac{z+1}{z-i}$ ۳) $w = \dfrac{z-i}{z+1}$ ۴) $w = \dfrac{1}{2}\dfrac{z+1}{z-i}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تنها گزینهای که نقطهی ۱+i رو به نقطهی ۲+i تبدیل میکنه، نگاشت داده شده تو گزینه (۱) هستش

مثال۸: **نگاشت $w = \dfrac{z^2+i}{iz^2+1}$ ، ربع اول صفحهٔ z($y>0$ و $x>0$) را به کدام ناحیه از صفحهٔ w تبدیل میکند؟** (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲ و مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) نیم دایره بالایی از دایرهٔ یکه ۲) خارج دایره یکه

۳) بالای محور u و خارج از نیمدایره یکه ۴) داخل دایره یکه

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نقطهی $z = 1+i$ تو ناحیه ذکر شده قرار داره (یعنی تو ربع اولِ) اگه اونو تو ضابطهی نگاشت قرار بِدیم، داریم:

$$w = \frac{(1+i)^2+i}{i(1+i)^2+1} = \frac{1+i^2+2i+i}{i(1+i^2+2i)+1} = -3i$$

همونطور که میبینین نقطهی فوق خارج از دایره یکه هستش و از طرفی پایین محور u هم قرار داره، پس گزینه (۲) جوابه

مثال۹: **تبدیل $T(z) = \dfrac{z}{z-1}$ ، محور اعداد حقیقی را به کدام مجموعه تبدیل میکند؟** (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) محور اعداد حقیقی ۲) نیممحور راست اعداد حقیقی ۳) یک دایره ۴) یک نیمدایره

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگه $z = \frac{1}{2}$ باشه، اونوقت $T = -1$ میشه، بنابراین گزینه (۲) غلطه! (چون وقتی $T = -1$ به دست اومده یعنی نـیممحـور چـپ هـم میتونه تو جواب باشه.) گزینههای (۳) و (۴) هم به راحتی از بین جوابها حذف میشن، چرا؟ برای این که اگه قرار باشه ناحیه جدیـد دایـره یـا نـیمدایـره باشه، باید به ازای برخی zها، مقدار T عددی مختلط بِشه، اما با توجه به صورت سؤال وقتی z از بین اعـداد حقیقـی انتخـاب میشـه، چـه جـوری ممکنـه $T(z) = \dfrac{z}{z-1}$ عددی مختلط رو به ما تحویل بِده!؟ پس بدون این که لازم باشه محاسبهای انجام بِدیم، میتونیم گزینه (۱) رو تو پاسخنامه وارد کنیم

مثال ۱۰: نوار $\frac{\pi}{۲} < \text{Im}\{z\} < \pi$، تحت نگاشت $w = \frac{۱+e^z}{۱-e^z}$ به چه ناحیه‌ای در صفحه w تبدیل می‌شود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)

۱) داخل نیم‌دایره واحد که در آن $\text{Im}\{w\} > ۰$

۲) داخل مثلث متساوی‌الساقین با رئوس $(-۱,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$

۳) تمام صفحه مختلط به غیر از داخل نیم‌دایره واحد که در آن $\text{Im}\{w\} > ۰$

۴) تمام صفحه مختلط به غیر از داخل مثلث متساوی‌الساقین با رئوس $(-۱,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$

پاسخ: گزینه «۱» خُب با یه سؤال نسبتاً سخت روبه‌رو هستیم، ولی ما به اینم کَلَک می‌زنیم! اولاً توجه کنین که گزینه‌های (۳) و (۴) دارن میگن این ناحیه که تو صفحه‌ی uv تولید میشه، بی‌در و پیکره! یعنی از بالا و پایین و حتی از چپ و راست نامحدودِ! اگه قرار باشه اینا راست بِگن، باید مخرج w صفر بشه، خُب حالا شما بگید ببینم آیا امکان داره $۱-e^z$ با شرط $\frac{\pi}{۲} < \text{Im}\, z < \pi$ صفر بِشه!؟ معلومه که نه؟ چون مثلاً z نمی‌تونه صفر بِشه، پس این گزینه‌های (۳) و (۴) رو که خیلی دروغ‌گو بودن اخراج می‌کنیم اما برای انتخاب بین گزینه‌های (۱) و (۲) باید کمی بـه اطلاعـات نگاشـتی خودمـون هـم رجـوع کنیم، این که آیا تا حالا دیدین چنین نگاشت‌هایی مثلاً مثلث تولید کنن!؟ یا بیشتر نیم‌دایره یا دایره و این جور چیزا رو تولید میکـنن! بنـابراین گزینـه (۱) جوابه

مثال ۱۱: ناحیه‌ی $۰ < \theta < \frac{\pi}{۴}$ در صفحه‌ی z تحت نگاشت $w = \frac{-i}{z^۲}$، به کدام ناحیه در صفحه‌ی w تبدیل می‌شود؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

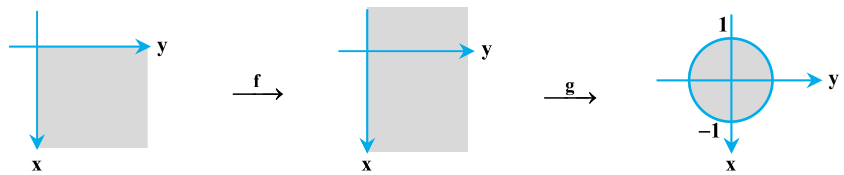
۱) ربع اول ۲) ربع دوم ۳) ربع سوم ۴) ربع چهارم

پاسخ: گزینه «۳» اگه نقطه‌ی $z = ۲+i$ که تو ناحیه‌ی $۰ < \theta < \frac{\pi}{۴}$ قرار داره رو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار بِدیم، داریم:

$$w = -\frac{i}{z^۲} = \frac{-i}{(۲+i)^۲} = \frac{-i}{۴-۱+۴i} = \frac{-i}{۳+۴i} = \frac{-i(۳-۴i)}{۳^۲-(۴i)^۲} = \frac{-۳i-۴}{۹+۱۶} = -\frac{۴}{۲۵} - \frac{۳}{۲۵}i$$

که نقطه‌ای تو ربع سومِ، پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۲: نگاشت‌های f و g در شکل زیر، کدام‌اند؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۳)



۱) $f(z) = z^۲, g(z) = \frac{۱}{z+i}$ ۲) $f(z) = z^۳, g(z) = \frac{z-۱}{z+۱}$ ۳) $f(z) = z^۲, g(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ۴) $f(z) = z^۳, g(z) = \frac{۱}{z+۱}$

پاسخ: گزینه «۳» اولاً توجه کنین که طراح محترم، محور رو به صورت وارونه نامگذاری کرده! حالا چرا؟ خـدا مـی‌دونـه خُـب همـون‌طـور کـه می‌بینین نگاشت g یه جوریه که به ازای نقطه‌ی $z = -۱+۰i$ به سمت یه ناحیه نامحدود نمی‌ره (چون ناحیـه رو بـه داخل یـه دایـره بـرده کـه ناحیـه‌ای محدودِ!) پس گزینه‌های (۲) و (۴) به اتفاق هم غلطن! (چون به ازای $z = -۱$ نگاشت g به سمت بی‌نهایت میره!) بین گزینه‌های (۱) و (۳) تفاوت تو صورت کسر نگاشت g هستش. نگاشت داده شده تو گزینه (۳) میگه به ازای $z = i$ به مبدأ می‌رسیم، اما نگاشت داده شده تو گزینه‌ی (۱) به ما میگه به ازای هـیچ مقداری نگاشت g نمی‌تونه نقطه‌ی $(۰,۰)$ رو تولید کنه. به نظر شما کدوم راست میگه، واضحِ که گزینه (۳) درست میگه

مثال ۱۳: تبدیل $w=\sin z$ را در نظر می‌گیریم از نوار قائم $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$ به صفحه w، اگر $z=x+iy$ و $w=u+iv$، آن گاه متغیر x برحسب u و v در کدام گزینه زیر صحیح می‌باشد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۱)

۱) $|x|=\mathrm{Arcsin}\dfrac{\sqrt{(u+۱)^۲+v^۲}-\sqrt{(u-۱)^۲+v^۲}}{۲}$

۲) $x=\mathrm{Arcsin}\dfrac{\sqrt{(u+۱)^۲+v^۲}-\sqrt{(u-۱)^۲+v^۲}}{۲}$

۳) $x=\mathrm{Arcsin}\dfrac{\sqrt{(u-۱)^۲+v^۲}-\sqrt{(u+۱)^۲+v^۲}}{۲}$

۴) $x=\mathrm{Arcsin}\dfrac{|\sqrt{(u+۱)^۲+v^۲}-\sqrt{(u-۱)^۲+v^۲}|}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم $z=\frac{\pi}{۲}+۰i$ (یعنی $x=\frac{\pi}{۲}$ و $y=۰$)، بنابراین $w=\sin\frac{\pi}{۲}=۱+۰i$ و این یعنی $u=۱$ و $v=۰$. با قرار دادن $u=۱$ و $v=۰$ تو گزینه‌ها شرایط رو چک می‌کنیم، هر کدوم $x=\frac{\pi}{۲}$ و $y=۰$ تولید کرد جوابه!

گزینه (۱) : $|x|=\mathrm{Arcsin}\frac{۲}{۲}\Rightarrow |x|=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{۲}$

گزینه (۲) : $x=\mathrm{Arcsin}\frac{۲}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$

گزینه (۳) : $x=\mathrm{Arcsin}(-\frac{۲}{۲})\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۲}$

گزینه (۴) : $x=\mathrm{Arcsin}(\frac{۲}{۲})\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$

بنابراین گزینه (۲) و (۴) که تو اونا $y=۰$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ به دست اومده، می‌تونن جواب باشن. بـه ازای $z=-\frac{\pi}{۲}$، گزینـه (۴)، عـددِ $x=\frac{\pi}{۲}$ رو تولیـد مـی‌کنـه، پس غلطه و فقط گزینه (۲) می‌تونه جواب باشه

مثال ۱۴: تعیین کنید تبدیل $w=e^{ia}(\frac{z-z_۰}{z-\bar{z}_۰})$ که در آن a یک عدد حقیقی ثابت و $\mathrm{Im}(z_۰)<۰$ است، نیم صفحه پایینی $\mathrm{Im}\,z\le ۰$ را به کدام یـک از ناحیه‌های داده شده می‌نگارد: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\mathrm{Im}\,w\le ۰$ ۲) $\mathrm{Im}\,w\ge ۰$ ۳) $|w|\ge ۱$ ۴) $|w|\le ۱$

پاسخ: گزینه «۴» خُب اول بهتره از دستِ e^{ia} خلاص شیم! چون a یه عدد حقیقـی هسـتش، بنـابراین مـی‌تـونیم مـثلاً $a=۰$ رو انتخـاب کنـیم و لذا $e^{ia}=e^{i۰}=۱$ و چون $\mathrm{Im}\,z_۰<۰$، پس می‌تونیم مثلاً $z_۰=-i$ رو انتخاب کنیم، بنابراین $\bar{z}_۰=+i$ میشه و به نگاشت $w=\frac{z+i}{z-i}$ میرسیم. حـالا سـؤال اینه که این نگاشت نیم‌صفحه‌ی پایینی رو به کدوم ناحیه تبدیل میکنه!؟ معلومه چون ناحیه نیم‌صفحه‌ی پـایینی هسـتش، پـس «$z-i$» هـیچ‌وقـت صـفر نمیشه و این یعنی w هیچ‌وقت بی‌نهایت نمیشه (w نامحدود نیست) پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) که ناحیه‌هایی نامحدودن، غلطن

مثال ۱۵: نگاشت ناحیه خارج از دایره واحد در نیمه بالایی صفحه zها تحت تابع $w=z+\frac{۱}{z}$، عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) نیمه بالایی صفحه wها و خارج از دایره واحد
۲) نقاط درون نیمه بالایی دایره واحد
۳) نیمه بالایی صفحه wها
۴) نیمه پایینی صفحه wها

پاسخ: گزینه «۳» نقطه‌ی $z=\frac{۳}{۲}i$ خارج از دایره واحد تو نیمه بالایی صفحه z قرار داره، اگه اونو تو ضابطه‌ی w قرار بِدیم، داریم:

$$w=\frac{۳}{۲}i+\frac{۱}{\frac{۳}{۲}i}=\frac{۳}{۲}i-\frac{۲}{۳}i=(\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{۳})i=\frac{۵}{۶}i$$

این نقطه درون دایره واحد تو نیم صفحه بالایی قرار داره، پس گزینه‌های (۱) و (۴) غلطن! معلومه که اگه مثلاً $z=۲i$ قرار بِدیم، اونوقت $w=\frac{۳}{۲}i$ میشه و این یعنی گزینه (۲) هم غلطه و گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۶: نگاشت ناحیه $D=\{z=x+iy\,|\,\mathrm{Re}\,z\ge ۲\ \&\ \mathrm{Im}\,z\le ۲\}$ تحت تابع $w=f(z)=e^z$ ، عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $\mathrm{Arg}\,w\ge ۲\ ,\ |w|\le e^{-۲}$ ۲) $\mathrm{Arg}\,w\ge ۲\ ,\ |w|\le e^{۲}$ ۳) $\mathrm{Arg}\,w\le ۲\ ,\ |w|\ge e^{-۲}$ ۴) $\mathrm{Arg}\,w\le ۲\ ,\ |w|\ge e^{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دونیم $|w|=|e^z|=|e^x|=|e^{\mathrm{Re}\,z}|$، و چون $\mathrm{Re}\,z\ge ۲$ هستش، بنابراین $|w|\ge e^۲$ میشه پس گزینه (۴) جوابه

مثال۱۷: **معادله نگاشت خط $x+y=۱$ تحت تابع $w=e^z$ عبارت است از:** (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $(u^۲+v^۲)^{\frac{۱}{۲}}+\frac{v}{u}=۱$
۲) $(u^۲+v^۲)^{-\frac{۱}{۲}}+\frac{v}{u}=۱$
۳) $\ln(u^۲+v^۲)^{-\frac{۱}{۲}}+\tan^{-۱}(\frac{u}{v})=۱$
۴) $\ln(u^۲+v^۲)^{\frac{۱}{۲}}+\tan^{-۱}(\frac{v}{u})=۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولین مرحله از کار اینه که یه نقطه‌ی مناسب روی منحنی انتخاب کنیم، ببینیم نگاشت چه بلایی سر این نقطه میاره!؟ نقطه‌ی $y=۰$ و $x=۱$ یا به عبارت دیگه نقطه‌ی $z=۱+۰i$ نقطه‌ی خوبیه، که با این نگاشت به صورت $w=e^۱$ در میاد، یعنی به نقطه‌ی $u=e$ و $v=۰$ می‌رسیم. حالا باید ببینیم این دو نقطه تو کدوم معادله صدق میکنن!؟ واضحِ فقط تو معادله‌ی داده شده در گزینه (۴) صدق میکنن

$$\operatorname{Ln}(u^۲+v^۲)^{\frac{۱}{۲}}+tg^{-۱}(\frac{v}{u})=۱\Rightarrow \operatorname{Ln}(e^۲+۰)^{\frac{۱}{۲}}+tg^{-۱}(\frac{۰}{e})=\operatorname{Ln}e+۰=۱$$

مثال۱۸: **تصویر ناحیه $|z-۱|<۱$ توسط نگاشت $w=\frac{۱}{z}$ عبارت است از:** (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $|w-۱|\le ۱$
۲) $v>\frac{۱}{۲}$
۳) $u^۲+v^۲\le ۱$
۴) $u\ge\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اول نقطه‌ای رو برای z انتخاب می‌کنیم که تو شرط $|z-۱|<۱$ صدق کنه، بعدش این نقطه رو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار میدیم ببینیم چی میشه!؟

$$z=\frac{۱}{۳}+\frac{i}{۳}\Rightarrow |z-۱|=\left|\frac{-۲}{۳}+\frac{i}{۳}\right|=\sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۹}}=\sqrt{\frac{۵}{۹}}<۱\Rightarrow$$ تو ناحیه قرار داره

$$w=\frac{۱}{z}=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{i}{۳}}\times\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{i}{۳}}{\frac{۱}{۳}-\frac{i}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{i}{۳}}{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}}=\frac{۹}{۲}\times(\frac{۱}{۳}-\frac{i}{۳})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}i\Rightarrow u=\frac{۳}{۲}\ ,\ v=-\frac{۳}{۲}$$

دو نقطه‌ی بالا، فقط تو رابطه‌ی داده شده تو گزینه (۴) صدق میکنن

مثال۱۹: **تابع مختلط $w=\frac{z+۱}{z+۲}$ ، دایره $|z+۱|=۱$ را به چه ناحیه یا منحنی‌ای می‌نگارد؟** (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\operatorname{Re}(w)=\frac{۱}{۲}$
۲) $\operatorname{Im}(w)=۰/۲$
۳) $۲x+iy$
۴) $-۵+۳i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگه نقطه‌ی $z=۰$ که اتفاقاً روی دایره قرار داره رو در نظر بگیریم، $w=\frac{۱}{۲}$ میشه. فقط گزینه (۱) چنین کاری می‌تونه انجام بده

مثال۲۰: **تصویر دایره $|z-i|=۱$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{i}{z}$ کدام است؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $v=\frac{۱}{۲}$
۲) $u=\frac{۱}{۲}$
۳) $u=\frac{-۱}{۲}$
۴) $v=\frac{-۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نقطه‌ی $z=۰+۲i$ روی دایره $|z-i|=۱$ قرار داره که اگه اونو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار بدیم، داریم: $w=\frac{i}{z}=\frac{i}{۲i}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow u=\frac{۱}{۲}$

پس گزینه (۲) جوابه

مثال۲۱: **تصویر دایره $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{۱}{z}$ کدام است؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $v=u+\frac{۱}{۲}$
۲) $u+v+\frac{۱}{۲}=۰$
۳) $(u+۱)^۲+(v-۱)^۲=\frac{۱}{۲}$
۴) $(u-۱)^۲+(v+۱)^۲=\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید یه نقطه از دایره رو انتخاب کنیم تا ببینیم نگاشت چه بلایی سر اون میاره. اگه مثلاً نقطه‌ی $z=۰+۲i$ رو انتخاب کنیم، اونوقت داریم: $w=\frac{۱}{z}=\frac{۱}{۲i}=-\frac{i}{۲}\Rightarrow u=۰\ ,\ v=-\frac{۱}{۲}$

خُب همون‌طور که می‌بینین $u=۰$ و $v=-\frac{۱}{۲}$ بدست اومده، که فقط تو گزینه (۲) صدق می‌کنن، پس این گزینه جوابه

مثال ۲۲: نگاشت $w=\frac{۱}{۱-z}$ ناحیه $\{z=x+iy \mid x<۱\}$ را به کدام ناحیه در صفحه w ها می‌نگارد؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)

۱) $u\geq ۰\,,\,-\infty<v<\infty$ ۲) $v>۰\,,\,-\infty<u<\infty$ ۳) $v\geq ۰\,,\,-\infty<u<\infty$ ۴) $u>۰\,,\,-\infty<v<\infty$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» و «۳» خُب، نقطه‌ی $z=۰-i$ تو ناحیه‌ی داده شده صدق می‌کنه که به ازای اون $w=\frac{۱}{۱+i}=\frac{۱-i}{۱-i^۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{i}{۲}$، و این یعنی $v<۰$ هم می‌تونه باشه، پس تا اینجا گزینه‌های (۲) و (۳) غلطند! چون هیچوقت w برابر با صفر نمیشه (یعنی $u=۰$ نمیشه) پس گزینه (۱) هم غلطه و گزینه (۴) جوابه

مثال ۲۳: تصویر سهمی $y=x^۲$ تحت تبدیل $w=\frac{۱}{z}$ کدام است؟ (یادآوری: $w=u+iv\,,\,z=x+iy$) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $v(u^۲+v^۲)=-u$ ۲) $v(u+v)=-u$ ۳) $v(u^۲+v^۲)=u^۲$ ۴) $v(u^۲+v^۲)=-u^۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» یه نقطه روی سهمی مثه $x=۱$ و $y=۱$ انتخاب می‌کنیم. این نقطه تحت تبدیل $w=\frac{۱}{z}$ به شکل زیر میشه:

$$w=\frac{۱}{۱+i}=\frac{۱-i}{۱-i^۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}i \Rightarrow u=\frac{۱}{۲}\,,\,v=-\frac{۱}{۲}$$

فقط تو گزینه (۴) هستش که اگه دو مقدار بالا رو قرار بِدیم، تساوی برقرار میشه

مثال ۲۴: تبدیل $T(z)=e^{i\alpha}\frac{z-z_۰}{z-\bar{z}_۰}$ با فرض $\operatorname{Im} z_۰>۰$ نیم‌صفحه‌ی فوقانی را به کدام ناحیه می‌نگارد؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) نیم‌صفحه چپ ۲) نیم‌صفحه راست ۳) نیم‌صفحه پایین ۴) قرص واحد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون سؤال برای α شرطی نذاشته، پس می‌تونیم مثلاً $\alpha=۰$ قرار بِدیم تا از دستِ $e^{i\alpha}$ خلاص شیم! و چون $z_۰$ می‌تونه هر عدد مختلطی باشه (البته با شرط $\operatorname{Im} z_۰>۰$)، مثلاً می‌تونیم $z_۰=i$ انتخاب کنیم و در واقع نگاشت به شکل $T(z)=\frac{z-i}{z+i}$ میشه. حالا باید ببینیم این نگاشت نیم‌صفحه فوقانی رو به کدوم ناحیه تبدیل میکنه؟ اگه کمی تیزبین باشین می‌تونین بفهمین که این نگاشت هیچ‌وقت مخرجش صفر نمیشه (چون z نمی‌تونه عدد مختلط از نیم‌صفحه‌ی پایینی باشه) و بنابراین $T(z)$ هیچوقت نامحدود نمیشه، و این یعنی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر سه غلطن، چون این ناحیه‌ها هر کدوم از جهت‌هایی نامحدودن

مثال ۲۵: تبدیل کسری خطی $w=f(z)=\frac{۱-iz}{۱+iz}$ ناحیه $\operatorname{Im}(z)>۰$ را به کدام ناحیه می‌نگارد؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $\operatorname{Im}(w)<۰$ ۲) $\operatorname{Im}(w)>۰$ ۳) $|w|>۱$ ۴) $|w|<۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با امتحان کردن نقطه‌ی $z=۰+i۲$، به عنوان نقطه‌ای که تو ناحیه‌ی $\operatorname{Im}(z)>۰$ قرار داره، داریم: $w=\frac{۱-i(۲i)}{۱+i(۲i)}=\frac{۱-۲i^۲}{۱+۲i^۲}=-۳$
همون‌طور که می‌بینین $\operatorname{Im}(w)=۰$ میشه، پس گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن! از طرفی با توجه به این که $w=-۳$ به دست اومده، پس $|w|=۳$ و چون $|w|>۱$ هستش، بنابراین گزینه (۴) هم نمی‌تونه جواب باشه، پس می‌مونه گزینه (۳)

مثال ۲۶: تبدیل خطی کسری را بیابید که سه نقطه $z_۱=۰$ و $z_۲=-i$ و $z_۳=-۱$ در صفحه z را به ترتیب به سه نقطه $w_۱=i$ و $w_۲=۱$ و $w_۳=۰$ در صفحه w منتقل نماید. (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $w=i\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right)$ ۲) $w=-i\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right)$ ۳) $w=+i\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)$ ۴) $w=-i\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نقطه‌ی $z_۳=-۱$ به نقطه‌ی $w_۳=۰$ تبدیل شده، پس یکی از گزینه‌های (۱) و (۲) جوابن! از طرفی نقطه‌ی $z_۱=۰$ به نقطه‌ی $w_۱=i$ تبدیل شده، پس فقط گزینه (۲) می‌تونه جواب باشه

مثال ۲۷: نگاشت $w=\frac{e^z-i}{e^z+i}$ ناحیه $A=\{z=x+iy:۰<y<\pi\}$ را به کدام یک از نواحی داده شده می‌نگارد؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $|w|<۱$ ۲) $|w|>۱$ ۳) $\operatorname{Im}(w)<۰$ ۴) $|w-i|<۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با قرار دادن نقطه‌ی $z=۰+i\frac{\pi}{۲}$، مقدار $w=۰$ میشه که فقط گزینه (۱) هستش که $w=۰$ رو جزء نواحی خودش می‌دونه

مثال ۲۸: فرض کنید $w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. اگر تصویر هذلولی $y=\frac{1}{x}$ خط $v=2$ باشد، f کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(z)=z^2$　۲) $f(z)=\frac{1}{z}$　۳) $f(z)=\log z$　۴) $f(z)=\frac{z+1}{z-i}$

پاسخ: گزینه «۱» اگه نقطه‌ی $z=1+i$ رو روی هذلولی در نظر بگیریم $(x=1, y=1)$ فقط با تبدیل گزینه (۱) هستش که این نقطه بر خط $v=2$ نقش می‌بندد

مثال ۲۹: تصویر ناحیهٔ $y>0$ از صفحه‌ی $z\ (z=x+iy)$ تحت نگاشت $w=\ln\frac{z-1}{z+1}$ کدام گزینه است؟ $(w=u+iv)$ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) نوار $0<v<\pi$　۲) نوار $0<v<\frac{\pi}{2}$　۳) ناحیه‌ی $u<0, v>0$　۴) ناحیه‌ی $u>0, v>0$

پاسخ: گزینه «۱» بهتره یه نقطه تو ناحیه $y>0$ رو تو ضابطه‌ی نگاشت امتحان کنیم. نقطه مناسب $z=i$ هستش که به ازای اون داریم:

$$w=\text{Ln}\frac{z-1}{z+1}=\text{Ln}(\frac{i-1}{i+1})=\text{Ln}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=\text{Ln}(1\times e^{i\frac{\pi}{2}})=0+i\frac{\pi}{2}$$

همون‌طور که می‌بینین نقطه‌ای داریم که تو اون $u=0$ شده، پس گزینه‌های (۳) و (۴) غلطن، چون هر دوی اونا میگن $u=0$ جواب نیست! از طرفی تو نقطه به دست اومده به $v=\frac{\pi}{2}$ هم رسیدیم و این یعنی گزینه (۲) هم غلطه و بنابراین گزینه (۱) جوابه

مثال ۳۰: تبدیل دو خطی $w=\frac{az+b}{cz+d}$ که نقاط $z_1=0$ و $z_2=-i$ و $z_3=-1$ را به نقاط $w_1=i$، $w_2=1$ و $w_3=0$ تصویر می‌کند برابر است با:

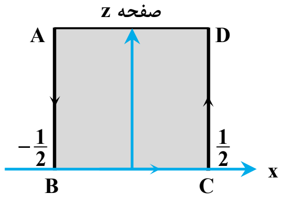
(مهندسی نفت و شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) $w=-i\frac{z+1}{z-1}$　۲) $w=\frac{z+1}{z-1}$　۳) $w=i\frac{z+1}{z-1}$　۴) $w=-\frac{z+1}{z-1}$

پاسخ: گزینه «۱» همون‌طور که می‌بینین نقطه‌ی $z_1=0$ به نقطه‌ی $w_1=i$ تبدیل شده، تو گزینه‌ها به جای z، صفر قرار میدیم، هر کدوم برابر با i شد، جوابه! فقط گزینه (۱) چنین شرایطی داره

مثال ۳۱: ناحیه نشان داده در شکل از صفحهٔ z تحت نگاشت $w=(1+i)\sin\pi z$ به کدام ناحیه از صفحهٔ مختلط w تبدیل می‌شود؟ $(w=u+iv)$

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $v-u\ge 0$
۲) $v+u\ge 0$
۳) $v-u\le 0$
۴) $v+u\le 0$

پاسخ: گزینه «۱» اولاً به ازای $z=\frac{1}{2}$ ناحیه به $1+i$ تبدیل میشه و این یعنی $v=1$ و $u=1$، پس این که گزینه (۴) میگه $u+v\le 0$، حرفی غلطه!

به همین ترتیب به ازای $z=-\frac{1}{2}$ ناحیه به $-1-i$ تبدیل میشه و این یعنی $u=v=-1$، پس این که گزینه (۲) میگه $v+u\ge 0$ هم غلطه! خُب حالا چه جوری از دست گزینه‌ی غلط دیگه خلاص شیم؟! اینجاست که باید از رابطه‌ی $\sin iz=i\sinh z$ استفاده کنیم، یعنی اگه $z=i$ که اتفاقاً تو ناحیه نشون داده شده هم قرار داره رو امتحان کنیم، داریم:

$$w=(1+i)\sin\pi i=(1+i)(i\sinh\pi)=(1+i)i[\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}]=(i-1)\ (\text{عددی مثبته})$$

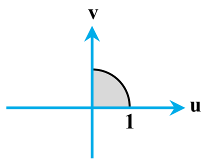
خُب همون‌طور که می‌بینین ضریب i عددی مثبته، یعنی $v>0$ و عدد حقیقی ۱- رو هم داریم، یعنی $u<0$، پس به $v>u$ رسیدیم، پس این که گزینه (۳) بخواد بگه؛ $v\le u$ حرف زوره خدایی خوب به تستها کلک می‌زنیم نه!؟

مثال ۳۲: با کدام تبدیل می‌توان ناحیه $D=\{(x,y);y\le 0\}$ از صفحه‌ی z را به درون دایره یکه به مرکز مبدأ تصویر کرد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

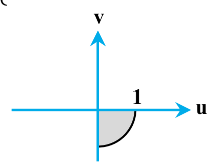
۱) $w=e^{i\theta}\dfrac{z^2-i}{z^2+i}$ ۲) $w=e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$ ۳) $w=e^{i\theta}\dfrac{z^2+i}{z^2-i}$ ۴) $w=e^{i\theta}\dfrac{z+i}{z-i}$

پاسخ: گزینه «۴» پاسخ به این سؤال یه کم با بقیه سؤالات تفاوت داره، اما کلیت داستان فرقی نداره! تو صورت سؤال گفته؛ ناحیه D به درون دایره یکه منتقل میشه، خُب این یعنی اگه رفتی نقطه‌ای تو ناحیه $y\le 0$ پیدا کردی و تو ضابطه‌ی نگاشت گذاشتی، **نباید** w برابر با ∞ یا به عبارت بهتر نباید w نامحدود بشه! اگه $z=e^{i\frac{5\pi}{4}}$ رو تو مخرج نگاشت گزینه (۳) قرار بدیم اون نگاشت رو بی‌نهایت میکنه، پس این گزینه غلطه! اگه $z=e^{-\frac{i\pi}{4}}$ رو به جای z تو مخرج نگاشت گزینه (۱) قرار بدیم، اون نگاشت رو بی‌نهایت میکنه، پس گزینه (۱) هم غلطه! اگه نقطه‌ی $z=-i$ رو تو ضابطه‌ی نگاشت گزینه (۲) قرار بدیم، بازم این نگاشت بی‌نهایت میشه، پس گزینه (۲) غلط و اجباراً گزینه (۴) جوابه

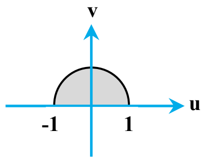
مثال ۳۳: نگاشت $w=e^z$ ناحیه $D=\left\{z\,|\,\mathrm{Re}(z)\le 0, 0\le \mathrm{Im}(z)\le\frac{\pi}{2}\right\}$ را به کدام ناحیه تصویر می‌کند؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)



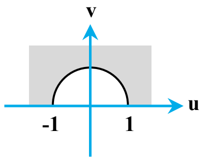
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۱» اگه مثلاً $z=-2$ که جزء ناحیه $\mathrm{Re}(z)\le 0$ محسوب میشه رو انتخاب کنیم و تبدیل اون تحت نگاشت $w=e^z$ رو بررسی کنیم، می‌بینیم که برابر $\frac{1}{e^2}=e^{-2}$ میشه یعنی مقداری مثبته. در واقع هر عدد منفی تو ضابطه‌ی نگاشت قرار بِدیم، (البته با توجه به شرط $0\le \mathrm{Im}(z)\le\frac{\pi}{2}$) هیچ‌وقت نگاشت e^z نمی‌تونه مقداری منفی تولید کنه، بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل نواحی منفی هستن، همگی به اتفاق غلطن

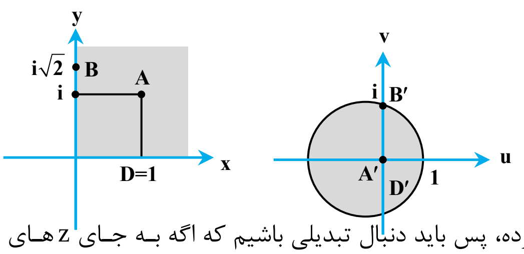
مثال ۳۴: تبدیل کسری خطی که از نقاط $z_1=-2$ و $z_2=0$ و $z_3=2$ را به ترتیب روی $w_1=\infty$ و $w_2=\frac{1}{4}$ و $w_3=\frac{3}{8}$ می‌نگارد، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۶)

۱) $w=\dfrac{2z+1}{2z-4}$ ۲) $w=\dfrac{z+1}{2z+4}$ ۳) $w=\dfrac{z-1}{2z+4}$ ۴) $w=\dfrac{z+2}{2z-4}$

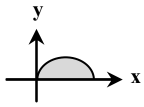
پاسخ: گزینه «۲» همون‌طور که می‌بینین نقطه $z_1=-2$ به نقطه‌ی $w_1=\infty$ تبدیل شده، که این فقط می‌تونه توسط نگاشت داده شده تو گزینه‌های (۲) و (۳) اتفاق بیفته! از طرفی نقطه‌ی $z_2=0$ به نقطه‌ی $w_2=\frac{1}{4}$ تبدیل شده پس گزینه (۳) غلطه و گزینه (۲) جوابه

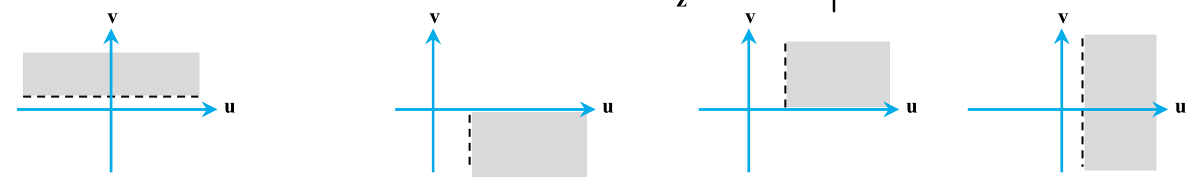
مثال ۳۵: تبدیلی که ناحیه D را بر روی D' و نقاط A و B را به ترتیب روی نقاط A' و B' مطابق شکل زیر می‌نگارد، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۵)

۱) $f(z)=e^{-i\pi}\dfrac{z^2+2i}{z^2-2i}$ ۲) $f(z)=e^{i\pi}\dfrac{z^2-2i}{z^2+2i}$ ۳) $f(z)=\dfrac{z^2+2i}{z^2-2i}$ ۴) $f(z)=\dfrac{z^2-2i}{z^2+2i}$



پاسخ : گزینه «۴» خودِ سؤال گفته؛ نگاشت نقطه‌ی A رو به نقطه‌ی $z=0$ تبدیل کرده، پس باید دنبال تبدیلی باشیم که اگه به جای z های اون $1+i$ قرار دادیم، مقدارش صفر بشه. این وضعیت تو تبدیل‌های گزینه‌های (۲) و (۴) وجود داره! از طرفی نقطه $B=i\sqrt{2}$ فقط توسط نگاشت گزینه (۴) به نقطه‌ی B' یا همون i تبدیل میشه. بنابراین گزینه (۴) جوابه

مثال ۳۶: مبدل نقاط داخل نیم‌دایره  با تبدیل $w=\frac{۱}{z}$ کدام ناحیه است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۳)



(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ: گزینه «۳» خیلی معلومه arg تو ناحیه بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ قرار داره، پس گزینه‌ای جوابه که arg اون بین $-\frac{\pi}{۲}$ و ۰ باشه، یعنی فقط گزینه (۳) می‌تونه جواب باشه

$$z=re^{i\theta}\ ,\ w=\frac{۱}{z}\Rightarrow\frac{۱}{z}=\frac{۱}{r}e^{-i\theta}\Rightarrow-\frac{\pi}{۲}<\arg w<۰$$

مثال ۳۷: نقش ناحیه محصور بین دوایر $|z-۱|=۱$ و $|z-i|=۱$ توسط نگاشت $w=\frac{۱}{z}$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)

۱) $v>\frac{۱}{۲}\ ,\ u>\frac{۱}{۲}$
۲) $v<-\frac{۱}{۲}\ ,\ u>\frac{۱}{۲}$
۳) $v<-\frac{۱}{۲}\ ,\ u<\frac{۱}{۲}$
۴) $v>-\frac{۱}{۲}\ ,\ u<\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه «۲» باید دنبال نقطه‌ای باشیم که تو ناحیه محصور بین دو دایره قرار داشته باشه و بعد اون نقطه‌رو به جای z تو ضابطه‌ی نگاشت قرار میدیم ببینیم چی میشه!؟ نقطه‌ی $z=\frac{۱}{۳}+\frac{i}{۳}$ تو ناحیه محصور بین دو دایره قرار داره، پس داریم:

$$w=\frac{۱}{z}=\frac{۱}{\frac{i}{۳}+\frac{۱}{۳}}=۳\frac{۱}{i+۱}\times\frac{i-۱}{i-۱}=\frac{۳(i-۱)}{-۲}=+\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}i$$

همون‌طور که می‌بینیم نگاشت این نقطه‌رو به نقطه‌ای تبدیل کرده که تو رابطه‌ی $u>\frac{۱}{۲}$ و $v<-\frac{۱}{۲}$ صدق میکنه، پس گزینه (۲) جوابه

مثال ۳۸: تصویر ناحیه $\{z:|z-۱|<۱\ ,\ \mathrm{Im}(z)>۰\}$ تحت تبدیل $w=\frac{z}{z-۲}$ کدامیک از نواحی زیر است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷ و مهندسی برق ـ سراسری ۷۱)

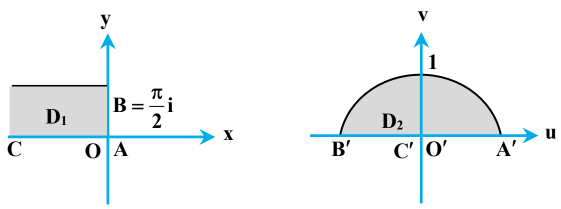
۱) ربع اول
۲) ربع دوم
۳) ربع سوم
۴) ربع چهارم

پاسخ : گزینه «۳» نقطه‌ی $z=۱+\frac{i}{۲}$ تو ناحیه موردنظر قرار داره، پس داریم:

$$w=\frac{۱+\frac{i}{۲}}{۱+\frac{i}{۲}-۲}=\frac{\frac{i}{۲}+۱}{\frac{i}{۲}-۱}\times\frac{\frac{i}{۲}+۱}{\frac{i}{۲}+۱}=\frac{-\frac{۱}{۴}+۱+i}{-\frac{۱}{۴}-۱}=-\frac{۳}{۵}-\frac{۴}{۵}i$$

که می‌دونیم این نقطه تو ربع سومِ، پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۳۹: تبدیلی که حوزه $D_۱$ را بر روی حوزه $D_۲$ می‌نگارد، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۳)



۱) $w=e^{z}$
۲) $w=z+\frac{۱}{z}$
۳) $w=\frac{\pi i}{\pi i-۴z}$
۴) $w=e^{۲z}$

پاسخ : گزینه «۴» همون‌طور که می‌بینین نقطه‌ی $B=\frac{\pi}{۲}i$ به نقطه‌ی $B'=-۱$ تبدیل شده، تنها گزینه‌های (۳) و (۴) این کار رو می‌کنن!

$$\text{(۴) گزینه}: z=\frac{\pi}{۲}i\Rightarrow w=e^{۲\times(\frac{\pi}{۲}i)}=e^{\pi i}=\cos(\pi)+i\sin\pi=-۱\ ,\quad \text{(۳) گزینه}: z=\frac{\pi}{۲}i\Rightarrow w=\frac{\pi i}{\pi i-۴(\frac{\pi i}{۲})}=\frac{\pi i}{\pi i-۲\pi i}=-۱$$

برای خلاصی از دست یکی از گزینه‌های غلط توجه کنین که مثلاً $z=\frac{\pi i}{۴}$ تو ناحیه $D_۱$ قرار داره، اما توسط نگاشت گزینه (۳) به بی‌نهایت نگاشته میشه، پس غلطه! چون ناحیه $D_۲$ که نامحدود نیست! بنابراین گزینه (۴) جوابه البته بازم اگه تصور این ماجرا سخته!؟ می‌تونین مثلاً نقطه‌ی $z=-\frac{۱}{۴}+\frac{\pi}{۴}i$ رو که تو ناحیه $D_۱$ قرار داره رو انتخاب کنین بعد ببینین که نگاشت گزینه‌ی (۳) اونو به πi تبدیل می‌کنه و بازم نتیجه بگیرین که گزینه‌ی (۳) غلطه!

مثال۴۰: تبدیل $f(z)=\frac{i}{z}$ دایره $|z-1|=1$ را به کدام شکل تبدیل می‌کند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) خط موازی محور موهومی در صفحه $f(z)$
۲) خط موازی محور حقیقی در صفحه $f(z)$
۳) دایره به مرکز $\frac{-i}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$
۴) دایره به مرکز $\frac{i}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» نقطه‌ی $z_1=0$ تو ناحیه قرار داره (چون $|0-1|=1$). حالا ببینیم اگه تو ضابطه نگاشت $z=0$ قرار بِدیم، چی میشه؟ معلومه $w_1\to\infty$، پس تا اینجا فهمیدیم شکل تبدیل شده شامل ∞ هم میشه (به عبارت بهتر شکل تبدیل شده نامحدودِ)، پس گزینه‌های (۳) و (۴) غلطن! حالا باید ببینیم از بین گزینه‌های (۱) و (۲) کدوم جوابه!؟ بهتره یه نقطه دیگه هم امتحان کنیم، مثلاً $z_2=2$ تو ناحیه قرار داره (چون $|2-1|=1$) حالا ببینیم اگه تو ضابطه‌ی نگاشت $z=2$ قرار بِدیم، چی میشه!؟ به راحتی معلومه $w_2=\frac{i}{2}$ میشه، پس قطعاً نقطه‌ی $w=\frac{i}{2}$ باید تو شکل تبدیل یافته باشه، بنابراین فقط گزینه (۲) می‌تونه درست باشه

فصل سوم

«انتگرال‌گیری از توابع مختلط»

درسنامه: انتگرال توابع غیر تحلیلی

مثال ۱: حاصل $\int_C \bar{z}dz$ روی منحنی $C:\begin{cases}x=t^{۲}\\ y=t\end{cases}$ در فاصله $۰\le t\le ۲$ کدام است؟

۱) $۸+\frac{۱۶}{۳}i$ ۲) $۸-\frac{۱۶}{۳}i$ ۳) $۱۰+\frac{۸}{۳}i$ ۴) $۱۰-\frac{۸}{۳}i$

پاسخ: گزینه «۴»

$$C:\ z(t)=x(t)+iy(t)=t^{۲}+it\ \Rightarrow d[z(t)]=(۲t+i)dt$$

$$\bar{z}=x-iy\ \Rightarrow \bar{z}(t)=x(t)-iy(t)=t^{۲}-it$$

$$I=\int_C \bar{z}dz=\int_{۰}^{۲}(t^{۲}-it)(۲t+i)dt=\int_{۰}^{۲}(۲t^{۳}+it^{۲}-i۲t^{۲}+t)dt=\int_{۰}^{۲}(۲t^{۳}-it^{۲}+t)dt$$

$$I=\int_{۰}^{۲}۲t^{۳}dt-i\int_{۰}^{۲}t^{۲}dt+\int_{۰}^{۲}tdt=۲[\frac{t^{۴}}{۴}]_{۰}^{۲}-i[\frac{t^{۳}}{۳}]_{۰}^{۲}+[\frac{t^{۲}}{۲}]_{۰}^{۲}=۱۰-\frac{۸}{۳}i$$

مثال ۲: حاصل $\int_C e^{\bar{z}}.dz$ که در آن C قسمتی از خط $y=-x$ واصل بین نقاط $z_۱=۰$ و $z_۲=\pi-i\pi$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{e^{\pi}-۱}{i}$ ۲) $i(e^{\pi}-۱)$ ۳) $i(e^{\pi}+۱)$ ۴) $\frac{e^{\pi}+۱}{i}$

پاسخ : گزینه «۳» اگر بخواهیم معادله‌ی پارامتری C را بنویسیم با فرض $x=t$، آنگاه $y=-t$ می‌باشد و لذا داریم:

$$z=x+iy\xrightarrow{y=-x}z=x-ix\ \Rightarrow \bar{z}=x+ix\ ,\ dz=(۱-i)dx\xrightarrow{x=t}\bar{z}=t+it\ ,\ dz=(۱-i)dt$$

$$\int_C e^{\bar{z}}dz=\int_{۰}^{\pi}e^{t+it}(۱-i)dt=(۱-i)\int_{۰}^{\pi}e^{(۱+i)t}.dt=[\frac{۱-i}{۱+i}e^{(۱+i)t}]_{۰}^{\pi}=i(e^{\pi}+۱)$$

مثال ۳: اگر $f(z)=Re(z)$ آنگاه حاصل انتگرال $I=\int_C f(z)dz$ که C سهمی $y=x^{۲}$ از $z=۰$ تا $z=۱+i$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{۳}i$ ۲) $-\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}i$ ۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}i$ ۴) $\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{۳}i$

پاسخ : گزینه «۳» $f(z)=Re(z)=x$ تابعی غیر تحلیلی می‌باشد. از طرفی داریم:

$$z=x+iy\xrightarrow{y=x^{۲}}z=x+ix^{۲}\xrightarrow{x=t}z=t+it^{۲}\ \Rightarrow dz=(۱+۲it)dt$$

توجه شود چون فرض کرده‌ایم $x=t$ و از طرفی x از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، پس t هم از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند:

$$I=\int_C Re(z)dz=\int_{۰}^{۱}t(۱+۲it)dt=[\frac{t^{۲}}{۲}+\frac{۲it^{۳}}{۳}]_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}i$$

مثال ۴: در صورتی که z یک متغیر مختلط باشد، مقدار $\int_C f(z)dz$، وقتی‌که $f(z)=x+1+iy^2$، و منحنی C، مسیر انتخاب شده روی خط $y=x$ باشد که از مبدأ مختصات تا نقطه (۱,۱) امتداد می‌یابد، کدام است؟

۱) $2i$
۲) $\frac{8}{3}+\frac{12}{7}i$
۳) $-2i$
۴) $\frac{7}{6}+\frac{11}{6}i$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(z)=x+1+iy^2 \xrightarrow{y=x} f(z)=x+1+ix^2 \xrightarrow{x=t} z=t+it \Rightarrow z=(1+i)t \Rightarrow dz=(1+i)dt$$

چون x از صفر تا ۱ تغییر می‌کند و ما فرض کرده‌ایم $x=t$، لذا بازه تغییرات t هم از صفر تا ۱ است.

$$\int_C f(z)dz=\int_0^1 (t+1+it^2)(1+i)dt=(1+i)\left[\frac{t^2}{2}+t+\frac{it^3}{3}\right]_0^1=(1+i)\left(\frac{1}{2}+1+\frac{i}{3}\right)=(1+i)\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{3}\right)=\frac{7}{6}+\frac{11}{6}i$$

مثال ۵: حاصل $I=\oint_C z\,d\bar{z}$، که در آن C دایره‌ای به مرکز $1+i$ و شعاع ۱ می‌باشد، کدام است؟

۱) 0
۲) $-2\pi i$
۳) $(1-i)2\pi$
۴) $2\pi i$

پاسخ: گزینه «۲»

$$z=z_0+re^{i\theta} \Rightarrow z=1+i+e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z}=1-i+e^{-i\theta} \Rightarrow d\bar{z}=-ie^{-i\theta}d\theta$$

$$I=\oint_C z\,d\bar{z}=\int_0^{2\pi}(1+i+e^{i\theta})(-ie^{-i\theta})d\theta=-i\int_0^{2\pi}(1+i)e^{-i\theta}d\theta-i\int_0^{2\pi}\underbrace{e^{+i\theta}.e^{-i\theta}}_{1}d\theta=-i(1+i)\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\theta-i\int_0^{2\pi}1\,d\theta$$

$$\Rightarrow I=(1-i)\left[-\frac{1}{i}e^{-i\theta}\right]_0^{2\pi}-i[\theta]_0^{2\pi}=0-2\pi i=-2\pi i$$

مثال ۶: حاصل انتگرال $I=\oint_{|z|=1}\bar{z}dz$ کدام است؟

۱) πi
۲) $2\pi i$
۳) $\frac{\pi i}{2}$
۴) $\frac{2\pi i}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» چون مسیر انتگرال‌گیری به صورت دایره واحد داده شده، لذا بهتر است انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم:

$$z=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z}=e^{-i\theta}\ ,\ dz=ie^{i\theta}d\theta\ ،\ I=\oint_{|z|=1}\bar{z}dz=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}i.e^{i\theta}d\theta=2\pi i$$

مثال ۷: حاصل $I=\oint_{|z|=1}|z||dz|$ کدام است؟

۱) $-\pi$
۲) 2π
۳) 3π
۴) 4π

پاسخ: گزینه «۲» بهتر است انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم:

$$z=e^{i\theta} \Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow |dz|=|ie^{i\theta}|d\theta$$

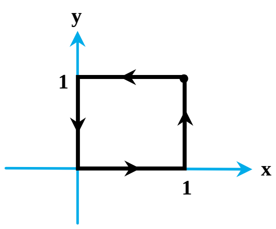
$$|ie^{i\theta}|=|i||e^{i\theta}|=1$$

پس $|dz|=d\theta$ از طرفی $|z|=|e^{i\theta}|=1$ و لذا داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}|z||dz|=\int_0^{2\pi}1\times d\theta=[\theta]_0^{2\pi}=2\pi$$

مثال ۸: حاصل $I=\oint_C|z|^2dz$ در صورتی که مسیر C مربع نشان داده شده در شکل مقابل باشد، کدام است؟

۱) $1-i$
۲) $-1+i$
۳) $1+i$
۴) $-1-i$



پاسخ: گزینه «۲» ابتدا عبارت $|z|^2$ را بر حسب z و $\bar{z}$ می‌نویسیم. می‌دانیم که $|z|^2=z\bar{z}$ است. بنابراین داریم:

$$f(z,\bar{z})=|z|^2=z\bar{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=z=x+iy$$

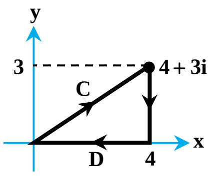
اکنون ناحیه‌ی درون این مربع را D می‌نامیم و از قضیه‌ی گرین در صفحه‌ی مختلط استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_C|z|^2dz=2i\iint_D(x+iy)dydx=2i\int_0^1\int_0^1(x+iy)dydx=2i\int_0^1\left(xy+\frac{i}{2}y^2\right)\Big|_0^1dx$$

$$=2i\int_0^1\left(x+\frac{i}{2}\right)dx=2i\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{i}{2}x\right)\Big|_0^1=\frac{1+i}{2}(2i)=-1+i$$

مثال ۹: اگر C مثلثی به رئوس $z=0$، $z=4$ و $z=4+3i$ باشد که در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است، آن‌گاه حاصل $I=\oint(e^z-\bar z)dz$ کدام است؟

۱) $3i$ ۲) $4i$ ۳) $13i$ ۴) $12i$

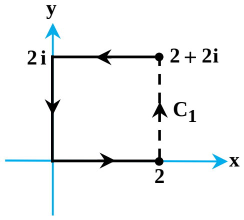


پاسخ: گزینه «۴» ناحیه‌ی درون مثلث را D می‌نامیم. برای تابع $f(z,\bar z)=e^z-\bar z$ داریم $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=-1$. از طرفی مسیر داده شده در جهت عکس مثلثاتی پیموده شده است، بنابراین لازم است جواب را قرینه کنیم:

$$I=\oint_C f(z)dz=-2i\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar z}dydx=-2i\iint_D(-1)dydx=2i\times(\text{مساحت } D)=2i\times\frac{3\times 4}{2}=12i$$

مثال ۱۰: اگر C مسیری شامل سه پاره‌خط باشد که نقطه $z=2+2i$ را به $z=2i$ و از آن‌جا به $z=0$ و سپس به $z=2$ متصل می‌کنند و در جهت مثبت پیموده شود، آنگاه حاصل $I=\oint_C \bar z\,dz$ کدام است؟

۱) $8i$ ۲) $8i-2$ ۳) $4i-2$ ۴) $4i$



پاسخ: گزینه «۳» منحنی C یک مرز بسته نیست. برای حل این انتگرال دو راه داریم. یک راه آن است که معادله‌ی پارامتری هر کدام از سه پاره‌خط را جداگانه در انتگرال قرار دهیم و جواب‌ها را با هم جمع کنیم. اما راه بهتر و ابتکاری آن است که با اضافه کردن پاره‌خط C_1 که $z=2$ را به $z=2+2i$ متصل می‌کند، منحنی بسته‌ی $C+C_1$ را تشکیل دهیم. حاصل انتگرال روی مسیر بسته‌ی $C+C_1$ را با استفاده از قضیه‌ی گرین حساب می‌کنیم. سپس حاصل انتگرال روی C_1 را از آن کم می‌کنیم، طبق فرمول گفته شده داریم: $I_1=\oint_{C+C_1}\bar z dz=2i\times(\text{مساحت ناحیه درون مرز } C+C_1)=2i\times 4=8i$

روی مسیر C_1 داریم $z=2+it$ که $0\le t\le 2$ است: $I_2=\int_{C_1}\bar z dz=\int_0^2(2-it)(idt)=i[2t-\frac{it^2}{2}]_0^2=i(4-2i)=4i+2$

در نتیجه داریم: $I=\int_C \bar z dz=I_1-I_2=8i-4i-2=4i-2$

مثال ۱۱: اگر C بیضی $|z-3|+|z+3|=10$ باشد که در جهت مثبت پیموده شده است، آنگاه حاصل $I=\oint_C \bar z dz$، چند برابر πi است؟

۱) 10 ۲) 20 ۳) 40 ۴) 80

پاسخ: گزینه «۳» طبق فرمول گفته شده داریم: $\oint_C \bar z dz=2i\times(\text{مساحت محدود شده توسط } C)=2i\times(\text{مساحت بیضی})$

منحنی $C:|z-3|+|z+3|=10$ یک بیضی است با کانون‌های $w_1=3$ و $w_2=-3$. اکنون به فرمول زیر دقت کنید:

هرگاه $C:|z-w_1|+|z-w_2|=R$ یک بیضی با کانون‌های w_1 و w_2 باشد، شعاع‌های آن عبارتند از $a=\frac{\sqrt{R^2-|w_2-w_1|^2}}{2}$ و $b=\frac{R}{2}$.

در این مثال $a=\frac{\sqrt{100-36}}{2}=4$ و $b=5$ می‌باشد، پس مساحت بیضی برابر است با: $\pi ab=20\pi$. در نتیجه داریم: $\oint_C \bar z dz=2i\times 20\pi=40\pi i$

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $I=\oint_C(\frac{z}{\bar z}+\frac{|z|}{z})dz$ روی دایرهٔ یکه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $-2\pi j$ ۲) $2\pi j$ ۳) $4\pi j$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: ابتدا انتگرال را ساده‌تر می‌کنیم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+\bar z|z|}{z\bar z}.dz=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+|z|.\bar z}{|z|^2}dz=\oint_{|z|=1}(z^2+\bar z)dz$$

$$z=e^{j\theta}\Rightarrow dz=je^{j\theta}d\theta\ ,\ \bar z=e^{-j\theta}$$

اگر انتگرال را در مختصات قطبی بنویسیم، داریم:

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}(e^{j2\theta}+e^{-j\theta})je^{j\theta}d\theta=j\int_0^{2\pi}(e^{j3\theta}+1)d\theta=j[\frac{1}{3j}(e^{j3\theta})+\theta]_0^{2\pi}=j[\frac{1}{3j}+2\pi-\frac{1}{3j}]=2\pi j$$

روش دوم: پس از رسیدن به انتگرال $I=\oint_{|z|=1}(z^2+\bar z)dz$ می‌توانیم بگوییم $f(z,\bar z)=z^2+\bar z$ و از نکته‌ی متن درس استفاده کنیم:

$$I=2j\iint_D\frac{\partial f}{\partial \bar z}dydx=2j\iint_D dydx=2j\times(\text{مساحت ناحیه } D)=2\pi j$$

مثال ۱۳: هرگاه $I=\int_0^{3+i}(\bar z)^2dz$ روی مسیر $\gamma: y=\frac{1}{3}x$ که ۰ را به $3+i$ وصل می‌نماید محاسبه شود، آنگاه: (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $I=0$ ۲) $I=1+\frac{10}{3}i$ ۳) $I=10(1-\frac{1}{3}i)$ ۴) $I=10(1+\frac{1}{3}i)$

پاسخ: گزینه «۳»

$$z=x+iy=x+\frac{1}{3}xi\ ,\ \bar z=x-\frac{1}{3}xi\ ,\ dz=(1+\frac{1}{3}i)dx$$

$$I=\int_0^3(x-\frac{1}{3}xi)^2(1+\frac{1}{3}i)dx=(1-\frac{1}{3}i)^2(1+\frac{1}{3}i)\int_0^3x^2dx=(1-\frac{1}{3}i)(1-\frac{1}{9}i^2)[\frac{x^3}{3}]_0^3=\frac{27}{3}(1-\frac{1}{3}i)(\frac{10}{9})=9(\frac{3-i}{3})(\frac{10}{9})=10(1-\frac{1}{3}i)$$

مثال ۱۴: مقدار انتگرال $\int_C \bar z dz$، در صورتی که C یک خط مستقیم از نقطهٔ صفر تا نقطهٔ $4j$ باشد،کدام است؟ $(j=\sqrt{-1})$
(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) j ۲) 8 ۳) $4j$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲» چون تابع زیر انتگرال تحلیلی نیست، لذا از روش پارامتری استفاده می‌کنیم:

$$z=0+yj\Rightarrow \bar z=-yj\ ,\ dz=jdy$$

$$\int_C \bar z dz=\int_0^4 -yj(jdy)=\int_0^4 ydy=[\frac{y^2}{2}]_0^4=8$$

مثال ۱۵: مقدار انتگرال معین $\int_1^i \frac{dz}{\bar z}$ روی مسیر $\gamma: z=e^{i\theta}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲) $-i\pi$ ۳) 3 ۴) $i\pi$

پاسخ: گزینه «۱»

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow |z|=1\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\ ,\ \bar z=e^{-i\theta}\ ,\ dz=ie^{i\theta}d\theta$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ie^{i\theta}}{e^{-i\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ie^{2i\theta}d\theta=[\frac{1}{2}e^{2i\theta}]_0^{\frac{\pi}{2}}=-1$$

مثال ۱۶: مطلوب است محاسبه $\int_C \bar z dz$ روی مسیر $C: -1\le t\le 4\ ,\ \begin{cases}x=3t\\ y=t^2\end{cases}$ (مهندسی مکانیک «کلیه گرایش‌ها» ـ آزاد ۸۱)

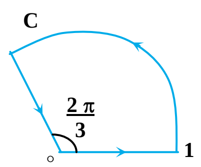
۱) $159+64i$ ۲) $195-64i$ ۳) $195+64i$ ۴) $159-64i$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\int \bar z dz=\int(x-iy)(dx+idy)=\int(xdx+ixdy-iydx+ydy)=\int_{-1}^4(3t.3dt+i3t.2tdt-it^2.3dt+t^2.2t.dt)$$

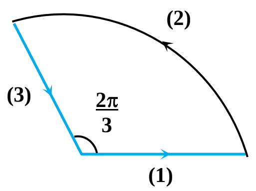
$$=[\frac{9}{2}t^2+\frac{2}{4}t^4+i(\frac{6}{3}t^3-\frac{3}{3}t^3)]_{-1}^4=195+64i$$

مثال ۱۷: حاصل انتگرال مقابل روی مسیر بسته‌ای که بخشی از آن دایرهٔ یکه مطابق شکل می‌باشد، چقدر است؟ $I=\oint_C \bar z dz$. (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)



۱) $j\frac{2\pi}{3}$ ۲) $-j\frac{2\pi}{3}$ ۳) $1+j\frac{2\pi}{3}$ ۴) $-1+j\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»



$$z=re^{j\theta}\ ,\ \bar z=r.e^{-j\theta}$$

مسیر ۱ : $d\theta=0\ ,\ r(0\to1)\Rightarrow dz=dr$

مسیر ۲ : $dr=0\ ,\ \theta(0\to\frac{2\pi}{3})\Rightarrow dz=je^{j\theta}d\theta$

مسیر ۳ : $d\theta=0\ ,\ r(1\to0)\Rightarrow dz=e^{j\frac{2\pi}{3}}dr$

$$\oint \bar z dz=\int_0^1 rdr+j\int_0^{\frac{2\pi}{3}}e^{-j\theta}.e^{j\theta}d\theta+\int_1^0 rdr=[\frac{1}{2}r^2]_0^1+j[\theta]_0^{\frac{2\pi}{3}}+[\frac{1}{2}r^2]_1^0=j\frac{2\pi}{3}$$

روش دوم و ساده‌تر: با استفاده از شکل مختلط قضیه گرین و فرمول مساحت داریم:

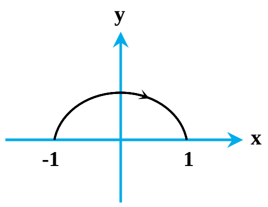
$\oint_C \bar z\, dz=2j($مساحت ناحیه محدود شده توسط مرز C$)=2j(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2\pi}{3})=j\frac{2\pi}{3}$

مثال ۱۸: چنانچه در عبارت $I=\int_C \bar{z}dz$ ، C نیمه بالایی دایره $|z|=1$ از $z=-1$ تا $z=1$ باشد، مقدار I کدام گزینه است؟

(معماری کشتی ـ سراسری ۸۷، مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

۱) $2\pi i$ ۲) صفر ۳) πi ۴) $-\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» از تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ استفاده می‌کنیم.

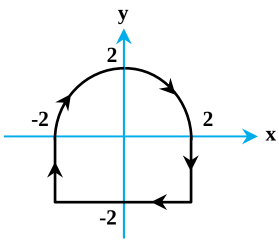


$$|z|=1\ ,\ z=e^{i\theta}\ ,\ \bar{z}=e^{-i\theta}\ ,\ dz=ie^{i\theta}d\theta$$

$$\int_{|z|=1}\bar{z}dz=\int e^{-i\theta}.ie^{i\theta}.d\theta=i\int_{+\pi}^{0}d\theta=-i\pi$$

مثال ۱۹: حاصل انتگرال $\int_C \frac{dz}{|z|^2+3(\mathrm{Re}\,z)^2}$ که C اجتماع یک نیم‌دایره و سه پاره‌خط مطابق شکل زیر است، کدام است؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)



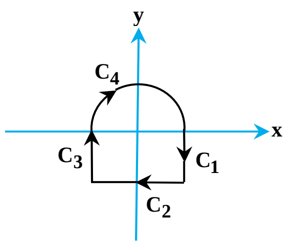
۱) صفر

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\pi i}{2}$

۴) $2\pi i$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. خم c را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم: با توجه به تقارن C_1 و C_3 داریم:



$$\int_{c_1}\frac{dz}{|z|^2+3(\mathrm{Re}\,z)^2}=-\int_{c_3}\frac{dz}{|z|^2+3(\mathrm{Re}\,z)^2}$$

معادلات پارامتری C_2 و C_4 را می‌نویسیم:

$$C_2: z(t)=-t-2i\quad,\quad -2\le t\le 2\ \Rightarrow dz\ \Rightarrow -dt$$

$$C_4: z(t)=-2\cos t+2i\sin t\quad,\quad 0\le t\le \pi\ \Rightarrow dz=(2\sin t+2i\cos t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{C_2}\frac{dz}{|z|^2+3(\mathrm{Re}\,z)^2}=\int_{-2}^{2}-\frac{dt}{4+4t^2}=-\frac{1}{4}tg^{-1}t\,|_{-2}^{2}=-\frac{1}{2}tg^{-1}2$$

$$\int_{C_4}\frac{dz}{|z|^2+3(\mathrm{Re}\,z)^2}=\int_0^{\pi}\frac{2\sin t\,dt}{4+12\cos^2 t}+i\int_0^{\pi}\frac{2\cos t\,dt}{4+12\cos^2 t}$$

با محاسبه‌ای ساده می‌توان نشان داد:

$$\int_0^{\pi}\frac{2\cos t\,dt}{4+12\cos^2 t}=0$$

در واقع اگر از تغییر متغیر $t=\theta+\frac{\pi}{2}$ استفاده کنید می‌بینید که:

$$\int_0^{\pi}\frac{2\cos t}{4+12\cos^2 t}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin\theta}{4+12\sin^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\text{تابع فرد})\,d\theta=0$$

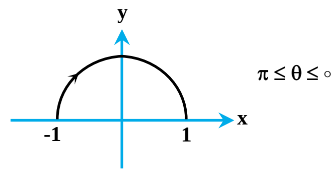
برای انتگرال $\int_0^{\pi}\frac{2\sin t\,dt}{4+12\cos^2 t}$ با تغییر متغیر $u=2\cos t\ ,\ du=-2\sin t\,dt$ داریم:

$$\int_0^{\pi}\frac{2\sin t}{4+12\cos^2 t}dt=\int_2^{-2}\frac{-du}{4+3u^2}=\int_{-2}^{2}\frac{du}{4+3u^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}tg^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}u)_{-2}^{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi\ \Rightarrow \int_C\frac{dz}{|z|^2+3(\mathrm{Re}\,z)^2}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{1}{2}tg^{-1}2$$

مثال ۲۰: در نمایش قطبی اعداد مختلط ناصفر به صورت $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ این قرارداد را می‌پذیریم که θ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi)$ رادیان لحاظ شود یعنی $۰ \le \theta < ۲\pi$. انتگرال تابع $f(z) = \begin{cases} \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{۲}} & z \neq ۰ \\ ۰ & z = ۰ \end{cases}$ از $a = -۱ + i۰$ تا $b = ۱ + i۰$ در امتداد نیمی از دایره‌ی $|z| = ۱$ که در بالای محور حقیقی در صفحه‌ی z قرار دارد و آن دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کند برابر است با: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) $\frac{۲}{۳}(۱+i)$ ۲) $\frac{۲}{۳}(-۱+i)$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $+\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه «۱»



$$I = \int_C f(z)dz = \int_C \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{۲}}dz$$

$$z = re^{i\theta} = \xrightarrow{\text{در مسیر نیمه بالایی } |z|=۱} z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta$$

$$I = \int_C \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{۲}}dz \xrightarrow[dz = ie^{i\theta}d\theta]{|z|=۱ \Rightarrow r=۱} I = \int_C e^{i\frac{\theta}{۲}} \times ie^{i\theta}dz$$

$$\Rightarrow I = \int_\pi^۰ ie^{\frac{۳\theta}{۲}i}d\theta = i \times \frac{۲}{۳i}e^{\frac{۳\theta}{۲}i}\Big|_\pi^۰ = \frac{۲}{۳}(\cos\frac{۳\theta}{۲} + i\sin\frac{۳\theta}{۲})\Big|_\pi^۰ \Rightarrow I = \frac{۲}{۳}(۱+i)$$

مثال ۲۱: اگر C پاره‌خط واصل از نقطه i به نقطه ۱ باشد مقدار $\int_C z\bar{z}dz$ چقدر است؟
(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۲}{۳}(۱-i)$ ۲) $\frac{۲}{۳}(۱+i)$ ۳) $۲+۳i$ ۴) $۲-۳i$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه پاره خط مسیر انتگرال‌گیری $y = -x + ۱$ می‌باشد (دو نقطه $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \end{vmatrix}$ را به هم وصل کرده) لذا داریم:

$$\left.\begin{matrix} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{matrix}\right\} \Rightarrow z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^۲ + y^۲ \xrightarrow{y=-x+۱} z\bar{z} = x^۲ + (۱-x)^۲ = ۲x^۲ - ۲x + ۱$$

از طرفی $z = x + iy = x + i(-x+۱)$، لذا داریم: $dz = (۱-i)dx$

دقت کنید چون نقطه $z_۲ = ۰ + i$ به نقطه $z_۱ = ۱ + i۰$ قرار است وصل شود و ما فقط انتگرال را بر حسب x داریم، پس x از صفر تا یک، تغییر می‌کند.

$$\int_۰^۱ z\bar{z}dz = \int_۰^۱ [x^۲ + (۱-x)^۲](۱-i)dx = \frac{۲}{۳}(۱-i)$$

مثال ۲۲: انتگرال تابع $f(z) = y - x - i۳x^۲$, $I = \int_C f(z)dz$ وقتی C پاره خط جهت‌دار از ۰ تا $۱+i$ می‌باشد، کدام است؟
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) $I = -۱-i$ ۲) $I = ۱-i$ ۳) $I = -۱+i$ ۴) $I = ۱+i$

پاسخ: گزینه «۲» پاره‌خط C از $A(۰,۰)$ تا $B(۱,۱)$ بر روی خط $y = x$ است و بنابراین داریم:

$$z = x + iy \xrightarrow{y=x} z = x + ix \Rightarrow dz = (۱+i)dx$$

حالا می‌توانیم انتگرال را بر حسب x بنویسیم و می‌دانیم تغییرات x، از ۰ تا ۱ است:

$$I = \int f(z)dz = \int_۰^۱ (x - x - i۳x^۲)(۱+i)dx = \int_۰^۱ (-۳ix^۲ - ۳i^۲x^۲)dx = -۳i\int_۰^۱ x^۲dx + ۳\int_۰^۱ x^۲dx = -۳i[\frac{x^۳}{۳}]_۰^۱ + ۳[\frac{x^۳}{۳}]_۰^۱ = -۳i(\frac{۱}{۳}) + ۳(\frac{۱}{۳}) = -i + ۱$$

مثال ۲۳: مقدار انتگرال $\int_C \frac{z+۲}{z}dz$ که در آن C نیم‌دایره $z = ۲e^{i\theta}$ برای $\pi \le \theta \le ۲\pi$ باشد، برابر کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) $۲+۲\pi i$ ۲) $۲+۴\pi i$ ۳) $۴+۲\pi i$ ۴) $۴+۴\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به معادله z داریم:

$$z = ۲e^{i\theta} \Rightarrow dz = ۲ie^{i\theta}d\theta \ , \ \pi \le \theta \le ۲\pi$$

$$\int_C \frac{z+۲}{z}dz = \int_C ۱ + \frac{۲}{z}dz = \int_\pi^{۲\pi} (۱ + \frac{۲}{۲e^{i\theta}})(۲ie^{i\theta})d\theta = \int_\pi^{۲\pi} (۱ + e^{-i\theta})(۲ie^{i\theta})d\theta$$

$$= ۲i\int_\pi^{۲\pi} (e^{i\theta} + ۱)d\theta = ۲i[\frac{۱}{i}e^{i\theta}]_\pi^{۲\pi} + ۲i[\theta]_\pi^{۲\pi} = ۲(e^{i۲\pi} - e^{i\pi}) + ۲i[۲\pi - \pi] = ۲[۱ - (-۱)] + ۲\pi i = ۴ + ۲i\pi$$

درسنامه۲: توابعی که تحلیلی هستند یا فقط در چند نقطه غیر تحلیلی هستند

مثال۱: حاصل انتگرال $\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ در صورتی که C دایره‌ای با معادله $|z-1-2i|=2$ باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}\pi i$　　۲) صفر　　۳) $+\frac{3}{2}\pi i$　　۴) πi

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(z)$ در نقاط $z=0$ و $z=2$ تحلیلی نیست که این نقاط نیز درون دایره C نیستند. برای این‌که بدانیم نقاط $z=0$ و $z=2$ (ریشه‌های مخرج) درون ناحیه موردنظر قرار دارند یا نه، کافیست در معادله $|z-1-2i|=2$ به جای z، مقادیر $z=0$ و $z=2$ را قرار دهیم. اگر حاصل عبارت سمت چپ از عدد ۲ بیشتر شد، نقطه درون ناحیه قرار ندارد و اگر مقدار عبارت مساوی و یا کوچکتر از ۲ شد، نقطه موردنظر درون یا روی ناحیه قرار دارد.

$$z=0 \Rightarrow |0-1-2i|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}>2 \quad \text{و} \quad z=2 \Rightarrow |2-1-2i|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}>2$$

پس هر دو نقطه خارج ناحیه قرار دارند و تابع $f(z)$ در ناحیه C تحلیلی است و لذا حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

مثال۲: حاصل $I=\oint_C \frac{3z^2+7z+1}{z+1}dz$ در صورتی که C دایره $|z+i|=2$ باشد، کدام است؟

۱) $-4\pi i$　　۲) $4\pi i$　　۳) $-6\pi i$　　۴) $6\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» چون در صورت سؤال صحبتی از جهت طی شدن منحنی نشده است، منظور همان جهت مثبت است. دقت کنید نقطه‌ی غیر تحلیلی تابع فقط $z_0=-1$ است و در این سؤال $f(z)=3z^2+7z+1$ است و لذا داریم:

$$I=2\pi i f(z_0)=2\pi i[3(-1)^2+7(-1)+1]=2\pi i(-3)=-6\pi i$$

مثال۳: حاصل $I=\oint_C \frac{dz}{z}$ روی منحنی بسته C که شامل مبدأ مختصات است، کدام است؟

۱) صفر　　۲) $2\pi i$　　۳) $3\pi i$　　۴) πi

پاسخ: گزینه «۲» منحنی بسته را دایره $|z|=1$ انتخاب می‌کنیم و طبق فرمول انتگرال کوشی با توجه به اینکه $f(z)=1$ است، داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i f(0)\xrightarrow{f(z)=1} I=2\pi i$$

مثال۴: حاصل انتگرال مختلط $I=\oint_{|z|=2}\frac{\cosh iz}{z^2+4z+3}dz$ کدام است؟

۱) πi　　۲) $\pi i\cos 1$　　۳) $\pi\cos 1$　　۴) $i\cos 1$

پاسخ: گزینه «۲» اگر $f(z)=\frac{\cosh iz}{z+3}$ فرض شود، داریم:

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{\cosh iz}{(z+1)(z+3)}dz=\oint_{|z|=2}\frac{f(z)}{z+1}dz=\oint_{|z|=2}\frac{f(z)}{z-(-1)}dz$$

تابع $f(z)=\frac{\cosh iz}{z+3}$ در ناحیه $|z|\le 2$ تحلیلی است و چون (۱-) در ناحیه فوق قرار دارد، داریم:

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{f(z)}{z-(-1)}dz=2\pi i f(-1)=2\pi i\times\frac{\cosh(-i)}{2}=\pi i\cosh i\xrightarrow{\cosh iz=\cos z} I=\pi i\cos 1$$

مثال۵: حاصل انتگرال $\int_0^{\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta$، در صورتی که k یک ثابت حقیقی باشد، کدام است؟

۱) 0　　۲) π　　۳) 2π　　۴) 4π

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم که تابع $f(z)=e^{kz}$ همه جا تحلیلی است. بنابراین از فرمول انتگرال کوشی برای نقطه‌ی $z_0=0$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{e^{kz}}{z}dz=2\pi i f(0)=2\pi i$$

از طرفی با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}(-\pi<\theta\le\pi)$ روی دایره‌ی $|z|=1$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{e^{kz}}{z}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ke^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}e^{ik\sin\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}(\cos(k\sin\theta)+i\sin(k\sin\theta))d\theta$$

$$=-\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\sin(k\sin\theta)d\theta}_{I_1}+i\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta}_{I_2}$$

بنابراین تساوی $I=-I_1+iI_2=2\pi i$ را داریم.

قسمت‌های موهومی و حقیقی در دو سمت تساوی با هم برابرند بنابراین داریم: $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta = 2\pi$

و همچنین داریم: $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\theta}\sin(k\sin\theta)d\theta = 0$

از طرفی در I_2 انتگرالده زوج است، زیرا ترکیب یک تابع زوج با تابع فرد، زوج خواهد بود. پس داریم: $\int_{0}^{\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2}I_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

مثال ۶: **هر گاه D ناحیه‌ای شامل مبدأ و $f: D \to C$ تحلیلی باشد و $f'(0) = 0$، شرط لازم برای تحلیلی بودن تابع g کدام است؟**

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z + f(z)}{z} & ; z \in D - \{0\} \\ b & ; z = 0 \end{cases}$$

۱) $f(0) = b = -1$
۲) $f(0) = b = 1$
۳) $f(0) = -b = 1$
۴) $f(0) = -b = -1$

پاسخ: گزینه «۴» هر گاه g بر D تحلیلی باشد، طبق قضیه‌ی کوشی ـ گورسا برای هر مرز بسته‌ی C در D داریم: $\oint_C g(z)dz = 0$

دایره‌ی $|z| = r$ را درون D در نظر می‌گیریم. طبق فرمولِ انتگرال کوشی داریم: $\int_{|z|=r} g(z)dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)+e^z}{z}dz = 2\pi i(f(0)+e^0) = 2\pi i(f(0)+1)$

بنابراین باید $f(0)+1 = 0$ باشد یعنی $f(0) = -1$. اکنون توجه کنید برای تحلیلی بودن g لازم است g در $z = 0$ پیوسته هم باشد، یعنی داریم:

$$b = \lim_{z\to 0}\frac{e^z + f(z)}{z} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{z\to 0}\frac{e^z + f'(z)}{1} = f'(0) + 1 = 1$$

بنابراین $f(0) = -1$ و $b = 1$ است.

مثال ۷: **حاصل $I = \oint_C \frac{z^2}{z-i}Ln(\frac{z+1}{z-1})dz$، در صورتی که C منحنی $|z-i| = \frac{1}{2}$ می‌باشد، که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر کدام گزینه است؟ (Ln شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.)**

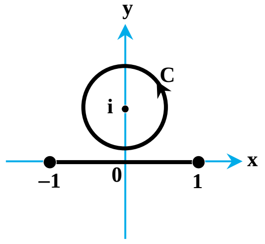
۱) π^2
۲) $i\pi^2$
۳) $-i\pi^2$
۴) $-\pi^2$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید ببینیم تابع $Ln(\frac{z+1}{z-1})$، داخل و روی منحنی C تحلیلی می‌باشد یا نه!؟ می‌دانیم تابع Ln فقط روی مجموعه $\{z \mid Re z \le 0 \ , \ Im z = 0\}$ تحلیلی نیست، لذا داریم:

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+1+iy)[(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

پس تابع $Ln(\frac{z+1}{z-1})$ روی مجموعه‌ی مقابل تحلیلی نیست:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \le 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=0} x^2 - 1 \le 0 \Rightarrow x^2 \le 1$$



همان‌طور که در ناحیه نشان داده شده مشخص است، نقاط غیر تحلیلی تابع داخل و روی منحنی C (دایره $|z-i| = \frac{1}{2}$) نیستند. دقت کنید که چون در گزینه‌ها مقدار داریم، نیاز به بررسی نقاط غیرتحلیلی تابع Ln نبود، چون اگر این نقاط درون ناحیه بودند، انتگرال قابل محاسبه نبود. اما ما برای تمرین این نقاط را هم حساب کردیم. پس فقط $z = i$ نقطه‌ی غیرتحلیلی درون دایره است. اگر فرض کنیم $f(z) = z^2 Ln(\frac{z+1}{z-1})$، آن‌گاه انتگرال زیر را داریم که بر اساس قضیه‌ی کوشی به راحتی به جواب می‌رسیم:

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i(i)^2 Ln(\frac{i+1}{i-1}) = -2\pi i Ln[\frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}] = -2\pi i Ln(\frac{2i}{-2}) = -2\pi i Ln(-i)$$

اما مقدار $Ln(-i)$ برابر است با: $Ln(-i) = Ln|-i| + iArctg(-i) = Ln1 - i\frac{\pi}{2} = -i(\frac{\pi}{2})$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار زیر است:

$$\mathbf{I = -2\pi i(-i\frac{\pi}{2}) = -\pi^2}$$

نکته جالب در مورد این سؤال: این سؤال عیناً حتی بدون تغییر در چهار گزینه در آزمون کارشناسی ارشد بهمن ۹۳ در رشته‌ی برق مطرح شده بود!! (البته سؤالات شبیه و عین بسیار از این کتاب در آزمون‌ها مطرح می‌شود، اما این که هر چهار گزینه هم یکسان باشد و سؤال تألیفی باشد و از کنکورهای سال‌های گذشته هم نباشد، برای اولین بار بود!!)

مثال ۸: حاصل $I = \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{Ln(1-z^2)}{z(z^3-i)(tgz-i)}dz$ ، در صورتی که مسیر انتگرال‌گیری در جهت مثلثاتی پیموده شده باشد، کدام است؟

(Ln شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.)

۱) 0 ۲) $2\pi i Ln i$ ۳) $2\pi i$ ۴) انتگرال قابل محاسبه نیست.

پاسخ: گزینه «۱» در این سؤال، چون در گزینه (۴) جمله‌ی «انتگرال قابل محاسبه نیست» را داریم، بایـد بررسـی کنـیم تـابع Ln در کجـا تحلیلـی نیست. می‌دانیم برای تابع Lnz ، مجموعه $\{z \mid Re z \le 0, Im z = 0\}$ نقاط غیرتحلیلی را مشخص می‌کند. برای این منظور لازم است قسمت‌هـای حقیقـی و موهومی عبارت جلوی Ln را تفکیک کنیم:

$$1-z^2 = 1-(x+iy)^2 = 1-x^2+y^2-2ixy$$

بنابراین ناحیه‌ای که تابع $Ln(1-z^2)$ غیر تحلیلی است، به شکل مقابل می‌باشد:

$$\begin{cases} 1-x^2+y^2 \le 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم می‌دانیم یا $x=0$ یا $y=0$. اگر $x=0$ ، آن‌گاه از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $1+y^2 \le 0$ که امکان ندارد. پس $y=0$ و بنابراین از معادلـه‌ی اول داریم: $1-x^2 \le 0$ ، یا $|x| \ge 1$ ، پس $Ln(1-z^2)$ فقط روی مجموعه زیر تحلیلی نیست.

$$\{z \mid z = x+iy \;,\; y=0 \;,\; |x| \ge 1\} \Rightarrow \text{درون مسیر انتگرال‌گیری قرار ندارد}$$

اما سراغ دیگر نقاط غیر تحلیلی تابع تحت انتگرال می‌رویم:

$$z^3 - i = 0 \Rightarrow |z^3| = |i| \Rightarrow |z^3| = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

واضح است ریشه‌های $z^3 - i = 0$ ، داخل دایره $|z| = \frac{1}{3}$ نیستند $(\frac{1}{3} < 1)$. در این مرحله سراغ پرانتز دیگر مخرج می‌رویم:

$$tgz - i = 0 \Rightarrow \frac{\sin z}{\cos z} - i = 0 \Rightarrow \sin z - i\cos z = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } 2i} e^{iz} - e^{-iz} + e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Rightarrow 2e^{iz} = 0 \Rightarrow e^{iz} = 0 \rightarrow \text{معادله ریشه ندارد}$$

از طرفی تابع $tgz = \frac{\sin z}{\cos z}$ نیز در نقاطی که $\cos z = 0$ باشد، یعنی $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \cdots$ تحلیلی نیست، اما هیچ‌کدام از آن‌ها درون دایره‌ی $|z| = \frac{1}{3}$ قرار ندارند.

با فرض $f(z) = \frac{Ln(1-z^2)}{(z^3-i)(tgz-i)}$ و با استفاده از قضیه انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{f(z)}{z} = 2\pi i f(0) = 0$$

مثال ۹: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi i}{2}$ ۳) $-\frac{\pi i}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = i \;,\; z_2 = 1 \;,\; z_3 = -1 \;,\; z_4 = -i$$

توجه شود نقاط i، ۱، ۱- و i- در داخل دایره $|z| = 2$ قرار دارند و هر کدام را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{1}{(z^2-1)(z+i)}}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \times (\frac{-1}{4i}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{1}{(z^2+1)(z+1)}}{z-1}dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \times \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

$$I_3 = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{1}{(z^2+1)(z-1)}}{z+1}dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \times (-\frac{1}{4}) = -\frac{\pi i}{2}$$

$$I_4 = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{1}{(z^2-1)(z-i)}}{z+i}dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \times (\frac{1}{4i}) = +\frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

مثال ۱۰: حاصل $\oint_C \frac{e^z}{z^4}dz$ در صورتی که C مربعی با رئوس $\pm 4i$ و ± 4 باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi i}{3}$ ۲) $\frac{\pi i}{3}$ ۳) $\frac{4\pi i}{3!}$ ۴) $-\frac{4\pi i}{3!}$

پاسخ : گزینه «۲» تابع $f(z) = e^z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است و واضح است که $z_0 = 0$ داخل مربع فوق می‌باشد، پس داریم:

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4}dz = \frac{2\pi i}{3!} \times f^{(3)}(0) = \frac{2\pi i}{3!} \times e^0 = \frac{\pi i}{3}$$

مثال ۱۱: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{e^z}{(z+1)^4}dz$ درصورتی که C مرز دایره $|z|=2$ در جهت مثبت باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2\pi i}{e}$ ۲) $\frac{2\pi e}{3}$ ۳) $\frac{\pi i}{3e}$ ۴) $2\pi ei$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به فرمول فوق، در این سؤال $z_0=-1$ و $n=3$ می‌باشد، لذا داریم:

$$I=\oint \frac{e^z}{(z+1)^4}dz=2\pi i\times\frac{f'''(-1)}{3!}$$

$$f(z)=e^z \Rightarrow f'''(z)=e^z \Rightarrow f'''(-1)=e^{-1}=\frac{1}{e} \Rightarrow I=\frac{2\pi i}{e\times 3!}=\frac{\pi i}{3e}$$

مثال ۱۲: حاصل $I=\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{2}$ ۲) $-\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}i$ ۴) $-\frac{\pi^2}{2}i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به به مرز انتگرال‌گیری تابع زیر انتگرال فقط در نقطه‌ی $z=1$ غیر تحلیلی است.

$$I=\oint\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz=\oint\frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz$$

همان‌طور که گفتیم تابع $f(z)=\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}$ در ناحیه $|z-1|\le 1$ تحلیلی است، لذا داریم:

$$I=\oint\frac{f(z)}{(z-1)^2}dz=2\pi i f'(1)=2\pi i\times(\frac{-\pi}{4})=-\frac{\pi^2}{2}i$$

مثال ۱۳: حاصل انتگرال $I=\int_C\frac{e^z}{(z-1)^{1395}}dz$ که در آن دایره‌ی $|z|=2$ می‌باشد چه مضربی از $2\pi i$ است؟

۱) $\frac{e}{1395!}$ ۲) $\frac{e}{1394!}$ ۳) $\frac{1}{1396!}$ ۴) $\frac{1}{1394!}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در این مثال $f(z)=e^z$، $z_0=1$ و $n+1=1395$ است. بنابراین $n=1394$ و جواب انتگرال برابر است با:

$$I=2\pi i\frac{f^{(1394)}(1)}{1394!}=2\pi i\frac{e}{1394!}$$

مثال ۱۴: فرض کنید C دایره $|z|=3$ باشد. به ازای $|w|<3$، تابع $g(w)$ به صورت $g(w)=\oint_C\frac{2z^2-z-2}{z-w}dz$ تعریف می‌شود. مقدار $\frac{g(2i)}{g''(1-i)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{i-5}{2}$ ۲) $-\frac{i+5}{2}$ ۳) $-\frac{-i+5}{2}$ ۴) $\frac{i+5}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم $|w|<3$ باشد. تابع $f(z)=2z^2-z-2$ همه‌جا تحلیلی است. با توجه به فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$g(w)=\oint_C\frac{f(z)}{z-w}dz=2\pi i f(w) \Rightarrow g(w)=2\pi i(2w^2-w-2)$$

با مشتق‌گیری از $g(w)$، خواهیم داشت:

$$g'(w)=2\pi i(4w-1) \Rightarrow g''(w)=8\pi i$$

بنابراین با محاسبه‌ی عبارت خواسته شده داریم:

$$\frac{g(2i)}{g''(1-i)}=\frac{2\pi i(-8-2i-2)}{8\pi i}=\frac{-10-2i}{4}=-\frac{i+5}{2}$$

مثال ۱۵: اگر $f(z)=\oint_{|\alpha|=3}\frac{3\alpha^2+7\alpha+1}{\alpha-z}d\alpha$، آن‌گاه مقدار $f'(1+i)$ کدام است؟

۱) $12\pi+26\pi i$ ۲) $12\pi-26\pi i$ ۳) $-12\pi-26\pi i$ ۴) $-12\pi+26\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با مشتق‌گیری نسبت به z از طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$f'(z)=\oint_{|\alpha|=3}\frac{3\alpha^2+7\alpha+1}{(\alpha-z)^2}d\alpha$$

اکنون به ازای $z=1+i$ خواهیم داشت:

$$f'(1+i)=\int_{|\alpha|=3}\frac{3\alpha^2+7\alpha+1}{(\alpha-1-i)^2}d\alpha$$

تابع $g(\alpha)=3\alpha^2+7\alpha+1$ در این ناحیه تحلیلی است. با استفاده از فرمول کوشی داریم:

$$f'(1+i)=2\pi i g'(1+i)=2\pi i(6\alpha+7)\Big|_{\alpha=1+i}=2\pi i(6i+13)=-12\pi+26\pi i$$

مثال ۱۶: اگر $f(z)=\frac{e^z-1}{z}\ (z\neq 0)$ و $f(0)=1$، آن‌گاه حاصل $I=\oint_{|z|=1}\frac{e^{f(z)}}{z^2}dz$ کدام است؟

۱) $2\pi i f''(0)e$ ۲) $2\pi i f'(0)e$ ۳) $\pi i f'(0)e$ ۴) $\pi i f''(0)e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا دقت کنید که f در $z=0$ تحلیلی است، زیرا: $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{z}=1=f(0)$

پس f در $z=0$ پیوسته است و چون در هر $z\neq 0$ تحلیلی است بنابراین در $z=0$ نیز مشتق‌پذیر خواهد بود.

(**یادآوری:** تابع دو ضابطه‌ای $f(z)=\begin{cases} g(z) & z\neq z_0\\ a & z=z_0\end{cases}$ در z_0 تحلیلی است اگر g تابعی تحلیلی باشد و $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=a$)

بنابراین $f(z)$ درون و روی دایره‌ی $|z|=1$ تحلیلی است و به این ترتیب $g(z)=e^{f(z)}$ نیز در این ناحیه تحلیلی خواهد بود.

اکنون از فرمول انتگرال کوشی خواهیم داشت: $I=\oint_{|z|=1}\frac{e^{f(z)}}{z^2}dz=2\pi i g'(0)=2\pi i f'(0)e^{f(0)}=2\pi i f'(0)e^1$

مثال ۱۷: حاصل کدام‌یک از انتگرال‌های زیر با بقیه فرق می‌کند؟ $(n>1)$

۱) $\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta}\cos(\sin n\theta-\theta)d\theta$ ۲) $\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta}\sin(\sin n\theta-\theta)d\theta$

۳) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)d\theta$ ۴) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که: $e^{i(\sin n\theta-\theta)}=\cos(\sin n\theta-\theta)+i\sin(\sin n\theta-\theta)$

در ضمن $e^{\cos n\theta}$ نیز عبارتی حقیقی است. در نتیجه داریم:

$e^{\cos n\theta}\sin(\sin n\theta-\theta)=\mathrm{Im}\{e^{\cos n\theta}e^{i(\sin n\theta-\theta)}\}$, $e^{\cos n\theta}\cos(\sin n\theta-\theta)=\mathrm{Re}\{e^{\cos n\theta}e^{i(\sin n\theta-\theta)}\}$

اکنون تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. طبق توضیح فوق برای گزینه‌ی (۱) داریم: $I_1=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{\cos n\theta}e^{i(\sin n\theta-\theta)}d\theta=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{e^{in\theta}}.e^{-i\theta}d\theta$

با قرار دادن $z=e^{i\theta}$ و $\frac{dz}{iz}=d\theta$ داریم: $I_1=\mathrm{Re}\int_{|z|=1}e^{z^n}\frac{1}{z}\frac{dz}{iz}=\mathrm{Re}\int_{|z|=1}\frac{1}{i}\frac{e^{z^n}}{z^2}dz$

اگر فرض کنیم $g(z)=e^{z^n}$ آن‌گاه طبق قضیه کوشی $I_1=\mathrm{Re}(\frac{1}{i}2\pi\frac{g'(0)}{1!})$ است. اما $g'(z)=nz^{n-1}e^{z^n}$ پس $g'(0)=0$ است، یعنی $I_1=0$ می‌باشد.

بررسی گزینه (۲): طبق توضیحات اولیه، این انتگرال قسمت موهومیِ همان انتگرالی است که در گزینه‌ی (۱) داشتیم. بنابراین با توجه به آنچه در بررسی گزینه (۱) گفتیم، حاصل این انتگرال هم صفر می‌شود.

بررسی گزینه (۳): $I_3=\mathrm{Im}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}.e^{i(\theta+\sin\theta)}d\theta=\mathrm{Im}\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}e^{i\theta}d\theta=\mathrm{Im}(\frac{1}{i}\int_{|z|=1}ze^z\frac{dz}{z})=\mathrm{Im}\frac{1}{i}\int_{|z|=1}e^zdz=0$

تابع e^z همه جا تحلیلی است. انتگرال آن روی مرز بسته صفر می‌شود.

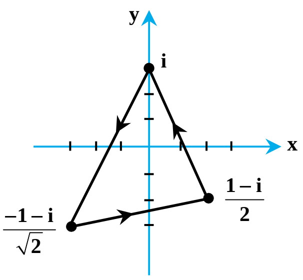
پس حاصل انتگرال‌های داده شده در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) با هم یکسان هستند. اکنون نشان می‌دهیم I_4 مخالف صفر است.

بررسی گزینه (۴): $I_4=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}.e^{i\sin\theta}d\theta=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}d\theta=\mathrm{Re}\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\mathrm{Re}\frac{1}{i}\times 2\pi i e^0 \underset{\text{قضیه کوشی گورسا}}{=} 2\pi$

مثال ۱۸: اگر C منحنی بسته‌ای به شکل مثلث با رئوس i، $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1-i}{2}$ باشد که در جهت خلاف حرکت ساعت پیموده شده است، از تساوی $\int_C[\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{(a-2)^2}{z}+4]dz=4\pi$ مقدار a کدام مقدار می‌تواند باشد؟

۱) $1+i$ ۲) $2+i$ ۳) $3+i$ ۴) $4+i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» منحنی C را که مرز مثلث رسم شده است، در شکل مقابل نشان داده‌ایم.



فرض کنیم $f(z)=\frac{1}{(z-2)^4}+4$ و $g(z)=\frac{(a-2)^2}{z}$ باشند.

نقطه‌ی غیر تحلیلی تابع f، $z=2$ است که درون مرز C قرار ندارد. بنابراین f درون و روی مرز بسته‌ی C تحلیلی است و طبق قضیه‌ی کوشی ـ گورسا خواهیم داشت: $\oint_C f(z)dz=0$

نقطه‌ی $z=0$ که قطب ساده‌ی g است، درون منحنی C قرار دارد بنابراین طبق فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C g(z)dz=\oint_C \frac{(a-2)^2}{z}dz=2\pi i(a-2)^2$$

در نتیجه، انتگرال داده شده برابر است با:

$$I=\oint_C\left[\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{(a-2)^2}{z}+4\right]dz=\oint_C f(z)dz-\oint_C g(z)dz=-2\pi i(a-2)^2$$

بنابر صورت سؤال داریم: $-2\pi i(a-2)^2=4\pi$ پس $(a-2)^2=\frac{4}{-2i}=2i$. با نوشتن فرم قطبی $2i$، ریشه‌ی دوم آن را بدست می‌آوریم:

$$(a-2)^2=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow(a-2)=\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}\Rightarrow a=2+\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}\qquad k=0,1$$

$$\xrightarrow{k=0}a=2+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=2+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}i\right)=\mathbf{3+i}\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

البته به ازای $k=1$ نیز مقدار دیگری برای a بدست خواهد آمد:

$$\xrightarrow{k=1}a=2+\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=2+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i$$

مثال ۱۹: **اگر تساوی $f(z)=\sum_{n=0}^{15}z^n$، برای هر عدد مختلط z برقرار باشد و C دایره $|z-i|=2$ باشد، مقدار انتگرال $I=\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-i)^{15}}$ کدام است؟**

۱) $2\pi i(1+15i)$ ۲) $2\pi i(1+14i)$ ۳) $4\pi i(1+15i)$ ۴) $4\pi i(1+14i)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع $f(z)$ یک چند جمله‌ای (از درجه‌ی ۱۵) است، بنابراین تام است، یعنی همه‌جا تحلیلی است. بنابراین روی دایره‌ی $C:|z-i|=2$ با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$I=\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-i)^{15}}=2\pi i\frac{f^{(14)}(i)}{14!}$$

اکنون به مشتقِ چهاردهم تابع $f(z)=1+z+z^2+\cdots+z^{14}+z^{15}$ توجه کنید. اگر از این تابع چهارده بار مشتق بگیریم جملات با درجه‌ی کمتر از ۱۴ به صفر خواهند رسید و با کمی دقت خواهیم دید: که $f^{(14)}(z)=14!+15!z$. بنابراین داریم:

$$I=2\pi i\frac{f^{(14)}(i)}{14!}=2\pi i\left(\frac{14!+15!\,i}{14!}\right)=\mathbf{2\pi i(1+15i)}$$

مثال ۲۰: **اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی درون و روی دایره $|z|=1$ باشد و $f(0)=1$، آن‌گاه حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2(\frac{\theta}{2})d\theta$، برابر با کدام گزینه است؟**

۱) $2+f'(0)$ ۲) $\pi(2+f'(0))$ ۳) $\frac{\pi(2+f'(0))}{2}$ ۴) $\frac{\pi(2+f'(0))}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا با استفاده از اتحاد طلایی، توانِ کسینوس را از بین می‌بریم:

$$I=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\left[1+\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]d\theta$$

با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ خواهیم داشت $dz=ie^{i\theta}d\theta$ یعنی $dz=izd\theta$. پس $d\theta=\frac{dz}{iz}$. به جای انتگرال معین $\int_0^{2\pi}$ نیز انتگرال روی مرز بسته‌ی $|z|=1$ را خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{2}\oint_C f(z)\left[1+\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right]\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2i}\oint_C f(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2z^2}\right)dz=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{2}\oint_C f(z)dz+\oint_C\frac{f(z)}{z}dz+\frac{1}{2}\oint_C\frac{f(z)}{z^2}dz\right]$$

اولین انتگرال به‌خاطر تحلیلی بودنِ f مساوی است با صفر است (یعنی $\oint_C f(z)dz=0$)

دومین و سومین انتگرال با استفاده از قضیه‌ی کوشی ـ گورسا به صورت مقابل به‌دست می‌آیند:

$$\oint\frac{f(z)}{z}dz=2\pi i f(0)\ ,\ \oint\frac{f(z)}{z^2}dz=2\pi i f'(0)$$

بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{2i}[0+2\pi i f(0)+\pi i f'(0)]=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)=\frac{\pi}{2}(2f(0)+f'(0))$$

حالا چون $f(0)=1$ است، بنابراین جواب برابر با مقدار مقابل است:

$$I=\frac{\pi}{2}(2+f'(0))$$

مثال ۲۱: اگر D ناحیه $D:\{z=x+iy\in C\ ;\ x^2+y^2\le 1\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iint_D \cos z\,dxdy$ کدام است؟

(از سؤالات پایان ترم دانشگاه‌های روسیه)

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ناحیه‌ی D را در مختصات قطبی به صورت $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ نشان می‌دهیم.

$$I=\iint_D \cos(z)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos(re^{i\theta})rdrd\theta$$

اولین انتگرال به روش جزء به جزء حل می‌شود.

$$\begin{array}{c|l} r & \cos(e^{i\theta}r) \\ \hline 1 & e^{-i\theta}\sin(e^{i\theta}r) \\ 0 & -e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta}r) \end{array} \Rightarrow \int_0^1 \cos(re^{i\theta})rdr=[re^{-i\theta}\sin(e^{i\theta}r)+e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta}r)]\Big|_0^1=e^{-i\theta}\sin(e^{i\theta})+e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta})-e^{-2i\theta}$$

$$I=\int_0^{2\pi}(e^{-i\theta}\sin(e^{i\theta})+e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta})-e^{-2i\theta})d\theta$$

برای حل انتگرال دوم با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ این انتگرال معین را به انتگرال روی منحنی $|z|=1$ تبدیل می‌کنیم: $dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{ie^{i\theta}}=\frac{dz}{iz}$

$$I=\int_{|z|=1}\left(\frac{\sin(z)}{z}+\frac{\cos(z)}{z^2}-\frac{1}{z^2}\right)\frac{dz}{iz}=(-i)\int_{|z|=1}\frac{z\sin(z)+\cos(z)-1}{z^3}dz$$

اگر صورت کسر را $g(z)=z\sin(z)+\cos(z)-1$ بنامیم، تابعی تحلیلی است. پس، از فرمول انتگرال کوشی خواهیم داشت:

$$I=(-i)(2\pi i)\frac{1}{2!}g''(0)=(-i)(2\pi i)\frac{1}{2}=\pi$$

مثال ۲۲: حاصل $I=\int_0^i z\cos z dz$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1-e}{e}$ ۳) $\frac{1+e}{e}$ ۴) $\sinh 1+\cosh 1$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تابع $f(z)=z\cos z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است. لذا از فرمول‌های عادی انتگرال‌گیری که برای این انتگرال روش جزء به جزء است، استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^i z\cos zdz=[z\sin z]_0^i-\int_0^i \sin zdz=i\sin i+[\cos z]_0^i=i(i\sinh 1)+\cosh 1-1=-\sinh 1+\cosh 1-1=\frac{1-e}{e}$$

مثال ۲۳: حاصل انتگرال $\int_{i+1}^{4i+2} z^2dz$ در طول بیضی $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}$ ، $0\le t\le 2$ برابر است با:

۱) $-21+3i$ ۲) $-32+9i$ ۳) $-\frac{73}{5}+4i$ ۴) $-\frac{86}{3}-6i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تابع $f(z)=z^2$ تحلیلی است. بنابراین از فرمول عادی انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\int_{i+1}^{4i+2} z^2dz=[\frac{z^3}{3}]_{i+1}^{4i+2}=\frac{(4i+2)^3}{3}-\frac{(i+1)^3}{3}=\frac{64i^3+96i^2+48i+8}{3}-\frac{i^3+3i^2+3i+1}{3}=\frac{-64i-96+48i+8+i+3-3i-1}{3}=-6i-\frac{86}{3}$$

مثال ۲۴: حاصل $I=\int_C z^2dz$ در صورتی که C در خط $y=x$ از نقطه $z=0$ تا $z=1+i$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}(i+1)^3$ ۲) $(i+1)^3$ ۳) $\frac{2}{3}(i+1)^3$ ۴) $\frac{(i+1)^3}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تابع $f(z)=z^2$ تابعی تحلیلی است. برای تمرین از هر دو روش آن را حل می‌کنیم:

روش اول: از روش پارامتری استفاده می‌کنیم: $z=x+iy\xrightarrow{y=x}z=x+ix\Rightarrow dz=(1+i)dx$

$$I=\int_0^1 z^2dz=\int_0^1 (x+ix)^2(1+i)dx=(1+i)^3\int_0^1 x^2dx=(1+i)^3[\frac{x^3}{3}]_0^1=\frac{(1+i)^3}{3}$$

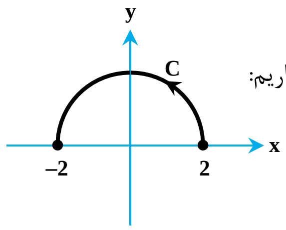
روش دوم: با توجه به تحلیلی بودن تابع با استفاده از فرمول‌های انتگرال‌گیری تست را حل می‌کنیم:

$$I=\int_0^{1+i} z^2dz=[\frac{z^3}{3}]_0^{1+i}=\frac{(1+i)^3}{3}$$

ملاحظه می‌کنید در توابع تحلیلی استفاده از روش پارامتری اصلاً به نفع ما نیست!

مثال ۲۵: مقدار $\int_C \frac{1}{z}dz$ را بدست آورید. منحنی C بخشی از دایره‌ی $|z|=2$ است که از $z=2$ تا $z=-2$ و در جهت مثلثاتی پیمایش شده است.

۱) $i\pi$ ۲) $-i\pi$ ۳) π ۴) $-\pi$



پاسخ : گزینه «۱» برای تمرین سؤال را از دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: (پارامتری کردن مسیر) : منحنی C را به صورت $z=2e^{i\theta}$ ، $0\le\theta\le\pi$ پارامتری می‌کنیم. در این صورت داریم:

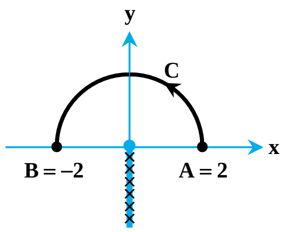
$$I=\int_C \frac{1}{z}dz=\int_0^{\pi}\frac{1}{2e^{i\theta}}2ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{\pi}d\theta=i\pi$$

روش دوم: (استفاده از تابع اولیه): می‌دانیم که $f(z)=\frac{1}{z}$ مشتقِ $F(z)=Ln(z)$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$I=\int_C\frac{1}{z}dz=\int_{A=2}^{B=-2}f(z)dz=F(z)\Big|_2^{-2}=F(-2)-F(2)=Ln(-2)-Ln(2)$$

اکنون به مرحله‌ی مهمی از پاسخ رسیده‌ایم. لازم است شاخه‌ای از لگاریتم را انتخاب کنیم که ما را به جواب صحیح برساند.

باید θ_0 را طوری انتخاب کنیم که نیم‌خط $\theta=\theta_0$ منحنی C را قطع نکند برای مثال $\theta_0=-\frac{\pi}{2}$ مناسب است. (بدیهی است که $\theta_0=\frac{3\pi}{2}$ یا $\theta_0=-\frac{\pi}{4}$ نیز مناسب هستند و به پاسخ صحیح می‌رسند.)



بریدگی شاخه‌ای $\theta_0=-\frac{\pi}{2}$

بنابراین داریم:

$$F(z)=Lnz=Lnr+i\theta$$

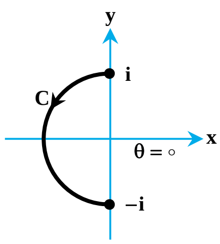
که در آن $-\frac{\pi}{2}\le\theta<2\pi-\frac{\pi}{2}$ یعنی $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$.

برای نقطه‌ی $A=2$ داریم $r=2$ و $\theta=0$ و برای نقطه‌ی $B=-2$ داریم $r=2$ و $\theta=\pi$.

(دقت کنید انتخاب $\theta=-\pi$ درست نیست زیرا باید $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{3\pi}{2}$ باشد.) پس داریم:

$$I=F(-2)-F(+2)=Ln2+i\pi-Ln2-0=i\pi$$

مثال ۲۶: حاصل $\int_C z\sqrt{z}\,dz$ روی منحنی C که نیمه‌ی چپ دایره‌ی $|z|=1$ است و در جهت مثبت پیموده شده است را بیابید.



۱) $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$
۲) $\frac{2\sqrt{2}}{5}i$
۳) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$
۴) $-\frac{2\sqrt{2}}{5}i$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم که تابع $f(z)=z\sqrt{z}=z^{\frac{3}{2}}$ دارای تابع اولیه‌ی $F(z)=\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}z^2\sqrt{z}$ است. $(F'(z)=f(z))$ بنابراین می‌توانیم با کمی دقت انتگرال روی مرز C را مانند انتگرال معین حل کنیم:

$$\int_C f(z)dz=\int_i^{-i}f(z)dz=F(z)\Big|_i^{-i}=F(-i)-F(i)$$

مهم‌ترین بخش پاسخ اینجاست! تابع $F(z)=\frac{2}{5}z^2\sqrt{z}$ چند مقداری است. اگر می‌خواهیم از روش بالا برای حل انتگرال استفاده کنیم لازم است محدوده‌ی θ را طوری بگیریم که بریدگی شاخه‌ای $F(z)$، منحنی C را قطع نکند. برای مثال $0\le\theta<2\pi$ مناسب است. زیرا نیم خط $\theta=0$ منحنی C را قطع نمی‌کند. بنابراین با رعایت این شرط می‌نویسیم:

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow F(z)=\frac{2}{5}r^2e^{i2\theta}\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

در $z=i$ داریم $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ و در $z=-i$ داریم $r=1$ و $\theta=\frac{3\pi}{2}$. بنابراین داریم:

$$\int_C f(z)dz=F(-i)-F(i)=\frac{2}{5}e^{i3\pi}e^{i\frac{3\pi}{4}}-\frac{2}{5}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=-\frac{2}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

دقت کنید اگر در $z=-i$، مثلاً $\theta=-\frac{\pi}{2}$ را در نظر بگیریم به جواب غلطِ $\frac{2\sqrt{2}}{5}i$ می‌رسیم. پس رعایت شرطِ $0\le\theta<2\pi$ در حل این انتگرال ضروری است.

مثال ۲۷: اگر برای z^i و i^z مقادیر اصلی در نظر گرفته شوند، آنگاه حاصل $I=\int_{-i}^{i}(z^i-i^z)dz$ روی مسیری که بریدگی شاخه‌ای را قطع نمی‌کند کدام است؟

۱) $(۱+i)\cosh\frac{\pi}{۲}+\frac{۴i}{\pi}\sinh\frac{\pi}{۲}$
۲) $(۱+i)\cosh\frac{\pi}{۲}-\frac{۴i}{\pi}\sinh\frac{\pi}{۲}$
۳) $(۱+i)\cosh\frac{\pi}{۲}+\frac{۲i}{\pi}\sinh\pi$
۴) $(۱+i)\cosh\frac{\pi}{۲}-\frac{۲i}{\pi}\sinh\frac{\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم که $i^z=e^{z\mathrm{Ln}(i)}$ است و $f(z)=z^i-i^z$ تابع اولیه‌ای به این شکل دارد:

$$F(z)=\int(z^i-e^{\mathrm{Ln}(i)z})\,dz=\frac{z^{i+۱}}{i+۱}-\frac{۱}{\mathrm{Ln}(i)}e^{\mathrm{Ln}(i)z}$$

بنابراین با در نظر گرفتن مقادیر اصلی خواهیم داشت:

$$I=\int_{-i}^{i}f(z)\,dz=F(i)-F(-i)=\frac{i^{i+۱}}{i+۱}-\frac{۱}{\mathrm{Ln}(i)}e^{i\mathrm{Ln}(i)}-\frac{(-i)^{i+۱}}{i+۱}+\frac{۱}{\mathrm{Ln}(i)}e^{-i\mathrm{Ln}(i)}$$

با در نظر گرفتن مقدار اصلی لگاریتم، عبارات مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{Ln}(i)=\mathrm{Ln}(۱)+i\frac{\pi}{۲}=i\frac{\pi}{۲}\ ,\ \mathrm{Ln}(-i)=\mathrm{Ln}(۱)-i\frac{\pi}{۲}=-i\frac{\pi}{۲}$$

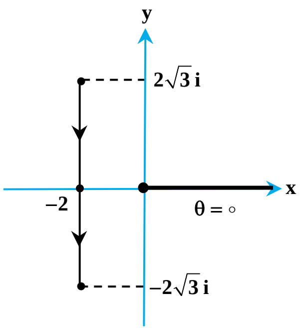
$$i^{i+۱}=e^{(i+۱)\mathrm{Ln}(i)}=e^{i(i+۱)\frac{\pi}{۲}}=e^{(-۱+i)\frac{\pi}{۲}}=ie^{-\frac{\pi}{۲}}\ ,\ (-i)^{i+۱}=e^{(i+۱)\mathrm{Ln}(-i)}=e^{-i(i+۱)\frac{\pi}{۲}}=e^{(۱-i)\frac{\pi}{۲}}=-ie^{\frac{\pi}{۲}}$$

بنابراین داریم:

$$I=\frac{ie^{-\frac{\pi}{۲}}}{i+۱}-\frac{e^{-\frac{\pi}{۲}}}{i\frac{\pi}{۲}}+\frac{ie^{\frac{\pi}{۲}}}{i+۱}+\frac{e^{\frac{\pi}{۲}}}{i\frac{\pi}{۲}}=\frac{i}{i+۱}(e^{-\frac{\pi}{۲}}+e^{\frac{\pi}{۲}})+\frac{۲}{i\pi}(e^{\frac{\pi}{۲}}-e^{-\frac{\pi}{۲}})=(۱+i)\cosh\frac{\pi}{۲}-\frac{۴i}{\pi}\sinh\frac{\pi}{۲}$$

مثال ۲۸: اگر شاخه‌ای از $z^{\frac{۱}{۲}}$ را در نظر بگیریم که در آن به ازای $z=۱$ به تساوی $z^{\frac{۱}{۲}}=۱$ برسیم، آنگاه حاصل $I=\int_{-۲-۲\sqrt{۳}i}^{-۲+۲\sqrt{۳}i}(z^{\frac{۱}{۲}})dz$، روی پاره‌خطی که $-۲+۲\sqrt{۳}i$ را به $-۲-۲\sqrt{۳}i$ وصل می‌کند، چند برابر $\frac{۱}{۳}$ است؟

۱) $۱۶\sqrt{۳}$
۲) ۱۶
۳) $۳۲\sqrt{۳}$
۴) ۳۲



پاسخ: گزینه «۴» هرگاه $z=re^{i\theta}$ باشد، آنگاه $f(z)=z^{\frac{۱}{۲}}$ دارای دو مقدار است: $f(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta+۲k\pi}{۲}}$ $(k=۰\,,\,۱)$.

به ازای $k=۰$، $\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{۲}}$ و به ازای $k=۱$، $\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{۲}+\pi)}=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{۲}}$ بدست می‌آید. یعنی $f(z)=\pm\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{۲}}$. اکنون از آنجا که $f(۱)=۱$ شده است، متوجه می‌شویم با حالت $k=۰$ روبرو هستیم یعنی $f(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{۲}}$ است. می‌خواهیم از تابع اولیه‌ی $f(z)=z^{\frac{۱}{۲}}$ یعنی $F(z)=\frac{۲}{۳}z^{\frac{۳}{۲}}$ استفاده کنیم.

چالش بعدی ما، انتخاب محدوده‌ی مناسب برای θ است. نیم‌خطِ شعاعیِ $\theta=\theta_۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که مسیر موردنظر را قطع نکند. نیم خط $\theta=۰$ مسیر انتگرال‌گیری را قطع نکرده است، بنابراین شرط $۰\le\theta<۲\pi$ مناسب است.

در $z=-۲-۲\sqrt{۳}i$ داریم $r=\sqrt{۱۶}=۴$ و $\theta=\tan^{-۱}(\sqrt{۳})+\pi=\frac{۴\pi}{۳}$ و در $z=-۲+۲\sqrt{۳}i$ داریم $r=۴$ و $\theta=\tan^{-۱}(-\sqrt{۳})+\pi=\frac{۲\pi}{۳}$. توجه کنید وقتی $x<۰$ است باید به $\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$ مقدار π را هم اضافه کنیم. همچنین دقت کنید که زوایای به‌دست آمده هر دو در فاصله‌ی $۰\le\theta<۲\pi$ هستند. اگر چنین نبود آنها را با ۲π یا -۲π جمع می‌کنیم تا در این محدوده قرار بگیرند. اگر پاره‌خط را با C نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$I=\int_C z^{\frac{۱}{۲}}dz=F(\text{انتهای مسیر})-F(\text{ابتدای مسیر})=F(-۲-۲\sqrt{۳}\,i)-F(-۲+۲\sqrt{۳}\,i)=F(۴e^{i\frac{۴\pi}{۳}})-F(۴e^{i\frac{۲\pi}{۳}})$$

ضابطه‌ی F با توجه به توضیحات قبل چنین است:

$$F(z)=\frac{۲}{۳}z\sqrt{z}=\frac{۲}{۳}re^{i\theta}\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{۲}}=\frac{۲}{۳}r\sqrt{r}\,e^{i\frac{۳\theta}{۲}}$$

بنابراین داریم:

$$I=\frac{۲}{۳}۴\sqrt{۴}(e^{i\frac{۳}{۲}\frac{۴\pi}{۳}}-e^{i\frac{۳}{۲}\frac{۲\pi}{۳}})=\frac{۱۶}{۳}(۱+۱)=\frac{۳۲}{۳}$$

مثال ۲۹: اگر تابع $f(z)=e^{Az}$ در کل صفحه مختلط کراندار باشد، آنگاه مقدار A کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) $\frac{1}{z^2}$ ۴) A هر مقدار می‌تواند داشته باشد.

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم تابع $f(z)=e^{Az}$ در تمام صفحه تحلیلی است و چون در صورت سؤال گفته شده کراندار نیز می‌باشد، پس طبق قضیه لیوویل باید تابعی ثابت باشد و این یعنی مشتق آن صفر باشد: $f'(z)=Ae^{Az}=0 \Rightarrow A=0$

مثال ۳۰: اگر f تام باشد و مجموعه مقادیر f(z) در خارج دایره واحد باشد، آنگاه f تابعی است:

۱) ثابت ۲) متناوب ۳) کسری خطی ۴) چند جمله‌ای از درجه بیشتر از یک

پاسخ : گزینه «۱» چون مقادیر $f(z)$ خارج دایره واحد قرار دارد، پس $f(z)\neq 0$ است. بنابراین $\frac{1}{f(z)}$ تابعی تحلیلی (تام) است و چون $|\frac{1}{f(z)}|\leq 1$ بنابراین $\frac{1}{f(z)}$ کراندار است و طبق قضیه لیوویل، تابعی ثابت است و بنابراین $f(z)$ هم ثابت است.

مثال ۳۱: اگر $f(z)$ تابعی تام و $f(0)=1394$ باشد و همچنین $|e^z f(z)|\leq 1$، آنگاه مقدار $f(Ln(1395))$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1395}$ ۲) $\frac{1395}{1394}$ ۳) $\frac{1394}{1395}$ ۴) $\frac{1}{1394}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر $f(z)$ تام باشد، آنگاه تابع $g(z)=e^z f(z)$ هم تام است (چون e^z تابعی تام است و حاصلضرب این دو تابع هم یک تابع تام می‌شود) از طرفی براساس شرط $|g(z)|=|e^z f(z)|\leq 1$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $g(z)$ کراندار است، پس طبق قضیه لیوویل که هر تابع تام و کران‌دار حتماً تابعی ثابت است، می‌توان گفت $g(z)$ تابعی ثابت است، لذا داریم:

$$g(z)=c \Rightarrow e^z f(z)=c \Rightarrow f(z)=\frac{c}{e^z} \xrightarrow{f(0)=1394} f(0)=\frac{c}{e^0} \Rightarrow 1394=\frac{c}{1} \Rightarrow c=1394$$

$$f(z)=\frac{1394}{e^z} \Rightarrow f(Ln(1395))=\frac{1394}{e^{Ln(1395)}}=\frac{1394}{1395}$$

مثال ۳۲: حاصل $I=\int_0^{2\pi}\sin^2(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta})d\theta$، چند برابر π است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنیم $f(z)=\sin^2(z)$ باشد. طبق قضیه‌ی مقدار میانگین، با در نظر گرفتن $z_0=\frac{\pi}{6}$ و $r=2$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta})d\theta=f(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta})d\theta=\sin^2(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^{2\pi}\sin^2(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta})d\theta=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۳: حاصل $I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(e^{i\theta})d\theta$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) π ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» دقت کنید چون $f(z)=\cos^2 z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است، می‌توانیم فرض کنیم بر روی دایره $|z-0|=1$ نیز تحلیلی است. در واقع در این تست $z_0=0$ و $r=1$ در نظر گرفته شده است:

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(0+e^{i\theta})d\theta \xrightarrow{f(0)=1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(e^{i\theta})d\theta=1$$

مثال ۳۴: مقدار متوسط «x^2-y^2+x» روی دایره ۲ $|z-i|=2$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه می‌کنیم که $u(x,y)=x^2-y^2+x$ بخشِ حقیقیِ تابع مختلطِ $f(z)=z^2+z$ است. طبق قضیه‌ی مقدار میانگین، مقدار متوسطِ تابع f روی دایره‌یِ $|z-i|=2$ برابر است با مقدار f در مرکز این دایره. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\text{مقدار متوسط } f \text{ بر این دایره}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(i+2e^{i\theta})d\theta=f(i)$$

با محاسبه‌ی $f(i)$ داریم: $f(i)=i^2+i=-1+i$. به این ترتیب:

$$\text{مقدار متوسط } u(x,y) \text{ بر این دایره}=Re(-1+i)=-1$$

مثال ۳۵: مقدار انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\sin(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» تابع $f(z)=\sin z$ همه‌جا تحلیلی است. طبق قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:
$$\frac{1}{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta=f(z_0)$$

بنابراین به ازای $a=0$ و $r=1$ خواهیم داشت:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})d\theta=f(0)\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(e^{i\theta})d\theta=\sin(0)=0$$

پس $I=\int_0^{2\pi}\sin(e^{i\theta})d\theta=0$ است. از طرفی می‌دانیم که $\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ است. بنابراین بـه ازای $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ داریم:
$$\sin(e^{i\theta})=\sin(\cos\theta+i\sin\theta)=\sin(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)+i\cos(\cos\theta)\sinh(\sin\theta)$$

در نتیجه اگر از انتگرال بدست آمده، بخش‌های حقیقی و موهومی را جدا کنیم به دو معادله‌ی زیر می‌رسیم:
$$\operatorname{Re}I=0\ \Rightarrow \int_0^{2\pi}\sin(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta=0$$
$$\operatorname{Im}I=0\ \Rightarrow \int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta)\sinh(\sin\theta)d\theta=0$$

مثال ۳۶: حاصل $\int_0^{2\pi}\operatorname{Ln}(a^2+1+2a\cos\theta)d\theta$، برابر با کدام گزینه است؟ $(a>1)$ (با کمی تغییر از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه MIT)

۱) $\pi\operatorname{Ln}a$ ۲) $2\pi\operatorname{Ln}a$ ۳) $3\operatorname{Ln}a$ ۴) $4\pi\operatorname{Ln}a$

پاسخ: گزینه «۴» تابع مختلط $f(z)=\operatorname{Ln}(z^2)$ و نقطه‌ی $z_0=a$ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta=f(z_0)$$

به ازای $r=1$ و با توجه به آن که $z_0=a$ است، از تساوی فوق خواهیم داشت:
$$\int_0^{2\pi}f(a+e^{i\theta})d\theta=2\pi f(a)=2\pi\operatorname{Ln}(a^2)=4\pi\operatorname{Ln}a$$

حال نشان می‌دهیم که تابع $\operatorname{Ln}(a^2+1+2a\cos 2\theta)$ در واقع بخشِ حقیقیِ $f(a+e^{i\theta})$ است. یادآوری می‌کنیم که برای هر عدد مختلط z، شاخه‌ی اصلی تابع لگاریتم برابر است با: $\operatorname{Ln}(z)=\operatorname{Ln}|z|+i\operatorname{Arg}(z)$ بنابراین داریم:
$$f(a+e^{i\theta})=\operatorname{Ln}((a+e^{i\theta})^2)=\operatorname{Ln}|a+e^{i\theta}|^2+i\operatorname{Arg}(a+e^{i\theta})^2=\operatorname{Ln}|a+\cos\theta+i\sin\theta|^2+i\operatorname{Arg}(a+e^{i\theta})^2$$
$$=\operatorname{Ln}(a^2+\cos^2\theta+2a\cos\theta+\sin^2\theta)+i\operatorname{Arg}(a+e^{i\theta})^2$$

بنابراین بخش حقیقی $f(a+e^{i\theta})$ بدست می‌آید:
$$\operatorname{Re}\{f(a+e^{i\theta})\}=\operatorname{Ln}(a^2+\cos^2\theta+\sin^2\theta+2a\cos\theta)=\operatorname{Ln}(a^2+1+2a\cos\theta)$$

اکنون در انتگرالی که محاسبه کردیم بخش‌های حقیقی دو طرف تساوی با هم برابرند:
$$\int_0^{2\pi}f(a+e^{i\theta})d\theta=4\pi\operatorname{Ln}a\ \xrightarrow{\text{تساوی بخش‌های حقیقی}}\ \int_0^{2\pi}\operatorname{Ln}(a^2+1+2a\cos\theta)d\theta=4\pi\operatorname{Ln}a$$

مثال ۳۷: اگر داشته باشیم: $\begin{cases}\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}=0\ ,\ x^2+y^2<4\\ u(x,y)=x^2y^2\ \ ,\ x^2+y^2=4\end{cases}$ آن‌گاه مقادیر ماکزیمم و مینیمم u در ناحیـه‌ی $x^2+y^2\le 4$ و مقـدار $u(0,0)$ به ترتیب کدامند؟

۱) $u(0,0)=2\ ,\ u_{min}=0\ ,\ u_{max}=4$ ۲) $u(0,0)=2\ ,\ u_{min}=1\ ,\ u_{max}=2$

۳) $u(0,0)=4\ ,\ u_{min}=2\ ,\ u_{max}=4$ ۴) $u(0,0)=4\ ,\ u_{min}=0\ ,\ u_{max}=2$

پاسخ: گزینه «۱» طبق صورت سؤال داریم: $u_{xx}+u_{yy}=0$، بنابراین تابع $u(x,y)$ هارمونیک (همساز) است پس طبق قضیـه‌ی مـدول مـاکزیمم و مدول مینیمم، کمترین و بیشترین مقدار $u(x,y)$ روی مرز دایره‌ی $x^2+y^2=4$ به دست می‌آینـد. روی ایـن مـرز داریـم $r=2$ و ضـابطه‌ی $u(x,y)$ در دستگاه قطبی چنین است:
$$u(x,y)=x^2y^2\ \Rightarrow u(r,\theta)=r^2\cos^2\theta\times r^2\sin^2\theta=r^4(\frac{1}{2}\sin 2\theta)^2\ \Rightarrow u(r,\theta)=\frac{r^4}{4}\sin^2 2\theta$$

به ازای $r=2$ داریم $u(2,\theta)=4\sin^2 2\theta$. می‌دانیم که $0\le\sin^2 2\theta\le 1$ است، بنابراین بیشترین و کمترین مقدار u در این ناحیه به ترتیب برابر بـا ۴ و ۰ هستند. برای محاسبه‌ی $u(0,0)$ از قضیه‌ی مقدار میانگین استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:
$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(2,\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}4\sin^2 2\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos 4\theta}{2})d\theta=\frac{1}{\pi}[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta]_0^{2\pi}=2$$

مثال ۳۸: حاصل انتگرال $\int_C e^{-۲z}dz$ که در آن C خط واصل بین نقاط $(۱-i\pi)$ تا $(۲+۳i\pi)$ می‌باشد کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۲}e^{-۲}(۱-e^{-۲})$ ۲) $\frac{۱}{۲}e^{-۲}(e^{-۲}-۱)$ ۳) $\frac{۱}{۲}e^{-۲}(۱+e^{۲})$ ۴) $-\frac{۱}{۲}e^{-۲}(۱+e^{۲})$

پاسخ : گزینه «۱» تابع زیر انتگرال تحلیلی است، لذا می‌توانیم از فرمولهای متداول انتگرال‌گیری که در ریاضی (۱) آموختیم، استفاده کنیم:

$$\int_C e^{-۲z}dz = [-\frac{e^{-۲z}}{۲}]_{۱-i\pi}^{۲+۳i\pi} = -\frac{۱}{۲}(e^{-۴-i۶\pi} - e^{-۲+۲i\pi})$$

$$= -\frac{۱}{۲}[e^{-۴}(\cos ۶\pi - i\sin ۶\pi) - e^{-۲}(\cos ۲\pi + i\sin ۲\pi)] = -\frac{۱}{۲}[e^{-۴} - e^{-۲}] = \frac{۱}{۲}e^{-۲}(۱-e^{-۲})$$

مثال ۳۹: حاصل انتگرال $\oint_C \frac{z+i}{z^۲-۲z}dz$ که در آن C دایره‌ای است با معادله $|z-۱-۲i|=۱$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) صفر ۲) πi ۳) $-\frac{۳}{۲}\pi i$ ۴) $\frac{۳}{۲}\pi i$

پاسخ : گزینه «۱» دایره C دایره‌ای به مرکز (۲ و ۱) می‌باشد و لذا نقاط $z=۰$ و $z=۲$ درون دایره قرار ندارند پس حاصل انتگرال صفر است.

مثال ۴۰: مقدار انتگرال $\int_۱^i z^۲dz$، روی پاره خط مستقیمی که ۱ را به i وصل می‌کند، چقدر است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۳}(۱-i)$ ۲) $\frac{۱}{۳}(۱+i)$ ۳) $-\frac{۱}{۳}(۱+i)$ ۴) $-\frac{۱}{۳}(۱-i)$

پاسخ : گزینه «۳» تابع زیر انتگرال تابعی تحلیلی است، لذا می‌توانیم از فرمولهای عادی انتگرال‌گیری تست را حل کنیم:

$$\int_۱^i z^۲dz = [\frac{z^۳}{۳}]_۱^i = -\frac{۱}{۳}(۱+i)$$

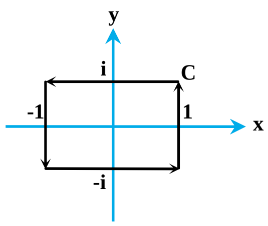
مثال ۴۱: مقدار انتگرال خطی $\frac{۳}{\pi i}\int_{|z|=۳}\frac{z^۵}{(z-۲)^۴}dz$ برابر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳۰۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$I = \frac{۳}{\pi i}\oint\frac{z^۵}{(z-۲)^۴}dz = \frac{۳}{\pi i}\times\frac{۲\pi i}{۳!}\times(z^۵)'''\Big|_{z=۲} = ۶۰z^۲\Big|_{z=۲} \Rightarrow I = ۲۴۰$$

مثال ۴۲: مقدار انتگرال $\oint_C \frac{zdz}{(z^۲-۴)}$ که C مرز نشان داده شده است، چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)



۱) صفر
۲) $-۲\pi i$
۳) $۲\pi i$
۴) πi

پاسخ : گزینه «۱» نقاط $z=\pm۲$ درون مرز C قرار ندارند لذا حاصل انتگرال برابر صفر است.

مثال ۴۳: مقدار انتگرال $\oint_{|z-i|=۳}\frac{z\,Ln\,z}{(z-۲i)^۲}dz$ چیست؟ (Ln شاخه اصلی لگاریتم است). (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\pi^۲+۲\pi i(Ln۲+۱)$ ۲) $(Ln۲+۱)+i\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\pi+۲\pi i(Ln۲+۱)$ ۴) $(Ln۲+۱)+i\pi$

پاسخ : گزینه «۱» این سؤال اصولاً غلط طراحی شده، چرا که نقاط غیر تحلیلی تابع ریشه‌های مخرج و نقاط شاخه‌ای تابع Lnz می‌باشد و چون Lnz شاخه اصلی است، با توجه به مرز انتگرال‌گیری مشاهده می‌شود که مرز انتگرال‌گیری نقاط شاخه‌ای Lnz را قطع می‌کند و می‌دانیم مرز انتگرال‌گیری نباید نقاط غیر تحلیلی را قطع کند، اما اگر این خطا را نادیده بگیریم و مثل طراح فکر کنیم، داریم:

اگر $f(z)=zLnz$ در نظر گرفته شود بر طبق قضیه انتگرال کوشی داریم:
$$I = \frac{۲\pi i f'(۲i)}{۱!} = ۲\pi i[Ln(۲i)+۱] = ۲\pi i[۱+Ln۲+i\frac{\pi}{۲}] = (۱+Ln۲)۲\pi i - \pi^۲$$

مثال ۴۴: هرگاه $I=\int_{\gamma} e^z dz$ و $\gamma = z(\theta)=\cos^3\theta + i\sin^3\theta$ ، $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ مقدار I کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) $e-1$ ۳) $e^i - e$ ۴) $e^{\frac{\pi}{2}}-1$

پاسخ : گزینه «۳» تابع $f(z)=e^z$ تحلیلی می‌باشد، لذا نیازی نیست با استفاده از روش پارامتری مسئله را حل کنیم.

$$I=\int_{\gamma} e^z dz=\int_1^i e^z dz = e^i - e$$

توضیح: در بازه $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ناحیه انتگرال‌گیری با قرار دادن مقادیر $\theta=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ در ضابطه γ برابر ۱ و i به دست خواهد آمد.

مثال ۴۵: اگر C دایره‌ای یکه به مرکز مبدأ باشد، کدام‌یک از انتگرال‌های زیر دارای مقدار ناصفر هستند و این مقدار چند است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

$$I_4=\oint_C \frac{zdz}{z+2i}\ ,\ I_3=\oint_C \frac{z^3dz}{z^4+4}\ ,\ I_2=\oint_C \frac{zdz}{z^2+4}\ ,\ I_1=\oint_C \frac{dz}{z(z-2)}$$

۱) I_2 و π ۲) I_4 و $2\pi i$ ۳) I_1 و $-\pi i$ ۴) I_3 و -4

پاسخ : گزینه «۳» توابع تحت انتگرال‌های I_2، I_3 و I_4 در ناحیه مزبور تحلیلی هستند و لذا همگی برابر صفر می‌باشند و برای I_1 که نقطه‌ی غیر تحلیلی آن $z_0=0$ است، داریم:

$$I_1=(-\frac{1}{2})2\pi i=-\pi i$$

مثال ۴۶: اگر C بیضی $4(x-2)^2+(y-1)^2=4$ در جهت مثلثاتی باشد و $f(z_0)=\oint_C \frac{e^z}{z(z-z_0)}dz$ ، آنگاه $f'(2)$ برابر است با:

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳ و ۸۴)

۱) $\pi i e^2$ ۲) $-\frac{\pi i}{2}e^2$ ۳) $2\pi i e^2$ ۴) $\frac{\pi i}{2}e^2$

پاسخ : گزینه «۴» طبق فرمول انتگرال کوشی، $f(z_0)=2\pi i.\frac{e^{z_0}}{z_0}$ و لذا $f'(z_0)=2\pi i\frac{z_0-1}{z_0^2}e^{z_0}$ می‌باشد و از آنجا $f'(2)=\frac{\pi}{2}ie^2$ خواهد بود.

مثال ۴۷: مقدار انتگرال مختلط $I=\int_C (z+2)e^{iz}dz$ ، روی سهمی $C:\pi^2y=x^2$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(\pi,1)$ کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $2\pi i e^{\pi i}$ ۲) $-1+\frac{2+\pi}{e}i$ ۳) $4\pi i e^{\pi i}$ ۴) $-(1+\frac{2}{e})+i(\frac{2+\pi}{e}+2)$

پاسخ : گزینه «۴» تابع تحت انتگرال تحلیلی است، لذا از فرمولهای عادی انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_{(0,0)}^{(\pi,1)}(z+2)e^{iz}dz=[(z+2)(\frac{1}{i}e^{iz})-\frac{1}{i}e^{iz}]_0^{\pi+i}\xrightarrow{\text{پس از انجام محاسبات}} I=-(1+\frac{2}{e})+i(\frac{\pi+2}{e}+2)$$

مثال ۴۸: مقدار انتگرال $\int_0^{(1+i)\pi}\cos z dz$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\sinh\pi$ ۲) $-\cosh\pi$
۳) $-i\sinh\pi$ ۴) مشخص نیست زیرا مسیر انتگرال‌گیری داده نشده است.

پاسخ : گزینه «۳» تابع تحت انتگرال تابعی تحلیلی است، لذا داریم:

$$\int_0^{(1+i)\pi}\cos z\,dz=\sin z\Big|_0^{(1+i)\pi}=\sin(\pi+i\pi)=-\sin i\pi=-i\sinh\pi$$

مثال۴۹: اگر دایره $C_R: |z| = R > 1$ مسیر انتگرال‌گیری باشد، آنگاه کوچکترین مقدار M که در نامساوی $\left|\int_{C_R} \frac{Logz}{z^2} dz\right| \le M$ صدق می‌کند (در صورتی که شاخه $-\pi < Argz < \pi$ برای Log در نظر گرفته شود)، عبارت است از : (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{2\pi}{R}$ ۲) $2\pi + 1$ ۳) $\pi^2 + \log R$ ۴) $2\pi(\frac{\pi + \log R}{R})$

پاسخ : گزینه «۴»

$$|Logz| = |Log|z| + iArgz| \le |Log|z|| + |iArgz| \le |Log|z|| + \pi \qquad (1)$$

بنابر قضیه داریم:

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le 2\pi R.M$$

با توجه به نتیجه (۱) داریم:

$$f(z) = \frac{Logz}{z^2}, |z| = R \Rightarrow |f(z)| = \frac{|Logz|}{|z^2|} \le \frac{LogR + \pi}{R^2} \Rightarrow \left|\int_{C_R} \frac{Logz}{z^2} dz\right| \le 2\pi R(\frac{LogR + \pi}{R^2}) = 2\pi(\frac{LogR + \pi}{R})$$

توضیح: از صورت سؤال معلوم است که منظور طراح سؤال، یافتن مقدار دقیق انتگرال نیست بلکه یافتن یک کران بالای مناسب برای آن است. با این حال اگر با تغییر متغیر $z = Re^{i\theta}$ انتگرال را حل کنیم، مقدار دقیق قدرمطلق آن، $\frac{2\pi}{R}$ است.

مثال۵۰: ماکسیمم $|z^2 - z|$ بر قرص $|z| \le 1$ برابر است با : (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{2} + 1$

پاسخ : گزینه «۳» ماکسیمم را بر قرص $|z| = 1$ بدست می‌آوریم:

$$|z^2 - z| = |z|.|z-1| \overset{|z|=1}{=\!=\!=} |z-1| \le |z| + |-1| = 1 + 1 = 2$$

لذا ماکزیمم $|z^2 - z|$ بر قرص $|z| \le 1$ برابر عدد ۲ خواهد بود.

مثال۵۱: اگر تابع f در ناحیه Ω تحلیلی و γ یک منحنی بسته در Ω باشد، حاصل انتگرال $\oint_\gamma \overline{f(z)} f'(z)dz$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) حقیقی است. ۳) در حالت کلی مختلط است. ۴) موهومی محض است.

پاسخ : گزینه «۴»

$$f(z) = u + iv \quad , \quad \overline{f(z)} = u - iv \quad , \quad f'(z) = u_x + iv_x$$

$$\Rightarrow \oint \overline{f(z)} f'(z)dz = \oint (u - iv)(u_x + iv_x)(dx + idy) = \oint (uu_x + iuv_x - ivu_x + vv_x)(dx + idy)$$

$$= \oint (uu_x dx - uv_x dy + vu_x dy + vv_x dx) + i \oint uu_x dy + uv_x dx - vu_x dx + vv_x dy$$

اما حاصل انتگرال اول طبق قضیه گرین برابر صفر می‌باشد زیرا:

$$\oint \underbrace{(uu_x + vv_x)}_{P} dx + \underbrace{(vu_x - uv_x)}_{Q} dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = \iint (v_x u_x + vu_{xx} - u_x v_x - uv_{xx} - u_y u_x - uu_{xy} - v_y v_x - vv_{xy})$$

با توجه به اینکه تابع $f(z)$ تحلیلی است بنابراین:

$$\begin{cases} v_y = u_x \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{xy} = u_{xx} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{cases}$$

بنابراین حاصل انتگرال فوق برابر صفر است. بنابراین تابع موهومی محض است.

مثال۵۲: فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار باشد که بر گوی $\overline{B(a,R)}$ پیوسته است و بـه ازاء $r < R$ در رابطـه $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$ صـدق می‌کند. اگر f در a صفر باشد کدام گزینه صحیح است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) f یک تابع تحلیلی است.
۲) وجود دارد $0 < r < R$ که f بر دایره $|z - a| = r$ صفری ندارد.
۳) صفر تابع f در نقطه a یک صفر تنها نیست.
۴) تعداد صفرهای f در $B(a,R)$ شمارا است.

پاسخ : گزینه «۳» چون f پیوسته است، برای هر r که $r < R$ داریم $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = 0$. لذا یا $f \equiv 0$ و یا طبق قضیه مقدار میـانگین در انتگرالها برای توابع حقیقی مقدار، $\exists \theta_0 \in [0, 2\pi]$ به طوریکه روی دایره به شعاع r داریم $f(re^{i\theta_0}) = 0$. یعنی روی هر دایره به مرکز a و به شعاع به اندازه دلخـواه کوچک، تابع f حداقل یک ریشه دارد، پس در هر صورت، صفر تابع f در نقطه a تنها نیست.

در مورد گزینه‌ی (۱) دقت کنید که اگر f تابعی حقیقی باشد داریم $f = u + 0i$ یعنی $v = 0$ است. حالا اگر f بخواهـد تحلیلـی باشـد بایـد داشـته باشـیم $u_x = v_y = 0$ و $u_y = -v_x = 0$. پس u هم تابع ثابت است، یعنی فقط توابع حقیقی که ثابت باشند، تحلیلی هستند.

مثال ۵۳: فرض کنید f یک تابع تحلیلی غیرثابت بر حوزه‌ی D باشد و $v = \operatorname{Im} f$ ، در این صورت: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

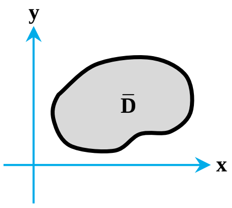
۱) v ماکسیمم و مینیمم خود را در D نمی‌گیرد.

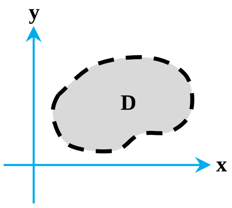
۲) v ماکسیمم خود را بر D می‌گیرد ولی مینیمم خود را بر D نمی‌گیرد.

۳) v بر D ماکسیمم خود را نمی‌گیرد ولی بر $\bar{D}$ (بستار D) ماکسیمم خود را می‌گیرد.

۴) v ماکسیمم خود را در D نمی‌گیرد ولی ممکن است بر D مینیمم داشته باشد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» فرض کنید D یک حوزه و $f = u + iv$ تابعی غیرثابت و تحلیلی بر حوزه‌ی D باشد. ابتدا دقت کنید که یک حوزه، ناحیه‌ای است که مرزش جزء آن نیست اگر مرزش را به آن اضافه کنیم، بستار D یعنی $\bar{D}$ به دست می‌آید.





حال سؤال ممکن است در مورد $|f|$ یا $u = \operatorname{Re} f$ یا $v = \operatorname{Im} f$ باشد. $|f|$ و u و v هیچ‌گاه درون D به مقدار ماکسیمم خود نمی‌رسند. ماکسیمم آن‌ها همیشه در نقطه‌ای روی مرز D قرار دارد. همچنین u و v هیچ‌گاه مقدار مینیمم خود را درون D اختیار نمی‌کنند. مینیمم آن‌ها همیشه روی مرز قرار دارد. اما $|f|$ ممکن است درون D هم به مقدار مینیمم خود برسد. این در حالتی رخ می‌دهد که f درون D دارای ریشه باشد. با این توضیحات، چون مسأله‌ی فوق در مورد v است، گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۵۴: مقدار انتگرال $I = \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n+1}} dz$ (دایره مرز در جهت مثلثاتی) کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰ و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $2\pi i$ ۲) $2\pi i(-1)^n$ ۳) $\frac{2\pi i(-1)^n}{n!}$ ۴) $\frac{2\pi i(-1)^n}{(2n)!}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طبق فرمول انتگرال کوشی که در متن درس اشاره شده داریم:

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i \times f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

در این تست به جای n در طرفین می‌توان 2n در نظر گرفت:

$$I = 2\pi i \times \frac{\cos^{(2n)}(z_0)}{(2n)!} = (-1)^n . \frac{2\pi i \cos(z_0)}{(2n)!} \xrightarrow{\cos(0)=1} I = (-1)^n . \frac{2\pi i}{(2n)!}$$

توجه کنید که مشتق‌های مرتبه‌ی زوج $\cos z$ به صورت $f^{(2n)}(z) = (-1)^n \cos z$ به دست می‌آیند.

مثال ۵۵: منحنی ساده بسته γ در جهت حرکت عقربه ساعت جهت‌دار شده و نقاط $i, -i$ به ترتیب در خارج و داخل آن قرار دارند. انتگرال $\oint_\gamma \frac{\sin z\, dz}{1+z^2}$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\pi i \sinh 1$ ۲) $\pi i \cosh 1$ ۳) $-\pi i \cosh 1$ ۴) $\pi i \sinh 1$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» نکته‌ای که در این تست باید به آن توجه کرد این است که جهت پیمودن γ در جهت حرکت عقربه ساعت است و چون فقط نقطه $z = i$ داخل ناحیه قرار دارد، با نوشتن $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ و با استفاده از قضیه کوشی ـ گورسا داریم:

$$I = \int_\gamma \frac{\sin z dz}{1+z^2} = \int_\gamma \frac{\frac{\sin z}{(z+i)}}{(z-i)} dz = -2\pi i (\frac{\sin i}{i+i}) = -\pi \sin i \xrightarrow{\sin z = -i \sinh iz} I = -\pi(-i)\sinh i(i) = \pi i \sinh(-1) = -\pi i \sinh 1$$

مثال ۵۶: تابع $u(x,y)$ در ناحیهٔ $x^2 + y^2 < 1$ همساز (harmonic) است، در ناحیهٔ $x^2 + y^2 \le 1$ پیوسته است، و در مرز یعنی $x^2 + y^2 = 1$ ، مقادیر $\cos\frac{\theta}{2} (-\pi \le \theta \le \pi)$ را اختیار می‌کند. از گزاره‌های زیر کدام درست است؟ (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۹)

۱) $u(0,0) = \frac{2}{\pi}$ ۲) $u(0,0) = 4$ ۳) $u(0,0) = \pi$ ۴) $u(0,0) = 2\pi$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» طبق قضیه مقدار میانگین خواهیم داشت:

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\frac{\theta}{2}) d\theta = \frac{2}{\pi}$$

مثال ۵۷: انتگرال $\oint_{|x|+|y|=1} \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3} dz$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) πi ۲) $2\pi i$ ۳) $\pi^2 i$ ۴) $2\pi^2 i$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

ابتدا انتگرال را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$I = \underbrace{\oint_C \frac{e^z}{z^3} dz}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\sin z}{z} dz}_{I_2}$$

با توجه به فرمول کوشی I_1 و I_2 برابر است با:

$$I_1 = 2\pi i(\frac{f''(0)}{2!}) = 2\pi i(\frac{e^0}{2}) = \pi i \ , \ \ I_2 = 2\pi i f(0) = 2\pi i \sin 0 = 0 \ \Rightarrow I = I_1 + I_2 = \pi i$$

مثال ۵۸: فرض کنیم $I = \oint_C \frac{\cos z dz}{(z-\frac{\pi}{4})^3}$ و $C: |z-\frac{\pi}{2}| = 1$ باشد، که در جهت مثبت جهت‌گذاری شده است. در آن صورت مقدار I کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sqrt{2}\pi i$ ۲) $\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$ ۳) $-\sqrt{2}\pi i$ ۴) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$

پاسخ : گزینه «۴» بر طبق فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!})$$

در این سؤال $z_0 = \frac{\pi}{4}$ و $n = 2$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\oint_C \frac{\cos z dz}{(z-\frac{\pi}{3})^3} = 2\pi i \frac{(\cos z)''}{2!}\Bigg|_{z=z_0} = 2\pi i[\frac{-\cos z_0}{2}]\Bigg|_{z_0 = \frac{\pi}{4}} = \pi i(-\cos\frac{\pi}{4}) = \pi i \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$$

فصل چهارم

« سری‌های مختلط، محاسبه مانده و انتگرال‌گیری به کمک قضیه مانده‌ها »

درسنامه۱: سری‌های مختلط

مثال۱: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱-\frac{۱}{n})^{n^۲}z^n$ کدام است؟

۱) $e^{-۱}$ ۲) e ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(۱-\frac{۱}{n})^{n^۲}|}=\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{n})^n=e^{-۱}\Rightarrow\frac{۱}{R}=\frac{۱}{e}\Rightarrow R=e$$

مثال۲: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}z^n$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(۲n+۲)!}{((n+۱)!)^۲}}{\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(۲n+۲)(۲n+۱)(۲n)!(n!)^۲}{(۲n)!(n+۱)^۲(n!)^۲}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{۴n^۲}{n^۲}\right|=۴\Rightarrow R=\frac{۱}{۴}$$

مثال۳: شعاع همگرایی $\sum_{n=۰}^{\infty}(\cos in)z^n$ برابر کدام است؟

۱) $e^{-۱}$ ۲) $e^{-۲}$ ۳) $۲e^{-۱}$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۱» جمله عمومی به صورت $a_n=\cos in$ می‌باشد. می‌دانیم $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲}$، لذا $a_n=\cos in=\frac{e^{-n}+e^n}{۲}$ پس داریم:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{-(n+۱)}+e^{(n+۱)}}{۲}}{\frac{e^{-n}+e^n}{۲}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-(n+۱)}+e^{(n+۱)}}{e^{-n}+e^n}\right)$$

با توجه به اینکه $n\to+\infty$، لذا جمله‌هایی با بزرگترین توان حاکم هستند:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{n+۱}}{e^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^n.e^۱}{e^n}\right)=e\Rightarrow R=e^{-۱}$$

مثال۴: شعاع همگرایی تابع $f(z)=\frac{z+۱}{z^۲+۴z-۵}$، حول نقطه $z_۰=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» اول نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ را حساب می‌کنیم:

$$z^۲+۴z-۵=۰\Rightarrow(z-۱)(z+۵)=۰\Rightarrow z=۱\ ,\ z=-۵$$

کمترین فاصله نقطه $z_۰=۰$ از این دو نقطه شعاع همگرایی محسوب می‌شود. واضح است $|z-z_۰|=|۱-۰|=۱$، کمترین فاصله است، پس شعاع همگرایی برابر عدد یک است.

مثال ۵: شعاع همگرایی تابع $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$، حول نقطه $z=4i$ کدام است؟

۱) $\pi-4$ ۲) $2\pi-4$ ۳) 4 ۴) $4\pi-4$

پاسخ: گزینه «۲» نقاط غیر تحلیلی تابع $z=0$ و همچنین $z=2n\pi i$ می‌باشند که به ازای آنها مخرج صفر می‌شود. حالا باید ببینیم فاصله کدام‌یک از این نقاط از $z=4i$ کوچکتر از بقیه است. به راحتی مشخص است به ازای $n=1$، نقطه $z=2\pi i$ کمترین فاصله را از $z=4i$ دارد.

$$|2\pi i-4i|=|(2\pi-4)i|=2\pi-4$$

برای مثال نقاط دیگر مثل $z=0$ یا $z=4\pi i$، فاصله‌شان بیشتر است:

$$|0-4i|=|-4i|=4$$ (از $2\pi-4$ بزرگتر است.)

$$|4\pi i-4i|=|(4\pi-4)i|=4\pi-4$$ (از $2\pi-4$ بزرگتر است.)

بقیه نقاط نیز به همین ترتیب فاصله‌شان از $4i$ بیشتر از فاصله نقطه $2\pi i$ از $4i$ می‌باشد.

مثال ۶: شعاع همگرایی بسط تابع $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+1)(z+2i)}$ حول نقطه $z_0=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

پاسخ: گزینه «۳» شعاع همگرایی برای این سؤال را از رابطه مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\min_{z=i,-1,-2i}|z-z_0|=\min\{\sqrt{2},2,\sqrt{5}\}=\sqrt{2}$$

توضیح اینکه $z_0=1$ می‌باشد و کوتاهترین فاصله این نقطه از نقاط غیر تحلیلی i، -1 و $-2i$، شعاع همگرایی محسوب می‌شود.

مثال ۷: ناحیه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $|z+1-i|>1$ ۲) $|z+1-i|<1$ ۳) $|z+1-i|>\frac{1}{2}$ ۴) $|z+1-i|<\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به توان $-n$ در بالای پرانتز شامل z، سری توانی محسوب نمی‌شود و باید از روش گفته شده برای سری‌های تابعی به تست پاسخ دهیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(z+1-i)^{-(n+1)}}{n+1+i}}{\dfrac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+i)(z+1-i)^{-n}\times(z+1-i)^{-1}}{(n+1+i)(z+1-i)^{-n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+i}{n+1+i}\right|.|(z+1-i)^{-1}|=1\times|(z+1-i)^{-1}|=\left|\frac{1}{z+1-i}\right|$$

عبارت فوق را باید کوچک‌تر از یک قرار دهیم:

$$\left|\frac{1}{z+1-i}\right|<1\Rightarrow \mathbf{|z+1-i|>1}$$

مثال ۸: ناحیه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z-i)^n}$ کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Stanford)

۱) $|z-i|<e$ ۲) $0<|z-i|<e$ ۳) $|z-i|>e$ ۴) مجموع دو سری همه‌جا واگراست.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که دو سری مختلف داریم، لازم است ناحیه‌ی همگرایی هر کدام را جداگانه حساب کنیم:

ابتدا ناحیه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n!}$ را حساب می‌کنیم. این سری توانی است و با محاسبه‌ی شعاع همگرایی داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n!(n+1)}\right|\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0\Rightarrow R=\infty$$

با توجه به مقدار شعاع همگرایی، این سری برای تمام مقادیر z همگراست.

حالا سراغ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(in)}{(z-i)^n}$ می‌رویم. از روش گفته شده برای سری تابعی، ناحیه همگرایی را حساب می‌کنیم. در محاسبات به جای $\sin(in)$ مساوی آن $i\sinh n$ را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{i\sinh(n+1)}{(z-i)^{n+1}}}{\frac{i\sinh n}{(z-i)^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^n i\sinh(n+1)}{(z-i)^{n+1}(i\sinh n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sinh(n+1)}{\sinh n}\right|.\left|\frac{1}{(z-i)^1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{n+1}-e^{-(n+1)}}{2}}{\frac{e^n-e^{-n}}{2}}\right|.\left|\frac{1}{z-i}\right|$$

$$\xrightarrow{\text{از } e^n \text{ در صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم}}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^n(e-e^{-2n-1})}{e^n(1-e^{-2n})}\right|.\left|\frac{1}{z-i}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e-e^{-2n-1}}{1-e^{-2n}}\right|\left|\frac{1}{z-i}\right|=e.\left|\frac{1}{z-i}\right|$$

عبارت فوق را باید کوچکتر از یک قرار دهیم و لذا داریم: $e\cdot\frac{1}{|z-i|}<1 \Rightarrow \mathbf{|z-i|>e}$

در این مرحله لازم است اشتراک دو ناحیه همگرایی بین دو سری انتخاب شود. با توجه به این که سری قبلی همه‌جا همگرا بود و هیچ محدودیتی نداشت، لذا ناحیه همگرایی این سری را به عنوان جواب مسئله معرفی می‌کنیم.

مثال ۹: **ناحیه‌ی همگرایی** $\sum_{n=1}^{\infty}(z+1-i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}$ کدام است؟

۱) $|z+1-i|>1$ ۲) $|z+1-i|<1$ ۳) $0<|z+1-i|\le 1$ ۴) سری واگراست.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به وجود دو سری لازم است ناحیه همگرایی هر کدام از سری‌ها جداگانه حساب شود. با توجه به سری اول که عبارت شامل z در مخرج کسر است (توان n منفی است)، از روش سری تابعی (روش کلی) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(z+1-i)^{n+1}}}{\frac{n}{(z+1-i)^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|.\left|\frac{1}{z+1-i}\right|=\frac{1}{|z+1-i|}$$

عبارت فوق باید کوچکتر از 1 باشد:

$$\frac{1}{|z+1-i|}<1 \Rightarrow \mathbf{|z+1-i|>1}$$

حالا سراغ پیدا کردن ناحیه همگرایی سری دوم می‌رویم. چون سری توانی است و $C_n=1$، لذا شعاع همگرایی برابر یک است و طبق توضیحات داده شده در مورد ناحیه همگرایی سری‌های توانی، داریم: $\mathbf{|z+1-i|<1}$

اشتراک ناحیه همگرایی دو سری، تهی می‌باشد، لذا سری (منظور مجموع دو سری) همه‌جا واگراست.

مثال ۱۰: **ناحیه همگرایی سری** $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nz^2}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2>1$ ۲) $|x|>|y|$ ۳) تمام صفحه مختلط ۴) $|x|<|y|$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)e^{-(n+1)z^2}}{ne^{-nz^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\left|e^{-z^2}\right|<1$$

اما $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$ است. بنابراین داریم:

$$|e^{-z^2}|<1\Rightarrow|e^{y^2-x^2}.e^{-i2xy}|<1\Rightarrow e^{y^2-x^2}<1\Rightarrow y^2-x^2<0\Rightarrow y^2<x^2\Rightarrow|y|<|x|$$

برای روشن شدن روش حل فوق دقت کنید که: چون باید ضرب دو عدد $|e^{y^2-x^2}|.|e^{-i2xy}|$ کوچکتر از یک باشد و همواره $|e^{-i2xy}|=1$، لذا $|e^{y^2-x^2}|<1$ و برای این منظور باید $y^2-x^2<0$ باشد.

مثال ۱۱: **ناحیه همگرایی سری** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n-1}$ کدام است؟

۱) روی محور موهومی و سمت چپ آن ۲) فقط سمت چپ محور موهومی

۳) روی محور موهومی و ربع دوم ۴) سمت چپ محور موهومی و ربع سوم

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n}{\frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{z+1}{z-1}\right|=\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$$

عبارت فوق باید کوچکتر از عدد ۱ قرار گیرد، لذا داریم:

$$|\frac{z+1}{z-1}|<1 \Rightarrow |z+1|<|z-1| \Rightarrow |(x+1)+iy|<|(x-1)+iy| \Rightarrow (x+1)^2+y^2<(x-1)^2+y^2 \Rightarrow 2x<-2x \Rightarrow x<0$$

بنابراین سمت چپ محور موهومی جزء ناحیه‌ی همگرایی سری است، اما با توجه به گزینه‌ها لازم است بررسی کنیم خود محور موهومی جزء ناحیه می‌باشد یا خیر؟ بنابراین باید فرض کنیم $|\frac{z+1}{z-1}|=1$ که در این صورت داریم: $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|\frac{z+1}{z-1}|^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\times 1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

با توجه به توضیحات p ـ سری که از ریاضیات عمومی (۱) می‌دانیم این سری همگراست. پس سری روی محور موهومی یعنی خط $x=0$ نیز همگراست.

مثال ۱۲: شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)^n(\frac{z-i}{2})^{n(n+1)}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۳» بر طبق آزمون کوشی خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n+i|^n\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n(n+1)}}<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|n+i|\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n+1}<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n+1}<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|n+i|} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n+1}<0$$

می‌دانیم که فقط وقتی $|w|<1$ باشد خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}|w|^n=0$ است، به همین دلیل برای این که $\lim_{n\to\infty}|\frac{z-i}{2}|^{n+1}=0$ باشد باید $|\frac{z-i}{2}|<1$ باشد، یعنی لازم است $|z-i|<2$ باشد. بنابراین، شعاع همگرایی برابر ۲ می‌باشد.

مثال ۱۳: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}[2+i(-1)^n]^n z^n$ کدام است؟

۱) 0

۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۴) به ازای مقادیر مختلف n (nهای زوج و nهای فرد) مقدار $(-1)^n$ فرق می‌کند و شعاع همگرایی تعریف دقیقی ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از آزمون ریشه داریم: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|2+i(-1)^n|^n}=\lim_{n\to\infty}|2+i(-1)^n|$

در این‌جا باید اندازه را حساب کنیم. بعضی داوطلبان فکر می‌کنند باید در این حالت مقادیر مختلف n را در نظر بگیرند، (یعنی nهای زوج و nهای فرد)، اما دقت کنید، اندازه مورد سؤال است و باید به علامت | | توجه کنیم! پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2^2+((-1)^n)^2}=\sqrt{4+(-1)^{2n}}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5} \Rightarrow \mathbf{R=\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

مثال ۱۴: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty}(ie^z)^n$، به عدد ۴ همگرا شود، z برابر کدام گزینه است؟

۱) $-Ln(\frac{4}{3})-i\frac{\pi}{2}$ ۲) $-Ln(\frac{4}{3})+i\frac{\pi}{2}$ ۳) $Ln(\frac{4}{3})-i\frac{\pi}{2}$ ۴) $Ln(\frac{4}{3})+i\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی سری هندسی مشخص است با یک سری هندسی با قدر نسبت ie^z روبه‌رو هستیم که جمله اول آن برابر یک است، لذا داریم: $\frac{1}{1-ie^z}=\frac{\text{جمله اول}}{\text{قدر نسبت}-1}=$ مقدار سری هندسی با جملات نامحدود

گفته شده مقدار سری باید برابر ۴ شود، لذا داریم:

$$\frac{1}{1-ie^z}=4 \Rightarrow 1=4-4ie^z \Rightarrow 4ie^z=3 \Rightarrow e^z=\frac{3}{4i} \Rightarrow e^z=-\frac{3}{4}i \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} z=Ln(-\frac{3}{4}i)$$

اما از فصل اول کتاب می‌دانیم: $Ln(x+iy)=Ln\sqrt{x^2+y^2}+itg^{-1}\frac{y}{x}$، پس z برابر با مقدار زیر است:

$$z=Ln\sqrt{0+(-\frac{3}{4})^2}+itg^{-1}\frac{-\frac{3}{4}}{0} \Rightarrow z=Ln(+\frac{3}{4})+itg^{-1}(-\infty)=Ln(\frac{3}{4})-i\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{z=-Ln(\frac{4}{3})-i\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۱۵: ناحیه همگرایی سری $1+\frac{1}{2^2}(\frac{Re(z)}{z+1})+\frac{1}{3^2}(\frac{Re(z)}{z+1})^2+\frac{1}{4^2}(\frac{Re(z)}{z+1})^3+\cdots$ **کدام است؟**

۱) $x>\frac{y^2+1}{2}$ ۲) $x\geq-\frac{y^2+1}{2}$ ۳) $x>-\frac{y^2+1}{2}$ ۴) $x\leq-\frac{y^2+1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» جمله عمومی به صورت $a_n=\frac{1}{n^2}$ می‌باشد:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}(\frac{Re(z)}{z+1})^{n+1}}{\frac{1}{n^2}(\frac{Re(z)}{z+1})^n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{n^2}{(n+1)^2}(\frac{Re(z)}{z+1})|<1$$

حد $\frac{n^2}{(n+1)^2}$ وقتی $n\to\infty$ برابر یک می‌شود، لذا داریم:

$$|\frac{Re(z)}{z+1}|<1\Rightarrow|\frac{x}{x+iy+1}|<1\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}<1\Rightarrow x^2<(x+1)^2+y^2\Rightarrow x^2<x^2+2x+1+y^2\Rightarrow x>-\frac{y^2+1}{2}$$

در حالت تساوی؛ اگر $x=-\frac{y^2+1}{2}$ باشد، با توجه به محاسبات قبلی داریم $\frac{Re(z)}{z+1}=1$ و سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ درمی‌آید که همگراست. بنابراین ناحیه‌ی همگرایی به صورت $x\geq-\frac{y^2+1}{2}$ است.

مثال ۱۶: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i(\frac{2\pi n}{z^2})}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ **، کدام است؟**

۱) ربع دوم و چهارم و قسمت مثبت محورها
۲) ربع اول و سوم غیر از محورها
۳) ربع دوم و چهارم و محورهای مختصات
۴) ربع اول و سوم و قسمت مثبت محورها

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از آزمون نسبت کوشی خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}|=\frac{|e^{i\frac{2\pi(n+1)}{z^2}}|}{|e^{i\frac{2\pi n}{z^2}}|}[\frac{\frac{1}{[(n+1)+1]^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}]=\frac{|e^{i\frac{2\pi n}{z^2}}.e^{i\frac{2\pi}{z^2}}|}{|e^{i\frac{2\pi n}{z^2}}|}[\frac{n+1}{n+2}]^{\frac{3}{2}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}|=\lim_{n\to+\infty}|e^{i\frac{2\pi}{z^2}}|(\frac{n+1}{n+2})^{\frac{3}{2}}$$

می‌دانیم حد عبارت $(\frac{n+1}{n+2})^{\frac{3}{2}}$ برابر یک است، لذا داریم: $e^{i\frac{2\pi}{z^2}}=e^{\frac{i2\pi}{x^2-y^2+i2xy}}$

با توجه به شرط همگرایی، حد فوق باید از عدد ۱ کوچکتر باشد، لذا داریم:

$$|e^{i\frac{2\pi}{(x^2-y^2)+i2xy}}|=|e^{i\frac{2\pi[(x^2-y^2)-i2xy]}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}|=e^{\frac{4\pi xy}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}<1=e^0\Rightarrow 4\pi xy<0\Rightarrow xy<0$$

اگر $xy=0$ باشد دو حالت داریم: $y=0$ یا $x=0$. اگر $y=0$ باشد داریم $z=x$ پس $e^{i\frac{2n\pi}{z^2}}=e^{i\frac{2n\pi}{x^2}}$.

در نتیجه $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}=|\frac{e^{i\frac{2n\pi}{x^2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}|$ و طبق آزمون مقایسه؛ چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست؛ این سری هم همگرا است.

اگر $x=0$ باشد داریم $z^2=(iy)^2=-y^2$ و باز هم $|e^{i\frac{2\pi}{z^2}}|=|e^{-i\frac{2n\pi}{y^2}}|=1$ است و طبق استدلال فوق؛ سری همگراست.

مثال ۱۷: ناحیه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n z}{n^2+1}$ ، کدام است؟

۱) $\sinh^2 x+\sin^2 y\le 1$ ۲) $\sin^2 x+\sinh^2 y\le 1$ ۳) $\sin^2 x+\sinh^2 y<1$ ۴) $\sinh^2 x+\sin^2 y<1$

پاسخ: گزینه «۲» طبق آزمون ریشه می‌توان شرط همگرایی را به صورت مقابل نوشت: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\sin^n z}{n^2+1}\right|}<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|\sin z|}{\sqrt[n]{n^2+1}}<1$

با توجه به این‌که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1$ می‌باشد، بنابراین شرط همگرایی به صورت $|\sin z|<1$ خلاصه می‌شود.

از طرفی تابع مختلط $\sin z$ را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

بنابراین اندازه $\sin z$ برابر است با: $|\sin z|=\sqrt{(\sin x\cosh y)^2+(\cos x\sinh y)^2}$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و هیپربولیکی، می‌توان چنین نوشت:

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y}=\sqrt{\sin^2 x(\sinh^2 y+1)+(1-\sin^2 x)\sinh^2 y}=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$$

به این ترتیب، شرط همگرایی سری به صورت مقابل خواهد بود: $|\sin z|<1 \Rightarrow \sin^2 x+\sinh^2 y<1$

از طرفی اگر $|\sin z|=1$ باشد داریم: $\left|\frac{\sin^n z}{n^2+1}\right|=\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست، این سری نیز همگرا خواهد بود. در نتیجه ناحیه‌ی همگرایی به شکل مقابل است: $|\sin z|\le 1 \Rightarrow \sin^2 x+\sinh^2 y\le 1$

مثال ۱۸: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+|z|}$ به ازای کدام مقادیر z همگراست؟

۱) $|z|<1$ ۲) $|z|\le 1$ ۳) فقط $|z|=1$ ۴) در کل صفحه مختلط همگراست.

پاسخ: گزینه «۴» برای حل این سؤال لازم است به دانش‌های ریاضی عمومی (۱) مراجعه کنیم:

یادآوری: برای اینکه سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(z)$ ، همگرا باشد باید $|f_n(z)|$ نزولی و همگرا به صفر باشد. در این سؤال چون $\frac{1}{n+|z|}$ نسبت به n نزولی است و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+|z|}=0$ ، پس سری در کل صفحه مختلط همگرا می‌باشد. دقت کنید همگرایی به z بستگی ندارد و به ازای تمام مقادیر z سری همگرا می‌شود.

مثال ۱۹: شعاع همگرایی کدام جفت سری مقابل با هم یکسان است؟ $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}z^n$, $b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{n+1}$, $d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$

۱) فقط شعاع همگرایی سری a با سری b یکسان است.
۲) شعاع همگرایی سری a با سری c و شعاع همگرایی سری b با d یکسان است.
۳) شعاع همگرایی a با b و شعاع همگرایی سری c با d یکسان است.
۴) فقط شعاع همگرایی سری c و d با هم یکسان است.

پاسخ: گزینه «۲» شاید لازم به توضیح نباشد که محاسبه شعاع همگرایی هر یک از سری‌ها و مقایسه آن‌ها با یکدیگر کار وقت‌گیری است. اما با کمی دقت مشخص است، سری a، مشتق سری c و همچنین سری d همان سری b می‌باشد و لذا شعاع همگرایی a با c و همچنین d با b یکی است.

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{n+1}\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(n+1)z^n$$

$$b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

توضیح تکمیلی: نکته‌ی جالبی در مورد این مثال وجود دارد. می‌دانیم که $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ است. حال اگر از این سری مشتق بگیریم خواهیم داشت.

$$(e^z)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

حالا با جایگزین کردن $n+1$ به جای n و در عوض یک واحد کم کردن از کران‌های سری داریم: $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

همان‌طور که مشتق e^z برابر است با خودش، سریِ توانی این تابع هم همین ویژگی را نشان می‌دهد. وقتی از آن مشتق می‌گیریم نهایتاً به خودش برمی‌گردیم. منظور آن است که می‌توان گفت (d) مشتق (b) است. می‌توان گفت (d) خودِ (b) است و هر دو جمله درست هستند.

مثال ۲۰: بسط مک‌لورن تابع $f(z)=Ln(\frac{1+z}{1-z})$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3z^{2n+1}}{2n+1}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4z^{2n+1}}{2n+1}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از خاصیت لگاریتم داریم:

$$Ln(\frac{1+z}{1-z})=Ln(1+z)-Ln(1-z)$$

اما بسط مک‌لورن تابع $Ln(1+z)$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$Ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

با تبدیل z به $-z$ در طرفین تساوی بالا، بسط مک‌لورن $Ln(1-z)$ را هم می‌نویسیم:

$$Ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\cdots$$

$$Ln(\frac{1+z}{1-z})=(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4})-(-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4})=2z+\frac{2z^3}{3}+\frac{2z^5}{5}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

مثال ۲۱: سه جمله اول بسط مک‌لورن تابع $f(z)=tg^{-1}z$ کدام است؟

۱) $z+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+-\cdots\ (|z|<1)$

۲) $z+\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+-\cdots\ (|z|<1)$

۳) $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\cdots\ (|z|<1)$

۴) $z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\cdots\ (|z|<1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از بسط‌های فوق یک راه حل ابتکاری به این صورت است که برای نوشتن بسط مک‌لورن تابع $tg^{-1}z$ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(z)=tg^{-1}z\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

حال بسط مک‌لورن تابع $\frac{1}{1+z^2}$ را می‌نویسیم. از بسط $\frac{1}{1+z}$ استفاده می‌کنیم و در طرفین به جای z، z^2 قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+-\cdots\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+-\cdots\cdots$$

اگر این بار از طرفین تساوی فوق انتگرال بگیریم، داریم:

$$f(z)+C=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\cdots\xrightarrow{f(0)=0}f(z)=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\cdots\cdots$$

مثال ۲۲: مشتق مرتبه پنجم تابع $f(z)=\frac{z}{2+z^2}$ در نقطه‌ی $z_0=0$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{15}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$، بنابراین $f^{(n)}(z_0)=n!\times a_n$. در این سؤال $n=5$ و $z_0=0$ است، لذا داریم:

$$f^{(5)}(0)=5!\times a_5$$

پس باید a_5 و یا همان ضریب جمله‌ی z^5 را به دست آوریم. برای این منظور از بسط $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+-\cdots$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{z}{2+z^2}=\frac{\frac{z}{2}}{1+\frac{z^2}{2}}=\frac{z}{2}[1-(\frac{z^2}{2})+(\frac{z^2}{2})^2-(\frac{z^2}{2})^3+-\cdots]=\frac{z}{2}-\frac{z^3}{4}+\frac{z^5}{8}-\frac{z^7}{16}+\cdots$$

چون ضریب z^5 برابر با $\frac{1}{8}$ شده، لذا $a_5=\frac{1}{8}$ و بنابراین $f^{(5)}(0)=120\times\frac{1}{8}=15$.

مثال۲۳: بسط مک‌لورن تابع $f(z)=\dfrac{z}{z^4+9}$ کدام است؟

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+2}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

۲) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+1}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

۳) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{3^{2n+2}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

۴) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{3^{2n+1}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این مثال باید شکل تابع را به صورت $\dfrac{1}{1+u}$ در آوریم تا بتوانیم از فرمول این بسط استفاده کنیم:

$$f(z)=\frac{z}{z^4+9}=\frac{z}{9(1+\frac{z^4}{9})}=\frac{z}{9}\left(\frac{1}{1+\frac{z^4}{9}}\right)$$

می‌دانیم با شرط $|z|<1$ بسط مقابل را داریم: $\dfrac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$. حالا اگر فرض کنیم $|\dfrac{z^4}{9}|<1$ و یا به عبارت دیگر $|z|<\sqrt{3}$، می‌توانیم از فرمول این بسط برای $f(z)$ استفاده کنیم.

$$\frac{1}{1+\frac{z^4}{9}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^4}{9}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^4}{3^2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{3^{2n}}$$

پس $f(z)$ به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=\frac{z}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+2}}$$

مثال۲۴: اگر شاخه‌ای از لگاریتم مدنظر باشد که برای آن $Ln1=2\pi i$ است، آن‌گاه ضریب z^3 در بسط مک‌لورن $f(z)=[Ln(1-z)]^2$ کدام است؟

۱) $1+\frac{4}{3}\pi i$　　۲) $1-\frac{4}{3}\pi i$　　۳) $\frac{3}{2}-2\pi i$　　۴) $\frac{3}{2}+2\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم که شاخه‌ی اصلی لگاریتم، دارای بسطی به این صورت است:

$$Ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots$$

همچنین می‌دانیم که برای شاخه‌ی اصلی لگاریتم داریم $Ln1=0$. اما در این سؤال با شاخه‌ای از لگاریتم سروکار داریم که در آن $Ln1=2\pi i$ است. این نشان می‌دهد که شاخه‌ی داده شده با شاخه‌ی اصلی لگاریتم به اندازه‌ی $2\pi i$ تفاوت دارد. به همین دلیل بسط مک لورن آن برابر است با:

$$Ln(1+z)=2\pi i+\text{بسط مک لورن شاخه‌ی اصلی}=2\pi i+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots$$

حال با جایگزین کردن $-z$ به جای z داریم:

$$Ln(1-z)=2\pi i-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots$$

با ضرب این بسط در خودش خواهیم داشت:

$$[Ln(1-z)]^2=(2\pi i-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots)(2\pi i-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots)$$

ضریب z^3 را در این حاصل ضرب تعیین می‌کنیم:

$$(2\pi i)(-\frac{z^3}{3})+(-z)(\frac{-z^2}{2})+(-\frac{z^2}{2})(-z)+(-\frac{z^3}{3})(2\pi i)=(-\frac{4\pi i}{3}+\frac{2}{2})z^3=(1-\frac{4\pi}{3}i)z^3$$

بنابراین ضریب z^3 برابر است با $1-\frac{4\pi}{3}i$.

مثال۲۵: اگر تابع $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z\cosh z-\sin z}{z^3} & z\neq 0\\ b & z=0\end{cases}$ تام باشد، مقدار $f(0)+f^{(2k)}(0)+f^{(2k+1)}(0)$ برای عدد طبیعی فرد k کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$　　۲) $\dfrac{2k}{(2k+1)!}$　　۳) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$　　۴) $\dfrac{2k}{(2k+1)!}+\dfrac{2}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از بسط مک لورنِ $\cosh z$ و $\sin z$ خواهیم داشت:

$$\frac{z\cosh z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)=\frac{1}{z^3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)=\frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k)!}-\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right]z^{2k+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1-(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-2}$$

اولین جمله‌ی این سری به ازای $k=0$، صفر می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$f(z)=0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1-(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-2}$$

با استفاده از ویژگی سری‌ها می‌توانیم کران‌ها را از $k=0$ آغاز کنیم اما در عوض در سری به جای k، $k+1$ قرار دهیم.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(k+1)+1-(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}z^{2k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k+3+(-1)^k}{(2k+3)!}z^{2k}=\frac{4}{3!}+\frac{4}{5!}z^2+\frac{8}{7!}z^4+\cdots$$

بنابراین اگر ضریب z^n را با a_n نشان دهیم خواهیم داشت:

$$a_{2k}=\frac{2k+3+(-1)^k}{(2k+3)!}\ ,\ a_{2k+1}=0$$

f تام است. بنابراین باید در $z=0$ نیز مشتق‌پذیر باشد. در این صورت ضریب جمله‌یِ z^n در بسط مک لورن f برابر است با: $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

به ویژه $f(0)=a_0$ است، یعنی: $b=f(0)=\frac{4}{3!}=\frac{2}{3}$. در بسط مک لورن f، توان‌های فرد ظاهر نشده‌اند یعنی $a_{2k+1}=0$، بنابراین $f^{(2k+1)}(0)=0$ است.

و ضریب جمله‌یِ z^{2k} برابر است با:

$$a_{2k}=\frac{2k+3+(-1)^k}{(2k+3)!}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}=a_{2k}=\frac{2k+3+(-1)^k}{(2k+3)!}\Rightarrow f^{(2k)}(0)=\frac{(2k+3+(-1)^k)(2k)!}{(2k+3)!}$$

بنابراین اگر k فرد باشد داریم:

$$f^{2k}(0)=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

به این ترتیب جواب نهایی برابر است با:

$$f(0)+f^{(2k)}(0)+f^{(2k+1)}(0)=\frac{2}{3}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

مثال ۲۶: سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^3-z}$، حول نقطه‌ی $z_0=-1$ در ناحیه $1<|z+1|<2$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

۲) $-\frac{1}{2(z+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

۳) $+\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

۴) $-\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا تغییر متغیر $w=z+1$ را اعمال می‌کنیم تا بتوان تابع را حول $w=0$ بسط داد:

از بسط کسری استفاده می‌کنیم:

$$f(w)=\frac{1}{(w-1)(w^2-2w)}=\frac{1}{w}\left(\frac{A}{w-1}+\frac{B}{w-2}\right)$$

$$A(w-2)+B(w-1)=1\Rightarrow\begin{cases}w=2\Rightarrow B(2-1)=1\Rightarrow B=1\\ w=1\Rightarrow A(1-2)=1\Rightarrow A=-1\end{cases}$$

$$f(w)=\frac{1}{w}\left(\frac{-1}{w-1}+\frac{1}{w-2}\right)$$

ناحیه $1<|z+1|<2$ بر حسب w به صورت $1<|w|<2$ خواهد بود. پس در اولین کسر باید از w فاکتور بگیریم و $\frac{1}{w}$ ایجاد کنیم و در دومی از ۲ فاکتور می‌گیریم و $\frac{w}{2}$ را ایجاد خواهیم کرد:

$$f(w)=\frac{1}{w}\left(\frac{-1}{w}\frac{1}{1-\frac{1}{w}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{w}{2}}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{w^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

توضیح: حل مسئله در این قسمت کامل می‌شود ولی با توجه به گزینه‌ها، سری دوم را از $n=1$ شروع کرده و مقدار $n=0$ را جداگانه می‌نویسیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}\xrightarrow{n=0}\frac{-1}{2w}$$

در نتیجه داریم:

$$f(w)=-\frac{1}{2w}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{w^{n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

حال با جایگذاری $w=z+1$ در معادله فوق به گزینه ۴ می‌رسیم.

$$w=z+1\Rightarrow f(z)=\frac{-1}{2(z+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}\Rightarrow f(z)=\frac{-1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$$

مثال ۲۷: سری لوران تابع $f(z)=\frac{3}{z^2-z-2}$ در ناحیه $|z|>2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^n}$
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$
۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^n}$
۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^{n+1}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» $f(z)$ را با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان به صورت $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}$ نوشت. از طرفی در ناحیه $|z|>2$ داریم:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}.(\frac{1}{1-\frac{2}{z}})=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

برای بسط $-\frac{1}{z+1}$ نیز با توجه به این که در ناحیه‌ی $|z|>2$ هستیم پس $|z|>1$ هم هست. بنابراین $\frac{1}{z}$ را ایجاد می‌کنیم:

$$\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{z}\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{z}})=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\times(-1)^n}{z\times z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

لذا داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

مثال ۲۸: اگر تمام سری‌های لوران $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ را حول $z_0=0$ بنویسیم، کدام‌یک از سری‌های زیر بسط (تیلور یا لوران) تابع $f(z)$ نمی‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\cdots$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$
۳) $\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\cdots$
۴) $-\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}-\frac{7}{z^3}+-\cdots$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این مسئله یک مثال بسیار خوب و کامل برای آموزش مطلب می‌باشد. هر چند ممکن است به عنوان یک تست کمی سنگین باشد.
تابع $f(z)$ دارای دو نقطه تکین $z=-2$ و $z=1$ می‌باشد. با توجه به این که بسط حول $z_0=0$ خواسته شده لذا باید سه طوق به مرکز صفر وجود داشته باشد. این سه طوق به شکل زیر است که $f(z)$ در هر یک از آن‌ها تحلیلی است:

۱) دایره $|z|<1$
۲) طوق $1<|z|<2$
۳) $|z|>2$ (در واقع این ناحیه بیرون دایره $|z|\le 2$ می‌باشد.)

ابتدا $f(z)$ را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}\Rightarrow \mathbf{f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}}$$

حالا بسط لوران را در سه ناحیه گفته شده می‌نویسیم:

۱) دایره $|z|<1$: با توجه به این که $f(z)$ در این ناحیه هیچ نقطه‌ی تکینی ندارد به راحتی معلوم است با یک بسط تیلور روبه‌رو خواهیم بود. در واقع وقتی $|z|<1$ باشد به وضوح $|z|<2$ هم هست پس باید $\frac{z}{1}$ و $\frac{z}{2}$ ایجاد کنیم:

$$\begin{cases}\frac{1}{z-1}=-(\frac{1}{1-z})=-(1+z+z^2+z^3+\cdots)\\ \frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{z}{2}})=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots)\end{cases}$$

بنابراین می‌توان $f(z)$ در ناحیه $|z|<1$ به صورت زیر نمایش داد:

$$f(z)=(\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16})-(1+z+z^2+z^3+\cdots)\Rightarrow \mathbf{f(z)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\cdots}$$

۲) طوق $1<|z|<2$: برای کسر $\frac{1}{z+2}$ با توجه به آن که $|z|<2$ است، باید به دنبال تولید $\frac{z}{2}$ باشیم و برای کسر $\frac{1}{z-1}$، چون $|z|>1$ است، لازم است به دنبال تولید $\frac{1}{z}$ باشیم، پس داریم:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{z}{2}})=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots)\quad \text{و}\quad \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})=\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots)$$

بنابراین $f(z)$ در طوق $1<|z|<2$ به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8})+(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots)\Rightarrow \mathbf{f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}}$$

۳) ناحیه $2<|z|$: وقتی $2<|z|$ باشد به وضوح $1<|z|$ هم هست. بنابراین در این ناحیه باید $\frac{2}{z}$ و $\frac{1}{z}$ ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right) \quad ; \quad \frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\cdots\right)$$

بنابراین $f(z)$ در ناحیه $2<|z|$ به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\frac{8}{z^4}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right) \Rightarrow \mathbf{f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\cdots}$$

با توجه به سه ناحیه‌ی فوق و سه بسط مربوط به آن‌ها واضح است، گزینه (۴) نمی‌تواند بسط $f(z)$ باشد.

مثال ۲۹: بسط تابع $f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}$، $0<|z|<1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{z}+1-z+z^2-\cdots$ ۲) $1-z+z^2-z^3+\cdots$ ۳) $1+z-z^2+\cdots$ ۴) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم، جمله $\frac{1}{z}$ خود به خود وجود دارد و بسط جمله دوم را می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots \Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}+1-z+z^2-z^3+\cdots$$

مثال ۳۰: در سری لوران تابع $f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ روی ناحیه‌ی $0<|z|<1$، ضریب $\frac{1}{z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2!}$ ۳) 1 ۴) $+\frac{1}{2!}$

پاسخ: گزینه «۳» بهتر است با توجه به وجود $1+2z^2$ در صورت کسر و $1+z^2$ در مخرج آن، از یک روش ابتکاری بهره ببریم:

$$f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3(1+z^2)}=\frac{1}{z^3}\left(\frac{1+z^2+z^2}{1+z^2}\right)=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{z^2}{z^2+1}\right)=\frac{1}{z^3}\left[1+z^2\left(\frac{1}{z^2+1}\right)\right]$$

با استفاده از بسط $\frac{1}{1+u}$ داریم:

$$=\frac{1}{z^3}\left[1+z^2\left(1-z^2+\frac{z^4}{2!}-\frac{z^6}{3!}+-\cdots\right)\right]=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}-z+\frac{z^3}{2!}-+\cdots$$

همان‌طور که مشخص است، ضریب $\frac{1}{z}$، برابر **یک** است.

مثال ۳۱: سری لوران تابع $f(z)=Ln\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$ در ناحیه‌ی $|z|>2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2nz^n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{nz^n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2nz^n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2^n-1)}{nz^n}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $Ln\left(\frac{z-1}{z-2}\right)=Ln(z-1)-Ln(z-2)$. از طرفی در ناحیه‌ی $|z|>2$، خواهیم داشت: $|\frac{2}{z}|<1$، پس $|\frac{1}{z}|<1$ است. در نتیجه توان‌های $\frac{1}{z}$ و $\frac{2}{z}$ را در کسرهای زیر ایجاد می‌کنیم:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \quad , \quad \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

حالا با انتگرال‌گیری از طرفین این معادلات خواهیم داشت:

$$Ln(z-2)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{2^n}{z^{n+1}}dz=Lnz+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^n}{nz^n} \quad , \quad Ln(z-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{dz}{z^{n+1}}=Lnz+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{nz^n}$$

توجه داشته باشید که در هر دو سری به ازای $n=0$ داریم:

$$\int\frac{1}{z}dz=Lnz$$

حال با کم کردن این دو تساوی از یکدیگر خواهیم داشت:

$$Ln(z-1)-Ln(z-2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{nz^n}+\frac{2^n}{nz^n}$$

به عبارتی داریم:

$$Ln\left(\frac{z-1}{z-2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{nz^n}$$

مثال ۳۲: سری لوران $f(z)=\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$، در ناحیه $1<|z|<2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}z^n$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}z^n$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا $f(z)$ را به کسرهای جزئی تقسیم می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z+2}$$

در ناحیه‌ی داده شده داریم $|z|>1$، بنابراین در کسر $\dfrac{1}{z-1}$ باید $\dfrac{1}{z}$ ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

حالا که بسط $\dfrac{1}{z-1}$ به دست آمده، با مشتق‌گیری از طرفین بسط فوق داریم:

$$\frac{1}{(z-1)^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)\Rightarrow\frac{1}{(z-1)^2}=-\left(-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}$$

برای کسر $\dfrac{1}{z+2}$ دقت کنید که در ناحیه‌ی داده شده $|z|<2$ است بنابراین باید $\dfrac{z}{2}$ ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$$

با جمع‌بندی مطالب بالا داریم:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$$

مثال ۳۳: چند جمله اول سری لوران $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ به مرکز صفر کدام است؟

۱) $z+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3!z}+\dfrac{1}{4!z^2}+\cdots$
۲) $z+\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3!z^2}+\cdots$
۳) $z^2+z+\dfrac{1}{2}+\cdots$
۴) $z^2+z+\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3!z^2}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۳» این نوع تست‌ها چون از نوع چند جمله‌ای و کسری نیستند، با نوشتن بسط توابع به صورت مستقیم به جواب می‌رسند. با نوشتن بسط e^z و تبدیل z به $\dfrac{1}{z}$ در طرفین تساوی داریم:

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2}\right)+\cdots$$

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2}\right)+\cdots\right]=z^2+z+\frac{1}{2}+\cdots$$

مثال ۳۴: سه جمله اول بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{\sinh\pi z}{z^3}$ حول مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{z^2}+\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^5z^2}{5!}$
۲) $\dfrac{\pi}{z^2}-\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^5z^2}{5!}$
۳) $\dfrac{\pi}{z}+\dfrac{\pi^2}{3!}+\dfrac{\pi^3z^2}{5!}+\cdots$
۴) $\dfrac{\pi}{z}-\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^5z^3}{5!}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{1}{z^3}(\sinh\pi z)=\frac{1}{z^3}\left(\pi z+\frac{\pi^3z^3}{3!}+\frac{\pi^5z^5}{5!}+\cdots\right)=\frac{\pi}{z^2}+\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^2}{5!}+\cdots$$

مثال ۳۵: سه جمله اول سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ حول مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{z^2}{120}$
۲) $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{z^2}{120}$
۳) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{6z}+\dfrac{z^2}{120}$
۴) $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{z^2}{120}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}-\cdots$$

مثال ۳۶: بسط لوران $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ در $z=1$ کدام یک از عبارات زیر است؟

۱) $\dfrac{e^2}{(z-1)^3}+\dfrac{2e^2}{(z-1)^2}+\dfrac{2e^2}{z-1}+\dfrac{4e^2}{3}+\dfrac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots$

۲) $e^2\{\dfrac{1}{(z-1)^3}+\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{2e^2}{3}+\dfrac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

۳) $\dfrac{e^2}{(z-1)^3}+\dfrac{2e^2}{(z-1)^2}+\dfrac{3e^2}{z-1}+\dfrac{3e^2}{4}+4e^2(z-1)+\cdots$

۴) $e^2\{\dfrac{1}{(z-1)^3}+\dfrac{2}{(z-1)^2}+\dfrac{3}{z-1}+\dfrac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا بسط مک‌لورن e^z را می‌نویسیم:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

چون حول $z=1$ بسط خواسته شده لذا با تغییر متغیر $u=z-1$ داریم:

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2(u+1)}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}.e^{2u}=\frac{e^2}{u^3}[1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\frac{(2u)^4}{4!}+\cdots]$$

$$=\frac{e^2}{u^3}+\frac{2e^2}{u^2}+\frac{2e^2}{u}+\frac{8e^2}{6}+\frac{4ue^2}{6}+\cdots=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+\frac{4}{3}e^2+\frac{2}{3}(z-1)e^2+\cdots$$

مثال ۳۷: اگر بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z\sinh z}$ در بازه‌ی $0<|z|<\pi$ به صورت $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n$ تعریف شود، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $b_{-2}=1,b_{-1}=-\dfrac{1}{6},b_1=\dfrac{7}{360}$

۲) $b_4=\dfrac{7}{360},b_2=-\dfrac{1}{6},b_0=1$

۳) $b_{-2}=0,b_0=-\dfrac{1}{6},b_2=\dfrac{7}{360}$

۴) $b_{-2}=1,b_0=\dfrac{-1}{6},b_2=\dfrac{7}{360}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از بسط مک‌لورن $\sinh z$ خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{1}{z\sinh z}=\frac{1}{z[z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots]}=\frac{1}{z^2(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)}=\frac{1}{z^2}(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{7z^4}{360}-\cdots)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{7z^2}{360}\cdots\Rightarrow\left|\begin{array}{l}b_{-2}=1\\ b_0=-\frac{1}{6}\\ b_2=\frac{7}{360}\end{array}\right.$$

توجه کنید که برای یافتن چندجمله‌ی اول بسط تابع $\dfrac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots}$ از تقسیم چندجمله‌ای‌ها استفاده کرده‌ایم. اگر به تقسیم انجام شده دقت کنید در آخرین تفاضل ضریب z^4 برابر است با:

$$\frac{1}{3!3!}-\frac{1}{5!}=\frac{1}{36}-\frac{1}{120}=\frac{1}{3\times12}-\frac{1}{10\times12}=\frac{10-3}{3\times10\times12}=\frac{7}{360}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\\ \cline{2-2}
-(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots) & 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{7z^4}{360}-\cdots\\ \cline{1-1}
-\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}-\cdots & \\
-(-\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{3!3!}-\cdots) & \\ \cline{1-1}
\frac{7z^4}{360}+\cdots &
\end{array}$$

توضیح: به عنوان یک روش دوم، برای کسر $\dfrac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots}$ می‌توانستیم فرض کنیم $u=\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}+\cdots$ و سپس بسط لوران $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2-+\cdots$ را بنویسیم. اما محاسبه‌ی ضریب z^4 در این روش به دقت بیشتری نیاز دارد.

مثال ۳۸: اگر یک سری لوران تابع f به صورت $2<|z|<3$ ، $f(z)=\operatorname{tg}z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{z^n}$ باشد، آنگاه مقدار b_2 چقدر است؟

۱) $-\pi$ ‏ ۲) 0 ‏ ۳) 1 ‏ ۴) π

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $\operatorname{tg}z$ یک تابع فرد است، لذا فقط بر اساس توان‌های فرد z بسط می‌یابد و بنابراین ضریب توان‌های زوج z صفر می‌باشد، یعنی $b_2=0$.

مثال ۳۹: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{e^z-e^{2z}}$، حول نقطه‌ی $z=0$ در ناحیه $2\pi>|z|>0$، کدام است؟ (راهنمایی: $\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ و $b_0=1$)

۱) $-\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$

۲) $-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$

۳) $-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{2(n+1)!}]z^n$

۴) $-\frac{1}{2z}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به آن که بسط لوران $\frac{z}{e^z-1}$ در صورت سؤال داده شده است، سعی می‌کنیم ضابطه‌ی $f(z)$ را به آن ربط دهیم:

$$f(z)=\frac{1}{e^z(1-e^z)}=\frac{1}{e^z}+\frac{1}{1-e^z}=e^{-z}-\frac{1}{e^z-1}=e^{-z}-\frac{1}{z}(\frac{z}{e^z-1})$$

می‌دانیم بسط مک‌لورن e^{-z} به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}$ است و بسط $\frac{z}{e^z-1}$ نیز در صورت سؤال داده شده. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^{n-1}$$

از سری دوم جمله‌ی $n=0$ را خارج می‌کنیم. سپس با جایگزین کردن $n+1$ به جای n، از کران‌های آن یک واحد کم می‌کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n-\frac{b_0}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^{n-1}=-\frac{b_0}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}z^n=-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$$

مثال ۴۰: اگر برای $|z|>0$، بسط لوران $\sinh(z+\frac{1}{z})$ به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n z^n$ نمایش داده شود، آن‌گاه C_n کدام است؟

۱) $C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh(\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

۲) $C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

۳) $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

۴) $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

پاسخ: گزینه «۴» در بسط لوران حول نقطه $z_0=0$، ضرایب C_n به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\sinh(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz$$

با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ خواهیم داشت؛ $z+\frac{1}{z}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ که می‌دانیم برابر $2\cos\theta$ می‌باشد، لذا داریم:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\sinh(2\cos\theta)ie^{i\theta}d\theta}{e^{i(n+1)\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(2\cos\theta)[\cos n\theta-i\sin n\theta]d\theta$$

قسمت موهومی انتگرال فوق تابعی فرد بوده و انتگرال آن صفر می‌شود، بنابراین داریم:

$$\mathbf{C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta}$$

مثال ۴۱: اگر بسط لوران تابع $f(z)=\cosh(z+\frac{1}{z})$ برای $|z|>0$ به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n z^n$ باشد، آن‌گاه C_n کدام است؟

(با کمی تغییر از سؤالات درس ریاضی مهندسی دانشگاه MIT)

۱) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cosh(2\cos\theta)d\theta$

۲) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2n\theta)\cosh(\cos\theta)d\theta$

۳) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-\theta)\cosh(2\sin\theta)d\theta$

۴) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cosh(2\sin(n\theta))d\theta$

پاسخ: گزینه «۱» ضرایب C_n از رابطه انتگرالی مقابل به‌دست می‌آید: $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$

با توجه به گزینه‌ها که حدود انتگرال به صورت $\int_0^{2\pi}$ داده شده، با انتخاب مرز C_n به‌صورت دایره واحد، خواهیم داشت:

$$z=re^{i\theta}=1e^{i\theta}=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cosh(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}}(ie^{i\theta}d\theta)$$

با استفاده از روابط اویلر $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ ، $e^{in\theta}=\cos n\theta-i\sin n\theta$ خواهیم داشت:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)e^{-in\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)[\cos n\theta-i\sin n\theta]d\theta$$

قسمت موهومی انتگرال فوق به‌دلیل فرد بودن تابع زیر انتگرال و متقارن بودن بازه‌ی انتگرال‌گیری صفر می‌شود:

$$\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cosh(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta}_{\text{تابع فرد}}=0$$

بنابراین C_n برابر مقدار زیر است:

$$\mathbf{C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta}$$

مثال ۴۲: اگر بسط لوران $f(z)$ به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z+1)^n$ تعریف شود، آن‌گاه مقدار C_{-2} در بسط لوران $f(z)=\sin(\frac{z}{z+1})$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\cos 1$ ۴) $-\frac{1}{2}\sin 1$

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه ضریب C_{-2} را در بسط $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z+1)^n$ بیابیم، می‌توانیم بسط لوران $f(z)$ را حول نقطه‌ی $z_0=-1$ بنویسیم. فرض کنیم $t=z+1$ و $f(z)$ را بر حسب t می‌نویسیم:

$$f(z)=\sin(\frac{z}{z+1})\Rightarrow f(t)=\sin(\frac{t-1}{t})=\sin(1-\frac{1}{t})$$

اکنون از فرمول مثلثاتی تفاضل دو کمان استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

با استفاده از این اتحاد داریم:

$$f(t)=\sin(1-\frac{1}{t})=\sin(1)\cos(\frac{1}{t})-\sin(\frac{1}{t})\cos(1)$$

حال از بسط‌های مک‌لورن سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$f(t)=\sin(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!t^{2n}}-\cos(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!t^{2n+1}}$$

حال با جایگذاری $t=z+1$ بسط $f(z)$ بدست می‌آید:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(1)}{(2n)!}(z+1)^{-2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(1)}{(2n+1)!}(z+1)^{-2n-1}$$

جمله‌ی $(z+1)^{-2}$ فقط در اولین مجموع و به ازای $n=1$ ظاهر می‌شود. در واقع با دقت به توانِ $(z+1)$ در اولین مجموع داریم $C_{-2n}=\frac{(-1)^n\sin(1)}{(2n)!}$.

پس خواهیم داشت:

$$\mathbf{C_{-2}=\frac{-\sin(1)}{2!}=-\frac{1}{2}\sin(1)}$$

مثال ۴۳: ضریب جمله $(z+\pi i)^2$ در بسط لورانت تابع $f(z)=\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^2}$ عبارت است از:

۱) $-\frac{1}{4!}$ ۲) $\frac{\pi i}{4!}$ ۳) $\frac{1}{4!}$ ۴) $-\frac{\pi i}{4!}$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این تست، مستقیماً از فرمول استفاده می‌کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\Rightarrow C_2=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz\Rightarrow C_2=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^2}}{(z+\pi i)^3}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^5}dz$$

توجه کنید که انتگرال روی یک مرز بسته شامل $z_0=-\pi i$ گرفته شده است.

اکنون با فرض $g(z)=\cosh z$ می‌توان از فرمول انتگرال کوشی استفاده کرد. به سادگی معلوم است که مشتق چهارمِ $\cosh z$ برابر با خودش است.

$$C_2=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{g(z)}{(z+\pi i)^5}dz=\frac{g^{(4)}(-\pi i)}{4!}=\frac{\cosh(-\pi i)}{4!}=\frac{\cos(-\pi)}{4!}=-\frac{1}{4!}$$

مثال ۴۴: در بسط تیلور تابع $f(z)=z^3(1+z^2)+z\cos z$ حول $z=2i$ ضریب $(z-2i)^6$ کدام است؟

۱) $-\frac{2i}{6!}(3\sinh 2+\cosh 2)$ ۲) $\frac{2i}{6!}(3\sinh 2+\cosh 2)$ ۳) $\frac{2i}{6!}(3\sinh 2-\cosh 2)$ ۴) $-\frac{2i}{6!}(-3\sinh 2+\cosh 2)$

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که می‌دانیم طبق قضیه‌ی تیلور حول نقطه‌ی $z_0=2i$ داریم: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2i)^n$ که c_n از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-2i)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\Big|_{z=2i}$$

این انتگرال‌گیری روی یک مرز بسته شامل $z_0=2i$ انجام می‌شود. به این ترتیب به ازای $n=6$ داریم: $c_6=\frac{f^{6}(z)}{6!}\Big|_{z=2i}$. چند جمله‌ای $z^3(1+z^2)$ از درجه‌ی ۵ است پس مشتق ششم آن صفر می‌شود. کافی است از $w=z\cos z$، ۶ بار مشتق بگیریم:

$$w'=\cos z-z\sin z\Rightarrow w''=-2\sin z-z\cos z\Rightarrow w^{(3)}=-3\cos z+z\sin z\Rightarrow w^{(4)}=4\sin z+z\cos z$$

$$\Rightarrow w^{(5)}=5\cos z-z\sin z\Rightarrow w^{(6)}=-6\sin z-z\cos z$$

با جایگذاری $z=2i$ در فرمول c_6 داریم:

$$c_6=\frac{-6\sin(2i)-2i\cos(2i)}{6!}=\frac{-6i\sinh 2-2i\cosh 2}{6!}\Rightarrow c_6=-\frac{2i}{6!}(3\sinh 2+\cosh 2)$$

یادآوری می‌کنیم که $\sin iz=i\sinh z$ و $\cos iz=\cosh z$ است.

مثال ۴۵: ضریب جمله‌ی $(z-2i)^8$ در بسط لورانت تابع $f(z)=\frac{z^2+2\sin z}{(z-2i)^3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2i}{10!}\sinh 2$ ۲) $\frac{2}{10!}\sin 2$ ۳) $-\frac{2i}{8!}\sinh 2$ ۴) $\frac{2}{8!}\sin 2$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از فرمول‌های سری لورانت داریم:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\Rightarrow C_8=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^9}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z^2+2\sin z}{(z-2i)^{11}}dz$$

نقطه‌ی $z_0=2i$ قطب مرتبه‌ی یازدهم برای تابع زیر انتگرال است. بنابراین داریم:

$$C_8=\frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\frac{1}{10!}\frac{d^{10}}{dz^{10}}(z^2+2\sin z)\Big|_{z=2i}$$

مشتق دهمِ z^2 برابر صفر است. مشتق دهمِ $2\sin z$ نیز به راحتی معلوم است که برابر با $-2\sin z$ می‌شود:

$$C_8=\frac{1}{10!}(-2\sin z)\Big|_{z=2i}=-\frac{2}{10!}\sin(2i)=-\frac{2i}{10!}\sinh 2$$

مثال ۴۶: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n(z+1)}$ عبارتست از: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $x>0$ ۲) $x>+1$ ۳) $x>-2$ ۴) $x>-1$

پاسخ: گزینه «۴» با فرض $w=e^{-z}$ یک سری توانی داریم که متغیر آن w است. ابتدا شعاع همگرایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}\right|=e^{-1}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$$

اگر $|w|<R$ باشد در ناحیه‌ی همگرایی هستیم.

حال برای به دست آوردن ناحیه همگرایی داریم:

$$|e^{-z}|<e\Rightarrow|e^{-x-iy}|<e\Rightarrow|e^{-x}||e^{-iy}|<e\xrightarrow{|e^{-iy}|=1}|e^{-x}|<e\Rightarrow e^{-x}<e\Rightarrow x>-1$$

مثال ۴۷: قرص همگرایی سری مختلط $\sum\frac{3^n}{n^3}(z-i)^n$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\{z:|z-i|<1\}$ ۲) $\{z:|z-i|<\frac{1}{3}\}$ ۳) $\{z:|z-i|<3\}$ ۴) تمام صفحه مختلط

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{3^n}{n^3}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\times\frac{3^{n+1}}{3^n}\right]=3\Rightarrow R=\frac{1}{3}\Rightarrow|z-i|<\frac{1}{3}$$

در حالت تساوی اگر $|z-i|=\frac{1}{3}$ باشد به سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}\frac{1}{3^n}$ می‌رسیم که همگراست، پس جواب دقیق به شکل $|z-i|\le\frac{1}{3}$ است.

مثال ۴۸: ناحیه همگرایی سری $\left(\frac{1}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $|z-1|<2$
۲) $|z-1|>2$
۳) $1<|z|<3$
۴) $z-1>2$ یا $z-1<-2$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرایی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n}\right|=2 \Rightarrow R=\frac{1}{2}$$

برای به دست آوردن ناحیه همگرایی داریم:

$$\frac{1}{|z-1|}<\frac{1}{2} \Rightarrow |z-1|>2$$

مثال ۴۹: سری $\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$ با شرط $|z|<1$ نمایش کدام تابع است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{(1-z)^2}$
۲) $\frac{z}{1-z}$
۳) $-\mathrm{Ln}(1-z)$
۴) $\mathrm{Ln}(1-z)$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به بسط تیلور در متن درس، سری فوق نمایش تابع $-\mathrm{Ln}(1-z)$ می‌باشد.

مثال ۵۰: مطلوب است سری تیلور $f(z)=\frac{1}{1-z}$ در همسایگی نقطهٔ $z_0=2i$. (مهندسی مکانیک «کلیه گرایش‌ها» ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{k+1}}(z-2i)^k$
۲) $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{k}}(z-2i)^{k+1}$
۳) $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{k-1}}(z-2i)^k$
۴) $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{k}}(z-2i)^{k-1}$

پاسخ: گزینه «۱» **روش اول:** با فرض $z_0=2i$ و ایجاد عامل $(z-z_0)$ در مخرج داریم:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-2i-(z-2i)}=\frac{1}{(1-2i)\left(1-\frac{z-2i}{1-2i}\right)}=\frac{1}{1-2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^k}{(1-2i)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{k+1}}(z-2i)^k$$

روش دوم: اولاً تابع $f(z)$ در $z_0=2i$ تحلیلی است پس نباید $(z-2i)$ با توان منفی در سری ظاهر شود. ثانیاً به ازای $k=0$، جمله‌ی ثابت سری باید $f(2i)=\frac{1}{1-2i}$ باشد. پس گزینه‌ی (۱) درست است.

مثال ۵۱: کدام گزینه، بسط سری لوران تابع $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ در همسایگی نقطهٔ منفرد $z=2$ است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{z-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{n+1}$
۲) $\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$
۳) $\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n+1}$
۴) $\cdots+\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{n+1}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1-(2-z)}=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

مثال ۵۲: جمله عمومی سری مک‌لورن تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{1-\cos z}{z^2} & , z\neq 0\\ \frac{1}{2} & , z=0\end{cases}$، که در آن $z=x+iy$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-2}}{(2k)!}$
۲) $(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$
۳) $(-1)^{k}\frac{z^{2k-2}}{(2k)!}$
۴) $(-1)^{k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\cdots$$

لذا جمله عمومی را می‌توان به فرم $\frac{(-1)^{k-1}.z^{2k-2}}{(2k)!}$ نوشت.

مثال ۵۳: دو جملهٔ اول در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ در ناحیه $|z+1|>2$ عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}$ ۳) $\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{2}{(z+1)^3}$ ۴) $\frac{1}{(z+1)}+\frac{2}{(z+1)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z+1)(z-1)}=\frac{1}{z+1}\Big[\frac{1}{z+1-2}\Big]=\frac{1}{z+1}\Big[\frac{1}{z+1}\Big(\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}\Big)\Big]=\frac{1}{(z+1)^2}\Big[1+\frac{2}{z+1}+\frac{4}{(z+1)^2}+\cdots\Big]=\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}+\cdots$$

مثال ۵۴: سری لوران $\frac{1}{z-4}$ در ناحیه $|z|>4$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n z^{-n+1}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{z})^{n+1}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{z^n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}z^{-n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$|z|>4\Rightarrow\Big|\frac{4}{z}\Big|<1$$

$$\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{z}}\Rightarrow\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}$$

مثال ۵۵: سری لوران تابع $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$، در ناحیه $|z|>0$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ ۳) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ ۴) $\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{|n|!z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\xrightarrow{z\to\frac{1}{z}}e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$$

مثال ۵۶: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{i(\frac{n}{z+1})}$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $x>-1$ ۲) $y<0$ ۳) $y>0$ ۴) $1+x>y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$|e^{\frac{i}{z+1}}|<1=|e^{\frac{i(x+1)+y}{(x+1)^2+y^2}}|<1\Rightarrow e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}}<1\Rightarrow\frac{y}{(x+1)^2+y^2}<0\Rightarrow y<0$$

مثال ۵۷: ناحیهٔ همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2z}{2z+1})^n$ در صفحهٔ مختلط z کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $Re(z)>-\frac{1}{2}$ ۲) $Re(z)<-\frac{1}{4}$ ۳) $Re(z)>-\frac{1}{4}$ ۴) $Re(z)<-\frac{1}{2}$

☑ پاسخ: گزینه «۳»

$$\Big|\frac{2z}{2z+1}\Big|<1\Rightarrow|2z|<|2z+1|\Rightarrow 4x^2+4y^2<(2x+1)^2+4y^2\Rightarrow 4x+1>0\Rightarrow x>-\frac{1}{4}\ \text{یا}\ Res(z)>-\frac{1}{4}$$

مثال ۵۸: سری لوران $\frac{2}{(z+1)(z+3)}$ در ناحیه $1<|z|<3$ عبارتست از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا با استفاده از روش تجزیه کسرها تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2}{(1+z)(3+z)}=\frac{1}{1+z}-\frac{1}{3+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{3})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-z)^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

مثال ۵۹: مشتق nام تابع $f(z)=\frac{ez-e^z}{(z-1)^2}$ را در نقطهٔ $z=1$ به دست آورید؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $f^{(n)}(1)=0$
۲) $f^{(n)}(1)=\frac{e}{n(n+1)}$
۳) $f^{(n)}(1)=-\frac{e}{(n+1)(n+2)}$
۴) $f^{(n)}(1)=\frac{1}{n(n+1)}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا بسط تابع را حول $z=1$ می‌نویسیم. با فرض $z-1=u$ داریم:

$$f(z)=\frac{e(u+1)-e^{1+u}}{u^2}=\frac{e(1+u)-e.e^u}{u^2}=\frac{e(1+u)-e(1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots)}{u^2}=-\frac{e}{2!}-\frac{e}{3!}u-\frac{eu^2}{4!}-\cdots-\frac{e}{(n+2)!}.u^n+\cdots$$

همان‌طور که می‌دانیم ضریب u^n برابر $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=-\frac{e}{(n+2)!}\Rightarrow f^{(n)}(1)=-\frac{e}{(n+1)(n+2)}$$

مثال ۶۰: ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $1<|z-1|<4$ برابر است با: (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به ناحیه داده شده باید توان‌های $(z-1)$ را ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z(z-5)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-5}\Rightarrow 1=A(z-5)+Bz\Rightarrow 1=(A+B)z-5A\Rightarrow A=-\frac{1}{5}\,,\,B=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{z(z-5)}=-\frac{1}{5}(\frac{1}{z})+\frac{1}{5}(\frac{1}{z-5})$$

حالا باید $\frac{1}{z}$ و $\frac{1}{z-5}$ را تغییر قیافه دهیم و آن‌ها را بر حسب توان‌های $(z-1)$ بسط دهیم:

$$-\frac{1}{5}(\frac{1}{z})=-\frac{1}{5}[(\frac{1}{z-1})(\frac{1}{1-(\frac{-1}{z-1})})]$$

در این حالت چون $|z-1|>1$، لذا $|\frac{1}{z-1}|<1$ و می‌توانیم از بسط استفاده کنیم:

$$-\frac{1}{5}[(\frac{1}{z-1})(\frac{1}{1+(\frac{1}{z-1})})]=-\frac{1}{5(z-1)}[1-\frac{1}{z-1}+(\frac{1}{z-1})^2+\cdots]$$

دقت کنید چون $z=5$ در ناحیه موردنظر قرار ندارد، لذا جمله $\frac{1}{z-1}$ در بسط $\frac{1}{z-5}$ تولید نمی‌شود. پس ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر $-\frac{1}{5}$ است.

مثال ۶۱: کدام یک از سری‌های زیر بسط لورانت تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ حول نقطه صفر در مجموعه $\{z\in C:0<|z|<1\}$ است؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$
۲) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$
۳) $\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$
۴) $\frac{1}{2z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$

پاسخ: گزینه «۳» تابع f را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$$

مثال ۶۲: فرض کنیم $F(s)=L\{f\}$ (تبدیل لاپلاس) و R_0 عدد مثبت ثابتی باشد و $F(s)=\frac{a_{-1}}{s}+\frac{a_{-2}}{s^2}+\frac{a_{-3}}{s^3}+\dots, |s|=R_0$، با گرفتن تبدیل عکس لاپلاس جمله به جمله از طرفین این تساوی، سری تابع $f(z)$ در کدام ناحیه از صفحه z تحلیلی است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) در ناحیه $|z|<R_0$ ۲) در تمام صفحه z ۳) در ناحیه $|z|>R_0$ ۴) در ناحیه $|z|\le R_0$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا دقت کنید که سری $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{s^n}$ برای $|s|=R_0$ همگراست. بنابراین باید داشته باشیم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_{-n}|}{s^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|a_{-n}|}}{|s|}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{-n}|}}{R_0}\le 1$$

از اینجا معلوم می‌شود که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{-n}|}\le R_0$ است. اکنون به تبدیل معکوس $F(s)$ دقت کنیم:

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}L^{-1}[\frac{1}{s^n}]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(n-1)!}t^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n-1}}{n!}t^n$$

شعاع همگرایی این سری تیلور نشان می‌دهد که تابع f در کدام ناحیه تحلیلی است زیرا هر تابعی که در یک ناحیه سری تیلور داشته باشد، در آن ناحیه تحلیلی هم هست.

$$\text{f شعاع همگرایی سری}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_{-n-1}|}{n!}}}$$

حال دقت کنید که $n!\simeq(\frac{n}{e})^n$ است و $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{-n-1}|}\le R_0$ است. به این ترتیب:

$$\text{f شعاع همرایی سری}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{|a_{-n-1}|}}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{e}}{R_0}=\infty$$

پس سری تیلور f دارای شعاع همگرایی $R=\infty$ است. به عبارتی $f(z)$ در همه نقاط تحلیلی است.

توضیح: دنباله‌های a_{-n} و a_{-n-1}، وقتی که $n\to\infty$ میل کند مقادیر یکسانی دارند به همین دلیل $\sum_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{-n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{-n}|}\le R_0$ است.

مثال ۶۳: ضریب جمله $(z-\frac{i}{2})^3$ در بسط تیلور تابع $f(z)=\sinh(2z-i)$ عبارت است از: (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به بسط تیلور تابع داریم:

$$f(z)=\sinh(2z-i)=(2z-i)+\frac{(2z-i)^3}{3!}+\dots=2(z-\frac{i}{2})+\frac{2^3(z-\frac{i}{2})^3}{3!}+\dots$$

بنابراین ضریب $(z-\frac{i}{2})^3$ برابر با $\frac{2^3}{3!}=\frac{4}{3}$ می‌باشد.

مثال ۶۴: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}$ به ازای $2<|z|<+\infty$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^{n+1}}$ ۲) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}$ ۳) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^n}$ ۴) $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{z^{n+1}}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{2-z}$$

$$\begin{cases}A=2\\B=1\\C=1\end{cases}\Rightarrow f(z)=\frac{2}{z}+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2-z}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}$$

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots)-\frac{1}{z}(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\dots)=\frac{-1}{z}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n})-\frac{1}{z}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n})=\frac{-1}{z}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^n})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^{n+1}}$$

مثال ۶۵: مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty} r^n \sin\theta$ برای مقادیر r در فاصله‌ی $۰<r<۱$ برابر است با:
(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) $\frac{r\sin\theta}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}$ ۲) $\frac{r\sin\theta}{۱-۲r\sin\theta+r^۲}$ ۳) $\frac{r(۱-\cos\theta)}{۱+۲r\cos\theta+r^۲}$ ۴) $\frac{r\sin\theta}{۱+۲r\cos\theta+r^۲}$

پاسخ: گزینه «۱» صورت سؤال اشتباه به نظر می رسد. اگر با صورت مطرح شده، سؤال را حل کنیم به جواب مقابل می‌رسیم: $A=\sum_{n=۱}^{\infty} r^n \sin\theta \ , \ ۰<r<۱$

$\sin\theta$ مانند عدد ثابت می‌باشد. حال حاصل سری هندسی فوق برابر است با: $A=\sin\theta\sum_{n=۱}^{\infty} r^n=\sin\theta\times\frac{r}{۱-r}$

که در هیچیک از گزینه‌ها موجود نیست. احتمالاً منظور طراح سؤال به صورت مقابل بوده است: $A=\sum_{n=۱}^{\infty} r^n \sin(n\theta)$

حال به جای اینکه سری فوق را حل کنیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty} r^n e^{in\theta}$ را حل می‌کنیم، قسمت موهومی آن با مقدار سری خواسته شده در صورت سوال برابر است:

$A=$ قسمت موهومی $\left(\sum_{n=۱}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right)$

$S=\sum_{n=۱}^{\infty} r^n e^{in\theta} \quad , \quad ۰<r<۱$

که سری بالا یک سری هندسی می‌باشد، لذا داریم: $a=re^{i\theta}$

$$q=re^{i\theta} \ , \ S=\frac{a}{۱-q}=\frac{re^{i\theta}}{۱-re^{i\theta}}=\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{۱-r\cos\theta-ri\sin\theta}$$

$$\xrightarrow{\text{در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم}} S=\frac{(r\cos\theta+ri\sin\theta)(۱-r\cos\theta+ri\sin\theta)}{(۱-r\cos\theta)^۲+r^۲\sin^۲\theta}\Rightarrow S=\frac{(r\cos\theta+ri\sin\theta)(۱-r\cos\theta+ri\sin\theta)}{۱+r^۲\cos^۲\theta-۲r\cos\theta+r^۲\sin^۲\theta}$$

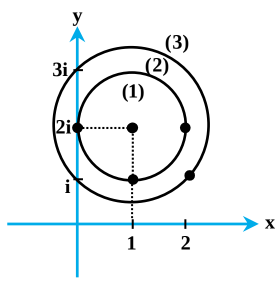
$$\text{قسمت موهومی } S=\frac{r^۲\sin\theta\cos\theta+r\sin\theta-r^۲\sin\theta\cos\theta}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}=\frac{r\sin\theta}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}$$

$$\Rightarrow A=\sum_{n=۱}^{\infty} r^n\sin(n\theta)=\text{قسمت موهومی } S=\frac{r\sin\theta}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}$$

مثال ۶۶: تابع $f(z)=\frac{۱}{(۱+i۲-z)(۱+i-z)(۲+i۲-z)(۲+i-z)(i۲-z)}$ مفروض است. تعداد سری‌های لوران $f(z)$ برای نقطه‌ی $z_۰=۱+i۲$ برابر است با:
(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک

پاسخ: گزینه «۲» تابع مفروض $f(z)$ به ازای تمام z ها به جز ۵ نقطه غیرتحلیلی زیر، تحلیلی است:



$z_۱=۱+۲i \ , \ z_۲=۱+i \ , \ z_۳=۲+۲i \ , \ z_۴=۲+i \ , \ z_۵=۲i$

تعداد طوق‌هایی که برای سری لوران حول نقطه‌ی $z=۱+۲i$ موجود است برابر است با:

طوق ۱: $|z-(۱+۲i)|<۱$

طوق ۲: $۱<|z-(۱+۲i)|<\sqrt{۲}$

طوق ۳: $|z-(۱+۲i)|>\sqrt{۲}$

لذا سه حالت برای بسط لوران حول نقطه‌ی $z=۱+۲i$ وجود دارد.

مثال ۶۷: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z-۱}\right)^n$ در صفحهٔ مختلط کدام است؟ $(i=\sqrt{-۱})$
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)

۱) $y>x$ ۲) $y<x$ ۳) $|z|<۱$ ۴) $|z|>۱$

پاسخ: گزینه «۱» از روش ریشه‌ی n ام استفاده می‌کنیم: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z-i}{z-۱}\right|^n}=\left|\frac{z-i}{z-۱}\right|<۱$

$$\left|\frac{z-i}{z-۱}\right|<۱\Rightarrow|z-i|<|z-۱|\Rightarrow|x+(y-۱)i|<|(x-۱)+yi|\Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲<(x-۱)^۲+y^۲\Rightarrow-۲y<-۲x\Rightarrow y>x$$

مثال ۶۸: اگر $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$، آنگاه سری لوران تابع f در ناحیه $2>|z|>1$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$
۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}$
۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}$$

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots,=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}}\quad,\quad |z|>1\Rightarrow\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-z)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-1)^{n+1}.z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{-n}}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

توجه شود که:

$$\frac{-1}{(-1)^{n+1}}=\frac{1}{(-1)^n}=\frac{1^n}{(-1)^n}=(-1)^n$$

$$\frac{1}{z+1}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\quad,\quad |z|<1$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2(\frac{z}{2}+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{z}{2}+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}\Rightarrow f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\quad\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{2^{n+1}}$$

مثال ۶۹: سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{z+1}}$، که در آن z یک عدد مختلط است: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) به ازای هرعدد موهومی محض z همگرا است.
۲) به ازای هر عدد موهومی محض z واگرا است.
۳) به ازای هر عدد حقیقی z همگرا است.
۴) به ازای هر عدد حقیقی z واگرا است.

پاسخ: گزینه «۲» در سری داده شده با توجه به گزینه‌ها دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: z عدد حقیقی محض می‌باشد. در صورتی که $z=0$ باشد سری مزبور به سری همساز تبدیل می‌شود که واگرا است و در صورتی که $z>0$ باشد طبق قانون p سری‌ها همگرا خواهد بود. لذا گزینه‌های ۳ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند. حالت دوم: z موهومی محض باشد. $(z=ki, k\neq 0)$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+ik}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-ik}}{n}\ ;\ (k\neq 0)$$

در صورت کسر با محاسبه‌ی توان مختلط داریم:

$$n^{-ik}=e^{-ikLnn}=\cos(kLnn)-i\sin(kLnn)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(kLnn)-i\sin(kLnn)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(kLnn)}{n}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(kLnn)}{n}$$

اکنون نشان می‌دهیم که قسمت‌های حقیقی و موهومی S واگرا هستند. طبق آزمون تراکم کوشی، به جای سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ می‌توانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ را بررسی کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(kLnn)}{n}\sim\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{\cos(kLn2^n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos(knLn2)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(knLn2)$$

این سری واگراست زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد یعنی $\lim_{n\to\infty}\cos(knLn)\neq 0$ به همین ترتیب قسمت موهومی S هم واگراست و در نتیجه S واگرا است.

مثال۷۰: اگر سری لورانت تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ به صورت $f(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ بدست آمده باشد، دامنه همگرایی دقیق سری عبارت است از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $0<|z|$
۲) $1<|z|$
۳) $|z|>2$
۴) $1<|z|<2$

پاسخ: گزینه «۴» در سری هندسیِ $\sum_{n=0}^{\infty}u^n$ شرط همگرایی آن است که $|u|<1$ باشد. حال سری $g(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$ دارای قدر نسبت $\frac{1}{z}$ و سری $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$ دارای قدر نسبت $\frac{z}{2}$ است. بنابراین در $g(z)$ داریم $|\frac{1}{z}|<1$ و در $h(z)$ داریم $|\frac{z}{2}|<1$.

با این روش ناحیه همگرایی هر کدام از سری‌های $h(z),g(z)$ را بدست می‌آوریم و قسمت مشترک این دو ناحیه، ناحیه همگرایی سری $f(z)$ خواهد بود.

$$\left.\begin{array}{l} g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\Rightarrow|\frac{1}{z}|<1\Rightarrow|z|>1\\ h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\Rightarrow|\frac{z}{2}|<1\Rightarrow|z|<2\end{array}\right\}\Rightarrow 1<|z|<2$$

مثال۷۱: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{3z+4}{3z+1})^n$، عبارت است از:

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $Re(z)<-\frac{1}{3}$
۲) $Re(z)<-\frac{5}{6}$
۳) $Re(z)>-\frac{1}{3}$
۴) $Re(z)>-1$

پاسخ: گزینه «۲» اگر فرض کنیم $w=\frac{3z+4}{3z+1}$ آنگاه سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}w^n$ یک سری توانی است. شعاع همگرایی آن را پیدا می‌کنیم و این سری در ناحیه‌ی $|w|<R$ همگرا خواهد بود.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1\Rightarrow R=1$$

حال ناحیهٔ همگرایی را محاسبه می‌نمائیم:

$$\left|\frac{3z+4}{3z+1}\right|<1\Rightarrow|3z+4|<|3z+1|\Rightarrow|(3x+4)+3yi|<|(3x+1)+3yi|$$

$$\Rightarrow\sqrt{(3x+4)^2+(3y)^2}<\sqrt{(3x+1)^2+(3y)^2}\Rightarrow(3x+4)^2+(3y)^2<(3x+1)^2+(3y)^2\Rightarrow(3x+4)^2<(3x+1)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2+16+24x<9x^2+1+6x\Rightarrow 18x<-15\Rightarrow x<\frac{-15}{18}\to Re(z)<\frac{-5}{6}$$

مثال۷۲: شعاع همگرایی بسط کسر $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ حول نقطه $z=\frac{3}{2}$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» شعاع همگرایی بسط کسر داده شده حول $z=\frac{3}{2}$، در واقع فاصله نزدیک‌ترین قطب آن کسر به نقطه $z=\frac{3}{2}$ می‌باشد.

واضح است فاصله $z=\frac{3}{2}$ از $z=\frac{1}{2}$ کمتر است: $R=\min\{R_1,R_2\}=\min\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\}=\frac{1}{2}$

مثال۷۳: دنباله‌ی همگرای $z_1,z_2,\ldots$ را که در آن $z_n=\frac{1}{4}(1-\frac{5}{n})+3i(1+\frac{1}{n})$، در نظر می‌گیریم. اگر c حد دنباله باشد، تعداد جملات دنباله که خارج ناحیه $|z_n-c|<0/01$ می‌باشند، چند تاست؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) ۳۲۶
۲) ۳۰۱
۳) ۳۲۵
۴) ۳۰۰

پاسخ: گزینه «۳» حد دنباله به راحتی برابر مقدار مقابل است:

$$c=\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{4}+3i$$

$$|z_n-c|<0/01\Rightarrow|\frac{-5}{4n}+i\frac{3}{n}|<0/01\Rightarrow\sqrt{\frac{25}{16n^2}+\frac{9}{n^2}}<0/01\Rightarrow\frac{13}{4n}<0/01\Rightarrow n>325$$

مثال ۷۴: سری لورانت تابع $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$ با مرکز $z_0=\dfrac{\pi}{2}$ و دامنه همگرایی دقیق آن کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) $0<|z-\frac{\pi}{2}|<2\pi \ , \ f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n-1}$

۲) $0<|z-\frac{\pi}{2}| \ , \ f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n-2}$

۳) $0<|z-\frac{\pi}{2}|<2\pi \ , \ f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n-3}$

۴) $0<|z-\frac{\pi}{2}| \ , \ f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n-4}$

پاسخ: گزینه «۲» سری لورانت تابع $g(z)=\cos z$ را در $z_0=\dfrac{\pi}{2}$ محاسبه می‌کنیم. (دقت کنید در واقع این بسط از جنس تیلور است.)

$$g'(z)=-\sin z \Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})=-1 \quad , \quad g''(z)=-\cos z \Rightarrow g''(\frac{\pi}{2})=0$$

$$g'''(z)=\sin z \Rightarrow g'''(\frac{\pi}{2})=1 \quad , \quad g''''(z)=\cos z \Rightarrow g''''(\frac{\pi}{2})=0$$

$$\Rightarrow g(z)=0-(z-\frac{\pi}{2})+0+\frac{1}{3!}(z-\frac{\pi}{2})^3+0-\frac{1}{5!}(z+\frac{\pi}{2})^5+0+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}$$

برای محاسبه سری لورانت $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$، کافیست سری بالا را بر $(z-\frac{\pi}{2})^3$ تقسیم کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(z-\frac{\pi}{2})^3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n-2}$$

چون $\cos z$ و $(z-\frac{\pi}{2})^3$ همه جا همگرا هستند بنابراین دامنه همگرایی $f(z)$ همه جا بجز ریشه‌های مخرج یعنی $z=\dfrac{\pi}{2}$ است. پس دامنه همگرایی $f(z)$، $z\neq\dfrac{\pi}{2}$ یا همان $|z-\dfrac{\pi}{2}|>0$ خواهد بود.

مثال ۷۵: بسط لوران $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-1)}$ حول $z_0=1$ برای $1<|z-1|<2$ کدام است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^n}$

۲) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^n}{2^n}$

۳) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$

۴) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا به روش تفکیک کسرها $f(z)$ را تجزیه می‌کنیم:

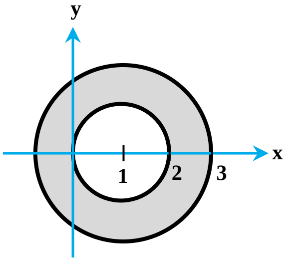
$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}$$

$$1=A(z^2-1)+Bz(z+1)+Cz(z-1) \Rightarrow 1=(A+B+C)z^2+(B-C)z-A \Rightarrow A=-1, B=C=\frac{1}{2}$$

پس $f(z)$ به شکل مقابل نمایش داده می‌شود:

$$f(z)=\frac{-1}{z}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}$$

با توجه به ناحیه داده شده باید $f(z)$ را برحسب توان‌های $(z-1)$ مرتب کنیم. جمله وسط که خود به خود این شرایط را دارد، لذا به تغییر قیافه جمله‌های $-\dfrac{1}{z}$ و $\dfrac{\frac{1}{2}}{z+1}$ می‌پردازیم.



با توجه به اینکه $|z-1|>1$، لذا با فاکتورگیری از $(z-1)$ داریم:

$$-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z-1+1}=-\frac{1}{z-1(1+\frac{1}{z-1})}=-\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}\right)$$

با توجه به اینکه $|z-1|<2$، لذا با فاکتورگیری از ۲ داریم:

$$\frac{\frac{1}{2}}{z+1}=\frac{\frac{1}{2}}{z-1+2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{z(z^2-1)}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$$

با توجه به این که بسط لورن حول نقطه‌ی $z_0=1$ خواسته شده، لذا داریم:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}\right)=-\frac{1}{z-1}\left[1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}-+\cdots\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{1}{4}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-+\cdots\right]$$

$$=\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right]+\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{1}{2^2}-\frac{(z-1)}{2^3}+\frac{(z-1)^2}{2^4}-\cdots\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

مثال ۷۶: بسط تابع $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$ در ناحیه $|z|<1$ کدام است؟ (مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n$
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n$
۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)z^n$
۴) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)z^n$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا تابع داده شده را تجزیه کسر می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطه $\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\frac{1}{1-u}$ بسط هر کدام از کسرها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{z}{(z-1)(z+2)}=\frac{\frac{1}{3}}{z-1}+\frac{\frac{2}{3}}{z+2}=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{1-z}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left[\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}\right]=\left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)z^n$$

مثال ۷۷: سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}$ در ناحیه‌ی $|z|>1$ کدام گزینه زیر است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n]z^n$
۲) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[1-(-1)^n]z^{n+1}$
۳) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[1-(-1)^n]\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$
۴) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}[1-(-1)^n]\left(\frac{1}{z}\right)^n$

پاسخ: گزینه «۳» با تفکیک تابع داده شده به دو کسر داریم:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n]\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

مثال ۷۸: تابع $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ را به صورت سری لوران به توان‌های $(z-2)$ بسط دهید. (مکانیک ـ دکتری ۹۱)

الف) در ناحیه $0<|z-2|<1$
ب) در ناحیه $|z-2|>1$

۱) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$
(ب) سری لوران ندارد.

۲) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}+1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$
(ب) $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots$

۳) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$
(ب) $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots$

۴) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$
(ب) $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}+\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $f(z)$ را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{1+(z-2)}\right)=\frac{1}{(z-2)^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\right)$$

اگر $\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$ باشد $f(z)$ را می‌توان به صورت مقابل بنویسیم:

$$\frac{1}{(z-2)^2}\left(1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}-\cdots\right)=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\cdots$$

همان طور که مشاهده می‌کنیم فقط در گزینه دو و سه برای حالت $|z-2|>1$ ، $f(z)$ به صورت بالا بسط داده شده است.

برای حالت الف اگر فرض کنیم که $0<|z-2|<1$ باشد، داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\left(1-(z-2)+(z-2)^2-\cdots\right)\Rightarrow f(z)=(z-2)^{-1}-1+(z-2)-(z-2)^2+\cdots$$

مثال ۷۹: سری لوران تابع $f(z)=\frac{-2z}{(z-i)(z-3i)}$ در طوقه $1<|z|<3$ عبارت است از: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(3i)^n}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(3i)^n}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(3i)^n}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(3i)^n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$f(z)=\frac{-2z}{(z-i)(z-3i)}\Rightarrow\begin{cases}z_1=i\Rightarrow|z_1|=1\\ z_2=3i\Rightarrow|z_2|=3\end{cases}$$

$$f(z)=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z-3i}\Rightarrow A=\left(\frac{-2z}{z-3i}\right)\Big|_{z=i}=\frac{-2i}{i-3i}=\frac{-2i}{-2i}=1\quad,\quad B=\left(\frac{-2z}{(z-i)}\right)\Big|_{z=3i}=\frac{-6i}{+2i}=-3$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z-i}-\frac{3}{z-3i}=\frac{1}{z(1-\frac{i}{z})}-\frac{3}{-3i(1-\frac{z}{3i})}=\frac{1}{z(1-\frac{i}{z})}+\frac{1}{i}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{3i}}\right)$$

با توجه به این که $1<|z|<3$، لذا برای $z_1=i$ بسط لوران و برای $z_2=3i$ بسط تیلور را می‌نویسیم. مطابق فرمول زیر، بسط نهایی نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n}$$

با داخل کردن $\frac{1}{z}$ در سری اول داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n+\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(3i)^n}$$

درسنامه۲: انواع نقاط تکین و محاسبه مانده

مثال۱: اگر $f(z)=\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$، آنگاه $z_0=0$ چه نوع تکینی برای $f(z)$ است؟

۱) تکین تنها ۲) تکین غیرتنها از نوع انباشته ۳) تکین برداشتنی ۴) تکین غیرتنها از نوع انشعابی

پاسخ: گزینه «۳» در نگاه اول به نظر می‌رسد $z=0$ یک نقطه‌ی شاخه‌ای است (به دلیل وجود $\sqrt{z}$). برای امتحان کردن این حدس فرض کنیم $z=re^{i\theta}$ باشد. اگر یک گردش کامل حول صفر انجام دهیم خواهیم داشت $z=re^{i(\theta+2\pi)}$. حالا باید ببینیم آیا مقدار $\arg f(z)$ در این دو حالت، تغییری می‌کند یا خیر؟

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow f(z)=\frac{\sin(\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}})}{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}\quad,\quad z=re^{i(\theta+2\pi)}\Rightarrow f(z)=\frac{\sin(\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi})}{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi}}=\frac{\sin(-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}})}{-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}=\frac{\sin(\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}})}{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

بنابراین با یک گردش کامل حول صفر، $f(z)$ هیچ تغییری نکرده است. پس $z=0$ نقطه‌ی شاخه‌ای نیست. پس مانند سایر سؤالات می‌توان گفت $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=1$ و لذا $z_0=0$ یک تکین برداشتنی برای تابع $f(z)$ است.

مثال۲: کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) نقطه‌ی $z=0$ برای تابع $\cos(z^2+z^{-2})$ تکین اساسی است.

۲) نقاط $z=-1\pm i$ تکین‌های غیر تنها برای تابع $tg^{-1}(z^2+2z+2)$ هستند (لگاریتم مختلط با شرط $0<\theta\le 2\pi$ مدنظر است.)

۳) نقطه‌ی $z=0$ تکین رفع شدنی برای تابع $\frac{z}{e^z-1}$ است.

۴) نقطه‌ی $z=0$، تکین برداشتنی برای تابع $z^2e^{-z^2}$ است.

پاسخ: گزینه «۴» در گزینه‌ی (۴) تابع $f(z)=z^2e^{-z^2}$ در $z=0$ تحلیلی است زیرا $z^2e^{-z^2}$ تابعی تام است که همه جا تحلیلی است و بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح نیست. با وجود این سایر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم. برای بررسی گزینه‌ی (۱) داریم:

$$\cos(z^2+z^{-2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z^2+\frac{1}{z^2})^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}z^{2k}\frac{1}{z^{2n-2k}})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\binom{2n}{k}\frac{z^{2k}}{z^{2n-2k}}$$

بنابراین $z=0$ تکین اساسی آن است. زیرا تعداد توان‌های منفی z در این بسط نامتناهی است. پس این گزینه درست است. در گزینه‌ی (۳) نیز $z=0$ ریشه‌ی مخرج است. اگر بسط‌های مک‌لورن را بنویسیم می‌بینیم که این نقطه، یک تکین رفع شدنی است:

$$f(z)=\frac{z}{1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots-1}=\frac{z}{z(1+\frac{z}{2!}+\cdots)}$$

بررسی گزینه‌ی (۲) وقت‌گیر است، اما با توجه به آن که $f(z)=\frac{i}{2}Ln(\frac{i+z^2+2z+2}{i-z^2-2z-2})$ است و روی بریدگی شاخه‌ای‌اش نقاط غیر تحلیلیِ غیر تنها دارد، خواهید دید که این گزینه هم درست است. طبق صورت سؤال نیم‌خط $\theta=0$ یعنی قسمت مثبت محور xها بریدگی شاخه‌ای Lnw است. اگر $Re\,w\ge 0$ و $Im\,w=0$ باشد، روی بریدگی شاخه‌ای قرار دارد. به ازای $z=-1+i$ داریم:

$$w=\frac{i+z^2+2z+2}{i-z^2-2z-2}=\frac{i-2i-2+2i+2}{i+2i+2-2i-2}=1$$

بنابراین $Re\,w\ge 0$ و $Im\,w=0$ است، پس $z=-1+i$ روی بریدگی شاخه‌ای قرار دارد. پس یک نقطه‌ی غیر تحلیلی اما غیر تنها است.

مثال ۳: در مورد تابع $f(z)=\frac{z+1}{1-\cos z}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z=0$ قطب مرتبه‌ی دوم تابع است.
۲) $z=0$ قطب مرتبه اول تابع است.
۳) $z=0$ نقطه تکین اساسی تابع است.
۴) $z=0$ نقطه تکین برداشتنی تابع است.

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از فرمول و محاسبه حد داریم:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^m \frac{1+z}{1-\cos z}=\frac{0}{0}$$

اگر $m=1$ داریم:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+z^2}{1-\cos z}\right) \overset{HOP}{=\!=} \lim_{z\to 0}\left(\frac{1+2z}{\sin z}\right)=\frac{1}{0}=\infty$$

چون حد برابر بی‌نهایت (نامتناهی) شد لذا قطب مرتبه اول نیست.

به ازای $m=2$ داریم:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^2\frac{1+z}{1-\cos z} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{z\to 0}\frac{z^2(1+z)}{2\sin^2\frac{z}{2}} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \lim_{z\to 0}\left[\frac{z^2(1+z)}{2\times(\frac{z}{2})^2}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{1+z}{2\times\frac{1}{4}}=2$$

چون حد مقداری متناهی دارد، لذا مرتبه‌ی قطب ۲ است.

توضیح: البته در صفحات بعدی روش‌های متنوع و ساده‌تری برای محاسبه مرتبه‌ی قطب ارائه می‌شود.

مثال ۴: در نقطه $z=1$ تابع $f(z)=e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$ دارای :

۱) یک قطب مرتبه دوم است.
۲) یک نقطه تکین اساسی است.
۳) یک نقطه تکین برداشتنی است.
۴) قطب مرتبه اول است.

پاسخ : گزینه «۲» بسط لوران را برای تابع می‌نویسیم:

$$e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}=1-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}-\frac{1}{3!(z-1)^6}+\cdots$$

ملاحظه می‌گردد که $z=1$ یک نقطه تکین اساسی است.

مثال ۵: تابع $f(z)=\sin\frac{1}{z}-\cos\frac{1}{z}$:

۱) در $z=0$ تکینی اساسی دارد.
۲) در $z=0$ قطب دارد.
۳) در $z=0$ تکینی برداشتنی دارد.
۴) در همسایگی سفته (محذوف) $z=0$ کراندار است.

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم در توابعی به صورت $\sin\frac{1}{f(z)}$ و $\cos\frac{1}{f(z)}$، قطب‌های تابع $\frac{1}{f(z)}$ تکین اساسی برای توابع مذکور ایجاد می‌کنند، پس در تابع داده شده $z=0$ نقطه تکین اساسی است.

در مورد گزینه‌ی (۴) دقت کنید که طبق تعریف داریم:

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{e^{\frac{i}{z}}-e^{-\frac{i}{z}}}{2i}$$

حالا اگر $z\to 0$ میل کند، مثلاً روی مسیر $y\to 0^+$ و $x=0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}=\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{\frac{i}{iy}}-e^{-\frac{i}{iy}}}{2i}=\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{y}}-e^{-\frac{1}{y}}}{2i}=\frac{e^{\infty}-e^{-\infty}}{2i}=\infty$$

به همین ترتیب $\cos\frac{1}{z}$ نیز در همسایگیِ محذوف صفر، بی‌کران است. در واقع هر تابع مختلط $f(z)$ در همسایگی نقطه‌ی تکین اساسی‌اش، بی‌کران است.

مثال ۶: برای تابع $f(z)=z^4+4z^2$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z=0$ صفر مرتبه دوم و $z=\pm 2i$ صفرهای ساده تابع هستند.
۲) $z=0$ صفر مرتبه سوم و $z=\pm 2i$ صفرهای مرتبه دوم تابع هستند.
۳) $z=0$ صفر مرتبه دوم و $z=\pm 2i$ صفرهای مرتبه دوم تابع هستند.
۴) $z=0$ صفر مرتبه سوم و $z=\pm 2i$ صفرهای ساده تابع هستند.

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(z)=z^2(z^2+4)=0 \Rightarrow z=0\ ,\ z=\pm 2i$$

$$f'(z)=4z^3+8z \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2i)=4(2i)^3+8(2i)=-16i \end{cases}$$

دقت کنید $z=2i$ و به همین ترتیب $z=-2i$ چون اولین مشتق آنها مخالف صفر شده لذا صفر مرتبه اول (ساده) هستند، اما برای تعیین مرتبه صفر برای $z=0$ باید دوباره مشتق بگیریم:

$$f''(z)=12z^2+8 \Rightarrow f''(0)=8\neq 0$$

مثال ۷: نوع نقطه تکین تابع $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{2e^{z-1}-z^2-1}$ کدام است؟

۱) تابع دارای یک قطب برداشتنی در نقطه $z=1$ است.
۲) نقطه $z=1$ تکین اساسی تابع می‌باشد.
۳) $z=1$ قطب مرتبه اول تابع می‌باشد.
۴) $z=1$ قطب مرتبه دوم تابع می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای تعیین مرتبه قطب تابع $f(z)$ باید مرتبه صفرهای تابع $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ را تعیین کنیم: با توجه به اینکه $g(z)=\dfrac{2e^{z-1}-z^2-1}{\sin\pi z}$، ابتدا مرتبه صفر تابع $\psi(z)=2e^{z-1}-z^2-1$ را حساب می‌کنیم:

$$\psi'(z)=2e^{z-1}-2z\Rightarrow\psi'(1)=0\quad,\quad\psi''(z)=2e^{z-1}-2\Rightarrow\psi''(1)=0\quad,\quad\psi'''(z)=2e^{z-1}\Rightarrow\psi'''(1)=2\neq0$$

پس $z=1$ صفر مرتبه سوم $\psi(z)$ می‌باشد، اما $z=1$ یک صفر مرتبه اول برای تابع $Q(z)=\sin\pi z$ نیز می‌باشد، پس مرتبه صفر تابع $g(x)$ برابر $3-1=2$ می‌باشد و به عبارت دیگر مرتبه قطب $f(z)$ برابر ۲ می‌باشد.

مثال ۸: در مورد تابع $f(z)=\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\exp(\frac{1}{z-2})}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z=0$ صفر مرتبه هفت و $z=2$ قطب ساده تابع است.
۲) $z=0$ صفر مرتبه هفت و $z=2$ قطب مرتبه دوم تابع است.
۳) $z=2$ نقطه ویژه تنها نیست.
۴) $z=2$ نقطه ویژه اساسی و $z=-2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» کاملاً واضح است که $z=0$، صفر مرتبه هفتم صورت کسرِ تابع موردنظر است، اما با صفر قرار دادن مخرج عبارت $\exp(\frac{1}{z-2})$ و عبارت $(z^2-4)^2$ ملاحظه می‌گردد، $z=2$ نقطه تکین اساسی و $z=-2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

$$f(z)=\frac{z^7}{(z^2-4)^2\exp(\frac{1}{z-2})}=\frac{z^7}{(z+2)^2(z-2)^2\exp(\frac{1}{z-2})}$$

مثال ۹: $z=1$ قطب مرتبه چند تابع $f(z)=\dfrac{1+\cos\pi z}{(z^2-1)^4\sin\pi z}$ است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای تعیین مرتبه قطب می‌توانیم $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ را به ازای $m=1,2,\ldots$ محاسبه کنیم، مقدار mای که به ازای آن برای اولین بار، حد فوق برابر مقداری متناهی شد مرتبه قطب نامیده می‌شود.

$$\lim_{z\to1}(z-1)^3\times\frac{1+\cos\pi z}{(z^2-1)^4\sin\pi z}=\lim_{z\to1}(z-1)^3\times\frac{1+\cos\pi z}{(z-1)^4(z+1)^4\sin\pi z}=\lim_{z\to1}\frac{1+\cos\pi z}{(z-1)(z+1)^4\sin\pi z}$$

$$=\frac{1}{16}\lim_{z\to1}\frac{1+\cos\pi z}{(z-1)\sin\pi z}=\frac{1}{16}\lim_{z\to1}\frac{1-\cos(\pi-\pi z)}{(z-1)\sin(\pi-\pi z)}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\frac{1}{16}\lim_{z\to1}\frac{\frac{1}{2}(\pi-\pi z)^2}{(z-1)(\pi-\pi z)}=\frac{-\pi}{32}$$

روش ساده‌تر: نقطه $z=1$ برای صورت کسر صفر مرتبه دوم و برای مخرج کسر صفر مرتبه پنجم است به همین دلیل برای تابع قطب مرتبه $5-2=3$ می‌باشد.

مثال ۱۰: بخش اصلی تابع $f(z)=\dfrac{e^z\cos z}{z^3}$ حول $z=0$ و باقیمانده f در $z=0$ کدامند؟

۱) $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}$ و 0
۲) $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$ و 1
۳) $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2z}$ و $-\dfrac{1}{2}$
۴) $-\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2z}$ و $\dfrac{1}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{e^z\cos z}{z^3}=\frac{(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots)}{z^3}=\frac{1+z+0z^2+\cdots}{z^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\cdots$$

بنابراین بخش اصلی تابع $f(z)$ عبارت است از $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}$ و مانده f در z برابر با صفر است.

مثال ۱۱: مانده تابع $f(z)=z^{7}\cos\frac{1}{z^{2}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{12}i$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم نقطه $z=0$، تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌باشد. تنها راه، نوشتن بسط لوران $\cos(\frac{1}{z^{2}})$ می‌باشد:

$$\cos(\frac{1}{z^2})=1-\frac{(\frac{1}{z^2})^2}{2!}+\frac{(\frac{1}{z^2})^4}{4!}-\frac{(\frac{1}{z^2})^6}{6!}+\cdots \Rightarrow f(z)=z^7\cos(\frac{1}{z^2})=z^7-\frac{z^7}{2!z^4}+\frac{z^7}{4!z^8}-\frac{z^7}{6!z^{12}}+\cdots$$

ضریب $\frac{1}{z}$ در بسط فوق برابر $\frac{1}{4!}$ می‌باشد، پس مانده برابر $\frac{1}{24}$ است.

مثال ۱۲: مانده تابع $f(z)=z^{2}\sin(\frac{1}{z+1})$ در نقطه‌ی تکین $f(z)$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $-\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{7}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» این تست، یک مثال جالب می‌باشد که کمی ابتکار هم لازم دارد. به راحتی معلوم است نقطه $z=-1$، تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌باشد. تنها راه، استفاده از بسط لوران است پس بسط $\sin(\frac{1}{z+1})$ را می‌نویسیم:

$$\sin(\frac{1}{z+1})=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\cdots$$

حال اگر عبارت z^{2} در بسط فوق ضرب شود، به نظر شما به راحتی جمله $\frac{1}{z+1}$ مشخص می‌شود؟ جواب من که منفی است شما را نمی‌دانم! اگر z^{2} را به شکل $[(z+1)-1]^{2}$ بنویسیم، فکر می‌کنم مشکل حل شود:

$$z^2\sin(\frac{1}{z+1})=[(z+1)^2-2(z+1)+1][\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\cdots]$$

حالا اگر دقت کنیم، جمله $\frac{1}{z+1}$ به دو شکل ایجاد می‌شود، یکی با ضرب $(z+1)^{2}$ در $-\frac{1}{3!(z+1)^{3}}$ و یکی هم با ضرب عدد ۱ در $\frac{1}{z+1}$ پس داریم:

$$-\frac{(z+1)^2}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{3!(z+1)}+\frac{1}{z+1}\Rightarrow -\frac{1}{3!}+1=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$$

مثال ۱۳: مانده تابع $f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ در نقطه تکین $z=-2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ‎-۵ ۳) ۱ ۴) ‎+۵

پاسخ: گزینه «۲» تقریباً شبیه سؤال قبل می‌باشد:

$$\sin\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3!(z+2)^3}+\cdots$$

$$f(z)=(z-3)\sin(\frac{1}{z+2})=[(z+2)-5]\sin(\frac{1}{z+2})=\frac{(z+2)}{z+2}-\frac{(z+2)}{3!(z+2)^3}+\cdots-\frac{5}{z+2}+\frac{5}{3!(z+2)^3}$$

ملاحظه می‌گردد مانده یا همان ضریب $\frac{1}{z+2}$ برابر ‎-۵ است.

مثال ۱۴: مانده تابع $f(z)=\cos z\sin\frac{1}{z}$ در نقطه‌ی $z=0$ کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Harward)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(2n+1)!}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(2n+1)!}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $f(z)=\cos z\sin\frac{1}{z}$ در $z=0$ دارای قطب اساسی است. با استفاده از بسط لوران $\sin\frac{1}{z}$ و $\cos z$ باید ضریب $\frac{1}{z}$ را مشخص کنیم. این ضریب را b_1 می‌نامیم.

$$f(z)=\cos z\sin\frac{1}{z}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^m}{(2m)!(2n+1)!}\frac{z^{2m}}{z^{2n+1}}$$

همان‌طور که می‌بینید جمله‌ی $\frac{1}{z}$ فقط وقتی ساخته می‌شود که $n=m$ باشد. بنابراین با جمع کردن ضرایب جملاتی که در آن‌ها $n=m$ است، ضریب $\frac{1}{z}$ را خواهیم داشت:

$$\operatorname{Res}(f,0)=b_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$

مثال ۱۵: مانده تابع $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ در نقطه $z=1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» نقطه‌ی $z=1$ برای f یک قطب مرتبه اول است، پس داریم:

$$\underset{z=1}{\mathrm{Res}}f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۶: مانده تابع $f(z)=\frac{1}{1-e^z}$ در $z=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» $z=0$ یک قطب ساده برای تابع $f(z)$ است، لذا داریم:

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{1-e^z}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{1}{-e^z}=-1$$

مثال ۱۷: مبدأ مختصات چه نوع ویژگی برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$ دارد و مانده در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) قطب ساده و مانده برابر یک است.
۲) قطب مرتبه دوم و مانده برابر یک است.
۳) صفر ساده و مانده برابر صفر است.
۴) تکین برداشتنی و مانده برابر یک است.

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}}(z-0)^m f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}}(z^m.\frac{\sin z}{z^2})\xrightarrow{m=1}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

ملاحظه می‌گردد قطب ساده است و داریم:

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}f(z)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}z(\frac{\sin z}{z^2})=1$$

مثال ۱۸: تابع $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^4}$ در $z=1$:

۱) دارای بسط تیلور است.
۲) بسط لوران ندارد.
۳) دارای بسط لوران با مانده $\frac{e^2}{4}$ است.
۴) دارای بسط لوران با مانده $\frac{4e^2}{3}$ است.

پاسخ : گزینه «۴» $z=1$ قطب مرتبه چهارم تابع است:

$$\underset{z=1}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 1}(e^{2z})'''=\frac{8e^2}{3!}=\frac{4e^2}{3}$$

مثال ۱۹: مانده تابع $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ در نقطه $z=-1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» $z=-1$ قطب مرتبه دوم است:

$$\underset{z=-1}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}[\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-1})]=\lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^2}=-\frac{1}{4}$$

مثال ۲۰: مانده تابع $f(z)=\frac{1}{z(z+2)^3}$ در نقطه $z=-2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

پاسخ : گزینه «۴» ملاحظه می‌گردد $z=-2$ قطب مرتبه سوم تابع است، لذا داریم:

$$\underset{z=-2}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}[(z+2)^3\times\frac{1}{z(z+2)^3}]=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}[\frac{1}{z}]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{2}{z^3}=-\frac{1}{8}$$

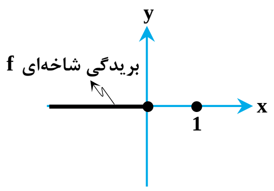
مثال ۲۱: فرض کنید برای عدد مختلط $z=re^{i\theta}$ داشته باشیم: $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. اگر $(2n-1)\pi<\arg z<(2n+1)\pi$، آنگاه مانده تابع $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1-z}$ در $z=1$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) 0 ۲) $(-1)^n$ ۳) $(-1)^{n+1}$ ۴) $(-1)^{2n-1}$

پاسخ: گزینه «۳» نقطه‌ی $z=1$ روی نیم‌خط $\theta=(2n-1)\pi$ یعنی بریدگی شاخه‌ای $f(z)$ قرار ندارد، در نتیجه تابع $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1-z}$ دارای قطب مرتبه‌ی یک در $z=1$ است. با محاسبه‌ی مانده‌ی $f(z)$ در این نقطه داریم:

$$Res(f,z=1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{\sqrt{z}}{-(z-1)}=-\sqrt{1}$$

اکنون می‌خواهیم ریشه‌ی دوم عدد یک را با توجه به شرط $(2n-1)\pi<\arg z<(2n+1)\pi$ بدست آوریم. با توجه به این شرط در نمایش قطبی عدد مختلط $z=1$ داریم: $\theta=2n\pi$ و $r=1$ در نتیجه:



$$1=e^{i2n\pi}\Rightarrow\sqrt{1}=e^{i\frac{2n\pi}{2}}=e^{in\pi}=(-1)^n$$

با جایگذاری این نتیجه در مانده‌ی $f(z)$ داریم:

$$Res(f,z=1)=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$$

مثال ۲۲: مانده تابع $f(z)=(\sin^3 z)^{-1}$ حول نقطه‌ی $z=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

پاسخ: گزینه «۱» بسط لوران $\sin(z)$ حول $z=0$ را به کار می‌گیریم:

$$f(z)=\frac{1}{\sin^3 z}=\frac{1}{(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)^3}=\frac{1}{z^3(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^3}$$

فرض کنیم $Q(z)=\frac{1}{(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^3}$ باشد. $Q(z)$ در $z=0$ تحلیلی است و $f(z)=\frac{Q(z)}{z^3}$ بنابراین داریم:

$$Res(f(z),0)=\frac{1}{2!}Q''(0)$$

مشتق دوم Q را در $z=0$ حساب می‌کنیم. جملات با درجه‌ی بیشتر از ۲ را لازم نیست لحاظ کنیم، زیرا مشتق دوم آن‌ها در صفر، صفر می‌شود. در محاسبات زیر فقط جملاتی را نوشته‌ایم که در محاسبات ما مؤثر بوده‌اند. یادآوری می‌کنیم که اگر $Q=u^n$ باشد آن‌گاه $Q'=nu'u^{n-1}$ است.

$$Q(z)=(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^{-3}\Rightarrow Q'(z)=(-3)(-\frac{2z}{6}+\cdots)(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^{-4}=(z+\cdots)(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^{-4}$$

$$Q''(z)=(1+\cdots)(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^{-4}+(-4)(-\frac{2z}{6}+\cdots)(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^{-5}(z+\cdots)$$

$$Q''(0)=1+0=1\Rightarrow Res(f(z),0)=\frac{Q''(0)}{2!}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۳: اگر مانده تابع $f(z)=\frac{z^2+\alpha z}{(z+1)^2}$ در قطب تابع f برابر با ۱ باشد، آن‌گاه تابع $g(z)=\sinh(z-\frac{\pi}{2\alpha})$ در کدام نقطه غیر همدیس است؟

۱) $\frac{i\pi}{2}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi(3+i)}{6}$ ۴) $\frac{\pi(1+3i)}{6}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم $z=-1$ نمی‌تواند ریشه‌ی صورت باشد. اگر $z=-1$ ریشه صورت کسر باشد، داریم $z^2+\alpha z\Big|_{z=-1}=0$، پس $1-\alpha=0$ یعنی $\alpha=1$ است. در این صورت داریم:

$$f(z)=\frac{z^2+z}{(z+1)^2}=\frac{z(z+1)}{(z+1)^2}=\frac{z}{z+1}$$

در نتیجه خواهیم داشت $\underset{z=-1}{Res}f=\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)=-1$ که با صورت سؤال تناقض دارد. بنابراین $z=-1$ ریشه‌ی صورت نیست.

حالا باید مقدار α مشخص شود. تابع f در $z=-1$ دارای قطب مرتبه‌ی دو است.

$$Res(f,z=-1)=\frac{d}{dz}((z+1)^2f(z))\Big|_{z=-1}=(2z+\alpha)\Big|_{z=-1}=\alpha-2$$

بنابراین $\alpha-2=1$ پس $\alpha=3$ است.

به این ترتیب ضابطه‌ی $g(z)=\sinh(z-\frac{\pi}{6})$ مشخص شد. توابع تحلیلی هر جا که $g'(z)\neq0$ باشد همدیس هستند. بنابراین فقط در نقاطی که $g'(z)=0$ باشد g می‌تواند غیرهمدیس شود.

$$g'(z)=\cosh(z-\frac{\pi}{6})=0\Rightarrow z-\frac{\pi}{6}=(2k+1)i\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=(2k+1)\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{6}$$

هر نقطه که به فرم فوق باشد، می‌تواند جواب تست باشد. به ازای $k=0$ نقطه‌ی $z=\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{6}$ به دست می‌آید که همان گزینه‌ی (۴) است.

$$z=\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi(1+3i)}{6}$$

مثال ۲۴: قطب‌ها و مرتبه آن‌ها در تابع $f(z)=\dfrac{z\cot g z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$ کدامند؟ مقدار مانده $f(z)$ در $z=\frac{\pi}{2}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $z=0$ تکین رفع شدنی، $z=k\pi$ (k عددی صحیح و مخالف صفر) قطب مرتبه اول، $z=\frac{\pi}{2}$ قطب مرتبه دوم و مانده برابر ۱- است.

۲) $z=0$ تکین رفع شدنی، $z=k\pi$ (k عددی صحیح و مخالف صفر) قطب مرتبه اول، $z=\frac{\pi}{2}$ قطب مرتبه دوم و مانده برابر ۱ است.

۳) $z=0$ قطب مرتبه اول، $z=k\pi$ (k عددی صحیح و مخالف صفر) قطب مرتبه اول، $z=\frac{\pi}{2}$ قطب مرتبه سوم و مانده برابر ۱- است.

۴) $z=0$ تکین رفع شدنی، $z=k\pi$ (k عددی صحیح و مخالف صفر) قطب مرتبه دوم، $z=\frac{\pi}{2}$ قطب مرتبه دوم و مانده برابر ۱ است.

پاسخ: گزینه «۱» $f(z)$ در $z=0$ یک نقطه‌ی تکین رفع شدنی دارد. چون داریم:

$$f(z)=\frac{z\cos z}{(\sin z)(z-\frac{\pi}{2})^3}$$

و اگر حد این تابع در نقطه $z=0$ حساب شود، حاصل آن برابر «عدد» می‌شود، پس تکین برداشتنی است. (اگر برابر ∞ می‌شد تکین برداشتنی نبود.) در $z=k\pi$ (k عددی صحیح و مخالف صفر است) تابع دارای قطب مرتبه اول است (ریشه‌های $\sin z=0$) و در $z=\frac{\pi}{2}$ تابع قطب مرتبه‌ی دوم دارد (چون $\cos z$ به ازای $z=\frac{\pi}{2}$ صفر می‌شود و یک درجه از قطب مربوط به $(z-\frac{\pi}{2})^3$ کم می‌شود.)

حالا می‌رویم سراغ به دست آوردن مانده در $z=\frac{\pi}{2}$. باتوجه به اینکه قطب مرتبه دوم است، لذا داریم:

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{z\cos z}{(\sin z)(z-\frac{\pi}{2})}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(\cos z-z\sin z)(\sin z)(z-\frac{\pi}{2})-(z\cos z)[\sin z+\cos z(z-\frac{\pi}{2})]}{(\sin^2 z)(z-\frac{\pi}{2})^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{-z(z-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{2}\sin z\cos z}{\sin^2 z(z-\frac{\pi}{2})^2}\ \overset{\text{HOP}}{=}\ \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(z-\frac{\pi}{2})-z-\frac{\pi}{2}\cos^2 z+\frac{\pi}{2}\sin^2 z}{2\sin z\cos z(z-\frac{\pi}{2})^2+2\sin^2 z(z-\frac{\pi}{2})}\ \overset{\text{HOP}}{=}\ \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{2\sin^2 z}=-1$$

توضیح: در مشتق‌گیری‌های انجام شده از دستور «مشتق با عامل صفرشونده» استفاده کردیم و در محاسبات، آن‌هائی که صفر می‌شدند را ننوشتیم.

مثال ۲۵: مانده تابع $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$، در نقطه‌ی $z=1$ کدام است؟ (n عددی صحیح و مثبت است.)

(با کمی تغییر از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه‌های روسیه)

۱) $\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$ ۲) $\dfrac{(n-1)!(2n)!}{n!(n+1)!}$ ۳) $\dfrac{(2n)!}{(n+1)!}$ ۴) $\dfrac{2n!}{(2n)!}$

پاسخ: گزینه «۱» واضح است که تابع $f(z)$ در $z=1$ قطب مرتبه‌ی n دارد. بنابراین:

$$\text{Res}(f,1)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-1)^n f(z)]=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^{2n})\Big|_{z=1}$$

از تابع $w=z^{2n}$، مشتق nام می‌گیریم:

$$w=z^{2n}\Rightarrow w'=2nz^{2n-1}\Rightarrow\cdots\Rightarrow w^{(n-1)}=2n(2n-1)\cdots(2n-(n-2))z^{2n-n+1}$$

بنابراین با جایگذاری $z=1$ داریم:

$$\text{Res}(f,1)=\frac{1}{(n-1)!}2n(2n-1)\cdots(n+2)=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

توجه داشته باشید که داریم:

$$2n(2n-1)\cdots(n+2)=\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)\times(n+1)(n)\cdots(1)}{(n+1)(n)\cdots(1)}=\frac{(2n)!}{(n+1)!}$$

مثال ۲۶: مانده تابع $f(z)=\dfrac{z^{۲}}{(z-۲)(z^{۲}+۱)}$ در نقطه $z_{\circ}=i$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۴}{۵}$ ۲) $\dfrac{۱+۲i}{۱۰}$ ۳) $\dfrac{۱-۲i}{۱۰}$ ۴) $\dfrac{۲i-۱}{۱۰}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر $z^{۲}+۱$ را تجزیه کنیم برابر $(z-i)(z+i)$ می‌شود، پس $z_{\circ}=i$ که ریشه ساده مخرج است، قطب ساده $f(z)$ است: ملاحظه می‌گردد $g(i)=-۱$، لذا داریم:

$$f(z)=\frac{z^{۲}}{(z-۲)(z^{۲}+۱)}\ ,\ \begin{cases} g(z)=z^{۲}\ ,\ h(z)=(z-۲)(z^{۲}+۱) \\ h'(z)=۳z^{۲}-۴z+۱ \end{cases}$$

$$\underset{z=۱}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\frac{g(i)}{h'(i)}=\frac{i^{۲}}{۳i^{۲}-۴i+۱}=\frac{-۱}{-۲-۴i}=\frac{۱}{۲+۴i}\times\frac{۲-۴i}{۲-۴i}=\frac{۲-۴i}{۴+۱۶}=\frac{۱-۲i}{۱۰}$$

مثال ۲۷: مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^{z}}{۱-\cos z}$ در نقطه تکین تنهای $z=\circ$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(z)=\frac{e^{z}}{۱-\cos z}=\frac{۱+z+\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۳}}{۳!}+\cdots}{\frac{z^{۲}}{۲!}-\frac{z^{۴}}{۴!}+\frac{z^{۶}}{۶!}+\cdots}=\frac{۱+z+\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۳}}{۳!}}{\frac{z^{۲}}{۲!}(۱-\frac{۲!z^{۲}}{۴!}+\frac{۲!z^{۴}}{۶!}+\cdots)}$$

خب حالا اگر بسط عبارت داخل پرانتز مخرج را بنویسیم، $f(z)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود. دقت کنید از بسط $\frac{۱}{۱-u}=۱+u+u^{۲}+\cdots$ استفاده می‌کنیم:

$$f(z)=(۱+z+\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۳}}{۳!}+\cdots)\times\frac{۲!}{z^{۲}}(۱+\frac{۲!}{۴!}z^{۲}+\cdots)$$

دقت کنید اگر $\frac{۲!}{z^{۲}}$ در جملات پرانتز دوم ضرب شود، داریم:

$$f(z)=(۱+z+\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۳}}{۳!})(\frac{۲!}{z^{۲}}+\frac{۲!\times۲!}{۴!}+\cdots)$$

فقط جمله‌ای که از ضرب z در $\frac{۲!}{z^{۲}}$ به دست می‌آید، $\frac{۱}{z}$ را تولید می‌کند، لذا ضریب $\frac{۱}{z}$ برابر $۲!$ است.

مثال ۲۸: مانده تابع $f(z)=\dfrac{۲\sinh z}{۱-\cosh z}$ در نقطه $z=\circ$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ: گزینه «۴» اول باید تعیین کنیم $z=\circ$ برای توابع $g(z)=۲\sinh z$ و $h(z)=۱-\cosh z$، صفر مرتبه چندم است:

$g(z)=۲\sinh z \Rightarrow g'(z)=۲\cosh z \Rightarrow g'(\circ)=۲\cosh(\circ)=۲\neq\circ \Rightarrow$ $z=\circ$، صفر مرتبه‌ی **اول** صورت کسر است

$h(z)=۱-\cosh z \Rightarrow h'(z)=-\sinh z \Rightarrow h''(z)=-\cosh z \Rightarrow h''(\circ)=-\cosh(\circ)=-۱\neq\circ \Rightarrow$ $z=\circ$، صفر مرتبه‌ی **دوم** مخرج است

بنابراین $z=\circ$، قطب مرتبه اول $(۲-۱=۱)$، برای تابع $f(z)$ است، لذا به راحتی با استفاده از فرمول داریم:

$$\underset{z=\circ}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\underset{z\to\circ}{\mathrm{Lim}}(z-\circ)\frac{۲\sinh z}{۱-\cosh z}\ \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=}\ \underset{z\to\circ}{\mathrm{Lim}}\, z(\frac{۲z}{-\frac{z^{۲}}{۲}})=\mathbf{-۴}$$

مثال ۲۹: مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید بررسی کنیم $z=0$ قطب مرتبه‌ی چندم برای تابع $f(z)$ است. برای این منظور سعی می‌کنیم مرتبه صفرهای صورت و مخرج کسر را جداگانه حساب کنیم، صورت کسر را $p(z)$ می‌نامیم:

$$p(z)=e^z-1-z \Rightarrow p'(z)=e^z-1 \xrightarrow{z=0} p'(0)=0 \Rightarrow p''(z)=e^z \xrightarrow{z=0} p''(0)=1\neq 0$$

پس $z=0$، صفر مرتبه دوم صورت کسر است. حالا باید ببینیم $z=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی چندم مخرج کسر است. مخرج کسر را $Q(z)$ می‌نامیم و بنابراین داریم:

$$Q(z)=(1-\cos 2z)\sin z=2\sin^2 z\sin z=2\sin^3 z$$

پس $z=0$ صفر مرتبه‌ی سوم مخرج کسر است و بنابراین $z=0$ قطب مرتبه اول و به عبارت دیگر قطب ساده‌ی تابع $f(z)$ است.

$$\operatorname{Res}(f(z))\Big|_{z=0}=\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{e^z-1-z}{2\sin^3 z}=\lim_{z\to 0}\frac{z(e^z-1-z)}{2z^3}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1-z}{2z^2}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1+z+\frac{z^2}{2}-1-z}{2z^2}\right)=\frac{1}{4}$$

مثال ۳۰: برای تابع $f(z)=z^{10}e^{-\frac{1}{z^2}}$، نقطه $z_0=0$ چگونه نقطه‌ای است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) نقطه عادی ۲) تکین اساسی ۳) قطب مرتبه ۱۰ ۴) تکین برداشتنی

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(z)=z^{10}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{4!z^8}-\frac{1}{5!z^{10}}+\frac{1}{6!z^{12}}-\cdots\right)=z^{10}-z^8+\frac{z^6}{2!}-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^2}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!z^2}$$

چون بسط لوران شامل جمله‌های نامتناهی از توان‌های منفی z است لذا $z=0$ نقطه تکین اساسی است.

مثال ۳۱: تابع $f(z)=\dfrac{z^6}{(z^2-9)^2\exp\left(\frac{1}{z-3}\right)}$ داده شده است. در خصوص مرتبه قطب و نقطه ویژه اساسی و مرتبه صفر، کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $z=3$ نقطه ویژه اساسی، و $z=-3$ قطب مرتبه دوم تابع

۲) $z=0$ صفر مرتبه ۷، و $z=3$ قطب ساده تابع

۳) $z=-3$ نقطه ویژه اساسی، و $z=3$ قطب مرتبه ساده

۴) $z=0$ صفر مرتبه ۷، و $z=3$ قطب مرتبه دوم تابع و این تابع نقطه ویژه اساسی ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» $z=3$ نقطه تکین اساسی می‌باشد و با توجه به رابطه $(z^2-9)^2=(z-3)^2(z+3)^2$ ملاحظه می‌گردد $z=-3$ قطب مرتبه دوم می‌باشد. لازم به توضیح است در تابع $e^{\frac{1}{z-z_0}}$ همواره نقطه $z=z_0$ نقطه تکین اساسی تابع است.

مثال ۳۲: مانده $f(z)=\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ در قطب $z=-2i$ خواهد شد: (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1+i}{4+3i}$ ۲) $\frac{1-i}{4+3i}$ ۳) $\frac{1-i}{4-3i}$ ۴) $\frac{1+i}{4-3i}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}\left(\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)}\right)=\frac{(-2i)^2-2(-2i)}{(-2i+1)^2(-2i-2i)}=\frac{-4+4i}{-4i(-4+1-4i)}=\frac{1-i}{4-3i}$$

مثال ۳۳: ماندهٔ تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ در نقطهٔ منفرد $z=0$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) e ۳) e^{-1} ۴) $e-1$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1-z}&=1+z+z^2+\cdots\\ e^{\frac{1}{z}}&=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=(1+z+z^2+\cdots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

لذا ضرایب $\frac{1}{z}$ پس از محاسبه و جمع ضرایب آن برابر است با:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e-1$$

مثال ۳۴: $z=0$ برای تابع $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$ چه نوع نقطهٔ تکین است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) اساسی ۲) قطب مرتبه اول ۳) قابل رفع ۴) قطب مرتبه دوم

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{z\to 0} z\left(\frac{e^z-1}{z^2}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\lim_{z\to 0} e^z=1$$

مثال ۳۵: نقاط تکین و نوع آن را برای تابع $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ تعیین کنید. (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) قطب ساده در $z=\frac{1}{n\pi}\ (n=\pm1,\pm2,\dots)$ نقطه تکین برداشتی $z=0$

۲) قطب ساده در $z=\frac{1}{n\pi}$ نقطه تکین برداشتی $z=0\ (n=\pm1,\pm2,\dots)$

۳) نقطه تکین اساسی در $z=0$ و قطب‌های ساده در $z=\frac{1}{2n\pi}\ (n=\pm1,\pm2,\dots)$

۴) قطب‌های ساده در $z=\frac{1}{n\pi}\ (n=\pm1,\pm2,\dots)$ و نقطهٔ تکین غیر تنها در $z=0$

پاسخ: گزینه «۴» نقاط $z=\frac{1}{n\pi}$ همگی قطب‌های ساده تابع هستند، و $z=0$ نقطه تکین غیر تنها می‌باشد.

مثال ۳۶: تابع $f(z)=e^{tg\frac{1}{z}}$ در نقطه $z_0=0$ دارای چه نوع تکین است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) قطب ۲) تنهای برداشتی ۳) تنهای اساسی ۴) غیرتنها

پاسخ: گزینه «۴» برای پاسخ به این سؤال ابتدا همه‌ی نقاط تکین این تابع را پیدا می‌کنیم. با توجه به آن که $tg(\frac{1}{z})=\frac{\sin(\frac{1}{z})}{\cos(\frac{1}{z})}$ است، علاوه بر $z=0$، جواب‌های معادله‌ی $\cos\frac{1}{z}=0$ نیز نقاط تکین $f(z)$ محسوب می‌شوند.

$$\cos(\frac{1}{z})=0\Rightarrow\frac{1}{z}=(2k-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=\frac{2}{(2k-1)\pi}$$

پس همه‌ی نقاط دنباله‌ی $z_k=\frac{2}{(2k-1)\pi}$ نقطه‌ی تکین $f(z)$ هستند و به وضوح داریم $\lim_{k\to\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}=0$ پس $z=0$ یک نقطه‌ی تکین انباشته (غیرتنها) است.

مثال ۳۷: تابع $f(z)=\frac{\sinh z}{\sin z}$ را در نظر می‌گیریم، ماندهٔ این تابع در نقطهٔ $z=0$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) -1 ۲) i ۳) 1 ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» $z=0$ قطب برداشتنی تابع است، پس حاصل مانده برابر صفر است. البته پاسخ جالب‌تر اینکه چون توابع $\sinh z$ و $\sin z$ هر دو فرد هستند، لذا $f(z)$ تابعی زوج است و این یعنی جمله $\frac{1}{z}$ در بسط آن وجود ندارد و مانده صفر است.

مثال ۳۸: فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد:

(متغیر مختلط) $z\neq 0$ و $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}$ کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $z=0$ قطب ساده تابع f است و ماندهٔ f در نقطه صفر برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۲) $z=0$ قطب ساده تابع f است و ماندهٔ f در نقطه صفر برابر با ۱ است.

۳) $z=0$ قطب مرتبه دو تابع f است و ماندهٔ f در نقطه صفر برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۴) $z=0$ قطب مرتبه سه تابع f است و ماندهٔ f در نقطه صفر برابر با ۱ است.

پاسخ: گزینه «۱» با نوشتن بسط تیلور تابع $\cos z$ داریم:

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}=\frac{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots}{z^3}=\frac{1}{2z}-\dots$$

بنابراین $z=0$ قطب ساده است و ماندهٔ آن در $z=0$ برابر با $\frac{1}{2}$ است.

مثال ۳۹: در تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(e^z-1)}$، مانده تابع در $z=0$ عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) $+\dfrac{1}{2}$ ۴) $+1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $z=0$ قطب مرتبه دوم تابع است، لذا داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}=\frac{1}{z(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots)}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & z^2+\frac{z^3}{2!}+\frac{z^4}{3!}+\dots \\ \cline{2-2} \frac{1+\frac{z}{2}+\dots}{-\frac{z}{2}+\dots} & z^{-2}\boxed{-\frac{1}{2z}}+\dots \\ \frac{\dots}{\dots\dots} & \end{array}$$

ملاحظه می‌گردد ضریب $\frac{1}{z}$ یا همان مانده در $z=0$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. البته محاسبه مانده با استفاده از فرمول بسیار راحت‌تر است:

$$\text{مانده در } z=0 = \lim_{z\to 0}\left[(z-0)^2\frac{1}{z^2(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)}\right]'=\lim_{z\to 0}\frac{-(\frac{1}{2!}+\frac{2z}{3!}+\cdots)\times 1}{(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)^2}=-\frac{1}{2}$$

مثال ۴۰: تابع $f(z)=\sec(\frac{1}{z-1})$ از متغیر مختلط z را در نظر می‌گیریم. در مورد نقاط تکین (singularity) و قطب‌های تابع کدام عبارت درست است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) بی‌نهایت قطب مکرر دارد.
۲) $z=1$ تنها نقطه تکین تابع است.
۳) فقط یک نقطه تکین اساسی دارد.
۴) بی‌نهایت قطب ساده و یک نقطه تکین اساسی دارد.

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\sec(\frac{1}{z-1})=\frac{1}{\cos(\frac{1}{z-1})}\Rightarrow\frac{1}{z-1}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$z-1=\frac{2}{(2k+1)\pi}\Rightarrow z=\frac{2}{(2k+1)\pi}+1$$

بنابراین تابع بی‌نهایت قطب ساده دارد که با نزدیک شدن به نقطه $z=1$ ($k\to\infty$) قطب‌ها به شدت به یکدیگر نزدیک می‌شوند و لذا قطب $z=1$ تکین غیر تنها (انباشته) می‌باشد. کلید سازمان سنجش گزینه (۴) بوده و معلوم است $z=1$ را تکین اساسی به حساب آورده است.

مثال ۴۱: مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{1-\cos z}$ در نقطه تکین تنهای $z=0$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) -2 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول:

$$f(z)=\frac{e^z}{1-\cos z}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}}{\frac{z^2}{2!}(1-\frac{2!z^2}{4!}+\frac{2!z^4}{6!}+\cdots)}$$

خب حالا اگر بسط عبارت داخل پرانتز مخرج را بنویسیم، $f(z)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود، دقت کنید از بسط $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots$ استفاده می‌کنیم:

$$f(z)=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)\times\frac{2!}{z^2}(1+\frac{2!}{4!}z^2+\cdots)$$

دقت کنید اگر $\frac{2!}{z^2}$ در جملات پرانتز دوم ضرب شود، داریم:

$$f(z)=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!})(\frac{2!}{z^2}+\frac{(2!)^2}{4!}+\cdots)$$

فقط جمله‌ای که از ضرب z در $\frac{2!}{z^2}$ می‌باشد، $\frac{1}{z}$ را تولید می‌کند، لذا ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $2!$ است.

روش دوم: برای محاسبه مانده روش راحت‌تری نیز وجود دارد. دقت کنید $z=0$ یک صفر مرتبه دوم برای تابع $h(z)=1-\cos z$ و در نتیجه یک قطب مرتبه دوم برای تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{1-\cos z}$ است. قبل از ادامه حل، به دلیل اینکه چرا $z=0$ صفر مرتبه دوم تابع $h(z)=1-\cos z$ است، اشاره می‌کنیم:

$$h'(z)=\sin z \Rightarrow h'(0)=\sin(0)=0 \quad \text{و} \quad h''(z)=\cos z \Rightarrow h''(0)=\cos(0)=1$$

چون مشتق دوم مخالف صفر شد، پس $z=0$ صفر مرتبه دوم است.

$$z=0 \text{ مانده در } =\lim_{z\to 0}[(z-0)^2(\frac{e^z}{1-\cos z})]'=\lim_{z\to 0}(\frac{z^2e^z}{1-\cos z})'=\lim_{z\to 0}(\frac{z^2e^z}{\frac{z^2}{2}})'=\lim_{z\to 0}(2e^z)'=2$$

مثال ۴۲: اگر $z=0$ نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ باشد و $f'(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$، آنگاه با چه شرطی این نقطه تکین تنها خواهد بود؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $a_k\neq 0$ به ازای همه $k<0$ صحیح
۲) $a_m\neq 0$ به ازای لااقل یک m صحیح منفی
۳) $a_k=0$ به ازای برخی kهای صحیح مثبت و $a_{-1}\neq 0$ و $a_{-2}\neq 0$
۴) فقط $a_{-1}=0$ و $a_m\neq 0$ به ازای لااقل یک m صحیح منفی

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با انتگرال‌گیری از $f'(z)$ داریم:

$$f(z)=\cdots+\frac{-a_{-2}}{z}+a_{-1}\operatorname{Ln}z+a_0z+\frac{a_1}{2}z^2+\cdots$$

لازم است $a_{-1}=0$ و به ازای لااقل یک m صحیح منفی $a_m\neq 0$ باشد.

مثال ۴۳: اگر f در z_0 تحلیلی باشد و $g(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ و $f(z_0)\neq 0$ آنگاه:

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) g در z_0 تحلیلی است.
۲) z_0 یک نقطه تکین اساسی g است.
۳) z_0 یک نقطه تکین برداشتنی g است.
۴) z_0 یک قطب ساده g است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای تعیین مرتبه قطب به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

حال چون $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی است لذا حاصل حد فوق موجود و متناهی و z_0 قطب ساده می‌باشد.

مثال ۴۴: تابع $f(z)=\operatorname{cosec}(\frac{1}{z+1})$ از متغیر مختلط z را در نظر می‌گیریم. در مورد نقاط تکین (singular) و قطب‌های تابع کدام عبارت درست است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) بی‌نهایت قطب ساده و یک نقطهٔ تکین اساسی دارد.
۲) بی‌نهایت قطب مکرر دارد.
۳) فقط یک نقطه تکین اساسی دارد و قطب ندارد.
۴) $z=1$ تنها نقطه تکین تابع است.

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\operatorname{cosec}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{\sin\frac{1}{z+1}}\Rightarrow \sin\frac{1}{z+1}=0\Rightarrow \frac{1}{z+1}=k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{k\pi}-1 \qquad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

به ازای kهای مختلف، بی‌نهایت قطب ساده داریم که با افزایش مقدار k تراکم قطب‌ها در نزدیکی $z=-1$ زیاد شده و لذا نقطه‌ی $z=-1$ را تکین غیر تنها یا همان تکین انباشته می‌نامیم. کلید سازمان سنجش گزینه (۱) بوده و به نظر می‌رسد نقطه‌ی $z=-1$ را تکین اساسی منظور کرده است.

مثال ۴۵: حد تابع $f(z)=z-e^z$ وقتی z به بی‌نهایت میل کند، کدام است؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\infty$
۲) 0
۳) وجود ندارد.
۴) ∞

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با فرض $z=\frac{1}{w}$، تابع $g(w)=f(\frac{1}{w})=\frac{1}{w}-e^{\frac{1}{w}}$ دارای یک نقطه تکین اساسی در $w=0$ $(z=\infty)$ می‌گردد، لذا بنابر خاصیت نقاط تکین اساسی تابع g در $w=0$ و یا f در $z=\infty$ فاقد حد است.

مثال ۴۶: ماندهٔ تابع $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z-a)^3}$، $a\neq 0$، نسبت به نقطهٔ تکین کدام است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\dfrac{ae^a}{2}$ ۲) $(1+a)e^a$ ۳) $(1+\dfrac{a}{2})e^a$ ۴) $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{6})e^a$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$f(z)=\frac{ze^z}{(z-a)^3}$$

قطب مرتبه ۳ $z=a \Rightarrow \phi(z)=(z-a)^3 f(z)=ze^z \Rightarrow b_1=\dfrac{\phi^{(2)}(a)}{2!}=\dfrac{2e^a+ae^a}{2!}=(1+\dfrac{a}{2})e^a$

مثال ۴۷: فرض کنید $P(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ یک چند جمله‌ای از درجه $n\geq 2$ باشد. کدام گزینه در مورد P درست است؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) P در بی‌نهایت دارای قطب مرتبه n است.
۲) P در بی‌نهایت دارای نقطهٔ تکین اساسی است.
۳) برد P می‌تواند برابر با C نباشد.
۴) P می‌تواند یک نگاشت یک به یک باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$P(z)=a_0+a_1(z)+\cdots+a_nz^n$$

برای بررسی وضعیت تابع در ∞ به جای z، $\dfrac{1}{z}$ قرار داده و وضعیت تابع جدید را در $z=0$ بررسی می‌کنیم.

$$P(\frac{1}{z})=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}$$

با توجه به اینکه تابع جدید دارای یک قطب مرتبه n در $z=0$ می‌باشد بنابراین تابع اصلی دارای قطب مرتبه n در ∞ می‌باشد.

در مورد گزینه‌های (۳) و (۴) دقت کنید که به ازای هر عدد مختلطِ c، معادلهٔ $p(z)=c$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ $n\geq 2$ است. پس دقیقاً n ریشه در اعداد مختلط دارد. به این ترتیب $p(z)$ حتماً پوشاست و بردش برابر با کل اعداد مختلط است. همچنین $p(z)$ یک به یک نیست؛ زیرا برای n عدد مختلط داریم $p(z)=c$ و $n\geq 2$ است.

مثال ۴۸: می‌توان گفت که نقطه‌ی $z=0$ برای تابع $f(z)=z\exp(\frac{1}{z})$

(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) صفر است.
۲) نه صفر است و نه قطب
۳) قطب است.
۴) نقطه‌ی استثنایی (یا منفرد یا تکین) (singular) نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که در $z=0$ به علت وجود کسرِ $\frac{1}{z}$ در ضابطه‌ی $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$؛ مقدار $f(0)$ تعریف شده نیست. دقت کنید که هیچ‌گاه مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر مطلق باشد. پس تصور نکنید که $f(0)=0$ می‌شود. بلکه $f(0)$ تعریف نشده است.

حال می‌دانیم که در بسط لورانِ $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$ توان‌های منفیِ z نامتناهی هستند پس $z=0$ یک نقطه‌ی تکین اساسی (قطب) برای $f(z)$ است:

$$f(z)=ze^{\frac{1}{z}}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-1}}$$

مثال ۴۹: مانده تابع $ze^{-\frac{1}{z-1}}$ برابر است با:

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱- ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به بسط لوران تابع $f(z)=e^{-z}$ که بصورت $e^{-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nz^n}{n!}$ است و همچنین با توجه به اینکه فقط $z=1$ برای تابع $ze^{\frac{-1}{z-1}}$ یک نقطه تکین اساسی است بسط لوران را برای این تابع بصورت زیر می‌نویسیم:

$$ze^{\frac{-1}{z-1}}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{z-1})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(-1)^n}{n!(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{z-1+1}{(z-1)^n})=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{z-1}{(z-1)^n}+\frac{1}{(z-1)^n})$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[\frac{1}{(z-1)^{n-1}}+\frac{1}{(z-1)^n}]$$

حال برای یافتن مانده‌ی تابع مذکور ضریب $\dfrac{1}{z-1}$ را در بسط فوق بدست می‌آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[\frac{1}{(z-1)^{n-1}}+\frac{1}{(z-1)^n}]=[(z-1)+1]-[1+\frac{1}{z-1}]+\frac{1}{2}[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}]+\cdots=z-1-\frac{1}{2}.\frac{1}{z-1}+\cdots$$

پس مانده‌ی تابع $ze^{-\frac{1}{z-1}}$ برابر $\dfrac{-1}{2}$ می‌باشد.

مثال ۵۰: مبدأ مختصات چه نوع ویژگی برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$ دارد و ماندهٔ تابع در این نقطه چیست؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) قطب ساده و $Res(0)=\frac{1}{2}$
۲) قطب مرتبه دوم و $Res(0)=1$
۳) قطب ساده و $Res(0)=1$
۴) نقطه تکین برداشتنی و $Res(0)=1$

پاسخ: گزینه «۳» برای تعیین مرتبه‌ی قطب می‌توان $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ را به ازای $m=1,2,\ldots$ محاسبه نمود و مقدار m ای که به ازای آن برای اولین بار حد فوق موجود باشد (متناهی) را مرتبه‌ی قطب گوئیم.

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} z^1\times\frac{\sin z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1\Rightarrow$$ قطب از مرتبه‌ی اول است (قطب ساده)

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0} z\times\frac{\sin z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

مثال ۵۱: فرض کنید $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ، $w\neq 0$ یک عدد مختلط و v همسایگی صفر باشد. در این صورت معادله‌ی $f(z)=w$ به ازای هر w:
(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) و هر v فقط یک جواب در v دارد.
۲) و هر v تعداد نامتناهی در v جواب دارد.
۳) و هر v هیچ جوابی در v ندارد.
۴) یک v یافت می‌شود که در v فقط یک جواب دارد.

پاسخ: گزینه «۲»

$$e^{\frac{1}{z}}=w \Rightarrow 2k\pi i+\frac{1}{z}=\log w \Rightarrow z=\frac{1}{\log w-2k\pi i}$$

برای هر همسایگی صفر مانند V چون $|z|$ با افزایش k به صفر نزدیک می‌شود پس حتماً $\underline{\underline{N}}$ وجود دارد که برای هر $k>N$ ، z عضو V است. برای پاسخ این تست به بیان ساده‌تر می‌توانیم اینگونه استدلال کنیم که چون $z=0$ نقطه تکین اساسی $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ است پس بـرای هـر عـدد مخـتلطِ w؛ معادلـه‌ی $f(z)=w$ بی‌شمار جواب در همسایگی V از صفر دارد.

نکته: اگر z_0 یک نقطه‌ی تکین اساسی برای تابع $f(z)$ باشد؛ در هر همسایگی به مرکز z_0؛ معادله‌ی $f(z)=w$ دارای بی‌شمار جـواب اسـت. در اینجا w می‌تواند هر عدد مختلطی انتخاب شود.

مثال ۵۲: تابع f با ضابطه $f(z)=z^2(\sin\frac{1}{z}-\cos\frac{1}{z})$: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۹۱)

۱) در $z=0$ تکینی اساسی دارد.
۲) در $z=0$ قطب دارد.
۳) در $z=0$ تکینی برداشتنی دارد.
۴) در همسایگی محذوف (deleted) صفر کراندار است.

پاسخ: گزینه «۱» طبق متن درس می‌دانیم که توابع $\sin\frac{1}{z}$ و $\cos\frac{1}{z}$ در $z=0$ دارای نقطه‌ی تکین اساسی هستند، با این حال برای اطمینان از این موضوع در مورد تابع $f(z)=z^2(\sin\frac{1}{z}-\cos\frac{1}{z})$ بهتر است بسط دو تابع $\sin(\frac{1}{z})$ و $\cos(\frac{1}{z})$ را بنویسیم:

$$f(z)=z^2(\sin\frac{1}{z}-\cos\frac{1}{z})$$
$$=z^2[(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-+\cdots)+(-1+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{4!z^4}+\cdots)]=(z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}+\cdots)+(-z^2+\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!z^2}+\cdots)$$

چون تعداد جملات با توان‌های منفی z بی‌شمار هستند، لذا $z=0$ تکین اساسی است. در مورد گزینه (۲) توجه کنید که در برخی از منابع رشته‌ی ریاضی، فقط نقطه‌ی تکین غیر تنها را (قطب) تابع $f(z)$ می‌نامند. پس منظور گزینه (۲) آن است که $z=0$ نقطه‌ی تکین غیر تنها است. با توجه به آن که $f(z)$ به جز $z=0$ نقطه‌ی تکین دیگر ندارد این گزینه نادرست است. در مورد گزینه‌ی (۴) هم به خاطر داشته باشید اگر z_0 یک نقطه‌ی تکین باشد و رفع شدنی هم نباشد، $f(z)$ در همسایگی محذوف z_0 بی‌کران خواهد بود.

مثال ۵۳: نقاط منفرد (singular points) تابع $f(z)=\dfrac{Ln(z+4)}{z^2+i}$ عبارتند از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) نیم خط $y=0, x\le -4$ و نقاط $z=\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

۲) نیم خط $y=0, x\le -4$ و نقاط $z=\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

۳) نقاط درون و روی دایره $|z+4|\le 1$ و نقاط $z=\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

۴) نقاط درون و روی دایره $|z+4|\le 1$ و نقاط $z=\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا ریشه‌های مخرج که نقاط غیرتحلیلی تابع هستند را به دست می‌آوریم:

$$z^2+i=0 \Rightarrow z=\sqrt{-i}=\sqrt{1e^{-i\frac{\pi}{2}}}=\begin{cases} e^{-i\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} \\ e^{i\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

اما در صورت کسر تابع Ln داریم و لذا نقاط غیرتحلیلی آن را نیز حساب می‌کنیم:

$$Ln(z+4) \text{ نقاط غیر تحلیلی تابع } =\{z \mid Im(z+4)=0 \ ,\ Re(z+4)\le 0\}=\{z \mid y=0 \ ,\ x\le -4\}$$

مثال ۵۴: مانده‌ی تابع مختلط $f(z)=e^{zt}\,tgz$ در قطب $z=\dfrac{3\pi}{2}$، کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸ ـ مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $e^{-3t\frac{\pi}{2}}$

۲) $e^{3t\frac{\pi}{2}}$

۳) $e^{(i+\frac{3t}{2})\pi}$

۴) $e^{(i-\frac{3t}{2})\pi}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z)=\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}(z-\frac{3\pi}{2})e^{zt}.tgz=\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{(z-\frac{3\pi}{2})}{\cos z}\times\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\sin z.e^{zt}=\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}(\frac{1}{-\sin z})\times(-1)\times e^{\frac{3\pi}{2}t}=-e^{\frac{3\pi}{2}t}=e^{i\pi}.e^{\frac{3\pi}{2}t}=e^{(i+\frac{3t}{2})\pi}$$

مثال ۵۵: اگر $f(z)=\dfrac{\cosh z-1}{z^2}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) $z=0$ یک صفر ساده تابع است.

۲) $z=0$ یک قطب ساده تابع است.

۳) نقطه‌ی $z=0$ یک نقطه تکین رفع شدنی تابع است.

۴) $z=0$ یک نقطه ثابت تابع است.

پاسخ: گزینه «۳» اگر حد تابع در نقطه‌ی $z=0$ برابر عدد شود، تکین برداشتنی است، لذا داریم:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\cosh z-1}{z^2}=\lim_{z\to 0}(\frac{1+\frac{z^2}{2!}-1}{z^2})=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}(\frac{z^2}{z^2})=\frac{1}{2}$$

بنابراین نقطه‌ی $z=0$ تکین برداشتنی (رفع شدنی) است.

درسنامه۳: محاسبه‌ی انتگرال توابع مختلط به کمک قضیه مانده‌ها

مثال۱: مقدار انتگرال $I=\oint_C \frac{3z}{3z-1}dz$ به کمک قضیه مانده‌ها در حالتی که C دایره یکه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}\pi i$ ۲) $\frac{4}{3}\pi i$ ۳) πi ۴) $2\pi i$

پاسخ : گزینه «۱» ریشهٔ مخرج $z=\frac{1}{3}$ است و واضح است این نقطه داخل دایره یکه قرار دارد:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{3}}\left(\frac{3z}{3z-1}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{3z}{3\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\lim_{z\to\frac{1}{3}} z=\frac{1}{3}\Rightarrow I=2\pi i\times\frac{1}{3}=\frac{2\pi i}{3}$$

مثال۲: فرض کنید مرز C مربع با رئوس $\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$ باشد که در جهت مثبت پیموده شده است. در این صورت حاصل $I=\oint_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}dz$ کدام است؟

۱) $-4\pi i$ ۲) $-2\pi i$ ۳) $+4\pi i$ ۴) $+2\pi i$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا نقاط تکین تابع را حساب می‌کنیم:

$$z(z^2+1)=0\Rightarrow z=0\,,\ z=\pm i$$

تمام این نقاط داخل ناحیه هستند و لذا داریم:

$$z=0 \text{ مانده در } =\left.\frac{\cosh \pi z}{z^2+1}\right|_{z=0}=\frac{\cosh(0)}{1}=1$$

$$z=i \text{ مانده در } =\left.\frac{\cosh \pi z}{z(z+i)}\right|_{z=i}=\frac{\cosh \pi i}{i(i+i)}=\frac{\cosh \pi i}{-2}\quad,\quad z=-i \text{ مانده در } =\left.\frac{\cosh \pi(-i)}{z(z-i)}\right|_{z=-i}=\frac{\cosh \pi i}{-2}$$

حالا کافیست مقدار $\cosh \pi i$ حساب شود که می‌دانیم برابر است با: $\cosh(\pi i)=\cos\pi=-1$

بنابراین حاصل انتگرال برابر مقدار زیر است:

$$I=2\pi i\left[1+\left(\frac{-1}{-2}\right)+\left(\frac{-1}{-2}\right)\right]=2\pi i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\mathbf{4\pi i}$$

مثال۳: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ که C دایره‌ای به معادله $|z-2-i|=2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3\pi i}{2}$ ۳) $-\frac{3\pi}{2}i$ ۴) $\frac{2}{3}\pi i$

پاسخ : گزینه «۲» تابع دارای قطب مرتبه دوم $z=0$ و قطب ساده $z=2$ می‌باشد که فقط $z=2$ داخل دایره C قرار دارد:

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\frac{2+1}{3(2)^2-4(2)}=\frac{3}{4}\Rightarrow I=2\pi i\times\frac{3}{4}=\frac{3\pi i}{2}$$

توضیح: همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد با قرار دادن $z=0$ و $z=2$ در معادله $|z-2-i|=2$ می‌توانیم بودن یا نبودن نقاط را درون ناحیه بررسی کنیم، چون $|0-2-i|=\sqrt{5}>2$ می‌باشد، پس $z=0$ داخل ناحیه قرار ندارد.

مثال۴: حاصل $I=\oint_{|z|=5}\frac{e^z dz}{z^2-6z}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi i}{3}$ ۲) $\frac{2\pi i}{5}$ ۳) $-\frac{\pi i}{3}$ ۴) $-\frac{2\pi i}{5}$

پاسخ : گزینه «۳» نقاط $z=0$ و $z=6$ قطبهای تابع هستند که $z=6$ خارج دایره $|z|=5$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2z-6}=-\frac{1}{6}\Rightarrow I=2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi i}{3}$$

مثال ۵: حاصل $I=\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z+e^z}{1+z+z^2+\cdots+z^n}dz$، در صورتی که دایره در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده باشد، کدام است؟

۱) $2\pi i(e+\sin 1)$ ۲) $-2\pi i(e+\sin 1)$ ۳) $-2\pi i$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» نقاط غیرتحلیلی تابع ریشه‌های مخرج کسر هستند، اما مخرج کسر در نگاه اول کمی ترسناک به نظر می‌رسد! در حالی که به راحتی می‌توان ریشه‌ها را حساب کرد. با ضرب $(z-1)$ در مخرج داریم:
$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^n)=z^{n+1}-1$$
بنابراین معلوم می‌شود تمام ریشه‌های $1+z+z^2+\cdots+z^n=0$، ریشه‌های $(n+1)$ام عدد ۱ هستند، و این یعنی ریشه‌ها روی دایره $|z|=1$ قرار دارند و درون و روی دایره $|z|=\frac{1}{2}$ نیستند، بنابراین مانده صفر و لذا حاصل انتگرال صفر است.

مثال ۶: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{e^z}{z^2(z+2)}dz$ بر روی مرز C مربع $-1\le x\le 1$ و $-1\le y\le 1$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi i}{2}$ ۳) $\frac{\pi i}{4}$ ۴) $\frac{\pi i}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» قطب‌های تابع $z=0$ و $z=-2$ می‌باشند که $z=-2$ خارج از ناحیه انتگرال‌گیری و $z=0$ قطب مرتبه دوم تابع است، لذا داریم:
$$\underset{z=0}{\text{Res}} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\Big[\frac{d}{dz}\frac{(z-0)^2e^z}{z^2(z+2)}\Big]=\lim_{z\to 0}\Big(\frac{e^z(z+2)-e^z}{(z+2)^2}\Big)=\frac{1}{4}\Rightarrow I=2\pi i\times\frac{1}{4}=\frac{\pi i}{2}$$

مثال ۷: حاصل انتگرال $I=\oint_{|z|=2}\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$ کدام است؟

۱) $2\pi i$ ۲) $4\pi i$ ۳) $8\pi i$ ۴) $10\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» تابع دارای قطب مرتبه سوم $z=1$ است:
$$\underset{z=1}{\text{Res}} f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\Big[(z-1)^3.\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\Big]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}(5z^2-3z+2)''=\frac{10}{2!}=5\Rightarrow I=5\times 2\pi i=10\pi i$$

مثال ۸: فرض کنید C معرف دایره $|z|=2$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال $\oint_C \frac{(z^2+1)}{z^6-6z^4+5z^2}dz$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\pi i}{4}$ ۲) $\frac{\pi i}{4}$ ۳) 0 ۴) $\frac{\pi i}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» واضح است ابتدا باید نقاط تکین تابع تحت انتگرال را حساب کنیم، برای این منظور مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:
$$z^6-6z^4+5z^2=0\Rightarrow z^2(z^4-6z^2+5)=0\Rightarrow z^2(z^2-5)(z^2-1)=0\Rightarrow z=0\,,\,z=\pm\sqrt{5},z=\pm 1$$
از بین نقاط فوق، فقط نقاط $z=\pm 1$ و $z=0$، داخل دایره $|z|=2$، قرار دارند و لذا مانده در این نقاط را حساب می‌کنیم:
$$z=0 \text{ مانده در } =\lim_{z\to 0}\Big(\frac{z^2+1}{z^4-6z^2+5}\Big)'=\lim_{z\to 0}\frac{2z(z^4-6z^2+5)-(4z^3-12z)(z^2+1)}{(z^4-6z^2-5)^2}=0$$
$$z=1 \text{ مانده در } =\frac{z^2+1}{(z^6-6z^4+5z^2)'}\Big|_{z=1}=\frac{z^2+1}{6z^5-24z^3+10z}\Big|_{z=1}=\frac{2}{6-24+10}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$
به همین طریق مانده در $z=-1$ برابر $+\frac{1}{4}$ به دست می‌آید و لذا حاصل انتگرال برابر است با:
$$I=2\pi i(0-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=0$$
توضیح: البته نیازی به محاسبات فوق نبود. زیرا $f(z)$ زوج است و نقاط تکین داخل مرز نیز دو به دو قرینه‌ی هم یا صفر هستند، بنابراین مجموع مانده‌ها در این نقاط و حاصل انتگرال، برابر با صفر است.

مثال۹: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{e^z}{z^3(z^2+1)}dz$ وقتی C مرز ساده و بسته $|z|=\frac{1}{2}$ در جهت مثبت باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi i$ ۳) $2\pi i$ ۴) $-2\pi i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» قطب‌های تابع $z=\pm i$ و $z=0$ هستند که فقط نقطه $z=0$ که یک قطب مرتبه سوم است درون دایره $|z|=\frac{1}{2}$ قرار دارد.

لذا داریم:
$$\underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[z^3.\frac{e^z}{z^3(z^2+1)}]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}[\frac{e^z}{z^2+1}]''$$

پس از دو بار مشتق‌گیری از عبارات داخل پرانتز و محاسبه حد عبارت در نقطه $z=0$ باقیمانده برابر $-\frac{1}{2}$ به دست خواهد آمد. پس $I=2\pi i\times(-\frac{1}{2})=-\pi i$ خواهد شد.

مثال۱۰: مانده تابع $f(z)=\int_1^z(\frac{1}{z}-\frac{a}{z^4})\cos z dz$ در نقطه‌ی $z=0$ برابر با -1 است. a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم که مانده‌ی f در $z=0$ برابر است با ضریب $\frac{1}{z}$ در بسط $f(z)$ حول $z=0$. همچنین می‌دانیم که $\int\frac{-1}{z^2}dz=\frac{1}{z}$ است.

بنابراین کافیست ضریب $\frac{1}{z^2}$ را در بسط تابع جلوی انتگرال پیدا کنیم سپس آن را قرینه می‌کنیم و ضریب $\frac{1}{z}$ در $f(z)$ به‌دست خواهد آمد:

$$\text{عبارت انتگرالده}=(\frac{1}{z}-\frac{a}{z^4})(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots)\Rightarrow \text{ضریب } \frac{1}{z^2}=\frac{a}{2!}$$

بنابراین مانده‌ی f در $z=0$ برابر است با $-\frac{a}{2!}$. طبق فرض $\frac{-a}{2!}=-1$ پس $a=+2$ است.

مثال۱۱: حاصل انتگرال $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cot g\pi z}{z^{2k+1}}dz$ که C عبارتست از بیضی $9x^2+4y^2=1$ کدام است؟ (k عدد طبیعی)

۱) -1 ۲) 0 ۳) ۱ ۴) π

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\text{ضریب } \frac{1}{z}=\text{مانده در } z=0 \Rightarrow z=0 \text{ نقطه تکین } \Rightarrow \text{مجموع مانده‌ها}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cot g\pi z}{z^{2k+1}}dz$$

اما تابع $\frac{\cot g\pi z}{z^{2k+1}}$ یک تابع زوج است و لذا برحسب توان‌های زوج z بسط می‌یابد. بنابراین ضریب $\frac{1}{z}$ در بسط این تابع صفر خواهد بود. همچنین دقت کنید که نقاط $z=\pm n\neq 0$ که قطب‌های تابع $\cot g\pi z=\frac{1}{tg\pi z}$ هستند، هیچکدام در این بیضی قرار ندارند؛ زیرا شعاع‌های افقی و عمودی آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ هستند.

مثال۱۲: اگر c بیضی $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد و $f(w)=\oint_C\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}dz$، آنگاه مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $3\pi i$ ۳) $\frac{3\pi}{2}i$ ۴) $\frac{2\pi i}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» قطبهای تابع $f(z)$، $z=0$ و $z=w$ هستند، واضح است $z=0$ خارج ناحیه C است با فرض اینکه $z=w$ درون ناحیه باشد، داریم:

$$\underset{z=w}{\text{Res}}\, f(z)=\frac{w^2-w+1}{w}\quad ;\quad I=\oint_C\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}dz=2\pi i(\frac{w^2-w+1}{w})\Rightarrow f'(w)=2\pi i(1-\frac{1}{w^2})\Rightarrow f'(2)=\frac{3\pi i}{2}$$

مثال ۱۳: حاصل $I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz$ حول دایره C به معادله $|z|=3$ کدام است؟

۱) $t-1-e^{-t}\cos t$ ۲) $t-1+e^{-t}\cos t$ ۳) $\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t$ ۴) $\frac{t-1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t}\cos t$

پاسخ: گزینه «۳» ریشه‌های مخرج یعنی $z=-1\pm i$ و $z=0$ هر سه قطب‌های تابع هستند که تمام آن‌ها درون ناحیه $|z|=3$ قرار دارند. $z=-1\pm i$ قطب ساده و $z=0$ قطب مرتبه دوم تابع می‌باشد. ابتدا مانده تابع را در $z=-1+i$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} g(z)=e^{zt} \Rightarrow g(-1+i)=e^{(-1+i)t} \\ h(z)=z^2(z^2+2z+2) \Rightarrow h'(z)=2z(z^2+2z+2)+(2z+2)z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h'(-1+i)=2(-1+i)[(-1+i)^2+2(-1+i)+2]+[2(-1+i)+2][-1+i]^2$$
$$=(-2+2i)[+1-1-2i-2+2i+2]+[-2+2i+2][+1+(-1)-2i]=(-2+2i)(0)+(2i)(-2i)=4$$

پس مانده در $z_1=-1+i$ برابر $\frac{g(z_1)}{h'(z_1)}$ یعنی $\frac{e^{(-1+i)t}}{4}$ می‌باشد به همین ترتیب مانده در $z_2=-1-i$ برابر $\frac{e^{(-1-i)t}}{4}$ به دست می‌آید. اما برای محاسبه مانده در $z=0$ چون یک قطب مرتبه دوم است، بهتر است از فرمول حد استفاده کنیم:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\times\frac{d}{dz}[(z-0)^2\times\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}]=\lim_{z\to 0}\frac{(te^{zt})(z^2+2z+2)-(2z+2)e^{zt}}{(z^2+2z+2)^2}=\frac{t-1}{2}$$

بنابراین مجموع مانده‌ها برابر با مقدار مقابل است:

$$\frac{t-1}{2}+\frac{e^{(-1+i)t}}{4}+\frac{e^{(-1-i)t}}{4}=\frac{t-1}{2}+\frac{e^{-t}}{2}[\underbrace{\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}_{\cos t}]$$

پس مجموع مانده‌ها برابر با مقدار $\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t$ خواهد بود. از طرفی داریم:

$$\oint\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz=2\pi i\ (\text{مجموع مانده‌ها}) \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz=\text{مجموع مانده‌ها}=\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t$$

مثال ۱۴: حاصل $\oint_C\frac{Ln(1+z^2)}{(2z-i)^2}dz$ که در آن C، منحنی $|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{3}$ می‌باشد و جهت انتگرال‌گیری مثبت است، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $-\frac{16\pi}{3}$ ۴) $-\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» تابع زیر انتگرال در نقاط شاخه‌ای تابع $Ln(1+z^2)$ و همچنین ریشه‌های مخرج کسر غیر تحلیلی می‌باشد:

$$1+z^2=0 \Rightarrow z=\pm i\ ,\ 2z-i=0 \Rightarrow z=\frac{i}{2}$$

برای این‌که ببینیم نقاط فوق داخل یا روی C قرار دارند، باید به جای z در معادله $|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{3}$ مقادیر فوق را قرار دهیم:

$$|i-\frac{i}{2}|=|\frac{1}{2}i|=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\ ,\ |-i-\frac{i}{2}|=|-\frac{3}{2}i|=\frac{3}{2}>\frac{1}{3}$$

بنابراین دو نقطه $z=\pm i$ درون ناحیه نیستند: $z=\frac{i}{2}$ را امتحان می‌کنیم. چون $|\frac{i}{2}-\frac{i}{2}|=0<\frac{1}{3}$ پس این نقطه درون ناحیه قرار دارد. اما $z=\frac{i}{2}$ قطب مرتبه دوم تابع است. اگر مخرج را به صورت $4(z-\frac{i}{2})^2$ بنویسیم، داریم:

$$\underset{z\to\frac{i}{2}}{Res}f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{d}{dz}[(z-\frac{i}{2})^2f(z)]=\lim_{z\to\frac{i}{2}}(\frac{Ln(1+z^2)}{4})'=\frac{1}{4}(\frac{2z}{1+z^2})\Big|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{1}{4}(\frac{i}{1-\frac{1}{4}})=\frac{i}{3}$$

پس حاصل انتگرال فوق برابر $I=(2\pi i)(\frac{i}{3})=-\frac{2\pi}{3}$ می‌باشد.

مثال ۱۵: اگر $I_1=\int_{C_1} e^{\frac{1}{z-i}}dz$، که در آن C_1 منحنی بسته‌ی ساده‌ای است که $z=+i$ را قطع نمی‌کند و $I_2=\int_{C_2} e^{\frac{z}{z+i}}dz$ که در آن C_2 منحنی بسته‌ی ساده‌ای است که $z=-i$ را قطع نمی‌کند، آن‌گاه کدام گزینه زیر درست نیست؟ (C_1 و C_2 در جهت مثلثاتی پیموده شده‌اند.)

۱) مقدار I_1+I_2 می‌تواند با مقدار I_1-I_2 برابر باشد.
۲) مقدار I_1-I_2 نمی‌تواند با مقدار $2\pi e$ برابر باشد.
۳) مقدار I_2+I_1 نمی‌تواند برابر با $2\pi e$ شود.
۴) مقدار I_2-I_1 می‌تواند برابر با $-2\pi i$ باشد.

پاسخ: گزینه «۳» سؤال جالبی است که البته سخت نیست و باید کمی دقت کرد! هر کدام از دو انتگرال می‌توانند دو مقدار داشته باشند، که یکی از این مقدارها صفر است. یعنی اگر $z=i$ خارج از منحنی C_1 باشد، آن‌گاه تابع زیر انتگرال I_1 در داخل و روی منحنی تحلیلی است و مقدارش صفر می‌شود. همین‌طور برای انتگرال I_2 اگر $z=-i$ خارج منحنی C_2 باشد، در این صورت تابع تحت انتگرال در داخل و روی منحنی C_2 تحلیلی است و لذا حاصل انتگرال I_2 صفر است. پس I_1 و I_2 می‌توانند صفر هم باشند.

اما اگر $z=i$ داخل منحنی C_1 باشد، آن‌گاه طبق قضیه مانده‌ها داریم:
$$I_1=2\pi i\,\mathrm{Res}f(z)\Big|_{z=i}$$

برای محاسبه‌ی مانده باید ضریب $\frac{1}{z-i}$ را در بسط لوران $f(z)$ حساب کنیم و این کار راحتی است:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\xrightarrow{\text{در طرفین به جای } z\text{، } \frac{1}{z-i} \text{ قرار می‌دهیم}} e^{\frac{1}{z-i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n}\Rightarrow e^{\frac{1}{z-i}}=1+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2!(z-i)^2}+\cdots$$

واضح است ضریب $\frac{1}{z-i}$ مانده تابع در $z=i$ است که ملاحظه می‌شود برابر با یک است، پس داریم:
$$I_1=2\pi i\times 1=2\pi i$$

به همین شکل می‌توان گفت I_2 نیز مقدار دیگری به جز صفر دارد. یعنی اگر $z=-i$ داخل منحنی C_2 باشد، آن‌گاه داریم:
$$I_2=2\pi i[\mathrm{Res}f(z)\Big|_{z=-i}]$$

برای محاسبه‌ی مانده باید ضریب $\frac{1}{z+i}$ را در بسط لوران $e^{\frac{z}{z+i}}$ حساب کنیم. برای این منظور عبارت $-i$ را به صورت کسر اضافه و کم می‌کنیم:

$$e^{\frac{z}{z+i}}=e^{\frac{(z+i-i)}{z+i}}=e^{\frac{z+i}{z+i}}\times e^{-\frac{i}{z+i}}=e\times e^{-\frac{i}{z+i}}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{-i}{z+i})^n}{n!}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!(z+i)^n}=e(1+\frac{-i}{z+i}+\cdots)$$

واضح است ضریب $\frac{1}{z+i}$ برابر با $-ie$ است و لذا داریم:
$$I_2=2\pi i(-ie)=2\pi e$$

خُب I_1 می‌تواند هم صفر باشد و هم $2\pi i$، همچنین I_2 می‌تواند هم صفر باشد و هم $2\pi e$ حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): اگر I_1 و I_2 هر دو صفر در نظر گرفته شوند، I_1+I_2 می‌تواند با I_1-I_2 برابر باشد، پس این گزینه صحیح است.

بررسی گزینه (۲): اگر $I_1=0$ و $I_2=2\pi e$، در نظر گرفته شود، آن‌گاه مقدار I_1-I_2 می‌تواند برابر با $-2\pi e$ شود. اما نمی‌تواند برابر با $2\pi e$ شود، پس این گزینه هم صحیح است.

بررسی گزینه (۳): اگر $I_1=0$ و $I_2=2\pi e$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه مقدار I_1+I_2 می‌تواند برابر با $2\pi e$ شود. پس جمله‌ی این گزینه **غلط** است، چون گفته I_1+I_2 نمی‌تواند برابر با $2\pi e$ شود.

بررسی گزینه (۴): اگر $I_1=2\pi i$ و $I_2=0$، آن‌گاه I_2-I_1 می‌تواند برابر با $-2\pi i$ شود. پس جمله‌ی این گزینه **صحیح** است.

تذکر: توجه به دو کلمه‌ی «می‌تواند» و «نمی‌تواند» و همچنین توجه به این نکته که نقاط می‌توانند خارج منحنی‌های C_1 و C_2 هم باشند، کلید اصلی حل این سؤال است.

مثال ۱۶: حاصل $I=\oint_{|z|=3}\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}dz$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $4e^4\pi i$ ۲) $2e^2\pi i$ ۳) $4e^2\pi i$ ۴) $2e^4\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه تابع تحت انتگرال دارای قطب مرتبه سوم در $z=1$ است و این نقطه درون ناحیه $|z|=3$ قرار دارد، لذا مانده تابع $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ را حساب می‌کنیم. باید بسط لوران تابع $f(z)$ را حول $z=1$ بنویسیم. برای این موضوع تغییر متغیر $z-1=u$ و به عبارت دیگر $z=u+1$ لازم است (تغییر متغیر به این دلیل است که بتوانیم بسط تیلور تابع را حول $u=0$ بنویسیم.)

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2(1+u)}}{u^3}=\frac{e^2.e^{2u}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}[1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\cdots]$$

$$\Rightarrow\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^2}{(z-1)^3}[1+2(z-1)+\frac{2^2(z-1)^2}{2!}+\frac{2^3(z-1)^3}{3!}+\cdots]=[\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots]$$

همان‌طور که معلوم است مانده در $z=1$ برابر $2e^2$ می‌باشد و لذا حاصل انتگرال برابر $I=2\pi i\times 2e^2=4e^2\pi i$ می‌باشد.

روشی دیگر: البته از فرمول کلی انتگرال کوشی می‌توانیم این تست را راحت‌تر حل کنیم.

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz\quad,\quad n=1,2,3,\cdots$$

در این تست $a=1$ ، $n=2$ و $f(z)=e^{2z}$ می‌باشد:

$$f(z)=e^{2z}\Rightarrow f'(z)=2e^{2z}\Rightarrow f''(z)=4e^{2z}\Rightarrow f''(1)=4e^2$$

یعنی داریم:

$$f''(1)=\frac{2!}{2\pi i}\oint\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}dz\xrightarrow{f''(1)=4e^2}\oint\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}dz=4e^2\pi i$$

مثال ۱۷: حاصل انتگرال $I=\oint_C\frac{2e^z}{z-\sin z}dz$ در صورتی که C دایره $|z|=1$ باشد، کدام است؟

۱) $6\pi i$ ۲) $12\pi i$ ۳) $\frac{66\pi i}{5}$ ۴) $\frac{33\pi i}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» واضح است $z=0$ قطب تابع می‌باشد، اما چون قطب مرتبه سوم می‌باشد، استفاده از فرمول‌های مانده نمی‌تواند جالب باشد. نوشتن بسط دو تابع e^z و $\sin z$ و تقسیم صورت بر مخرج و تعیین ضریب $\frac{1}{z}$ بهترین راه است.

$$f(z)=\frac{2e^z}{z-\sin z}=\frac{2(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)}{z-(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots)}=\frac{2+2z+z^2+\frac{2}{3!}z^3+\cdots}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots}=\frac{2+2z+z^2+\frac{2}{3!}z^3}{\frac{z^3}{3!}(1-\frac{3!}{5!}z^2+\cdots)}$$

$$\frac{6}{z^3}(2+2z+z^2+\cdots)(\frac{1}{1-\frac{6z^2}{120}+\cdots})=\frac{6}{z^3}(2+2z+z^2)(1+\frac{6z^2}{120}+\cdots)=\frac{6}{z^3}(2+2z+\underbrace{z^2+\frac{12z^2}{120}}_{(1+\frac{1}{10})z^2}+\cdots)\Rightarrow \text{ضریب}\ \frac{1}{z}=6(1+\frac{1}{10})=\frac{66}{10}=\frac{33}{5}$$

لذا حاصل انتگرال برابر $I=2\pi i\times\frac{33}{5}=\frac{66\pi i}{5}$ خواهد بود.

مثال ۱۸: حاصل $I=\int_{|z|=2}\frac{\text{tghz}}{z}dz$، چند برابر i است؟ (با کمی تغییر از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Harward)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) π

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$f(z)=\frac{\tanh z}{z}=\frac{\sinh z}{z\cosh z}$$

در ناحیه $|z|<2$ نقاط تکین تابع عبارتند از: $z=0,\pm\frac{i\pi}{2}$.

$$z\cosh z=0 \Rightarrow z=0 \quad \text{و} \quad z=i(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$I=\oint_{|z|=2} f(z)dz=2\pi i[\text{Res}(f(z),0)+\text{Res}(f(z),\frac{i\pi}{2})+\text{Res}(f(z),\frac{-i\pi}{2})]$$

نقطه‌ی $z=0$ نقطه‌ی تکین رفع شدنی f است زیرا: $\lim_{z\to 0}\frac{\tanh z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{z}=1$ بنابراین مقدار مانده تابع در این نقطه برابر صفر می‌شود.

فرض کنیم $p(z)=\frac{\sinh z}{z}$ و $q(z)=\cosh z$. پس $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$. برای محاسبه‌ی سایر مانده‌ها از فرمول $\frac{p(z)}{q'(z)}$ استفاده می‌کنیم.

$$p(\pm\frac{i\pi}{2})\neq 0\ ,\ q(\pm\frac{i\pi}{2})=0\ ,\ q'(\pm\frac{i\pi}{2})\neq 0 \to \text{Res} f(z)=\frac{p(z)}{q'(z)}$$

$$\text{Res}(f(z),\pm\frac{i\pi}{2})=\frac{p(z)}{q'(z)}\bigg|_{z=\pm\frac{i\pi}{2}}=\frac{\sinh z}{z}\times\frac{1}{\sinh z}\bigg|_{z=\pm\frac{i\pi}{2}}=\mp\frac{2}{\pi}i \Rightarrow I=2\pi i(0+\frac{2}{\pi}i-\frac{2}{\pi}i)=0$$

توضیح: بدون محاسبات فوق هم می‌توانستیم بگوییم؛ چون $f(z)$ تابعی زوج است و نقاط تکین داخل مرز دو نقطه‌ی قرینه‌ی هم می‌باشد و همچنین نقطه‌ی صفر تکین دیگر می‌باشد، پس مجموع مانده‌ها و حاصل انتگرال صفر می‌شود.

مثال ۱۹: حاصل انتگرال $I=\oint_C \sin(\frac{z}{z-1})dz$ وقتی مسیر C^+ تصویر خط $\text{Re}(w)=1$ تحت نگاشت $z=e^w$ می‌باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $-2\pi i\cos(1)$ ۳) $2\pi i\cos(1)$ ۴) $2\pi i\sin(1)$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب فصل نگاشت می‌دانیم تصویر خط $\text{Re}(w)=1$ تحت نگاشت $z=e^w$ دایره‌ای به شعاع e و به مرکز مبدأ مختصات است لذا نقطه $z=1$ داخل این ناحیه خواهد بود. از طرفی داریم:

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin(1+\frac{1}{z-1})=\cos 1.\sin\frac{1}{z-1}+\sin 1.\cos\frac{1}{z-1}$$

$$I=(\cos 1)\oint\sin\frac{1}{z-1}dz+(\sin 1)\oint\cos\frac{1}{z-1}dz=(\cos 1)2\pi i(z=1 \text{ در } \sin\frac{1}{z-1} \text{ مانده})+(\sin 1)2\pi i(z=1 \text{ در } \cos\frac{1}{z-1} \text{ مانده})$$

در بسط لوران $\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots$ ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر با $\underline{1}$ است و در بسط لوران $\cos\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots$ ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر با صفر است. بنابراین داریم:

$$I=2\pi i(\cos 1)$$

مثال ۲۰: حاصل $I=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$، در صورتی که دایره در جهت مثلثاتی پیموده شده باشد، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi i}{2}\sin 1$ ۳) $2\pi i(\sin 1)$ ۴) $-2\pi i(\sin 1)$

پاسخ: گزینه «۴» نقطه‌ی $z=0$ تکین اساسی و نقطه‌ی $z=1$ قطب ساده‌ی تابع تحت انتگرال است. توجه کنید که $z=1$ درون ناحیه $|z|=\frac{1}{2}$ قرار ندارد، بنابراین کافیست مانده تابع در نقطه‌ی $z=0$ حساب شود. با نوشتن بسط دو تابع و ضرب آن‌ها در یکدیگر داریم:

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}=-(1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-+\cdots)$$

خب، حالا به این قسمت خوب دقت کنید. از ضرب عدد $\underline{1}$ از پرانتز اول در $\frac{1}{z}$ از پرانتز دوم، ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $\underline{1}$ به دست می‌آید، از ضرب z^2 از پرانتز اول در $-\frac{1}{3!z^3}$ از پرانتز دوم، ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $-\frac{1}{3!}$ به دست می‌آید، به همین شکل ضریب‌های $\frac{1}{z}$ به شکل مقابل خواهند بود: $-(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots)$

با کمی دقت واضح است مجموع اعداد داخل پرانتز برابر $\sin 1$ می‌باشد، لذا مانده در نقطه‌ی $z=0$ برابر $-\sin 1$ است و بنابراین حاصل انتگرال برابر $-2\pi i(\sin 1)$ می‌شود.

مثال ۲۱: اگر $0<\theta<\pi$، آن‌گاه حاصل انتگرال $I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{z^n}{1-2z\cos\theta+z^2}dz$ در صورتی که C در جهت مثبت طی شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\sin\theta}{\sin n\theta}$ ۲) $-\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ ۳) $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ ۴) $-\frac{\sin\theta}{\sin n\theta}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا ریشه‌های مخرج را تعیین می‌کنیم:

$$1-2z\cos\theta+z^2=0 \Rightarrow \Delta=4\cos^2\theta-4=-4\sin^2\theta$$

در فاصله‌ی $0<\theta<\pi$ علامتِ $\sin\theta$ مثبت است. بنابراین داریم:

$$z=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sin\theta}{2}=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$$

نقاط تکین $z_1=e^{i\theta}$ و $z_2=e^{-i\theta}$ هر دو درون دایره‌ی $|z|=2$ قرار دارند. مانده‌ی f را در این نقاط تعیین می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z^n}{1-2z\cos\theta+z^2}\Rightarrow\frac{p(z)}{q'(z)}=\frac{z^n}{-2\cos\theta+2z}\Rightarrow \operatorname{Res}(f,e^{\pm i\theta})=\frac{p(e^{\pm i\theta})}{q'(e^{\pm i\theta})}=\frac{e^{\pm in\theta}}{-2\cos\theta+2e^{\pm i\theta}}$$

دقت کنید که $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ است. به این ترتیب داریم:

$$\text{مجموع مانده‌ها}=\frac{e^{in\theta}}{-2\cos\theta+2e^{i\theta}}+\frac{e^{-in\theta}}{-2\cos\theta+2e^{-i\theta}}=\frac{e^{in\theta}}{2i\sin\theta}-\frac{e^{-in\theta}}{2i\sin\theta}=\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i\sin\theta}=\frac{2i\sin n\theta}{2i\sin\theta}=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

مثال ۲۲: مقدار انتگرال مختلط $\oint_{|z|=1}\left(e^{z+\frac{1}{z}}\right)dz$ در جهت مثلثاتی برابر است با:

۱) 0 ۲) $2\pi i$ ۳) $2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ ۴) $2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^z.e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0}\left[e^{(z+\frac{1}{z})}\right]=\text{ضریب جمله } \frac{1}{z} \text{ در عبارت فوق}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\Rightarrow\oint_{|z|=1}e^{(z+\frac{1}{z})}dz=2\pi i\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

مثال ۲۳: فرض کنید $w=f(z)$ نگاشتی همدیس باشد که ناحیه‌ی D با مساحت π در صفحه‌ی $x-y$ را به دیسک D' به مرکز مبدأ در صفحه‌ی $u-v$ می‌نگارد. اگر $|f'(z)|=2$ و C مرز ناحیه‌ی D' باشد، آن گاه حاصل $I=\oint_C\frac{z^2dz}{(z-\frac{\pi i}{2})^2\sin^2 iz}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $-2\pi^2$ ۳) $2\pi i$ ۴) π^2

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که در این سؤال منحنی C مرز ناحیه‌ی D نیست، بلکه مرز ناحیه‌ی D' است. بنابراین مجبوریم از اطلاعات خود در مورد نگاشت‌ها استفاده کرده و D' را شناسایی کنیم. البته از صورت سؤال می‌دانیم D' یک دیسک به مرکز مبدأ است، فقط باید شعاع آن را معلوم کنیم. مساحت ناحیه‌ی D برابر با π است. همان‌طور که می‌دانید اگر $|f'(z)|^2=k$ باشد (k عددی ثابت است)، آنگاه نگاشت $w=f(z)$ مساحت ناحیه‌ی D را در k ضرب می‌کند. در این مثال $k=2^2=4$ است. پس این نگاشت مساحت D را در ۴ ضرب می‌کند، در نتیجه D' یک دیسک به مساحت 4π است، پس شعاع آن ۲ خواهد بود. حالا می‌دانیم که C دایره‌ی $|z|=2$ است. دو نقطه‌ی $z=\frac{i\pi}{2}$ و $z=0$ نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\frac{z^2}{(z-\frac{\pi i}{2})^2\sin^2 iz}$ هستند که درون مرز C قرار دارند. (سایر ریشه‌های $\sin iz$ درون مرز C قرار ندارند.)

نقطه $z=0$، تکین برداشتنی است زیرا داریم:

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^2}{(z-\frac{\pi i}{2})^2\sin^2 iz}=\lim_{z\to0}\frac{z^2}{(z-\frac{\pi i}{2})^2(iz)^2}=\lim_{z\to0}\frac{-1}{(z-\frac{\pi i}{2})^2}=\frac{4}{\pi^2}$$

بنابراین مانده تابع $f(z)$ در نقطه $z=0$ برابر صفر می‌باشد.

نقطه $z=\frac{i\pi}{2}$، قطب مرتبه دوم تابع $f(z)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\phi(z)=(z-\frac{\pi i}{2})^2f(z)=\frac{z^2}{\sin^2 iz}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{i\pi}{2}}f(z)=\phi'(z)\Big|_{z=\frac{i\pi}{2}}=\frac{2z(\sin^2 iz)-2iz^2\cos iz\sin iz}{(\sin^2 iz)^2}\Big|_{z=\frac{i\pi}{2}}=\frac{2\frac{i\pi}{2}\sin^2(-\frac{\pi}{2})-2i\cos(-\frac{\pi}{2})\sin(-\frac{\pi}{2})(\frac{i\pi}{2})^2}{(\sin^2(-\frac{\pi}{2}))^2}=i\pi$$

$$\Rightarrow\oint_{|z|=2}f(z)\,dz=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=\frac{i\pi}{2}}f(z)\right]=2\pi i(i\pi)=-2\pi^2$$

مثال ۲۴: حاصل $I=\int_{|z|=2} e^{e^{\frac{1}{z}}}dz$ کدام است؟

۱) $3\pi ei$ ۲) $4\pi ei$ ۳) πei ۴) $2\pi ei$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم که بسط $e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$ برای هر عدد مختلطِ u معتبر است. بنابراین داریم:

$$e^{e^{\frac{1}{z}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{\frac{1}{z}})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{\frac{n}{z}}$$

پس داریم:

$$I=\int_C e^{e^{\frac{1}{z}}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_C e^{\frac{n}{z}}dz$$

تابع $f(z)=e^{\frac{n}{z}}$ در $z=0$ قطب اساسی دارد. با استفاده از بسط لوران آن داریم:

$$f(z)=e^{\frac{n}{z}}=1+\frac{n}{z}+\frac{n^2}{2!z^2}+\cdots$$

بنابراین ضریب $\frac{1}{z}$ در این بسط برابر است با n:

$$\operatorname{Res}(f(z),0)=n$$

به این ترتیب: $\int_C e^{\frac{n}{z}}dz=2\pi in$. با جایگذاری جواب انتگرال در I خواهیم داشت:

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2\pi in=2\pi i\sum\frac{n}{n!}=2\pi i(0+\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots)=2\pi i(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots)\ =\mathbf{2\pi ie}$$

(دقت کنید که اگر در بسط مک لورن e^z مقدار $z=1$ را قرار دهید: $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ است).

مثال ۲۵: حاصل $I=\oint_C \frac{\cot g(\pi z)\cot gh(\pi z)}{z^3}dz$ در صورتی که C دایره $|z-1|=\frac{1}{2}$ باشد، کدام است؟

۱) $\pi i\coth(\pi)$ ۲) $2i\coth(\pi)$ ۳) 0 ۴) $2\pi\tanh(\pi)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که تابع زیر انتگرال به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$f(z)=\frac{\cot g(\pi z)\cot gh(\pi z)}{z^3}=\frac{\cos(\pi z)\cosh(\pi z)}{z^3\sin(\pi z)\sinh(\pi z)}$$

به وضوح $z=0$ ریشه‌ی مخرج کسر است که درون ناحیه $|z-1|=\frac{1}{2}$ قرار ندارد. حالا سراغ قطب‌های دیگر تابع می‌رویم:

$$\sin\pi z=0\Rightarrow z=n\quad,\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

از بین این قطب‌ها، فقط $z=1$ درون ناحیه $|z-1|=\frac{1}{2}$ قرار دارد فعلاً این را در حافظه نگه دارید تا قطب‌های دیگر را هم بررسی کنیم:

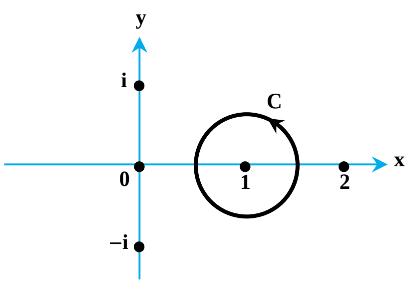
$$\sinh\pi z=0\Rightarrow e^{\pi z}-e^{-\pi z}=0\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } e^{\pi z}}e^{2\pi z}-1=0\Rightarrow e^{2\pi z}=1\Rightarrow e^{2\pi z}=e^{i(2n\pi)}\Rightarrow z=in\quad,\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

ملاحظه می‌کنید، تمام قطب‌ها بیرون ناحیه $|z-1|=\frac{1}{2}$ هستند. پس فقط همان $z=1$ درون ناحیه قرار دارد و لذا داریم:

$$I=2\pi i\operatorname{Res}_{z=1}f(z)$$

با توجه به آنکه $z=1$ فقط ریشه‌ی $\sin\pi z$ است. یک قطب مرتبه یک خواهد بود. برای محاسبه‌ی مانده‌ی f در $z=1$ می‌نویسیم:

$$\operatorname{Res}_{z=1}f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{\cos(\pi z)\cosh(\pi z)}{z^3\sin(\pi z)\sinh(\pi z)}$$



از هوپیتال استفاده می‌کنیم اما توجه داشته باشید که در صورت و مخرج فقط از عاملی که صفر می‌شود مشتق می‌گیریم. هرگاه حاصلضرب چند عبارت را داشته باشیم و فقط یکی از آن‌ها صفر شود، کافی است مشتق آن عامل را گرفته و در سایر عوامل ضرب کنیم.

$$\operatorname{Res}_{z=1}f(z)=\lim_{z\to1}\frac{(1)\cos(\pi z)\cosh(\pi z)}{z^3\pi\cos(\pi z)\sinh(\pi z)}=\frac{\cosh(\pi)}{\pi\sinh(\pi)}=\frac{1}{\pi}\cot gh(\pi)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$I=2\pi i\frac{1}{\pi}\cot gh(\pi)=2i\cot gh(\pi)$$

مثال ۲۶: اگر C مرز ناحیه‌ای باشد که از تبدیل پاره‌خط واصل مبدأ بـه نقطـه‌ی $2\pi i$ توسـط نگاشـت $w = 2e^z$ حاصـل شـده، آن‌گـاه مقـدار $\frac{1}{2\pi}\int_C (z-i)^{1394}\sin(\frac{z}{z-i})dz$ کدام است؟

۱) $-\frac{\cos 1}{1395!}$ ۲) $\frac{\cos 1}{1394!}$ ۳) $-\frac{\sin 1}{1394!}$ ۴) $\frac{\sin 1}{1395!}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا وضعیت منحنی C را مشخص می‌کنیم. برای نگاشت $w = 2e^z$ داریم: $w = 2e^{x+iy} = 2e^x e^{iy} \Rightarrow r = 2e^x \ , \ \theta = y$

روی پاره‌خط داده شده، داریم: $x = 0$ و $0 \le y \le 2\pi$، بنابراین در تصویر ایجاد شده از آن خواهیم داشت: $r = 2e^0 = 2$ و $0 \le \theta \le 2\pi$. پس منحنی C دایره‌ی $|z| = 2$ است. از طرفی تابع $f(z) = (z-i)^{1394}\sin(\frac{z}{z-i})$ در $z_0 = i$ قطب اساسی دارد و این قطب، درون مرز بسته C است. با تغییر متغیر $t = z - i$ سعی می‌کنیم ضریب $\frac{1}{t}$ را در بسط لوران f به‌دست آوریم.

$$f(z) = (z-i)^{1394}\sin(\frac{z}{z-i}) = t^{1394}\sin(\frac{t+i}{t}) = t^{1394}\sin(1+\frac{i}{t}) = t^{1394}[\sin 1\cos\frac{i}{t} + \cos 1\sin\frac{i}{t}]$$

$$\Rightarrow f(z) = t^{1394}[\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\frac{i}{t})^{2n} + \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\frac{i}{t})^{2n+1}]$$

حالا باید ببینیم در کدام جمله از بسطها $\frac{1}{t^{1395}}$ ایجاد می‌شود. (تا وقتی در t^{1394} که پشت کروشه است ضرب می‌شود، $\frac{1}{t}$ را تولید کند.)

تابع $\cos\frac{i}{t}$ زوج است و در بسط آن هم هیچ توان فردی ظاهر نمی‌شود. بنابراین تنها جایی‌که $\frac{1}{t^{1395}}$ به‌وجود می‌آید جمله‌ای از بسط $\sin\frac{i}{t}$ است کـه در آن $2n+1 = 1395$ باشد. پس داریم:

$$t^{1394}[\cos 1\frac{(-1)^{697}}{1395!}(\frac{i}{t})^{1395}] = -\frac{\cos 1}{1395!}i^{1395}\frac{1}{t}$$

دقت کنید که اگر $2n+1 = 1395$ باشد، آنگاه $n = 697$ است. همچنین داریم:

$$i^{1395} = (i^2)^{697} \times i = -i$$

به این ترتیب ضریب $\frac{1}{t}$، یعنی مانده‌ی $f(z)$ در $z_0 = i$ برابر است با:

$$Res(f, i) = -\frac{\cos 1}{1395!}i^{1395} = \frac{\cos 1}{1395!}i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_C (z-i)^{1394}\sin(\frac{z}{z-i})dz = \frac{1}{2\pi}2\pi i(\frac{\cos 1}{1395!}i) = -\frac{\cos 1}{1395!}$$

مثال ۲۷: حاصل $I = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2\sinh z}$ در صورتی‌که دایره در جهت مثبت پیموده شده باشد، کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه Harward)

۱) $-\frac{2\pi i}{3}$ ۲) $\frac{2\pi i}{3}$ ۳) $\frac{\pi i}{3}$ ۴) $-\frac{\pi i}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که ریشه‌های مخرج، ریشـه‌های $z^2 = 0$ یعنـی $z = 0$ و ریشـه‌های معادلـه‌ی $\sinh z = 0$ هسـتند. ابتـدا مانـده در $z = 0$ را حساب می‌کنیم. با توجه به اینکه $z = 0$ ریشه‌ی $\sinh z = 0$ هم می‌باشد و توان z هم در مخرج ۲ می‌باشد، لذا استفاده از فرمول مشتق‌گیـری زیاد مقرون به‌صرفه نیست! راه ساده‌تر، نوشتن بسط $\sinh z$ و سپس استفاده از فرمول $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - + \cdots\cdots$ می‌باشد. با نوشتـن بسـط مک‌لورن تابع $\sinh z$ داریم:

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{z^2\sinh z} = \frac{1}{z^2(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots)} = \frac{1}{z^3(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots)}$$

حالا خوب دقت کنید؛ در مخرج کسر عبارت داخل پرانتز به صورت $1+u$ می‌باشد که u به سمت صفر میل مـی‌کنـد. در واقـع عبـارت بعـد از عـدد (۱) را کلاً u در نظر می‌گیریم. پس می‌توانیم طبق فرمول رابطه‌ی زیر را بنویسیم:

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots)} = \frac{1}{z^3}[1 - (\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots) + (\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots)^2 - + \cdots]$$

ما به دنبال ضریب $\frac{1}{z}$ در بسط فوق هستیم، بنابراین در داخل کروشه تا جایی عبارت‌ها برای ما مهم هستند که z^2 تولید کند (برای ایـن کـه بعـد از ضـرب شدن در $\frac{1}{z^3}$ برای ما $\frac{1}{z}$ ایجاد شود)، بنابراین حتی نوشتن پرانتز دوم هم لازم نبود، چون که کوچک‌ترین جمله‌ی آن $\frac{z^2}{3!}$ است که تازه قرار اسـت بـه تـوان (۲) هم برسد! بنابراین z^2 فقط در پرانتز اول ایجاد می‌شود، پس داریم:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}(\frac{1}{z}) + - \cdots\cdots$$

پس ضریب $\frac{1}{z}$ و یا همان مانده در $z=0$ برابر با $-\frac{1}{3!}=\frac{-1}{6}$ است. پس حاصل انتگرال تا اینجا برابر با $2\pi i\times(-\frac{1}{6})=-\frac{\pi i}{3}$ است. حالا باید سراغ ریشه‌های غیرصفر $\sinh z=0$ برویم اگر سایر ریشه‌ها درون دایره $|z|=1$ قرار داشتند که حاصل انتگرال تغییر می‌کند و اگر سایر ریشه‌ها درون دایره $|z|=1$ قرار نداشتند، حاصل انتگرال همان $-\frac{\pi i}{3}$ است. به راحتی می‌توان نشان داد سایر ریشه‌ها درون دایره $|z|=1$ قرار ندارند و حاصل انتگرال همان $-\frac{\pi i}{3}$ است.

$$\sinh z=0 \Rightarrow \frac{e^z-e^{-z}}{2}=0 \Rightarrow e^{2z}=1 \Rightarrow e^{2z}=e^{2k\pi i} \Rightarrow z=k\pi i \Rightarrow z=0\,,\pm\pi i\,,\pm 2\pi i$$

ملاحظه می‌شود جز $z=0$ هیچ‌کدام از ریشه‌ها درون دایره $|z|=1$ قرار ندارند. بنابراین حاصل انتگرال همان $\frac{-\pi i}{3}$ است.

توضیح: دقت کنید؛ در قسمت محاسبه‌ی مانده در $z=0$ به جای استفاده از بسط می‌توانستید صورت را بر مخرج تقسیم کرده و ضریب $\frac{1}{z}$ در خارج قسمت را به‌دست آورید. راه‌حل تقسیم کمی زمان‌بر است، ولی در عین حال یک روش استاندارد و بدون نیاز به خلاقیت است.

مثال ۲۸: اگر C منحنی بسته‌ی ساده $|z|=2$ باشد، که در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است، حاصل $I=\oint_C ze^{\frac{z}{(z-1)^2}}dz$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $2\pi i$ ۲) $-5\pi i$ ۳) $5\pi i$ ۴) $-2\pi i$

پاسخ: گزینه «۲» تنها نقطه‌ای که تابع زیر انتگرال در آن تحلیلی نیست، $z=1$ است. بنابراین باید مانده در این نقطه را حساب کنیم. برای این منظور لازم است ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع حساب شود.

$$f(z)=ze^{\frac{z}{(z-1)^2}}=ze^{\frac{z-1+1}{(z-1)^2}}=z.e^{\frac{1}{z-1}}.e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$$

حالا می‌توان با توجه به بسط مک‌لورن e^u، بسط تابع $f(z)$ را نوشت:

$$f(z)=z[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots][1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}+\cdots]$$

با نوشتن z به صورت $(z-1)+1$، سعی می‌کنیم عامل $z-1$ را ایجاد کرده و $f(z)$ را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(z)=[(z-1)+1][1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots][1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}+\cdots]$$

یکبار $(z-1)$ را و یکبار عدد ۱ را در کروشه اول، ضرب می‌کنیم:

$$f(z)=[(z-1)+1+\frac{1}{2!(z-1)}+\cdots][1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}+\cdots]+[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots][1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}+\cdots]$$

در اولین حاصل‌ضرب از ضرب $(z-1)$ در $\frac{1}{(z-1)^2}$، همچنین ضرب $\frac{1}{2!(z-1)}$ در یک، جمله‌ی $\frac{1}{z-1}$ ایجاد می‌شود. در حاصل‌ضرب دوم، فقط با ضرب $\frac{1}{z-1}$ در ۱، این جمله را خواهیم داشت. همان‌طور که می‌بینید ضریب $\frac{1}{z-1}$، برابر مقدار زیر است:

$$\frac{1}{z-1}\ \text{ضریب}=1+\frac{1}{2!}+1=\frac{5}{2}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با $I=-2\pi i\times\frac{5}{2}=-5\pi i$ می‌شود. (دقت کنید که جهت داده شده در خلاف جهت اصلی است)

مثال ۲۹: اگر $f(z)=\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}$، و C دایره $|z|=\frac{5}{2}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\oint_C f(z)dz$، چند برابر $\frac{\pi}{8}$ است؟

۱) $-54i$ ۲) $-108i$ ۳) $-27i$ ۴) $-216i$

پاسخ: گزینه «۳» برای به دست آوردن مانده $f(z)$ در $z=1$ به صورت مقابل عمل می‌کنیم: $t=z-1 \Rightarrow z=t+1\,,\ z-2=t-1\,,\ z-3=t-2$

با نوشتن بسط $\frac{1}{t-1}$ و $\frac{1}{t-2}$ داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{t-1}=-\frac{1}{1-t}=-(1+t+t^2+\cdots)\\[2mm] \frac{1}{t-2}=-\frac{1}{2-t}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{t}{2}})=\frac{-1}{2}(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{8}+\cdots)\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{(t+1)^3}{t^4}\times\frac{1}{t-1}\times\frac{1}{t-2}=\frac{1}{2}[\frac{(t^3+3t^2+3t+1)(1+t+t^2+t^3+\cdots)(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{8}+\cdots)}{t^4}]$$

حال کافی است ضریب t^3 در صورت را حساب کنیم و چون مخرج t^4 است، پس همان ضریب $\frac{1}{t}$ حساب می‌شود. که ملاحظه مـی‌شـود، ایـن ضـریب $\frac{101}{16}$ است. اما تابع یک قطب دیگر یعنی $z=2$ در دایره $|z|=\frac{5}{2}$ دارد، که محاسبه‌ی مانده‌ی $f(z)$ در این قطب راحت است.

$$\underset{z=2}{\text{Res}}f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^3}{(z-1)^4(z-3)(z-2)}=\frac{2^3}{(2-1)^4(2-3)}=-8$$

$$I=\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{z=1,2}\text{Res}f(z)=2\pi i(\frac{101}{16}-8)=2\pi i\times\frac{101-128}{16}=-\frac{27}{16}\times 2\pi i=-27i\frac{\pi}{8}$$

مثال ۳۰: فرض کنید C مربع $|x|+|y|=1$ در جهت مثلثاتی باشد و تابع g به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$g(\omega)=\oint_C\frac{\sin z}{e^z(z-\omega)^2}dz$$

مقدار $g'(\frac{i}{2})$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $2\pi i(\cos\frac{i}{2})e^{-\frac{i}{2}}$
۲) $4\pi i(\cos\frac{i}{2})e^{-\frac{i}{2}}$
۳) $-2\pi i(\cos\frac{i}{2})e^{-\frac{i}{2}}$
۴) $-4\pi i(\cos\frac{i}{2})e^{-\frac{i}{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با توجه به ضابطه‌ی $g(\omega)$ داریم:

$$g'(\omega)=(\oint_C\frac{\sin z}{e^z(z-\omega)^2})'$$

از طرفی اگر $f(z)=\frac{\sin z}{e^z}$ تعریف شود، طبق فرمول کوشی داریم:

$$\oint_C\frac{\sin z}{e^z(z-\omega)^2}dz=\frac{2\pi i f'(\omega)}{1!}\Rightarrow(\oint_C\frac{\sin z}{e^z(z-\omega)^2}dz)'=2\pi i f''(\omega)$$

در واقع $g'(\omega)=2\pi i f''(\omega)$ می‌باشد و لذا داریم:

$$g'(\frac{i}{2})=2\pi i f''(\frac{i}{2})=2\pi i(\frac{\sin z}{e^z})''\Big|_{z=\frac{i}{2}}=2\pi i[\frac{(\cos z)e^z-e^z\sin z}{(e^z)^2}]'\Big|_{z=\frac{i}{2}}=2\pi i(\frac{\cos z-\sin z}{e^z})'\Big|_{z=\frac{i}{2}}$$

$$=2\pi i[\frac{(-\sin z-\cos z)e^z-e^z(\cos z-\sin z)}{(e^z)^2}]\Big|_{z=\frac{i}{2}}=2\pi i[(-2\cos z)e^{-z}]\Big|_{z=\frac{i}{2}}=-4\pi i(\cos\frac{i}{2})(e^{-\frac{i}{2}})$$

روش دوم: ابتدا حاصل انتگرال را در $z=\omega$ تعیین می‌کنیم، بـرای ایـن منظـور کافیسـت مانـده‌ی تـابع در $z=\omega$ حسـاب شـود. بـا توجـه بـه تـابع زیـر انتگرال $z=\omega$، قطب مرتبه‌ی دوم است و لذا داریم:

$$z=\omega \text{ مانده در } =\lim_{z\to\omega}[(z-\omega)^2\frac{\sin z}{e^z(z-\omega)^2}]'=\frac{\cos z.e^z-e^z\sin z}{(e^z)^2}\Big|_{z=\omega}=\frac{\cos z-\sin z}{e^z}\Big|_{z=\omega}=\frac{\cos\omega-\sin\omega}{e^\omega}$$

بنابراین حاصل انتگرال به صورت زیر است:

$$g(\omega)=2\pi i(\cos\omega-\sin\omega)\frac{1}{e^\omega}\Rightarrow g'(\omega)=2\pi i[-\sin\omega-\cos\omega]\frac{1}{e^\omega}-\frac{1}{e^\omega}(\cos\omega-\sin\omega)=2\pi i[\frac{-2}{e^\omega}(\cos\omega)]\Rightarrow g'(\frac{i}{2})=-4\pi i\cos(\frac{i}{2})(e^{-\frac{i}{2}})$$

مثال۳۱: اگر n عددی مثبت باشد، آنگاه حاصل $I=\oint_{|z-i|=2}\frac{\sin z}{(z-i)^n}dz$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi i}{n!(n-1)!}\sin(i+(n-1)\frac{\pi}{2})$
۲) $\frac{2\pi i}{(n-1)!}\sin(i+(n-1)\frac{\pi}{2})$
۳) $\frac{2\pi i}{(n-2)!(n-1)!}\sin(i+(n-1)\frac{\pi}{2})$
۴) $\frac{2\pi i}{(n-1)!(\frac{n}{2})!}\sin(i+(n-1)\frac{\pi}{2})$

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(z)=\frac{\sin z}{(z-i)^n}$ قطب مرتبه‌ی n در $z=i$ دارد و این قطب درون دایره‌ی $|z-i|=2$ قرار دارد. مانده‌ی f در $z=i$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Res(f,1)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-i)^n f(z)]=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(\sin z)\Big|_{z=i}$$

فرض کنیم $w=\sin z$ باشد. با مشتق‌گیری پی‌درپی داریم:

$$w'=\cos z=\sin(z+\frac{\pi}{2})\quad,\quad w''=-\sin z=\sin(z+2\frac{\pi}{2})$$

به همین ترتیب پس از $(n-1)$ بار مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}=\sin(z+(n-1)\frac{\pi}{2})$$

به این ترتیب:

$$Res(f,i)=\frac{1}{(n-1)!}\sin(i+(n-1)\frac{\pi}{2})\Rightarrow\int_{|z-i|=2}f(z)dz=2\pi i\,Res(f,i)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\sin(i+(n-1)\frac{\pi}{2})$$

مثال۳۲: فرض کنیم C مرز دایره $|z|=1$ است که در جهت مثلثاتی پیموده شده است. مقدار انتگرال مختلط $I=\oint_C\frac{tgh(\pi z)}{1+4z^2}dz$ کدام است؟

۱) $-\frac{i}{2}$
۲) $-i$
۳) i
۴) $\frac{i}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» در قدم اول باید نقاط تکین در داخل مرز C را بدست بیاوریم:

$$1+4z^2=0\rightarrow z^2=\frac{-1}{4}\rightarrow z=\pm\frac{i}{2}$$

$$\tanh\pi z=\frac{\sinh\pi z}{\cosh\pi z}\xrightarrow{\text{قطب‌ها}}\cosh\pi z=0\rightarrow e^{\pi z}+e^{-\pi z}=0\xrightarrow{w=e^{\pi z}}w+\frac{1}{w}=0$$

$$w^2+1=0\rightarrow w=\pm i\rightarrow e^{\pi z}=\pm i\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\pi z=\pm\frac{\pi}{2}i\Rightarrow z=\pm\frac{i}{2}$$

ملاحظه می‌شود که تابع $f(z)$ در نقاط $z_1=\frac{i}{2}$, $z_2=-\frac{i}{2}$ دارای قطب مرتبه دوم است. انتگرال را می‌توان با استفاده از قضیه مانده‌ها محاسبه کرد:

$$I=\oint_c\frac{tgh(\pi z)}{1+4z^2}dz=2\pi i[\underset{z=\frac{i}{2}}{Res}f(z)+\underset{z=-\frac{i}{2}}{Res}f(z)]$$

برای محاسبه‌ی $\underset{z=\frac{i}{2}}{Res}f(z)$ می‌توانیم فرض کنیم $t=z-\frac{i}{2}$ و ضابطه‌ی f را بر حسب t به دست آوریم. آنگاه $\underset{t=0}{Res}f(t)$ را به دست آوریم. دقت کنید که $t=0$ معادل $z=\frac{i}{2}$ است. این کار را برای ساده‌تر شدن محاسبات و امکان استفاده از بسط‌های مک لورن انجام می‌دهیم.

$$f(z)=\frac{\sinh\pi z}{4(\frac{1}{4}+z^2)\cosh\pi z}=\frac{\sinh(\pi(z-\frac{i}{2})+\frac{i\pi}{2})}{4(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})\cosh(\pi(z-\frac{i}{2})+\frac{i\pi}{2})}=\frac{\sinh(\pi t+\frac{i\pi}{2})}{4t(t+i)\cosh(\pi t+\frac{i\pi}{2})}$$

اکنون دقت کنید که $\sinh(\alpha+\frac{i\pi}{2})=i\cosh\alpha$ و $\cosh(\alpha+\frac{i\pi}{2})=-i\sinh\alpha$. بنابراین داریم:

$$f(t)=\frac{i\cosh\pi t}{-4t(t+i)i\sinh\pi t}$$

اکنون از بسط $\sinh\pi t$ داریم:

$$\sinh\pi t=\pi t+\frac{\pi^3t^3}{3!}+\cdots=\pi t(1+\frac{\pi^2t^2}{3!}+\cdots)$$

بنابراین داریم:

$$f(t)=\frac{-\cosh\pi t}{4\pi t^2(t+i)(1+\frac{\pi^2t^2}{3!}+\cdots)}$$

$$\Rightarrow\underset{t=0}{Res}f(t)=\lim_{t\to0}\frac{d}{dt}[t^2f(t)]=\frac{1}{4\pi}\lim_{t\to0}\frac{d}{dt}[\frac{-\cosh\pi t}{(t+i)(1+\frac{\pi^2t^2}{3!}+\cdots)}]=\frac{-1}{4\pi}\frac{\pi\sinh(0)[(i)(1)]-[(1)(1)+(i)(0)]\cosh(0)}{(i)^2(1)^2}=\frac{-1}{4\pi}$$

برای محاسبه‌ی مانده در $z=-\frac{i}{2}$ می‌توانیم همانند روش فوق عمل کنیم، اما چون تابع زیر انتگرال فرد است، از این نکته استفاده می‌کنیم که مانده در $z=-\frac{i}{2}$ دقیقاً با مانده در $z=\frac{i}{2}$ برابر است، بنابراین نیاز به محاسبه نیست و مانده در $z=-\frac{i}{2}$ هم برابر با $-\frac{1}{4\pi}$ است!

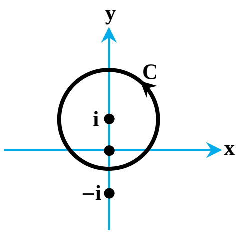
بنابراین جواب انتگرال به صورت زیر خواهد بود:

$$\oint_C \frac{\tanh \pi z}{1+4z^2} = 2\pi i\left(\frac{-2}{4\pi}\right) = -i$$

مثال ۳۳: اگر C دایره $|z-i|=\frac{3}{2}$ باشد آنگاه حاصل $I=\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+z^3}$ چند برابر πi است؟

۱) e^i ۲) $\cos 1$ ۳) $i\cos 1$ ۴) $2e^i$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(z-i)(z+i)}$ در $z=\pm i$ دارای قطب ساده است و در $z=0$ قطب اساسی دارد. نقاط $z_1=i$ و $z_0=0$ درون مرز قرار می‌گیرند.



در $z_1=i$ داریم:

$$\operatorname{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\frac{e^{\frac{1}{i}}}{i(i+i)}=\frac{e^{-i}}{-2}$$

اما در $z_0=0$ تکین اساسی داریم و نوشتن بسط مک‌لورن برای تعیین ضریب $\frac{1}{z}$ الزامی است.

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1+z^2}e^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}(1-z^2+z^4-z^6+\cdots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

ما $\frac{1}{z}$ را بیرون پرانتزها داریم پس باید ببینیم در حاصل‌ضرب دو پرانتز کجاها عدد ثابت به وجود می‌آید.

$$\text{ضریب } \frac{1}{z}=(1)(1)-\frac{z^2}{2!z^2}+\frac{z^4}{4!z^4}-\frac{z^6}{6!z^6}+-\cdots=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

یعنی مانده‌ی f در صفر برابر است با:

$$\operatorname{Res}(f,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

اکنون دقت کنید که $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$ است. اگر $x=1$ را در نظر بگیرید می‌بینید که داریم:

$$\operatorname{Res}(f,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1$$

با استفاده از قضیه‌ی مانده‌ها خواهیم داشت:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\left(-\frac{e^{-i}}{2}+\cos 1\right)=2\pi i\left[-\frac{1}{2}e^{-i}+\frac{1}{2}(e^i+e^{-i})\right]=\pi i e^i$$

مثال ۳۴: حاصل $I=\int_{|z|=1}\frac{(1-\cosh z)\sinh z}{(1-\cos z)\sin^2 z}dz$، در صورتی که دایره در جهت مثبت طی شده باشد، چند برابر $2\pi i$ است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -1 ۴) 1

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا نقاط تکین $f(z)=\frac{(1-\cosh z)\sinh z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$ را با تعیین ریشه‌های مخرج مشخص می‌کنیم.

$$(1-\cos z)\sin^2 z=0 \Rightarrow \cos z=1\ ,\ \sin z=0 \Rightarrow z=2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

تنها نقطه‌ی تکین داخل مرز، $z=0$ است. اکنون باید مرتبه‌ی این قطب را مشخص کنیم. بهترین روش در مورد $z=0$، استفاده از بسط‌های مک‌لورن و فاکتورگیری از عامل z است. به ویژه که این کار در ادامه، محاسبه‌ی مانده را ساده‌تر می‌کند.

$$f(z)=\frac{\left(1-1-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)\left(z+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)}{\left(1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^2}=\frac{z^3\left(-\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}-\cdots\right)\left(1+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)}{z^4\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2}$$

بنابراین $z=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی ۳ برای صورت و ریشه‌ی مرتبه ۴ برای مخرج است. پس یک قطب مرتبه‌ی $1=4-3$ است. بنابراین داریم:

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\frac{\left(-\frac{1}{2!}\right)(1)}{\left(\frac{1}{2!}\right)(1)^2}=-1$$

و حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,0)=-2\pi i$$

مثال ۳۵: حاصل $I=\oint_{|z|=1}\frac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}dz$ در صورتی که دایره در جهت عقربه‌های ساعت طی شده باشد، چند برابر $\frac{\pi i}{3}$ است؟

۱) -16 ۲) 32 ۳) 16 ۴) -32

پاسخ: گزینه «۲» نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}$ را مشخص می‌کنیم. جواب‌های معادله‌ی $1-\cos z=0$ عبارتند از $z=2k\pi$ که $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. از بین این نقاط، فقط $z=0$ درون دایره‌ی واحد قرار دارد. اما این نقطه، ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج است. برای تعیین مرتبه‌ی قطب در مبدأ، بهترین کار استفاده از بسط‌های مک‌لورن است زیرا در ادامه، محاسبه‌ی مانده را نیز آسان می‌کند.

$$f(z)=\frac{(2z-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-\cdots)-2z}{(1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots)^2}=\frac{z^3(-\frac{8}{3!}+\frac{32z^2}{5!}-\cdots)}{z^4(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots)^2}$$

به این ترتیب مشخص می‌شود $z=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی ۳ برای صورت و ریشه‌ی مرتبه‌ی ۴ برای مخرج است. پس قطب مرتبه‌ی $4-3=1$ است. به این ترتیب داریم:

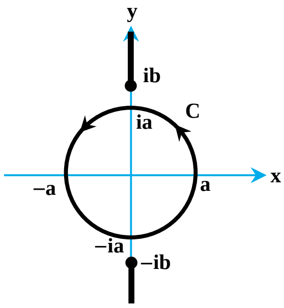
$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^4(-\frac{8}{3!}+\frac{32z^2}{5!}-\cdots)}{z^4(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots)^2}=\frac{(-\frac{8}{3!})}{(\frac{1}{2!})^2}=-\frac{16}{3}$$

با توجه به آنکه جهت عقربه‌های ساعت عکس جهت مثلثاتی است، در قضیه‌ی مانده‌ها به جای $2\pi i$ باید $-2\pi i$ را استفاده کنیم. در نتیجه داریم:

$$\int_C f(z)dz=-2\pi i(\frac{-16}{3})=32(\frac{\pi i}{3})$$

مثال ۳۶: فرض کنیم $0<a<b$ و $f(z)=\tan^{-1}(\frac{z}{b})$ شاخه‌ی اصلی تابع معکوسِ تانژانت باشد. حاصل $\int_C f(z)dz$ روی منحنی $C:|z|=a$ که در جهت مثبت طی شده است، کدام است؟

۱) $2\pi b$ ۲) $2\pi ab$ ۳) πab ۴) 0



پاسخ: گزینه «۴» ابتدا نقاط غیرتحلیلی $f(z)=\tan^{-1}(\frac{z}{b})$ را تعیین می‌کنیم. $f(z)=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(\frac{i+\frac{z}{b}}{i-\frac{z}{b}})$

شاخه‌ی اصلی تابع $\operatorname{Ln}w$ در نقاطی غیرتحلیلی است که $\operatorname{Im}w=0$، $\operatorname{Re}w\le0$ باشد. در این مثال داریم:

$$w=\frac{i+\frac{z}{b}}{i-\frac{z}{b}}=\frac{\frac{1}{b}[x+i(y+b)]}{\frac{1}{b}[-x+i(-y+b)]}\times\frac{-x-i(-y+b)}{-x-i(-y+b)}=\frac{(b^2-y^2-x^2)-i2bx}{x^2+(b-y)^2}$$

بنابراین با در نظر گرفتن شرایط فوق روی بخش‌های حقیقی و موهومیِ w داریم:

$$\operatorname{Im}w=-\frac{2bx}{x^2+(b-y)^2}=0\Rightarrow x=0$$

$$\operatorname{Re}w=\frac{b^2-x^2-y^2}{x^2+(b-y)^2}\le0\Rightarrow b^2-y^2\le0\Rightarrow|y|\ge b$$

بنابراین نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ همانطور که در شکل نشان داده‌ایم روی محور y ها بالاتر از $+ib$ و پایین‌تر از $-ib$ قرار دارند.

با توجه به شرط $0<a<b$، هیچکدام از نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ روی یا داخل دایره‌ی $|z|=a$ قرار ندارند. بنابراین داریم: $\int_C\tan^{-1}(\frac{z}{b})dz=0$

مثال ۳۷: اگر C مربعی با رئوس $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱\pm i)$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱\pm i)$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\int_C \frac{tg^{-۱}z}{z^۴}dz$ چند برابر $۲\pi i$ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۷}$

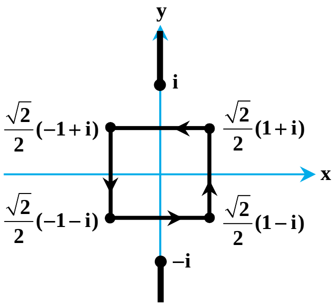
پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دقت کنید که شاخه‌ی اصلیِ $tg^{-۱}(z)=\frac{i}{۲}Ln(\frac{i+z}{i-z})$ در نقاطی که $Im\frac{i+z}{i-z}=۰$ و $Re\frac{i+z}{i-z}\le ۰$ باشد تحلیلی نیست. با محاسبه‌ی این بخش‌ها داریم:

$$w=\frac{i+z}{i-z}=-\frac{z+i}{z-i}=-\frac{x+i(y+۱)}{x+i(y-۱)}\times\frac{x-i(y-۱)}{x-i(y-۱)}=\frac{(۱-x^۲-y^۲)-۲ix}{x^۲+(۱-y)^۲}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج داریم:

$$Im\,w=۰\Rightarrow x=۰$$

$$Re\,w\le ۰\Rightarrow ۱-x^۲-y^۲\le ۰\xrightarrow{x=۰}|y|\ge ۱$$



نقاط غیر تحلیلی $tg^{-۱}z$ خارج از مرز قرار دارند. بنابراین کافیست مانده را در نقطه‌ی تکین $z=۰$ که درون مرز قرار دارد، بدست آوریم. از بسط مک‌لورن استفاده می‌کنیم.

$$f(z)=\frac{tg^{-۱}z}{z^۴}=\frac{۱}{z^۴}(z-\frac{z^۳}{۳}+\frac{z^۵}{۵}-\cdots)=\frac{۱}{z^۳}-\frac{۱}{۳z}+\frac{z}{۵}\cdots$$

ضریب $\frac{۱}{z}$ برابر است با $-\frac{۱}{۳}$. بنابراین $Res(f,۰)=-\frac{۱}{۳}$ است و داریم:

$$\int_C\frac{tg^{-۱}z}{z^۴}dz=۲\pi i\times(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۲\pi i}{۳}$$

مثال ۳۸: فرض کنیم $a,b>۰$ باشند و $f(z)=\frac{cot^{-۱}(\frac{z}{b})}{z^۲-a^۲}$ تابعی مختلط باشد که شاخه‌ی اصلی آن موردنظر است. حاصل $\int_C f(z)dz$ برای منحنی $C:|۲z-۲a|=a$ که در جهت مثبت پیموده شده است، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\frac{\pi}{۲a}Ln\frac{a+ib}{a-ib}$

۳) $\frac{\pi}{۲a}Ln\frac{a+ib}{a-ib}$ ۴) مقدار انتگرال بستگی به آن دارد که $a<b$ یا $a>b$ باشد.

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که منحنی C دایره‌ی $|z-a|=\frac{a}{۲}$ است. مرکز آن $(a,۰)$ و شعاع آن $R=\frac{a}{۲}$ است. با توجه به تعریف توابع معکوس مثلثاتیِ مختلط داریم:

$$f(z)=-\frac{۱}{z^۲-a^۲}\frac{i}{۲}Ln\frac{\frac{z}{b}+i}{\frac{z}{b}-i}$$

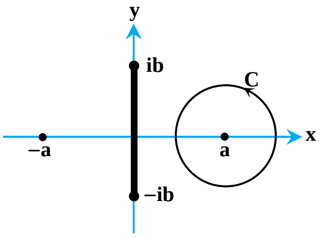
ابتدا نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ را مشخص می‌کنیم. $z=\pm a$ ریشه‌های مخرج کسر هستند. علاوه بر آن‌ها شاخه‌ی اصلی Lnw در نقاطی که $Re\,w\le ۰$ و $Im\,w=۰$ باشد تحلیلی نیست. در این مثال داریم:

$$w=\frac{\frac{z}{b}+i}{\frac{z}{b}-i}=\frac{x+i(y+b)}{x+i(y-b)}\times\frac{x-i(y-b)}{x-i(y-b)}=\frac{(x^۲+y^۲-b^۲)+i۲bx}{x^۲+(y-b)^۲}$$

به این ترتیب با لحاظ کردن شرایط فوق روی $Re\,w$ و $Im\,w$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}Im\,w=\dfrac{۲bx}{x^۲+(y-b)^۲}=۰\Rightarrow x=۰\\[2ex] Re\,w=\dfrac{x^۲+y^۲-b^۲}{x^۲+(y-b^۲)}\le ۰\xrightarrow{x=۰}y^۲-b^۲\le ۰\Rightarrow |y|\le b\end{cases}$$

همه‌ی نقاط غیرتحلیلی تابع f را در شکل زیر نشان داده‌ایم. نقاط $\pm a$ قطب‌های ساده‌ی f هستند. اما نقاط بین $-ib$ تا ib نقطه‌ی تکین تنها نیستند؛ زیرا این نقاط به هم چسبیده‌اند و تشکیل یک بازه روی محور y ها می‌دهند. در هر حال با توجه به آن که منحنی C دایره‌ای به مرکز $(a,۰)$ و شعاع $R=\frac{a}{۲}$ است، فقط نقطه‌ی $z_۰=a$ درون این مرز قرار دارد. بنابراین کافیست مانده‌ی f را در این نقطه به دست آوریم.



$$f(z)=-\frac{۱}{(z-a)(z+a)}\frac{i}{۲}\mathrm{Ln}\frac{\frac{z}{b}+i}{\frac{z}{b}-i}\Rightarrow \mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

$$=\lim_{z\to a}\left(\frac{-۱}{z+a}\right)\frac{i}{۲}\mathrm{Ln}\frac{\frac{z}{b}+i}{\frac{z}{b}-i}=\left(-\frac{۱}{۲a}\right)\frac{i}{۲}\mathrm{Ln}\frac{\frac{a}{b}+i}{\frac{a}{b}-i}=-\frac{i}{۴a}\mathrm{Ln}\frac{a+ib}{a-ib}$$

در نتیجه حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int_C f(z)\,dz=-۲\pi i\frac{i}{۴a}\mathrm{Ln}\frac{a+ib}{a-ib}=\frac{\pi}{۲a}\mathbf{Ln}\frac{a+ib}{a-ib}$$

مثال ۳۹: حاصل $I=\int_C\frac{z}{۲-\cos z}dz$ در صورتی که C مرز بیضی $x^۲+\frac{y^۲}{۹}=۱$ و در جهت مثبت باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{\sqrt{۳}}\mathrm{Ln}(۲-\sqrt{۳})$ ۲) $\frac{\pi i}{\sqrt{۳}}\mathrm{Ln}(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}})$ ۳) $\frac{۴\pi}{\sqrt{۳}}\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})i$ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا هشدار می‌دهیم که فکر نکنید توابع مختلط $\sin z$ و $\cos z$ کران‌دار و بین ۱- تا ۱+ هستند. این ویژگی‌ها مربوط به توابع مثلثاتی با متغیرهای حقیقی‌اند، نه متغیر مختلط! بنابراین معادله‌ی $۲-\cos z=۰$ دارای جواب است. برای یافتن جواب، به بخش‌های حقیقی و موهومی دقت می‌کنیم:

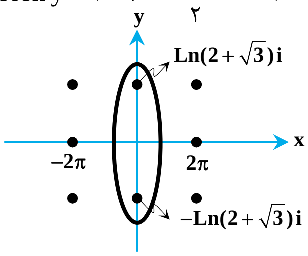
$$\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y=۲\Rightarrow\begin{cases}\cos x\cosh y=۲\\ \sin x\sinh y=۰\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم یا $y=۰$ است و یا $x=k\pi$ است. اگر $y=۰$ باشد در معادله‌ی اول داریم: $\cos x\cosh(۰)=۲\Rightarrow\cos x=۲$

که غیر ممکن است. بنابراین باید $x=k\pi$ باشد. با جایگزینی در معادله‌ی اول داریم: $\cos k\pi\cosh y=۲\Rightarrow(-۱)^k\cosh y=۲$

می‌دانیم $\cosh y$ تابعی نامنفی است. بنابراین k باید زوج باشد، زیرا برای مقادیر فرد آن، به معادله‌ی $-\cosh y=۲$ می‌رسیم که نـاممکن است. در نتیجه $k=۲n$ زوج است و داریم:

$$\cosh y=۲\Rightarrow\frac{e^y+e^{-y}}{۲}=۲\xrightarrow{\text{ضرب در } ۲e^y}e^{۲y}-۴e^y+۱=۰$$



این معادله‌ی درجه دو را برای متغیر e^y حل می‌کنیم. $e^y=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$

با جمع‌بندی موارد فوق می‌بینیم کـه نقـاط بـه صـورت $z=۲n\pi+i\mathrm{Ln}(۲\pm\sqrt{۳})$ ریشـه‌های مخرج و نقاط تکین تابع زیر انتگرال هستند.

توجه کنید که: $\mathrm{Ln}(۲-\sqrt{۳})=\mathrm{Ln}(\frac{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}})=\mathrm{Ln}(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}})=-\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})$

پس می‌توان نقاط تکین را به صورت $z=۲n\pi\pm i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})$ نوشت. دو تا از این نقاط یعنی $z=\pm i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})$ درون مرز C قرار دارنـد. مانـده‌ی f را در این دو نقطه بدست می‌آوریم:

$$f(z)=\frac{z}{۲-\cos z}=\frac{p(z)}{q(z)}\Rightarrow\mathrm{Res}(f,\pm i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳}))=\frac{p(z)}{q'(z)}\bigg|_{\pm i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})}=\frac{z}{\sin(z)}\bigg|_{\pm i\mathrm{Ln}(۲\pm\sqrt{۳})}$$

تابع $\frac{z}{\sin z}$ زوج است بنابراین مقادیر آن در $\pm i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})$ با هم برابرند. در نتیجه داریم:

$$\int_C\frac{z}{۲-\cos z}dz=۲\pi i(\text{مجموع مانده‌های } f(z) \text{ در } \pm i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳}))=۲\pi i\times۲\times\frac{i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})}{\sin(i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳}))}$$

اما $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}$ است. بنابراین داریم:

$$\sin(i\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳}))=\frac{e^{-\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})}-e^{\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})}}{۲i}=\frac{۱}{۲i}(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}-۲-\sqrt{۳})=\frac{۱}{۲i}(۲-\sqrt{۳}-۲-\sqrt{۳})=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۲i}=i\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\int_C\frac{z\,dz}{۲-\cos z}=\frac{-۴\pi\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})}{i\sqrt{۳}}=\frac{۴\pi}{\sqrt{۳}}\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})i$$

مثال ۴۰: فرض کنید f یک تابع تحلیلی بر $|z|\le r$ باشد. در این صورت مقدار انتگرال $\oint_{|z|=r} f(z)\overline{dz}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $-2\pi i r^2 f'(0)$ ۳) $\pi i r^2 f'(0)$ ۴) $2\pi i r^2 f'(0)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به توضیحات فوق داریم:

$$|z|=r \Rightarrow z\bar{z}=r^2 \Rightarrow \bar{z}dz+zd\bar{z}=0 \Rightarrow d\bar{z}=-r^2\frac{dz}{z^2}$$

$$\oint_{|z|=r} f(z)\overline{dz}=\oint\frac{f(z)(-r^2dz)}{z^2}=-r^2\oint\frac{f(z)}{z^2}dz=-r^2[2\pi i\,\underset{z=0}{\operatorname{Res}}\frac{f(z)}{z^2}]=-2\pi i r^2 f'(0)$$

مثال ۴۱: حاصل انتگرال $\oint_{|z|=1}\frac{z^{1393}}{(3z^2+2)^{1392}(\bar{z}^2-2\bar{z})^{1391}}dz$ کدام است؟

۱) $\frac{1393}{6^{1393}}2\pi i$ ۲) $-\frac{1391}{6^{1392}}2\pi i$ ۳) 0 ۴) $-\frac{1391}{6^{1391}}2\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که روی دایره‌ی $|z|=1$ داریم $z\bar{z}=1$، بنابراین $\bar{z}=\frac{1}{z}$ است. تابع انتگرالده بر حسب z برابر است با:

$$f(z)=\frac{z^{1393}}{(3z^2+2)^{1392}(\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z})^{1391}}=\frac{z^{1393}}{(3z^2+2)^{1392}(\frac{1-2z}{z^2})^{1391}}=\frac{z^{1393}z^{2(1391)}}{(3z^2+2)^{1392}(1-2z)^{1391}}$$

نقاط تکین تابع f عبارتند از: $z=\frac{1}{2}$ و $z=\pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$ که همه‌ی آن‌ها درون دایره‌ی $|z|=1$ قرار دارند.

بنابراین داریم: $\int_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i\times$ (مجموع مانده‌های f در همه‌ی نقاط تکین f)

از طرفی همان‌طور که در متن کتاب آمده است، مجموع مانده‌های f در همه‌ی نقاط تکین برابر است با قرینه‌ی مانده‌ی f در بی‌نهایت. مانده‌ی $f(z)$ در بی‌نهایت برابر است با مانده‌ی تابع $g(z)=-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ در $z=0$.

$$g(z)=-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})=-\frac{1}{z^2}\frac{\frac{1}{z^{1393}}\frac{1}{z^{2(1391)}}}{(\frac{3}{z^2}+2)^{1392}(1-\frac{2}{z})^{1391}}=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{(3+2z^2)^{1392}(z-2)^{1391}}$$

پس $z=0$ نقطه‌ی تکین مرتبه‌ی ۲ برای $g(z)$ است.

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\operatorname{Res}(g,0)=\frac{d}{dz}(z^2g(z))\Big|_{z=0}=\left(\frac{(4z)(1392)(3+2z^2)^{1391}(z-2)^{1391}+1391(z-2)^{1390}(3+2z^2)^{1392}}{[(3+2z^2)^{1392}(z-2)^{1391}]^2}\right)\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{(1391)(2)^{1390}(3)^{1392}}{[3^{1392}\times-2^{1391}]^2}=\frac{1391}{2^{1392}\times3^{1392}}$$

بنابراین مجموع مانده‌های f در همه‌ی نقاط تکینِ f برابر است با: $-\operatorname{Res}(f,\infty)=-\frac{1391}{6^{1392}}$

در نتیجه داریم: $\int_{|z|=1} f(z)dz=-2\pi i\frac{1391}{6^{1392}}$

مثال ۴۲: حاصل $\int_{|z|=4}\frac{z^{1394}}{z^{1395}-2}dz$ کدام است؟

۱) $1394\pi i$ ۲) $1395\pi i$ ۳) $2\pi i$ ۴) $-2\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{z^{1394}}{z^{1395}-2}$ ریشه‌های ۱۳۹۵اُمِ عدد ۲ هستند. تعداد آن‌ها ۱۳۹۵ عدد است و همه‌ی آن‌ها درون دایره‌ی $|z|=4$ قرار می‌گیرند. بنابراین بهتر است از مانده‌ی f در $z=\infty$ که تنها قطب خارج از مرز است، استفاده کنیم. با توجه به آن که مخرج فقط یک درجه بیشتر از صورت دارد، پس مانده برابر با منفی ضریب جمله با بزرگترین درجه در صورت کسر، تقسیم بر ضریب جمله با بزرگترین درجه در مخرج کسر است یعنی $-\frac{1}{1}=-1$.

$$\int_{|z|=4} f(z)dz=-2\pi i\times(-1)=2\pi i$$

مثال ۴۳: حاصل $I=\int_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4-1}dz$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $2\pi i$ ۳) $4\pi i$ ۴) $6\pi i$

پاسخ: گزینه «۲» از آنجا که همه‌ی نقاط تکین به جز $z=\infty$ درون دایره‌ی $|z|=2$ قرار دارند، می‌توانیم به جای آن‌ها، مانده‌ی $f(z)$ را در بی‌نهایت حساب کنیم. از آنجا که صورت درجه ۳ و مخرج درجه ۴ است، درجه مخرج یک واحد بیشتر از صورت است. در نتیجه مانده برابر $-\frac{1}{1}=-1$ است.

حال بنا بر تعمیم فرمول انتگرال کوشی داریم:
$$\int_{|z|=2}f(z)\,dz=-2\pi i\times(-1)=2\pi i$$

مثال ۴۴: حاصل $I=\oint_{|z|=3}\frac{2z^9}{z^{10}-1}dz$ چند برابر $2\pi i$ است؟ (با کمی تغییر از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Harward)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم، یکبار به روش عادی و بار دیگر با توجه به مفهوم مانده در بی‌نهایت.

روش اول: نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{2z^9}{z^{10}-1}$ عبارتند از ریشه‌های دهم واحد.
$$z^{10}-1=0\Rightarrow z^{10}=1\Rightarrow z=e^{i\frac{2k\pi}{10}}\qquad k=0,1,\dots,9$$

همه‌ی این نقاط، درون دایره‌ی $|z|=3$ قرار دارند زیرا همه‌ی آن‌ها روی دایره‌ی $r=1$ قرار گرفته‌اند. تعداد نقاط تکین داخل مرز، ده تا است. اما مانده‌ی f در همه‌ی این نقاط به سادگی بدست می‌آید.
$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{2z^9}{z^{10}-1}\Rightarrow \operatorname{Res}(f,z_k)=\frac{p(z_k)}{q'(z_k)}=\frac{2z_k^9}{10z_k^9}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

در نتیجه، بنابر قضیه‌ی مانده‌ها داریم:
$$\int_{|z|=3}f(z)dz=2\pi i(\underbrace{\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5}}_{\text{به تعداد ده تا}})=4\pi i$$

روش دوم: همه نقاط تکین f، به جز $z=\infty$ درون دایره‌ی $|z|=3$ قرار دارند. پس می‌توانیم به جای آن‌ها، مانده‌ی f را در بی‌نهایت محاسبه کنیم. دقت کنید که در این صورت باید مانده را در $-2\pi i$ ضرب کنیم. در واقع اگر بخواهید از قطب‌های خارج از مرز استفاده کنید فرمول به این صورت است:
$$\int_C f(z)dz=-2\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های } f \text{ در نقاط تکین خارج از مرز و نقطه‌ی } z=\infty)$$

برای محاسبه‌ی مانده‌ی f در $z=\infty$ با توجه به آن که درجه‌ی مخرج از صورت یک واحد بیشتر است، پس مانده برابر با ۲- است.

در نتیجه خواهیم داشت:
$$\int_{|z|=3}f(z)dz=-2\pi i\times(-2)=4\pi i$$

مثال ۴۵: حاصل $\int_{|z|=4}\frac{z}{1-z^3}dz$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}i$ ۲) $-\frac{4\pi}{3}i$ ۳) $\frac{2\pi}{3}(1+i\sqrt{3})$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: استفاده از قطب‌های درون مرز:

نقاط تکین $f(z)=\frac{z}{1-z^3}$ عبارتند از ریشه‌های سومِ واحد. اگر آن‌ها را $z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$، $z_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و $z_3=1$ بنامیم، مانده‌ی f در این نقاط چنین بدست می‌آید:
$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z}{1-z^3}$$
$$\operatorname{Res}(f(z),z_i)=\frac{p(z_i)}{q'(z_i)}=\frac{z_i}{-3z_i^2}=-\frac{1}{3}z_i^{-1}$$

بنابراین با استفاده از مجموع مانده‌های درون مرز داریم:
$$\int_{|z|=4}f(z)dz=-\frac{2\pi i}{3}(z_1^{-1}+z_2^{-1}+z_3^{-1})=-\frac{2\pi i}{3}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}+e^{-i\frac{4\pi}{3}}+1)=-\frac{2\pi i}{3}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1)=0$$

روش دوم: استفاده از قطب‌های بیرون مرز:

تنها قطب $f(z)$ که خارج از دایره‌ی $|z|=4$ قرار دارد، $z=\infty$ است. بنابراین خواهیم داشت:
$$\int_{|z|=4}f(z)dz=-2\pi i\operatorname{Res}(f(z),\infty)$$

از طرفی در کسر گویای $f(z)=\frac{z}{1-z^3}$، درجه مخرج $m=3$ و درجه صورت $n=1$ است. بنابراین $m-n=2$ و در نتیجه $\operatorname{Res}(f(z),\infty)=0$ است.

به این ترتیب داریم:
$$\int_{|z|=4}f(z)dz=-2\pi i\times 0=0$$

مثال ۴۶: حاصل $I=\oint_{|z|=۲}\frac{۱}{z}e^{\frac{۱۳۹۵}{z}}\cos(\frac{۲۰۱۶z}{۱-z})dz$ وقتی که مرز در جهت مثبت طی شده باشد، کدام است؟

۱) $۱۳۹۵\cos(۲۰۱۶)\pi i$　　۲) $۲\pi i\cos(۲۰۱۶)$　　۳) $-۲\pi i\cos(۲۰۱۶)$　　۴) $-۱۳۹۵\pi i\cos(۲۰۱۶)$

پاسخ : گزینه «۲» برای تابع زیر انتگرال قطب‌های $z=۰$ و $z=۱$ هر دو قطب اساسی هستند و درون مرز $|z|=۲$ قرار دارند. محاسبه‌ی مانده‌ی f در این نقاط بسیار وقت‌گیر است. بنابراین به جای قطب‌های درون مرز، از قطب‌های بیرون مرز استفاده می‌کنیم. برای تابع داده شده فقط قطب $z=\infty$ را خارج از دایره داریم. مانده‌ی f در بی‌نهایت را با تشکیل $g(z)=-\frac{۱}{z^۲}f(\frac{۱}{z})$ و محاسبه‌ی مانده‌ی g در صفر تعیین می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{۱}{z}e^{\frac{۱۳۹۵}{z}}\cos(\frac{۲۰۱۶z}{۱-z})\Rightarrow g(z)=-\frac{۱}{z^۲}[ze^{۱۳۹۵z}\cos(\frac{۲۰۱۶\times\frac{۱}{z}}{۱-\frac{۱}{z}})]=-\frac{۱}{z}e^{۱۳۹۵z}\cos(\frac{۲۰۱۶}{z-۱})$$

$z=۰$ قطب ساده‌ی $g(z)$است. بنابراین داریم:

$$\operatorname{Res}(g(z),۰)=\lim_{z\to ۰}zg(z)=-e^{۰}\cos(\frac{۲۰۱۶}{-۱})=-\cos(-۲۰۱۶)$$

دقت کنید که همواره تساوی $\cos(-۲۰۱۶)=\cos(۲۰۱۶)$ را داریم، پس مانده‌ی $f(z)$ در بی‌نهایت برابر با $-\cos(۲۰۱۶)$ است و لذا داریم:

$$\int_{|z|=۲}\frac{۱}{z}e^{\frac{۱۳۹۵}{z}}\cos(\frac{۲۰۱۶z}{۱-z})dz=-۲\pi i[-\cos(۲۰۱۶)]=۲\pi i\cos(۲۰۱۶)$$

مثال ۴۷: حاصل انتگرال $I=\oint_C\frac{dz}{z(۲z-۳)}$ برای یکبار طی کردن کامل (در جهت مثبت) مسیر بستهٔ C که در مختصات قطبی به صورت $r=۱+\sin^۲\frac{\theta}{۴}$ می‌باشد، برابر است با:

۱) $-\frac{\pi}{۲}i$　　۲) ۰　　۳) $\frac{۳\pi}{۴}i$　　۴) $-\frac{۲\pi}{۳}i$

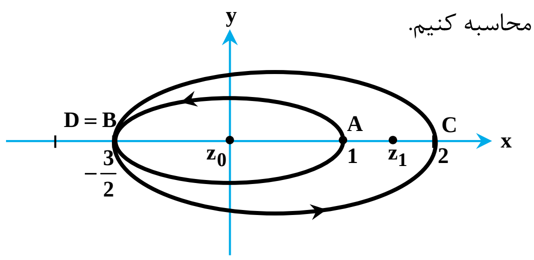
پاسخ: گزینه «۴» مهم‌ترین نکته در پاسخ به این مسأله رسم نمودار $r=۱+\sin^۲\frac{\theta}{۴}$ است. برای ساده‌تر شدن کار، از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin^۲\frac{\theta}{۴}=\frac{۱}{۲}(۱-\cos\frac{\theta}{۲})\xrightarrow{\text{جایگذاری}}r=۱+\frac{۱}{۲}(۱-\cos\frac{\theta}{۲})=\frac{۱}{۲}(۳-\cos\frac{\theta}{۲})$$

عبارت $۳-\cos\frac{\theta}{۲}$ همواره مثبت است. بنابراین محدودیتی از این نظر نداریم و θ می‌تواند هر مقداری داشته باشد. دوره‌ی تناوب $\cos\theta$ برابر است با ۲π و با نصف شدنِ کمان، دوره‌ی تناوب دو برابر می‌شود. یعنی دوره‌ی تناوب منحنی $r=\frac{۱}{۲}(۳-\cos\frac{\theta}{۲})$ برابر با ۴π است. همین امر نشان می‌دهد که این منحنی دارای دو گردش کامل حول مبدأ است.

اما اگر بخواهیم آن را رسم کنیم، باید به ازای برخی از مقادیر مهم θ مثلاً مضارب $\frac{\pi}{۲}$ مقدار r را محاسبه کنیم.

θ	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	$\frac{۵\pi}{۲}$	۳π	$\frac{۷\pi}{۲}$	۴π
r	۱	$\frac{۱}{۲}(۳-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}(۳+\frac{\sqrt{۲}}{۲})$	۲	$\frac{۱}{۲}(۳+\frac{\sqrt{۲}}{۲})$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}(۳-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$	۱



توجه کنید مسیر حرکت چنان است که به ترتیب از نقاط A ، B ، C و D می‌گذریم و به A برمی‌گردیم.

با رسم تقریبی نمودار می‌بینیم که منحنی C، نقطه‌ی تکین $z_۰=۰$ را دو بار و نقطه‌ی تکین $z_۱=\frac{۳}{۲}$ را یک بار در برگرفته است. بنابراین داریم:

$$I=۲\pi i(۲\times\operatorname{Res}(f,۰)+\operatorname{Res}(f,\frac{۳}{۲}))$$

محاسبه‌ی مانده‌ها آسان است. اگر فرض کنیم $f(z)=\frac{۱}{۲z^۲-۳z}=\frac{P(z)}{q(z)}$ آن‌گاه $\operatorname{Res}(f,z_k)=\frac{P(z_k)}{q'(z_k)}=\frac{۱}{۴z_k-۳}$.

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$I=۲\pi i(-\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳})=-\frac{۲\pi}{۳}i$$

توضیح: اگر می‌خواهید از فرمول انتگرال کوشی برای $z_۱=\frac{۳}{۲}$ استفاده کنید، توجه داشته باشید که باید از ضریب z فاکتور بگیرید تا در مخرج $(z-z_۱)$ داشته باشید.

مثال ۴۸: اگر C دایره به معادله $|z|=3$ باشد، حاصل $\oint_C \frac{z^3-i}{\pi z}dz$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $-i$ ۲) i ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» $z=0$ قطب مرتبه اول تابع زیر انتگرال است:

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z)=\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{z^3-i}{\pi z}=-\frac{i}{\pi}\Rightarrow I=2\pi i\times(\frac{-i}{\pi})=2$$

مثال ۴۹: اگر $f(z)=120z^3e^{-\frac{1}{z}}$ باشد، مقدار $\oint_C f(z)dz$ با شرط $c:|z|=\frac{1}{3}$، برابر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $120\pi i$ ۲) $-240\pi i$ ۳) $-40\pi i$ ۴) $z=10\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» $z=0$ نقطه تکین تابع می‌باشد و با توجه به ضابطه تابع بهتراست از بسط لوران برای به دست آوردن مانده استفاده کنیم:

$$f(z)=120z^3e^{-\frac{1}{z}}=120z^3(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots)$$

ملاحظه می‌گردد مانده یعنی ضریب $\frac{1}{z}$ برابر ۵ می‌باشد، لذا $I=2\pi i\times 5=10\pi i$ خواهد بود.

مثال ۵۰: اگر $f(z)=100z^5+2iz^3+4z-i$ و c دایره $|z|=1$ باشد، آنگاه مقدار $\oint_c\frac{f(z)}{z^7}dz$ برابر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $8\pi i$ ۳) $84\pi i$ ۴) $\frac{12000}{6!}2\pi i$

پاسخ: گزینه «۱» $z=0$ قطب مرتبه هفتم تابع است:

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{1}{(7-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^6z}{dz^6}[(z-0)^7\frac{100z^5+2iz^3+4zi}{z^7}]=0\Rightarrow I=0$$

مثال ۵۱: مقدار انتگرال مختلط $\int_{c:|z|=2}\frac{\cos z}{z(z^2+1)}dz$ (در جهت مثلثاتی) کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $2\pi i(1-\cos i)$ ۲) $4\pi i(1-\cos i)$ ۳) $2\pi i(1-\sin i)$ ۴) $2\pi(1-\sin i)$

پاسخ: گزینه «۱» نقاط تکین i، $-i$ و 0 می‌باشند، لذا داریم:

$$I=2\pi i\Sigma\operatorname{Res} f(z)=2\pi i[\frac{\cos(0)}{3\times(0)^2+1}+\frac{\cos i}{3i^2+1}+\frac{\cos(-i)}{3(-i)^2+1}]=2\pi i(1-\cos i)$$

مثال ۵۲: مقدار انتگرال $\int_{|z|=2}ze^{\frac{1}{z}}dz$ کدام است؟ (حرکت در جهت مثلثاتی است) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $-3\pi i$ ۲) $-\pi i$ ۳) πi ۴) $2\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» $z=0$ نقطه تکین اساسی تابع $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$ است، لذا با استفاده از بسط لوران می‌توانیم مانده را به دست آوریم:

$$f(z)=z(1+\frac{1}{z}+\frac{\frac{1}{z^2}}{2!}+\cdots)$$

مانده در $z=0$ برابر ضریب $\frac{1}{z}$ در بسط فوق یعنی $\frac{1}{2!}$ است، پس $I=2\pi i\times\frac{1}{2}=\pi i$ خواهد بود.

مثال ۵۳: حاصل انتگرال $I=\oint\frac{z^2}{\sin z}dz$ حول مسیر $C:|z|=8$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) $4\pi j$ ۳) $6\pi^2 j$ ۴) $12\pi^3 j$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا ریشه‌های مخرج را حساب می‌کنیم:

$$\sin z=0\Rightarrow z=\pm k\pi\ ,\ k=0,1,2,\ldots$$

فقط نقاط $\pm 2\pi$ و $\pm\pi$ و $z=0$ در درون ناحیه C هستند، لذا داریم:

$$\sum_{z=z_k}\operatorname{Res} f(z)=\underset{z=0}{\operatorname{Res}}(\frac{z^2}{\sin z})+\underset{z=-\pi}{\operatorname{Res}}(\frac{z^2}{\sin z})+\underset{z=\pi}{\operatorname{Res}}(\frac{z^2}{\sin z})+\underset{z=-2\pi}{\operatorname{Res}}(\frac{z^2}{\sin z})+\underset{z=2\pi}{\operatorname{Res}}(\frac{z^2}{\sin z})$$

$$=0+\frac{\pi^2}{\cos\pi}+\frac{(-\pi)^2}{\cos(-\pi)}+\frac{(2\pi)^2}{\cos 2\pi}+\frac{(-2\pi)^2}{\cos(-2\pi)}=6\pi^2\ \Rightarrow I=2\pi j\times 6\pi^2=12\pi^3 j$$

مثال ۵۴: مقدار انتگرال $I=\int_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ که در آن C دایرهٔ $|z-2-i|=2$ است برابر است با: (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰ ۲) $3\pi i$ ۳) $\frac{-3\pi i}{2}$ ۴) $\frac{3\pi i}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$z^3-2z^2=0 \Rightarrow z=0\,,\ z=2$$

توجه شود فقط نقطه $z=2$ درون دایره به مرکز (۱ و ۲) می‌باشد، پس داریم:

$$\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz=2\pi i\,\underset{z=2}{\mathrm{Res}}\frac{z+1}{z^3-2z^2}=2\pi i\times\left(\frac{2+1}{3(2)^2-4(2)}\right)=2\pi i\times\frac{3}{4}=\frac{3\pi i}{2}$$

مثال ۵۵: انتگرال $I=\int_C \frac{dz}{z^2+z+2}$ که در آن C دایرهٔ $|z|=2$ در جهت عکس ساعت‌گرد است برابر است با:

(مهندسی مکانیک «ساخت و تولید» ـ آزاد ۸۰)

۱) $I=\frac{i}{2}$ ۲) $I=0$ ۳) $I=\frac{i}{3}$ ۴) $I=-i$

پاسخ: گزینه «۲»

$$z^2+z+2=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{7})$$

حالا باید ببینیم این دو نقطه درون دایره $|z|=2$ قرار دارند یا نه؟

$$\left|-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}<2$$

هر دو نقطه درون دایره $|z|=2$ قرار دارند. بنابراین به جای آن‌ها می‌توانیم از مانده در $z=\infty$ استفاده کنیم. از آنجا که مخرج دو درجه بیشتر از صورت است پس مانده f در $z=\infty$، صفر می‌شود.

$$I=-2\pi i\times \mathrm{Res}(f,\infty)=0$$

مثال ۵۶: مقدار انتگرال مختلط $\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz$ که در آن C منحنی بسته‌ای است که نقاط تکین $z=0$ و $z=1$ را در بردارد عبارتست از:

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۰)

۱) $2\pi i$ ۲) ۰ ۳) $-8\pi i$ ۴) $-6\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» هر دو نقطه‌ی تکین $f(z)$ درون مرز C هستند. پس به جای آن‌ها از مانده در $z=\infty$ استفاده می‌کنیم. مخرج یک درجه بیشتر از صورت است بنابراین با توجه به ضریب بزرگترین درجات داریم:

$$\int_C f(z)dz=-2\pi i\times \mathrm{Res}(f,\infty)=-2\pi i\times\left(-\frac{-3}{1}\right)=-6\pi i$$

مثال ۵۷: حاصل $I=\oint_{|z|=1}\frac{2z\cosh z}{z^4+16}dz$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) π ۲) 2π ۳) -3π ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» قطب‌های تابع زیر انتگرال ریشه‌های مخرج کسر هستند و چون اندازه همه این چهار ریشه برابر $r=\sqrt[4]{16}$ است و این عدد $r=\sqrt[4]{16}=2$ از عدد یک بزرگتر است تمام این قطب‌ها خارج دایره $|z|=1$ قرار دارند و حاصل انتگرال فوق صفر است.

مثال ۵۸: حاصل انتگرال $\oint_C \frac{e^{zt}dz}{z^2+1}$ روی دایرهٔ $|z-1|=2$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) πje^{jt} ۲) $2\pi\sin t$ ۳) $2\pi j\sin t$ ۴) $2\pi j\cos t$

پاسخ: گزینه «۳»

$$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm j$$

$$I=2\pi j[\underset{z=j}{\mathrm{Res}}f(z)+\underset{z=-j}{\mathrm{Res}}f(z)]=2\pi j\left[\frac{e^{jt}}{2j}+\frac{e^{-jt}}{-2j}\right]=2\pi j\sin t$$

مثال ۵۹: حاصل انتگرال $\oint\frac{e^{3zt}}{(z-1)^3}dz$ روی دایره $|z|=2$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) $9\pi ite^{3t}$ ۳) $9\pi it^2e^{3t}$ ۴) $9\pi ie^{3t}$

پاسخ: گزینه «۳» $z=1$ قطب مرتبه سوم تابع است، لذا داریم:

$$I=2\pi i\,\underset{z=1}{\mathrm{Res}}f(z)=2\pi i\times\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to1}(e^{3zt})''=9\pi it^2e^{3t}$$

مثال ۶۰: مقدار انتگرال $\int_{|z|=1}\frac{e^{iz}}{\sin 2z}dz$ چیست؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$　۲) πi　۳) $\frac{1}{2}\pi i$　۴) $2\pi i$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\sin 2z=0 \Rightarrow 2z=k\pi \Rightarrow z=\frac{k\pi}{2}$$

فقط $z=0$ درون ناحیه $|z|=1$ قرار دارد، لذا داریم:

$$I=\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\frac{1}{2\cos 2z}\Big|_{z=0}=\frac{1}{2} \Rightarrow I=2\pi i\times\frac{1}{2}=\pi i$$

مثال ۶۱: حاصل $\oint_C\frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}dz$ که در آن C منحنی $|z|=4$ و جهت انتگرالگیری مثبت است، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) 0　۲) $2\pi i$　۳) $\frac{1}{\pi^2}$　۴) $\frac{4i}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۴» $z=0$ قطب مرتبه اول و $z=\pi$ قطب مرتبه دوم تابع می‌باشد، لذا داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)=\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\pi}f(z)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{(z-\pi)^2}+\lim_{z\to\pi}\left(\frac{\cos z}{z}\right)'=\frac{1}{\pi^2}+\lim_{z\to\pi}\left(\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}\right) \Rightarrow I=2\pi i\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\right)=\frac{4i}{\pi}$$

مثال ۶۲: مقدار انتگرال $\oint_C\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$ وقتی‌که $C:|z|=3$ باشد، کدام است؟ $(\sqrt{-1}=j)$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $-2\pi j$　۲) صفر　۳) $2\pi j$　۴) $4\pi j$

پاسخ: گزینه «۴»

$$I=2\pi j[\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=2}f(z)]=2\pi j\left[\lim_{z\to 1}\frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-2}+\lim_{z\to 2}\left(\frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-1}\right)\right]=2\pi j(1+1)=4\pi j$$

مثال ۶۳: مقدار انتگرال $\int_{|z|=1}z^2e^{\frac{4}{z^3}}dz$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) ۴　۲) 8π　۳) $8\pi i$　۴) $4\pi i$

پاسخ: گزینه «۳»

$$z^2e^{\frac{4}{z^3}}=z^2\left[1+\frac{4}{z^3}+\frac{1}{2!}\left(\frac{4}{z^3}\right)^2+\cdots\right]=z^2+\frac{4}{z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{16}{z^4}\right)+\cdots$$

ملاحظه می‌گردد مانده یا همان ضریب $\frac{1}{z}$ برابر ۴ می‌باشد، پس $I=2\pi i\times 4=8\pi i$ خواهد بود.

مثال ۶۴: اگر C مرز دایره واحد (دایره به مرکز صفر و به شعاع یک) در جهت مثبت و $\bar{z}=x-iy$ مزدوج $z=x+iy$ باشد، مقدار $\oint_C\frac{e^z dz}{\bar{z}^{-2}+4}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{\pi i}{4}\sin\frac{1}{2}$　۲) $\frac{\pi i}{4}\sin\frac{1}{2}$　۳) $-\frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{2}$　۴) $-\frac{\pi}{4}\cos\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$z^{-2}+4=0 \Rightarrow 4z^2+1=0 \Rightarrow z=-\frac{i}{2}\,,\ z=\frac{i}{2}$$

$$I=\int_{|z|=1}\frac{z^2e^z}{1+4z^2}dz=2\pi i[\operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}}f(z)]=2\pi i\left[\frac{z^2e^z}{8z}\Big|_{z=\frac{i}{2}}+\frac{z^2e^z}{8z}\Big|_{z=-\frac{i}{2}}\right]=2\pi i\left[\frac{i}{16}e^{\frac{i}{2}}-\frac{i}{16}e^{-\frac{i}{2}}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{i}{16}\left(e^{\frac{i}{2}}-e^{-\frac{i}{2}}\right)\right]=-\frac{\pi i}{4}\sin\frac{1}{2}$$

مثال ۶۵: مقدار انتگرال $\oint_C\frac{e^z}{z(z+1)}dz$ روی مسیر C که دایره‌ای به معادله $|z-1|=3$ می‌باشد کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) 0　۲) $2\pi i$　۳) $2\pi i(1-e^{-1})$　۴) $2\pi i(1+e)$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I=2\pi i[\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1}f(z)]=2\pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{z+1}+\lim_{z\to -1}\frac{e^z}{z}\right]=2\pi i(1-e^{-1})$$

مثال ۶۶: برای منحنی C به صورت دایرهٔ $|z-8j|=1$ در صفحهٔ مختلط، انتگرال $\oint_C \frac{z}{\sin(z)(z-2j)}dz$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $2\pi j$ ۳) $-\pi ej$ ۴) πj

پاسخ: گزینه «۱» قطب‌های تابع $z=2j$ و $z=k\pi$ هستند که همگی خارج از ناحیه C هستند، لذا حاصل انتگرال برابر صفر خواهد بود.

مثال ۶۷: برای منحنی C به صورت دایره‌ی $|z|=\frac{1}{2}$ در صفحه‌ی مختلط، مقدار انتگرال $\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$ برابر است با $(j^2=-1)$: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\pi ej$ ۲) $-2\pi ej$ ۳) πej ۴) $2\pi ej$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. $z=0$ نقطه تکین ضروری است و با نوشتن بسط داریم:

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots)(1+z+z^2+z^3+\cdots)$$

ملاحظه می‌گردد مانده در $z=0$ یا همان ضریب $\frac{1}{z}$ برابر است با:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=(e-1)\ \Rightarrow I=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=2\pi i(e-1)$$

مثال ۶۸: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{z+1}{z^2+9}dz$ روی مسیر $|z|=4$ چیست؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) πi ۳) $2\pi i$ ۴) $4\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» تابع دارای ۲ قطب ساده $z=\pm 3i$ درون ناحیه می‌باشد، لذا داریم:

$$I=2\pi i[\operatorname*{Res}_{z=3i}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-3i}f(z)]=2\pi i[\frac{z+1}{2z}\Big|_{z=3i}+\frac{z+1}{2z}\Big|_{z=-3i}]=2\pi i[\frac{3i+1}{6i}+\frac{1-3i}{-6i}]=2\pi i$$

مثال ۶۹: مقدار $\int_{C_r}\frac{e^z}{(z^2+1)(z-3)}dz$ که در آن C_r دایره‌ای به مرکز مبدا و به شعاع r می‌باشد که $1<r<2$، کدام می‌باشد؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $-\frac{\pi}{5}(\cos 1+3\sin 1)i$ ۳) $\frac{\pi}{5}(\cos 1+2\pi e^3)i$ ۴) $-\frac{\pi}{5}e^3+\frac{\pi e^3}{10}i$

پاسخ: گزینه «۲» نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{e^z}{(z^2+1)(z-3)}$ که درون دایره c_r هستند، $z=\pm i$ می‌باشد، لذا باید مانده تابع را در این نقاط حساب کنیم:

$$z=i \text{ مانده در } =\frac{e^i}{2i(i-3)}\quad,\quad z=-i \text{ مانده در }=\frac{e^{-i}}{2(-i)(-i-3)}$$

$$\int_{c_r}f(z)dz=2\pi i[\frac{e^i}{2i(i-3)}+\frac{e^{-i}}{2i(i+3)}]=\pi[\frac{e^i}{i-3}+\frac{e^{-i}}{i+3}]=\pi[\frac{(i+3)e^{+i}+(i-3)e^{-i}}{i^2-3^2}]$$

$$=(\pi)\frac{(i+3)[\cos 1+i\sin 1]+(i-3)[\cos 1-i\sin 1]}{-10}=-\frac{\pi i}{5}(\cos 1+3\sin 1)$$

مثال ۷۰: انتگرال $\int_C \frac{\sin\pi z^3+\cos\pi z^3}{(z-2)(z-3)}dz$ که در آن $C: |z|=1$ می‌باشد، برابر است با: $(i^2=-1)$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) $-\frac{3}{2}\pi i$ ۳) $-\frac{2}{3}\pi i$ ۴) $4\pi i$

پاسخ: گزینه «۱» نقاط تکین تابع $z=2$ و $z=3$ می‌باشند که هیچکدام داخل ناحیه $|z|=1$ نیستند، پس حاصل انتگرال برابر صفر است.

مثال ۷۱: مقدار انتگرال $I=\oint_C e^{-\frac{1}{z}}\sin(\frac{1}{z})dz$، که در آن C دایره ۱ = |z| می‌باشد و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، برابر کدام گزینه است؟ (عمران نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi i}{2}$ ‌ ۲) $3\pi i$ ‌ ۳) $\frac{\pi i}{4}$ ‌ ۴) $2\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» با نوشتن بسط دو تابع $e^{-\frac{1}{z}}$ و $\sin\frac{1}{z}$ داریم:

$$e^{-\frac{1}{z}}\sin(\frac{1}{z})=(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-+\cdots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+-\cdots)$$

به راحتی معلوم است ضریب $\frac{1}{z}$ برابر ۱ است و بنابراین حاصل انتگرال برابر $I=2\pi i\times 1=2\pi i$ می‌باشد.

مثال ۷۲: کدامیک از عبارتهای زیر صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) تابع $u(x,y)=x^2-y^2$ می‌تواند جزء حقیقی تابع تحلیلی $F(x+jy)$ باشد.

۲) انتگرال $F(z)=\frac{1}{z}$ با $z=x+iy$ روی مسیری در باریکه دایروی $1<x^2+y^2<4$ برابر صفر است.

۳) $z=0$ نقطه تکین اساسی برای تابع $e^{\frac{1}{z(z^2-1)}}$ است.

۴) برای تابع تحلیلی $F(x+iy)=u(x,y)+j(x,y)$ همواره داریم: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

۱) ۱ و ۲ ‌ ۲) ۱ و ۳ ‌ ۳) ۲ و ۳ ‌ ۴) ۳ و ۴

پاسخ: گزینه «۲» هرگاه $u_{xx}+u_{yy}=0$ باشد، تابع u می‌تواند بخش حقیقی یک تابع تحلیلی باشد. در گزاره‌ی (۱) داریم $u_{xx}+u_{yy}=2-2=0$ پس این عبارت صحیح است. اگر C مسیری باشد که در باریکه‌ی $1<x^2+y^2<4$ قرار دارد، شامل $z=0$ خواهد بود پس $\int_C \frac{1}{z}dz=2\pi i$ است. پس گزاره‌ی (۲) نادرست است. به وضوح می‌دانیم که $z=0$ قطب اساسی برای $e^{\frac{1}{z(z^2-1)}}$ است. پس گزاره‌ی (۳) صحیح است. اما آخرین گزاره نادرست است. شکل صحیح این تساوی به صورت $u_{xx}+u_{yy}=0$ یا $v_{xx}+v_{yy}=0$ است. در نتیجه (۱) و (۳) صحیح هستند یعنی گزینه‌ی (۲) جواب است.

مثال ۷۳: مقدار انتگرال $\oint_{|z|=1}\frac{1}{\cos z}dz$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴ و مهندسی مواد سراسری ۸۳)

۱) ۰ ‌ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ‌ ۳) $2\pi i$ ‌ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» هیچکدام از قطب‌های تابع $f(z)=\frac{1}{\cos z}$ درون ناحیه ۱ = |z| قرار ندارد.

مثال ۷۴: مقدار انتگرال $\int_{|z|=5}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر ‌ ۲) ۱- ‌ ۳) ۵- ‌ ۴) $2\pi i$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

به وضوح همه‌ی قطب‌ها درون دایره‌ی ۵ = |z| قرار دارند. پس بهتر است از مانده در $z=\infty$ استفاده کنیم. درجه‌ی مخرج ۴ و درجه‌ی صورت ۲ است بنابراین مانده در بی‌نهایت، صفر است. یعنی داریم: $I=(-2\pi i)\times 0=0$

مثال ۷۵: تابع مختلط $f(z)$ از متغیر مختلط $z=x+iy$ مفروض است. این تابع در نقطه‌ی $z=a$ واقع بر محورِ حقیقی یک قطب ساده (قطب از مرتبه یک) دارد و مانده‌اش در آن نقطه برابر با B است. دایره‌ی $|z-a|=r$ را با جهت ساعتگرد (clockwise) در نظر می‌گیریم. r چنان کوچک است که $f(z)$ در تمام نقاط روی دایره و درون دایره به غیر از a تحلیلی است. اگر نیمه‌ی فوقانی دایره‌ی مزبور را C بنامیم، آنگاه $\lim\limits_{r\to 0}\int_C f(z)dz$ برابر است با:

(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۵)

۱) $+i\pi B$ ۲) $-i\pi B$ ۳) 0 ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲»

$$|z-a|=r \Rightarrow z=a+re^{i\theta} \Rightarrow dz=ire^{i\theta}d\theta$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(re^{i\theta})^n+\frac{B}{re^{i\theta}}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_C f(z)dz=\lim_{r\to 0}\{\sum\int a_n r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}id\theta+\int(\frac{B}{re^{i\theta}})(ire^{i\theta}d\theta)\}=0+\int_{\pi}^{0}Bid\theta=-Bi\pi$$

مثال ۷۶: اگر C دایره واحد ($|z|=1$) در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار انتگرال $\oint_C \frac{\sin\pi z}{2z^2-z}dz$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) 0 ۲) πi ۳) $2\pi i$ ۴) $4\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» نقاط تکین $z=0$ و $z=\frac{1}{2}$ می‌باشد و داریم:

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{2z^2-z}=\frac{p}{q}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{p}{q'}\Big|_{z=0}=\frac{\sin\pi z}{4z-1}\Big|_{z=0}=0\\&\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=\frac{p}{q'}\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{\sin\pi z}{4z-1}\Big|_{z=\frac{1}{2}}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\oint_{|z|=1}\frac{\sin\pi z}{2z^2-z}dz=2\pi i(0+1)=2\pi i$$

مثال ۷۷: حاصل انتگرال $\oint_C\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}dz$ در امتداد دایره $|z|=4$، کدام است؟ ($i=\sqrt{-1}$)

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{i}{\pi}$ ۲) $\frac{i}{\pi^3}$ ۳) $\frac{\pi-i}{4\pi^3}$ ۴) $\frac{\pi+i}{4\pi^3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\oint_{|z|=4}\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}dz \Rightarrow z^2+\pi^2=0\Rightarrow z=\pm i\pi$$

مانده در $z=i\pi$: $\quad \phi(z)=(z-i\pi)^2\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\Rightarrow\phi(z)=\frac{e^z}{(z+i\pi)^2}$

$$b_1=\frac{e^z(z+i\pi)^2-2(z+i\pi)e^z}{(z+i\pi)^4}\Rightarrow b_1=\frac{(-1)(2i\pi)^2+2(2i\pi)}{(2i\pi)^4}=\frac{+4\pi^2+4i\pi}{16\pi^4}$$

مانده در $z=-i\pi$: $\quad \phi(z)=(z+i\pi)^2\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}=\frac{e^z}{(z-i\pi)^2}$

$$b_1'=\frac{e^z(z-i\pi)^2-2(z-i\pi)e^z}{(z-i\pi)^4}\Rightarrow b_1'=\frac{(-1)(-2i\pi)^2+2(2i\pi)(-1)}{(-2i\pi)^4}=\frac{4\pi^2-4i\pi}{16\pi^4}\Rightarrow \text{حاصل انتگرال}=2\pi i(b_1+b_1')=\frac{i}{\pi}$$

مثال ۷۸: انتگرال $\int_{|z|=1}\frac{\cosh z}{z^5}dz$ کدام است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۶)

۱) $12\pi i$ ۲) $\frac{\pi i}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) $2\pi i$

پاسخ: گزینه «۲» اگر بسط لوران تابع $f(z)$ به فرم $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-k)^n$ باشد، آنگاه داریم:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-k)^{n+1}}dz$$

در این تست $f(z)=\cosh z$، $n=4$ و $k=0$ می‌باشد، لذا داریم:

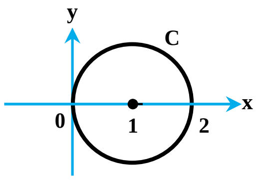
$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\cosh z}{z^5}dz=2\pi i a_4$$

$$\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\Rightarrow a_4=\frac{1}{4!}\Rightarrow I=\frac{2\pi i}{4!}=\frac{\pi i}{12}$$

مثال ۷۹: حاصل انتگرال $\oint_C \frac{dz}{(z+۱)(۲z-۱)^۲}$ وقتی مسیر C روی دایره $|z-۱|=۱$ در جهت مثبت باشد، کدام گزینه است؟ (مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{۲\pi i}{۹}$ ۲) $\frac{۴\pi i}{۳}$ ۳) $-\frac{۸\pi i}{۹}$ ۴) $\frac{۴\pi i}{۹}$

پاسخ: گزینه «۱»



نقاط تکین = $\begin{cases} z=-۱ \;,\; \text{خارج دایره } C \\ z=\frac{۱}{۲} \;,\; \text{داخل دایره } C \end{cases}$

بنابراین کافیست مقدار مانده تابع را در نقطه $z=\frac{۱}{۲}$ محاسبه کنیم. $f(z)=\frac{۱}{(z+۱)(۲z-۱)^۲}=\frac{۱}{۴(z+۱)(z-\frac{۱}{۲})^۲}$

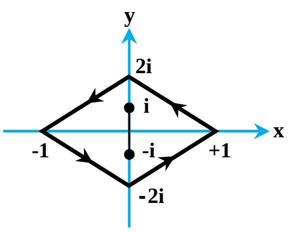
$z=\frac{۱}{۲}$ قطب مرتبه ۲ $\Rightarrow \phi(z)=(z-\frac{۱}{۲})^۲ f(z)=\frac{۱}{۴(z+۱)}$

$$b_۱=\phi'(z)\Big|_{z=\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}\left[\frac{-۱}{(z+۱)^۲}\right]_{z=\frac{۱}{۲}}=\frac{-۱}{۹}\Rightarrow \oint \frac{dz}{(z+۱)(۲z-۱)^۲}=۲\pi i b_۱=\frac{-۲\pi i}{۹}$$

مثال ۸۰: اگر Γ لوزی با رئوس ±۱ و ±۲i در صفحه و در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه حاصل $\oint_\Gamma \frac{\sin z}{z^۲+۱}dz$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\pi\sinh ۱$ ۲) $۲\pi\sinh ۱$ ۳) $\pi i\sinh ۱$ ۴) $۲\pi i\sinh ۱$

پاسخ: گزینه «۴»



$$\oint \frac{\sin z}{z^۲+۱}dz=۲\pi i[\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{\sin z}{z^۲+۱}+\operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{\sin z}{z^۲+۱}]\Rightarrow ۲\pi i[\frac{\sin z}{۲z}\Big|_{z=i}+\frac{\sin z}{۲z}\Big|_{z=-i}]$$

$$=۲\pi i[\frac{i\sinh ۱}{۲i}+\frac{(-i\sinh ۱)}{-۲i}]=۲\pi i\sinh ۱$$

مثال ۸۱: مقدار انتگرال $\oint_C \frac{\sin(z+۱)\pi+\cos\pi z}{(z-۱)(z-۲)}dz$ که در آن C دایره $|z|=۴$ با جهت مثبت است، کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $-۲\pi i$ ۲) ۰ ۳) $۲\pi i$ ۴) $۴\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» قطب‌ها $z=۱$ و $z=۲$ هستند، لذا داریم:

$$I=\oint_C \frac{\sin(z+۱)\pi+\cos\pi z}{(z-۱)(z-۲)}dz=\oint_C f(z)dz$$

$$\begin{cases} z=۱ \text{ مانده در } =\lim\limits_{z\to ۱}(z-۱)f(z)=۱ \\ z=۲ \text{ مانده در } =\lim\limits_{z\to ۲}(z-۲)f(z)=۱ \end{cases}\Rightarrow \int f(z)dz=۲\pi i(۱+۱)=۴\pi i$$

مثال ۸۲: مقدار اصلی لگاریتم عدد مختلط ناصفر z را با Logz نمایش می‌دهیم: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

$\operatorname{Log} z=\operatorname{Ln}|z|+i\operatorname{Arg} z$ جایی‌که $-\pi<\operatorname{Arg} z\le\pi$. مقدار $\frac{۱}{i\pi}\oint_C \frac{\operatorname{Log} z}{۱+i-z}dz$ که در آن C دایره‌ی $|z|=۱$ با جهت مثبت است برابر است با:

۱) $+\operatorname{Log}(i۲)$ ۲) $-i۲\pi\operatorname{Log}(i۲)$ ۳) $-\operatorname{Log}(i۲)$ ۴) $i۲\pi\operatorname{Log}(i۲)$

پاسخ: گزینه «۳» در این مثال نقاط غیرتحلیلی $\log z$ درون مرز $|z|=۱$ قرار می‌گیرند و استفاده از قضیه‌ی مانده‌ها را غیر ممکن می‌کنند. واضح است که منظور طراح سؤال دایره‌ای به مرکز $z=۱+i$ بوده است، اگر مسیر C را طوری در نظر بگیریم که فقط نقطه‌ی تکین $z=۱+i$ داخل آن باشد که احتمالاً مدنظر طراح بود مقدار انتگرال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\oint_C \frac{\log z}{۱+i-z}dz=۲\pi i\operatorname*{Res}_{z=۱+i}\frac{\log z}{۱+i-z} \quad (۱) \qquad , \qquad \operatorname*{Res}_{z=۱+i}\frac{\log z}{۱+i-z}=\frac{\log(۱+i)}{-۱} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)}\frac{۱}{i\pi}\oint_C \frac{\log z}{۱+i-z}dz=-۲\log(۱+i)=-۲(\operatorname{Ln}\sqrt{۲}+i\frac{\pi}{۴})=-(\operatorname{Ln}۲+i\frac{\pi}{۲})=-\log ۲i$$

مثال ۸۳: فرض کنید C بیضی $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد و $f(w)=\int_C \frac{z^2-z+1}{z(z-w)}dz$ در اینصورت مقدار $f'(5)$ برابر است با:

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{47\pi i}{25}$　۲) $\frac{47\pi i}{26}$　۳) $\frac{47\pi i}{24}$　۴) $\frac{48\pi i}{25}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این تست غلط است!؟ چون $z=5$ داخل ناحیه نیست ولی اگر این موضوع را نادیده بگیریم! داریم:

$$g(z)=\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}\Rightarrow z(z-w)=0\Rightarrow\begin{cases}z=0 & \text{چون در محدوده نمی‌باشد غیرقابل قبول است.}\\ z=w\end{cases}$$

$$\underset{z=w}{\operatorname{Res}}\,g(z)=\frac{w^2-w+1}{w}=w-1+\frac{1}{w}\Rightarrow f(w)=\int_c g(z)dz=2\pi i(w-1+\frac{1}{w})\Rightarrow f'(w)=2\pi i(1-\frac{1}{w^2})\ \Rightarrow f'(5)=2\pi i(1-\frac{1}{25})=\frac{48\pi i}{25}$$

مثال ۸۴: مقدار انتگرال $\oint_C \frac{2z^3-3}{z(z-1-i)^2}dz$ وقتی که C منحنی متشکل از $|z|=2$ خلاف جهت دوران عقربه‌های ساعت و $|z|=1$ در جهت دوران عقربه‌های ساعت می‌باشد عبارت است از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) $\pi(5+8i)$　۲) $\pi(5-8i)$　۳) $\pi(-5+8i)$　۴) $-\pi(5+8i)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون c متشکل از دو منحنی $|z|=2$ خلاف جهت دوران عقربه‌های ساعت و $|z|=1$ در جهت دوران عقربه‌های ساعت می‌باشد لذا فقط نقاط تکین بین این دایره‌ها را مدنظر قرار می‌دهیم.

$$I=\oint\frac{2z^3-3}{z(z-1-i)^2}dz$$

$$z(z-1-i)^2=0\Rightarrow\begin{cases}z=0 & \to \text{کاری با این قطب نداریم}\\ z=1+i & \to \text{قطب از مرتبه دوم (فقط } z=1+i\text{، نقطه تکین بین دایره‌ها است)}\end{cases}$$

$$\underset{z=1+i}{\operatorname{Res}}f(z)=\lim_{z\to1+i}\left(\frac{(z-1-i)^2.(2z^3-3)}{z(z-1-i)^2}\right)'=\lim_{z\to1+i}\left(\frac{2z^3-3}{z}\right)'=\lim_{z\to1+i}\frac{6z^3-2z^3+3}{z^2}=\lim_{z\to1+i}\frac{4z^3+3}{z^2}=\frac{4(1+i)^3+3}{(1+i)^2}=4+\frac{5}{2}i$$

$$I=\oint\frac{2z^3-3}{z(z-1-i)^2}dz=2\pi i\underset{z=1+i}{\operatorname{Res}}f(z)=2\pi i\times(4+\frac{5}{2}i)=8\pi i-5\pi=\pi(8i-5)$$

مثال ۸۵: مقدار انتگرال $\oint\frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4}$ روی دایره C با $|z|=3$ در جهت مثبت را بیابید.

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{16}{6}\pi e^{+2}i$　۲) $\frac{8}{6}\pi e^{-2}i$　۳) $\frac{16}{6}\pi e^{-2}i$　۴) $\frac{8}{6}\pi e^{+2}i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$(z+1)^4=0\Rightarrow z=-1$; قطب از مرتبه ۴ می‌باشد

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\Rightarrow\underset{z=-1}{\operatorname{Res}}f(z)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to-1}(e^{2z})'''=\frac{1}{6}\lim_{z\to-1}8e^{2z}=\frac{8}{6}e^{-2}\Rightarrow\oint_{|z|=3}f(z)dz=2\pi i\underset{z=-1}{\operatorname{Res}}f(z)=2\pi i\times\frac{8}{6}e^{-2}=\frac{16}{6}\pi e^{-2}i$$

مثال ۸۶: حاصل انتگرال $\int_{|z|=1}z^2\sin(\frac{1}{z})dz$ برابر است با:

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\pi}{2}i$　۲) $-2\pi i$　۳) $2\pi i$　۴) $-\frac{\pi i}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $z=0$ یک نقطه تکین اساسی است لذا با نوشتن بسط لوران تابع $z^2\sin\frac{1}{z}$ و یافتن ضریب $\frac{1}{z}$ مقدار مانده در $z=0$ را بدست می‌آوریم:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Rightarrow z^2\sin\frac{1}{z}=z^2[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^5 5!}-\cdots]=z-\frac{1}{3!}.\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}.\frac{1}{z^3}-\cdots$$

پس مقدار مانده تابع $z^2\sin\frac{1}{z}$ در $z=0$ برابر $\frac{-1}{3!}$ می‌باشد و داریم:

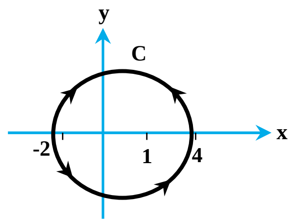
$$\int_{|z|=1}z^2\sin(\frac{1}{z})dz=2\pi i\times\underset{z=0}{\operatorname{Res}}f(z)=2\pi i\times\frac{-1}{6}=\frac{-\pi i}{3}$$

مثال ۸۷: مطلوب است مقدار انتگرال مختلط داده شده در صورتی که C دایره‌ای به معادله‌ی $|z-۱|=۳$ باشد: $\oint_C \frac{(z+۲)^۲}{۴z^۳+z}dz$

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\pi}{۲}i$ ۲) $\frac{\pi}{۳}i$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}i$ ۴) $-\frac{\pi}{۳}i$

پاسخ: گزینه «۱»



$$\oint_C \frac{(z+۲)^۲}{۴z^۳+z}dz \quad , \quad ۴z^۳+z=۰ \Rightarrow z(۴z^۲+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} z=۰ \to \text{قطب ساده} \\ z=\frac{i}{۲} \to \text{قطب ساده} \\ z=\frac{-i}{۲} \to \text{قطب ساده} \end{cases}$$

با توجه به فرمول داریم:

$$\underset{z=z_۰}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{P(z_۰)}{q'(z_۰)}$$

$$\underset{z=۰}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{(۰+۲)^۲}{۱۲(۰)^۲+۱}=\frac{۴}{۱}=۴ \quad , \quad \underset{z=\frac{i}{۲}}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{(\frac{i}{۲}+۲)^۲}{۱۲(\frac{i}{۲})^۲+۱}=\frac{-\frac{۱}{۴}+۴+۲i}{۱۲(\frac{-۱}{۴})+۱}=\frac{۲i+\frac{۱۵}{۴}}{-۲}=-i-\frac{۱۵}{۸}$$

$$\underset{z=\frac{-i}{۲}}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{(\frac{-i}{۲}+۲)^۲}{۱۲(\frac{-i}{۲})^۲+۱}=\frac{\frac{-۱}{۴}+۴-۲i}{۱۲(\frac{-۱}{۴})+۱}=\frac{-۲i+\frac{۱۵}{۴}}{-۲}=i-\frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$$

$$\oint_C \frac{(z+۲)^۲}{۴z^۳+z}dz=۲\pi i\Sigma \operatorname{Res} f(z)=۲\pi i[۴+(-i-\frac{۱۵}{۸})+(i-\frac{۱۵}{۸})]=۲\pi i(۴-\frac{۳۰}{۸})=\frac{\pi i}{۲}$$

مثال ۸۸: مقدار انتگرال $\int_{|z|=۲}\frac{dz}{z^۲\sin z}$ در جهت مثلثاتی برابر است با:

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{\pi i}{۳}$ ۴) $۲\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به بسط $\sin z=z-\frac{z^۳}{۳!}+\frac{z^۵}{۵!}-\cdots$ داریم:

$$\frac{۱}{z^۲\sin z}=\frac{۱}{z^۳}\left(\frac{۱}{۱-\frac{z^۲}{۳!}+\cdots}\right)=\frac{۱}{z^۳}(۱+\frac{z^۲}{۳!}-\cdots)=\frac{۱}{z^۳}+\frac{۱}{۳!}\frac{۱}{z}+\cdots \Rightarrow \text{مانده در } z=۰ =\frac{۱}{۶} \Rightarrow I=۲\pi i(\frac{۱}{۶})=\frac{\pi i}{۳}$$

تذکر: در محاسبه فوق، از بسط $\frac{۱}{۱-u}=۱+u-u^۲+\cdots$ برای مخرج کسر استفاده کردیم.

مثال ۸۹: انتگرال $\oint_{|z|=۱}\frac{|dz|}{|z-a|^۲}$، که در آن $a\in C$ و $|a|<۱$، برابر است با:

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰ ۲) $\frac{۲\pi}{۱-|a|^۲}$ ۳) ۱ ۴) $۲\pi|a|$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$z=x+yi \ , \ a=\alpha+\beta i$$

$$I=\int_{|z|=۱}\frac{|dz|}{|z-a|^۲}=\int_c \frac{\sqrt{dx^۲+dy^۲}}{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲}=\int \frac{ds}{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲}$$

$$\begin{cases} x=\cos\theta \Rightarrow x'_\theta=-\sin\theta \\ y=\sin\theta \Rightarrow y'_\theta=\cos\theta \end{cases} \quad ds=\sqrt{x'^۲_\theta+y'^۲_\theta}\,d\theta \Rightarrow I=\int \frac{ds}{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲}=\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{(\cos\theta-\alpha)^۲+(\sin\theta-\beta)^۲}$$

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}\ ,\ \sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}\ ,\ d\theta=\frac{dz}{iz}\Rightarrow\int\frac{1}{\left(\frac{z^2+1}{2z}-\alpha\right)^2+\left(\frac{z^2-1}{2iz}-\beta\right)^2}\cdot\frac{dz}{iz}=\int\frac{1}{\frac{(z^2+1-2\alpha z)^2}{4z^2}-\frac{(z^2-1-2\beta iz)^2}{4z^2}}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{4}{i}\int\frac{zdz}{[(z^2+1-2\alpha z)-(z^2-1-2\beta iz)][(z^2+1-2\alpha z)+(z^2-1-2\beta iz)]}$$

$$=\frac{4}{i}\int\frac{zdz}{(2-2\alpha z+2\beta iz)(2z^2-2\alpha z-2\beta iz)}=\frac{1}{i}\int\frac{dz}{[1+z(-\alpha+\beta i)][z-(\alpha+\beta i)]}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(1-z.\bar{a})(z-a)}$$

$$(1-z.\bar{a})(z-a)=0\Rightarrow\begin{cases}1-z\bar{a}=0\Rightarrow z=\dfrac{1}{\bar{a}}\ \text{خارج از محدوده است}\\ z=a\end{cases}\Rightarrow I=\frac{1}{i}\times2\pi i\times\frac{1}{1-a.\bar{a}}=\frac{2\pi}{1-|a|^2}$$

مثال ۹۰: مقدار انتگرال $\oint_{|z|=4}\frac{z}{\sin z}dz$ برابر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $-2\pi i$ ۲) 0 ۳) $2\pi i$ ۴) $4\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ ریشه‌های معادله $\sin z=0$ می‌باشند. $(k=0,1,2,\cdots)$ $f(z)=\frac{z}{\sin z}\Rightarrow\sin z=0\Rightarrow z=\pm k\pi$

نقاط غیرتحلیلی $z=0$، $z=\pi$ و $z=-\pi$ داخل دایره $|z|=4$ قرار دارند، پس داریم:

$$\underset{z=0}{\text{Res}}\ f(z)=\frac{p}{q'}\bigg|_{z=0}=\frac{z}{\cos z}\bigg|_{z=0}=0\ ;\ \underset{z=\pi}{\text{Res}}\ f(z)=\frac{p}{q'}\bigg|_{z=\pi}=\frac{z}{\cos z}\bigg|_{z=\pi}=-\pi\ ;\ \underset{z=-\pi}{\text{Res}}\ f(z)=\frac{p}{q'}\bigg|_{z=-\pi}=\frac{z}{\cos z}\bigg|_{z=-\pi}=\pi$$

بنابراین داریم:

$$I=\oint_{|z|=4}\frac{z}{\sin z}dz=2\pi i[\underset{z=0}{\text{Res}}f(z)+\underset{z=\pi}{\text{Res}}\ f(z)+\underset{z=-\pi}{\text{Res}}\ f(z)]=0-\pi+\pi=0$$

توجه: نقطه‌ی $z=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی یک صورت و ریشه‌ی مرتبه‌ی یک مخرج است. پس نقطه‌ی تکین رفع شدنی است. از همین‌جا معلوم بود که مانده در این نقطه صفر می‌شود. اما استفاده از فرمول $\frac{p(z)}{q'(z)}$ هم برای مطمئن شدن ایرادی ندارد! از طرفی بدون محاسبات فوق نیز می‌توانستیم به سؤال جواب دهیم. $f(z)$ زوج است و نقاط تکین درون مرز قرینه‌ی هم و صفر هستند، پس مجموع مانده‌ها و در نتیجه حاصل انتگرال صفر می‌شود.

مثال ۹۱: پاسخ انتگرال مختلط $\oint_C\frac{2z+1}{z^3-iz^2+6z}dz$ کدام است؟ (منحنی C دایره‌ای است به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $3i$) (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) $2\pi i$ ۳) $\frac{\pi}{15}(12-2i)$ ۴) $\frac{\pi}{15}(12+2i)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\frac{2z+1}{z^3-iz^2+6z}$ عبارتند از:

$$z^3-iz^2+6z=0\Rightarrow z(z-3i)(z+2i)=0\ \Rightarrow z=0\ ,\ z=-2i\ ,\ z=3i$$

فقط نقطه $z=3i$ داخل مسیر c قرار می‌گیرد، بنابراین داریم:

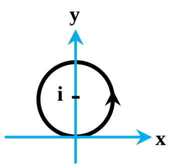
$$I=2\pi i[\underset{z=3i}{\text{Res}}\,f(z)]=2\pi i[\frac{P}{q'}|_{z=3i}]=2\pi i[\frac{2z+1}{3z^2-2iz+6}|_{z=3i}]=2\pi i[\frac{6i+1}{-27+6+6}]=2\pi i[\frac{6i+1}{-15}]=\frac{\pi}{15}(12-2i)$$

مثال ۹۲: انتگرال $\int_C\frac{\sin z\,dz}{z^2+1}$ که در آن مسیر C دایره‌ای در خلاف جهت حرکت ساعت، به مرکز i و شعاع ۱ است، کدام است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۸)

۱) $\pi i\sin 1$ ۲) $\pi\sin i$ ۳) $\pi i\sinh 1$ ۴) $\pi i\sin i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲ و ۳»



$$I=\oint_C\frac{\sin(z)dz}{z^2+1}=2\pi i\sum\text{Res}\,f(z)\quad \text{و}\quad z^2+1=0\Rightarrow z=\pm i\begin{cases}z=i & \text{چون در محدوده‌ی C است قابل قبول است}\\ z=-i & \text{چون در محدوده‌ی C نیست غیرقابل قبول است}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=2\pi i\times\underset{z=i}{\text{Res}}\,f(z)=2\pi i\frac{\sin(i)}{2i}=\pi\sin(i)$$

از طرفی می‌دانیم که $\sin(i)=i\sinh(1)$ است. بنابراین گزینه‌ی (۳) هم صحیح است. اگر این رابطه را در خاطر ندارید به محاسبه‌ی زیر توجه کنید:

$$[\sin(i)=\frac{e^{i(i)}-e^{-i(i)}}{2i}=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}=i\sinh(1)]$$

مثال ۹۳: مقدار انتگرال $\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}dz$ روی منحنی $C: |z-i|=1$ در جهت مثبت، برابر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{2\pi i}{e}$ ۲) $-2\pi ie$ ۳) $-2\pi i$ ۴) $\frac{2\pi i}{e}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I=\oint_c \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}dz=2\pi i[\operatorname{Res}_{z=i}\frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}]$$

$z=i$ قطب مرتبه سوم تابع $f(z)=\frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\phi(z)=(z-i)^3 f(z)=e^{z^2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z)=\frac{\phi''(z)}{2!}\Big|_{z=i}=\frac{2e^{z^2}+4z^2e^{z^2}}{2!}\Big|_{z=i}=\frac{-1}{e}\Rightarrow I=2\pi i(\frac{-1}{e})=\frac{-2\pi i}{e}$$

مثال ۹۴: مقدار انتگرال $I=\oint_C \frac{\exp z^2}{(z+i)^4}dz$ وقتی که C دایره $|z+i|=2$ و در جهت مثبت می‌باشد عبارت است از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $I=\frac{8}{3}\pi e$ ۲) $I=\frac{8}{3}\pi e^{-1}$ ۳) $I=\frac{4}{3}\pi e$ ۴) $I=\frac{4}{3}\pi e^{-1}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$I=\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z+i)^4}dz \quad \text{و} \quad (z+i)^4=0\Rightarrow z=-i \ ; \ \text{قطب از مرتبه ۴}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-i} f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{1}{(4-1)!}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{(z+i)^4.e^{z^2}}{(z+i)^4}\right]=\lim_{z\to -i}\frac{1}{6}(e^{z^2})'''=\lim_{z\to -i}\frac{1}{6}\times(2ze^{z^2})''=\lim_{z\to -i}\frac{1}{6}\times(2e^{z^2}+4z^2.e^{z^2})'$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{1}{6}\times(4ze^{z^2}+8ze^{z^2}+8z^3.e^{z^2})=\frac{1}{6}(-4i\times e^{(-i)^2}-8ie^{(-i)^2}+8(-i)^3.e^{(-i)^2})=\frac{1}{6}(-4i\times e^{-1}-8i\times e^{-1}+8ie^{-1})=\frac{-4i}{6e}$$

$$\Rightarrow I=2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z)=2\pi i\times\frac{-4i}{6e}=\frac{+4\pi}{3e}$$

مثال ۹۵: حاصل $I=\oint_C \frac{1-\cos z}{z^2e^z}dz$ که در آن C خم بسته‌ای در جهت مثلثاتی است که توسط سهمی‌های $y=x^2$ و $x=y^2$ ایجاد می‌شود، کدام است.

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) πi ۳) $2\pi i$ ۴) $-2\pi i$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2e^z}$ یک نقطه‌ی تکین در $z=0$ دارد. این نقطه ریشه‌ی مرتبه دوی مخرج و ریشه‌ی مرتبه‌ی دوی صورت است. (کافیست به هم‌ارزی $1-\cos z\simeq\frac{z^2}{2}$ توجه کنید.) پس $z=0$ یک نقطه‌ی تکین رفع شدنی است بنابراین $\operatorname{Res}(f,0)=0$ و در نتیجه داریم:

$$I=\int_C f(z)dz=2\pi i\times 0=0$$

توضیح: نقطه‌ی $z=0$ دقیقاً روی مرز C قرار گرفته است، با این حال چون مانده‌ی f در این نقطه برابر با صفر است، تفاوتی ندارد که این نقطه روی مرز باشد یا درون آن باشد. اگر مانده‌ی f در این نقطه صفر نمی‌شد، سؤال دارای ایراد علمی بود.

مثال ۹۶: مقدار انتگرال $\oint_{|z|=2} \operatorname{tg}z dz$ برابر است با: (برق ـ سراسری ۷۸ و MBA ـ سراسری ۸۴ و مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) $-2\pi i$ ۳) $-4\pi i$ ۴) $4\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ در درون دایره ۲ $|z|=$ عبارتند از: $f(z)=\frac{\sin z}{\cos z}$, $\cos z=0\Rightarrow z=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

فقط نقاط $z=\pm\frac{\pi}{2}$ درون دایره ۲ $|z|=$ قرار دارند، لذا داریم:

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}}=-1 \ , \ \operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z)=\frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\sin(-\frac{\pi}{2})}=-1\Rightarrow I=2\pi i(-1-1)=-4\pi i$$

مثال ۹۷: مقدار انتگرال $I = \oint_C \frac{z+5}{z^2+3z-5}dz$ وقتی که $C: |z+3| = 2$ در جهت مثبت می‌باشد،کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) $I = \frac{\pi i}{5}$ ۲) $I = -\frac{\pi i}{5}$ ۳) $I = \frac{2\pi i}{5}$ ۴) $I = -\frac{2\pi i}{5}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا نقاط تکین تابع زیر انتگرال را تعیین می‌کنیم.

$$z^2+3z-5=0 \Rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}\ ,\ z_2 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$$

$$z^2+3z-5 = (z-z_1)(z-z_2) = (z+\frac{3+\sqrt{29}}{2})(z+\frac{3-\sqrt{29}}{2})$$

چون فقط $z_2 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ درون منحنی c قرار دارد، لذا طبق قضیه کوشی ـ گورسا داریم:

$$\oint_C \frac{\frac{z+5}{(z+\frac{3-\sqrt{29}}{2})}}{z+\frac{3+\sqrt{29}}{2}}dz = 2\pi i\left(\frac{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}+5}{(\frac{-3-\sqrt{29}}{2}+\frac{3-\sqrt{29}}{2})}\right) = -2\pi i\left(\frac{7-\sqrt{29}}{2\sqrt{29}}\right)$$

مثال ۹۸: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ کدام است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{8\pi i e^{-2}}{3}$ ۲) $\frac{1+4\pi i e^{-\pi}}{3}$ ۳) $\frac{1-\pi i e^{-3}}{4\pi}$ ۴) $\frac{18e^{-\pi}i}{7}+1$

پاسخ: گزینه «۱» نقطه $z=-1$، نقطه تکین تابع زیر انتگرال می‌باشد. با استفاده از قضیه کوشی‌ـ گورسا داریم:

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz = 2\pi i\left[\frac{(e^{2z})'''}{3!}\right]_{z=-1}$$

پس باید از e^{2z}، سه بار مشتق بگیریم و به جای z آن عدد ۱- را قرار دهیم:

$$f(z) = e^{2z} \Rightarrow f'(z) = 2e^{2z} \Rightarrow f''(z) = 4e^{2z} \Rightarrow f'''(z) = 8e^{2z} \Rightarrow f'''(-1) = 8e^{-2}$$

لذا حاصل انتگرال برابر با مقدار مقابل است:

$$\frac{8e^{-2}}{3!}\times 2\pi i = \frac{8e^{-2}\times 2\pi i}{1\times 2\times 3} = \frac{8\pi i e^{-2}}{3}$$

مثال ۹۹: حاصل انتگرال $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-\sin z}dz$ کدام است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست! حاصل انتگرال داده شده برابر مانده در $z=0$ می‌باشد. واضح است $z=0$ قطب تابع می‌باشد، اما چون قطب مرتبه سوم می‌باشد، استفاده از فرمول‌های مانده نمی‌تواند جالب باشد. نوشتن بسط دو تابع e^z و $\sin z$ و تقسیم صورت بر مخرج و تعیین ضریب $\frac{1}{z}$ بهترین راه است.

$$\frac{e^z}{z-\sin z} = \frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots}{z-(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots)} = (1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)\frac{1}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots} = (1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)\frac{1}{\frac{z^3}{6}(1-\frac{6z^2}{120}+\cdots)}$$

$$= \frac{6}{z^3}(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)(1+\frac{6z^2}{120}+\cdots) \Rightarrow \text{ضریب}\ \frac{1}{z} = \frac{6}{2}+\frac{36}{120} = \frac{33}{10}$$

مثال۱۰۰: اگر C مرز (منحنی) دایره $|z|=2$ پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2(z^2+\frac{\pi^2}{4})}dz$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $-4\pi i$ ۲) 0 ۳) $2\pi i$ ۴) $4\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همه‌ی قطب‌ها درون مرز هستند. بهتر است از مانده در $z=\infty$ استفاده کنیم.

$$g(z)=-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})=-\frac{1}{z^2}[\frac{\cosh\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}(\frac{1}{z^2}+\frac{\pi^2}{4})}]$$

حال واضح است که $g(z)$ زوج است و مانده‌ی آن در $z=0$ برابر است با صفر. بنابراین داریم:

$$I=-2\pi i\,\text{Res}(f,\infty)=-2\pi i\,\text{Res}(g,0)=0$$

توضیح: البته نیازی به محاسبات فوق نیست! از آنجا که $f(z)$ زوج است و نقاط تکین داخل مرز، قرینه‌ی یکدیگر و همچنین نقطه‌ی صفر تکین دیگر می‌باشد، مجموع مانده‌ها و حاصل انتگرال صفر می‌شود.

مثال۱۰۱: مقدار انتگرال $\oint_C \frac{dz}{z\sin z}$ روی دایرهٔ یکه ($|z|=1$) عبارت است از:

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $-2\pi i$ ۲) صفر ۳) $\frac{2\pi i}{\sin\pi}$ ۴) $2\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

روش اول: تابع $f(z)=\frac{1}{z\sin z}$ را در نظر می‌گیریم. نقطه $z=0$ قطب مرتبه دوم تابع f است، لذا داریم:

$$\underset{z=0}{\text{Res}}\,f(z)=\underset{z\to 0}{\text{Lim}}(\frac{z^2}{z\sin z})'=\underset{z\to 0}{\text{Lim}}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}=\frac{0}{0}\ \underline{\underline{HOP}}\ \underset{z\to 0}{\text{Lim}}\frac{\cancel{\cos z}-\cancel{\cos z}+z\sin z}{2\sin z\cos z}=0$$

$$\Rightarrow I=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}=2\pi i\,\underset{z=0}{\text{Res}}\,f(z)\Rightarrow I=(2\pi i)\times 0=0$$

روش دوم: می‌دانیم مانده توابع زوج در $z=0$ برابر صفر است. چون $f(z)=\frac{1}{z\sin z}$، تابعی زوج است، لذا مانده برابر صفر و در نتیجه حاصل انتگرال صفر می‌شود.

مثال۱۰۲: مقدار انتگرال $\oint_{|z|=2}\frac{dz}{\cosh z}$ (دایره بسته در جهت مثلثاتی پیموده شده) چقدر است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) $-2\pi i$ ۲) i ۳) $2\pi i$ ۴) 0

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $\frac{1}{\cosh z}$ دارای دو قطب ساده $z=\pm\frac{\pi}{2}i$ در داخل دایره $|z|=2$ می‌باشد لذا بنا به قضیه مانده‌ها خواهیم داشت:

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{dz}{\cosh z}=2\pi i\sum_{z=\pm\frac{\pi}{2}i}\text{Res}f(z)=2\pi i(\frac{1}{i}-\frac{1}{i})=0$$

مثال۱۰۳: ثابت بسط به سری تابع $|a|<1$, $f(\theta)=\frac{1}{1-a\cos\theta}$ را به‌دست آورید.

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{2^n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(2n)!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{a}{2})^n$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم:

$$\frac{1}{1-a\cos\theta}=\frac{1}{1-\frac{a}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}=\frac{1}{1-\frac{a}{2}(z+\frac{1}{z})}$$

بنابراین $f(z)=\frac{1}{1-\frac{a}{2}(z+\frac{1}{z})}$ است. طبق فرمول ضرایب سری لوران، جمله‌ی ثابت سری برابر است با:

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{(z-0)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-\frac{a}{2}z^2+z-\frac{a}{2}}$$

ریشه‌های مخرج را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta = 1-a^2 > 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{-a}$$

با استفاده از شرط $|a|<1$ متوجه می‌شویم که $z_1 = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ درون مرز و $z_2 = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ خارج از مرز قرار دارد. کافیست آن‌ها را به توان دو برسانید. می‌بینید که $|z_2^2|>1$ و $|z_1^2|<1$ است. مانده‌ی $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{-\frac{a}{2}z^2 + z - \frac{a}{2}}$ را در نقطه‌ی z_1 بدست می‌آوریم.

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{-az_1+1} = \frac{1}{-1+\sqrt{1-a^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

بنابراین داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \times 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = (\arcsin a)'$$

عبارت $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$، مشتقِ $\arcsin a$ است. بسط مک‌لورن $\arcsin a$ را نوشته و از آن مشتق می‌گیریم:

$$\arcsin a = a + \frac{a^3}{2\times 3} + \frac{3a^5}{2\times 4\times 5} + \cdots$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = 1 + \frac{3a^2}{2\times 3} + \frac{15a^4}{2\times 4\times 5} + \cdots = 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{3a^4}{2^3} + \cdots$$

مثال ۱۰۴: حاصل انتگرال مختلط $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}$ روی دایره $C: |z-1| = 3$ در جهت مثلثاتی چقدر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $-2\pi i$ ۲) $-2\pi i(1-e^{-1})$ ۳) $2\pi i$ ۴) $2\pi i(1-e^{-1})$

پاسخ: گزینه «۴» نقاط غیرتحلیلی تابع زیر انتگرال عبارتند از:

$$z(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \ ; & \text{قطب ساده} \\ z = -1 \ ; & \text{قطب ساده} \end{cases}$$

با توجه به اینکه هر دو نقطه فوق داخل مرز $|z-1| = 3$ قرار دارند، می‌توان چنین نوشت:

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz = 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z(z+1)} + \mathrm{Res}_{z=-1} \frac{e^z}{z(z+1)} \right] = 2\pi i \left[\frac{e^z}{z+1}\Big|_{z=0} + \frac{e^z}{z}\Big|_{z=-1} \right] = 2\pi i(1-e^{-1})$$

مثال ۱۰۵: اگر جهت دایره $C: |z| = 1$ جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، انتگرال $\int_C \frac{\sin z}{z^4} dz$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{\pi i}{3}$ ۲) 0 ۳) $\frac{\pi i}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که مسیر انتگرال‌گیری درجهت حرکت عقربه‌های ساعت است، می‌توان چنین نوشت:

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^4} dz = -2\pi i \{\mathrm{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4}\} = -2\pi i [-\frac{1}{6}] = \frac{\pi i}{3}$$

مثال ۱۰۶: مقدار انتگرال $\oint_C \frac{\cosh z}{(z^2+1)^2}$ وقتی که C دایره $|z+1-\frac{1}{2}i| = \frac{3}{2}$ است و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت جهت داده شده کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{2}(\sin 1 - \cos 1)$ ۲) $\frac{\pi}{2}(\sin 1 + \cos 1)$ ۳) $\frac{\pi}{2}(\sinh 1 - \cosh 1)$ ۴) $\frac{\pi}{2}(\sinh 1 + \cosh 1)$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا ریشه‌های مخرج که همان نقاط غیر تحلیلی می‌باشند را به دست می‌آوریم:

$$(z^2+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = i \ ; & \text{قطب‌مرتبه ۲} \\ z = -i \ ; & \text{قطب‌مرتبه ۲} \end{cases}$$

نقطه غیرتحلیلی $z = -i$ خارج دایره c قرار دارد. زیرا داریم:

$$|-i+1-\frac{1}{2}i| = |1-\frac{3}{2}i| = \sqrt{1+\frac{9}{4}} > \frac{3}{2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I = 2\pi i [\mathrm{Res}_{z=i} \frac{\cosh z}{(z^2+1)^2}] = [2\pi i \{\frac{d}{dz}(\frac{\cosh z}{(z+i)^2})\Big|_{z=i}] = 2\pi i [\frac{\sinh z (z+i)^2 - 2(z+i)\cosh z}{(z+i)^4}\Big|_{z=i}] = 2\pi i [\frac{\sin 1 + \cos 1}{4i}] = \frac{\pi}{2}(\sin 1 + \cos 1)$$

مثال ۱۰۷: مقدار انتگرال $\oint_{|z+2|=1} \frac{Ln(z^2+1)}{(z+2)z^2}dz$ برابر با کدام گزینه زیر است؟

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi Ln3}{4}i$ ۲) $\frac{\pi Ln5}{4}i$ ۳) $\frac{\pi Ln3}{2}i$ ۴) $\frac{\pi Ln5}{2}i$

پاسخ: گزینه «۴» نقاط غیرتحلیلی تابع زیر انتگرال عبارتند از:

$$(z+2)z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & ; \text{قطب مرتبه ۲} \\ z = -2 \end{cases}$$

نقاط غیرتحلیلی تابع $Ln(z^2+1)$ خارج دایره $|z+2|=1$ قرار دارند و قطب $z=0$ نیز خارج دایره $|z+2|=1$ است. بنابراین داریم:

$$\oint_C \frac{Ln(z^2+1)}{(z+2)z^2} = 2\pi i\Big[\underset{z=-2}{Res}\frac{Ln(z^2+1)}{(z+2)z^2}\Big] = 2\pi i\Big[\frac{Ln(z^2+1)}{z^2}\Big|_{z=-2}\Big] = 2\pi i(\frac{Ln5}{4}) = \frac{\pi Ln5}{2}i$$

توجه: در آزمون‌ها، اگر در هر چهار گزینه برای انتگرال مقدار داده شده بود، عملاً بررسی این که نقاط غیرتحلیلی تابع Ln داخل ناحیه و یا خارج ناحیه هستند، لزومی ندارد. زیرا این نقاط اگر قرار باشد داخل ناحیه باشند، چون غیرتنها هستند، پس انتگرال قابل محاسبه نخواهد بود.

مثال ۱۰۸: حاصل انتگرال $\oint_C z^{-4}\cos 2z dz$ برابر کدام است؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) 0 ۲) $\frac{\pi i}{2}$ ۳) πi ۴) $2\pi i$

پاسخ: گزینه «۱» این تست منحنی C را مشخص نکرده است و بی‌تردید اگر طراح گزینه‌ای تحت عنوان «به دلیل عدم اطلاع از منحنی C، قابل محاسبه نیست» را به عنوان یکی از گزینه‌ها مطرح می‌کرد، تست می‌توانست کمی جذاب‌تر شود. اما دقت کنید نیازی به منحنی C نیست، چون حاصل انتگرال داده شده برابر مقدار زیر است:

$$\oint_C \frac{\cos 2z}{z^4}dz = 2\pi i \ (\text{مانده تابع زیر انتگرال در نقطه } z_0 = 0)$$

و چون مانده تابع (یعنی ضریب $\frac{1}{z}$) برابر صفر است، حاصل انتگرال صفر می‌شود. (بدون توجه به این که نقطه تکین $z=0$ درون C قرار دارد یا نه حاصل صفر می‌شود، چون مانده صفر است.)

نکته: در توابع زوج مانده در نقطه‌ی $z_0 = 0$ همواره برابر صفر است. در این تست تابع $\frac{\cos 2z}{z^4}$ تابعی زوج است و در قطب $z_0 = 0$، مانده همواره صفر است.

درسنامه۴: محاسبه‌ی انتگرال توابع حقیقی و برخی سری‌های عددی به کمک قضیه مانده‌ها

مثال۱: حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۱» با جایگزینی $\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$ و $d\theta=\frac{1}{iz}dz$ داریم:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{5+\frac{3}{2i}(z-\frac{1}{z})}(\frac{dz}{iz})=\int_{|z|=1}\frac{1}{5iz+\frac{3}{2}(z^2-1)}dz=\int_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$$

با به دست آوردن ریشه‌های مخرج داریم:

$$z=\frac{-10i\pm\sqrt{-100+36}}{6}=\frac{-10i\pm 8i}{6}=-3i\ ,\ \frac{-i}{3}$$

فقط $z=-\frac{i}{3}$ درون دایره‌ی $|z|=1$ قرار دارد، پس با فرض $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{3}}f(z)=\frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{z=-\frac{i}{3}}=\frac{2}{6z+10i}\Big|_{z=-\frac{i}{3}}=\frac{1}{4i}$$

$$I=2\pi i\times\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$$

مثال۲: حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

پاسخ : گزینه «۱» با جایگزین کردن مقادیر گفته شده داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{3-(z+\frac{1}{z})+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}=2\times 2\pi i[\text{Res }(\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i})]$$

با صفر قرار دادن مخرج، دو قطب $z_1=\frac{2-i}{5}$ و $z_2=2-i$ حاصل می‌شود که فقط $z_1=\frac{2-i}{5}$ در داخل دایره $|z|=1$ قرار دارد لذا داریم:

$$I=4\pi i\times\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}=4\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{1}{2(1-2i)z+6i}\Rightarrow I=4\pi i\times\frac{1}{2(1-2i)\times\frac{2-i}{5}+6i}=\pi$$

مثال۳: حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 2π ۳) $2\pi i$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۲» با جایگزینی $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}=\oint\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2\sqrt{2}z-(z^2+1)}{2z}}=\frac{1}{i}\oint\frac{2dz}{2\sqrt{2}z-z^2-1}=\frac{1}{i}\oint\frac{-2dz}{z^2-2\sqrt{2}z+1}$$

با صفر قرار دادن مخرج کسر، قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^2-2\sqrt{2}z+1=0\Rightarrow z=\sqrt{2}+1\ ,\ z=\sqrt{2}-1$$

که از بین دو قطب فوق فقط $z=\sqrt{2}-1$ درون دایره $|z|=1$ واقع است، لذا داریم:

$$I=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1}f(z)=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1}[\frac{-2}{z^2-2\sqrt{2}z+1}]=-4\pi i\times\frac{1}{2z-2\sqrt{2}}\Big|_{z=\sqrt{2}-1}=-4\pi i(\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)-2\sqrt{2}})=2\pi i$$

دقت کنید پشت انتگرال ضریب $\frac{1}{i}$ داشتیم، پس $I=\frac{1}{i}(2\pi i)=2\pi$.

مثال ۴: حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

پاسخ : گزینه «۳» تابع دارای قطب‌های $z=\pm 2i$ و $z=\pm i$ می‌باشد که فقط i و $2i$ در نیم‌صفحه فوقانی قرار دارند. با فرض $p(z)=z^2-1$ و $q(z)=z^4+5z^2+4$ خواهیم داشت:

$$I=2\pi i[\frac{p(i)}{q'(i)}+\frac{p(2i)}{q'(2i)}]=2\pi i[\frac{(i)^2-1}{4(i)^3+10(i)}+\frac{(2i)^2-1}{4(2i)^3+10(2i)}]\Rightarrow I=2\pi i[\frac{-2}{-4i+10i}+\frac{-5}{-32i+20i}]=\frac{\pi}{6}$$

مثال ۵: حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به بازه‌ی انتگرال امکان استفاده از فرمول وجود ندارد، اما با توجه به زوج بودن تابع می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$$

حالا می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم. برای این منظور لازم است مانده $f(z)=\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}$ را در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی هستند، حساب کنیم:

$$z^4+5z^2+4=(z^2+4)(z^2+1)=0\Rightarrow\begin{cases}z=\pm 2i\\ z=\pm i\end{cases}\xrightarrow{\text{قطب‌های بالای محور حقیقی}}z=i,z=2i$$

$$\left.\begin{aligned}&z=i\text{ مانده در }=\left.\frac{2z^2-1}{4z^3+10z}\right|_{z=i}=\frac{2(i)^2-1}{4(i)^3+10(i)}=\frac{-3}{6i}=-\frac{1}{2i}\\&z=2i\text{ مانده در }=\left.\frac{2z^2-1}{4z^3+10z}\right|_{z=2i}=\frac{2(2i)^2-1}{4(2i)^3+10(2i)}=\frac{-9}{-12i}=\frac{3}{4i}\end{aligned}\right\}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[2\pi i(\frac{3}{4i}-\frac{1}{2i})]=\frac{1}{2}[2\pi(\frac{1}{4})]=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۶: حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» قطب‌های تابع $z=\pm i$ و $z=\pm 3i$ می‌باشند، که فقط $z=i$ و $z=3i$ بالای محور حقیقی هستند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to i}\frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)(z^2+9)}=\frac{1}{16i}\\ \lim\limits_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim\limits_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+1)(z-3i)(z+3i)}=-\frac{1}{48i}\end{cases}\Rightarrow I=2\pi i(\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i})=2\pi i(\frac{3-1}{48i})=\frac{\pi}{12}$$

مثال ۷: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^4}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{32}$ ۳) $\frac{\pi}{16}$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۳» تابع $f(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^4}$ در $z=\pm i$ دارای قطب است. مانده‌ی f را در $z=i$ که قطب مرتبه‌ی ۴ است و بالای محور افقی قرار دارد، حساب می‌کنیم.

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}[(z-i)^4\frac{z^2}{(z-i)^4(z+i)^4}]_{z=i}=\frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}[\frac{z^2}{(z+i)^4}]_{z=i}$$

اگر از $\frac{z^2}{(z+i)^4}$، سه بار مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{6}[-\frac{24}{(z+i)^5}+\frac{120z}{(z+i)^6}-\frac{120z^2}{(z+i)^7}]_{z=i}=\frac{-i}{32}$$

در نتیجه داریم:

$$I=2\pi i\times\frac{-i}{32}=\frac{\pi}{16}$$

مثال ۸: اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi(2n!)}{2^{2n}(n!)}$ ۲) $\frac{\pi(2n!)}{2^{2n+1}(n!)^2}$ ۳) $\frac{\pi(n!)}{2^{2n}(2n!)}$ ۴) $\frac{\pi(n!)}{2^{2n+1}(2n!)}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به بازه‌ی انتگرال امکان استفاده از فرمول وجود ندارد، اما با تغییر بازه‌ی آن (با توجه به زوج بودن تابع زیر انتگرال) می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم، بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

کافی است مانده تابع $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ در قطب‌های بالای محور حقیقی تعیین شوند. تنها قطب تابع که بالای محور حقیقی قرار دارد، $z=i$ می‌باشد، لذا با توجه به این که $z=i$ قطب مرتبه‌ی **$(n+1)$ام** است، داریم:

$$\text{مانده در } z=i=\frac{1}{(n+1-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{(n+1)-1}}{dz^{(n+1)-1}}\left[(z-i)^{n+1}\left(\frac{1}{(z-i)^{n+1}(z+i)^{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right]$$

چند بار مشتق می‌گیریم تا بتوانیم به یک ضابطه‌ی کلی در مورد حاصل مشتق nام برسیم:

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{-(n+1)}{(z+i)^{n+2}}\right]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{(z+i)^{n+3}}\right]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}\left[\frac{-(n+1)(n+2)(n+3)}{(z+i)^{n+4}}\right]$$

به نظر می‌رسد فرمول کلی مشتق به صورت زیر باشد:

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\left[\frac{(-1)^n(n+1)(n+3)\cdots(n+n)}{(z+i)^{n+n+1}}\right]=\frac{1}{n!}\left[\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}{(2i)^{2n+1}}\right]=\frac{1}{n!}\left[\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}{(2i)^{2n+1}}\right]$$

برای این که بتوانیم عبارت صورت کسر بالا را به صورت $(2n)!$ بنویسیم، لازم است جملات قبل از $(n+1)$ نیز اضافه شود، بنابراین در صورت و مخرج کسر عبارت $1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$ را ضرب می‌کنیم.

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{1}{n!}\left[\frac{(-1)^n\overbrace{1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n)}^{(2n)!}}{[1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n](2i)^{2n+1}}\right]$$

عبارتی که ضرب کردیم، همان $n!$ بود و لذا در مخرج $n!$ داریم بنابراین عبارت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{1}{n!}\left[\frac{(-1)^n(2n)!}{(2i)^{2n+1}n!}\right]=\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2(2i)^{2n+1}}$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(i)^{2n+1}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(i^2)^n i}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(-1)^n i}\right)\right]=\frac{\pi(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

توضیح: با عرض خسته نباشید از حل این مثال به اطلاع می‌رسانم، چون هر از گاهی بعضی از طراحان که آزمون‌های تستی را با امتحانات پایان ترم اشتباه می‌گیرند، از این نوع سؤالات طرح می‌کنند، ما هم این مثال را آوردیم تا با حل این‌گونه سؤالات نیز آشنا شوید. (البته به عنوان روش ساده‌تر می‌توانید در صورت سؤال به جای n، عددی مناسب قرار دهید و در گزینه‌ها هم همان عدد را قرار دهید و انتگرال ساده‌تری را بررسی کنید.)

مثال ۹: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3e^3}$ ۲) $\frac{\pi}{3e^6}$ ۳) $\frac{\pi}{9e^3}$ ۴) $\frac{\pi}{9e^6}$

پاسخ : گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال فوق کافی است مانده تابع $\frac{e^{2iz}}{z^2+9}$ را در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند، حساب کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx=\mathrm{Re}\left[2\pi i\Sigma\,\mathrm{Res}\frac{e^{2iz}}{z^2+9}\right]=\mathrm{Re}\left[2\pi i\,\underset{z=3i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{2iz}}{z^2+9}\right]=\mathrm{Re}\left[\left[2\pi i\frac{e^{2iz}}{z+3i}\right]_{z=3i}\right]=\pi i.\frac{e^{-6}}{3i}=\frac{\pi}{3e^6}$$

مثال ۱۰: حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(\cos 1-\sin 1)}{e}$ ۲) $\frac{2\pi(\sin 1+\cos 1)}{e}$ ۳) $\frac{\pi(\sin 1+\cos 1)}{e}$ ۴) $\frac{2\pi(\cos 1-\sin 1)}{e}$

پاسخ: گزینه «۳» تابع $f(z)$ را به صورت $f(z)=\frac{z}{z^2+2z+2}$ تعریف می‌کنیم. با صفر قرار دادن عبارت مخرج کسر قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^2+2z+2=0 \Rightarrow (z+1)^2+1=0 \Rightarrow (z+1)^2=-1=i^2 \Rightarrow z+1=\pm i \Rightarrow z=-1\pm i$$

از دو قطب فوق فقط $z=-1+i$ بالای محور حقیقی قرار دارد، پس باید مانده تابع $f(z)e^{iz}$ را در این نقطه حساب کنیم. استفاده از روش سوم محاسبه مانده برای این تست مناسب‌تر است. می‌دانیم باید به جای تمام z های صورت و همچنین z های تابع مشتق مخرج $-1+i$ قرار دهیم:

$$z=-1+i \text{ مانده در } =\frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{2(-1+i)+2}=\frac{(-1+i)e^{(-1-i)}}{2i}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } i \text{ ضرب می‌کنیم}} z=-1+i \text{ مانده در } =\frac{-(-i-1)e^{(-1-i)}}{2}$$

$$\Rightarrow z=-1+i \text{ مانده در } =(\frac{(i+1)e^{-1}}{2})e^{-i}=\frac{i+1}{2e}[\cos(-1)+i\sin(-1)]=\frac{i}{2e}\cos 1+\frac{1}{2e}\cos 1+\frac{1\times\sin 1}{2e}+\frac{-i}{2e}\sin 1$$

همان‌طور که گفتیم باید این عبارت را در $2\pi i$ ضرب کنیم و بعد قسمت موهومی آن را به دست بیاوریم. با ضرب در $2\pi i$ جمله‌های دوم و سوم قسمت موهومی به حساب خواهند آمد، (که اتفاقاً همین قسمت مدنظر ماست.) چون وقتی $2\pi i$ در جمله‌های اول و چهارم ضرب شود آن‌ها، به عنوان قسمت حقیقی عبارت محسوب خواهند شد. پس حاصل انتگرال برابر با مقدار مقابل می‌شود: $I=\frac{2\pi\cos 1}{2e}+\frac{2\pi\sin 1}{2e}=\frac{\pi}{e}(\sin 1+\cos 1)$

مثال ۱۱: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{x^4+5x^2+4}dx$ برابر کدام گزینه است؟ $(\omega>0)$

۱) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$ ۲) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$ ۳) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega}+e^{-2\omega})$ ۴) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}+e^{-2\omega})$

پاسخ: گزینه «۲» برای تابع فوق $f(z)=\frac{1}{z^4+5z^2+4}$ در نظر می‌گیریم. ابتدا قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^4+5z^2+4=0 \Rightarrow (z^2+1)(z^2+4)=0 \Rightarrow z=\pm i\ ,z=\pm 2i$$

حالا کافیست مانده $\frac{e^{i\omega z}}{z^4+5z^2+4}$، در قطب‌های بالای محور حقیقی حساب شود:

$$\left.\begin{array}{l} z=i \text{ مانده در } =\left.\frac{e^{i\omega z}}{4z^3+10z}\right|_{z=i}=\frac{e^{i\omega(i)}}{4(i)^3+10(i)}=\frac{e^{-\omega}}{6i} \\ z=2i \text{ مانده در } =\left.\frac{e^{i\omega z}}{4z^3+10z}\right|_{z=2i}=\frac{e^{i\omega(2i)}}{4(2i)^3+10(2i)}=-\frac{e^{-2\omega}}{12i}\end{array}\right\} \Rightarrow I=\mathrm{Re}[2\pi i(\frac{e^{-\omega}}{6i}-\frac{e^{-2\omega}}{12i})]=\frac{\pi}{6}\mathbf{(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})}$$

مثال ۱۲: حاصل $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{3\pi e^{-2}}{16}$ ۲) $\frac{3\pi e^{-2}}{32}$ ۳) $\frac{-3\pi e^{-2}}{16}$ ۴) $\frac{-3\pi e^{-2}}{32}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به کران انتگرال که از صفر تا بی‌نهایت است، ابتدا باید بازه انتگرال را به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}$ تبدیل کنیم، چون تابع زیر انتگرال زوج است این موضوع امکان‌پذیر است و لذا داریم:

$$\mathbf{I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx}$$

برای محاسبه این انتگرال باید مانده $\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$ را در قطب‌های بالای محور حقیقی حساب کنیم. تنها قطب تابع که بالای محور حقیقی قرار دارد $z=2i$ می‌باشد و لذا داریم:

$$z=2i \text{ مانده در } =\frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}[\frac{e^{iz}(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}]'=\lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)^2-2(z+2i)e^{iz}}{(z+2i)^4}=\frac{ie^{i(2i)}(2i+2i)^2-2(2i+2i)e^{i(2i)}}{(2i+2i)^4}$$

$$=\frac{e^{-2}(-16i)-2(4i)e^{-2}}{4^4}=\frac{(-24i)e^{-2}}{16\times 16}=-\frac{\mathbf{3ie^{-2}}}{\mathbf{32}}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[2\pi i(\frac{-3ie^{-2}}{32})] \Rightarrow I=\frac{1}{2}(\frac{3\pi e^{-2}}{16}) \Rightarrow I=\frac{\mathbf{3\pi e^{-2}}}{\mathbf{32}}$$

مثال ۱۳: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(3x)}{(x^2+3)(x^2+1)}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{4}(e^{-3}+e^{-3\sqrt{3}})$ ۲) $\frac{\pi}{2}(e^{-3}+e^{-3\sqrt{3}})$ ۳) $\frac{\pi}{4}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$ ۴) $\frac{\pi}{2}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به تابع زیر انتگرال باید مانده تابع $\frac{ze^{i3z}}{(z^2+3)(z^2+1)}$ را در قطب‌های آن (قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند) حساب کنیم. قطب‌های بالای محور حقیقی فقط $z=\sqrt{3}i$ و $z=i$ هستند، لذا داریم:

$$z=i \text{ مانده در } = \frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)}\bigg|_{z=i} = \frac{ie^{i3(i)}}{2i(i^2+1)+2i(i^2+3)} = \frac{ie^{-3}}{4i} = \frac{e^{-3}}{4}$$

$$z=\sqrt{3}i \text{ مانده در } = \frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)}\bigg|_{z=\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}ie^{i3(i\sqrt{3})}}{2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+1)]+2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+3]} = \frac{\sqrt{3}ie^{-3\sqrt{3}}}{2i\sqrt{3}(-2)} = \frac{e^{-3\sqrt{3}}}{-4}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر مقدار زیر است:

$$I=\mathrm{Im}[2\pi i(\frac{e^{-3}}{4}-\frac{e^{-3\sqrt{3}}}{4})]=\frac{\pi}{2}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$$

مثال ۱۴: حاصل $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^4}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{37\pi}{48e}$ ۲) $\frac{37\pi}{96e}$ ۳) $\frac{37\pi}{24e}$ ۴) $\frac{37\pi}{12e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید مانده‌ی تابع $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^4}$ را در $z=i$ که بالای محور حقیقی است تعیین کنیم. این نقطه یک قطب مرتبه‌ی ۴ است. بنابراین داریم:

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}[(z-i)^4\frac{e^{iz}}{(z-i)^4(z+i)^4}]_{z=i}=\frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}[\frac{e^{iz}}{(z+i)^4}]_{z=i}$$

با سه بار مشتق‌گیری از این عبارت داریم:

$$Q(z)=(z+i)^{-4}e^{iz} \Rightarrow Q'(z)=e^{iz}[i(z+i)^{-4}-4(z+i)^{-5}] \Rightarrow Q''(z)=e^{iz}[-(z+i)^{-4}-4i(z+i)^{-5}-4i(z+i)^{-5}+20(z+i)^{-6}]$$

$$\Rightarrow Q^{(3)}(z)=e^{iz}[-i(z+i)^{-4}+4(z+i)^{-5}+4(z+i)^{-5}+20i(z+i)^{-6}+4(z+i)^{-5}+20i(z+i)^{-6}+20i(z+i)^{-6}-120(z+i)^{-7}]$$

با جایگذاری $z=i$ مقدار مشتق سوم، $-\frac{74}{32}e^{-1}i$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{6}Q^{(3)}(i)=\frac{1}{6}\times\frac{-74}{32}ie^{-1}$$

در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(1+x^2)^4}dx=2\pi i\times\frac{-74i}{6\times 32}e^{-1}=\frac{74}{96}\pi e^{-1}$$

و در نهایت با نصف کردن جواب و محاسبه‌ی بخش حقیقی آن داریم:

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^4}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(1+x^2)^4}dx=\frac{1}{2}\times\frac{74}{96}\pi e^{-1}=\frac{37}{96}\pi e^{-1}$$

مثال ۱۵: در حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^4 x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$، ضریب e^{-8} برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\pi}{6}$ ۲) $-\frac{\pi}{24}$ ۳) $-\frac{\pi}{12}$ ۴) $-\frac{\pi}{48}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به توان ۴ برای $\cos x$، واضح است استفاده از فرمول گفته شده امکان‌پذیر نیست، چون همان طور که گفتیم فرم کسینوس باید به صورت $\cos ax$ باشد. برای این منظور از رابطه‌ی $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$، کمک می‌گیریم:

$$\cos^4 x=(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4=\frac{1}{2^4}[(e^{ix}+e^{-ix})^2]^2=\frac{1}{16}([e^{2ix}+e^{-2ix}+2(e^{ix})(e^{-ix})]^2$$

$$=\frac{1}{16}(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)^2=\frac{1}{16}[e^{4ix}+e^{-4ix}+4+2(e^{2ix})(e^{-2ix})+2(e^{2ix})(2)+2(e^{-2ix})(2)]$$

$$=\frac{1}{16}(e^{i4x}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6)=\frac{1}{16}(2\cos 4x+8\cos 2x+6)=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$$

بنابراین انتگرال داده شده به صورت مقابل نوشته می‌شود:
$$I=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}+\frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

با توجه به انتگرال‌های فوق برای این که مجبور نباشیم هر سه انتگرال را به طور جداگانه حساب کنیم، بهتر است انتگرال زیر را حساب کنیم:
$$\mathbf{J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos nx}{(x^2+1)(x^2+4)}dx}$$

و در نهایت به جای n، مقادیر ۴، ۲ و ۰ را قرار دهیم. برای محاسبه‌ی این انتگرال باید مانده $\frac{e^{inz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ در قطب‌های این تابع که در بالای محور حقیقی قرار دارند را حساب کنیم. قطب‌های این تابع که بالای محور حقیقی قرار دارند، $z=i$ و $z=2i$ هستند و لذا داریم:

$$z=i \text{ مانده در } =\frac{e^{inz}}{2z(z^2+4)+2z(z^2+1)}\Bigg|_{z=i}=\frac{e^{-n}}{2i(i^2+4)+2i(i^2+1)}=\frac{e^{-n}}{6i}$$
$$z=2i \text{ مانده در } =\frac{e^{inz}}{2z(z^2+4)+2z(z^2+1)}\Bigg|_{z=2i}=\frac{e^{-2n}}{2(2i)[(2i)^2+4]+2(2i)[(2i)^2+1)]}=-\frac{e^{-2n}}{12i}$$

بنابراین حاصل انتگرال برحسب n برابر است با:
$$J=\operatorname{Re}[2\pi i(\frac{e^{-n}}{6i}-\frac{e^{-2n}}{12i})]=\frac{\pi}{3}e^{-n}-\frac{\pi}{6}e^{-2n}$$

خب حالا اگر به جای n، سه مقدار ۴، ۲ و ۰ را قرار دهیم، حاصل سه انتگرال معلوم می‌شود. اما خواسته‌ی سؤال ضریب e^{-8} است که واضح است فقط به ازای $n=4$، جمله‌ی e^{-8} به وجود می‌آید، پس داریم:
$$-\frac{\pi}{6}e^{-2\times 4}=-\frac{\pi}{6}e^{-8}$$

اما پشت انتگرال اصلی ضریب $\frac{1}{8}$ نیز وجود دارد و لذا ضریب e^{-8} برابر $\frac{1}{8}(-\frac{\pi}{6})=-\frac{\pi}{48}$ می‌شود.

مثال ۱۶: حاصل $\mathbf{I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx}$، چند برابر $\frac{\pi}{5}$ است؟

۱) $\cos 1-e^{-2}$　　۲) $\cos 1+e^{-2}$　　۳) $2\cos 1-e^{-2}$　　۴) $2\cos 1+e^{-2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا تابع $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع قطب ساده $z=2i$ را بالاتر از محور حقیقی و $z=1$ را روی محور حقیقی دارد. بنابراین مانده‌ی $f(z)$ را در $z=2i$ و $z=1$ حساب می‌کنیم. اولی را در $2\pi i$ و دومی را در πi ضرب خواهیم کرد. دقت کنید که مسیر انتگرال‌گیری محور x ها از $-\infty$ تا $+\infty$ است. نقطه‌ی تکین $z=1$ روی مرز قرار دارد. با یک کمان به اندازه‌ی π (نیم دایره) می‌توانیم آن را دور بزنیم به همین خاطر مانده در $z=1$ رادر π ضرب می‌کنیم. با تجزیه‌ی مخرج داریم $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)(z-1)}$. بنابراین:

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{e^{i}}{5}\quad,\quad \operatorname{Res}(f,2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)}=\frac{e^{-2}}{(4i)(2i-1)}$$

و در نتیجه:
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\frac{e^{-2}}{4i(2i-1)}+\pi i\frac{e^{i}}{5}=\frac{\pi}{2e^2(2i-1)}\times\frac{-1-2i}{-1-2i}+\frac{\pi i}{5}(\cos 1+i\sin 1)=-\frac{\pi(1+2i)}{10e^2}+\frac{\pi}{5}(i\cos 1-\sin 1)$$

در نهایت می‌دانیم که:
$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x-1)}dx=-\frac{2\pi}{10e^2}+\frac{\pi}{5}\cos 1=\frac{\pi}{5}(\cos 1-e^{-2})$$

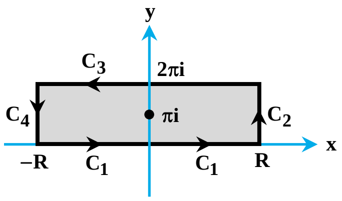
مثال ۱۷: حاصل $\mathbf{I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{+ix}}{x^2+1}dx}$ را بیابید.

پاسخ: برای حل این مسئله طبق نکته فوق باید مانده تابع $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ در قطب $z=i$ را حساب کنیم:

$$z=i \text{ مانده در } =\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i}=\frac{e^{i^2}}{2i}=\frac{e^{-1}}{2i}\Rightarrow I=2\pi i\times\frac{e^{-1}}{2i}=\pi e^{-1}$$

مثال ۱۸: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx$ ، برابر کدام گزینه است؟ $(0<a<1)$

۱) $\frac{2\pi}{\sin\pi a}$ ۲) $\frac{\pi}{\sin\pi a}$ ۳) $\frac{\pi}{2\sin\pi a}$ ۴) $\frac{\pi}{\sqrt{2}\sin\pi a}$



پاسخ: گزینه «۲» فرض کنید $f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^z}$ و از f در مسیر زیر انتگرال می‌گیریم:

تابع تحت انتگرال یک قطب $z=\pi i$ در مسیر داده شده دارد، لذا داریم:

$$\underset{z=\pi i}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}}=-e^{a\pi i}\Rightarrow \oint_C f(z)dz=-2\pi i e^{a\pi i}$$

حالا باید این انتگرال را در چهار مسیر مختلف نمایش دهیم. دقت کنید $z=x+iy$ است، لذا معادله‌ی منحنی‌ها به شکل زیر است:

۱) برای C_1 (از $-R$ تا $+R$) واضح است $y=0$ بنابراین $z=x$

۲) برای C_2 (از 0 تا 2π) واضح است $x=R$ بنابراین $z=R+iy$

۳) برای C_3 (از R تا $-R$) واضح است $y=2\pi$ بنابراین $z=x+i2\pi$

۴) برای C_4 (از 2π تا 0) واضح است $x=-R$ بنابراین $z=-R+iy$

حالا به راحتی انتگرال‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx+\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}(idy)+\int_{+R}^{-R}\frac{e^{a(x+i2\pi)}}{1+e^{x+i2\pi}}dx+\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}(idy)=0 \qquad (*)$$

انتگرال‌های دوم و چهارم وقتی $R\to\infty$ برابر صفر می‌شوند، زیرا برای انتگرال دوم داریم:

$$\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right|=\left|\frac{e^{aR}}{1+e^{R+iy}}\right|\le\frac{e^{aR}}{e^R-1}$$

در مخرج کسر قسمت آخر نامساوی به صورت زیر استدلال کردیم:

$$|e^{R+iy}+1|\ge|e^{R+iy}|-|1|=e^R-1$$

واضح است وقتی $R\to\infty$، عبارت سمت راست نامساوی صفر می‌شود و لذا طبق فرمول ML انتگرال صفر می‌شود.

به همین طریق برای انتگرال چهارم داریم:

$$\left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right|=\frac{e^{-aR}}{|e^{-R+iy}+1|}\le\frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}$$

واضح است وقتی $R\to\infty$، آنگاه عبارت سمت راست نامساوی صفر می‌شود و در نتیجه حاصل انتگرال نیز صفر می‌شود. خب حالا تساوی (*) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{a(x+i2\pi)}}{1+e^{x+i2\pi}}dx=-2\pi i e^{a\pi i}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{ax}.e^{i2\pi a}}{1+e^x.e^{i2\pi}}dx=-2\pi i e^{a\pi i}$$

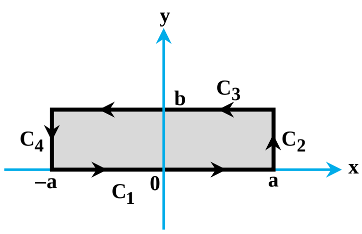
با فاکتورگیری از $e^{2a\pi i}$ توجه و به این که $e^{i2\pi}=1$ و تغییر در بازه‌ی انتگرال دوم، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx-e^{2a\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=-2\pi i e^{a\pi i}\Rightarrow(1-e^{2a\pi i})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=-2\pi i e^{a\pi i}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=\frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}}=\frac{-2\pi i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}}=\frac{\pi}{\frac{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}{2i}}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

مثال ۱۹: حاصل $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos(2bx)dx$ برابر کدام گزینه است؟ (برای حل سؤال از تساوی $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ استفاده کنید.)

۱) $\sqrt{\pi}e^{-2b^2}$ ۲) $\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2b^2}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$



پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه‌ی این انتگرال از تابع $f(z)=e^{-z^2}$ استفاده می‌کنیم. مسیر مناسب به شکل مقابل است:

با توجه به این که تابع f تحلیلی می‌باشد، لذا داریم:

$$\oint_C e^{-z^2}dz=0$$

حالا باید این انتگرال را در چهار مسیر مختلف نمایش دهیم:

دقت کنید، با توجه به این که $z=x+iy$، لذا معادله‌ی منحنی‌ها به شکل زیر تعیین می‌شود:

۱) برای C_1 (یعنی از $-a$ تا $+a$) واضح است $y=0$ و بنابراین $z=x$ است.

۲) برای C_2 (از 0 تا b) واضح است $x=a$ و بنابراین $z=a+iy$ است.

۳) برای C_3 (از a تا $-a$) واضح است $y=b$ و بنابراین $z=x+ib$ است.

۴) برای C_4 (از b تا 0) واضح است $x=-a$ و بنابراین $z=-a+iy$ است.

حالا به راحتی انتگرال را به چهار انتگرال زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}dx+\int_0^b e^{-(a+iy)^2}idy+\int_a^{-a} e^{-(x+ib)^2}dx+\int_b^0 e^{-(-a+iy)^2}idy$$

اگر $a\to+\infty$ آنگاه با توجه به وجود e^{-a^2} در انتگرال دوم و چهارم، حاصل این دو انتگرال صفر می‌شود، لذا داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx+0+\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-(x+ib)^2}dx+0=0$$

از طرفی با توجه به صورت سؤال می‌دانیم $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ لذا خواهیم داشت: $\sqrt{\pi}+\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-(x^2-b^2+2ibx)}dx=0$

با تغییر بازه‌ی انتگرال به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}$، یک علامت منفی پدید می‌آید و داریم:

$$\sqrt{\pi}-\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-x^2}.e^{+b^2}.e^{-2ibx})dx=0\Rightarrow e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}(\cos 2bx-i\sin 2bx)dx=\sqrt{\pi}$$

با توجه به زوج بودن $\cos(2bx)\,e^{-x^2}$ و فرد بودن $\sin(2bx)\,e^{-x^2}$ (که می‌دانیم در بازه متقارن $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل انتگرال هر تابع فرد، برابر صفر می‌شود.) خواهیم داشت:

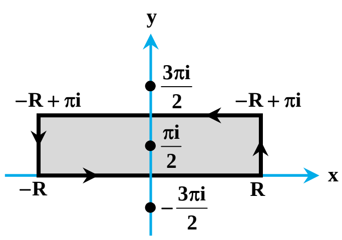
$$2e^{b^2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}\Rightarrow \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

مثال ۲۰: حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty\frac{\cosh ax}{\cosh x}dx$ کدام است؟ ($|a|<1$)

۱) $\frac{\pi}{2\cos(\frac{\pi a}{2})}$ ۲) $\frac{\pi}{\cos(\frac{\pi a}{2})}$ ۳) $\frac{2\pi}{3\cos(\frac{\pi a}{2})}$ ۴) $\frac{2\pi}{\cos(\frac{\pi a}{2})}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای پاسخ به این انتگرال می‌توانیم انتگرال $J=\oint_C\frac{e^{az}}{\cosh z}dz$ را در نظر بگیریم که C، مستطیلی با رئوس $-R$، $+R$، $R+\pi i$ و $-R+\pi i$ می‌باشد.

قطب‌های تابع زیر انتگرال ریشه‌های معادله‌ی $\cosh z=0$ یعنی $z=(n+\frac{1}{2})\pi i$ می‌باشند، (که n عددی صحیح است.) که فقط قطب $z=\frac{\pi i}{2}$ درون مسیر بسته‌ی C است. که مانده در این نقطه به صورت زیر حساب می‌شود:



$$\text{مانده در } z=\frac{\pi i}{2} = \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}}(z-\frac{\pi i}{2})\frac{e^{az}}{\cosh z}\overset{HOP}{=}\frac{e^{\frac{a\pi i}{2}}}{\sinh(\frac{\pi i}{2})}=\frac{e^{\frac{a\pi i}{2}}}{i\sin(\frac{\pi}{2})}=-ie^{\frac{a\pi i}{2}}$$

بنابراین داریم:

$$J=\oint_C\frac{e^{az}}{\cosh z}dz=2\pi i(-ie^{\frac{a\pi i}{2}})$$

حالا انتگرال J را بر حسب مسیر به صورت ۴ انتگرال مختلف نمایش می‌دهیم:

$$J=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx+\int_0^\pi\frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}(idy)+\int_R^{-R}\frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)}dx+\int_\pi^0\frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)}(idy)\quad(*)$$

وقتی $R\to\infty$، انتگرال‌های دوم و چهارم به صفر نزدیک می‌شوند. برای انتگرال دوم این موضوع را اثبات می‌کنیم:

$$|\cosh(R+iy)|=|\frac{e^{R+iy}+e^{-R-iy}}{2}|\ge\frac{1}{2}\{|e^{R+iy}|-|e^{-R+iy}|\}=\frac{1}{2}(e^R-e^{-R})\ge\frac{e^R}{4}$$

$$|\int_0^\pi\frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}(idy)|\le\int_0^\pi\frac{e^{aR}}{\frac{1}{4}e^R}dy=4\pi e^{(a-1)R}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید وقتی $R\to\infty$، آنگاه عبارت سمت راست به سمت صفر می‌رود (چون $|a|<۱$) با روشی مشابه، ثابت می‌شود انتگرال چهارم نیز صفر می‌شود. از طرفی $\cosh(x+\pi i)=-\cosh x$ و با تغییر بازه انتگرال سوم، تساوی (*) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx+e^{a\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx\right]=۲\pi e^{\frac{a\pi i}{۲}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx=\frac{۲\pi e^{\frac{a\pi i}{۲}}}{۱+e^{a\pi i}}=\frac{۲\pi}{e^{\frac{a\pi i}{۲}}+e^{-\frac{a\pi i}{۲}}}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi a}{۲}}$$

اما صورت کسر در سؤال داده شده $\cosh ax$ است، برای این منظور داریم:

$$\int_{-\infty}^{۰}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx+\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi a}{۲}}\qquad(۱)$$

در انتگرال اول اگر جای x، $-x$ قرار دهیم، داریم:

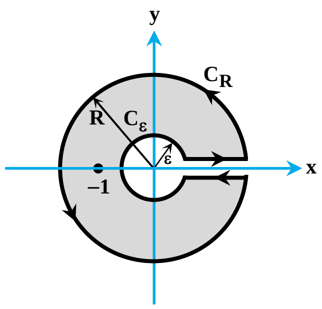
$$\int_{-\infty}^{۰}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx=-\int_{\infty}^{۰}\frac{e^{-ax}}{\cosh x}dx=\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-ax}}{\cosh x}dx$$

با جایگزین کردن آن در تساوی (۱) داریم:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-ax}}{\cosh x}dx+\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\cosh x}dx=\frac{\pi}{\cos(\frac{\pi a}{۲})}\Rightarrow ۲\int_{۰}^{\infty}\frac{\cosh ax}{\cosh x}dx=\frac{\pi}{\cos(\frac{\pi a}{۲})}\Rightarrow\int_{۰}^{\infty}\frac{\cosh ax}{\cosh x}dx=\frac{\pi}{۲\cos\frac{\pi a}{۲}}$$

مثال ۲۱: حاصل انتگرال $\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{p-۱}}{۱+x}dx$ (با شرط $۰<p<۱$) کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi+۱}{۳\sin p\pi}$ ۲) $\frac{\pi}{\sin p\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{\sin p\pi})$ ۴) $\frac{۲\pi-۱}{\sin p\pi}$



پاسخ: گزینه «۲» برای حل این سؤال انتگرال $\oint_C\frac{z^{p-۱}}{z+۱}dz$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که $z=۰$ یک نقطه‌ی شاخه‌ای است، می‌توانیم محور حقیقی مثبت را به عنوان خط شاخه‌ای در نظر بگیریم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع تحت انتگرال دارای قطب ساده $z=-۱$ داخل C است و بنابراین با استفاده از قضیه مانده‌ها داریم:

$$\oint\frac{z^{p-۱}}{z+۱}dz=۲\pi i\operatorname*{Res}_{z=-۱}f=۲\pi i\lim_{z\to-۱}(z+۱)\frac{z^{p-۱}}{z+۱}=۲\pi i(-۱)^{p-۱}=۲\pi i(e^{\pi i})^{p-۱}=۲\pi ie^{(p-۱)\pi i}$$

از طرفی انتگرال را می‌توان بر روی چهار مسیر به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{p-۱}}{x+۱}dx+\int_{۰}^{۲\pi}\frac{(Re^{i\theta})^{p-۱}iRe^{i\theta}d\theta}{۱+Re^{i\theta}}+\int_{R}^{\varepsilon}\frac{(xe^{۲\pi i})^{p-۱}}{۱+xe^{۲\pi i}}dx+\int_{۲\pi}^{۰}\frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-۱}i\varepsilon e^{i\theta}}{۱+\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=۲\pi ie^{(p-۱)\pi i}$$

دقت کنید در انتگرال سوم از $z=xe^{۲\pi i}$ استفاده کردیم زیرا $\arg z$ حول دایره C_R به اندازه‌ی ۲π افزایش می‌یابد.

با گرفتن حد وقتی $\varepsilon\to۰$ و $R\to\infty$، انتگرال‌های دوم و چهارم به صفر میل می‌کنند، لذا داریم: $\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{p-۱}}{۱+x}dx+\int_{\infty}^{۰}\frac{e^{۲\pi i(p-۱)}.x^{p-۱}}{۱+x}dx=۲\pi ie^{(p-۱)i\pi}$

با تغییر بازه‌ی انتگرال دوم به صورت $\int_{۰}^{\infty}$ و ایجاد یک علامت منفی پشت انتگرال، و فاکتورگیری از عبارت $e^{۲\pi i(p-۱)}$ تساوی زیر را داریم:

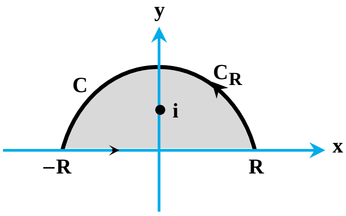
$$[۱-e^{۲\pi(p-۱)i}]\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{p-۱}}{x+۱}dx=۲\pi ie^{(p-۱)\pi i}$$

بنابراین داریم:

$$I=\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{p-۱}}{۱+x}dx=\frac{۲\pi ie^{(p-۱)\pi i}}{۱-e^{۲\pi(p-۱)i}}=\frac{۲\pi ie^{p\pi i}.e^{\pi i}}{۱-e^{۲\pi ip}.e^{-۲\pi i}}\xrightarrow[e^{-۲\pi i}=۱,\,e^{\pi i}=-۱\ \text{می‌دانیم}]{\text{صورت و مخرج ضرب در}\ e^{-p\pi i}}I=\frac{-۲\pi i}{e^{-p\pi i}-e^{p\pi i}}=\frac{۲\pi i}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}}=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

مثال ۲۲: حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{Ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\pi Ln2$ ۲) $\frac{3\pi}{2}Ln2$ ۳) $\frac{\pi}{2}Ln2$ ۴) $2\pi Ln2$



پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخگویی به این سؤال، انتگرال مختلط $J=\oint_C \frac{Ln(z+i)}{z^2+1}dz$ را با فرض مسیر C مانند شکل مقابل، در نظر می‌گیریم. (ممکن است در نگاه اول به نظر برسد $f(z)$ مناسب باید به صورت $\frac{Ln(z^2+i)}{z^2+1}$ باشد، اما دقت داشته باشید که این تابع نمی‌تواند مناسب باشد، چون $Ln(z^2+i)$ در قطب $z=i$، به صورت $Ln(0)$ می‌شود و این موضوع با توجه به مسیر C اصلاً برای ما خوشایند نیست!) مسیر C روی محور حقیقی از $-R$ تا R و نیم‌دایره‌ی C_R به شعاع R می‌باشد. تابع داده شده فقط یک قطب ساده داخل C دارد و آن هم $z=i$ می‌باشد. بنابراین مانده برابر است با: $\frac{Ln(2i)}{2i}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{Ln(z+i)}{(z-i)(z+i)}=$ مانده در $z=i$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها حاصل انتگرال J برابر مقدار زیر است:

$$J=\oint_C \frac{Ln(z+i)}{z^2+1}dz=2\pi i[\frac{Ln(2i)}{2i}]=\pi Ln(2i)=\pi(Ln2+\frac{\pi i}{2})=\pi Ln2+\frac{1}{2}\pi^2 i$$

خُب حالا برویم سراغ نوشتن انتگرال J بر روی مسیر داده شده. (دقت کنید حاصل انتگرال در این حالت برابر مقداری است که از روی قضیه مانده‌ها حساب کردیم) همان‌طور که می‌بینید دو مسیر مختلف داریم:

$$\int_{-R}^{R}\frac{Ln(x+i)}{x^2+1}dx+\int_{C_R}\frac{Ln(z+i)}{z^2+1}dz=\pi Ln2+\frac{1}{2}\pi^2 i$$

انتگرال دوم وقتی $R\to\infty$ برابر صفر می‌شود، بنابراین با شکستن بازه و نوشتن انتگرال اول به صورت دو انتگرال تساوی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_{-R}^{0}\frac{Ln(x+i)}{x^2+1}dx+\int_0^R\frac{Ln(x+i)}{x^2+1}dx=\pi Ln2+\frac{1}{2}\pi^2 i$$

با تعویض x با $-x$ در انتگرال اول داریم:

$$\int_0^R\frac{Ln(i-x)}{x^2+1}dx+\int_0^R\frac{Ln(i+x)}{x^2+1}dx=\pi Ln2+\frac{1}{2}\pi^2 i\Rightarrow\int_0^R\frac{Ln(i-x)+Ln(i+x)}{x^2+1}dx=\pi Ln2+\frac{1}{2}\pi^2 i$$

با توجه به خاصیت Ln داریم:

$$Ln(i-x)+Ln(i+x)=Ln(i^2-x^2)=Ln(-1-x^2)=Ln[(1+x^2)(-1)]=Ln(x^2+1)+\pi i$$

بنابراین انتگرال مزبور به صورت دو انتگرال مقابل نوشته می‌شود:

$$\int_0^R\frac{Ln(x^2+1)}{x^2+1}dx+\int_0^R\frac{\pi i}{x^2+1}dx=\pi Ln2+\frac{1}{2}\pi^2 i \qquad (*)$$

$$\int_0^R\frac{Ln(x^2+1)}{x^2+1}dx+\pi i\underbrace{[Arctgx]_0^R}_{A}=\pi Ln2+\frac{1}{2}\pi^2 i$$

وقتی $R\to\infty$، آنگاه عبارت A، برابر $\pi i Arctg\infty$ و یا به عبارت دیگر برابر $\frac{1}{2}\pi^2 i$ می‌شود و این مقدار با مقدار مساویش در سمت راست تساوی (*) حذف شده و در نهایت داریم:

$$\int_0^\infty\frac{Ln(x^2+1)}{x^2+1}dx=\pi Ln2$$

مثال ۲۳: با استفاده از نتیجه‌ی مثال قبل، حاصل انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Ln(\cos x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\pi Ln2$ ۲) $-\frac{1}{2}\pi Ln2$ ۳) $\pi Ln2$ ۴) $-\pi Ln2$

پاسخ: گزینه «۲» اگر در سؤال قبل از تغییر متغیر $x=tg\theta$، استفاده کنیم آنگاه $dx=(1+tg^2\theta)d\theta$ و لذا داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Ln(tg^2\theta+1)}{tg^2\theta+1}(1+tg^2\theta)d\theta=\pi Ln2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}Ln(\frac{1}{\cos^2\theta})d\theta=\pi Ln2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}(Ln1-Ln\cos^2\theta)d\theta=\pi Ln2$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}-2Ln(\cos\theta)d\theta=\pi Ln2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}Ln(\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{2}\pi Ln2$$

مثال ۲۴: حاصل $I=\int_0^\infty \frac{x^\beta}{x+1}dx$ با شرط $-1<\beta<0$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\pi}{2\sin\beta\pi}$　۲) $\frac{2\pi}{\sin\beta\pi}$　۳) $-\frac{\pi}{\sin\beta\pi}$　۴) $\frac{\pi}{\cos\frac{\beta\pi}{2}}$

پاسخ: گزینه «۳» به راحتی مشخص است که دو شرط ذکر شده در نکته فوق برقرار است. زیرا داریم $-1<\beta<0$ بنابراین $0<\beta+1<1$، یعنی در تابع $z^{\beta+1}f(z)=\frac{z^{\beta+1}}{z+1}$، هم عامل با توان مثبتِ $z^{\beta+1}$ را در صورت داریم که باعث می‌شود $\underset{z\to 0}{\mathrm{Lim}}\frac{z^{\beta+1}}{z+1}=\frac{0}{1}=0$ شود و هم درجه‌ی صورت کمتر از مخرج است که باعث می‌شود $\underset{z\to\infty}{\mathrm{Lim}}\frac{z^{\beta+1}}{z+1}=0$ باشد. در نتیجه داریم: $\int_0^\infty \frac{x^\beta}{1+x}dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\beta}}$ (مانده‌ی $z^\beta f(z)$ در قطب $z=-1$)

چون $z=-1$ قطب مرتبه اول تابع $f(z)=\frac{1}{z+1}$ می‌باشد، لذا داریم: $z^\beta f(z)$ مانده $=\underset{z\to -1}{\mathrm{Lim}}(z+1)[\frac{z^\beta}{z+1}]=(-1)^\beta$

با نوشتن $-1=e^{i\pi}$، مانده به صورت $(-1)^\beta=(e^{i\pi})^\beta=e^{i\pi\beta}$ نوشته می‌شود و حاصل انتگرال به صورت زیر است:

$$I=\frac{2\pi i\times e^{i\pi\beta}}{1-e^{2\pi i\beta}}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در عبارت } e^{-i\pi\beta} \text{ ضرب می‌کنیم}} I=\frac{2\pi i\times e^{-i\pi\beta}\times e^{i\pi\beta}}{e^{-i\pi\beta}-e^{i\pi\beta}}=2\pi i\left(\frac{-1}{e^{i\beta\pi}-e^{-i\beta\pi}}\right)$$

می‌دانیم $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$، لذا $e^{i\beta\pi}-e^{-i\beta\pi}=2i\sin\beta\pi$ لذا داریم:

$$I=-\frac{2\pi i}{2i\sin\beta\pi}=-\frac{\pi}{\sin\beta\pi}$$

تذکر: البته اگر حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}}{x+1}dx$ برای $0<\beta<1$ سؤال شده بود، باز هم از فرمول استفاده می‌کردیم و جواب $\frac{\pi}{\sin\beta\pi}$ می‌شد.

مثال ۲۵: حاصل $I=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}dx$ در صورتی که $0<a<1$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{2}\mathrm{tg}a\pi$　۲) $\pi\mathrm{tg}a\pi$　۳) $\frac{\pi}{2}\cot a\pi$　۴) $\pi\cot g a\pi$

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم $f(z)=\frac{1}{1-z}$ و برای ایجاد شباهت با فرمول، $\beta=a-1$ باشد. تابع $f(z)$ **فقط** یک قطب ساده در $z=1$ دارد که روی محور حقیقی مثبت قرار دارد. بنابراین طبق فرمول داریم:

$$\int_0^\infty x^\beta f(x)dx=-\pi\cot g(\pi\beta)\mathrm{Res}(z^\beta f,1)$$

محاسبه‌ی مانده‌ی $z^\beta f(z)=\frac{z^\beta}{1-z}$ آسان است.

$$\mathrm{Res}(z^\beta f(z),1)=\underset{z\to 1}{\mathrm{Lim}}(z-1)\frac{z^\beta}{1-z}=-1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty x^\beta f(x)dx=\pi\cot g(\pi\beta)$$

حالا با جایگزینی $\beta=a-1$ داریم:

$$\int_0^\infty x^{a-1}f(x)dx=\pi\cot g(\pi a-\pi)=\pi\cot g\pi a$$

مثال ۲۶: حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$، چند برابر π است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　۲) $\sqrt{2}$　۳) $2\sqrt{2}$　۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱» در این تست $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ می‌باشد و قطب‌های آن $z=\pm i$ هستند. در تابع $z^\beta f(z)=\frac{z^\beta}{(z-i)(z+i)}$ با محاسبه‌ی مانده‌ها داریم:

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\beta}}\left(\frac{i^\beta}{i+i}+\frac{(-i)^\beta}{-i-i}\right)=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\beta}}\left(\frac{i^\beta}{2i}-\frac{(-i)^\beta}{2i}\right)=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\beta}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta}-e^{i\frac{3\pi}{2}\beta}}{2i}\right)$$

توجه کنید که z^β تابعی چند مقداری است. ما از آرگومان اصلی $-\pi<\theta\le\pi$ استفاده می‌کنیم و برای اطمینان از این‌که i^β را در هر دو عبارت به یک شکل محاسبه کرده باشیم، می‌نویسیم:

$$i^\beta=(e^{i\frac{\pi}{2}})^\beta=e^{i\beta\frac{\pi}{2}}\quad,\quad (-i)^\beta=(-1)^\beta i^\beta=(e^{i\pi})^\beta(e^{i\frac{\pi}{2}})^\beta=e^{i\frac{3\pi}{2}\beta}$$

در صورت و مخرج از $e^{i\beta\pi}$ فاکتور می‌گیریم:

$$I=\frac{2\pi i}{e^{i\beta\pi}(e^{-i\beta\pi}-e^{i\beta\pi})}\times\frac{e^{i\pi\beta}(e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}-e^{i\beta\frac{\pi}{2}})}{2i}=\frac{\pi}{\left(\frac{e^{i\beta\pi}-e^{-i\beta\pi}}{2i}\right)}\times\left(\frac{e^{i\frac{\beta\pi}{2}}-e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}}{2i}\right)\Rightarrow$$

یادآوری می‌کنیم که: $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ است. به این ترتیب داریم:

$$I=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\times(\sin\beta\frac{\pi}{2})=\pi\left(\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{\beta\pi}{2}}$$

در این تست $\beta=\frac{1}{2}$ است، لذا داریم:

$$I=\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲۷: با انتخاب یک مسیر مناسب حاصل $I=\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{(1+x)^2}dx$ با شرط $0<\alpha<1$، برابر با کدام مقدار به دست می‌آید؟

۱) $\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}$ ۲) $\frac{2\pi\alpha}{\sin2\pi\alpha}$ ۳) $\frac{\alpha}{\sin\pi\alpha}$ ۴) $\frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا دقت کنید که $z^{\alpha+1}f(z)=\frac{z^{\alpha+1}}{(1+z)^2}$ است و داریم $1<\alpha+1<2$. در نتیجه $\lim\limits_{z\to0}z^{\alpha+1}f(z)=\frac{0}{1}=0$ و با استفاده از قانون بزرگترین درجه، حد در بی‌نهایت هم صفر خواهد بود:

$$\lim_{z\to\infty}z^{\alpha+1}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{\alpha+1}}{(z)^2}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{1-\alpha}}=0$$

در اینجا هم توجه کنید که چون $0<\alpha<1$، پس $1-\alpha>0$ است.

پس شروط برقرارند و می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم. برای این منظور باید مانده تابع $\frac{z^\alpha}{(1+z)^2}$ را در نقطه $z=-1$ که قطب مرتبه دوم است، محاسبه کنیم:

$$\text{Res}(f(z),-1)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z+1)^2\frac{z^\alpha}{(1+z)^2}\right]=\lim_{z\to-1}\alpha z^{\alpha-1}=\alpha(-1)^{\alpha-1}=\alpha e^{i\pi(\alpha-1)}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{(1+x)^2}dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\cdot\alpha e^{i\pi(\alpha-1)}\xrightarrow{\text{ضرب صورت و مخرج در } e^{i\pi\alpha}}I=\frac{2\pi i\alpha.e^{-i\pi}}{e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha}}$$

همان‌طور که می‌دانید $\sin(\pi\alpha)=\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2i}$ است، بنابراین داریم:

$$I=\frac{2\pi i\alpha.e^{-i\pi}}{-2i.\sin(\pi\alpha)}=\frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}$$

مثال ۲۸: اگر $I=\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2}dx$ و α عددی مخالف یک و متعلق به بازه $(-1,3)$ باشد، آن‌گاه مقدار I برحسب α کدام است؟

۱) $\frac{\pi(1-\alpha)}{\cos^2(\frac{\pi\alpha}{2})}$ ۲) $\frac{\pi(1-\alpha)}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$ ۳) $\frac{\pi(1-\alpha)}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$ ۴) $\frac{\pi(1-\alpha)}{4\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنیم $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$ و $F(z)=z^\alpha f(z)$ باشند. تابع f دارای دو قطب مرتبه دو در $z=\pm i$ است، بنابراین داریم:

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left(\text{مجموع مانده‌های } F(z)=\frac{z^\alpha}{(1+z^2)^2} \text{ در قطب‌های } f\right)$$

$$\text{Res}(F(z),i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{z^\alpha}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]=\frac{d}{dz}\left[\frac{z^\alpha}{(z+i)^2}\right]_{z=i}=\frac{\alpha i^{\alpha-1}(2i)^2-2(2i)i^\alpha}{(2i)^4}=\frac{\alpha i^{\alpha+1}-i^{\alpha+1}}{4}=\frac{i(\alpha-1)}{4}e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$$

به همین روش در $z=-i$ داریم:

$$\text{Res}(F(z),-i)=\lim_{z\to-i}\frac{d}{dz}\left[(z+i)^2\frac{z^\alpha}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]=\frac{d}{dz}\left[\frac{z^\alpha}{(z-i)^2}\right]_{z=-i}=\frac{\alpha(-i)^{\alpha-1}(-2i)^2-2(-2i)(-i)^\alpha}{(-2i)^4}=\frac{-i(\alpha-1)e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}}{4}$$

در محاسبات فوق از آرگومان اصلی استفاده کرده‌ایم و برای اطمینان از این‌که i^α همواره به یک طریق محاسبه شده است می‌نویسیم:

$$(-i)^\alpha=(-1)^\alpha i^\alpha=e^{i\pi\alpha}e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}=e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}\quad,\quad i^\alpha=e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$$

بنابراین با جمع کردن مانده‌ها خواهیم داشت:

$$I=\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\;\frac{i(\alpha-1)e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}-i(\alpha-1)e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}}{4}=\frac{-2\pi(\alpha-1)}{4(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})}(e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}-e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha})=\frac{2\pi(1-\alpha)\sin\frac{\pi}{2}\alpha}{4\sin\pi\alpha}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi(1-\alpha)\sin\frac{\pi}{2}\alpha}{4\sin\frac{\pi}{2}\alpha\cos\frac{\pi}{2}\alpha}=\frac{\pi(1-\alpha)}{4\cos\frac{\pi}{2}\alpha}$$

مثال ۲۹: تحت چه شرایطی روی α انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+1}dx$ وجود دارد و مقدار انتگرال چقدر است؟

۱) برای $0<\alpha<1$ انتگرال وجود دارد و مقدار آن برابر با $\pi\frac{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\sin(\alpha\pi)}$ است.

۲) برای $0<\alpha<2$ انتگرال وجود دارد و مقدار آن برابر با $\frac{\pi\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\sin(\alpha\pi)}$ است.

۳) برای $0<\alpha<1$ انتگرال وجود دارد و مقدار آن $\frac{\pi\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{2\sin(\alpha\pi)}$ است.

۴) برای $0<\alpha<3$ انتگرال وجود دارد و مقدار آن برابر با $\frac{\pi\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{2\sin(\alpha\pi)}$ است.

پاسخ: گزینه «۲» در این مثال داریم $\beta=\alpha-1$ و $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$. شرط همگرایی آن است که تابع $z^{\beta+1}f(z)$ وقتی $z\to 0$ و $z\to\infty$ دارای حدی برابر با صفر باشد. با تشکیل این عبارت داریم: $z^{\beta+1}f(z)=z^\alpha f(z)=\frac{z^\alpha}{z^2+1}$

برای آن که $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^\alpha}{z^2+1}=0$ شود لازم است $\alpha>0$ باشد. برای آن که $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^\alpha}{z^2+1}=0$ شود، لازم است درجه‌ی صورت کمتر از مخرج باشد یعنی $\alpha<2$. در نتیجه شرط همگرایی آن است که $0<\alpha<2$ باشد. طبق فرمول برای $\beta=\alpha-1$ داریم:

$$\int_0^\infty x^\beta f(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\beta}}[\text{مجموع مانده‌های } \frac{z^\beta}{z^2+1} \text{ در } z=\pm i]$$

با فرض $z^\beta f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z^\beta}{z^2+1}$ داریم:

$$Res(z^\beta f(z),i)=\frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{z=i}=\frac{i^\beta}{2i}=\frac{i^{\beta-1}}{2}\quad,\quad Res(z^\beta f(z),-i)=\frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{z=-i}=\frac{(-i)^\beta}{-2i}=\frac{(-i)^{\beta-1}}{2}$$

البته می‌دانیم که $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ و $-i=e^{\frac{3}{2}\pi i}$ است. در نتیجه داریم:

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\beta}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\beta-1)}}{2}+\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}(\beta-1)}}{2}\right)=\frac{\pi i}{1-e^{2\pi i(\alpha-1)}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha-2)}+e^{i\frac{3\pi}{2}(\alpha-2)}\right)$$

$$=\frac{\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}e^{-2\pi i}}\left(e^{-i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}+e^{-i3\pi}e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}\right)=\frac{\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left(-e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}-e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}\right)$$

حال با ضرب صورت و مخرج در $e^{-\pi i\alpha}$ داریم:

$$I=\frac{\pi i}{e^{-\pi i\alpha}-e^{\pi i\alpha}}\left(-e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}-e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}\right)=\frac{-2\pi i\cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{-2i\sin(\pi\alpha)}=\frac{\pi\cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}$$

مثال ۳۰: حاصل $I=\int_0^\infty \frac{Lnx}{x^2+4}dx$ کدام است؟

۱) $\pi Ln2$

۲) $\frac{1}{4}\pi Ln2$

۳) $\frac{1}{8}\pi Ln2$

۴) $\frac{1}{2}\pi Ln2$

پاسخ: گزینه «۲» از این فرمول استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^\infty f(x)Lnxdx=Re[\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های } f(z)Lnz \text{ در قطب‌های بالای محور حقیقی})]$$

در این مثال $f(z)Lnz=\frac{Lnz}{(z-2i)(z+2i)}$ در نقاط $\pm 2i$ دارای قطب ساده است که فقط $z=2i$ بالای محور حقیقی قرار دارد.

$$Res(f(z)Lnz,2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{Lnz}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{Ln2i}{4i}=\frac{Ln2+i\frac{\pi}{2}}{4i}\Rightarrow\int_0^\infty\frac{Lnx}{x^2+4}dx=Re[\pi i\frac{Ln2+i\frac{\pi}{2}}{4i}]=\frac{\pi}{4}Ln2$$

مثال ۳۱: حاصل $I=\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ln}x}{(x^2+1)^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}\mathrm{Ln}2$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $-\frac{\pi}{4}$ ۴) $-\frac{\pi}{4}\mathrm{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۳» یادآوری می‌کنیم که:

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{Ln}x\,dx = \mathrm{Re}[\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های } f(z)\mathrm{Ln}z \text{ در قطب‌های بالای محور حقیقی})]$$

در این مثال $f(z)\mathrm{Ln}z=\frac{\mathrm{Ln}z}{(z-i)^2(z+i)^2}$ دو قطب مرتبه‌ی دو در $z=\pm i$ دارد که فقط $z=i$ بالای محور حقیقی است.

$$\mathrm{Res}(f(z)\mathrm{Ln}z,i)=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[(z-i)^2\frac{\mathrm{Ln}z}{(z-i)^2(z+i)^2}]_{z=i}=\frac{d}{dz}[\frac{\mathrm{Ln}z}{(z+i)^2}]_{z=i}=\frac{\frac{1}{i}(2i)^2-2(2i)\mathrm{Ln}i}{(2i)^4}=\frac{4i-4i(\mathrm{Ln}1+i\frac{\pi}{2})}{16}=\frac{2\pi+4i}{16}$$

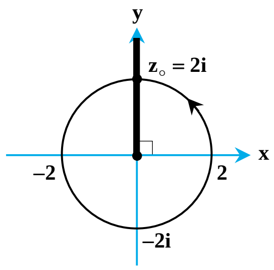
بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار مقابل است:

$$I=\int_0^\infty\frac{\mathrm{Ln}x}{(1+x^2)^2}dx=\mathrm{Re}[\pi i(\frac{2\pi+4i}{16})]=-\frac{4\pi}{16}=-\frac{\pi}{4}$$

مثال ۳۲: حاصل $\int_{C:|z|=2} ze^{-z^2}\mathrm{Ln}z\,dz$، وقتی که $\mathrm{Ln}z$ شاخه‌ای از لگاریتم با شرط $\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{5\pi}{2}$ باشد، کدام است؟

۱) $\pi i(1-e^4)$ ۲) $\frac{\pi}{2}(e^4-e^{-4})$ ۳) $i\pi(e^{-2}-1)$ ۴) $\frac{\pi}{2}i(1-e^2)$

پاسخ: گزینه «۱» می‌خواهیم از نکته‌ی بالا استفاده کنیم.



در این مثال $f'(z)=ze^{-z^2}$ است. بنابراین داریم: $f(z)=\int ze^{-z^2}dz=-\frac{1}{2}\int -2ze^{-z^2}dz=-\frac{1}{2}e^{-z^2}$

همچنین z_0 نقطه‌ی برخورد نیم خط $\theta=\frac{\pi}{2}$ با دایره‌ی $|z|=2$ است. بنابراین $z_0=2i$ است.

به این ترتیب خواهیم داشت: $\frac{1}{2\pi i}\int_C ze^{-z^2}\mathrm{Ln}z\,dz=f(2i)-f(0)=-\frac{1}{2}e^{-(2i)^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-e^4)$

بنابراین داریم: $I=\int_C ze^{-z^2}\mathrm{Ln}z\,dz=\pi i(1-e^4)$

توضیح: طبیعی است، حل انتگرال بدون استفاده از نکته بسیار سخت‌تر از روش فوق است!

مثال ۳۳: حاصل سری $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{4n^2-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا خیلی خلاصه یادآوری می‌کنیم که در درس ریاضیات عمومی این سری را با تجزیه‌ی مخرج و ایجاد فرم تلسکوپی حل می‌کنند. به این صورت که:

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}})=\frac{1}{2}$$

حال ببینیم با روش جدید چگونه به جواب می‌رسیم. $f(z)=\frac{1}{4z^2-1}$ دارای دو قطب ساده در $z=\pm\frac{1}{2}$ است.

با فرض $\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{\cot g\pi z}{4z^2-1}=f(z)\cot g\pi z$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{Res}(f(z)\cot g\pi z,\pm\frac{1}{2})=\frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{\pm\frac{1}{2}}=\frac{\cot g(\pm\frac{\pi}{2})}{8(\pm\frac{1}{2})}=0$$

در هر دو نقطه، مانده برابر با صفر است، بنابراین داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=-\pi(0+0)=0$$

اکنون با جدا کردن جمله‌ی $n=0$ از سری و استفاده از زوج بودن $f(n)$ داریم:

$$-1+2\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{4n^2-1}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

مثال ۳۴: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{4}\cot gh 2\pi-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}\cot gh 2\pi-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}\cot gh 4\pi-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{4}\cot gh 4\pi-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که $f(n)=\frac{1}{n^2+4}$، بنابراین $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$، در $z=\pm 2i$ قطب ساده دارد لذا داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{n^2+4})=-\sum_{z=\pm 2i}\text{Res}(\frac{\pi\cot g\pi z}{z^2+4})=-[\frac{\pi\cot g\pi z}{2z}]_{z=2i}-[\frac{\pi\cot g\pi z}{2z}]_{z=-2i}=-2\frac{\pi\cot g 2\pi i}{4i}=\frac{\pi}{2}\coth 2\pi$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{n^2+4})=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2+4}+(\frac{1}{0^2+4})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$$

در واقع بازه $-\infty$ تا ∞ را به سه قسمت مجزا تقسیم کرده‌ایم و بازه ($-\infty$ تا -1)، یعنی سری $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2+4}$، فقط عدد $n=0$، $\frac{1}{0^2+4}=\frac{1}{4}$ و بازه (۱ تا ∞)، یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$. با توجه به این که $\frac{1}{n^2+4}$ تابعی زوج بر حسب n است مقادیر $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2+4}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ با هم برابرند و لذا داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{4}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}=\frac{1}{2}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}-\frac{1}{4}]=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}\coth 2\pi-\frac{1}{4}]=\frac{\pi}{4}\coth 2\pi-\frac{1}{8}$$

مثال ۳۵: به کمک نظریه مانده‌ها و با استفاده از تابع $F(z)=\frac{z\sin kz}{(z^2+a^2)\sin\pi z}$ $(|k|<\pi)$ حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin kn}{(n^2+a^2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sinh ak}{\pi\sinh a\pi}$ ۲) $\frac{\pi\sinh ak}{\sinh a\pi}$ ۳) $\frac{\pi\sinh ak}{2\sinh a\pi}$ ۴) $\frac{2\sinh ak}{\pi\sinh a\pi}$

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنیم $f(n)=\frac{n\sin kn}{n^2+a^2}$ باشد. برای یافتن جواب می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n)=-\pi[$ مجموع مانده‌های تابع $F(z)=\frac{f(z)}{\sin\pi z}$ در تمام قطب‌های $f(z)]$

اما در صورت سؤال $(-1)^{n+1}$ را داریم. برای همین می‌توانیم طرفین تساوی بالا را در (-1) ضرب کنیم، تا $(-1)^{n+1}$ در سمت چپ ایجاد شود. خُب حالا توجه کنید که نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ ریشه‌های معادله‌ی $z^2+a^2=0$ یعنی $z=\pm ia$ هستند.

همه‌ی نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ قطب‌های ساده هستند. اگر فرض کنیم: $F(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z\sin kz}{(z^2+a^2)\sin\pi z}$ آن‌گاه داریم:

$$\text{Res}_{z=\pm ia}F(z)=\frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{z=\pm ia}=\frac{z\sin kz}{2z\sin\pi z+\pi(z^2+a^2)\cos\pi z}\Big|_{z=\pm ia}=\frac{1}{2}(\frac{\sinh ak}{\sinh\pi a})$$

بنابراین:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}f(n)=\pi[-\frac{1}{2}(\frac{\sinh ak}{\sinh\pi a})+(-\frac{1}{2}\frac{\sinh ak}{\sinh\pi a})]=-\pi(\frac{\sinh ak}{\sinh\pi a})$$

با خارج کردن جمله‌ی $n=0$ و توجه به زوج بودن $f(n)$ داریم:

$$f(0)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}f(n)=\pi\frac{\sinh ak}{\sinh\pi a}$$

اما $f(0)=0$ است. با تقسیم طرفین بر ۲ به خواسته‌ی سؤال می‌رسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}f(n)=\frac{\pi\sinh ak}{2\sinh\pi a}$$

مثال ۳۶: به کمک نظریه مانده‌ها حاصل سری $A=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi^3}{16}$ ۲) $\frac{\pi^3}{12}$ ۳) $\frac{\pi^3}{8}$ ۴) $\frac{\pi^3}{18}$

پاسخ: گزینه «۱»

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(\frac{2n+1}{2})=\pi[$ مجموع مانده‌های $(\sec\pi z)f(z)$ در تمام قطب‌های $f(z)]$

اما سؤال را باید به شکل $f(\frac{2n+1}{2})$ در بیاوریم، لذا داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{1}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{(\frac{2n+1}{2})^3}]=\frac{1}{8}\pi[\text{Res}_{z=0}\frac{\sec\pi z}{z^3}]=\frac{\pi}{8}(\frac{(\sec\pi z)''}{2})\Big|_{z=0}=\frac{\pi^3}{16}$$

مثال ۳۷: اگر مانده تابع $g(z)=\dfrac{\pi\cot g(\pi z)\cot gh(\pi z)}{z^3}$ در قطب‌های $z=0$ و $z=ni$ برابر با $\dfrac{7\pi^3}{45}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{\cot gh n}{n^3}$ باشد، آنگاه حاصل سری $S=\dfrac{\cot gh\pi}{1^3}+\dfrac{\cot gh 2\pi}{2^3}+\cdots$ کدام است؟

۱) $\dfrac{7\pi^3}{180}$ ۲) $\dfrac{7\pi^4}{90}$ ۳) $\dfrac{7\pi^3}{90}$ ۴) $\dfrac{7\pi^4}{180}$

پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید سری به صورت $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cot gh n\pi}{n^3}$ است. فرض کنیم $f(n)=\dfrac{\cot gh(n\pi)}{n^3}$ باشد. طبق فرمول داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{\cot gh(n\pi)}{n^3}=-\frac{1}{2}\pi(\text{مجموع مانده‌های } f(z)\cot g(\pi z) \text{ درهمه‌ی قطب‌های } f(z))$$

در اینجا به دو موضوع توجه کنید: اول آن‌که $f(n)$، تقسیم دو تابع فرد بر یکدیگر است، بنابراین زوج می‌شود. به همین دلیل می‌توان نوشت: $f(n)=f(-n)$ و ما می‌توانیم تساوی $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)$ را بپذیریم. دوم آن‌که $f(0)$ تعریف شده نیست و مجموع‌های نوشته شده برای $n\neq 0$ محاسبه می‌شوند. با توجه به صورت سؤال، $\pi f(z)\cot g(\pi z)=g(z)$ است.

بنابراین داریم: $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=-\frac{1}{2}(\text{مجموع مانده‌های } g(z) \text{ در تمام قطب‌های } f(z))\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\cot gh(n\pi)}{n^3}-\frac{7\pi^3}{45}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)+\frac{7\pi^3}{90}$

چون $f(n)$ زوج است می‌توانیم در سمت راست به جای $\sum_{-\infty}^{\infty}f(n)$، $2\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ قرار دهیم: $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=-\sum_{n=1}^{\infty}f(n)+\frac{7\pi^3}{90}$

با آوردن سری سمت راست به سمت چپ تساوی داریم: $2\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\frac{7\pi^3}{90}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\frac{7\pi^3}{180}$

مثال ۳۸: اگر $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$، آن‌گاه حاصل $\oint_{|z|=\pi}\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $24\pi i$ ۲) $12\pi i$ ۳) $-24\pi i$ ۴) $-12\pi i$

پاسخ: گزینه «۳» با قرار دادن $1+z^2=0$، صفرهای $f(z)$ به‌صورت $z=\pm i$ به‌دست می‌آیند. از طرفی اگر مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم، قطب‌های $f(z)$ به‌دست می‌آید. $1-\cos 2\pi z=0\Rightarrow\cos 2\pi z=1$

ریشه‌های معادله فوق $z=n$ یعنی $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ می‌باشد و برای این‌که ببینیم قطب مرتبه چندم هستند، داریم:

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{1-\cos 2\pi z}{1+z^2}$$
$$\varphi(z)=1-\cos 2\pi z\Rightarrow\varphi'(z)=+2\pi\sin 2\pi z\Rightarrow\varphi'(0)=0$$
$$\varphi''(z)=4\pi^2\cos 2\pi z\Rightarrow\varphi''(0)=4\pi^2\neq 0$$

به همین ترتیب تمام نقاط $z=n$ همگی قطب مرتبه دوم $f(z)$ هستند، اما دقت کنید فقط هفت‌تای آن‌ها داخل دایره $|z|=\pi$ قرار دارند، یعنی قطب‌های ±1، ±2، ±3 و 0 لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}P=7\times2=14\\ N=2\end{array}\right\}\Rightarrow N-P=2-14=-12$$

طبق قضیه فوق داریم:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-12\Rightarrow\oint_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-24\pi i$$

مثال ۳۹: اگر $f(z)=\dfrac{z^4+z^2+1}{(z-1)^2}$ و C دایره $|z|=2$ باشد، آنگاه حاصل $\oint_C\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ کدام است؟

۱) 4π ۲) $2\pi i$ ۳) 2π ۴) $4\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» این مسئله یک تست جالب از کاربرد دو قضیه روشه و شناسه می‌باشد. به راحتی واضح است که $z=1$ قطب مرتبه دوم $f(z)$ می‌باشد که درون دایره $|z|=2$ قرار دارد و این یعنی $p=2$. از طرفی برای تعیین مرتبه صفر $f(z)$، درست است که از قضیه اساسی جبر می‌توانیم این نتیجه را بگیریم که تابع ۴ صفر دارد، اما اینکه آیا این صفرها درون C هستند یا نه، مشخص نیست. اما قضیه روشه این مشکل را حل می‌کند. با فرض $Q(z)=z^4$ و $g(z)=z^2+1$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|g(z)|=|z^2+1|\leq|z|^2+1\xrightarrow{|z|=2}|g(z)|\leq 5\\ |Q(z)|=|z|^4\xrightarrow{|z|=2}|Q(z)|=2^4=16\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|g(z)|}{|Q(z)|}=\frac{5}{16}<1$$

بنابراین تعداد صفرهای $Q(z)=z^4$ که درون ناحیه C هستند، با تعداد صفرهای $f(z)=Q(z)+g(z)$ برابر است. از طرفی چون $Q(z)$ یک صفر مرتبه چهارم در C دارد، پس $f(z)=z^4+z^2+1$، چهار صفر (با در نظر گرفتن مرتبه چندگانگی آن‌ها) درون C دارد. این یعنی $N=4$ و به راحتی با استفاده از قضیه شناسه داریم:

$$\oint \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(4-2)=4\pi i$$

مثال ۴۰: تعداد ریشه‌های $2z^5+z^4-6z^2+z+1=0$ با احتساب مرتبه‌ی چندگانگی آنها در ناحیه‌ی $1\le|z|<2$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تعداد ریشه‌های این چند جمله‌ای را درون دایره‌ی $|z|=2$ بدست می‌آوریم. اگر $|z|=2$ باشد خواهیم داشت:

$$|2z^5|=64\ ,\ |z^4|=16\ ,\ |6z^2|=24\ ,\ |z|=2\ ,\ |1|=1$$

به وضوح $|2z^5|$ از مجموع اندازه‌ی سایر جملات بیشتر است. پس درجه‌ی آن یعنی ۵، تعداد ریشه‌های درون دایره‌ی $|z|=2$ را نشان می‌دهد. حال فرض کنیم $|z|=1$ باشد. این بار داریم:

$$|2z^5|=2\ ,\ |z^4|=1\ ,\ |6z^2|=6\ ,\ |z|=1\ ,\ |1|=1$$

اندازه‌ی $|6z^2|$ از مجموع اندازه‌ی سایر جملات بزرگتر است. پس تعداد ریشه‌هایی که درون دایره‌ی $|z|=1$ هستند برابر است با ۲. به این ترتیب تعداد ریشه‌هایی که بین دو دایره هستند یعنی در ناحیه‌ی $1\le|z|<2$ قرار دارند برابر است با $5-2=3$.

مثال ۴۱: اگر $f(z)=z^4-2z^3+z^2-12z+20$ و C دایره $|z|=5$ باشد، آن‌گاه مقدار انتگرال $\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz$ (درجهت مثلثاتی) برابر است با:

۱) 0 ۲) πi ۳) $2\pi i$ ۴) $4\pi i$

پاسخ: گزینه «۴» اگر به قدرمطلق تک تک جملات $f(z)$ روی دایره‌ی $|z|=5$ توجه کنیم، می‌بینیم که $|z^4|=5^4$ از مجموع قدرمطلق سایر جملات بزرگتر است:

$$\begin{cases}|-2z^3|+|z^2|+|-12z|+|20|=2\times5^3+5^2+12\times5+20\\ |z^4|=5^4\end{cases}$$

بنابراین $f(z)$ دارای ۴ ریشه درون مرز C است. به عبارتی همه‌ی ریشه‌های $f(z)$ درون مرز قرار گرفته‌اند؛ طبق نکته‌ی متن درس داریم:

$$\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left(\frac{-a_3}{a_4}\right)=2\pi i\left(\frac{2}{1}\right)=4\pi i$$

توجه کنید که a_4 و a_3 ضریب‌های z^4 و z^3 در چند جمله‌ای $f(z)$ هستند.

مثال ۴۲: مقدار انتگرال $(a,b>0)$ $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx$ برابر است با: (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{6a}e^{-ab}$ ۲) $\frac{\pi}{4b}e^{-ab}$ ۳) $\frac{\pi}{ab}e^{-ab}$ ۴) $\frac{\pi}{2b}e^{-ab}$

پاسخ: گزینه «۴» تابع تحت انتگرال زوج است، لذا با فرض $f(z)=\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\times2\pi i(\text{مجموع مانده‌های } f(z) \text{ در قطب‌های بالای محور حقیقی})\right]=\operatorname{Re}\left[\pi i\operatorname*{Res}_{z=ib}\left(\frac{e^{iaz}}{b^2+z^2}\right)\right]=\pi i.\frac{e^{-ab}}{2bi}=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}$$

مثال ۴۳: با شرط $a>0$ ، مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) π ۳) $\frac{1}{a^2}$ ۴) $\frac{\pi}{4a}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$I=\int_0^\infty\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}dz=\frac{1}{2}\int\frac{z^2}{[(z-ia)(z+ia)]^2}dz$$

فقط قطب $z=ia$ بالای محور حقیقی قرار دارد، لذا داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=ia}f(z)=\lim_{z\to ia}\left[\frac{z^2}{(z+ia)^2}\right]'=\lim_{z\to ia}\frac{2z(z+ia)^2-2(z+ia)z^2}{(z+ia)^4}=\frac{-i}{4a}\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\times2\pi i\times\left(-\frac{i}{4a}\right)=\frac{\pi}{4a}$$

مثال ۴۴: حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^۲+۱}dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) πie ۲) $۲\pi ie^{-۱}$ ۳) $\pi ie^{-۱}$ ۴) $\frac{i}{۲}\pi e$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^۲+۱}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^۲+۱}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^۲+۱}dx \Rightarrow I=۲i\int_{۰}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^۲+۱}dx=۲i[\frac{\pi}{۲}e^{-۱}]=\pi ie^{-۱}$$

حاصل انتگرال اول به دلیل اینکه تابع تحت انتگرال تابعی فرد است، برابر صفر خواهد بود. انتگرال دوم با توجه به فرمول‌های لاپلاس محاسبه شد.

مثال ۴۵: حاصل $P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^۲+۱)}dx$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) $-\frac{\pi}{e}$ ۳) $\pi(۱-\frac{۱}{e})$ ۴) $\pi(۲-\frac{۱}{e})$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I_۱=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^۲+۱}dx=\operatorname{Im}[۲\pi i\Sigma \operatorname{Res}\frac{z}{z^۲+۱}e^{iz}]_{\text{نیم‌صفحه فوقانی}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{ze^{iz}}{z^۲+۱}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)}=\frac{ie^{-۱}}{۲i}=\frac{e^{-۱}}{۲} \Rightarrow I_۱=\operatorname{Im}[۲\pi i\times\frac{e^{-۱}}{۲}]=\pi e^{-۱}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^۲+۱)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^۲+۱}dx=\pi-\pi e^{-۱}=\pi(۱-\frac{۱}{e})$$

مثال ۴۶: حاصل $\int_{۰}^{\pi}\frac{d\theta}{۲+\cos\theta}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سال ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\pi\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I=\int_{۰}^{\pi}\frac{d\theta}{۲+\cos\theta}=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{d\theta}{۲+\cos\theta}=\frac{۱}{۲}\oint_{|z|=۱}\frac{\frac{dz}{iz}}{۲+\frac{z^۲+۱}{۲z}}=\frac{۱}{i}\oint_{|z|=۱}\frac{dz}{z^۲+۴z+۱}=\frac{۱}{i}\times۲\pi i\times\operatorname*{Res}_{z=-۲+\sqrt{۳}}\frac{۱}{z^۲+۴z+۱}=۲\pi.\frac{۱}{۲(-۲+\sqrt{۳})+۴}=\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$$

مثال ۴۷: مقدار انتگرال غیر عادی (ناسره) $\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{\beta}}{۱+x^۲}dx$ ، $۰<\beta<۱$ که β عددی ثابت است، برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{\cos\frac{\beta\pi}{۲}}$ ۲) $\frac{\pi}{۲\cos\frac{\beta\pi}{۲}}$ ۳) $\frac{\pi}{۲\cos(\beta\pi)}$ ۴) $\frac{\pi}{۲\cos^۲\frac{\beta\pi}{۲}}$

پاسخ: گزینه «۲» در محاسبه انتگرال به صورت کلی: $I=\int_{۰}^{\infty}x^{\beta}f(x)dx\ (۰<\beta<۱)$ هرگاه تابع $f(z)$ قطبی بر روی محور حقیقی مثبت نداشته باشد، آنگاه می‌توانیم از رابطه مقابل استفاده کنیم:

$$\int_{۰}^{\infty}x^{\beta}f(x)dx=\frac{۲\pi i}{۱-e^{۲\pi i\beta}}$$ (مجموع مانده‌های $z^{\beta}f(z)$ در قطب‌هایی از $f(z)$ که روی محور حقیقی مثبت قرار ندارند.)

در این تست $f(z)=\frac{۱}{۱+z^۲}$ می‌باشد و قطب‌های آن $z=\pm i$ هستند:

$$I=\frac{۲\pi i}{۱-e^{۲\pi i\beta}}(\frac{i^{\beta}}{i+i}+\frac{(-i)^{\beta}}{(-i)+(-i)})=\frac{۲\pi i}{۱-e^{۲\pi i\beta}}(\frac{i^{\beta}}{۲i}-\frac{(-i)^{\beta}}{۲i})=\frac{۲\pi i}{۱-e^{۲\pi i\beta}}(\frac{e^{i\frac{\pi}{۲}\beta}-e^{i\frac{۳\pi}{۲}\beta}}{۲i})$$

$$=\frac{۲\pi i}{e^{i\beta\pi}(e^{-i\beta\pi}-e^{i\beta\pi})}\times\frac{e^{i\pi\beta}(e^{-i\beta\frac{\pi}{۲}}-e^{i\beta\frac{\pi}{۲}})}{۲i}=\frac{\pi}{(\frac{e^{i\beta\pi}-e^{-i\beta\pi}}{۲i})}\times(\frac{e^{i\frac{\beta\pi}{۲}}-e^{i\frac{\beta\pi}{۲}}}{۲i})=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\times(\sin\beta\frac{\pi}{۲})=\pi(\frac{\sin\frac{\beta\pi}{۲}}{۲\sin\frac{\beta\pi}{۲}\cos\frac{\beta\pi}{۲}})=\frac{\pi}{۲\cos\frac{\beta\pi}{۲}}$$

مثال ۴۸: چند جمله‌ای $2z^{10}+4z^4+1$ در حوزه $|z|<1$ دقیقاً چند ریشه (صفر) دارد؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ریشه ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» بنابر قضیه روشه تست را حل می‌کنیم:

$$h(z)=2z^{10}+4z^4+1\ ,\ f(z)=4z^4\ ,\ g(z)=2z^{10}+1$$

$$\begin{cases}|g(z)|\le 2|z|^{10}+1=3\\ |f(z)|=4|z|^4=4\end{cases}\Rightarrow |f(z)|\ge|g(z)|$$

لذا تعداد صفرهای $f(z)+g(z)$ برابر تعداد صفرهای $f(z)$ یعنی ۴ می‌باشد.

مثال ۴۹: مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi}{2}-\frac{e}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{\pi(e^2-1)}{2e^2}$ ۴) $\frac{\pi(e^2+1)}{2e^2}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$I=\int_0^\infty\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}e^{-2})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4e^2}=\frac{\pi(e^2+1)}{4e^2}$$

مثال ۵۰: مقدار انتگرال $I=\int_0^\infty\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$ کدام است؟ (مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) πe^{-2} ۲) $\frac{\pi}{2}e^2$ ۳) πe^2 ۴) $\frac{\pi}{2}e^{-2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\int_0^\infty\frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2k}e^{-kx}\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-2}$$

مثال ۵۱: چند ریشه از ریشه‌های معادله $2z^5-3z^3+z+8=0$ در مجموعه $1<|z|<2$ قرار دارد؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱ ریشه ۲) ۳ ریشه ۳) ۴ ریشه ۴) ۵ ریشه

پاسخ: گزینه «۴»

$$|z|<1\Rightarrow\begin{cases}f(z)=8\\ g(z)=2z^5-3z^3+z\end{cases}$$

از طرفی $|g(z)|<|f(z)|$ بنابراین تعداد ریشه‌های $g(z)+f(z)=0$، با تعداد ریشه‌های $f(z)$ در داخل $|z|<1$ یکسان است و چون $f(z)=8$ ریشه‌ای ندارد لذا $f(z)+g(z)=0$ نیز در داخل $|z|<1$ ریشه‌ای ندارد.

$$|z|<2\Rightarrow\begin{cases}f(z)=2z^5\\ g(z)=-3z^3+z+8\end{cases}\Rightarrow|g(z)|<|f(z)|$$

بنابراین تعداد ریشه‌های $g(z)+f(z)=0$ و $f(z)=0$ در داخل $|z|<2$ یکسان است، از طرفی $f(z)=2z^5$ دارای ۵ ریشه داخل $|z|<2$ می‌باشد، بنابراین معادله $2z^5-3z^3+z+8=0$ دارای ۵ ریشه در ناحیه $1<|z|<2$ می‌باشد.

مثال ۵۲: مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+4x^4}$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^4}=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_0>0}\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

$$1+4z^4=0\Rightarrow z^4=\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}e^{i\pi}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)i}=\begin{cases}\xrightarrow{k=0} z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(1+i) & \text{قابل قبول}\\ \xrightarrow{k=1} z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(-1+i) & \text{قابل قبول}\\ \xrightarrow{k=2} z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(-1-i) & \text{غیرقابل قبول}\\ \xrightarrow{k=3} z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin.\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(1-i) & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

$$f(z)=\frac{P(z)}{q(z)}\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{P(z_0)}{q'(z_0)}\quad\Rightarrow\ f(z)=\frac{1}{1+4z^4}\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{16z_0^3}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}(1+i)} f(z)=\frac{1}{16\times\frac{1}{8}(1+i)^3}=\frac{1}{2(-2+2i)}=\frac{1}{4i-4}\times\frac{-4-4i}{-4-4i}=\frac{-4-4i}{16+16}=-\frac{1}{8}(1+i)$$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}(-1+i)} f(z)=\frac{1}{16\times\frac{1}{8}(-1+i)^3}=\frac{1}{2(2+2i)}=\frac{1}{4+4i}\times\frac{4-4i}{4-4i}=\frac{4-4i}{16+16}=\frac{1}{8}(1-i)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^4}=2\pi i\times\left(\frac{-1}{8}(i+1)+\frac{1}{8}(1-i)\right)=2\pi i\times\left(\frac{-2}{8}i\right)=\frac{\pi}{2}$$

توجه: برای سادگی حل بهتر است انتگرال را بصورت $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^4}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}$ نوشته و سپس به حل بپردازیم. البته بهتر است مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ را نیز به خاطر بسپاریم که با این وجود حل بسیار ساده خواهد شد. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}\right)$

مثال ۵۳: حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos 2x}{x^2+2x+2}\right)dx$ برابر است با: (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $\pi\cos 2$ ۲) $\frac{\pi\cos 2}{e^2}$ ۳) $\frac{\pi\cos 2}{e}$ ۴) $\frac{\pi\cos 2\cosh 2}{e^2}$

پاسخ: گزینه «۲» کافی است به حل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}dx$ بپردازیم:

$$f(z)=z^2+2z+2=(z+1)^2+1\Rightarrow\ f(z)=0\Rightarrow\begin{cases}z=i-1\\ z=-i-1 \ \text{غ غ ق}\end{cases}$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}dx=\operatorname{Re}\left[2\pi i\operatorname{Res}_{z=i-1}\frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2}\right]=\operatorname{Re}\left[2\pi i\times\frac{e^{2i(i-1)}}{2(i-1)+2}\right]=\operatorname{Re}\left[2\pi i\frac{e^{-2-2i}}{2i}\right]$$

$$=\operatorname{Re}[\pi\times e^{-2}\times e^{-2i}]=\operatorname{Re}\left[\frac{\pi}{e^2}(\cos(-2)+i\sin(-2))\right]=\frac{\pi}{e^2}\cos(2)$$

مثال ۵۴: اگر $a>1$ آنگاه معادله $ze^{a-z}=1$ در $D=\{z\in C:|z|<1\}$: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) اصلاً جواب ندارد.
۲) دارای دو جواب است و هر دو مختلط هستند.
۳) بیش از یک جواب دارد که همه حقیقی‌اند.
۴) دارای فقط یک جواب است و این جواب حقیقی و مثبت است.

پاسخ: گزینه «۴»

$$ze^{a-z}=1 \Rightarrow ze^a.e^{-z}=1 \Rightarrow \frac{ze^a}{e^z}=1 \Rightarrow e^z-ze^a=0$$

مرز $|z|=1$ و توابع $f(z)=e^z$ و $g(z)=-ze^a$ را در نظر می‌گیریم. بر روی مرز $|z|=1$ می‌توان چنین نوشت:

$$|f(z)|=|e^z|=|e^{x+iy}|=|e^x||e^{iy}|\xrightarrow[|e^{iy}|=|\cos y+i\sin y|=1]{-1\le x\le 1}|f(z)|\le e$$

$$|g(z)|=|-ze^a|=|-z||e^a|\xrightarrow[a>1]{|-z|=|z|=1}|g(z)|>e$$

بنابراین: $|f(z)|<|g(z)|$ و طبق قضیه روشه، تعداد جواب‌های معادله $g(z)=0$ و $f(z)+g(z)=0$ در داخل مرز $|z|=1$ یکسان خواهد بود. با توجه به اینکه معادله $ze^a=0$ فقط دارای یک ریشه $(z=0)$ در داخل مرز $|z|=1$ می‌باشد، بنابراین معادله $e^z-ze^a=0$ نیز دارای فقط یک ریشه در داخل مرز $|z|=1$ خواهد بود.

مثال ۵۵: مقدار انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{\pi i}{4}$
۳) $\frac{3\pi}{4}$
۴) $\frac{3\pi i}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $\frac{1}{(z+1)^2}$ دارای قطب‌هایی در $z=i$ و $z=-i$ است. برای محاسبه انتگرال حقیقی داده شده، فقط مقدار مانده در قطب $z=i$ که در بالای محور حقیقی قرار گرفته است را محاسبه می‌کنیم.

$$I=\oint\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\oint\frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz$$

با استفاده از انتگرال کوشی داریم:

$$I=2\pi i\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=i}=2\pi i\times\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۵۶: مقدار انتگرال حقیقی ناسره $\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{(x+a)(x+b)}$, $b>a>0$, $-1<\beta<1$ ثابت کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi(b^\beta-a^\beta)}{(b-a)\sin(\beta\pi)}$
۲) $\frac{\pi(b^\beta-a^\beta)}{(b-a)\cos(\beta\pi)}$
۳) $\frac{(b^\beta-a^\beta)}{(b-a)\sin(\beta\pi)}$
۴) $\frac{\pi(b^\beta-a^\beta)}{(b-a)}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left[\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{(x+a)}-\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{(x+b)}\right]=\frac{1}{b-a}\left[\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{a(1+\frac{x}{a})}-\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{b(1+\frac{x}{b})}\right]$$

با تغییر متغیرهای $X=\frac{x}{a}$ و $Y=\frac{x}{b}$ حاصل انتگرال‌های اول و دوم به صورت زیر خواهند بود:

$$I=\frac{1}{b-a}\left[\int_0^\infty\frac{a^\beta X^\beta}{1+X}dX-\int_0^\infty\frac{b^\beta Y^\beta}{1+Y}dY\right]=\frac{1}{b-a}\left[a^\beta\int_0^\infty\frac{X^\beta}{1+X}dX-b^\beta\int_0^\infty\frac{Y^\beta}{1+Y}dY\right]$$

با توجه به نکته و مثال حل شده در متن کتاب می‌دانیم:

$$\int_0^\infty\frac{x^{-\beta}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}$$

حاصل انتگرال‌های فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$I=\frac{1}{b-a}\left[\frac{\pi a^\beta}{\sin(-\beta)\pi}-\frac{\pi b^\beta}{\sin(-\beta)\pi}\right]=\frac{\pi(b^\beta-a^\beta)}{(b-a)\sin(\beta\pi)}$$

حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست!

(روش رد گزینه ها)

سر ی های مختلط، محاسبه مانده و انتگرال گیری به کمک قضیه مانده ها

در این قسمت قراره به تعدادی از تست‌های مربوط به این فصل کَلَکْ بزنیم! البتــه حل تشریحی اکثر اونارو مثل بقیه فصل‌ها در قسمت تست‌های کنکور ارائه کردیم. (تو این فصل تعداد تست‌هایی که میشه به اونا کَلَکْ زد خیلی زیاد نیست)

مثال ۱: فرض می‌کنیم α عدد مختلط ثابتی باشد به قسمتی که $|\alpha|<۱$، و C مرز دایرهٔ یکه به مرکز O و در جهت مثبت (مثلثاتی) باشد. اگر $\bar{z}=x-iy$ مزدوج مختلط $z=x+iy$ باشد، آنگاه مقدار $\oint_C \frac{\sin z}{۱-\alpha\bar{z}}dz$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $۲\pi i\frac{\sin\frac{۱}{\alpha}}{\alpha}$ ۲) $-۲\pi i\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ ۳) $-۲\pi i\sin\frac{۱}{\alpha}$ ۴) $۲\pi i\alpha\sin\alpha$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» من خودم شخصاً عاشق سؤالاتی هستم که طراح پارامتر میده! پارامتر (تو این سؤال α پارامتره!) یعنی تو هر چی دوست داری به جای α قرار بده! البته تو برخی سؤالات مثه این سؤال یه شرط هم واسه پارامتر میذارن و میگن هر چی دوست داری انتخاب کن با شرط این که اندازه‌ی اون کوچکتر از ۱ باشه، برای این سؤال راحت‌ترین عدد $\alpha=۰$ هستش، که به ازای اون به انتگرال $\oint_C \sin z dz$ می‌رسیم که می‌دونیم چون تابع زیر انتگرال تحلیلی هستش، حاصلش صفر میشه، حالا مرحله‌ی دوم کار می‌مونه، یعنی باید دنبال گزینه‌ای باشیم که اگه به جای α، صفر قرار دادیم، مقدارش برابر با صفر بِشه، دیگه این قسمت رو میذاریم شما با هوش و درایت خودتون جواب بِدین! (**راهنمایی:** $\lim\limits_{\alpha\to۰}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=۱$ میشه، $\sin\frac{۱}{\alpha}$ هم که عددی بین ۱ و ۱- میشه!) می‌دونم همه‌تون به گزینه‌ی (۴) رسیدین

مثال ۲: ثابت‌های $a>۰$ و $b>۰$ و $-۱<\gamma<۱$ مفروض‌اند. اگر $\int_۰^\infty \frac{x^\gamma}{(x+a)(x+b)}dx=\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)}\left(\frac{b^\gamma-a^\gamma}{b-a}\right)$، آنگاه مقدار انتگرال $\int_۰^\infty \frac{x^\beta}{(x+a)^۲}dx$ و $(-۱<\beta<۱)$، کدام است؟ (مکانیک ـ دکتری ۹۲)

۱) $\frac{\pi\beta}{\sin(\pi\beta)}$ ۲) $\frac{a\beta}{\sin(\pi\beta)}a^\beta$ ۳) $\frac{۲\pi\beta a^{\beta-۱}}{\sin(\pi\beta)}$ ۴) $\frac{\pi\beta}{\sin(\pi\beta)}a^{\beta-۱}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طراح عزیز این سؤال، هم تو صورت تست و هم تو گزینه‌ها پارامتر داده! پس ما الان باید خوشحال باشیم! دنبال محاسبه‌ی انتگرال دوم هستیم، رابطه‌ی اولی رو اصلاً تحویل نگیرین! اگه فرض کنین $\beta=۰$، اونوقت داریم: $\int_۰^\infty \frac{۱}{(x+a)^۲}dx=[-\frac{۱}{x+a}]_۰^\infty=\frac{۱}{a}$

حالا باید ببینیم تو گزینه‌ها وقتی $\beta=۰$ قرار میدیم، کدوم گزینه مقدارش برابر با $\frac{۱}{a}$ میشه؟ معلومه فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

توضیح: وقتی $\beta=۰$ را امتحان می‌کنید از هم‌ارزی $\sin(\pi\beta)\sim\pi\beta$ استفاده کنید.

مثال ۳: فرض می‌کنیم $x^{-\alpha}$، که در آن $x>۰$، $۰<\alpha<۱$ (ثابت)، معرّف مقدار اصلی توان مورد نظر x باشد، یعنی $x^{-\alpha}=e^{-\alpha Ln x}$، در این صورت مقدار $\int_۰^\infty \frac{x^{-\alpha}}{۱+x}dx$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}$ ۲) $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ ۳) $\frac{\alpha}{\sin(\pi\alpha)}$ ۴) $\frac{\alpha}{\pi\sin\alpha}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» یادتون باشه طراحی که تو سؤالاتش پارامتر میده؛ خیلی شما رو دوست داره! آقای طراح گفته α بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک باشه، پس هر چی دوست دارین انتخاب کنین، من $\alpha=۰^+$ دوست دارم، شما چطور؟ به ازای $\alpha=۰^+$ انتگرال به صورت $I=\int_۰^\infty \frac{۱}{۱+x}dx$ میشه و می‌دونیم حاصل این انتگرال $I=[Ln(۱+x)]_۰^\infty$ میشه و کسی از شما عزیزان نیست که ندونه این مقدار ∞ میشه، خُب حالا تو گزینه‌ها $\alpha\to۰^+$ قرار میدیم ببینیم کدوم گزینه میشه؟ همه‌ی ما از سال دوم یا حداکثر سوم دبیرستان اینو می‌دونیم که: $\lim\limits_{\alpha\to۰}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to۰}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=۱$، $\lim\limits_{\alpha\to۰}\frac{\alpha}{\sin(\pi\alpha)}=\frac{۱}{\pi}$

پس به این نتیجه می‌رسیم که جواب گزینه (۲) میشه (چون وقتی $\alpha\to۰^+$ مخرج صفر میشه)

مثال ۴: حاصل انتگرال $\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{۱-۲p\sin\theta+p^۲}$ با شرط $-۱<p<۱$ (p ثابت)، برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۲\pi}{۱-p^۲}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۱+p^۲}$ ۳) $\frac{۲\pi p^۲}{۱-p^۲}$ ۴) $\frac{۲\pi p}{۱-p^۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» آخ آخ آخ بازم طراح عزیز پارامتر داده و چه پارامتر خوبی هم داده! من $p=۰$ رو دوست دارم که به ازای اون به انتگرال $\int_۰^{۲\pi}d\theta$ می‌رسیم که مقدارش برابر با ۲π میشه، حالا چشمامونو به سمت گزینه‌ها می‌چرخونیم تا ببینیم کدوم گزینه به ازای $p=۰$ مقدارش برابر با ۲π میشه!؟ معلومه گزینه‌های (۳) و (۴) غلطن و یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) می‌تونه درست باشه! خُب حالا چیکار کنیم، بیاین یه کم به اطلاعات خودمون تکیه کنیم، به نظر شما مخرج «$۱-p^۲$» باید باشه یا «$۱+p^۲$»؟ من میگم «$۱-p^۲$» چرا؟ خُب طراح گفته $-۱<p<۱$ یعنی شرطِ واسه این بوده که $p=\pm۱$ نشه، چون اونوقت حتماً حاصل انتگرال داستان‌دار میشده! خُب پس گزینه‌ای جوابه که مقدارش به ازای $p=\pm۱$ داستان‌دار باشه

مثال ۵: انتگرال $\oint_{|z|=1}\frac{|dz|}{|z-a|^2}$، که در آن $a\in C$ و $|a|<1$، برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) 0 ۲) $\frac{2\pi}{1-|a|^2}$ ۳) 1 ۴) $2\pi|a|$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به اینکه a هر مقداری می‌تونه باشه (البته با شرط $|a|<1$)، پس با در نظر گرفتن $a=0$ داریم:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{|z|^2}\xrightarrow{|z|=1}I=\int_{|z|=1}|dz|=\int_{|z|=1}ds=\text{محیط دایره}=2\pi$$

(ds جزء طول قوس است و انتگرال آن روی دایره برابر با محیط دایره می‌شود.) همون‌طور که می‌بینین اگه تو گزینه‌ها هم $a=0$ قرار بِدیم، فقط گزینه (۲) هستش که برابر با 2π میشه

مثال ۶: اگر بدانیم که برای $|z|<1$ داریم: $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots$ سری لوران $\frac{1}{z^2}$ برای $|z+1|<1$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots$ ۲) $1+2(z-1)+3(z-1)^2+4(z-1)^3+\cdots$

۳) $1+(z+1)+(z+1)^2+(z+1)^3+\cdots$ ۴) $1+2(z+1)+3(z+1)^2+4(z+1)^3+\cdots$

پاسخ : گزینه «۴» گفتیم تو ناحیه داده شده مقدار سری لوران باید با خود تابع برابر باشه! برای مثال تو این سؤال به ازای $z=-1$، مقدار تابع برابر با $\frac{1}{(-1)^2}=\frac{1}{z^2}=1$ میشه، حالا باید دنبال گزینه‌ای باشیم که به ازای $z=-1$ مقدارش $\underline{\underline{1}}$ بِشه، واضحِ یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) جوابن! برای رسیدن به جواب نهایی می‌تونیم مثلاً از $z=-\frac{1}{2}$ استفاده کنیم (حواستون که هست نقطه باید تو ناحیه $|z+1|<1$ قرار داشته باشه، چون $|-\frac{1}{2}+1|=|\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$، و این یعنی مقدارش کوچکتر از $\underline{\underline{1}}$ میشه، پس خیالمون راحتِ که تو ناحیه قرار داره!) اما به ازای $z=-\frac{1}{2}$ مقدار تابع برابر با $\frac{1}{(-\frac{1}{2})^2}=4$ میشه، خُب حالا بگید ببینم از بین گزینه‌های (۳) و (۴) کدوم به ازای $z=-\frac{1}{2}$ مقدارشون به ۴ نزدیکترِ؟! معلومه گزینه (۴)

مثال ۷: دو جملهٔ اول در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ در ناحیهٔ $|z+1|>2$ عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{2(z+1)}$ ۲) $\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}$ ۳) $\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{2}{(z+1)^3}$ ۴) $\frac{1}{(z+1)}+\frac{2}{(z+1)^2}$

پاسخ : گزینه «۲» بهتره یه نقطه تو ناحیه $|z+1|>2$ انتخاب کنیم، ببینیم مقدار تابع چقدر میشه، به نظرم $z=2$ خوبه! به ازای اون مقدار تابع برابر با $\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2-1}=f(2)$ میشه، حالا تو گزینه‌ها به جای z، عدد ۲ رو قرار میدیم، هر کدوم مقدارش کمتر از $\frac{1}{3}$ بود، جوابه! (دقت کنین؛ تو این تست دو جمله‌ی اول رو میخوایم، بنابراین نباید دنبال گزینه‌ای باشیم که مقدارش دقیقاً و یا حتی خیلی نزدیک به $\frac{1}{3}$ بِشه) خُب گزینه (۱) که کلاً منفی میشه! گزینه (۳) که تازه داره از $\frac{1}{(2+1)^2}$ یا از $\frac{1}{9}$ یه مقدار مثبت هم کم میکنه و عمراً مقدارش $\frac{1}{3}$ بِشه! پس رقابت اصلی بین گزینه‌های (۲) و (۴) هستش!

$\frac{5}{9}=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{2}{(2+1)^2}+\frac{1}{(2+1)}=$ مقدار گزینه (۴) به ازای $z=2$ ، $\frac{5}{27}=\frac{2}{27}+\frac{1}{9}=\frac{2}{(2+1)^3}+\frac{1}{(2+1)^2}=$ مقدار گزینه (۲) به ازای $z=2$

خُب همون‌طور که می‌بینین گزینه (۴) همین الان بزرگتر از $\frac{1}{3}$ شده و قطعاً نمی‌تونه جواب باشه، چون تازه با تعدادی عبارت مثبت دیگه هم جمع میشه! اما گزینه (۲) کمتر از $\frac{1}{3}$ شده و ظاهراً می‌تونیم امیدوار باشیم که با جمع شدن با تعدادی عبارت مثبت دیگه، حاصلش $\frac{1}{3}$ بِشه، پس این گزینه جوابه

مثال۸: سری لوران تابع $1<|z+1|<2$، $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+2}}$ ۳) $\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$ ۴) $\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$

پاسخ : گزینه «۱» برای این سؤال ناحیه به صورت $1<|z+1|<2$ داده شده، پس نقطه‌ی انتخابی می‌تونه مثلاً $z=0^+$ باشه، که به ازای اون مقدار تابع برابر با $f(0)=\frac{1}{(0)^2-1}=\frac{1}{0-1}=-1$ میشه، حالا باید ببینیم کدوم گزینه به ازای $z=0^+$ مقدارش به ۱- نزدیک‌تره، گزینه (۲) که مقدارش همواره مثبته، پس غلطه! می‌ریم سراغ گزینه (۱) ببینیم مقدارش چقدر میشه؟! $z=0^+$ مقدار گزینه (۱) به ازای $=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)$

عبارت داخل پرانتز یه تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $a_1=\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $q=\frac{1}{2}$ هستش که مقدارش برابر با $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ میشه (اینو از اول دبیرستان می‌دونیم!) و بنابراین مقدار گزینه (۱) دقیقاً $\underline{\underline{-1}}$ میشه، پس همین گزینه جوابه حالا برای تمرین خودتون مقدار گزینه‌های (۳) و (۴) رو به ازای $z=0$ حساب کنین.

مثال۹: کدام‌یک از سری‌های زیر بسط لورانت تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ حول نقطه‌ی صفر در مجموعه $\{z\in\mathbb{C}, 0<|z|<1\}$ است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$ ۲) $\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{1}{2^n})z^n$ ۳) $\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{1}{2^{n+2}})z^n$ ۴) $\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^n})z^n$

پاسخ : گزینه «۱» می‌تونیم مثلاً $z=\frac{1}{2}$ رو برای این سری انتخاب کنیم که تو ناحیه $0<|z|<1$ هم قرار داره، به ازای اون مقدار تابع $\frac{8}{3}=\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}$ میشه، یعنی از ۲ بیشتر و از ۳ کمتر، حالا تو گزینه‌ها به جای zها، عدد $\frac{1}{2}$ رو قرار میدیم، هر کدوم نزدیک به $\frac{8}{3}$ شد، جوابه! خُب همه اونا که $\frac{1}{2z}$ دارن که به ازای $z=\frac{1}{2}$ برابر با $\underline{\underline{1}}$ میشه، پس باید سراغ داخل سری‌ها رو بگیریم، اگه $z=\frac{1}{2}$ قرار بدیم، همه‌ی گزینه‌ها $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ هم تولید میکنن که می‌دونیم مساوی $\underline{\underline{2}}$ میشه پس تا اینجا همه‌ی گزینه‌ها، ۳+ را تحویل ما دادن! (۱+ به خاطر $\frac{1}{2z}$ از قبل داشتیم) گزینه‌های (۲) و (۳) غلطن، چون دارن به مثبت ۳، یک مقدار مثبت هم اضافه میکنن! و ما می‌دونیم مقدار تابع باید از ۳ کمتر باشه، حالا باید از بین گزینه‌های (۱) و (۴) یکی رو انتخاب کنیم:

بخشی از گزینه (۴) به غیر از اون قسمت که ۳+ تولید کرده: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)$

همین‌جا معلومه این گزینه غلطه، چرا؟ چون که مقدار این قسمت گزینه (۴) عددی بیشتر از $\underline{\underline{1}}$ میشه و اگه این عدد از $\underline{\underline{3}}$ که قبلاً این گزینه تولید کرده بود، کم بِشه، مقدارش از $\underline{\underline{2}}$ کمتر میشه و این بر خلاف مقدار تابع میشه (یادتون نرفته که به ازای $z=\frac{1}{2}$ مقدار تابع $\frac{8}{3}$ شده بود) پس اجباراً گزینه (۱) جوابه

مثال۱۰: مقدار انتگرال $\oint_C\frac{dz}{z\sin z}$ روی دایرهٔ یکه $(|z|=1)$ عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $-2\pi i$ ۲) صفر ۳) $\frac{2\pi i}{\sin\pi}$ ۴) $2\pi i$

پاسخ : گزینه «۲» برای این که بتونیم به این سؤال جواب بدیم از این نکته استفاده می‌کنیم که مانده توابع زوج تو $z=0$ برابر با صفر میشه، چون $f(z)=\frac{1}{z\sin z}$، تابعی زوج، پس مانده برابر با صفرِ و در نتیجه حاصل انتگرال برابر با صفر میشه

مثال۱۱: مقدار انتگرال $\int_{|z|=5}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۵- ۴) $2\pi i$

پاسخ : گزینه «۱» اگه $P(z)$ و $Q(z)$ دو تا چند جمله‌ای باشن و درجه $Q(z)$ حداقل دو واحد از درجه $P(z)$ بیشتر باشه و همه‌ی zهایی که $Q(z)$ رو صفر میکنن درون ناحیه‌ی محصور C و یا همه zهایی که $Q(z)$ رو صفر میکنن خارج ناحیه محصور C قرار داشته باشن، اونوقت بدون محاسبه میشه گفت: حاصل $\int_C\frac{P(z)}{Q(z)}dz$ برابر با صفر میشه! تو این سؤال درجه مخرج ۴ و درجه صورت ۲ داده شده، از طرفی $z=\pm2i$ و $z=-1$، نقاطی هستن که مخرج رو صفر میکنن و همه‌ی اونا داخل دایره $|z|=5$:C قرار دارن، پس بدون محاسبه میشه گفت گزینه (۱) جوابه

فصل پنجم

«سری فوریه، انتگرال و تبدیل فوریه»

مثال ۱: دوره تناوب $f(x)=|\cos x|$ کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 3π

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم دوره تناوب $f(x)=\cos x$ برابر $T_1=2\pi$ می‌باشد ، اما باتوجه به نکته فوق با قرار دادن نصف دوره تناوب فـوق خـواهیم دید تابع $f(x)=|\cos x|$ متناوب است.

مثال ۲: کدامیک از توابع زیر زوج است؟

۱) $y=x\sin x$ ۲) $y=x\cos x$ ۳) $y=x^3$ ۴) $y=x^7+\sin x$

پاسخ : گزینه «۱»

$1)\ f(x)=x\rightarrow f(-x)=-x=-f(x)\quad\Rightarrow$ تابع فرد است

$2)\ f(x)=\cos x\rightarrow f(-x)=\cos(x)=f(x)\quad\Rightarrow$ تابع زوج است

$3)\ f(x)=\sin x\rightarrow f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)\quad\Rightarrow$ تابع فرد است

با توجـه به نکات فوق تابع $y=x\sin x$ حاصلضرب دو تابع فرد است، پس تابعی زوج است و تابع $y=x\cos x$ تابعی فرد اسـت و همچنیـن $y=x^7+\sin x$ مجموع دو تابع فرد است و لذا خود تابعی فرد است.

مثال ۳: حاصل انتگرال $I=\int\sin^4 x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$ ۲) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

۳) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$ ۴) $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int\left[1-2\cos 2x+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right]dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+c=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

درسنامه۱: سری فوریه

مثال۱: فرض کنیم $f(x)=x^2, -\pi<x<\pi$ و $f(x)=f(x+2\pi)$ باشد. مقدار ثابت این تابع در بسط سری مثلثاتی (فوریه) کدام است؟

۱) $a_0=\frac{3\pi}{2}$ ۲) $a_0=\frac{\pi^2}{3}$ ۳) $a_0=\frac{2\pi^2}{3}$ ۴) $a_0=3\pi^3$

پاسخ : گزینه «۲» دوره تناوب تابع $T=2\pi$ می‌باشد، لذا داریم:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}[\frac{x^3}{3}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)^3}{3})=\frac{1}{2\pi}(\frac{2\pi^3}{3})=\frac{\pi^2}{3}$$

توضیح: اگر در این سؤال مقادیر b_n سؤال شود چون تابع زوج می‌باشد، واضح است $b_n=0$ خواهد بود.

مثال۲: تابع $f(x)=\begin{cases}-k & ; -\pi<x<0\\ k & ; 0<x<\pi\end{cases}$ مفروض است. ضریب جملات سینوسی این تابع در بسط مثلثاتی سری فوریه کدام است؟

۱) $b_n=0$ ۲) $b_n=\frac{2k}{n\pi}(1+\cos n\pi)$ ۳) $b_n=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$ ۴) $b_n=\frac{2k}{n\pi}(1-\sin n\pi)$

پاسخ : گزینه «۳» دوره تناوب تابع $T=2\pi$ می‌باشد و این یعنی $L=\pi$ است:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-k\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}k\sin nxdx\right]=\frac{k}{n\pi}[\cos nx]_{-\pi}^{0}-[\frac{k}{n\pi}\cos nx]_{0}^{\pi}=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

مثال۳: اگر تابع $f(x)$ به صورت مقابل تعریف شود، مقدار متوسط شکل موج $[f(x)]^2$ برابر کدام گزینه است؟ $f(x)=1+|\sin x|\ ,\ 0<x<\pi$

۱) $\frac{3}{2}\pi+4$ ۲) $\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi}$ ۳) $\frac{3}{2}+\frac{4}{\pi}$ ۴) $\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۳» سؤال نسبتاً ساده‌ای است، کافیست مقدار ثابت تابع $[f(x)]^2$ را حساب کنیم: $f(x)=1+|\sin x| \quad , \quad 0<x<\pi$

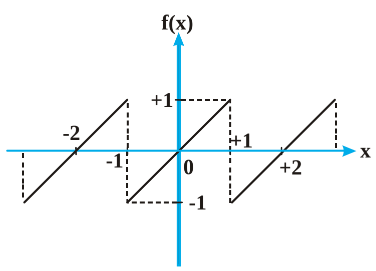
$$0<x<\pi\to\sin x>0\to|\sin x|=\sin x\to f(x)=1+\sin x\Rightarrow[f(x)]^2=1+2\sin x+\sin^2x$$

در ضمن $T=\pi$ است و $L=\frac{\pi}{2}$ در نتیجه داریم:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+2\sin x+\sin^2x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2})dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+2\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1}{\pi}[\frac{3}{2}\pi-2\cos\pi-\frac{1}{4}\sin 2\pi+2\cos 0+\frac{1}{4}\sin 0]=\frac{1}{\pi}(\frac{3}{2}\pi+4)=\frac{3}{2}+\frac{4}{\pi}$$

مثال۴: تابع $f(x)$ به شکل زیر مفروض است. اگر $g(x)=\int f(x)dx$ و $g(0)=-\frac{1}{3}$ باشد، در این صورت ضریب a_0 (مقدار متوسط تابع $g(x)$) در سری فوریه تابع $g(x)$ کدام است؟



۱) $\frac{-1}{4}$

۲) $\frac{-1}{12}$

۳) $-\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به شکل داریم: $f(x)=x \quad , \quad -1<x<1$

$$\Rightarrow g(x)=\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+c \quad , \quad -1<x<1$$

از طرفی می‌دانیم $g(0)=-\frac{1}{3}$، بنابراین $g(0)=c=-\frac{1}{3}$. حال برای به دست آوردن ثابت a_0 داریم:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}g(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3})dx=[\frac{x^3}{6}-\frac{x}{3}]_0^1=(\frac{1}{6}-\frac{1}{3})=-\frac{1}{6}$$

مثال۵: سری فوریه تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-k & , -\pi<x<۰\\ k & , ۰<x<\pi\end{cases}$ و دوره تناوب $T=۲\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{۴k}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n\sin nx}{n}$ ۲) $\frac{۴k}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$ ۳) $\frac{۴k}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$ ۴) $\frac{۴k}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون $-\pi<x<\pi$ و $f(-x)=-f(x)$ لذا تابع فرد است و $a_n=۰$ و باید b_n را محاسبه کنیم:

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}k\sin nxdx=\frac{۲k}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{۰}^{\pi}=\frac{۲k}{\pi n}[-\cos n\pi+\cos(۰)]=\frac{۲k[۱-(-۱)^n]}{n\pi}$$

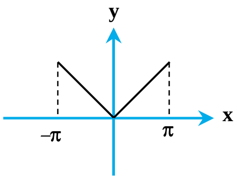
ملاحظه می‌گردد به ازای nهای زوج $b_n=۰$ خواهد بود و به ازای nهای فرد $b_n=\frac{۴k}{n\pi}$ می‌باشد، لذا سری گزینه (۳) صحیح است.

مثال۶: سری فوریه‌ی تابع متناوب $f(x)=|x|$ و $-\pi<x\le\pi$ با دورهٔ تناوب ۲π کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۰}^{\infty}(-۱)^m\frac{\cos(۲m+۱)x}{(۲m+۱)^۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}-\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲m+۱)x}{(۲m+۱)^۲}$

۳) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۲}{\pi}\sum_{m=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲m+۱)x}{(۲m+۱)}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}-\frac{۲}{\pi}\sum_{m=۰}^{\infty}(-۱)^m\frac{\cos(۲m+۱)x}{(۲m+۱)^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»



$$a_۰=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}xdx=\frac{\pi}{۲}$$

$$a_n=\frac{۲}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\cos nxdx=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{+x}{n}\sin nx+\frac{۱}{n^۲}\cos nx\right]_{۰}^{\pi}=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{۱}{n^۲}\cos n\pi-\frac{۱}{n^۲}\right]$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{۲}{\pi n^۲}[(-۱)^n-۱]=\begin{cases}۰ & , \text{n زوج}\\ \frac{-۴}{\pi n^۲} & , \text{n فرد}\end{cases}$$

x	$\oplus$	$\cos nx$
۱	$\ominus$	$\frac{+۱}{n}\sin nx$
۰		$\frac{-۱}{n^۲}\cos nx$

مثال۷: اگر α عددی ناصحیح و $f(x)=\cos\alpha x$ و $-\pi\le x\le\pi$ باشد، سری فوریه f کدام است؟

۱) $\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^۲-n^۲)}\cos nx$ ۲) $\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^۲-n^۲)}\cos nx$

۳) $\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}+۲\alpha\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha^۲-n^۲}\cos nx$ ۴) $\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{۲\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^۲-n^۲)}\cos nx$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» واضح است تابع f تابعی زوج است، لذا داریم:

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos\alpha x.\cos nxdx=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha+n)x+\cos(\alpha-n)x]dx=\frac{۱}{\pi}\left[\frac{۱}{n+\alpha}\sin(n+\alpha)x+\frac{۱}{\alpha-n}\sin(\alpha-n)x\right]_{۰}^{\pi}$$

اگر n زوج باشد $(n=۲k)$. آنگاه داریم:

$$\begin{cases}\sin(n+\alpha)\pi=\sin(۲k\pi+\alpha\pi)=\sin\alpha\pi\\ \sin(\alpha-n)\pi=\sin(\alpha\pi-۲k\pi)=-\sin(۲k\pi-\alpha\pi)=\sin\alpha\pi\end{cases}$$

به همین ترتیب اگر n فرد باشد:

$$\sin(\alpha+n)\pi=-\sin\alpha\pi \quad \text{و} \quad \sin(\alpha-n)\pi=-\sin\alpha\pi$$

لذا داریم:

$$a_n=\begin{cases}\frac{۲\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^۲-n^۲)} & ; \text{n زوج}\\ -\frac{۲\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^۲-n^۲)} & ; \text{n فرد}\end{cases}$$

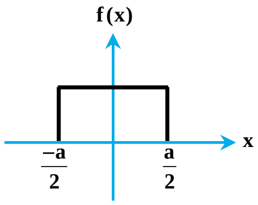
از آنجایی که $a_۰$ در تمام گزینه‌ها یکسان داده شده است، لذا دیگر نیازی به محاسبه آن نیست:

$$f(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{۲\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^۲-n^۲)}\cos nx$$

مثال ۸: تابع متناوب $f(x)$ در فاصله $-\pi < x < \pi$، به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & ; \ |x|<\frac{a}{2}\\ 0 & ; \ \frac{a}{2}<|x|<\pi\end{cases}$ تعریف شده است. با فرض این که $T=2\pi$، بسط فوریه $f(x)$ در صورتی که a به سمت صفر میل کند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ ۴) $\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$

پاسخ: گزینه «۴» واضح است $f(x)$ تابعی زوج است، لذا بسط فوریه آن کسینوسی است:



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \Rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{a}dx=(\frac{2}{\pi})(\frac{1}{a})(\frac{a}{2})=\frac{1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{a}\cos nxdx=(\frac{2}{\pi a})(\frac{1}{n}\sin\frac{na}{2})$$

بنابراین سری فوریه $f(x)$ به صورت مقابل قابل نمایش است:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi a}\sin(\frac{na}{2})\cos nx=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin(\frac{na}{2})}{(\frac{na}{2})}]\cos nx$$

حال اگر $a\to 0$ آنگاه عبارت داخل کروشه به سمت ۱ میل خواهد کرد. لذا سری فوریه $f(x)$ به صورت مقابل نوشته می‌شود: $f(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$

مثال ۹: اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$، آنگاه $\int_0^{\pi}f(x)\sin^2 xdx$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{16}$ ۲) $-\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{16}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول بسط فوریه تابع $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ و مقایسه آن با بسط فوریه داده شده در صورت مسأله خواهیم داشت:

$$a_0=0 \quad , \quad a_n=\frac{(-1)^n}{n^2} \quad , \quad b_n=0$$

از طرفی: $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$. چون $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$، لذا $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{(-1)^n}{n^2}$. اگر در طرفین این تساوی به جای n عدد ۲ قرار دهیم، داریم:

$$\Rightarrow\frac{(-1)^2}{2^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2xdx \Rightarrow\int_0^{\pi}f(x)\cos 2xdx=\frac{\pi}{8}\Rightarrow\int_0^{\pi}f(x)[-2\sin^2 x+1]dx=\frac{\pi}{8}$$

$$2\int_0^{\pi}-f(x)\sin^2 xdx+\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2\int_0^{\pi}-f(x)\sin^2 xdx+0=\frac{\pi}{8}\Rightarrow\int_0^{\pi}f(x)\sin^2 x\,dx=-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{8})=-\frac{\pi}{16}$$

توضیح در مورد صفر شدن انتگرال $\int_0^{\pi}f(x)$: با توجه به آن که $f(x)$ زوج است و $a_0=0$ شده است داریم: $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=0$ به همین دلیل $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$ است.

مثال ۱۰: اگر سری فوریه $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2+1}\cos nx+\frac{1}{n^3}\sin nx]$ بیان شود، آن‌گاه مقدار انتگرال $I=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\cos 2x+\sin 3x]dx$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{135}\pi$ ۲) $\frac{16}{135}$ ۳) $\frac{16\pi}{135}$ ۴) $\frac{8}{135}$

پاسخ: گزینه «۳» در سری فوریه‌ی داده شده $\frac{n\pi}{L}x=nx$ است، پس $L=\pi$ بوده است. حال ضرایب سری فوریه برابرند با:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{2}(\frac{1}{n^2+1}) \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{2}(\frac{1}{n^3})$$

بنابراین به ازای $n=2$ برای a_n و $n=3$ برای b_n خواهیم داشت:

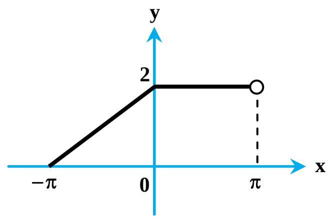
$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2xdx=\frac{1}{2}\frac{1}{5}=\frac{1}{10}\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2xdx=\frac{\pi}{10}$$

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3xdx=\frac{1}{2}\frac{1}{27}=\frac{1}{54}\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3xdx=\frac{\pi}{54}$$

به این ترتیب، I مجموع این دو انتگرال است:

$$I=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{54}=\frac{16\pi}{135}$$

مثال۱۱: سری فوریه تابع $f(x)$ که نمودار آن به شکل زیر است را بیابید.



۱) $\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{(n\pi)^۲}\cos nx+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin nx$

۲) $\frac{۳}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{(n\pi)^۲}\cos nx+\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin nx$

۳) $\frac{۳}{۲}+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{(n\pi)^۲}\cos nx+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin nx$

۴) $\frac{۱}{۲}+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{(n\pi)^۲}\cos nx-\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin nx$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مطابق شکل $T=۲\pi$ و $L=\pi$ است. معادله‌ی خطی که از $(۰,۲)$ و $(-\pi,۰)$ می‌گذرد، به صورت $y=\frac{۲}{\pi}x+۲$ است. ضرایب سری فوریه را حساب می‌کنیم:

$$a_۰=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{۱}{۲\pi}[\int_{-\pi}^{۰}(\frac{۲}{\pi}x+۲)dx+\int_{۰}^{\pi}۲dx]=\frac{۱}{۲\pi}[(\frac{۱}{\pi}x^۲+۲x)]_{-\pi}^{۰}+\frac{۱}{۲\pi}(۲x)\Big|_{۰}^{\pi}=\frac{۳}{۲}$$

روش دیگر یافتن $a_۰$ محاسبه‌ی مساحت زیر منحنی به روش هندسی و تقسیم آن بر T است. در این مثال داریم:

$$a_۰=\frac{۱}{۲\pi}[\frac{۲\times\pi}{۲}+۲\times\pi]=\frac{۳}{۲}$$

برای محاسبه‌ی a_n از جدول جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{۰}(\frac{۲}{\pi}x+۲)\cos nxdx+\int_{۰}^{\pi}۲\cos nxdx]$$

$$=\frac{۱}{\pi}[\frac{۱}{n}(\frac{۲}{\pi}x+۲)\sin nx+\frac{۲}{\pi n^۲}\cos nx]_{-\pi}^{۰}+\frac{۲}{\pi n}[\sin nx]_{۰}^{\pi}=\frac{۲}{\pi}[\frac{۱-(-۱)^n}{\pi n^۲}]$$

به همین ترتیب برای محاسبه‌ی b_n داریم:

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{۰}(\frac{۲}{\pi}x+۲)\sin nxdx+\int_{۰}^{\pi}۲\sin nxdx]$$

$$=\frac{۱}{\pi}[-\frac{۱}{n}(\frac{۲}{\pi}x+۲)\cos nx+\frac{۲}{\pi n^۲}\sin nx]_{-\pi}^{۰}-\frac{۲}{\pi n}[\cos nx]_{۰}^{\pi}=\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}$$

$\frac{۲}{\pi}x+۲$	$\cos nx$
$\frac{۲}{\pi}$	$+$ $\frac{۱}{n}\sin nx$
۰	$-$ $-\frac{۱}{n^۲}\cos nx$

$\frac{۲}{\pi}x+۲$	$\sin nx$
$\frac{۲}{\pi}$	$+$ $-\frac{۱}{n}\cos nx$
۰	$-$ $-\frac{۱}{n^۲}\sin nx$

با قرار دادن ضرایب در سری فوریه داریم:

$$f(x)=\frac{۳}{۲}+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{(n\pi)^۲}\cos nx+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin nx$$

مثال۱۲: سری فوریه $f(\theta)=Ln|tg\frac{\theta}{۲}|$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه MIT)

۱) $Ln۲-\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)\theta}{(۲n+۱)}$

۲) $Ln۲-۲\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)\theta}{(۲n+۱)}$

۳) $-\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)\theta}{۲n+۱}$

۴) $-۲\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)\theta}{(۲n+۱)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از بسط مک‌لورن $Ln(۱+z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}z^n}{n}$ به ازای $z=-e^{i\theta}$ و $z=e^{i\theta}$ خواهیم داشت:

$$Ln(۱+e^{i\theta})=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}e^{in\theta}}{n}\quad,\quad Ln(۱-e^{i\theta})=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}(-۱)^n e^{in\theta}}{n}=-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}$$

حال دقت کنید که $Re(Lnz)=Ln|z|$ و $Re(e^{in\theta})=\cos n\theta$ است. بنابراین از تساوی قسمت‌های حقیقیِ دو طرف تساوی داریم:

$$Ln|۱+e^{i\theta}|=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}\cos n\theta}{n}\ ,\ Ln|۱-e^{i\theta}|=-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$$

دقت کنید که:

$$Ln|۱+e^{i\theta}|=Ln\sqrt{۱+\cos^۲\theta+\sin^۲\theta+۲\cos\theta}=\frac{۱}{۲}Ln(۲+۲\cos\theta)=\frac{۱}{۲}Ln(۴\cos^۲\frac{\theta}{۲})$$

$$Ln|۱-e^{i\theta}|=Ln\sqrt{۱+\cos^۲\theta+\sin^۲\theta-۲\cos\theta}=\frac{۱}{۲}Ln(۲-۲\cos\theta)=\frac{۱}{۲}Ln(۴\sin^۲\frac{\theta}{۲})$$

بنابراین با کم کردن این دو معادله از یکدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}[\ln(4\sin^2\frac{\theta}{2})-\ln(4\cos^2\frac{\theta}{2})]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}(-1-(-1)^{n+1})$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2}\ln(\tan^2\frac{\theta}{2})=-2\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$$

به عبارتی داریم:

$$\ln|\tan\frac{\theta}{2}|=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$$

مثال ۱۳: جمله‌ی دوم سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=e^x$، $0<x<\pi$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $[\frac{4(-e^{\pi}+1)}{5\pi}]\sin 2x$ ۲) $\frac{2(e^{\pi}-1)}{5\pi}\sin 2x$ ۳) $[\frac{2(-e^{\pi}+1)}{5\pi}]\sin 2x$ ۴) $\frac{4(e^{\pi}-1)}{5\pi}\sin 2x$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که سری فوریه سینوسی است، لذا داریم:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin(nx)dx\xrightarrow{\text{انتگرال } e^{ax}\sin bx}$$

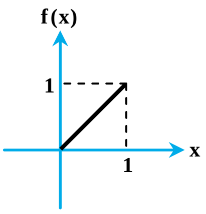
$$b_n=\frac{2}{\pi}[\frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx-n\cos nx)]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi(1+n^2)}[e^{\pi}(\sin n\pi-n\cos n\pi)-e^0(\sin(0)-n\cos(0))]$$

$$\xrightarrow{\cos(n\pi)=(-1)^n}b_n=\frac{2}{\pi(1+n^2)}[-e^{\pi}n(-1)^n+n]$$

جمله‌ی دوم به ازای $n=2$، حاصل می‌شود:

$$\frac{2}{\pi}(\frac{1}{1+2^2})(-2e^{\pi}+2)\sin 2x=\boldsymbol{\frac{4(-e^{\pi}+1)}{5\pi}\sin 2x}$$

مثال ۱۴: برای تابع $f(x)$ وقتی که $0\le x\le 1$ است، سری فوریه‌ای به شکل زیر نوشته شده است. مقدار ضریب a_3 کدام است؟

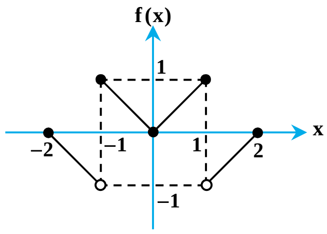


$$f(x)=\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}a_n\cos(\frac{n}{2}\pi x)$$

۱) $-\frac{12\pi+8}{9\pi^2}$ ۲) $-\frac{8}{9\pi^2}$ ۳) $-\frac{6\pi+4}{9\pi^2}$ ۴) $-\frac{4}{9\pi^2}$

پاسخ: گزینه «۱» سری فوریه‌ی نوشته شده، کسینوسی است. بنابراین $f(x)$ به صورت زوج گسترش داده شده است. با دقت به سری می‌بینیم که در آن $\frac{n\pi}{2}=\frac{n\pi}{L}$ است. پس $L=2$ و $T=2L=4$ یعنی دوره‌ی تناوب تابع f، $T=4$ است. لازم است ضابطه‌ی f را روی نیم‌دامنه‌ی آن یعنی در بازه‌ی $[0,2]$ تعیین کنیم. اکنون دقت کنید که سری فوریه‌ی خواسته شده فقط شامل هارمونیک‌های فرد است. بنابراین f نسبت به خط $x=\frac{L}{2}=\frac{1}{2}$ باید فرد باشد. در واقع f را باید طوری بسط دهیم که انتگرال f روی یک دوره‌ی تناوب آن صفر شود. بنابراین $f(x)$ مطابق شکل زیر خواهد بود:

با کمی دقت می‌بینیم که ضابطه‌ی $f(x)$ در نیم دامنه‌ی آن چنین است:



$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ x-2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

اکنون ضریب a_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$a_3=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{3}{2}\pi x)dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos(\frac{3}{2}\pi x)dx=\int_0^1 x\cos(\frac{3}{2}\pi x)dx+\int_1^2(x-2)\cos(\frac{3}{2}\pi x)dx$$

هر دو انتگرال با استفاده از جدول جزء به جزء حل می‌شوند:

x	$\cos(\lambda x)$
۱	$\frac{۱}{\lambda}\sin(\lambda x)$
۰	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\cos(\lambda x)$

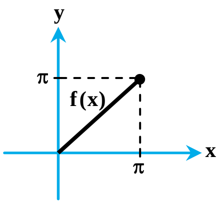
$x-۲$	$\cos(\lambda x)$
۱	$\frac{۱}{\lambda}\sin(\lambda x)$
۰	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\cos(\lambda x)$

در این جداول $\lambda=\frac{۳}{۲}\pi$ است. با نوشتن جواب‌ها و جایگذاری کران‌ها داریم:

$$a_۳=[\frac{۲}{۳\pi}x\sin(\frac{۳\pi}{۲}x)+\frac{۴}{۹\pi^۲}\cos(\frac{۳\pi}{۲}x)]\Big|_۰^۱+[\frac{۲}{۳\pi}(x-۲)\sin(\frac{۳\pi}{۲}x)+\frac{۴}{۹\pi^۲}\cos(\frac{۳\pi}{۲}x)]\Big|_۱^۲=-\frac{۲}{۳\pi}-\frac{۴}{۹\pi^۲}-\frac{۴}{۹\pi^۲}-\frac{۲}{۳\pi}=-\frac{۱۲\pi+۸}{۹\pi^۲}$$

مثال ۱۵: برای تابع $f(x)$ در بازه‌ی $۰\le x\le\pi$ سری فوریه‌ای به شکل زیر نوشته شده است. مقدار ضریب $b_۳$ کدام است؟

$$f(x)=\sum_{n=۱,۳,۵} b_n\sin(\frac{n}{۲}x)$$

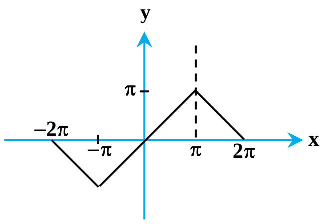


۱) $-\frac{۲\pi}{۳}$
۲) $-\frac{۸}{۹}$
۳) $-\frac{۸}{۹\pi}$
۴) $-\frac{۴}{۹}$

پاسخ: گزینه «۳» سری نوشته شده، سینوسی است. پس $f(x)$ را باید گسترش فرد بدهیم. دقت کنید که $(\frac{n\pi}{L}=\frac{n}{۲}\Rightarrow L=۲\pi)$ پس دوره‌ی تناوب تابع f، $T=۴\pi$ است. لازم است ضابطه‌ی f را روی نیم دامنه‌ی آن یعنی بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیدا کنیم. با دقت به این نکته که فقط هارمونیک‌های فرد در سری فوریه آمده‌اند، معلوم می‌شود $f(x)$ با آن که تابعی فرد است اما نسبت به $x=\pi$ که وسط نیم‌دامنه است، زوج می‌باشد. یعنی نمودار f در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ باید نسبت به خط $x=\frac{L}{۲}=\pi$ متقارن باشد.

به این ترتیب ضابطه‌ی f در نیم دامنه‌ی آن چنین است:

$$f(x)=\begin{cases}x & ۰<x<\pi\\ ۲\pi-x & \pi<x<۲\pi\end{cases}$$



اکنون ضریب $b_۳$ را بدست می‌آوریم:

$$b_n=\frac{۲}{L}\int_۰^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\Rightarrow b_۳=\frac{۲}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi}f(x)\sin(\frac{۳}{۲}x)dx=\frac{۱}{\pi}[\int_۰^{\pi}x\sin(\frac{۳}{۲}x)dx+\int_{\pi}^{۲\pi}(۲\pi-x)\sin(\frac{۳}{۲}x)dx]$$

هر دو انتگرال با استفاده از جدول جزء به جزء زیر حل می‌شوند:

x	$\sin\lambda x$
۱	$-\frac{۱}{\lambda}\cos\lambda x$
۰	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\sin\lambda x$

$۲\pi-x$	$\sin\lambda x$
-۱	$-\frac{۱}{\lambda}\cos\lambda x$
۰	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\sin\lambda x$

در این جداول $\lambda=\frac{۳}{۲}$ است.

$$b_۳=\frac{۱}{\pi}[-\frac{۲x}{۳}\cos(\frac{۳}{۲}x)+\frac{۴}{۹}\sin(\frac{۳}{۲}x)]\Big|_۰^{\pi}+\frac{۱}{\pi}[\frac{-۲(۲\pi-x)}{۳}\cos(\frac{۳}{۲}x)-\frac{۴}{۹}\sin(\frac{۳}{۲}x)]\Big|_{\pi}^{۲\pi}=\frac{۱}{\pi}[-\frac{۴}{۹}-\frac{۴}{۹}]=-\frac{۸}{۹\pi}$$

مثال ۱۶: هرگاه $f(x)=x+\sin x$ و $-\pi<x<\pi$، در بسط فوریه مثلثاتی f، ضریب جمله $\sin x$ برابر است با:

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم سری فوریه تابع $\sin x$ برابر خود $\sin x$ است، لذا کافی است سری فوریه تابع فرد $g(x)=x$ را به دست آوریم. چون ضریب $\sin x$ خواسته شده، لذا $b_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$b_۱=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}x\sin xdx\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری جزء‌به جزء}}b_۱=\frac{۲}{\pi}[-x\cos x+\sin x]_۰^{\pi}=۲$$

ضریب $\sin x$ در بسط تابع $g(x)=x$ برابر ۲ به دست آمد و چون $f(x)=x+\sin x$ تعریف شده است، لذا ضریب $\sin x$ برابر۳=۲+۱ می‌باشد.

مثال ۱۷: مقدار سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0\ ,\ 0<x<\frac{L}{2}\\ 1\ ,\ \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$، در نقطه $x=\frac{L}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ : گزینه «۳» تابع در نقطه $x=\frac{L}{2}$ انفصال دارد بنابراین مقدار سری فوریه برابر است با:

$$f(\frac{L}{2})=\frac{f(\frac{L}{2}^-)+f(\frac{L}{2}^+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۸: اگر سری فوریه تابع $f(x)=x\sin x$ در بازه‌ی $-\pi\le x\le\pi$ به صورت زیر باشد:

$$x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2(\frac{\cos 2x}{1\times 3}-\frac{\cos 3x}{2\times 4}+-\cdots)$$

آنگاه سری فوریه $g(x)=x\cos x$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{1}{2}\sin x+(\frac{2\sin 2x}{1\times 3}-\frac{3\sin 3x}{2\times 4}+\cdots)$

۲) $-\frac{1}{2}\sin x+2(\frac{2\sin 2x}{1\times 3}-\frac{3\sin 3x}{2\times 4}+\cdots)$

۳) $x+\frac{1}{2}\sin x-(\frac{2\sin 2x}{1\times 3}-\frac{3\sin 3x}{2\times 4}+\cdots)$

۴) $x-\frac{1}{2}\sin x+(\frac{2\sin 2x}{1\times 3}-\frac{3\sin 3x}{2\times 4}+\cdots)$

پاسخ: گزینه «۲» اگر از طرفین تساوی داده شده مشتق بگیریم، داریم:

$$\sin x+x\cos x=\frac{1}{2}\sin x-2(\frac{-2\sin 2x}{1\times 3}-\frac{-3\sin 3x}{2\times 4}+\cdots)\Rightarrow x\cos x=-\frac{1}{2}\sin x+2(\frac{2\sin 2x}{1\times 3}-\frac{3\sin 3x}{2\times 4}+-\cdots)$$

مثال ۱۹: اگر بسط فوریه تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-1\ ,\ -\pi<x<0\\ 1\ ,\ 0<x<\pi\end{cases}$ بـه صـورت $f(x)=\frac{4}{\pi}[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots]$ باشـد، آنگـاه بسـط فوریـه $g(x)=|x|$ و $-\pi<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos(2k+1)}{2k+1}dx+c$

۲) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}dx+c$

۳) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{x}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}dx+c$

۴) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{x}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}dx+c$

پاسخ : گزینه «۳» تابع g در واقع انتگرال تابع f می‌باشد، لذا با انتگرال‌گیری داریم:

$$g(x)=\int f(x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^x(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots)dx=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}dx+c$$

مثال ۲۰: اگر تابع f با ضابطه $-\pi<x<\pi$ و $f(x)=2x+1$ دارای سری فوریه $f(x)=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$ باشد، آنگاه کدامیک از عبارت‌هـای زیـر صحیح است؟

۱) با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه تابع $f(x)$ می‌توان سری فوریه تابع با ضابطه $-\pi<x<\pi$ و $g(x)=x^2+x$ را حساب کرد.

۲) با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوق می‌توان سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ ، $g(x)=2$ را حساب کرد.

۳) با استفاده از سری فوق حاصل حد سری متناوب $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots$ برابر با $\frac{\pi}{4}$ می‌شود.

۴) مقدار تابع f در نقطه π برابر $f(\pi)=2$ خواهد بود.

پاسخ : گزینه «۳» برای یادگیری بهتر مطلب، تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

بررسی گزینه‌ی (۱): از سری فوریه‌ی $f(x)$ داریم:

$$2x+1=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$$

اگر از طرفین، انتگرال نامعین بگیریم داریم:

$$x^2+x=x+A_0-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

حال باید x را به سمت چپ ببریم که داریم $x^2+x-x=x^2$. در نتیجه داریم:

$$x^2=A_0-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

یعنی به سری فوریه‌ی x^2 می‌رسیم و سری فوریه‌ی x^2+x حاصل نمی‌شود.

بررسی گزینه (۲): با توجه به اینکه تابع $f(x)=2x+1$ در فاصله داده شده تکه‌ای پیوسته هست، اما $(f(-\pi)) \neq f(\pi))$، لذا با مشتق‌گیری از $f(x)$ سری فوریه $g(x)=2$ ، $-\pi<x<\pi$ نتیجه نمی‌شود.

بررسی گزینه (۳): تابع $f(x)$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است، لذا طبق شرایط دیریکله داریم:

$$f(\frac{\pi}{2})=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به ضابطه $f(x)$ داریم:

$$f(\frac{\pi}{2})=2\times\frac{\pi}{2}+1=\pi+1 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)}\pi+1=1-4[-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots]\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

بررسی گزینه (۴): مقدار تابع در نقطه‌ی π برابر است با:

$$f(\pi)=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n\pi}{n}=1$$

مثال۲۱: اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $-\pi\le x\le\pi$ به صورت $f(x)=\begin{cases}\pi+x & ; -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{2} & ; x=-\pi,0\\ x & ; 0<x<\pi\end{cases}$، تعریف شود و سری فوریه آن به صورت $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$ باشد، عبارت $x(x-\pi)$ در بازه‌ی $0<x<\pi$ برابر کدام گزینه خواهد بود؟

۱) $-\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$ ۲) $-\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^2}$ ۳) $-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$ ۴) $-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به سری فوریه $f(x)$ و گزینه‌ها به نظر می‌رسد، انتگرال‌گیری از طرفین رابطه ضروری باشد:

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{\pi}{2}dx-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin 2nx}{n}dx\Rightarrow\int_0^x f(x)dx=\frac{\pi}{2}x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}[-\cos 2nx]_0^x$$

با توجه به این که صورت سؤال شرط کرده $0<x<\pi$، لذا $f(x)=x$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}(\cos 2nx-1)\xrightarrow{\text{ضرب در ۲}}x^2=\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow \mathbf{x(x-\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \quad (*)$$

تا اینجا مشخص است که گزینه‌های (۲) و (۴) جواب نیستند، برای انتخاب گزینه‌ی صحیح لازم است مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، معلوم شود. برای به دست آوردن مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، با توجه به رابطه (*) باید بگوییم سری $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ مقدار ثابت بسط فوریه تابع $x(x-\pi)$ است:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x(x-\pi)dx=\frac{1}{\pi}[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2\pi}{2}]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}[\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi^3}{2}]=\frac{-\pi^2}{6}$$

مثال۲۲: اگر سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ به‌صورت $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ و سری فوریه تابع $\int_0^x f(y)dy$ به‌صورت $\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$ تعریف شود، آن‌گاه حاصل $\int_0^{2\pi}xf(x)dx$ کدام است؟

۱) $\pi(\pi a_0-A_0)$ ۲) $2\pi(\pi a_0-A_0)$ ۳) $2\pi(2\pi a_0-A_0)$ ۴) $\pi(2\pi a_0-A_0)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» فرض کنیم $F(x)=\int_0^x f(y)dy$ باشد. با توجه به سری‌های فوریه‌ی توابع $f(x)$ و $F(x)$ خواهیم داشت:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx \quad , \quad A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)dx\Rightarrow\int_0^{2\pi}f(x)dx=\pi a_0 \quad , \quad \int_0^{2\pi}F(x)dx=\pi A_0$$

اکنون حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}xf(x)dx$ را به روش جزء به جزء به‌دست می‌آوریم:

$$u=x \Rightarrow du=dx$$

$$dv=f(x)dx \Rightarrow v=\int f(x)dx=F(x)$$

$$I=uv-\int_0^{2\pi}vdu=xF(x)\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}F(x)dx=2\pi F(2\pi)-0-\int_0^{2\pi}F(x)dx=2\pi\int_0^{2\pi}f(y)dy-\int_0^{2\pi}F(x)dx=2\pi(\pi a_0)-\pi A_0$$

$$\Rightarrow I=\pi(2\pi a_0-A_0)$$

مثال ۲۳: اگر $f(x)=\begin{cases}\pi+x & ; & -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{2} & ; & x=-\pi, 0\\ x & ; & 0<x<\pi\end{cases}$، سری فوریه‌ای به شکل $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$ در بازه‌ی $-\pi<x\le\pi$ داشته باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$ برای مقادیر $0<x<\pi$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}x^2+\pi x+\frac{\pi^2}{6}$ ۲) $x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $x^2+\pi x+\frac{\pi^2}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق صورت سؤال سری فوریه‌ی $f(x)$ به صورت مقابل است:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2nx)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین خواهیم داشت: (با فرضِ $x>0$)

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{\pi}{2}dx-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{n}\sin(2nx)dx$$

با توجه به ضابطه‌ی f در ناحیه‌ی $0<x<\pi$ داریم $\int_0^x f(x)dx=\frac{x^2}{2}$. بنابراین داریم:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n^2}\cos(2nx)+\frac{1}{n^2}\right)$$

از طرفی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ است. پس با ضرب طرفین در ۲ داریم:

$$x^2=\pi x-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2nx)$$

در نتیجه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2nx)=x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{6}$$

مثال ۲۴: اگر $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$ و f تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ باشد، آن‌گاه حاصل $\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n b_n}{n}$ ۲) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{b_n}{n}$ ۳) $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}b_n}{n}$ ۴) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}b_n}{n}$

پاسخ: گزینه «۴» با جایگذاری سری فوریه‌ی $f(x)$ به جای $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}xdx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n x\cos(nx)+b_n x\sin(nx))dx$$

اولین انتگرال مساوی صفر است زیرا $y=x$ تابعی فرد است و کران‌ها قرینه‌ی یکدیگرند. همچنین تابع $y=x\cos(nx)$ فرد است.

بنابراین $\int_{-\pi}^{\pi}a_n x\cos(nx)dx=0$ است. اما تابع $y=x\sin(nx)$ زوج است، پس خواهیم داشت:

$$\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}2b_n\int_0^{\pi}x\sin(nx)dx$$

این انتگرال را با استفاده از جدول جزء به جزء حل می‌کنیم:

x	$\sin(nx)$
1	$-\frac{1}{n}\cos(nx)$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin(nx)$

$$\int_0^{\pi}x\sin(nx)dx=\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$$

بنابراین با جایگذاری حاصل انتگرال در سریِ فوق داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}b_n(-1)^{n+1}=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}b_n$$

مثال ۲۵: سری فوریه مختلط تابع $f(x)=x^2$ در بازه $0\le x\le 2\pi$ اگر $f(x+2\pi)=f(x)$ باشد، کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}e^{-inx}$

۲) $f(x)=\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}.e^{inx}$

۳) $f(x)=\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}e^{-inx}$

۴) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}.e^{inx}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2}{3}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2e^{-inx}dx\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری جزء به جزء}}C_n=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x^2e^{-inx}}{in}-\frac{2xe^{-inx}}{-n^2}-\frac{2e^{-inx}}{-in^3}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{4i\pi^2}{n}+\frac{4\pi}{n^2}\right]=\frac{2+2in\pi}{n^2}$$

مثال ۲۶: تابع متناوب $f(x)$ در فاصله $-\pi\le x\le\pi$ به صورت $(a>0)$، $f(x)=\sinh ax$، تعریف شده است. «اندازه‌ی C_n» در سری فوریه مختلط f کدام است؟

۱) $\frac{n\sinh a\pi}{\pi(a^2-n^2)}$

۲) $\frac{n\sinh a\pi}{2\pi(a^2-n^2)}$

۳) $\frac{n\sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)}$

۴) $\frac{n\sinh a\pi}{2\pi(a^2+n^2)}$

پاسخ: گزینه «۳» با نوشتن فرمول جمله‌ی عمومی (C_n) داریم:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh(ax)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right).e^{-inx}dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{(a-in)x}-e^{-(a+in)x}]dx$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a-in}(e^{(a-in)\pi}-e^{-(a-in)\pi})+\frac{1}{a+in}(e^{-(a+in)\pi}-e^{(a+in)\pi})\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{a+in}{a^2+n^2}(e^{a\pi}(-1)^n-e^{-a\pi}(-1)^n)+\frac{a-in}{a^2+n^2}(e^{-a\pi}(-1)^n-e^{a\pi}(-1)^n)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(e^{a\pi}-e^{-a\pi})[a+in-a+in]=\frac{2in(-1)^n(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{4\pi(a^2+n^2)}=\frac{in(-1)^n\sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)}\Rightarrow|C_n|=\boldsymbol{\frac{n\sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)}}$$

مثال ۲۷: فرم مختلط سری فوریه تابع متناوب $f(x)=|\sin x|+1$ در بازه $0\le x\le\pi$ با دوره تناوب $T=\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{\pi(1-4n^2)}$

۲) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-2inx}}{2\pi(1-4n^2)}$

۳) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2inx}}{\pi(1-4n^2)}$

۴) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2e^{+2inx}}{\pi(1-4n^2)}$

پاسخ: گزینه «۴» دوره‌ی تناوب f برابر است با $T=2L=\pi$، پس داریم $L=\frac{\pi}{2}$ و $\frac{in\pi}{L}x=2inx$ است. در ضمن در بازه‌ی $0\le x\le\pi$ داریم؛ $|\sin x|=\sin x$. سری فوریه‌ی مختلط f به صورت $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{2inx}$ است و کافیست ضرایب C_n محاسبه شوند:

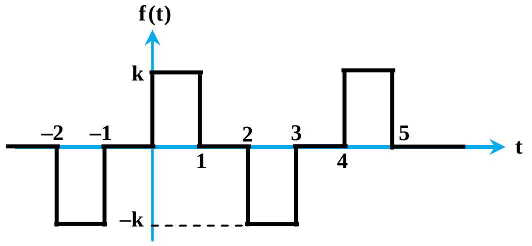
$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-2inx}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\sin x)e^{-2inx}dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-2inx}}{-2in}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin x)e^{-2inx}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-i(2n\pi)}}{-2in}-\frac{e^0}{-2in}\right]+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)e^{-2inx}dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{-2in}-\frac{1}{-2in}\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}(e^{ix}.e^{-2inx}-e^{-ix}.e^{-2inx})dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}(e^{(1-2n)ix}-e^{-(1+2n)ix})dx=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{(1-2n)i}e^{i(1-2n)x}+\frac{1}{(1+2n)i}e^{-i(1+2n)x}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{(1-2n)i}(e^{i(1-2n)\pi}-1)+\frac{1}{(1+2n)i}(e^{-i(1+2n)\pi}-1)\right]=\frac{1}{2\pi i}\left[-\frac{2}{i(1-2n)}-\frac{2}{i(1+2n)}\right]=\frac{2}{\pi(1-4n^2)}\Rightarrow\boldsymbol{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{2inx}}{\pi(1-4n^2)}}$$

مثال ۲۸: اگر نمودار $f(t)$ به شکل زیر باشد، آن‌گاه فرم مختلط سری فوریه f کدام گزینه است؟



۱) $C_{2n+1}=\frac{k((-1)^n i+1)}{(2n+1)\pi i}\ ,\ C_{2n}=0$

۲) $C_{2n}=\frac{(-1)^n ik}{2n\pi}\ ,\ C_{2n+1}=0$

۳) $C_{2n+1}=\frac{k(-1)^n}{2n\pi}\ ,\ C_{2n}=0$

۴) $C_{2n}=\frac{k((-1)^n i+1)}{2n\pi}\ ,\ C_{2n+1}=0$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نمودار f، دوره‌ی تناوب اصلی $T=4$ است، پس $L=2$ است. ضرایب فوریه‌ی مختلط را بدست می‌آوریم:

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_0^{2L}f(x)e^{-\frac{in\pi}{L}x}dx=\frac{1}{4}\int_0^4 f(x)e^{-i\frac{n\pi}{2}x}dx=\frac{1}{4}\left[\int_0^1 ke^{-i\frac{n\pi}{2}x}dx+0+\int_2^3 -ke^{-i\frac{n\pi}{2}x}dx+0\right]=\frac{k}{4}\left[-\frac{2}{in\pi}e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\Big|_0^1+\frac{2}{in\pi}e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\Big|_2^3\right]$$

$$=-\frac{k}{2n\pi i}\left[e^{-i\frac{n\pi}{2}}-1-e^{-i\frac{3n\pi}{2}}+e^{-in\pi}\right]=-\frac{k}{2n\pi i}\left[\cos(\frac{n\pi}{2})+\cos(n\pi)-\cos(\frac{3n\pi}{2})-1-i(\sin(\frac{n\pi}{2})-\sin(\frac{3n\pi}{2}))\right]$$

با جدا کردن هارمونیک‌های زوج و فرد خواهیم داشت:

$$C_{2n}=-\frac{k}{4n\pi i}[(-1)^n+1-(-1)^n-1]=0$$

$$C_{2n+1}=-\frac{k}{2(2n+1)\pi i}[-1-1-i((-1)^n+(-1)^n)]=\frac{k((-1)^n i+1)}{(2n+1)\pi i}$$

توجه کنید که $\cos(2n\pi)=(-1)^{2n}=1$ و $\cos((2n+1)\pi=(-1)^{2n+1}=-1$ است. همچنین $\cos(\frac{3(2n+1)}{2}\pi)=0$ خواهد بود.

مثال ۲۹: هرگاه تابع $f(x)=x$ ، $0\le x\le\pi$ را گسترش زوج دهیم، ضرایب سری فوریه‌ی مختلط آن کدامند؟

۱) $C_n=\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{n^2}\ ,\ C_0=\pi$

۲) $C_{2n+1}=-\frac{2}{\pi(2n+1)^2}\ ,\ C_{2n}=0\ ,\ C_0=\frac{\pi}{2}$

۳) $C_{2n}=-\frac{2}{\pi n^2}\ ,\ C_{2n+1}=0\ ,\ C_0=\frac{\pi}{2}$

۴) $C_n=\frac{1}{\pi n^2}\ ,\ C_0=\pi$

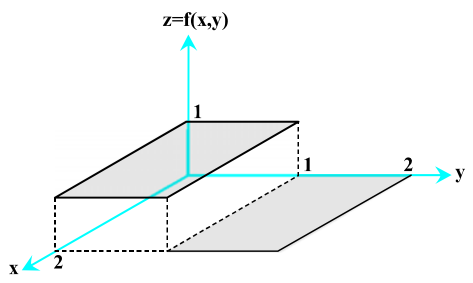
پاسخ: گزینه «۲» ابتدا ضرایب سری فوریه‌ی مثلثاتی f را محاسبه می‌کنیم. از آن‌جا که f را گسترش زوج می‌دهیم، $b_n=0$ است، و $a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^\pi xdx=\frac{\pi}{2}$. ضرایب a_n نیز به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx)\Big|_0^\pi=\frac{2}{\pi}(\frac{(-1)^n-1}{n^2})$

بنابراین در سری فوریه‌ی مختلط آن خواهیم داشت:

$$C_0=a_0=\frac{\pi}{2}\ ,\ C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{\pi}(\frac{(-1)^n-1}{n^2})$$

می‌بینیم که $C_{2n}=\frac{1}{\pi}(\frac{1-1}{4n^2})=0$ است و $C_{2n+1}=\frac{1}{\pi}(\frac{-1-1}{(2n+1)^2})=-\frac{2}{\pi(2n+1)^2}$.

مثال ۳۰: تابع $z=f(x,y)$ که نمودارش را رسم کرده‌ایم در ناحیه‌ی $0\le x\le 2$ ، $0\le y\le 2$ یک سری فوریه به صورت $f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\sin\frac{m\pi}{2}x\cos\frac{n\pi}{2}y$ دارد. مقدار $c_{24}-c_{23}$ کدام است؟



۱) 0

۲) $-\frac{4}{9\pi^2}$

۳) $\frac{8}{9\pi^2}$

۴) $-\frac{8}{9\pi^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» سری فوریه‌ی داده شده برای متغیر x به صورت سینوسی و برای متغیر y به صورت کسینوسی نوشته شده است. ضریب c_{mn} برای بازه‌ی $0 \le x \le 2$ و $0 \le y \le 2$ برابر است با:

$$c_{mn} = \frac{4}{2\times 2}\times\int_0^2\int_0^2 f(x,y)\sin\frac{m\pi}{2}x\cos\frac{n\pi}{2}ydydx$$

با جایگذاری $m=2$ و $n=4$ خواهیم داشت:

$$c_{24} = \int_0^2\int_0^2 f(x,y)\sin\pi x\cos 2\pi ydydx$$

حدود انتگرال برای y از ۰ تا ۲ است، اما مطابق شکل برای $1 \le y \le 2$ داریم: $f(x,y)=0$، پس کافی است مقدار انتگرال را در ناحیه‌ی $0 \le x \le 2$، $0 \le y \le 1$ حساب کنیم. در این ناحیه $f(x,y)=1$ است. در نتیجه داریم:

$$c_{24} = \int_0^2 \sin\pi xdx\times\int_0^1\cos 2\pi ydy = [-\frac{1}{\pi}\cos\pi x]_0^2\times[\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi y]_0^1 = 0$$

به همین ترتیب به ازای $m=3$ و $n=3$ خواهیم داشت:

$$c_{33} = \int_0^2 \sin\frac{3\pi}{2}xdx\times\int_0^1\cos\frac{3\pi}{2}ydy = [-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi}{2}x]_0^2\times[\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}y]_0^1 = \frac{4}{3\pi}\times\frac{-2}{3\pi} = -\frac{8}{9\pi^2}$$

بنابراین مقدار جواب برابر است با:

$$c_{24} - c_{33} = \frac{8}{9\pi^2}$$

مثال ۳۱: اگر $f(x) = \begin{cases} 0 ; & -1 < x < 0 \\ 1 ; & 0 < x < 1 \end{cases}$، آنگاه در بسط لژاندر ـ فوریه این تابع مقدار c_1 کدام است؟

۱) $-\frac{7}{16}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم $P_1(x) = x$، لذا داریم:

$$c_1 = \frac{2\times 1+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\times xdx = \frac{3}{2}\int_{-1}^0 f(x)\times xdx + \frac{3}{2}\int_0^1 1\times xdx = \frac{3}{4}$$

مثال ۳۲: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x & ; -1 \le x < 0 \\ 2x & ; 0 \le x < 1 \end{cases}$، را بر حسب توابع لژاندر بسط دهیم، ضریب جمله‌ی سوم کدام است؟

۱) $-\frac{7}{16}$ ۲) $\frac{5}{16}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ضریب جمله‌ی سوم یعنی c_2، لذا داریم:

$$c_2 = \frac{2\times 2+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)P_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^0 f(x)P_2(x)dx + \frac{5}{2}\int_0^1 f(x)P_2(x)dx$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^0 (x)\frac{1}{2}(3x^2-1)dx + \frac{5}{2}\int_0^1 (2x)\frac{1}{2}(3x^2-1)dx = \frac{5}{4}\int_{-1}^0 (3x^3-x)dx + \frac{5}{2}\int_0^1 (3x^3-x)dx$$

$$= \frac{5}{4}[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0 + \frac{5}{2}[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{5}{4}[0-(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})] + \frac{5}{2}[(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})-0] = -\frac{5}{4}(\frac{1}{4}) + \frac{5}{2}(\frac{1}{4}) = -\frac{5}{16}+\frac{5}{8} = \frac{5}{16}$$

مثال ۳۳: سری بسل ـ فوریه‌ی تابع $f(x) = kx$ در بازه‌ی $0 < x < 3$ با استفاده از توابع بسلی که در شرط مرزی $J_1(3\alpha) = 0$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) $2k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(3\alpha_n)}{\alpha_n J_2(3\alpha_n)}J_1(\alpha_n x)$

۲) $2k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n J_2(3\alpha_n)}J_1(\alpha_n x)$

۳) $2k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^3 J_2(3\alpha_n)}J_1(\alpha_n x)$

۴) $2k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(3\alpha_n)}{\alpha_n^3 J_2(3\alpha_n)}J_1(\alpha_n x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق شرط مرزیِ $J_1(3\alpha) = 0$، با حالت اول از حالات فوق روبرو هستیم. در این مثال، $b=3$ و $p=1$ است. ضرایب c_n از این رابطه به دست می‌آیند:

$$c_n = \frac{2}{3^2 J_{1+1}^2(3\alpha_n)}\int_0^3 xf(x)J_1(\alpha_n x)dx = \frac{2}{9J_2^2(3\alpha_n)}\int_0^3 kx^2 J_1(\alpha_n x)dx$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال ابتدا تغییر متغیر $t = \alpha_n x$ را انجام می‌دهیم لذا $dx = \frac{1}{\alpha_n}dt$ است و چون $0 < x < 3$ است، داریم $0 < t < 3\alpha_n$.

$$c_n = \frac{2}{9J_2^2(3\alpha_n)}\int_0^{3\alpha_n}\frac{kt^2}{\alpha_n^2}J_1(t)\frac{1}{\alpha_n}dt = \frac{2k}{9\alpha_n^3 J_2^2(3\alpha_n)}\int_0^{3\alpha_n} t^2 J_1(t)dt$$

از درس معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که $\int t^2 J_1(t)dt = t^2 J_2(t)$، در نتیجه داریم:

$$c_n = \frac{2k}{9\alpha_n^3 J_2^2(3\alpha_n)}t^2 J_2(t)\Big|_0^{3\alpha_n} = \frac{2k}{\alpha_n J_2(3\alpha_n)}$$

با جایگذاری c_n در سری بسل ـ فوریه خواهیم داشت:

$$f(x) = 2k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n J_2(3\alpha_n)}J_1(\alpha_n x)$$

مثال ۳۴: نزدیک‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{A+B\cos 2x+C\sin x\}$ به تابع $f(x)=x^2+1$ در بازه‌ی $-\pi\le x\le\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{3}\cos 2x-\sin x$ ۲) $(\frac{\pi^2}{3}+1)+\cos 2x$ ۳) $\frac{\pi^2}{3}\cos 2x-\frac{\pi}{3}\sin x$ ۴) $(\frac{\pi^2}{3}+1)-\cos 2x$

پاسخ: گزینه «۲» نزدیک‌ترین تابع به $f(x)$ وقتی به دست می‌آید که $A=a_0$، $B=a_2$ و $C=b_1$، یعنی همان ضرایب سری فوریه‌ی $f(x)$ باشند.

$$A=a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+1)\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)\,dx=\frac{1}{\pi}(\frac{x^3}{3}+x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}+1$$

برای محاسبه‌ی ضریب $\cos 2x$ که همان a_2 است از روش جدول استفاده می‌کنیم:

x^2+1	$\cos 2x$
$2x$	$\frac{1}{2}\sin 2x$
2	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
0	$-\frac{1}{8}\sin 2x$

$$B=a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+1)\cos 2x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}[\frac{x^2+1}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2})=1$$

و با توجه به زوج بودن $f(x)$، ضریب $\sin x$ صفر خواهد بود، پس $C=b_1=0$.

در نتیجه: $g(x)=(\frac{\pi^2}{3}+1)+\cos 2x$ کمترین مجموع مربعات خطا را برای تقریب زدنِ $f(x)$ دارد.

مثال ۳۵: ضریب $\cos nt$ در بسط فوریه‌ی تابع f را بیابید.

$$f(t)=1+|t|\quad,\quad -\pi\le t\le\pi$$

۱) $\frac{1}{n\pi}$ ۲) $\frac{2[(-1)^n-1]}{\pi n^2}$ ۳) $\frac{2}{n^2\pi}$ ۴) $\frac{2[(-1)^n-1]}{n\pi}$

پاسخ: گزینه «۲» در این مثال $L=\pi$ است. تابع $f(t)$ در بازه‌ی $-\pi\le t\le\pi$ دو ضابطه‌ای است زیرا برای مقادیر مثبت، $|t|=t$ و برای مقادیر منفی، $|t|=-t$ است. ابتدا $f(t)$، $f'(t)$ و $f''(t)$ را در یک دوره‌ی تناوب آن‌ها می‌نویسیم:

$$f(t)=\begin{cases}1+t & 0\le t\le\pi\\ 1-t & -\pi\le t<0\end{cases}\Rightarrow f'(t)=\begin{cases}1 & 0<t\le\pi\\ -1 & -\pi\le t<0\end{cases}\Rightarrow f''(t)=0$$

اکنون می‌دانیم که $a_n^{('')}=b_n^{('')}=0$ هستند. $f(t)$ هیچ ناپیوستگی ندارد اما $f'(t)$ در دو نقطه‌ی $t_1=-\pi$ و $t_2=0$ ناپیوسته است. (انتهای بازه را به حساب نمی‌آوریم.)

$$F_1'=f'(-\pi^+)-f'(-\pi^-)=-1-1=-2$$

$$F_2'=f'(0^+)-f'(0^-)=1-(-1)=2$$

اکنون از فرمول کرونکر داریم:

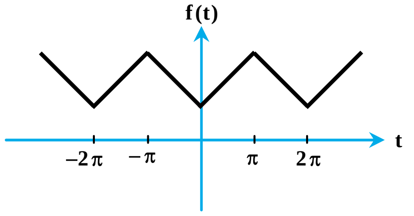
$$a_n=-\frac{L}{n\pi}b_n^{(')}-\frac{1}{n\pi}(0)=-\frac{\pi}{n\pi}b_n^{(')}=-\frac{1}{n}b_n^{(')}$$

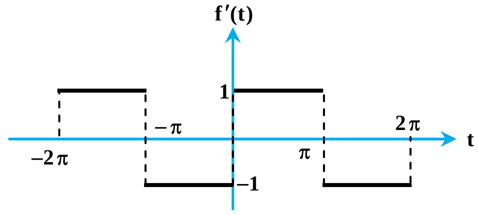
و برای $b_n^{(')}$ داریم:

$$b_n^{(')}=\frac{L}{n\pi}a_n^{('')}+\frac{1}{n\pi}(F_1'\cos(\frac{n\pi}{L}t_1)+F_2'\cos(\frac{n\pi}{L}t_2))=0+\frac{1}{n\pi}(-2\cos(-n\pi)+2\cos(0))=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

با جایگذاری $b_n^{(')}$ در a_n داریم:

$$a_n=-\frac{1}{n}\times\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}$$





مثال ۳۶: دوره تناوب و ضریب a_n در بسط فوریه تابع $f(x)=|\sin \pi x|$ کدامند؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) تناوب ۱ و $a_n=\dfrac{۴}{\pi(۱-۴n^۲)}$
۲) تناوب π و $a_n=\dfrac{۴}{\pi(۱-۴n^۲)}$
۳) تناوب π و $a_n=\dfrac{\pi}{۴n^۲-۱}$
۴) تناوب ۱ و $a_n=\dfrac{\pi}{۴n^۲-۱}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

دوره تناوب تابع $\sin \pi x$ برابر $T=\dfrac{۲\pi}{\pi}=۲$ می‌باشد، اما چون تابع داخل قدر مطلق قرار دارد، دوره تناوب آن نصف می‌شود و دوره تناوب تابع برابر $T=۱$ خواهد بود، پس گزینه‌های ۲ و ۳ غلط هستند. از طرفی برای راحتی کار با محاسبه $a_\circ$ برای تابع زوج $f(x)=|\sin \pi x|$ داریم:

$$a_\circ=\frac{۲}{L}\int_\circ^L f(x)dx=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\int_\circ^{\frac{۱}{۲}}\sin \pi x dx=[-\frac{۴}{\pi}\cos \pi x]_\circ^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{\pi}$$

اگر در گزینه‌ها به جای n مقدار صفر را قرار دهیم فقط گزینه (۱) می‌باشد که $a_\circ=\dfrac{۴}{\pi}$ را تأیید می‌کند، لذا گزینه (۴) غلط می‌باشد.

مثال ۳۷: چنانچه تابع $f(t)$ در یک دورهٔ تناوب به صورت $f(t)=\begin{cases}\circ & , -۳<x<\circ \\ \sin\frac{\pi x}{۳} & , \circ\le x\le ۳\end{cases}$ تعریف شده باشد، در بسط فوریه آن به صورت $f(t)=a_\circ+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{۳}+b_n\sin\frac{n\pi x}{۳})$ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $a_\circ=\dfrac{۲}{\pi}$
۲) همه a_nها به جز $a_\circ$ صفرند.
۳) بجز $b_۱$ که مساوی $\dfrac{۱}{۲}$ است بقیه b_nها صفرند.
۴) بجز $b_۱$ که مساوی $\dfrac{۱}{۲}$ و $b_۲$ که مساوی $\dfrac{۱}{۸}$ است بقیه b_nها صفرند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$b_n=\frac{۱}{۳}\int_{-۳}^{۳}f(t)\sin\frac{n\pi x}{۳}dx=\frac{۱}{۳}\int_\circ^{۳}\sin\frac{\pi x}{۳}\sin\frac{n\pi x}{۳}dx=\frac{۱}{۶}\int_\circ^{۳}[\cos\frac{(۱-n)\pi x}{۳}-\cos\frac{(۱+n)\pi x}{۳}]dx$$

$$=\frac{۱}{۶}[\frac{۳}{(۱-n)\pi}\sin\frac{(۱-n)\pi x}{۳}-\frac{۳}{(۱+n)\pi}\sin\frac{(۱+n)\pi x}{۳}]_\circ^{۳}\Rightarrow b_n=\frac{۱}{۶}[\frac{۳}{(۱-n)\pi}\sin(۱-n)\pi-\frac{۳}{(۱+n)\pi}\sin(۱+n)\pi]=\circ$$

اگر $n=۱$ باشد، مقدار انتگرال فوق برابر است با:

$$b_۱=\frac{۱}{۶}\int_\circ^{۳}(\cos(\circ)-\cos\frac{۲\pi x}{۳})dx=\frac{۱}{۶}[x]_\circ^{۳}-\frac{۱}{۶}[\frac{۳}{۲\pi}\sin\frac{۲\pi x}{۳}]_\circ^{۳}=\frac{۱}{۲}$$

به ازای nهای دیگر حاصل انتگرال برابر صفر می‌شود، لذا گزینه (۳) صحیح است. توجه شود مقدار $a_\circ=\dfrac{۱}{\pi}$ به دست می‌آید که دیگر نیازی به محاسبه نیست.

مثال ۳۸: در بسط فوریه، $a_\circ$ چه چیز را مشخص می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰)

۱) مقدار مؤثر یک سیگنال
۲) نصف مقدار مؤثر یک سیگنال
۳) مقدار dc یک سیگنال
۴) میانگین بین dc یک سیگنال و مقدار مؤثر آن

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ثابتِ $a_\circ$ از لحاظ فیزیکی مقدار dc یک سیگنال و از لحاظ ریاضی، مقدار متوسط تابع $f(x)$ را نشان می‌دهد.

مثال ۳۹: مطلوب است بسط $f(x)=\begin{cases}-۱ & , -\pi<x<\circ \\ ۱ & , \circ<x<\pi\end{cases}$ برحسب یک سری سینوسی فوریه. (مهندسی مکانیک «تبدیل انرژی و طراحی جامدات» ـ آزاد ۸۰)

۱) $f(x)=\dfrac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$
۲) $f(x)=\dfrac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sin ۲nx}{n}$
۳) $f(x)=\dfrac{-۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sin ۲nx}{n}$
۴) $f(x)=\dfrac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sin ۲nx}{n}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

توجه شود تابع $f(x)$ تابعی فرد است، لذا داریم:

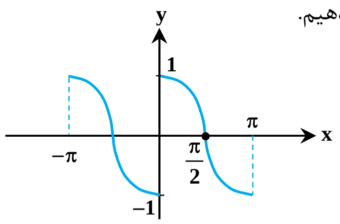
$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_\circ^{\pi}۱\times\sin nx dx=-\frac{۲}{n\pi}[\cos nx]_\circ^{\pi}=-\frac{۲}{n\pi}(\cos n\pi-۱)=\begin{cases}\circ & \text{n های زوج} \\ \frac{۴}{n\pi} & \text{n های فرد}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$$

مثال ۴۰: مقدار $b_۵$ در بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)=\cos x$ و $0<x<\pi$ با دوره تناوب 2π کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

۱) صفر ۲) $\frac{40}{99\pi^2}$ ۳) $\frac{40}{99\pi}$ ۴) $\frac{5}{99\pi}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» نمودار $f(x)=\cos x$ را در بازه‌ی $0<x<\pi$ رسم می‌کنیم. سپس آن را گسترش فرد می‌دهیم.



می‌بینیم که $f(x)$ فرد است و نسبت به وسط نیم دامنه، یعنی نقطه‌ی $\frac{\pi}{2}=\frac{L}{2}$ هم فرد است.

بنابراین فقط جملات سینوسی با هارمونیک‌های زوج در سری فوریه ظاهر می‌شوند.

پس $b_۵=0$ خواهد بود.

مثال ۴۱: مقدار $b_۳$ در بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)=x$ و $0<x<2$ با دوره تناوب ۴ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{4}{3\pi}$ ۲) $\frac{3}{4\pi}$ ۳) $-\frac{4}{3\pi}$ ۴) $-\frac{3}{4\pi}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» می‌دانیم که در بسط سینوسی تابع $f(x)$ ضریب b_n برابر است با $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$. بنابراین به ازای $L=2$ و $n=3$ داریم:

$$b_3=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{3\pi}{2}x\,dx=\int_0^2 x\sin\frac{3\pi}{2}x\,dx$$

با استفاده از جدول، انتگرال را حل می‌کنیم:

x	$\sin\frac{3\pi}{2}x$
1	$-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi}{2}x$
0	$-\frac{4}{9\pi^2}\sin\frac{3\pi}{2}x$

$$b_3=[-\frac{2x}{3\pi}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{4}{9\pi^2}\sin\frac{3\pi}{2}x]\Big|_0^2=\frac{4}{3\pi}$$

مثال ۴۲: اگر برای $-\pi<x<\pi$ داشته باشیم: $x=2(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots)$، در اینصورت عبارت $(\pi-x)(\pi+x)$ در بازۀ $-\pi\le x\le\pi$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\pi^2-4(\sin^2 x-\frac{\sin^2 2x}{4}+\frac{\sin^2 3x}{9}-\cdots)$

۲) $\frac{\pi^2}{3}-4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots)$

۳) $\frac{2\pi^2}{3}+4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots)$

۴) $\frac{\pi^2}{3}+4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$x=2(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots)\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\frac{x^2}{2}=c+2(-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 4x}{4^2}-\cdots)\quad (1)$$

توجه شود سمت راست تساوی بسط تابع زوج $\frac{x^2}{2}$ می‌باشد و در واقع c همان a_0 برای تابع $\frac{x^2}{2}$ باید باشد:

$$c=a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{\pi}[\frac{x^3}{6}]_0^\pi=\frac{\pi^2}{6}$$

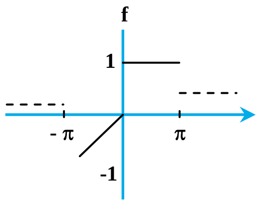
اگر مقدار c را در تساوی (۱) جایگزین کنیم و طرفین تساوی را در عدد ۲− ضرب کنیم، داریم:

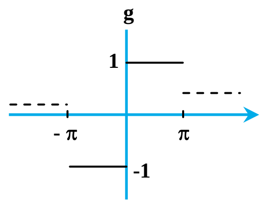
$$4(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots)-\frac{\pi^2}{3}=-x^2$$

اگر مقدار π^2 را به طرفین تساوی فوق اضافه کنیم، داریم:

$$\pi^2-x^2=\frac{2}{3}\pi^2+4(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots)$$

مثال ۴۳: فرق تابع $g(t)$ و $f(t)$ اگر هر دو به وسیله سری فوریه نشان داده شوند، چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)





۱) تابع $f(t)$ به وسیله سری فوریه غیرقابل نمایش است ولی تابع $g(t)$ به وسیله سری فوریه قابل نمایش می‌باشد.
۲) هم تابع $g(t)$ و هم تابع $f(t)$ به تمامی هارمونیک‌های زوج و فرد نیازمندند.
۳) تابع $g(t)$ به تمامی هارمونیک‌های زوج و فرد نیاز دارد ولی $f(t)$ چنین نیست.
۴) تابع $f(t)$ به تمامی هارمونیک‌های زوج و فرد نیاز دارد ولی $g(t)$ چنین نیست.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تابع $g(t)$ به صورت تابع پله‌ای متقارن می‌باشد و لذا فقط شامل هارمونیک‌های فرد است، اما تابع $f(t)$ به تمام هارمونیک‌ها نیاز دارد.

مثال ۴۴: در بسط فوریه یک منبع تغذیه مقدار $a_۰$ برابر صفر می‌باشد. در مورد اینکه این منبع تغذیه قادر به صدمه زدن به انسان می‌باشد یا خیر چه می‌توان گفت؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۱)

۱) صدمه نمی‌زند.
۲) ممکن است صدمه بزند.
۳) قطعاً صدمه می‌زند.
۴) یک منبع تغذیه با $a_۰ = ۰$ وجود ندارد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» لازم است بتوانیم مقدار دامنه جریان، تعیین‌کننده صدمه زدن یا نزدن خواهد بود و تست به نوعی غلط است.

مثال ۴۵: اگر تابع $f(x)$ و $۰ < x < L$ دارای دو سری فوریه زیر باشد:

$$\text{(a)}\ f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{و} \quad \text{(b)}\ f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

آنگاه کدام گزینه صحیح است: (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) (a) بر (b) ارجحیت دارد.
۲) (b) بر (a) ارجحیت دارد.
۳) (a), (b) ارجحیتی بر یکدیگر ندارند.
۴) در بعضی از مسائل (a) بر (b) ارجحیت دارد و برعکس.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» سری‌های a و b به ترتیب گسترش‌های فرد و زوج تابع $f(x)$ هستند، لذا با توجه به کاربرد در مسائل ارجحیت آنها معلوم می‌شود.

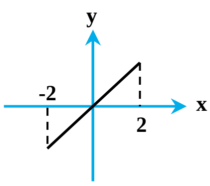
مثال ۴۶: سری فوریه تابع فرد $\begin{cases} f(x)=x \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$ بر فاصله $[-۲,۲]$ عبارتست از: (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲}\sin\frac{n\pi x}{۲}$
۲) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲}\cos\frac{n\pi x}{۲}$
۳) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}\sin\frac{n\pi x}{۲}$
۴) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}\cos\frac{n\pi x}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

چون $f(x)$ فرد می‌باشد، بنابراین ضریب a_n صفر است.

$$\begin{cases} f(x)=x \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$$



x	⊕	$\sin(\frac{n\pi x}{۲})$
۱	⊖	$\frac{-۲}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۲}$
۰		$\frac{-۴}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi x}{۲}$

$$b_n=\frac{۲}{۴}\int_{-۲}^{۲} f(x)\sin\frac{۲\pi nx}{۴}dx=\int_{۰}^{۲} x\sin\frac{n\pi x}{۲}dx$$

$$b_n=[\frac{-۲x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۲}+\frac{۴}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi x}{۲}]_{۰}^{۲}=\frac{-۴}{n\pi}\cos n\pi=\frac{-۴(-۱)^n}{n\pi}=\frac{۴(-۱)^{n-۱}}{n\pi}$$

مثال ۴۷: سری فوریه‌ی $f(x)=\begin{cases}-۱\ ; & -۴\le x<۰\\ ۱\ ; & ۰<x<۴\end{cases}$ کدام است؟　　(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۸}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{۴}$　　۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{۴}$　　۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۸}{\pi(۲n-۱)}\sin\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴}$　　۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{\pi(۲n-۱)}\sin\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تابع $f(x)$ تابعی فرد است، لذا داریم:

$$b_n=\frac{۲}{۴}\int_۰^۴ ۱\times\sin\frac{n\pi}{۴}xdx=\frac{۱}{۲}[-\frac{۴}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۴}]_۰^۴=-\frac{۲}{n\pi}\cos n\pi+\frac{۲}{n\pi}\cos(۰)=\frac{۲}{n\pi}(۱-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{۴}{n\pi} & n\ \text{فرد}\\ ۰ & n\ \text{زوج}\end{cases}$$

مثال ۴۸: مقدار سری فوریه متناظر تابع متناوب $f(x)=x^۲+x\ ;-\pi<x<\pi\ ;P=۲\pi$ در نقطه $x=\pi$ کدام است؟　　(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) π　　۲) $\pi^۲$　　۳) $\frac{\pi^۲}{۴}$　　۴) $\pi^۲+\pi$

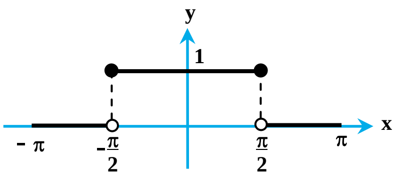
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تابع $f(x)$ در نقطه $x=\pi$ دارای گسستگی است، لذا مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f(\pi)=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{۲}=\frac{\pi^۲-\pi+\pi^۲+\pi}{۲}=\pi^۲$$

توضیح: ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+x$ فقط در بازه‌ی $-\pi<x<\pi$ داده شده است پس برای محاسبه‌ی $f(\pi^+)$ از دوره تناوب f استفاده می‌کنیم:

$$f(\pi^+)=f((\pi-۲\pi)^+)=f((-\pi)^+)=(-\pi)^۲-\pi=\pi^۲-\pi$$

مثال ۴۹: در بسط فوریه تابع متناوب شکل زیر ضریب $\cos ۴x$ کدام است؟　　(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)



۱) $-\frac{۱}{۲\pi}$　　۲) ۰　　۳) $\frac{۱}{۲\pi}$　　۴) $\frac{۱}{۴\pi}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تابع y تابعی زوج با دوره تناوب $T=۲\pi$ است:

$$a_۴=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}۱\times\cos ۴xdx=\frac{۲}{\pi}[\frac{\sin ۴x}{۴}]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=۰$$

مثال ۵۰: ضرایب $a_۲$ و $a_۳$ در سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}۱\ , & ۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\\ ۲\ , & \frac{\pi}{۲}<x\le\pi\end{cases}$ کدامند؟　　(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $a_۲=۰,\ a_۳=\frac{۲}{۳\pi}$　　۲) $a_۲=\frac{۲}{۳\pi}\ ,\ a_۳=\frac{-۲}{۵\pi}$　　۳) $a_۲=\frac{۲}{۳\pi}\ ,\ a_۳=۰$　　۴) $a_۲=۰\ ,\ a_۳=-\frac{۲}{۵\pi}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$a_۳=\frac{۲}{\pi}(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos ۳xdx+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}۲\cos ۳xdx)=\frac{۲}{\pi}[\frac{\sin ۳x}{۳}]_۰^{\frac{\pi}{۲}}+\frac{۲}{\pi}[\frac{۲\sin ۳x}{۳}]_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=\frac{۲}{۳\pi}$$

که البته همین‌جا کار به اتمام می‌رسد و نیازی به محاسبه‌ی $a_۲$ نیست، چرا که در گزینه‌ها $a_۳$ متفاوت است.

$$a_۲=\frac{۲}{\pi}[\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos ۲xdx+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}۲\cos ۲xdx]=\frac{۲}{\pi}[\frac{\sin ۲x}{۲}]_۰^{\frac{\pi}{۲}}+\frac{۲}{\pi}[\sin ۲x]_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=۰$$

مثال ۵۱: در سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases} x & , 0 \le x \le L \\ 2L-x & , L < x \le 2L \end{cases}$ ، با دوره‌ی تناوب $2L$، یعنی $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}]$، داریم:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳ و مهندسی مواد سراسری ۸۴)

۱) $a_k=0$ که در آن $k=0,1,2,3,4,...$

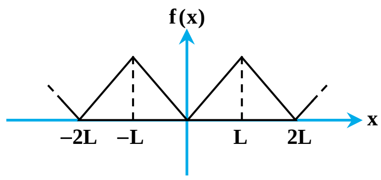
۲) $a_{2k}=0$ و $b_n=0$ به ازای $n\in N$ و k

۳) $a_{2k-1}=0$ و $b_n=0$ به ازای $n\in N$ و k

۴) $b_n=0$ و $a_k\neq 0$ به ازای هر $n\in N$ و هر $k=0,1,2,3,4,...$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با توجه به نمودار تابع واضح است که تابع زوج است، لذا ضرایب b_n همگی صفر هستند و باید a_nها را حساب کنیم:



$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x dx=\frac{2}{L}[\frac{x^2}{2}]_0^L=L\neq 0$$

$$a_2=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{2\pi x}{L}dx=\frac{Lx}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{L}x\Big|_0^L+\frac{L^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi}{L}x\Big|_0^L=0$$

مثال ۵۲: تابع متناوب $f(x)=x$ در فاصله $-\pi<x<\pi$ را به صورت سری فوریه بسط می‌دهیم ضریب $\cos nx$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\frac{(-1)^n}{n}$ ۳) $\frac{2(-1)^n}{n}$ ۴) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

پاسخ : گزینه «۱» تابع داده شده، تابعی فرد است لذا ضرایب کسینوسی آن صفر هستند.

مثال ۵۳: اگر $f(x)=\begin{cases} x & , 0\le x\le \frac{L}{3} \\ \frac{1}{2}(L-x) & , \frac{L}{3}<x<L \end{cases}$ و $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ که در آن b_nها ضرایب ثابت‌اند، آنگاه این رابطه سری ایجاب می‌کند که کدامیک از روابط زیر صحیح باشند؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(x)=\begin{cases} -x & , -\frac{L}{3}\le x\le 0 \\ \frac{1}{2}(L+x) & , -L<x<-\frac{L}{3} \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x & , -\frac{L}{3}\le x\le 0 \\ \frac{1}{2}(L-x) & , -L<x<-\frac{L}{3} \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(L-x) & , L\le x\le \frac{5L}{3} \\ x & , \frac{5L}{3}<x<2L \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(L-x) & , L\le x\le \frac{5L}{3} \\ x-2L & , \frac{5L}{3}<x<2L \end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

روش اول: با توجه به سری فوریه‌ی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$ متوجه می‌شویم که $f(x)$ تابعی فرد است با دوره‌ی تناوب $2L$. بنابراین برای هر $-L\le x\le 0$ باید داشته باشیم $f(x)=-f(-x)$.

حال اگر $-\frac{L}{3}\le x\le 0$ باشد آن‌گاه $0\le -x\le\frac{L}{3}$ است در نتیجه $f(-x)=-x$ است. پس داریم:

$$f(x)=-f(-x)=-(-x)=x$$

همچنین اگر $-L<x<-\frac{L}{3}$ باشد آن‌گاه $\frac{L}{3}<-x<L$ است. بنابراین $f(-x)=\frac{1}{2}(L-(-x))=\frac{1}{2}(L+x)$ است. پس داریم:

$$f(x)=-f(-x)=-\frac{1}{2}(L+x)$$

در نتیجه داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x & ; -\frac{L}{3}\le x\le 0 \\ -\frac{1}{2}(L+x) & ; -L<x<-\frac{L}{3} \end{cases}$$

این پاسخ با گزینه‌های (۱) و (۲) تطابق ندارد. برای بررسی سایر گزینه‌ها و یافتن ضابطه‌ی $f(x)$ در فاصله‌ی $[L,۲L]$ از متناوب بودن f استفاده می‌کنیم.

اگر $L \le x \le \frac{۵L}{۳}$ باشد داریم $-L \le x-۲L \le -\frac{L}{۳}$ در نتیجه داریم:
$$f(x-۲L) = -\frac{۱}{۲}(L+x-۲L) = \frac{۱}{۲}(L-x)$$

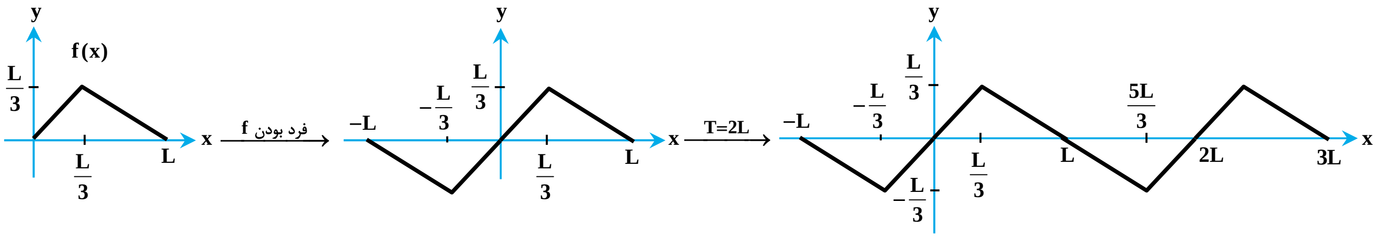
اما $T=۲L$ دوره‌ی تناوب است در نتیجه داریم:
$$f(x) = f(x-۲L) = \frac{۱}{۲}(L-x)$$

همچنین اگر $\frac{۵L}{۳} < x < ۲L$ باشد داریم $-\frac{L}{۳} < x-۲L < ۰$ بنابراین داریم:
$$f(x-۲L) = x-۲L$$

و با استفاده از دوره‌ی تناوب خواهیم داشت:
$$f(x) = f(x-۲L) = x-۲L$$

با جمع‌بندی نتایج فوق به این نتیجه می‌رسیم:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(L-x) & ; \ L \le x \le \frac{۵L}{۳} \\ x-۲L & ; \ \frac{۵L}{۳} \le x < ۲L \end{cases}$$

روش دوم: رسم نمودار f و توجه به دوره‌ی تکرار آن روش بهتری است. سری سینوسی نشان می‌دهد $f(x)$ فرد است، در نتیجه داریم:



در بازه‌ی $L \le x \le \frac{۵L}{۳}$ خطی که از دو نقطه‌ی $(L,۰)$ و $(۵\frac{L}{۳}, -\frac{L}{۳})$ می‌گذرد خط $f(x) = \frac{۱}{۲}(L-x)$ است. در بازه‌ی $\frac{۵L}{۳} < x < ۲L$ خطی که از نقاط $(\frac{۵L}{۳}, -\frac{L}{۳})$ و $(۲L,۰)$ می‌گذرد، خط $f(x) = x-۲L$ است.

مثال ۵۴: سری فوریه تابع پیوسته تکه‌ای $f(x)$ در بازه $[-۳,۳]$ بصورت $a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left\{a_n \cos(\frac{n\pi x}{۳}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{۳})\right\}$ تعریف می‌شود. اگر تابع $f(x)$ برابر با: $f(x) = \begin{cases} ۰ & ; \ -۳ \le x \le ۰ \\ x & ; \ ۰ \le x \le ۳ \end{cases}$ باشد، ضرایب سری فوریه $b_n, a_n, a_۰$ به ترتیب برابرند با : (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۳}{۲}, \frac{۳[\sin(\frac{n\pi}{۲})-۱]}{n^۲\pi^۲}, \frac{-۳\sin(\frac{n\pi}{۲})}{n\pi}$

۲) $\frac{۳}{۴}, \frac{۳[\cos(n\pi)-۱]}{n^۲\pi^۲}, \frac{-۳\cos(n\pi)}{n\pi}$

۳) $\frac{۳}{۴}, \frac{۳[\sin(\frac{n\pi}{۲})-۱]}{n^۲\pi^۲}, \frac{-۳\cos(n\pi)}{n\pi}$

۴) $\frac{۳}{۲}, \frac{۳[\cos(n\pi)-۱]}{n^۲\pi^۲}, \frac{-۳\sin(\frac{n\pi}{۲})}{n\pi}$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$a_۰ = \frac{۱}{۶}\int_۰^۳ x\,dx = \frac{۱}{۶}[\frac{x^۲}{۲}]_۰^۳ = \frac{۳}{۴}$$

$$a_n = \frac{۱}{۳}\int_{-۳}^{۳} f(x)\cos\frac{n\pi}{۳}x\,dx = \frac{۱}{۳}\int_۰^۳ x\cos\frac{n\pi}{۳}x\,dx = \frac{۱}{۳}[\frac{۳x}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۳}x + \frac{۹}{n^۲\pi^۲}\cos\frac{n\pi}{۳}x]_۰^۳ = \frac{۱}{۳}[\frac{۹}{n^۲\pi^۲}(\cos n\pi - ۱)] = \frac{۳}{n^۲\pi^۲}[\cos n\pi - ۱]$$

دیگر نیازی به محاسبه b_n نیست.

مثال ۵۵: در سری فوریه مثلثاتی تابع زیر
$$f(x) = \begin{cases} ۰ & , \ -\pi < x < -\frac{\pi}{۲} \\ -a(x+\frac{\pi}{۲}) & , \ -\frac{\pi}{۲} < x < ۰ \\ a(x-\frac{\pi}{۲}) & , \ ۰ < x < \frac{\pi}{۲} \\ ۰ & , \ \frac{\pi}{۲} < x < \pi \end{cases}$$
ضریب $\sin nx$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر

۲) $\frac{a}{\pi n^۲}$

۳) $\frac{۲a}{\pi n^۲}$

۴) $\frac{۲a(-۱)^n}{\pi n^۲}$

پاسخ : گزینه «۱» تابع زوج است، لذا تمام b_nها صفر هستند.

مثال ۵۶: تابع f در بازه‌ی $[۰,\pi]$ به صورت $f(t)=\cos^{۲} t$ تعریف شده است. در این صورت سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه‌ی f برابر است با:

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲t$ ۲) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin ۲t$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}\sin(nt)$ ۴) $\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\cos(nt)$

پاسخ : گزینه «۱»

$$f(t)=\cos^{۲} t=\frac{۱+\cos ۲t}{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲t$$

مثال ۵۷: سری فوریه‌ی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}۰ & , -\pi\le x<۰\\ ۱ & , ۰\le x\le\pi\end{cases}$ کدام است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۲}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲kx}{۲k}$ ۲) $\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲\sin(۲k+۱)x}{\pi(۲k+۱)}$

۳) $\frac{۲}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{k}\sin kx$ ۴) $\sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲k+۱}\sin(۲k+۱)x+\frac{۱}{k}\cos kx)$

پاسخ : گزینه «۲»

$$a_{۰}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}dx=\frac{۱}{۲\pi}[x]_{۰}^{\pi}=\frac{۱}{۲}$$

دیگر نیازی به محاسبه a_n یا b_n نیست.

مثال ۵۸: تـابع متناوب $\delta(x)=\begin{cases}۰ & ,-\pi<x<\pi\ ,\ x\ne ۰\\ \infty & ,\ x=۰\end{cases}$ ، $p=۲\pi$ دارای یک سری فوریه به صورت:

$\delta(x)=a_{۰}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ است. کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

(مهندسی مواد ـ آزاد ۸۴)

۱) $b_n=۰\ ,a_n=\frac{۱}{\pi}\ ,\ n\ne ۰$ ۲) a_n و b_n موجود نیستند. ۳) $a_n=۰\ ,\ b_n=\frac{۱}{\pi}$ ۴) $b_n=\frac{۲}{\pi}\ ,\ a_n=\frac{۱}{\pi}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\cos nxdx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰^-}^{۰^+}\delta(x)dx=\frac{۱}{\pi}\ ,\ b_n=۰$$

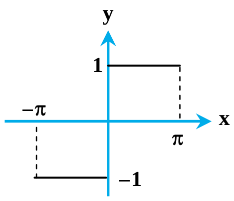
مثال ۵۹: سری فوریه‌ی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}-۱ & -\pi\le x<۰\\ ۱ & ۰\le x\le\pi\end{cases}$ کدام است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۴}{\pi}(\sin x+\frac{\sin ۳x}{۳}+\frac{\sin ۵x}{۵}+\cdots)$ ۲) $\frac{۴}{\pi}(\sin ۲x+\frac{\sin ۳x}{۲!}+\frac{\sin ۴x}{۳!}+\cdots)$

۳) $\frac{۴}{\pi}(\sin x+\frac{\sin ۲x}{۲!}+\frac{\sin ۳x}{۳!}+\cdots)$ ۴) $\frac{۴}{\pi}(\sin x+\frac{\sin ۲x}{۲}+\frac{\sin ۳x}{۳}+\cdots)$

پاسخ : گزینه «۱» تابع f فرد است، بنابراین $a_{۰}=a_n=۰$ و بنابراین کافیست b_n را به دست آوریم:



$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}f(x).\sin nxdx=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin nxdx=\frac{۲}{\pi}[\frac{-۱}{n}\cos nx]\Big|_{۰}^{\pi}=\frac{۲}{\pi}[\frac{۱-(-۱)^n}{n}]$$

اگر $n=۲m$ ، یعنی n زوج باشد، داریم $b_{۲m}=۰$ و اگر $n=۲m-۱$ فـرد باشـد خـواهیم داشت $b_{۲m-۱}=\frac{۴}{(۲m-۱)\pi}$ در

نتیجه با جایگذاری در سری فوریه داریم:

$$f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲m-۱}\sin(۲m-۱)x=\frac{۴}{\pi}(\sin x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x+\cdots)$$

مثال ۶۰: سری فوریه مثلثاتی $f(x)=\begin{cases} x & , 0\le x\le L \\ 2L-x & , L\le x\le 2L\end{cases}$ به صورت $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos\frac{k\pi x}{L}+b_k\sin\frac{k\pi x}{L}]$ است، کدام گزاره صحیح است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۵)

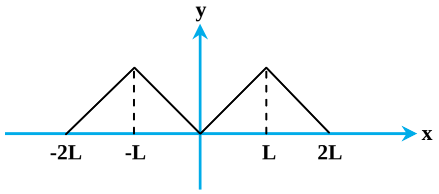
۱) $b_k=0\ ,\ a_0=L$

۲) $b_k=\frac{2L}{k\pi}\ ,\ a_0=\frac{L}{2}$

۳) $b_k=0\ ,\ a_0=2L$

۴) $b_k=\frac{2L}{k\pi}\ ,\ a_0=L$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»



$$\frac{a_0}{2}=\frac{\text{مساحت زیر نمودار در یک دوره تناوب}}{\text{طول دوره تناوب}}$$

$\frac{a_0}{2}=\frac{L}{2}\Rightarrow a_0=L$ و به دلیل زوج بودن تابع $b_k=0$ می‌باشد.

مثال ۶۱: سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ را بعد از تشخیص دوره تناوب آن بنویسید. ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۲) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۳) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{(n\pi)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

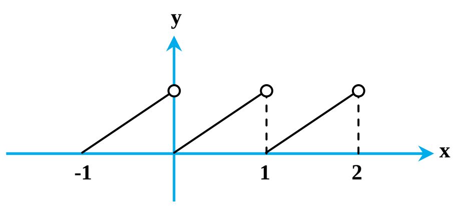
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تابع با دوره تناوب $T=1$ متناوب است:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$a_0=\int_0^1(x-\lfloor x\rfloor)dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1\lfloor x\rfloor dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x).\sin\frac{2\pi nx}{1}dx=2\int_0^1 x\sin 2\pi nx\,dx=2[\frac{-x}{2\pi n}\cos 2\pi nx+\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2\pi nx]_0^1=2[\frac{-\cos 2\pi n}{2\pi n}]=\frac{-1}{n\pi}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin 2\pi nx$$



x	$\oplus$	$\sin 2\pi nx$
1	$\ominus$	$\frac{-1}{2\pi n}\cos \pi nx$
0		$\frac{-1}{(4\pi^2n^2)}\sin 2\pi nx$

مثال ۶۲: سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)=1+\cos\frac{x}{2}$ ، $0\le x\le\pi$ ، کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

۲) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

۳) $2+\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

۴) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m(2m-1)}\cos\frac{2m-1}{2}x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بـدون حـل پاسـخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

در سری فوریه‌ی کسینوسی داریم $b_n=0$ و a_0 و a_n را حساب می‌کنیم.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\frac{x}{2})dx=\frac{2}{\pi}(x+2\sin\frac{x}{2})\Big|_0^{\pi}=\frac{2(\pi+2)}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos nx+\cos\frac{x}{2}\cos nx]dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos nx+\frac{1}{2}(\cos(n+\frac{1}{2})x+\cos(n-\frac{1}{2})x)]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}[\frac{\sin nx}{n}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2n+1}+\frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2n-1}]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}[\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{(-1)^n}{2n-1}]=\frac{2(-1)^n}{\pi}\frac{-2}{4n^2-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi(n^2-\frac{1}{4})}$$

در محاسبات بالا دقت کنید که داریم: $\sin(n+\frac{1}{2})\pi=\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})=\cos n\pi=(-1)^n$ و $\sin(n-\frac{1}{2})\pi=\sin(n\pi-\frac{\pi}{2})=-\cos n\pi=-(-1)^n$

به این ترتیب گزینه (۱) صحیح است: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

مثال ۶۳: در بسط تابع $f(x)=|x|\ ;\ |x|\le\pi$ به سری فوریه، ضریب $\cos 5x$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{-4}{25\pi}$　　۲) $\frac{-2}{25\pi}$　　۳) $\frac{2}{25\pi}$　　۴) $\frac{4}{25\pi}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\Rightarrow a_5=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos 5x\,dx\xrightarrow{\text{پس از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء به روش تشکیل جدول}}a_5=\frac{2}{\pi}[\frac{x}{5}\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{25}[\cos 5\pi-\cos(0)]=-\frac{4}{25\pi}$$

مثال ۶۴: سری فوریه‌ی تابع $f(x)=x\ ,\ x\in(-\pi,\pi)$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۶)

۱) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$　　۲) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$　　۳) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n}$　　۴) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$f(x)=x\xrightarrow{f(x)\text{ فرد است}}a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}[\frac{-x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx]_0^{\pi}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

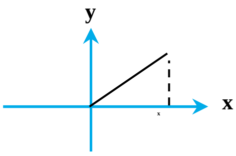
مثال ۶۵: ضریب $\cos\frac{3\pi x}{L}$ در بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x)=x\ ,\ (0<x<L)$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{9L}{4\pi^2}$　　۲) $-\frac{4L}{9\pi^2}$　　۳) $\frac{4L}{9\pi^2}$　　۴) $\frac{9L}{4\pi^2}$

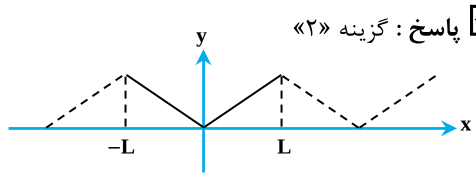
پاسخ : گزینه «۲»

$f(x)=x\quad ,\quad 0<x<L$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$



گسترش زوج



$$a_3=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{3\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^{L}x\cos\frac{3\pi x}{L}dx=\frac{-4L}{9\pi^2}$$

مثال ۶۶: ضرایب سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x<0\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$ کدامند؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

۱) $a_n=b_n=\dfrac{8}{n\pi}$ به ازای هر n

۲) $a_n=0$, $b_n=\dfrac{8}{n\pi}$ به ازای هر n

۳) $a_n=\dfrac{2n}{\pi}$, $b_n=0$ به ازای هر n

۴) $a_n=0$ به ازای هر $n\geq 0$ و $b_n=\begin{cases}\dfrac{8}{n\pi}; & \text{n فرد}\\ 0; & \text{n زوج}\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با توجه به اینکه تابع $f(x)$ تابعی فرد است پس $a_n=0$ و فقط کافی است b_n را به دست آوریم:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-2\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}2\sin nx dx\right]=\frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0}-\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi n}[1-\cos n\pi-\cos n\pi+1]=\frac{4}{n\pi}[1-\cos n\pi]=\begin{cases}0; & \text{n زوج}\\ \dfrac{8}{n\pi}; & \text{n فرد}\end{cases}$$

مثال ۶۷: با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0; & -2<x<-1\\ 1; & -1<x<1\\ 0; & 1<x<2\end{cases}$ و $f(x+4)=f(x)$ کدام برابری حاصل می‌شود؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

۱) $\dfrac{\pi^2}{6}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots$

۲) $\text{Ln}2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$

۳) $\dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$

۴) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$

پاسخ : گزینه «۴» به علت اینکه تابع f تابعی زوج است، پس $b_n=0$ می‌باشد:

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\times\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{n\pi}\left(2\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2\times 2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}dx=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$f(0)=1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

مثال ۶۸: در صورتی که در تابع $f(x)=x$، مقدار x بین $-\pi,\pi$ تغییر کند، مطلوب است مقدار ثابت بسط مثلثاتی فوریه این تابع:

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\dfrac{\pi}{2}$

۲) 0

۳) 1

۴) $\dfrac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» چون تابع فرد است، لذا $a_0=0$ می‌باشد.

مثال ۶۹: بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\sin^3 x$ و $0<x<2\pi$ را بیابید. (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kx$

۲) $+\dfrac{3}{4}\sin x+\dfrac{1}{4}\sin 3x$

۳) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin kx$

۴) $\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$

پاسخ : گزینه «۴» دوره تناوب تابع $f(x)=\sin^3 x$ برابر 2π می‌باشد و با توجه به اینکه بسط فوریه مثلثاتی تابع را در این دوره تناوب مـی‌خـواهیم، بنابراین کافی است تابع $\sin^3 x$ را از طریق فرمول‌های مثلثاتی بیابیم:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\Rightarrow\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

مثال ۷۰: بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\cos^3 x$ ، $0 < x < 2\pi$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$
۲) $\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x$
۳) $\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$
۴) $\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با توجه به اینکه تابع $\cos^3 x$ ذاتاً متناوب بوده و دارای دوره تناوب 2π است، (توابع $\sin^{2n+1} ax$, $\cos^{2n+1} ax$ متناوب بوده و دارای دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشند). لذا با استفاده از اعمال جبری مثلثاتی می‌توان بیان سری فوریه تابع را بدون نیاز به محاسبه‌ی انتگرال‌های مربوط به ضرایب تعیین نمود، بنابراین

از بسط $\cos 3x$ داریم: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$

مثال ۷۱: اگر سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $g(x) = x$, $0 \le x \le L$، به صورت $x = \frac{L}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه $f(x) = px + q$ ، $0 \le x \le L$ کدام است؟ (p و q ثابت حقیقی). (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $(\frac{pL}{2} + q) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$
۲) $(\frac{pL}{2} + q) - \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2} + q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$
۳) $(\frac{pL}{2} + \frac{q}{2}) - \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2} - q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$
۴) $(\frac{pL}{2} + \frac{q}{2}) - \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2} + q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L (px+q)dx = \frac{1}{L}[\frac{p}{2}x^2 + qx]_0^L = \frac{pL}{2} + q$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L (px+q)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L px\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{2}{L}\int_0^L q\cos\frac{n\pi x}{L}dx =$$

$$\frac{2p}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx = p\times\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

یعنی ضریب a_n در بسط فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)$، p برابر ضریب a_n در بسط فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $g(x)$ است.

مثال ۷۲: هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد و $f(x) = x + \cos 2x$ به ازای $0 \le x \le \pi$، آنگاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بربازه‌ی $[-\pi,\pi]$ ضریب $\cos 2x$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) 0
۲) 1
۳) $1 - \frac{1}{2\pi}$
۴) $1 + \frac{1}{2\pi}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

در این تست با توجه به اینکه تابع در بازه‌ی $0 \le x \le \pi$، تعریف شده، لذا باید بسط نیم‌دامنه کسینوسی را بنویسیم. دقت کنید، سری فوریه $\cos 2x$ خودش می‌شود، پس کافیست سری فوریه $g(x) = x$ را حساب کنیم و ضریب به دست آمده را با یک (ضریب $\cos 2x$ در تابع $f(x)$) جمع کنیم:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos nx dx \Rightarrow a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos 2x dx = \frac{2}{\pi}[\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x]_0^\pi = 0$$

پس ضریب $\cos 2x$ در تابع $f(x) = x + \cos 2x$ برابر $0 + 1 = 1$ می‌شود.

مثال ۷۳: سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)=x$ و $0\le x<L$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۳) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۴) $L+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L x\,dx=L$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & ;\ n=2m\\ \frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2} & ;\ n=2m-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$$

مثال ۷۴: اگر سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ,\ 0<x<1\\ 2 & ,\ 1<x<2\end{cases}$، $P=2L=4$، برابر با $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2}+-\cdots)$ باشد، آنگاه جمله a_0 در سری فوریه کسینوسی تابع $g(x)=\begin{cases}2 & ,\ 0<x<1\\ 3 & ,\ 1<x<2\end{cases}$، $P=2L=4$، عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای سری فوریه کسینوسی توابع $f(x)$ و $g(x)$، a_0 از روابط زیر به دست می‌آید:

$$f(x):a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx \xlongequal{\text{با توجه به صورت سؤال}} \frac{3}{2}$$

$$g(x):a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 g(x)dx$$

با توجه به ضابطه‌های توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشاهده می‌شود که: $g(x)=f(x)+1$

$$g(x):a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 g(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 (f(x)+1)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^2 dx=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

البته نیازی به محاسبه‌ی این انتگرال نیست، همین که $g(x)=f(x)+1$ مشخص است که a_0 در $g(x)$ یک واحد از a_0 در $f(x)$ بیشتر است.

مثال ۷۵: در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin 2x & ,\ -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\\ 0 & ,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ \sin 2x & ,\ 0<x\le\pi\end{cases}$ با دوره تناوب $p=2\pi$ به صورت: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$، a_2 و b_2 به ترتیب عبارتند از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $0, 1$ ۲) $0, \frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}, 1$ ۴) $\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \Rightarrow a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\sin 2x.\cos 2x dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}0\times\cos 2x dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x.\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 4x dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 4x dx=\frac{1}{2\pi}\times(\frac{-1}{4}\cos 4x)\Big]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2\pi}(\frac{-1}{4}\cos 4x)\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{-1}{8\pi}\times[\cos(-2\pi)-\cos(-4\pi)]-\frac{1}{8\pi}[\cos 4\pi-\cos 0]=\frac{-1}{8\pi}[1-1]-\frac{1}{8\pi}[1-1]=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}}\sin 2x.\sin 2x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}0\times\sin 2x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin 2x\times\sin 2x\,dx$$

می‌دانیم:

$$\sin p\times\sin q=\frac{-1}{2}[\cos(p+q)-\cos(p-q)]$$

$$\Rightarrow b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{2}(\cos 4x-\cos 0)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{-1}{2}(\cos 4x-\cos 0)dx=\frac{-1}{2\pi}(\frac{1}{4}\sin 4x-x)\Big]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}}+\frac{-1}{2\pi}(\frac{1}{4}\sin 4x-x)\Big]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left[(\frac{1}{4}\sin(-2\pi)+\frac{\pi}{2})-(\frac{1}{4}\sin(-4\pi)+\pi)\right]-\frac{1}{2\pi}\left[(\frac{1}{4}\sin 4\pi-\pi)-(\frac{1}{4}\sin 0-0)\right]=\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\pi\right]-\frac{1}{2\pi}[-\pi]=(\frac{-1}{2\pi}\times\frac{-\pi}{2})+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

مثال ۷۶: در مبحث سری فوریه‌ی تعمیم یافته، کدام یک از مفاهیم زیر، بنیادی است؟ (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۸)

۱) تناوب ۲) تعامد ۳) پیوستگی ۴) مشتق‌پذیری

پاسخ : گزینه «۲» سری فوریه تعمیم یافته عبارتست از:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n g_n\ ,\ C_n=\frac{(f.g_n)}{(g_n.g_n)}$$

که g_nها باید متعامد باشند، لذا یکی از مفاهیم بنیادی در سری فوریهٔ تعمیم یافته بحث تعامد می‌باشد.

مثال ۷۷: اگر برای $0<x<2$ داشته باشیم: $x=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots)$ ، در این صورت دو جمله اول بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$، در فاصله $0<x<2$ عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا باید جمله $-\frac{x^2}{4}$ را ایجاد کنیم، برای این منظور با انتگرال‌گیری از طرفین سری فوریه داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{2}=c+\frac{4}{\pi}(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{4\pi}\cos\frac{2\pi x}{2}-\frac{2}{9\pi}\cos\frac{3\pi x}{2}+\cdots)\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } -2}$$

$$-\frac{x^2}{4}=c'+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{4}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{2}+\frac{4}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2}-\cdots\xrightarrow{\text{عدد یک را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم}}$$

$$1-\frac{x^2}{4}=c''+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{4}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{2}+\frac{4}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2}-\cdots$$

از طرفی مقدار متوسط (همان مقدار ثابت بسط فوریه) تابع متناوب $1-\frac{x^2}{4}$ (با دوره تناوب $T=4$) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c''=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(1-\frac{x^2}{4})dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(1-\frac{x^2}{4})dx=\frac{2}{3}$$

بنابراین دو جمله اول بسط فوریه تابع $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ به صورت $\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ خواهد بود.

مثال ۷۸: اگر $r(t)$ تابع متناوب $r(t)=\frac{\pi}{4}|\sin t|$ ، $-\pi<t<\pi$ و $r(t+2\pi)=r(t)$ و $y''+9y=r(t)$ آنگاه جواب خصوصی معادله (یعنی: y_p) کدام است؟
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

(راهنمایی: سری فوریه تابع $r(t+2\pi)=r(t)$ ، $-\pi<t<\pi$ و $r(t)=\frac{\pi}{4}|\sin t|$ به شکل $r(t)=\frac{\pi}{4}|\sin t|=\frac{1}{2}-(\frac{1}{1\times 3}\cos 2t+\frac{1}{3\times 5}\cos 4t+\frac{1}{5\times 7}\cos 6t+\cdots)$ می‌باشد.)

۱) $y_p=\frac{1}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}\cos 2nt$ ۲) $y_p=\frac{1}{18}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}\cos 2nt$

۳) $y_p=\frac{1}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\cos 2nt$ ۴) $y_p=\frac{1}{18}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\cos 2nt$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» فرض می‌کنیم سری فوریه‌ی y_p به صورت $y_p=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ باشد. سری فوریه‌ی $r(t)$ هم به شکل $r(t)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)}$ داده شده است. با جایگذاری y_p و $r(t)$ در معادله‌ی دیفرانسیل داریم: $y''_p+9y_p=r(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2a_n\cos nt-n^2b_n\sin nt)+9a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(9a_n\cos nt+9b_n\sin nt)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

$$\Rightarrow 9a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(9-n^2)a_n\cos nt+(9-n^2)b_n\sin(nt)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

حالا با توجه به تساوی طرفین، می‌خواهیم ضرایب a_0 ، a_n و b_n را تعیین کنیم. با مقایسه‌ی جملات ثابت در دو طرف داریم $9a_0=\frac{1}{2}$ ، بنابراین $a_0=\frac{1}{18}$ است. در سمت راست، $\sin nt$ نداریم، پس در سمت چپ باید $b_n=0$ باشد. در سمت راست فقط هارمونیک‌های زوج کسینوس را داریم، پس $a_{2n-1}=0$ است و ضرایب $\cos 2nt$ در طرفین تساوی به صورت مقابل هستند: $(9-4n^2)a_{2n}=\frac{-1}{4n^2-1}\Rightarrow a_{2n}=\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$

با جایگذاری این نتایج در سری فوریه y_p داریم: $y_p=\frac{1}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\cos 2nt$

مثال ۷۹: بسط فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ -1 & -\pi<x<0\end{cases}$ به صورت $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ می‌باشد. به کمک آن حاصل عبارت $S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$ کدام است؟
(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{90}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» از دو طرف رابطه $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ انتگرال‌گیری می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}x\ , & 0<x<\pi\\ -x\ , & -\pi<x<0\end{cases}=-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+A$$

با نگاه کردن به رابطه فوق در $x=\frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌شود: $\frac{\pi}{2}=-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{0}{(2k-1)^2})+A\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$

حال با توجه به اینکه نقطه $x=\pi$ برای تابع فوق نقطه‌ی پیوستگی است، از قضیه‌ی دیریکله استفاده می‌کنیم:

$$\pi=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

مثال ۸۰: مقدار میانگین تابع $f(t)=\sin\frac{\pi}{L}t$ و $0<t<L$ برابر است با:
(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر f بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد مقدار متوسط f بر $[a,b]$ با روش زیر به دست می‌آید:

$$A(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\Rightarrow A(f)=\frac{1}{L}\int_0^L\sin\frac{\pi}{L}t\,dt=(\frac{1}{L})[-\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi}{L}t]_0^L=\frac{2}{\pi}$$

البته مقدار میانگین همان $\frac{a_0}{2}$ در بسط فوریه f می‌باشد.

مثال ۸۱: می‌توان گفت که تابع $f(x)=\sin|x|$ روی فاصلهٔ $-\infty<x<\infty$. (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۹)

۱) زوج و تناوبی است. ۲) زوج است اما تناوبی نیست. ۳) فرد و تناوبی است. ۴) فرد است اما تناوبی نیست.

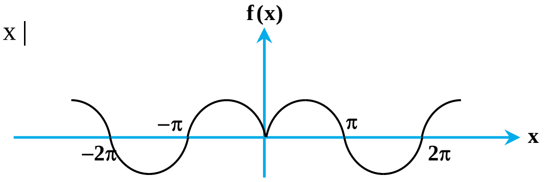
پاسخ : گزینه «۲»

$$f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x)$$

در نتیجه تابع $f(x)=\sin|x|$ تابعی زوج است.

$$f(x+T)=f(x)\ \Rightarrow \sin|x+T|=\sin|x|$$

نمودار $f(x)$ به صورت مقابل می‌باشد:



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم $f(x)$ زوج می‌باشد ولی متناوب نیست.

مثال ۸۲: با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t)=\begin{cases} t+\frac{\pi}{2}\ , & -\pi<t<0 \\ -t+\frac{\pi}{2}\ , & 0\le t\le \pi \end{cases}$، مقدار $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\cdots$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

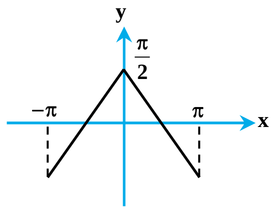
پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

تابع f زوج است، بنابراین طبق فرمول سری فوریه کسینوسی مقابل داریم:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-t+\frac{\pi}{2})dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-t^2}{2}+\frac{\pi}{2}t\right]_0^{\pi}=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-t+\frac{\pi}{2})\cos nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-t\cos nt+\frac{\pi}{2}\cos nt)dt=\frac{2}{\pi}(-\frac{t}{n}\sin nt\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n^2}\cos nt\Big|_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\sin nt\Big|_0^{\pi})$$

$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}]=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(1-(-1)^n)\Rightarrow\begin{cases} a_n=0 & ;\ n\ \text{زوج} \\ a_n=\frac{2}{\pi}(\frac{2}{(2k-1)^2}) & ;\ n\ \text{فرد} \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{2}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)t\xrightarrow{t=0}\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

مثال ۸۳: سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ و $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $f(x)=\sin x+\sin 3x$ ۲) $f(x)=\sin x-\sin 3x$ ۳) $f(x)=\frac{3}{4}\sin x+4\sin 3x$ ۴) $f(x)=\frac{3}{4}\sin x-4\sin 3x$

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$، لذا داریم:

$$f(x)=4\sin x\cos^2 x=4\sin x(\frac{1+\cos 2x}{2})=2\sin x+2\sin x\cos 2x=2\sin x+\sin(x-2x)+\sin(x+2x)$$

$$=2\sin x+\sin(-x)+\sin 3x=\sin x+\sin 3x$$

مثال ۸۴: ضریب جمله $\cos\frac{3\pi x}{2}$ در بسط فوریه کسینوسی تابع متناوب $0<x<2$ ،$f(x)=(2-x)$ عبارتست از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{9\pi^2}$ ۲) $\frac{2}{9\pi^2}$ ۳) $\frac{7}{9\pi^2}$ ۴) $\frac{8}{9\pi^2}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x\quad ,\quad L=2$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\Rightarrow a_3=\int_0^2(2-x)\cos\frac{3\pi}{2}xdx\xrightarrow{\text{پس از انتگرال گیری}}a_3=\frac{8}{9\pi^2}$$

مثال ۸۵: در رابطه $x-\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{2}x)=0\ ;\ x\in[0,2]$ ضریب $\sin(2\pi x)$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{4}{\pi}$ ۲) $-\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$

پاسخ : گزینه «۲» رابطه داده شده در صورت مسئله، سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=x$ است: $x=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{2}x)$

سری فوریه سینوسی تابع به صورت زیر می‌باشد:

$$F(u)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\ ,\ C_n=b_n\ ,\ L=2 \quad \text{و} \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx$$

با توجه به رابطه سری فوریه سینوسی ضریب جمله $\sin(2\pi x)$، ضریب جمله چهارم (b_4) است. $\sin(\frac{n\pi}{L}x)=\sin(2\pi x)\Rightarrow n=4$

پس کافیست که b_4 را بدست آوریم:

$$b_4=\int_0^2 x\sin(2\pi x)dx=(-\frac{x}{2\pi}\cos(2\pi x)+\frac{1}{(2\pi)^2}\sin 2\pi x)\Big|_0^2=-\frac{1}{\pi}$$

مثال ۸۶: در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $g(x)=x^2$، $-\pi\le x\le\pi$ به صورت روبرو باشد: $g(x)=4(\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots)$

آنگاه سری فوریه مثلثاتی $\sin x-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\cdots$ مربوط به کدام تابع است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{x^3}{12}$ ۲) $\frac{x}{12}(\pi^2-x^2)$ ۳) $\frac{x^2}{12}(\pi^2-x)$ ۴) $\frac{x}{4}(\pi^2-x^2)$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

تابع هدف را $f(x)$ می‌نامیم:

$$-\int g(x)=-4(\frac{\pi^2}{12}x-\sin x+\frac{\sin 2x}{2^3}-\frac{\sin 3x}{3^3}+\cdots)\Rightarrow f(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-+\cdots$$

$$\to -\frac{x^3}{3}=4[-\frac{\pi^2}{12}x+f(x)]\to f(x)=-\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{12}x=\frac{x}{12}(\pi^2-x^2)$$

مثال ۸۷: در بسط سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x\ , & -\pi<x<0\\ \cos x\ , & 0<x<\pi\end{cases}$، مقدار a_1، کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۳» با نوشتن فرمول محاسبه ضرایب a_n داریم:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\sin x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cos nxdx$$

$$\xrightarrow{n=1} a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\sin x\cos x)dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin 2x}{2}dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x)dx$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{1}{\pi}(-\frac{1}{4}\cos 2x)_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x)_0^{\pi}=\frac{-1}{4\pi}(1-1)+\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}\pi+0)=\frac{1}{2}$$

مثال ۸۸: ضریب a_6 برای سری فوریه‌ی کسینوسی تابع $0<x<\pi$، $f(x)=\frac{5}{2}+\cos^2 3x$، کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» یک سؤال بسیار ساده از مبحث سری فوریه که لازم به محاسبات انتگرالی ضرایب سری فوریه نیست. شما می‌توانید با نوشتن $\cos^2 3x$ بر اساس «فرمول توان‌شکن» به سری فوریه $f(x)$ برسید: $f(x)=\frac{5}{2}+\cos^2 3x=\frac{5}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6x$

بنابراین ضریب $\cos 6x$ که همان a_6 است، برابر $\frac{1}{2}$ است.

درسنامه۲: محاسبه‌ی سری‌های عددی و تساوی پارسوال

مثال۱: با استفاده از تساوی پارسوال و به دست آوردن بسط نیم‌دامنه کسینوسی تابع $f(x)=x$ ، $0<x<2$ ، حاصل سری $A=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^4}{96}$　۲) $\frac{\pi^4}{64}$　۳) $\frac{2\pi^4}{3}$　۴) $\frac{8}{3}\pi^4$

پاسخ: گزینه «۱» اگر بسط نیم‌دامنه کسینوسی تابع $f(x)=x$ را بنویسیم، داریم:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx=\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_0^2=1$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری جزء به جزء}}a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

$$x=1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos n\pi-1}{n^2}).\cos\frac{n\pi x}{2}$$

با توجه به اینکه $a_0=1$ ، $L=2$ ، $f(x)=x$ ، $a_n=\frac{4(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}$ و $b_n=0$ و با نوشتن تساوی پارسوال داریم:

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx=2(1)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(\cos n\pi-1)^2}{n^4\pi^4}\Rightarrow\frac{8}{3}=2+\frac{16}{\pi^4}(\frac{4}{1^4}+\frac{4}{3^4}+\frac{4}{5^4}+\cdots)\Rightarrow\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$

مثال۲: اگر سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin 2x & , \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$ به صورت $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 4kx}{4k^2-1}$ تعریف شود، آنگاه مقدار سری عددی $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$ با استفاده از سری فوریه $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^4-9}{96}$　۲) $\frac{\pi^2-4}{8}$　۳) $\frac{\pi^2-8}{16}$　۴) $\frac{\pi^4-9}{48}$

پاسخ: گزینه «۳» در سری فوریه‌ی داده شده، ضرایب $a_{2k}=-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{4k^2-1})$ ، $b_1=\frac{1}{2}$ و $a_0=\frac{1}{\pi}$ غیرصفرند و سایر ضرایب صفر هستند.

همچنین $T=\pi$ و $L=\frac{\pi}{2}$ است. از تساوی پاسوال استفاده می‌کنیم:

$$2a_0^2+b_1^2+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx\Rightarrow\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx$$

با محاسبه‌ی انتگرال در سمت راست تساوی داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{\sin 4x}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{4})-\frac{2}{\pi^2}-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2-8}{4\pi^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

مثال۳: اگر سری فوریه تابع $f(x)=4-x^2$ ، $-2\le x\le 2$ به صورت $f(x)=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}([\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}-+\cdots])$ باشد، آنگاه مقدار عددی $S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi^2}{4}$　۲) $\frac{\pi^2}{6}$　۳) $\frac{\pi^2}{8}$　۴) $\frac{\pi^2}{12}$

پاسخ: گزینه «۲» چون تابع در نقطه $x=2$ پیوسته است، بنابراین مقدار تابع در این نقطه با مقدار سری فوریه تابع برابر است:

ابتدا مقدار تابع در نقطه $x=2$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=4-x^2\xrightarrow{x=2}f(2)=4-4=0 \quad , \quad (1)$$

توجه کنید که در سری فوریه $f(x)$ در مخرج اعدادی که ضریب cos ها هستند، توان ۲ داریم همچنین در سری S هم در مخرج اعداد توان ۲ داریم.

بنابراین مقدار سری فوریه در $x=2$ برابر است با:

$$f(2)=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}[\cos\frac{\pi\times 2}{2}-\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi\times 2}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi\times 2}{2}-+\cdots]=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}[-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\cdots] \quad , \quad (2)$$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$0=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}(-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\cdots)\Rightarrow 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

مثال ۴: اگر سری فوریه تابع $f(x)=(\pi-x)(\pi+x)$ در بازه‌ی $-\pi\le x\le\pi$ به صورت زیر تعریف شود:

$$(\pi-x)(\pi+x)=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

آنگاه حاصل سری عدد $S=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdots$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi^2}{16}$ ۲) $\frac{\pi^2}{9}-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\pi^2}{12}$ ۴) $\frac{\pi^2}{9}-\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با نگاهی به سمت راست سری فوریه تابع $f(x)$ واضح است با قرار دادن $x=0$ در سمت راست می‌توانیم به سری S برسیم.

بنابراین با قرار دادن $x=0$ در طرفین سری فوریه داریم:

$$\pi^2=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\Rightarrow \pi^2-\frac{2}{3}\pi^2=4\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-+\cdots\right)\Rightarrow \frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{12}$$

مثال ۵: اگر سری فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}0 & ; \quad -\pi\le t\le 0\\ \sin t & ; \quad 0\le t\le\pi\end{cases}$، به صورت $f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin t}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$ باشد، آنگاه حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi-4}{4}$ ۲) $\frac{\pi-2}{2}$ ۳) $\frac{\pi-4}{2}$ ۴) $\frac{\pi-2}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به اینکه تابع $f(t)$ در نقطه $t=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است، لذا مقدار تابع با مقدار سری فوریه تابع در این نقطه برابر است.

ابتدا مقدار تابع را با توجه به ضابطه $f(t)$ حساب می‌کنیم:
$$f(t)=\sin t\ ,\ 0\le t\le\pi\ \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

از طرفی مقدار سری فوریه تابع در $t=\frac{\pi}{2}$ برابر است با:
$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin t}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{4n^2-1}$$

با مساوی قرار دادن دو مقدار فوق و با توجه به اینکه $\cos n\pi=(-1)^n$، داریم:
$$1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^2-1}$$

$$1-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi-2}{4}$$

مثال ۶: اگر سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}x & -1<x\le 0\\ x+2 & 0<x\le 1\end{cases}$ به صورت $f(x)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin n\pi x$ بیان گردد، آنگاه مقدار $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»
$$f(x)=1+\frac{2}{\pi}\left[3\sin\pi x-\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\times 3\times\sin 3\pi x-\frac{1}{4}\times\sin 4\pi x+\frac{1}{5}\times 3\times\sin 5\pi x-\cdots\right]$$

با قرار دادن $x=\frac{1}{2}$ در طرفین تساوی فوق، مقدار $f(x)$ در سمت چپ، که از ضابطه دوم تابع f به دست می‌آید، برابر $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ خواهد بود و داریم:

$$\frac{5}{2}=1+\frac{2}{\pi}\left[3\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\sin\pi}}_{0}+\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\underbrace{\cancel{\sin 2\pi}}_{0}+\frac{3}{5}\sin\frac{5\pi}{2}-\cdots\right]\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{2}{\pi}\left[3-1+\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\cdots\right]$$

$$\frac{3\pi}{4}=3-1+\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\cdots\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۳}}\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

مثال ۷: اگر بسط فوریه کسینوسی $f(x)=\sin x\ ,\ 0\le x\le \pi$ به صورت $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1})\cos n\pi x$ باشد، مقدار سری $S=\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2-8}{8}$　　۲) $\frac{\pi^2-8}{4}$　　۳) $\frac{\pi^2-8}{2}$　　۴) $\frac{\pi^2-8}{16}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به اینکه در صورت سؤال، سری فوریه کسینوسی داده شده، لذا $b_n=0$ می‌باشد. با توجه به بسط داریم:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\ ,\ a_n=-\frac{2}{\pi}(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1})=\begin{cases}0 & ;\ \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\\ -\frac{2}{\pi}(\frac{2}{n^2-1}) & ;\ \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\end{cases}$$

حالا طبق رابطه پارسوال و نظر به اینکه $L=\pi$ است، داریم:

$$2(\frac{2}{\pi})^2+\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{\pi}(\frac{2}{n^2-1})]^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx$$

توجه کنید چون a_n برای nهای زوج مقدار غیر صفر دارد، لذا $n=2k$ می‌باشد:

$$\Rightarrow\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{(2k)^2-1})^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1-\cos 2x}{2})dx\Rightarrow\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x]_0^{\pi}$$

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=1-\frac{8}{\pi^2}\Rightarrow\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{16}(1-\frac{8}{\pi^2})=\frac{\pi^2-8}{16}$$

مثال ۸: اگر سری فوریه کسینوسی تابع $\cos\alpha x$ در بازه $0\le x\le\pi$ وقتی که α عددی غیرصحیح باشد، به صورت: $\cos\alpha x=\frac{1}{\pi\alpha}\sin(\pi\alpha)+\frac{2\alpha\sin(\pi\alpha)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{\alpha^2-n^2}$ نوشته شود، با استفاده از رابطه‌ی فوق حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{n-\alpha-1})(-1)^n$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\pi\cos(\alpha\pi)$　　۲) $\pi\operatorname{cosec}(\alpha\pi)$　　۳) $\pi\operatorname{cotg}(\alpha\pi)$　　۴) $\pi\sec(\alpha\pi)$

پاسخ: گزینه «۲» واضح است مقدار تابع $f(x)=\cos\alpha x$ در $x=0$ برابر ۱ است، لذا با قرار دادن $x=0$ در رابطه‌ی سری فوریه $\cos\alpha x$ داریم:

$$1=\frac{1}{\pi\alpha}\sin(\pi\alpha)+\frac{2\alpha\sin(\pi\alpha)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$$

با فاکتورگیری از $\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}$ داریم:

$$1=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}(\frac{1}{\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^n}{n^2-\alpha^2})\Rightarrow\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}=\frac{1}{\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^n}{n^2-\alpha^2}$$

خب تا اینجای کار به نظر می‌رسد گزینه (۲) جواب باشد، اما سمت راست تساوی خیلی شبیه به سری خواسته شده‌ی سؤال نیست و به نظر می‌رسد باید $\frac{1}{\alpha}$ را نیز وارد سری کنیم:

$$\frac{1}{\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^n}{n^2-\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{n-\alpha}-\frac{1}{n+\alpha}]=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2+\alpha}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{(n-1)-\alpha}]$$

مثال ۹: اگر بسط سینوسی تابع $f(x)=x(\pi-x)$ در بازه‌ی $0<x<\pi$ به صورت $f(x)=\frac{8}{\pi}[\frac{\sin(x)}{1^3}+\frac{\sin(3x)}{3^3}+\cdots]$ تعریف شود، حاصل سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi^5}{960}$　　۲) $\frac{\pi^6}{960}$　　۳) $\frac{\pi^6}{945}$　　۴) $\frac{\pi^5}{945}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به سری فوریه $f(x)$ واضح است $a_0=a_n=0$ و از طرفی $b_n=\frac{8}{\pi(2n-1)^3}$، لذا با استفاده از قضیه پارسوال داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{8}{\pi(2n-1)^3}]^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[x(\pi-x)]^2dx\Rightarrow\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi}x^2(\pi^2+x^2-2\pi x)dx]$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi}{32}[\frac{x^3\pi^2}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{2\pi x^4}{4}]_0^{\pi}=\frac{\pi}{32}[\frac{\pi^5}{3}+\frac{\pi^5}{5}-\frac{2\pi^5}{4}]=\frac{\pi}{32}[\frac{(20+12-30)\pi^5}{60}]=\frac{\pi}{32}(\frac{2\pi^5}{60})=\frac{\pi^6}{960}$$

اما سؤال مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ را خواسته، به همین منظور می‌توانیم این سری را به صورت مجموع دو سری با جملات فرد و زوج بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{2^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}\Rightarrow(1-\frac{1}{2^6})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$$

$$\Rightarrow\frac{63}{64}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{960}\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{64\pi^6}{63\times 960}=\frac{\pi^6}{63\times 15}=\frac{\pi^6}{945}$$

مثال ۱۰: اگر سری فوریه تابع $f(x)=x\sin x$ به صورت $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2(\frac{\cos 2x}{1\times 3}-\frac{\cos 3x}{2\times 4}+-\cdots)$ تعریف شود، آنگاه حاصل سری عددی مقابل برابر کدام گزینه است؟ $S=\frac{1}{1^2\times 2^2\times 3^2}+\frac{1}{2^2\times 3^2\times 4^2}+\cdots$

۱) $\frac{4\pi^2-39}{16}$ ۲) $\frac{\pi^2-32}{4}$ ۳) $\frac{4\pi^2-39}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2-32}{16}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از تابع $x\sin x$ و سری فوریه آن در فاصله $[0,x]$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int_0^x x\sin x dx=\int_0^x[1-\frac{1}{2}\cos x-2(\frac{\cos 2x}{1\times 3}-\frac{\cos 3x}{2\times 4}+-\cdots)]dx$$

$$\Rightarrow -x\cos x+\sin x=x-\frac{1}{2}\sin x-2(\frac{\sin 2x}{1\times 2\times 3}-\frac{\sin 3x}{2\times 3\times 4}+-\cdots)\ \Rightarrow x\cos x+x=\frac{3}{2}\sin x+2(\frac{\sin 2x}{1\times 2\times 3}-\frac{\sin 3x}{2\times 3\times 4}+-\cdots)$$

تابع $x+x\cos x$ تابعی فرد است در نتیجه طبق قضیه انتگرال‌گیری از سری فوریه، عبارت سمت راست سری فوریه این تابع است. حالا طبق قضیه پارسوال داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=2a_0^2+\sum(a_n^2+b_n^2)=b_1^2+\sum_{n=2}^{\infty}b_n^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x\cos x)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\cos^2 x+x^2+2x^2\cos x)dx=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi^3}{2}-\frac{15}{4}\pi)=\pi^2-\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow\pi^2-\frac{15}{2}=\frac{9}{4}+4(\frac{1}{1^2\times 2^2\times 3^2}+\frac{1}{2^2\times 3^2\times 4^2}+\cdots)=\frac{9}{4}+4S\ \Rightarrow\pi^2-(\frac{15}{2}+\frac{9}{4})=4S\ \Rightarrow S=\frac{4\pi^2-39}{16}$$

مثال ۱۱: با استفاده از سری فوریه تابع متناوب $(T=2\pi)$، $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ در بازه $|x|<\pi$، حاصل سری $\sum_{\substack{n=1\\(n=2k-1)}}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) $\pi-2$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این که $f(x)$ تابعی زوج است، لذا داریم:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{\pi}[2\sin\frac{x}{2}]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\frac{x}{2})\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(\frac{x}{2}-nx)+\cos(\frac{x}{2}+nx)]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos x(\frac{1}{2}-n)+\cos x(\frac{1}{2}+n)]dx=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{\frac{1}{2}-n}\sin x(\frac{1}{2}-n)+\frac{1}{\frac{1}{2}+n}\sin x(\frac{1}{2}+n)]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{2}{1-2n}\sin(\frac{\pi}{2}-\pi n)+\frac{2}{1+2n}\sin(\frac{\pi}{2}+\pi n)]=\frac{1}{\pi}[\frac{2\cos(n\pi)}{1-2n}+\frac{2\cos(\pi n)}{1+2n}]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{2\cos(n\pi)+4n\cos(n\pi)+2\cos(n\pi)-4n\cos(n\pi)}{1-4n^2}]=\frac{1}{\pi}[\frac{4\cos n\pi}{1-4n^2}]=\frac{1}{\pi}[\frac{4(-1)^n}{1-4n^2}]=\frac{1}{\pi}[\frac{4(-1)^{n+1}}{4n^2-1}]=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$$

بنابراین سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos nx$$

نکته‌ی اصلی حل این مثال درست اینجاست! که ما با توجه به خواسته‌ی مسئله باید مخرج کسر درون سری را به صورت $(n^2-\frac{1}{4})$ نوشته و به جای x عدد مناسب قرار دهیم. اگر $x=\pi$ باشد، داریم:

$$\cos\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{4\pi(n^2-\frac{1}{4})}\cos(n\pi)$$

با توجه به این که $\cos n\pi=(-۱)^n$، لذا با ضرب آن در $(-۱)^{n+۱}$ در صورت کسر $(-۱)^{۲n+۱}$ داریم که حاصلش برابر عدد ۱- می‌شود، لذا داریم:

$$\circ=\frac{۲}{\pi}-\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-\frac{۱}{۴}}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n^۲-\frac{۱}{۴}}\right)=۲$$

اما سؤال مقدار سری به ازای nهای فرد را خواسته است از طرفی می‌دانیم مجموع داده شده را می‌توان به صورت دو سری یعنی یک سری با جملات فرد و یک سری با جملات زوج نوشت، لذا داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-\frac{۱}{۴}}=\underbrace{\sum_{\substack{n=۱\\(n=۲k-۱)}}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-\frac{۱}{۴}}}_{A}+\underbrace{\sum_{\substack{n=۲\\(n=۲k)}}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-\frac{۱}{۴}}}_{B}\Rightarrow \mathbf{۲=A+B}$$

اما با این یک معادله نمی‌توان به جواب رسید، لذا دوباره از سری فوریه $\cos\frac{x}{۲}$ کمک می‌گیریم. اگر در طرفین تساوی $x=\circ$ قرار دهیم، داریم:

$$\cos(\circ)=\frac{۲}{\pi}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{۴\pi(n^۲-\frac{۱}{۴})}\cos(\circ)\Rightarrow ۱=\frac{۲}{\pi}+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲-\frac{۱}{۴}}$$

با جداسازی nهای فرد و زوج داریم:

$$\Rightarrow ۱=\frac{۲}{\pi}+\frac{۱}{\pi}\left[\sum_{\substack{n=۱\\(n=۲k-۱)}}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-\frac{۱}{۴}}-\sum_{\substack{n=۱\\(n=۲k)}}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-\frac{۱}{۴}}\right]\Rightarrow ۱=\frac{۲}{\pi}+\frac{۱}{\pi}(A-B)\Rightarrow \mathbf{A-B=\pi-۲}$$

بنابراین دستگاه معادله مقابل را داریم:

$$\begin{cases}A-B=\pi-۲\\A+B=۲\end{cases}\Rightarrow \mathbf{A=\frac{\pi}{۲}}$$

مثال ۱۲: تابع متناوب $f(x)$ را که در فاصله‌ی $[-\pi,\pi]$ تعریف شده است، در نظر بگیرید. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)$، حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}(۲n-۱)}{a^۲+(۲n-۱)^۲}$ برابر کدام گزینه است؟

$$\mathbf{f(x)=\sinh ax\ ,\ -\pi\le x<\pi\ ;\ a>\circ}$$

۱) $\frac{\pi}{۴\cosh a\pi}$ ۲) $\frac{\pi}{۴\cosh\frac{a\pi}{۲}}$ ۳) $\frac{\pi}{۲\cosh\frac{a\pi}{۲}}$ ۴) $\frac{\pi}{۲\cosh a\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید سری فوریه $f(x)$ را بدست آوریم:

$$f(x)=\sinh ax=\sum_{n=۱}^{\infty}b_n\sin nx\ \to\ b_n=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\sinh ax.\sin nxdx$$

با توجه به فرد بودنِ $\sinh ax$، معلوم می‌شود ضرایب $a_n=\circ$ هستند.

$$\int\sinh ax.\sin nxdx=-\frac{۱}{n}\sinh ax.\cos nx+\frac{a}{n^۲}\cosh ax.\sin nx-\frac{a^۲}{n^۲}\int\sinh ax.\sin nxdx$$

$$\Rightarrow\int\sinh ax.\sin nxdx=\frac{a\cosh ax.\sin nx-n\sinh ax.\cos nx}{a^۲+n^۲}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{۲}{\pi}.\frac{۱}{a^۲+n^۲}(a\cosh ax.\sin nx-n\sinh ax.\cos nx)\Big|_{x=\circ}^{x=\pi}=\frac{-۲n}{\pi(a^۲+n^۲)}\sinh a\pi.\cos n\pi$$

$$f(x)=\sinh ax=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۲n}{\pi(a^۲+n^۲)}\sinh a\pi.\cos n\pi.\sin nx$$

$$x=\frac{\pi}{۲}\to f(\frac{\pi}{۲})=\sinh\frac{a\pi}{۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۲n}{\pi(a^۲+n^۲)}\sinh a\pi.\cos n\pi.\sin\frac{n\pi}{۲}\to\frac{\pi}{۲\sinh a\pi}.\sinh\frac{a\pi}{۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-n.\cos n\pi.\sin\frac{n\pi}{۲}}{(a^۲+n^۲)}$$

جمله $\sin\frac{n\pi}{۲}$ به ازای nهای زوج برابر صفر است. پس فقط مقادیر جمله‌های سری به ازای nهای فرد حائز اهمیت است که می‌دانیم برای $n=۲k-۱$ برابر $(-۱)^{k+۱}$ می‌باشد. از طرفی دقت کنید $\cos(n\pi)=(-۱)^n$ و اگر قرار باشد nها فرد باشند، $(-۱)^n=-۱$ می‌شود. لذا در صورت کسر سمت راست داریم:

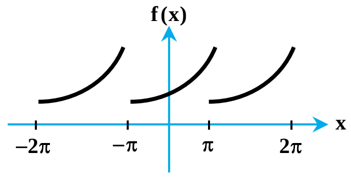
$$(-n)(\cos n\pi)\sin(\frac{n\pi}{۲})=-(۲k-۱)(-۱)(-۱)^{k+۱}=(۲k-۱)(-۱)^{k+۱}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi\sinh\frac{a\pi}{۲}}{۴\sinh\frac{a\pi}{۲}\cosh\frac{a\pi}{۲}}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(۲k-۱)(-۱)^{k+۱}}{a^۲+(۲k-۱)^۲}\Rightarrow\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(۲k-۱)(-۱)^{k+۱}}{a^۲+(۲k-۱)^۲}=\frac{\pi}{۴\cosh\frac{a\pi}{۲}}$$

مثال ۱۳: تابع متناوب $f(x)=e^x, -\pi<x\le\pi$ ، با شرط $f(x+2\pi)=f(x)$ دارای یک سری فوریه به صورت $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ است. حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{\pi^2}+\frac{\sinh 2\pi}{2\pi}+\frac{\cosh 2\pi}{\pi^2}$ ۲) $\frac{1}{\pi^2}+\frac{\sinh 2\pi-\cosh 2\pi}{2\pi}$ ۳) $1-\frac{1}{\pi^2}+\frac{\sinh 2\pi-\cosh 2\pi}{2\pi}$ ۴) $1+\frac{1}{\pi^2}+\frac{\sinh 2\pi}{2\pi}-\frac{\cosh 2\pi}{\pi^2}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر به نمودار تابع متناوب $f(x)$ توجه کنیم، متوجه می‌شویم که نه زوج است و نه فرد، بنابراین هیچ‌کدام از ضرایب a_n و b_n از سری فوریه حذف نمی‌شوند. ما باید به طریقی ضریب b_n را حذف کنیم و سپس از اتحاد پارسوال می‌توانیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ را به دست بیاوریم.



با جایگذاری $-x$ به جای x در سری فوریه داریم:

$$\begin{cases} f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \\ f(-x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx-b_n\sin nx \end{cases}$$

با جمع کردن این دو معادله داریم:

$$f(x)+f(-x)=2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}2a_n\cos nx \Rightarrow g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

بنابراین a_n ضریب سری فوریه‌ی تابع زوج $g(x)$ است. با استفاده از اتحاد پارسوال داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g^2(x)dx-2a_0^2$$

a_0 را با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x dx=\frac{1}{2\pi}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\sinh\pi$$

اکنون به ضابطه‌ی $g(x)$ در بازه‌ی $-\pi<x<\pi$ توجه کنیم.

وقتی $-\pi<x<\pi$ باشد، $-x$ هم در همین بازه است، بنابراین $f(x)=e^x$ و $f(-x)=e^{-x}$ و در نتیجه داریم:

$$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}g^2(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cosh^2 x dx=2\int_0^{\pi}\cosh^2 x dx=2\int_0^{\pi}\frac{1+\cosh 2x}{2}dx=[x+\frac{\sinh 2x}{2}]_0^{\pi}=\pi+\frac{1}{2}\sinh 2\pi$$

با جایگذاری در اتحاد پارسوال داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}(\pi+\frac{1}{2}\sinh 2\pi)-\frac{2}{\pi^2}\sinh^2\pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=1+\frac{1}{2\pi}\sinh 2\pi-\frac{2}{\pi^2}(\frac{-1+\cosh 2\pi}{2}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=1+\frac{1}{\pi^2}+\frac{\sinh 2\pi}{2\pi}-\frac{\cosh 2\pi}{\pi^2}$$

مثال ۱۴: توابع متناوب $f(x)=|\sin x|$ و $g(x)=x^2$ در بازه‌ی $-\pi<x<\pi$ دارای سری‌های فوریه به صورت $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$ و $g(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$ هستند. حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1-4n^2)}$ با استفاده از ضرب داخلی سری‌های فوریه کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2+12}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2-12}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2-12}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2+12}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» در سری فوریه‌ی f داریم $a_0=\frac{2}{\pi}$، $a_{2n}=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$، $a_{2n-1}=0$ و ضرایب b_n همه صفر هستند. در سری فوریه $g(x)$ داریم $a'_0=\frac{\pi^2}{3}$، $a'_n=\frac{4(-1)^n}{n^2}$ و ضرایب b'_n همگی صفر هستند. با استفاده از ضرب داخلی سری‌های فوریه داریم: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=2a_0a'_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na'_n+b_nb'_n)$

از آنجا که $b_n=b'_n=0$ است و همچنین $a_{2n-1}=0$ است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2|\sin x|dx=2\times\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a'_{2n}$$

در سمت چپ، از زوج بودن زیرانتگرال استفاده می‌کنیم. در سمت راست a_{2n} و a'_{2n} را جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin x dx=\frac{4\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\times\frac{4(-1)^{2n}}{(2n)^2} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin x dx=\frac{4\pi}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1-4n^2)}$$

انتگرال سمت راست را با استفاده از جزء به جزء حل می‌کنیم:

$$\text{مقدار انتگرال}=\frac{2}{\pi}[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x]_0^{\pi}=\frac{2(\pi^2-4)}{\pi}$$

با جایگذاری در تساوی قبل داریم:

$$\frac{2(\pi^2-4)}{\pi}=\frac{4\pi}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1-4n^2)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1-4n^2)}=\frac{\pi^2-12}{6}$$

مثال ۱۵: هرگاه f تابعی با ضابطه $f(x)=x^2$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ باشد در این صورت، باتوجه به سری فوریه f، جمع سری نامتناهی $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ برابر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{8}$

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

چون $f(x)$ تابعی زوج است، ضرایب b_n صفر می‌شود و a_n به صورت زیر حساب می‌شود:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx \xrightarrow{\text{روش جزءبه جزء}} a_n=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\Big]_0^\pi=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=\begin{cases}\frac{4}{n^2}, & n \text{ زوج}\\ -\frac{4}{n^2}, & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{\pi^2}{3}$$

اگر $f(x)$ به شکل $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ تعریف شود، آنگاه داریم:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4(-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\ldots)$$

به ازای $x=\pi$ داریم:

$$f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}+4(-\cos\pi+\frac{1}{4}\cos 2\pi-\frac{1}{9}\cos 3\pi+\ldots)\Rightarrow\frac{1}{4}(\pi^2-\frac{\pi^2}{3})=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\Rightarrow 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

مثال ۱۶: اگر بسط فوریه تابع متناوب؛ $f(x)=|x|\ ;\ -\pi\le x\le\pi$ برابر باشد با؛ $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots)$، در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi^2}{32}$ ۲) $\frac{\pi^3}{32}$ ۳) $\frac{\pi^3}{16}$ ۴) $\frac{3\pi^3}{32}$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

اگر $x>0$ باشد، آنگاه $f(x)=x$ خواهد بود لذا داریم:

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots)\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\frac{x^2}{2}+c=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\ldots)$$

با قرار دادن $x=0$ مقدار $c=0$ خواهد شد. اگر در طرفین تساوی $x=\frac{\pi}{2}$ قرار دهیم، داریم:

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots)\Rightarrow\frac{\pi^2}{8}=\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots)\Rightarrow\frac{\pi^3}{32}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

مثال ۱۷: با توجه به سری فوریه برای تابع $f(x)=\frac{x^2}{2}$ برای $|x|<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ که به شکل $f(x)=\frac{\pi^2}{6}-2(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-\frac{1}{16}\cos 4x+\cdots)$ است، مقدار عددی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{12}$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با جایگذاری $x=0$ در طرفین رابطه داده شده خواهیم داشت:

$$f(0)=\frac{\pi^2}{6}-2(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\ldots)\Rightarrow 0=\frac{\pi^2}{6}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

توضیح: این سؤال را با توجه به توضیحات قسمت رد گزینه‌ها می‌توانید خیلی سریع و در کمتر از ۳۰ ثانیه جواب دهید! سعی کنید انجام دهید.

مثال۱۸: اگر f تابع متناوبی با دورهٔ تناوب 2π باشد و به ازای $|x|<\pi$ داشته باشیم $f(x)=\cos\frac{x}{2}$، آنگاه با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع f، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ برابر است با:

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه تابع زوج است، ضرایب a_n برابرند با:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(n+\frac{1}{2})x+\cos(\frac{1}{2}-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})x+\frac{1}{\frac{1}{2}-n}\sin(\frac{1}{2}-n)x]_{0}^{\pi}=\frac{(-1)^n}{\pi(\frac{1}{4}-n^2)}$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{\pi}\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi(\frac{1}{4}-n^2)}\cos nx$$

با جایگذاری $x=\pi$ در طرفین معادله فوق داریم:

$$0=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=2$$

مثال۱۹: تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره‌ی تناوب به صورت: $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$, $f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad -\alpha<x<\alpha\\ 0 & ; \quad -\pi<x<-\alpha\ ,\ \alpha<x<\pi\end{cases}$ است. اگر بسط فوریه تابع به صورت $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\frac{\sin\alpha}{1}\cos x+\frac{\sin 2\alpha}{2}\cos 2x+\frac{\sin 3\alpha}{3}\cos 3x+\cdots)$ باشد، در این صورت حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2$ کدام است؟(مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ ۲) $\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\alpha)}{2}$ ۳) $\alpha(\pi-\alpha)$ ۴) $(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با توجه به صورت تست: سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(\frac{\sin n\alpha}{n})\cos nx$$

با توجه به توان (۲) برای $\frac{\sin n\alpha}{n}$، بهتر است از رابطه پارسوال استفاده کنیم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=(\frac{\alpha}{\pi})^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2\sin n\alpha}{\pi n})^2\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}1\times dx=(\frac{\alpha}{\pi})^2+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2$$

$$\frac{\alpha}{2\pi}-[-\frac{\alpha}{2\pi}]=(\frac{\alpha}{\pi})^2+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2\Rightarrow\frac{\alpha}{\pi}-(\frac{\alpha}{\pi})^2=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$$

مثال۲۰: اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π و $|x|<\pi$, $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ باشد، مقدار $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}$ چقدر است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹ و مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{2}-2$ ۲) $\frac{\pi}{2}-1$ ۳) $\pi-2$ ۴) $\pi-1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

رابطه‌ی سری فوریه تابع $f(x)$ را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$$

با توجه به اینکه $T=2L=2\pi$ است، مقدار L در رابطه فوق برابر با π و نیز با توجه به اینکه تابع $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ تابعی زوج است $b_n=0$ می‌باشد.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\frac{1}{2}+n)xdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n-\frac{1}{2})xdx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{n+\frac{1}{2}})\sin(n+\frac{1}{2})\pi+\frac{1}{\pi}(\frac{1}{n-\frac{1}{2}})\sin(n-\frac{1}{2})\pi=\frac{1}{\pi}(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}})\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$$

اگر در طرفین تساوی فوق $x=0$ را قرار دهیم، داریم:

$$1=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}=\pi-2$$

مثال ۲۱: در صورتی که برای $0<x<2$ داشته باشیم $x^2=\frac{4}{3}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2n^2}\cos(\frac{\pi nx}{2})$. مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ برابر است با:

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi^4}{30}$ ۲) $\frac{\pi^4}{32}$ ۳) $\frac{\pi^4}{90}$ ۴) $\frac{\pi^4}{96}$

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با توجه به زوج بودن x^2 و با استفاده از سری فوریه x^2 داریم:

$$a_0=\frac{4}{3}\quad,\quad a_n=\frac{16(-1)^n}{\pi^2n^2}\quad,\quad b_n=0$$

حال با استفاده از اتحاد پارسوال خواهیم داشت:

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)dx$$

برای تابع $f(x)=x^2$، $L=2$ است لذا داریم:

$$2(\frac{4}{3})^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{16(-1)^n}{\pi^2n^2})^2=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2)^2dx=\frac{32}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^2}{\pi^4n^4}=\frac{64}{10}=\frac{32}{5}\Rightarrow\frac{16^2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{32}{5}-\frac{32}{9}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

مثال ۲۲: اگر سری فوریه تابع $f(x)=x^2\ ,\ -\pi\le x\le\pi$ به صورت $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$ باشد، مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ کدام است؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi^2}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^2}{16}$ ۴) $\frac{\pi^4}{90}$

پاسخ: گزینه «۲» سری فوریه $f(x)$ به صورت مقابل است:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$

به ازای $x=0$ خواهیم داشت:

$$0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{0-\frac{\pi^2}{3}}{4}=\frac{-\pi^2}{12}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-(-\frac{\pi^2}{12})=\frac{\pi^2}{12}$$

توضیح: این سؤال را با توجه به توضیحات قسمت رد گزینه‌ها می‌توانید خیلی سریع و در کمتر از ۳۰ ثانیه جواب دهید! سعی کنید انجام دهید.

مثال ۲۳: از سری فوریه تابع $f(x)=x$ روی $[-\pi,\pi]$، کدام گزینه را می‌توان نتیجه گرفت؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^3}{8}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ضرایب سری فوریه تابع $f(x)=x$ روی بازه $[-\pi,\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\left.\begin{array}{l} a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0\quad,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=0 \\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

با استفاده از رابطه پارسوال، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{2}[4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}]\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

مثال ۲۴: فرض کنید $-\pi<t\le\pi$، $f(t)=\frac{t^2}{4}$، $f(t+2\pi)=f(t)$ باشد که سری فوریه f برابر است با $\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$، حاصل جمع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$، برابر با کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi^2}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^4}{35}$ ۴) $\frac{\pi^4}{90}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

همان‌طور که می‌بینید جمله‌ی عمومی سری عددی (یعنی $\frac{1}{n^4}$) توان دوم جمله‌ی عمومی سری فوریه (یعنی $\frac{(-1)^n}{n^2}$) می‌باشد، پس استفاده از تساوی پارسوال راه‌حل مناسب برای پاسخگویی به این تست است. اگر سری فوریه تابع $f(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi}{L}t)$$

آن‌گاه تساوی پارسوال به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(t)}$$

در این سؤال؛ $L=\pi$، $a_0=\frac{\pi^2}{12}$، $b_n=0$، $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$ و $f(t)=\frac{t^2}{4}$، لذا داریم:

$$2(\frac{\pi^2}{12})^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n^2})^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{t^2}{4})^2dt\Rightarrow\frac{\pi^4}{72}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^4}{16}dt\Rightarrow\frac{\pi^4}{72}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16\pi}[\frac{t^5}{5}]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16\pi}[\frac{\pi^5}{5}-\frac{(-\pi)^5}{5}]-\frac{\pi^4}{72}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16\pi}(\frac{2\pi^5}{5})-\frac{\pi^4}{72}=\frac{\pi^4}{40}-\frac{\pi^4}{72}=\frac{9\pi^4-5\pi^4}{360}=\frac{4\pi^4}{360}=\frac{\pi^4}{90}$$

روش دیگر: یک روش تشریحی دیگر برای حل این سؤال استفاده از اطلاعات فصل محاسبه مانده می‌باشد که در فصل سوم کتاب آن‌ها را یاد گرفتیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)=-\pi[\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)\cot g\pi z \text{ در قطب‌های } f(z)]$$

در این سؤال $f(n)=\frac{1}{n^4}$ و بنابراین $f(z)=\frac{1}{z^4}$ و لذا کافی است مانده تابع $\frac{\cot g\pi z}{z^4}$ را در نقطه‌ی $z=0$ حساب کنیم. بهترین روش نوشتن بسط تابع $\cot g\pi z$ است.

$$\frac{1}{z^4}\cot g\pi z=\frac{1}{z^4}(\frac{1}{\pi z}-\frac{\pi z}{3}-\frac{(\pi z)^3}{45}-\cdots)$$

مانده در نقطه‌ی $z_0=0$ یعنی ضریب $\frac{1}{z}$، که در بسط فوق برابر $-\frac{\pi^3}{45}$ است، بنابراین داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4}=-\pi(-\frac{\pi^3}{45})=\frac{\pi^4}{45}$$

اما حدود سری داده شده در سؤال، از ۱ تا ∞ است و لذا مقدار فوق باید نصف شود، بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{2}(\frac{\pi^4}{45})=\frac{\pi^4}{90}$$

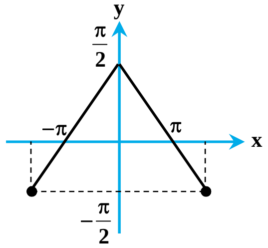
مثال ۲۵: سری فوریه‌ی مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x\ ,\ -\pi\le x\le 0\\ \frac{\pi}{2}-x\ ,\ 0<x\le\pi\end{cases}$ را می‌نویسیم. در این صورت مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$، کدام خواهد بود؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{16}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

لازم به ذکر است که این تست با کمی تغییر در آزمون سراسری سال ۸۱ برای رشته مکانیک مطرح شده بود.



$$f(n)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x\ ,\ -\pi\le x\le 0\\ \frac{\pi}{2}-x\ ,\ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

بنابراین تابع زوج است $(b_n=0)$ حال ضرایب a_0 و a_n در بسط فوریه را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi}{\pi}x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)dx=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2})=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)\cos nx\,dx$$

برای محاسبه‌ی a_n از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$\frac{\pi}{2}-x$	$\cos nx$
-1	$+\ \frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\ \frac{-1}{n^2}\cos nx$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}[(\frac{\pi}{2}-x)(\frac{1}{n}\sin nx)]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}[\frac{1}{n^2}\cos nx]_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{\pi n^2}(1-(-1)^n)$$

برای $n=2k$ داریم $a_n=0$ و به ازای $n=2k-1$ ، $a_{2k-1}=\frac{2\times 2}{\pi(2k-1)^2}$ است، بنابراین داریم:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\Rightarrow f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

حالا اگر $x=0$ قرار دهیم، با توجه به ضابطه $f(x)$، مقدار $f(0)$ برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود و داریم:

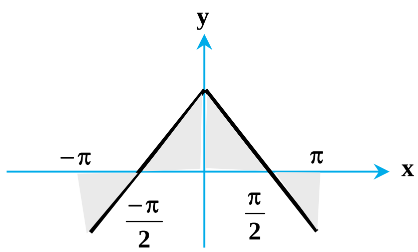
$$f(0)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

مثال ۲۶: اگر سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x\ ,\ -\pi\le x<0\\ \frac{\pi}{2}-x\ ,\ 0\le x\le\pi\end{cases}$ را بنویسیم، آنگاه مقادیر سری‌های عددی $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$، کدام است؟

(مکانیک ـ دکتری ۹۲)

۱) $A=\frac{\pi^2}{16}\ ,\ B=\frac{\pi^3}{32}$ ۲) $A=\frac{\pi^2}{8}\ ,\ B=\frac{\pi^3}{32}$ ۳) $A=\frac{\pi^2}{8}\ ,\ B=\frac{\pi^3}{16}$ ۴) $A=\frac{\pi^2}{4}\ ,\ B=\frac{\pi^3}{16}$

پاسخ: گزینه «۲» سری فوریه تابع $f(x)$ با توجه به شکل به صورت زیر است:



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{L})$$

دقت کنید چون تابع زوج است، لذا $b_n=0$ است.

$$\frac{a_0}{2}=\frac{\text{مساحت زیر نمودار در یک دوره تناوب}}{2\pi}=0$$

a_n براساس روش جزء به جزء به صورت زیر حساب می‌شود:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi n^2}[\cos n\pi - 1]$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{4}{\pi(2k-1)^2} & ;\ \text{فرد}\quad n = 2k-1 \\ a_{2k} = 0 & ;\ \text{زوج}\quad n = 2k \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sum a_n \cos nx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x \qquad (1)$$

$\frac{\pi}{2}-x$	$\cos nx$
-1	$\oplus\ \frac{\sin nx}{n}$
0	$\ominus\ -\frac{\cos nx}{n^2}$

برای به دست آوردن مقدار سری A، می‌توانیم در ضابطه‌ی فوق و همچنین ضابطه‌ی $f(x)$ در صورت سؤال به جـای x عدد صفر را قرار دهیم:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}[f(0^+)+f(0^-)] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

اما برای به دست آوردن حاصل سری B از طرفین رابطه (۱) انتگرال می‌گیریم. چون f زوج است، در بازه $[0,\pi]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} = \sum_{n=2k-1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)x$$

$$\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi^3}{32} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}$$

توضیح: این سؤال را با توجه به توضیحات قسمت رد گزینه‌ها می‌توانید خیلی سریع و در کمتر از ۳۰ ثانیه جواب دهید! سعی کنید انجام دهید.

درسنامه۳: انتگرال فوریه

مثال۱: تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\begin{cases}\sin x\ ; & 0<x<\pi\\ 0\ ; & x\le 0\ ,\ x\ge\pi\end{cases}$، تعریف شده است. با استفاده از انتگرال فوریه این تابع حاصل $I=\int_0^{\infty}\dfrac{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}{1-\alpha^2}d\alpha$ برابر کدام گزینه به دست می‌آید؟

۱) $\dfrac{\pi}{4}$ ۲) $\dfrac{\pi}{2}$ ۳) $\dfrac{\pi}{6}$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا فرمول انتگرال فوریه $f(x)$ را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<\pi\\ 0 & x\le 0, x\ge\pi\end{cases}=\int_0^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega \qquad (1)$$

حالا $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را حساب می‌کنیم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x.\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(\omega+1)x-\sin(\omega-1)x)dx=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(\omega+1)x}{\omega+1}+\frac{\cos(\omega-1)x}{\omega-1}\right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos(\omega+1)\pi}{\omega+1}+\frac{\cos(\omega-1)\pi}{\omega-1}\right)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega-1}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\omega\pi}{\omega+1}-\frac{\cos\omega\pi}{\omega-1}\right)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega-1}\right)=\frac{\cos\omega\pi+1}{\pi(1-\omega^2)}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x.\sin\omega x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\omega-1)x-\cos(\omega+1)x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\omega-1)x}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}\right]_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\omega-1)\pi}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)\pi}{\omega+1}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\sin\omega\pi}{\omega-1}-\frac{-\sin\omega\pi}{\omega+1}\right)=\frac{\sin\omega\pi}{\pi(1-\omega^2)}$$

حالا با جایگزینی $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در تساوی (۱) داریم:

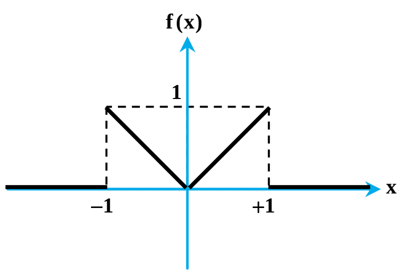
$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<\pi\\ 0 & x\le 0, x\ge\pi\end{cases}=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos\omega\pi+1}{\pi(1-\omega^2)}.\cos\omega x+\frac{\sin\omega\pi}{\pi(1-\omega^2)}.\sin\omega x\right)d\omega$$

در صورت سؤال به دنبال یک عبارت کسینوسی هستیم پس باید با ترفندی از دستِ $\sin\omega x$ خلاص شویم و این موضوع با شرط $f(0)=0$ میسر می‌شود:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos\omega\pi+1}{\pi(1-\omega^2)}.\cos 0+\frac{\sin\omega\pi}{\pi(1-\omega^2)}.\sin 0\right)d\omega=0$$

$$\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\pi+1}{\pi(1-\omega^2)}d\omega=0\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{2\cos^2(\frac{\omega\pi}{2})-1+1}{\pi(1-\omega^2)}d\omega=0\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{2\cos^2\frac{\omega\pi}{2}}{\pi(1-\omega^2)}d\omega=0\xrightarrow{\omega=\alpha}I=\int_0^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}{1-\alpha^2}d\alpha=0$$

مثال۲: اگر تابع $f(x)$ به صورت شکل مقابل تعریف شده باشد، آن‌گاه انتگرال فوریه آن کدام است؟



۱) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\omega}{\omega^2}+\frac{\cos\omega-1}{\omega^3}\right]\cos(\omega x)d\omega$

۲) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\omega}{\omega^2}+\frac{1-\cos\omega}{\omega^3}\right]\cos(\omega x)d\omega$

۳) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\right]\cos(\omega x)d\omega$

۴) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{\cos\omega-1}{\omega^2}\right]\cos(\omega x)d\omega$

پاسخ: گزینه «۴» ضابطه‌ی $f(x)$ در بازه‌ی $0\le x\le 1$ به صورت $f(x)=x$ و برای $x>1$ به صورت $f(x)=0$ است. از آن‌جا که f زوج است، $B(\omega)=0$ و $A(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\cos(\omega x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\omega x)dx$.

محاسبه‌ی این انتگرال با استفاده از جدول جزء به جزء به راحتی انجام می‌شود:

x	$\cos(\omega x)$
1	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$
0	$-\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega x)$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{\omega}\sin(\omega x)+\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega x)\right]\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega)}{\omega}+\frac{\cos(\omega)}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$$

به این ترتیب با جایگذاری $A(\omega)$ و $B(\omega)=0$ داریم:

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos(\omega x)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin(\omega)}{\omega}+\frac{\cos(\omega)-1}{\omega^2}\right]\cos(\omega x)d\omega$$

مثال ۳: با نوشتن انتگرال فوریه برای تابع $f(x)=e^{-x}$ مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$ برای $x>0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) πe^{-x} ۴) $\frac{\pi}{2}e^{-x}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با فرض $f(x)=e^{-x}$ داریم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x).\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+\omega^2}.\cos\omega x+\frac{\omega}{1+\omega^2}.\sin\omega x\right]d\omega\xrightarrow{f(x)=e^{-x}}\int_0^\infty\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\pi e^{-x}$$

مثال ۴: کدام‌یک از توابع زیر، انتگرال فوریه دارند؟

۱) $f(x)=e^{-x}$ ۲) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ ۳) $f(x)=e^{-2|x|}$ ۴) $f(x)=\cos x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در گزینه‌ی (۱) با آنکه $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e^{-\infty}=0$ است اما در $-\infty$ داریم $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=e^{\infty}=\infty$. بنابراین این تابع انتگرال فوریه ندارد.

توجه کنید که اگر مثلاً گزینه یک به صورت $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & ; x>0\\ 0 & ; x<0\end{cases}$ تعریف شده بود، در آن‌صورت می‌گفتیم این تابع انتگرال فوریه دارد.

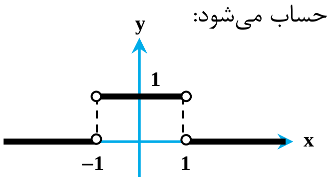
در گزینه (۲) چون $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1\neq 0$ است. پس تابع داده شده در این گزینه هم انتگرال فوریه ندارد. گزینه (۴) هم تابع متناوب است و انتگرال فوریه نخواهد داشت. البته اگر $f(x)$ در یک بازه‌ی کران‌دار مثلاً $0\le x\le L$ برابر با $\cos x$ و در سایر نقاط صفر باشد، سری فوریه خواهد داشت. اما گزینه (۳) همه شرایط لازم برای انتگرال فوریه را دارد. به سادگی می‌توان دید که داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|x|}dx=2\int_0^\infty e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_0^\infty=1$$

مثال ۵: اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; |x|<1\\ 0 & ; |x|>1\end{cases}$ به صورت $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega$ تعریف شود، آنگاه حاصل انتگرال $\int_0^\infty\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega$ برابر کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به شکل تابع $x=1$ نقطه گسستگی تابع می‌باشد، لذا مقدار $f(x)$ به صورت زیر حساب می‌شود:



$$f(1)=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}f(x)+\lim\limits_{x\to1^-}f(x)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x dx\xrightarrow{x=1}\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega\times1)d\omega\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۶: اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ به صورت $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega$ تعریف شود، آنگاه حاصل انتگرال $\int_0^\infty\frac{\sin x^2}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ممکن است به نظر برسد با توجه به شرایط دیریکله مانند مثال قبل انتگرال محاسبه می‌شود ولی با امتحان کردن نقاط مختلف مشاهده می‌کنیم این عمل امکان‌پذیر نیست. برای $x=0$ با توجه به اینکه تابع در این نقطه پیوسته است، داریم:

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(0)d\omega\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\qquad(1)$$

حالا به حل انتگرال می‌پردازیم، اگر $x^2=t$ فرض شود، داریم:

$$x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dt}{2t}\ ,\ \begin{cases}x=0 & \Rightarrow t=0\\ x=\infty & \Rightarrow t=\infty\end{cases}$$

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin t}{2t}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt\xrightarrow{(1)}I=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۷: انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & , \quad 0<x<\pi \\ 0 & , \quad \pi<x\end{cases}$ عبارت است از:

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1+\omega^2}dx$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1-\omega^2}dx$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1-\omega^2}d\omega$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که انتگرال فوریه کسینوسی مدنظر است، لذا $B(\omega)=0$ و داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \quad , \quad \Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x.\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\sin(1+\omega)x+\sin(1-\omega)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+\omega)x}{1+\omega}-\frac{\cos(1-\omega)x}{1-\omega}\right]_0^\pi=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos\omega\pi+1}{1-\omega^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{(1+\cos\omega\pi)\cos\omega x}{1-\omega^2}d\omega$$

مثال ۸: اگر $\int_0^\infty g(\omega)\sin\omega x d\omega=\begin{cases}0 & ; x>1 \\ 1 & ; 0<x<1 \\ -1 & ; -1<x<0 \\ 0 & ; x<-1\end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{d}{d\omega}[\omega g(\omega)]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sin\omega}{\omega}$

۲) $\frac{\cos\omega}{\pi}$

۳) $\frac{2\sin\omega}{\pi}$

۴) $\frac{2\cos\omega}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۳» به راحتی با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}0 & ; x>1 \\ 1 & ; 0<x<1 \\ -1 & ; -1<x<0 \\ 0 & ; x<-1\end{cases}$ می‌توان به این نتیجه رسید که این تابع فرد است، پس $g(\omega)$ ضریب جملات سینوسی در انتگرال فوریه تابع $f(x)$ و یا همان $B(\omega)$ خودمان می‌باشد:

$$B(\omega)=g(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 1\times\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)$$

اما مثال عبارت دیگری را خواسته، لذا داریم:

$$\frac{d}{d\omega}[\omega g(\omega)]=\frac{d}{d\omega}\left[\frac{2}{\pi}(1-\cos\omega)\right]=\frac{2\sin\omega}{\pi}$$

مثال ۹: با نوشتن انتگرال فوریه برای تابع $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x}$، $x>0$ با فرض اینکه $f(x)=-f(-x)$ مقدار انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{x\sin kx}{1+x^2}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2}e^{-k}$

۲) $\frac{\pi}{2}e^{k}$

۳) πe^{-k}

۴) πe^{k}

پاسخ: گزینه «۱»

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}.\sin\omega x dx=\frac{\omega}{1+\omega^2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}e^{-x}=\int_0^\infty\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

اگر در طرفین تساوی فوق ω به x و x به k تبدیل شود داریم:

$$\frac{\pi}{2}e^{-k}=\int_0^\infty\frac{x\sin kx}{1+x^2}dx$$

مثال ۱۰: انتگرال فوریه تابع زوج $f(x)=\begin{cases}\cos x & ; |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & ; |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2})\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\pi\omega)\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(\pi\omega)\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\frac{\pi\omega}{2})\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$

پاسخ: گزینه «۱»

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x).\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}+\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega\pi}{2})}{1+\omega}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{2})}{1-\omega}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1+\omega}+\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}\right]$$

مثال ۱۱: اگر $e^{-\alpha x}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega \quad (x\ge 0\,,\alpha>0)$ آنگاه حاصل $(1+x)e^{-x}$ برابر کدام گزینه می‌شود؟

۱) $\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2}d\omega$ ۲) $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2}d\omega$ ۳) $\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2}d\omega$ ۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2}d\omega$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به صورت سؤال داریم:

$$e^{-\alpha x}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega \qquad (1)$$

اگر از طرفین رابطه (۱) نسبت به (α) مشتق بگیریم، داریم:

$$-xe^{-\alpha x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega+\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\pi \frac{-2\alpha\cos\omega x}{(\alpha^2+\omega^2)^2}d\omega \qquad (2)$$

با قرار دادن $\alpha=1$ در تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\omega^2+1}d\omega \\ -xe^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\omega^2+1}d\omega+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{-2\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2}d\omega \end{cases}$$

با کم کردن طرفین روابط فوق از یکدیگر داریم:

$$x+xe^{-x}=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2}d\omega \Rightarrow (1+x)e^{-x}=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2}d\omega$$

مثال ۱۲: اگر k عددی حقیقی باشد که در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$k\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\begin{cases} e^{-x} & ; x>0 \\ e^x & ; x<0 \end{cases}$$

آنگاه حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2e^2}$ ۲) $\frac{\pi}{2e}$ ۳) $\frac{3\pi}{4e^2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4e}$

پاسخ: گزینه «۱» واضح است تابع $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & ; x>0 \\ e^x & ; x<0 \end{cases}$، تابعی زوج است و لذا داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)d\omega \Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos(\omega x)dx$$

می‌دانیم حاصل انتگرال فوق برابر $\frac{2}{\pi(1+\omega^2)}$ است، بنابراین $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega$، پس داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}d\omega=\begin{cases} e^{-x} & ; x>0 \\ e^x & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)d\omega}{1+\omega^2}=\begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-x} & ; x>0 \\ \frac{\pi}{2}e^x & ; x<0 \end{cases}$$

اگر در طرفین تساوی $x=2$ قرار دهیم به انتگرال موردنظر می‌رسیم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\omega}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-2}$$

مثال ۱۳: اگر $f(x)=\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\cos\omega x d\omega$، آن‌گاه مقدار $I=\int_0^\infty f(x)\cos^3 x dx$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{10}$ ۳) $\frac{7\pi}{32}$ ۴) $\frac{7\pi}{64}$

پاسخ : گزینه «۱» از این که $f(x)=\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\cos\omega x d\omega$ است متوجه می‌شویم که در نمایش فوریه‌ی تابع f داریم؛ $A(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$ و $B(\omega)=0$. بنابراین برای هر عدد مثبتِ $\omega>0$ داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx=\frac{1}{1+\omega^2} \Rightarrow \int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx=\frac{\pi}{2(1+\omega^2)}$$

حال با استفاده از اتحاد مثلثاتیِ $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty f(x)\cos^3 x dx=\int_0^\infty [\frac{3}{4}f(x)\cos(x)+\frac{1}{4}f(x)\cos(3x)]dx=\frac{3}{4}\frac{\pi}{2(1+1)}+\frac{1}{4}\frac{\pi}{2(1+9)}=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{80}=\frac{16\pi}{80}=\frac{\pi}{5}$$

مثال ۱۴: اگر $f(0)=\frac{\pi}{2}$ باشد و تابع زوج $f(x)$ در معادله‌ی انتگرالی زیر صدق کند، ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

$$\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx-\int_0^\infty xf(x)\sin(\alpha x)dx=0$$

۱) $-\frac{\pi}{2}(\frac{1}{1+x^4})$ ۲) $-\frac{\pi}{4}(\frac{1}{1+x^2})$ ۳) $\frac{\pi}{2}(\frac{1}{1+x^2})$ ۴) $\frac{\pi}{2}(\frac{1}{1+x^4})$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که $f(x)$ تابعی زوج می‌باشد، لذا داریم:

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx \Rightarrow \int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx=\frac{\pi}{2}A(\alpha)$$

با کمی دقت واضح است انتگرال دوم، مشتق انتگرال اول نسبت به α می‌باشد. لذا داریم:

$$\frac{\pi}{2}A(\alpha)+\frac{\pi}{2}A'(\alpha)=0 \Rightarrow \frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)}=-1 \xrightarrow{\text{از طرفین نسبت به } \alpha \text{ انتگرال می‌گیریم}} A(\alpha)=Ce^{-\alpha}$$

حالا این مقدار $A(\alpha)$ را در رابطه انتگرال فوریه $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\int_0^\infty A(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha=\int_0^\infty Ce^{-\alpha}\cos(\alpha x)d\alpha$$

با توجه به شرط ابتدایی سؤال $f(0)=\frac{\pi}{2}$، لذا داریم:

$$f(0)=\int_0^\infty Ce^{-\alpha}\cos(0)d\alpha \Rightarrow \frac{\pi}{2}=[-Ce^{-\alpha}]_0^\infty \Rightarrow \frac{\pi}{2}=C \Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty (\frac{\pi}{2})e^{-\alpha}\cos(\alpha x)d\alpha=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha}\cos(\alpha x)d\alpha=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{1+x^2})$$

مثال ۱۵: اگر $f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)d\omega$ و $g(x)=\int_0^\infty \omega\frac{dB(\omega)}{d\omega}\sin(\omega x)d\omega$ باشد، ضابطه‌ی $g(x)$ کدام است؟

۱) $-xf(x)+f'(x)$ ۲) $-f(x)-xf''(x)$ ۳) $-f(x)-xf'(x)$ ۴) $xf(x)-f''(x)$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به آنکه $B(\omega)$ ضریب انتگرال فوریه‌ی سینوسیِ f است خواهیم داشت:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx$$

از طرفین نسبت به ω مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xf(x)\cos(\omega x)dx$$

در نتیجه $\frac{dB(\omega)}{d\omega}$ ضریب انتگرال فوریه‌ی کسینوسی برای تابع $xf(x)$ است. پس داریم:

$$xf(x)=\int_0^\infty \frac{dB(\omega)}{d\omega}\cos(\omega x)d\omega$$

حال می‌توان از طرفین نسبت به x مشتق گرفت:

$$f(x)+xf'(x)=\int_0^\infty -\omega\frac{dB(\omega)}{d\omega}\sin(\omega x)d\omega$$

با قرینه کردن طرفین داریم:

$$-f(x)-xf'(x)=\int_0^\infty \omega\frac{dB(\omega)}{d\omega}\sin(\omega x)d\omega$$

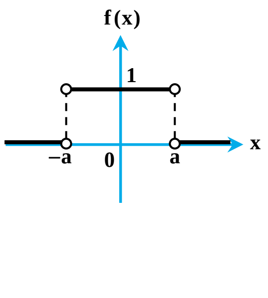
به عبارتی $g(x)=-f(x)-xf'(x)$ است.

مثال ۱۶: با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; |x|<a\\ 0 & ; |x|>a\end{cases}$، حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin\omega^3}{\omega}d\omega$ برابر کدام گزینه می‌شود؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به ضابطه‌ی تابع، نمودار آن به صورت زیر است:

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع f زوج است و لذا داریم:



$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)d\omega \Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^a \cos(\omega x)dx=\frac{2}{\pi\omega}\sin(\omega a)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^\infty \frac{2}{\pi}[\frac{\sin(a\omega)}{\omega}]\cos(\omega x)d\omega$$

واضح است $f(0)=1$، بنابراین داریم:

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a\omega)}{\omega}\cos(0)d\omega \Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a\omega)}{\omega}d\omega$$

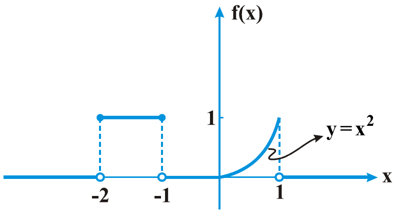
با تغییر متغیر $a\omega=u$، آنگاه $d\omega=\frac{du}{a}$، لذا داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

اگر مجدداً از تغییر متغیر $u=t^3$ استفاده کنیم، $du=3t^2dt$ و لذا داریم:

$$\int_0^{\infty}(\frac{\sin t^3}{t^3})3t^2dt=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^{\infty}(\frac{\sin t^3}{t})dt=\frac{\pi}{6}$$

مثال ۱۷: نمودار تابع $f(x)$ و انتگرال فوریه‌ی آن به صورت زیر داده شده‌اند:



$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}B^2(\omega)d\omega$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{5}$ ۲) $\frac{3}{5\pi}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر طراح سؤال انتگرال $\int_0^{\infty}[A^2(\omega)+B^2(\omega)]d\omega$ را خواسته بود، به راحتی از تساوی پارسوال کمک می‌گرفتیم. اما در این سؤال طراح $\int_0^{\infty}B^2(\omega)d\omega$ را خواسته است و بنابراین باید $A^2(\omega)$ را به نوعی حذف کنیم. برای انجام این کار، با جایگزینی x به جای $-x$ انتگرال فوریه‌ی $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم. با توجه به زوج بودن $\cos\omega x$ و فرد بودن $\sin\omega x$ داریم:

$$\begin{cases}f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega\\ f(-x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x-B(\omega)\sin\omega x]d\omega\end{cases}$$

حالا با کم کردن طرفین داریم:

$$f(x)-f(-x)=\int_0^{\infty}2B(\omega)\sin\omega x\,d\omega\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

بنابراین $B(\omega)$ ضریب انتگرال فوریه‌ی سینوسی تابع $g(x)$ است. طبق اتحاد پارسوال خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty}B^2(\omega)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g^2(x)dx$$

با توجه به زوج بودن $g^2(x)$ می‌توان نوشت:

$$\int_0^{\infty}B^2(\omega)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}g^2(x)dx$$

حالا می‌خواهیم ضابطه‌ی $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ را در نواحی مختلف مشخص کنیم. ابتدا به ضابطه‌ی $f(x)$ که با توجه به نمودار آن به‌دست می‌آید، دقت کنید:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; & x<-2\\ 1 & ; & -2\le x\le -1\\ 0 & ; & -1<x\le 0\\ x^2 & ; & 0<x\le 1\\ 0 & ; & x>1\end{cases}$$

خُب، انتگرال‌گیری برای بازه ۰ تا $+\infty$ است؛ با توجه به نوع منحنی که در اکثر جاها صفر است و در برخی جاها ضابطه‌ی منحنی متفاوت است، باید فواصل مختلف را در این بازه جداگانه بررسی کنیم؛ برای $x>2$ داریم $-x<-2$، بنابراین $f(x)=f(-x)=0$ (چون برای x های بزرگ‌تر از ۲ و کوچک‌تر از -2، مقدار $f(x)$ برابر صفر است)، بنابراین $g(x)=0$ است. برای $1<x<2$ داریم: $-2<-x<-1$ و با توجه به ضابطه‌ی f در بازه‌های $(1,2)$ و $(-2,-1)$ داریم $f(x)=0$ و $f(-x)=1$، پس $g(x)=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}$ است.

(توجه کنید که مقدار تابع $f(x)$، در بازه‌های $x>2$ و $1<x<2$ تفاوتی ندارد و برابر با صفر است، اما چون مقدار $f(-x)$ هنگامی که $-2<-x<-1$ باشد، غیرصفر است، ما ناچاریم بازه‌ی $1<x<2$ را به صورت جداگانه بررسی کنیم. همچنین از آنجا که مقدار تابع در یک نقطه، تأثیری روی مقدار انتگرال ندارد، همه‌ی نامساوی‌ها را به صورت اکید درنظر می‌گیریم.)

بالأخره در بازه‌ی $0<x<1$ داریم: $f(x)=x^2$ و چون در این حالت $-1<-x<0$ است، پس داریم: $f(-x)=0$، لذا $g(x)=\frac{x^2-0}{2}$ است.

حالا با قرار دادن ضابطه $g(x)$ در این نواحی داریم:

$$\int_0^{\infty}B^2(\omega)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}g^2(x)dx=\frac{2}{\pi}[\int_0^1(\frac{x^2}{2})^2dx+\int_1^2(\frac{-1}{2})^2dx+\int_2^{\infty}(0)dx]$$

$$\Rightarrow\int_0^{\infty}B^2(\omega)d\omega=\frac{2}{\pi}\left[[\frac{x^5}{20}]_0^1+[\frac{x}{4}]_1^2\right]=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{20}+\frac{1}{4}]=\frac{3}{5\pi}$$

مثال ۱۸: در معادله انتگرالی $\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x\, d\omega = \begin{cases} 1-x & , \; 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \; x>1 \end{cases}$ ، تابع $f(\omega)$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{\pi}(\frac{1-\cos\omega}{\omega^2})$ ۲) $\frac{2}{\pi}(\frac{1+\cos\omega}{\omega^2})$ ۳) $\frac{2}{\pi}(\frac{\cos\omega-1}{\omega^2})$ ۴) $\frac{2}{\pi}(\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{1-\cos\omega}{\omega^2})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

اگر تابع $g(x)$ را به صورت $g(-x)=g(x)$ ، $g(x)=\begin{cases} 1-x & 0\le x\le 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$ نمایش دهیم و انتگرال فوریه کسینوسی $g(x)$ را بنویسیم، داریم:

$$g(x)=\int_0^\infty \hat{f}(\omega)\cos\omega x d\omega \Rightarrow \hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos\omega x dx$$

$$=\frac{2}{\pi}[(1-x)\frac{\sin\omega x}{\omega}]_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\sin\omega x}{\omega}dx=-\frac{2}{\pi\omega^2}[\cos\omega x]_0^1=\frac{2}{\pi\omega^2}[1-\cos\omega]$$

مثال ۱۹: در معادله‌ی انتگرالی $\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x dx=\begin{cases} \frac{1}{2} & ; 0\le x<1 \\ \frac{1}{4} & ; x=1 \\ 0 & ; x>1 \end{cases}$ ، تابع $f(\omega)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\sin\omega}{\omega}$ ۲) $\frac{2\sin\omega}{\omega}$ ۳) $\frac{\sin\omega}{\pi\omega}$ ۴) $\frac{2}{\pi}.\frac{\sin\omega}{\omega}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر $H(x)=\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x dx$ تعریف شود، داریم:

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{1}{2}\cos\omega x dx=\frac{\sin\omega}{\pi\omega}$$

مثال ۲۰: معادلهٔ انتگرالی $\int_0^\infty f(\omega)\sin\omega x d\omega=\begin{cases} 1-x & , \; 0\le x\le 1 \\ 0 & , \; x>1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت $f(\omega)$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2(\omega-\sin\omega)}{\pi\omega^2}$ ۲) $\frac{2(\omega+\sin\omega)}{\pi\omega^2}$ ۳) $\frac{2(\omega-2\cos\omega-\sin\omega)}{\pi\omega^2}$ ۴) $\frac{2(2\cos\omega-\omega-\sin\omega)}{\pi\omega^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x)\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\omega x dx-\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin\omega x dx$$

$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{\cos\omega x}{\omega}]_0^1-\frac{2}{\pi}[-\frac{x}{\omega}\cos\omega x+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x]_0^1=\frac{2}{\pi}[-\frac{\cos\omega}{\omega}+\frac{1}{\omega}]-\frac{2}{\pi}[-\frac{\cos\omega}{\omega}+\frac{\sin\omega}{\omega^2}]=\frac{2}{\pi}[\frac{\omega-\sin\omega}{\omega^2}]$$

مثال ۲۱: اگر فرم مختلط انتگرال فوریه تابعی به صورت $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega\pi}{\omega}e^{i\omega x}d\omega$ باشد، آنگاه فرم حقیقی انتگرال فوریه آن تابع کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega\pi}{\omega}.\cos\omega x d\omega$ ۲) $\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\omega\pi}{\omega}.\cos\omega x d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega\pi}{\omega}.\sin\omega x d\omega$ ۴) $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\cos\omega\pi}{\omega}.\cos\omega x+\frac{\sin\omega\pi}{\omega}.\sin\omega x\right]d\omega$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر $C(\omega)=\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}$ تعریف شود، داریم:

$$A(\omega)=C(\omega)+C(-\omega)=\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}+\frac{\sin(-\omega\pi)}{-\omega\pi}=\frac{2\sin\omega\pi}{\omega\pi}$$

$$B(\omega)=i[C(\omega)-C(-\omega)]=i[\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}-\frac{\sin(-\omega\pi)}{-\omega\pi}]=0$$

مثال ۲۲: هرگاه $\int_{0}^{\infty} g(t)\cos(tx)dt = \begin{cases} 1 , & |x| < a \\ 0 , & |x| > a \end{cases}$ باشد، $g(0)$ کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $2a$ ۲) $\frac{a}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) $\frac{2a}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{a} \cos txdt = [\frac{2}{\pi t}\sin tx]_{0}^{a} = \frac{2\sin at}{\pi t}$$

توجه شود مقدار $g(0)$ به صورت حدی به دست می‌آید، لذا $g(0) = \frac{2a}{\pi}$ می‌باشد.

مثال ۲۳: اگر $f(x) = \int_{0}^{\infty} a(\omega)\cos(\omega x).d\omega$، آنگاه $A(\omega)$ در نمایش $xf(x) = \int_{0}^{\infty} A(\omega)\sin(\omega x)d\omega$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $-a(\omega)$ ۲) $\frac{da(\omega)}{d\omega}$ ۳) $\frac{-da(\omega)}{d\omega}$ ۴) $+\frac{d^2a(\omega)}{d\omega^2}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق متن می‌دانیم هرگاه $f(x)$ تابعی زوج با ضریب انتگرال فوریه $a(\omega)$ باشد، آنگاه $xf(x)$ تابعی فرد با ضریب انتگرال فوریه $-\frac{da(\omega)}{d\omega}$ می‌باشد.

مثال ۲۴: اگر $\int_{0}^{\infty} g(\omega)\cos(\omega x)d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x & ; |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{d}{d\omega}[(1-\omega^2)g(\omega)]$ کدام گزینه است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\sin\frac{\pi\omega}{2}$ ۲) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\omega}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}$ ۴) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\omega}{2} - \frac{\omega}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos x\cos\omega xdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos\omega xdx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(1+\omega)x + \cos(1-\omega)x]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1+\omega} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega}] = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2} \Rightarrow (1-\omega^2)g(\omega) = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\omega \Rightarrow \frac{d}{d\omega}[(1-\omega^2)g(\omega)] = \frac{-1}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}$$

مثال ۲۵: مقدار انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & |x| < 1 \\ 0 , & |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos\omega xdx = [\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega x]_{-1}^{1} = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega} \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin\omega xdx = [\frac{-1}{\pi\omega}\cos\omega x]_{-1}^{1} = 0 \end{cases}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin\omega xdx = \frac{-1}{\pi\omega}\cos\omega x]_{-1}^{1} = 0 \qquad \Rightarrow f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}.\cos\omega xd\omega$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}.\cos\omega xd\omega \Rightarrow f(-1) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲۶: انتگرال فوریه $f(x)=\begin{cases}1 & ;\ |x|<1\\ 0 & ;\ |x|>1\end{cases}$ برابر کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega$ ۲) $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega$ ۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega$ ۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x.\sin\omega}{\omega}d\omega$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به تعریف انتگرال فوریه برای تابع $f(x)$ اشاره می‌کنیم:

$$f(x)=\int_0^\infty (A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega$$

با توجه به این که $f(x)$ تابعی زوج است.

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega x\right]_{-1}^{1}=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

مثال ۲۷: با توجه به تساوی $(a>0,x>0)$ $e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha$، مقدار xe^{-x} چقدر است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^2}d\alpha$ ۲) $-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^2}d\alpha$ ۳) $\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^2}d\alpha$ ۴) $\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^2}d\alpha$

پاسخ: گزینه «۳» اگر از طرفین رابطه انتگرالی داده شده نسبت به a مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$-xe^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{-2a\alpha\sin\alpha x}{(a^2+\alpha^2)^2}d\alpha$$

با جایگذاری $a=1$ در رابطه فوق داریم:

$$xe^{-x}=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^2}d\alpha$$

مثال ۲۸: نمایش انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & ,\ |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ,\ |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$، کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) $f(x)=\int_0^\infty\frac{\frac12\cos(\frac{\pi}{2}\lambda)}{1-\lambda^2}\cos(\lambda x)d\lambda$ ۲) $f(x)=\int_0^\infty\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\lambda)}{1-\lambda^2}\cos(\lambda x)d\lambda$

۳) $f(x)=\int_0^\infty\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\lambda)}{1-\lambda^2}\cos(\lambda x)d\lambda$ ۴) $f(x)=\int_0^\infty\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\lambda)}{\lambda^2-1}\cos(\lambda x)d\lambda$

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(x)$ زوج است، بنابراین $B(\omega)=0$ و کافیست $A(\omega)$ را حساب کنیم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}\cos x)\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(1-\omega)x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(1+\omega)x\,dx\right]=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2}$$

بنابراین انتگرال فوریه تابع $f(x)$ به صورت مقابل خواهد بود:

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda=\int_0^\infty\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\lambda)}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$$

مثال ۲۹: جواب معادله‌ی انتگرال زیر، کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۰ـ مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۲)

$$\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx=\begin{cases}1-\omega & ;\ 0\le\omega\le1\\ 0 & ;\ \omega>1\end{cases}$$

۱) $\frac{2(1+\cos x)}{\pi x}$ ۲) $\frac{2(1-\cos x)}{\pi x}$ ۳) $\frac{2(1+\cos x)}{\pi x^2}$ ۴) $\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$

پاسخ: گزینه «۴» این تست با کمی تغییر در سال ۷۹ برای رشته برق مطرح شده بود! اگر تابع $g(\omega)$ را به صورت $g(\omega)=\begin{cases}1-\omega & ;\ 0\le\omega\le1\\ 0 & ;\ \omega>1\end{cases}, g(-\omega)=g(\omega)$ نمایش دهیم و انتگرال فوریه کسینوسی $g(\omega)$ را بنویسیم، داریم:

$$g(\omega)=\int_0^\infty f(x)\cos x\omega\,dx\ \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty g(\omega)\cos x\omega\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(\omega)\cos x\omega\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-\omega)\cos x\omega\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\omega x\,d\omega-\frac{2}{\pi}\int_0^1\omega\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{x}\sin\omega x\right]_0^1-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\omega}{x}\sin\omega x+\frac{1}{x^2}\cos\omega x\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}(\frac{1}{x}\sin x)-\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{x}\sin x+\frac{1}{x^2}\cos x-0-\frac{1}{x^2}\cos(0)\right]=\frac{2}{\pi x^2}(1-\cos x)$$

درسنامه ۴: تبدیل فوریه

مثال ۱: تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & , |x|<a\\ 0 & , |x|>a\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{2\sin\omega a}{\omega}$ ۲) $\frac{2\cos\omega a}{\omega}$ ۳) $\cos\omega a$ ۴) $\sin\omega a$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x).e^{-i\omega x}dx=\int_{-a}^{+a}e^{-i\omega x}dx=[-\frac{1}{i\omega}.e^{-i\omega x}]_{-a}^{+a}=-\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega a}-e^{i\omega a})=\frac{2\sin\omega a}{\omega}$$

مثال ۲: تبدیل فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}0 & , -\infty<t\le -1\\ 1+t & , -1\le t\le 0\\ 1-t & , 0<t<1\\ 0 & , 1\le t<+\infty\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\cos\omega}{2\omega^2}$ ۲) $\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$ ۳) $\frac{1-2\cos\omega}{\omega^2}$ ۴) $\frac{2-\cos\omega-1}{\omega^2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها رابطه تبدیل فوریه، به شکل مقابل است: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt$

با رسم شکل تابع $f(t)$، می‌توان مشاهده کرد تابع زوج است، لذا حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega tdt$ با توجه به اینکه تابع زیر انتگرال تابعی فرد است، برابر صفر است. لذا داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega tdt=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega tdt=2\int_{0}^{1}(1-t)\cos\omega tdt$$

با حل انتگرال به روش جزء به جزء داریم:

$$F(\omega)=2[\frac{1-t}{\omega}\sin\omega t-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega t]_0^1=-\frac{2}{\omega^2}\cos\omega+\frac{2}{\omega^2}\Rightarrow F(\omega)=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

توضیح: در این مثال نیز رادیکال پشت انتگرال استفاده نشده. در آزمون‌ها نیز با توجه به گزینه‌ها معلوم می‌شود طراح محترم کدام فرمول را بیشتر دوست داشته بارادیکال یا بی‌رادیکال؟!

مثال ۳ : تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & , 0\le x\le 1\\ 0 & , x>1\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{1+\cos\omega}{\omega}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1+\cos\omega}{\omega}$ ۳) $\frac{1}{2}(\frac{1-\cos\omega}{\omega})$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1-\cos\omega}{\omega}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$F_s\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1\sin\omega xdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

مثال ۴: اگر f تابعی زوج باشد و $f(x)=\begin{cases}\cos x & ; 0\le x\le\pi\\ 0 & ; x\ge\pi\end{cases}$، آنگاه با تعریف تبدیل فوریه آن به صورت $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$، $\hat{f}(\omega)$ کدام است؟

۱) $\frac{4\omega\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2}$ ۲) $\frac{2\omega\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2}$ ۳) $\frac{2\omega}{\omega^2-1}[1+\cos(\omega\pi)]$ ۴) $\frac{2\omega}{\omega^2-1}\cos(\omega\pi)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» می‌دانیم اگر f زوج باشد، تبدیل فوریه تابع به صورت مقابل است: $\hat{f}(\omega)=F[f(t)]=2F_c[f(t)]$

لذا داریم:

$$\hat{f}(\omega)=2F_c\{f(t)\}=2\int_0^{\pi}\cos x.\cos\omega x.dx=\int_0^{\pi}[\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x]dx=(\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}+\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega})\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{-\sin\pi\omega}{1+\omega}+\frac{\sin\pi\omega}{1-\omega}=\frac{2\omega\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$$

مثال۵: با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-a^2x^2}$ که به صورت $F_c[f(x)]=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ تعریف می‌شود، تبدیل فوریه سینوسی تابع $xf(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^2}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$
۲) $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{2a^2}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$
۳) $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$
۴) $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{2a^3}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر از $F_c\{f(x)\}$ نسبت به ω مشتق بگیریم، داریم:

$$F_c\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(\omega x)dx \Rightarrow \frac{dF_c\{f(x)\}}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}[\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(\omega x)dx]=-\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin(\omega x)dx$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، انتگرال سمت راست در واقع تبدیل فوریه سینوسی تابع $xe^{-a^2x^2}$ یا همان $xf(x)$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\frac{d}{d\omega}[F_c\{f(x)\}]=-[\text{تبدیل فوریه سینوسی تابع } xf(x)]$$

$$\Rightarrow \text{تبدیل فوریه سینوسی تابع } xf(x)=-\frac{d}{d\omega}[\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}]=-(\frac{-2\omega}{4a^2})(\frac{\sqrt{\pi}}{2a})e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{\pi}\omega}{4a^3}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

مثال۶: تبدیل فوریهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+a^2}$، $a>0$ ثابت، با رابطه $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ تعریف می‌شود، در این صورت $\hat{f}(\omega)$:

۱) برابر است با $\pi ie^{-a|\omega|}$
۲) برابر است با $\pi ie^{\omega a}$
۳) تابعی فرد است و برابر با $\pi ie^{\omega a}$ به ازای $\omega>0$ می‌باشد.
۴) تابعی فرد است و برابر با $\pi ie^{\omega a}$ به ازای $\omega<0$ می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۴» تبدیل فوریه یک تابع «حقیقی فرد»، یک تابع «موهومی فرد» می‌باشد. در این مثال تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+a^2}$ فرد است و لذا تبدیل فوریه آن یک تابع موهومی محض فرد می‌باشد. از طرفی طبق رابطه مقابل داریم: $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega xdx-i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega xdx$

$$\hat{f}(\omega)=-2i\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx=-2i\int_0^\infty\frac{x\sin\omega x}{x^2+a^2}dx=-2i(\frac{\pi}{2}e^{-a\omega})=-\pi ie^{-a\omega}\quad,\ \omega>0$$

با تبدیل ω به $-\omega$ باید عبارت را در یک منفی ضرب کنیم.

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}-\pi ie^{-a\omega} & \omega>0\\ \pi ie^{a\omega} & \omega<0\end{cases}$$

مثال۷: چنانچه تابع $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد، آن‌گاه تابع $f(x-a)$:

۱) دارای تبدیل فوریه می‌باشد.
۲) دارای تبدیل فوریه نمی‌باشد.
۳) ممکن است تحت شرایطی تبدیل فوریه نداشته باشد.
۴) فقط اگر $a>1$ باشد دارای تبدیل فوریه می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم که $f(x-a)$ انتقالی از $f(x)$ است. بنابراین ویژگی‌هایی مانند کران‌دار بودن یا تکه‌ای پیوسته بودن از $f(x)$ به $f(x-a)$ منتقل خواهد شد. وقتی تابعی را به چپ یا راست انتقال می‌دهیم تعداد ناپیوستگی‌هایش تغییری نمی‌کند. از طرفی با تغییر متغیر $t=x-a$ داریم $dt=dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-a)|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty$ یعنی $f(x-a)$ به طور مطلق انتگرال‌پذیر است. در نتیجه وقتی $f(x)$ تبدیل فوریه داشته باشد، $f(x-a)$ هم تبدیل فوریه خواهد داشت.

یادآوری: اگر $f(x)$ تبدیل فوریه‌ای به صورت $F(\omega)$ داشته باشد، آنگاه $f(ax+b)$ تبدیل فوریه‌ای به صورت $\frac{1}{|a|}e^{i\frac{\omega b}{a}}F(\frac{\omega}{a})$ دارد.

مثال ۸: معادله دیفرانسیل $y''+4y=\begin{cases}0 & ; x<0\\ e^{-2x} & ; x>0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. چنانچه تبدیل فوریه $y(x)$ را $Y(\omega)$ بنامیم، $Y(\omega)$ را بدست آورید.

۱) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(i\omega+2)(4+\omega^2)}$ ۲) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(i\omega+2)(4-\omega^2)}$ ۳) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(2-i\omega)(4+\omega^2)}$ ۴) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(2-i\omega)(4-\omega^2)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» از طرفین معادله داده شده تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$(i\omega)^2Y(\omega)+4Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega}f(x)dx\Rightarrow(4-\omega^2)Y(\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-i\omega x}.e^{-2x}dx$$

$$\Rightarrow(4-\omega^2)Y(\omega)=\frac{1}{s+2}\Big|_{s=i\omega}\Rightarrow \mathbf{Y(\omega)=\frac{1}{(i\omega+2)(4-\omega^2)}}$$

مثال ۹: با استفاده از تبدیل فوریه، $y(t)$ از معادله‌ی $y''+6y'+5y=\delta(t-3)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-6(t-3)}+\frac{1}{2}e^{-5(t-3)} & ; t>3\\ 0 & ; t<3\end{cases}$ ۲) $y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-(t-3)}-\frac{1}{2}e^{-5(t-3)} & ; t>3\\ 0 & ; t<3\end{cases}$

۳) $y(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-6(t-3)}+\frac{1}{4}e^{-5(t-3)} & ; t>3\\ 0 & ; t<3\end{cases}$ ۴) $y(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-(t-3)}-\frac{1}{4}e^{-5(t-3)} & ; t>3\\ 0 & ; t<3\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از طرفین معادله، تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$F\{y''+6y'+5y\}=F\{\delta(t-3)\}\Rightarrow F[y'']+6F[y']+5F[y]=e^{-3i\omega}\Rightarrow(i\omega)^2F[y]+6(i\omega)F[y]+5F[y]=e^{-3i\omega}$$

اگر فرض کنیم $F[y]=Y(\omega)$، داریم $Y(\omega)[-\omega^2+6i\omega+5]=e^{-3i\omega}$. با محاسبه‌ی $Y(\omega)$ و تجزیه‌ی کسرها خواهیم داشت:

$$Y(\omega)=\frac{e^{-3i\omega}}{-\omega^2+6i\omega+5}=\frac{e^{-3i\omega}}{(i\omega+5)(i\omega+1)}=e^{-3i\omega}[\frac{A}{5+i\omega}+\frac{B}{1+i\omega}]=e^{-3i\omega}\frac{(A+B)i\omega+A+5B}{(i\omega+5)(i\omega+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+5B=1\\A+B=0\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{1}{4}\ ,\ B=\frac{1}{4}\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{4}e^{-3i\omega}(\frac{1}{1+i\omega}-\frac{1}{5+i\omega})$$

بنابراین داریم:

$$y(t)=F^{-1}\{Y(\omega)\}=\frac{1}{4}F^{-1}\{e^{-3i\omega}(\frac{1}{1+i\omega}-\frac{1}{5+i\omega})\}$$

حالا $F^{-1}\{\frac{1}{a+i\omega}\}=e^{-at}$ است و طبق قاعده‌ی انتقال اگر $f(t)$ به $f(t-3)$ تبدیل شود؛ در تبدیل فوریه‌اش $e^{-3i\omega}$ ضرب می‌شود. پس داریم:

$$F^{-1}\{\frac{e^{-3i\omega}}{a+i\omega}\}=e^{-a(t-3)}$$

با استفاده از این نتیجه به ازای $a=1$ و $a=5$ خواهیم داشت:

$$y(t)=\frac{1}{4}[e^{-(t-3)}-e^{-5(t-3)}]$$

مثال ۱۰: اگر تبدیل فوریه e^{-9t^2} برابر $\frac{1}{\sqrt{18}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$ باشد آنگاه تبدیل فوریه تابع $f(t)=3te^{-9t^2}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{i\omega}{18\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$ ۲) $-\frac{i\omega}{18\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$ ۳) $\frac{i\omega}{9\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$ ۴) $-\frac{i\omega}{9\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با فرض $g(t)=e^{-9t^2}$، واضح است $g'(t)=-18te^{-9t^2}$، لذا از این خاصیت استفاده می‌کنیم:

$$F\{3te^{-9t^2}\}=\frac{1}{6}F\{18te^{-9t^2}\}=-\frac{1}{6}F\{g'(t)\}=-\frac{1}{6}(i\omega)F\{e^{-9t^2}\}=-\frac{i\omega}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}=-\frac{i\omega}{18\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$$

مثال ۱۱: چه رابطه‌ای بین توابع $f(x)=\begin{cases}1 & , |x|<1\\ 0 & , |x|>1\end{cases}$ و $F(\lambda)=\dfrac{2\sin\lambda}{\lambda}$ برقرار است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$

۲) $F(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda^2 x}dx$

۳) $F(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda^2 x}dx$

۴) $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

پاسخ : گزینه «۴» تبدیل فوریه معکوس تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}dx$ می‌باشد. حال $F(\lambda)$ را با توجه به ضابطه $f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$F(\lambda)=2\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\lambda x dx=2\int_{0}^{1}\cos\lambda x dx=[\frac{2}{\lambda}\sin\lambda x]_{0}^{1}=\frac{2\sin\lambda}{\lambda}\quad(1)$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}dx$$

مثال ۱۲: اگر تبدیل فوریه یک تابع $f(t), -\infty<t<\infty$، دارای فرمول $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\omega}dt$ باشد، آنگاه تبدیل فوریه $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ را بیابید

(راهنمایی $\int_{0}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}dt=\dfrac{\pi}{2}$) (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}0 & , |\omega|>1\\ \pi & , |\omega|\le 1\end{cases}$

۲) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}0 & , |\omega|>1\\ \frac{\pi}{2} & , |\omega|=1\\ \pi & , |\omega|<1\end{cases}$

۳) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}0 & , |\omega|>1\\ \frac{\pi}{4} & , |\omega|=1\\ \frac{\pi}{2} & , |\omega|<1\end{cases}$

۴) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}0 & , |\omega|>1\\ \pi & , |\omega|\le 1\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-it\omega}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}(\cos t\omega-i\sin t\omega)dt=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}.\cos\omega t dt$$

اگر $\omega=1$ قرار دهیم، داریم:

$$\hat{f}(1)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2t}{2t}.2dt\xrightarrow{2t=u}\hat{f}(1)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۳: تبدیل کسینوسی فوریه‌ی تابع $f(x)=e^{-3x}$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $\hat{f}(\omega)=\dfrac{3}{9+\omega^2}$

۲) $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{9+\omega^2}$

۳) $\hat{f}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.\dfrac{3}{9+\omega^2}$

۴) $\hat{f}(\omega)=\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}.\dfrac{3}{9+\omega^2}$

پاسخ : گزینه «۱» و «۳»

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-3t}.\cos\omega t dt\xrightarrow{\text{با توجه به نکته گفته شده در متن درس}}\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{3}{9+\omega^2}$$

از طرفی در برخی از منابع؛ همین فرمول را بدون ضریب $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ داریم. پس گزینه‌های (۱) و (۳) هر دو می‌توانند صحیح باشند.

مثال ۱۴: تابع $f(x)=\begin{cases}1 , |x|<a\\ 0 , |x|>a\end{cases}$، $a>0$ ثابت، مفروض است. اگر $\hat{f}(0)=2a$، آنگاه $\hat{f}(1)$ چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sin a$

۲) $2\sin a$

۳) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin a$

۴) $\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\sin a$

پاسخ : گزینه «۲»

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; & |x|<a\\ 0 & ; & |x|>a\end{cases}\Rightarrow\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\int_{-a}^{a}1\times\cos\omega x dx=\frac{2\sin a\omega}{\omega}$$

$$\hat{f}(0)=2a\Rightarrow\hat{f}(1)=\frac{2\sin a}{1}=2\sin a$$

مثال ۱۵: اگر تبدیل فوریه تابع $f(t)=e^{-\alpha t^2}$ برابر با $F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ باشد، تبدیل فوریهٔ تابع $g(t)=te^{-\alpha t^2}$ کدام است؟ $(j=\sqrt{-1})$

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
۲) $-\frac{\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
۳) $\frac{j\omega}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
۴) $-\frac{j\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$

پاسخ : گزینه «۴» طبق قضیه متن کتاب داریم:

$$\begin{cases} f(t)\rightarrow F(\omega) \\ f'(t)\rightarrow j\omega F(\omega)\end{cases}$$

$$f'(t)=-2\alpha t\ e^{-\alpha t^2}\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} j\omega\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\Rightarrow te^{-\alpha t^2}\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}}\frac{-j\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

مثال ۱۶: تبدیل فوریه‌ی تابع پله‌ای واحد هویساید $f(t)=u(t-a)$ کدام است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}$
۲) $\frac{e^{ia\omega}}{i\sqrt{2\pi}}$
۳) $\frac{\omega e^{ia\omega}}{i\sqrt{2\pi}}$
۴) $\frac{e^{ia\omega}}{i\omega\sqrt{2\pi}}$

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. می‌دانیم که تابع پله‌ای واحد؛ تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته دارد و فرمول آن چنین است:

$$F\{u(t)\}=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$$

اکنون از قاعده‌ی انتقال استفاده می‌کنیم:

$$F\{u(t-a)\}=e^{i\omega a}(\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega))$$

مثال ۱۷: تبدیل فوریه‌ی یک تابع فرد و حقیقی:

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) یک تابع فرد و حقیقی است.
۲) یک تابع زوج و حقیقی است.
۳) یک تابع زوج و موهومی محض است.
۴) یک تابع فرد و موهومی محض است.

پاسخ : گزینه «۴» تبدیل فوریه یک تابع حقیقی فرد، خود یک تابع فرد اما موهومی است.

مثال ۱۸: اگر $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ و داشته باشیم $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$، آنگاه $\hat{f}(\omega)$ (تبدیل فوریه f) کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\pi & , |\omega|<1 \\ 0 & , |\omega|>1\end{cases}$
۲) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & , |\omega|<1 \\ 0 & , |\omega|>1\end{cases}$
۳) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}2\pi & , |\omega|<1 \\ 0 & , |\omega|>1\end{cases}$
۴) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}1 & , |\omega|<1 \\ 0 & , |\omega|>1\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-it\omega}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}(\cos t\omega-i\sin t\omega)dt\Rightarrow\hat{f}(\omega)=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}.\cos\omega t dt \qquad (1)$$

اگر $\omega=1$ قرار دهیم، داریم:

$$\hat{f}(1)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2t}{2t}.2dt\xrightarrow{2t=u}\hat{f}(1)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

و به ازای $\omega=0$ در رابطه (۱) داریم:

$$\hat{f}(0)=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

(می‌دانیم که $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$ است). بنابراین در بین گزینه‌ها، گزینه‌ای که $\hat{f}(0)=\pi$ در آن صدق کند، جواب است. لذا گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۹: اگر $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{۲}$ ، آنگاه تبدیل فوریه تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ، یعنی $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-i\omega x}dx$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\begin{cases}۰ , & |\omega|\geq ۱\\ \pi , & |\omega|<۱\end{cases}$
۲) $\begin{cases}۰ , & |\omega|\geq \pi\\ \pi , & |\omega|<\pi\end{cases}$
۳) $\begin{cases}۰ , & |\omega|>\pi\\ \frac{\pi}{۲} , & |\omega|=\pi\\ \pi , & |\omega|<\pi\end{cases}$
۴) $\begin{cases}۰ , & |\omega|>۱\\ \frac{\pi}{۲} , & |\omega|=۱\\ \pi , & |\omega|<۱\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\hat f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-it\omega}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}(\cos t\omega-i\sin t\omega)\,dt \Rightarrow \hat f(\omega)=۲\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin t}{t}.\cos\omega t dt \qquad (۱)$$

اگر $\omega=۱$ قرار دهیم، داریم $\hat f(۱)=\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin ۲t}{۲t}.۲dt\xrightarrow{۲t=u}\hat f(۱)=\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{۲}$ تنها گزینه‌ای که به ازای $\omega=۱$، مقدار برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد، گزینه (۴) است.

مثال ۲۰: اگر $F\{e^{-x^۲}\}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{-\frac{\omega^۲}{۴}}$ (تبدیل فوریه) باشد، آنگاه تبدیل فوریه تابع $g(x)=xe^{-x^۲}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $i\omega e^{-\frac{\omega^۲}{۲}}$
۲) $i\omega e^{\frac{\omega^۲}{۲}}$
۳) $-i\omega e^{-\frac{i\omega^۲}{۲}}$
۴) $-\frac{i\omega}{۲\sqrt{۲}}e^{-\frac{\omega^۲}{۴}}$

پاسخ : گزینه «۴» می‌دانیم که تبدیل فوریه‌ی $f(x)=e^{-x^۲}$ به صورت $F(\omega)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{-\frac{\omega^۲}{۴}}$ است. حالا با استفاده از فرمول تبدیل فوریه مشتق داریم:

$$F\{-۲xe^{-x^۲}\}=F\{f'(x)\}=(i\omega)F(\omega)=\frac{i\omega}{\sqrt{۲}}e^{-\frac{\omega^۲}{۴}} \Rightarrow F\{xe^{-x^۲}\}=\frac{-i\omega}{۲\sqrt{۲}}e^{-\frac{\omega^۲}{۴}}$$

مثال ۲۱: تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}-۱ & ; ۰<x<۱\\ ۱ & ; ۱<x<۲\\ ۰ & ; x>۲\end{cases}$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\frac{\cos ۲\omega+۲\cos\omega}{\omega}\right)$
۲) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\frac{\sin ۲\omega-۲\sin\omega}{\omega}\right)$
۳) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\frac{\cos ۲-۲\cos\omega}{\omega}\right)$
۴) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\frac{\sin ۲\omega+۲\sin\omega}{\omega}\right)$

پاسخ : گزینه «۲»

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}f(x)\cos\omega xdx \Rightarrow F_c(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}[\int_{۰}^{۱}(-۱)\cos\omega xdx+\int_{۱}^{۲}(۱)\cos\omega xdx+\int_{۲}^{\infty}\cancel{(۰)\cos\omega xdx}]\ ۰$$

$$=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left[[\frac{-\sin\omega x}{\omega}]_{۰}^{۱}+[\frac{\sin\omega x}{\omega}]_{۱}^{۲}\right]=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}[\frac{-\sin\omega}{\omega}+\frac{\sin ۲\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega}]=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}(\frac{\sin ۲\omega-۲\sin\omega}{\omega})$$

مثال ۲۲: تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}e^{a^۲ix} & -۱<x<۱\\ ۰ & \text{برای سایر مقادیر}\end{cases}$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\cos(a^۲+\omega)}{a^۲+\omega}$
۲) $\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos(a^۲+\omega)}{a^۲+\omega}$
۳) $\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(a^۲-\omega)}{a^۲-\omega}$
۴) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\sin(a^۲-\omega)}{a^۲-\omega}$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول: ضریب انتگرال فوریه باید $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}$ باشد و چون تابع گزینه (۱) برای $\omega=-a^۲$ واگراست لذا فقط تابع گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم:

$$\hat f(\omega)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\cancel{\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{-۱}۰\times e^{-i\omega x}dx}+\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-۱}^{۱}e^{a^۲ix}.e^{-i\omega x}dx+\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۱}^{+\infty}۰\times e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-۱}^{۱}e^{(a^۲i-i\omega)x}dx=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\times\frac{۱}{(a^۲i-i\omega)}e^{(a^۲i-i\omega)x}\Bigg|_{-۱}^{۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\times\frac{۱}{(a^۲-\omega)i}\left[e^{a^۲i-i\omega}-e^{-(a^۲i-i\omega)}\right]=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\times\frac{۲}{a^۲-\omega}\times\frac{e^{(a^۲-\omega)i}-e^{-(a^۲-\omega)i}}{۲i}$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\times\frac{۱}{a^۲-\omega}\times\sin(a^۲-\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\times\frac{\sin(a^۲-\omega)}{(a^۲-\omega)}$$

مثال ۲۳: تبدیل فوریه $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ کدام است؟ (در صورتی که $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ را تبدیل فوریه $f(t)$ تعریف کنیم.)

(مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $F(\omega)=e^{-|\omega|}$
۲) $F(\omega)=\pi e^{-|\omega|}$
۳) $F(\omega)=\frac{1}{1+i\omega}$
۴) $F(\omega)=\frac{\pi}{1+i\omega}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t-i\sin\omega t}{1+t^2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^2}dt-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{1+t^2}dt=2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^2}dt=\pi e^{-|\omega|}$$

توجه: تساوی $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2a}e^{-a|\omega|}$ موسوم به انتگرال لاپلاس است که در متن درس آمده است.

مثال ۲۴: اگر تبدیل فوریه سینوسی $f(x)$ برابر $\frac{e^{-\omega}}{\omega}$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2}{\pi}\tan^{-1}t$
۲) $\frac{\pi}{2}\tan^{-1}t$
۳) $\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{1}{t}$
۴) $\frac{\pi}{2}\tan^{-1}\frac{1}{t}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\omega}}{\omega}\sin\omega t d\omega\to f'(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\omega}\cos\omega t d\omega \quad,\quad f'(t)=\frac{2}{\pi}L(\cos\omega t)\Big|_{s=1}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\to f(t)=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}t$$

مثال ۲۵: اگر تبدیل فوریه $f(x)$ برابر $F(\omega)$ باشد، تبدیل فوریه‌ی $xf(x)$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $F'(\omega)$
۲) $\omega F(\omega)$
۳) $iF'(\omega)$
۴) $F(\omega^2)$

پاسخ : گزینه «۳» مطابق مطالب گفته شده در کتاب می‌دانیم هرگاه $F(\omega)$ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ باشد، رابطه‌ی زیر را داریم:

$$F[x^n f(x)]=(i)^n F^{(n)}(\omega)$$

در این سؤال $n=1$ است و لذا تبدیل فوریه $xf(x)$ برابر با $iF'(\omega)$ می‌باشد.

حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست!
(روش رد گزینه ها)

سری فوریه،انتگرال و تبدیل فوریه

در این قسمت قراره با هم بـه سـؤالات سـری فوریـه کَلَـــک بزنیم!
۸۱ تست از سؤالات آزمون های کارشناسی ارشد و دکتری سراســری رو براتون انتخاب و با دسته بندی های مختلف اونا رو ارائه کردم.

مثال ۱: سری فوریه‌ی مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x\ ,\ -\pi\le x\le 0\\ \frac{\pi}{2}-x\ ,\ 0<x\le\pi\end{cases}$ را می‌نویسیم. در این صورت مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$، کدام خواهد بود؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{16}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» همون‌طور که گفتیم، هر وقت یه سری عددی داده شد و مقدار اون رو از ما خواستن، بهتره با نیم‌نگاهی به گزینه‌ها و نوشتن چند جمله‌ی اول سری، شانس خودمون رو امتحان کنیم!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{(2\times1-1)^2}+\frac{1}{(2\times2-1)^2}+\frac{1}{(2\times3-1)^2}+\cdots=1+\frac{1}{9}+\cdots$$

تا این‌جا معلومه حاصل سری از $1+\frac{1}{9}$ بیشتره، این یعنی گزینه (۲) غلطه، چون حاصلش از یک هم کمتره! اما حداکثر سری چقدره؟ چون $\frac{1}{9}$ کمتر از $\frac{1}{2}$ شده، پس می‌تونیم بگیم حاصل سری از $1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{9}=1+\frac{3}{9}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ کمتره و این یعنی گزینه‌های (۳) و (۴) غلطن! مقدار اونا حتی از ۲ هم بیشتره! پس گزینه (۱) جوابه ضمن عذرخواهی از محضر طراح بزرگوار به خاطر **استفاده نکردن از اطلاعات سری فوریه** تو حل این تست! باید بگیم شما هم با نوع گزینه‌های طراحی شده تو ایجاد این فکر شیطانی (استفاده از اطلاعات دبیرستانی!) بی‌تقصیر نبودین

مثال ۲: اگر سری فوریه تابع تناوبی $f(x)=|\sin x|$، $f(x+2\pi)=f(x)$ به صورت $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}$ باشد، آن‌گاه مجموع سری عددی $\cdots+\frac{1}{7^2\times9^2}+\frac{1}{5^2\times7^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}$، کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون و مهندسی نانومواد ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{8-\pi^2}{16}$ ۲) $\frac{\pi^2-8}{16}$ ۳) $\frac{9\pi^2-88}{144}$ ۴) $\frac{88-9\pi^2}{144}$

پاسخ : گزینه «۳» جمله‌ی اول این سری $\frac{1}{225}=\frac{1}{3^2\times5^2}$ هستش که داره با یه مقدار منفی هم جمع میشه، خُب تا این‌جا گزینه‌های (۱) و (۴) که منفی هستن، می‌پَرن! بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) باقی می‌مونَن؛ واسه انتخاب بین این دو گزینه، باید حداکثر سری رو تعیین کنیم؛ چون خود $\frac{1}{225}$ از $\frac{1}{2}$ کمتره، پس میشه گفت حاصل سری از $\frac{3}{225}=\frac{1}{225}+2\times\frac{1}{225}$ کمتره، بنابراین گزینه (۳) جوابه (مقدار گزینه (۲) حدوداً $\frac{1/85}{16}$ میشه که از $\frac{3}{225}$ بیشتره).

مثال ۳: اگر سری فوریه تابع تناوبی $f(x)=|x|$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ به صورت $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\cdots)$ باشد، آن‌گاه مجموع سری عددی $\cdots+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{3^4}$ برابر است با:

(مهندسی نانومواد و بیوتکنولوژی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi^4-96}{96}$ ۲) $\frac{\pi^3-32}{32}$ ۳) $\frac{\pi^3+32}{32}$ ۴) $\frac{\pi^4+96}{96}$

پاسخ : گزینه «۱» دقت کنین؛ جمله‌ی اول عبارت خواسته شده، برابر با $\frac{1}{81}$ هستش که داره با یه مقدار مثبت جمع میشه. تا اینجا میشه گفت گزینه (۲) غلطه؛ چون مقدارش منفیه. اما حداکثر سری چقدره؟ چون خودِ $\frac{1}{81}$ از $\frac{1}{2}$ کمتره، پس حاصل سری از $\frac{1}{27}=\frac{3}{81}=\frac{1}{81}+2\times\frac{1}{81}$ کمتره، (فقط گزینه (۱) چنین شرایطی داره)

مثال۴: با توجه به اینکه $\frac{\pi^۲}{۶}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ (با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=x^۲$ که به صورت:

$(x^۲=\frac{\pi^۲}{۳}-۴(\cos x-\frac{۱}{۴}\cos ۲x+\frac{۱}{۹}\cos ۳x-+\cdots))$، مجموع $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۴n-۱)^۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۴n-۳)^۲}$ کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi^۲}{۳۲}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۲۴}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۱۶}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۸}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به این که طراح زحمت کشیده و خواسته تست رو وحشتناک نشون بِده ما هم از اطلاعات دبیرستانمون استفاده می‌کنیم!

ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۴n-۱)^۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۴n-۳)^۲}=(۱+\frac{۱}{۵^۲}+\frac{۱}{۹^۲}+\cdots)+(\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۷^۲}+\cdots)$$

همون‌طور که می‌بینن میشه گفت حاصل سری قطعاً از ۱ بیشتره، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره!!

مثال۵: در صورتی که برای $۰<x\le ۲$ داشته باشیم $x^۲=\frac{۴}{۳}+۱۶\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{\pi^۲n^۲}\cos(\frac{\pi nx}{۲})$، مقدار $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}$ برابر است با:

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi^۴}{۳۰}$ ۲) $\frac{\pi^۴}{۳۲}$ ۳) $\frac{\pi^۴}{۹۰}$ ۴) $\frac{\pi^۴}{۹۶}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» خُب بیاین اول چند جمله‌ی اول سری رو بنویسیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}=\frac{۱}{۱^۴}+\frac{۱}{۲^۴}+\frac{۱}{۳^۴}+\cdots=۱+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۸۱}+\cdots$$

تا این جا معلومه حاصل سری از عدد ۱ بیشتره، پس گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن! حالا باید از بین گزینه‌های (۳) و (۴) یکی رو انتخاب کنیم؛ با توجه به این که $\pi^۴\simeq ۹۷$، بنابراین داریم:

$$\text{مقدار گزینه (۳)}=\frac{\pi^۴}{۹۰}\simeq\frac{۹۷}{۹۰}=\frac{۹۰}{۹۰}+\frac{۷}{۹۰}=۱+\frac{۷}{۹۰}$$

$$\text{مقدار گزینه (۴)}=\frac{\pi^۴}{۹۶}=\frac{۹۷}{۹۶}=\frac{۹۶}{۹۶}+\frac{۱}{۹۶}=۱+\frac{۱}{۹۶}$$

حالا به نظر شما کدوم یکی به $۱+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۸۱}$ (یعنی حاصل سری خواسته شده) نزدیک‌تره؟! خیلی معلومه که گزینه (۴) مقدارش از حاصل سری کمتره، (کافیه $\frac{۱}{۱۶}$ رو با $\frac{۱}{۹۶}$ مقایسه کنین!) بنابراین جواب تست نیست، پس گزینه (۳) جوابه

مثال۶: اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π و $f(x)=\cos\frac{x}{۲}, |x|<\pi$، مقدار $S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲-\frac{۱}{۴}}$ چقدر است؟

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{۲}-۲$ ۲) $\frac{\pi}{۲}-۱$ ۳) $\pi-۲$ ۴) $\pi-۱$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» تو این سری در مخرج $-\frac{۱}{۴}$ وجود داره پس قوانین سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ برقرار نیست پس باید از روش تخمین استفاده کنیم.

چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲-\frac{۱}{۴}}=\frac{(-۱)^{۱+۱}}{۱^۲-\frac{۱}{۴}}+\frac{(-۱)^{۲+۱}}{۲^۲-\frac{۱}{۴}}+\frac{(-۱)^{۳+۱}}{۳^۲-\frac{۱}{۴}}-+\cdots=\frac{۴}{۳}-\frac{۴}{۱۵}+\boxed{\frac{۱}{۹-\frac{۱}{۴}}-+\cdots}\Rightarrow \text{مقداری مثبت و البته بسیار کوچک}$$

$$S=\frac{۱۶}{۱۵}+(\text{مقدار مثبت و بسیار کوچک})$$

پس گزینه‌ای جوابه که مقدار اون به عدد $\frac{۱۶}{۱۵}$ نزدیک باشه، واضحه فقط گزینه (۳) چنین شرایطی داره

دقت کنین میشه تو سری‌هایی که جملات یکی در میون مثبت و منفی میشن هم از روش تخمین استفاده کرد، فقط روش استدلال ما کمی فرق میکنه. توی این جور تست‌ها ما مثلاً حاصل دو جمله‌ی اول رو حساب می‌کنیم، بعد میگیم چون جمله سوم مقدارش مثبته و قطعاً از جمله‌ی چهارم بزرگتره پس تفاضل این دو جمله مثبته، بعد دوباره میشه گفت که چون جمله‌ی پنجم مقدارش مثبت و از جمله‌ی ششم بزرگتره، پس تفاضل این دو جمله هم مثبته؛ بنابراین تا آخر یه سری عدد مثبت با هم جمع میشن، پس یه سری عدد مثبت دارن به تفاضل دو جمله‌ی اول اضافه میشن و بقیه قصه ...!

مثال ۷: تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره‌ی تناوب به صورت: $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ ، $f(x)=\begin{cases}1 \ ; & -\alpha<x<\alpha \\ 0 \ ; & -\pi<x<-\alpha \ , \ \alpha<x<\pi\end{cases}$ است. اگر بسط فوریه تابع به صورت $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\frac{\sin\alpha}{1}\cos x+\frac{\sin 2\alpha}{2}\cos 2x+\frac{\sin 3\alpha}{3}\cos 3x+\cdots)$ باشد، در این صورت حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$　۲) $\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\alpha)}{2}$　۳) $\alpha(\pi-\alpha)$　۴) $(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)$

پاسخ : گزینه «۱» اگه $\alpha\to 0^+$، اونوقت حاصل سری به سمت صفر میل میکُنه، پس تا اینجا میشه با گزینه‌های (۲) و (۴) خداحافظی کرد!

چون حاصل اونا در $\alpha\to 0^+$ برابر با صفر نمیشه! اما برای تعیین جواب نهایی، می‌تونیم $\alpha=\frac{\pi}{2}$ قرار بِدیم: $S=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n(\frac{\pi}{2})}{n})^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}n)}{n^2}$

اگه n زوج باشه، حاصل سری برابر با صفر میشه و اگه n فرد باشه، حاصل سری برابر با $S=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$ میشه، یعنی $S=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$. معلومه

گزینه (۱) به ازای $\alpha=\frac{\pi}{2}$ مقدارش به S نزدیک‌تَره (دقت کنین گزینه (۳) به ازای $\alpha=\frac{\pi}{2}$ مقدارش برابر با $\frac{\pi^2}{4}\simeq 2/4$ میشه و می‌دونیم مقدار S عددی بزرگتر از ۱ و کمتر از ۲ هستش.)

مثال ۸: هرگاه f تابعی با ضابطه $f(x)=x^2$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ باشد در این صورت، با توجه به سری فوریه f، جمع سری نامتناهی $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ برابر کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi^2}{4}$　۲) $\frac{\pi^2}{12}$　۳) $\frac{\pi^2}{6}$　۴) $\frac{\pi^2}{8}$

پاسخ : گزینه «۳» اگه جمع سری $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ رو تخمین بزنیم به این نتیجه می‌رسیم که مقدار سری از عدد $1+\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=1+\frac{3}{4}$ کمتر و از عدد ۱ بیشتره، پس گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن، خُب گزینه (۴) میگه که حاصل سری از ۱/۲۵ کمتره (چون $\frac{\pi^2}{8}$ از ۱/۲۵ کمتره!) اما حرف گزینه (۴) درست نیست، چون با یه نگاه معلومه حاصل سری داده شده از ۱/۲۵ بیشتره. برای این که $S=\underbrace{1+\frac{1}{4}}_{1/25}+\frac{1}{9}+\cdots$، و این یعنی عدد ۱/۲۵ داره با مقادیر مثبت دیگه هم جمع میشه، پس گزینه (۴) هم غلطه؛ بنابراین می‌مونه گزینه (۳) که جوابه

مثال ۹: با توجه به سری فوریه تابع تناوبی $f(x)=\begin{cases}x(\pi+x) \ , & -\pi<x<0 \\ x(\pi-x) \ , & \pi<x<0\end{cases}$ که به صورت $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)^3}$ می‌باشد و با استفاده از تساوی پارسوال (Parseval) مجموع سری عددی $1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots$ عبارت است از:

(مهندسی نفت ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi^6}{90}$　۲) $\frac{\pi^6}{960}$　۳) $\frac{\pi^4}{960}$　۴) $\frac{\pi^4}{90}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به این‌که سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ هستش، پس تو جواب اون باید π^6 حضور داشته باشه و این یعنی گزینه‌های (۳) و (۴) غلطن! حالا از بین گزینه‌های (۱) و (۲) باید یکی رو حذف کنیم؛ حاصل سری از عدد ۱ بیشتر و از $1+\frac{1}{3^6}+2\times\frac{1}{3^6}$ کمتره؛ یعنی سری باید یک و خورده‌ای باشه! با توجه به این‌که گزینه (۱) خیلی از یک بزرگتره، گزینه (۲) جوابه

مثال ۱۰: فرض کنید $-\pi < t \le \pi$ ، $f(t)=\frac{t^۲}{۴}$ ، $f(t+۲\pi)=f(t)$ باشد که سری فوریه f برابر است با $\frac{\pi^۲}{۱۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲}\cos nt$ ، حاصل جمع سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}$ ، برابر با کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi^۲}{۶}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۱۲}$ ۳) $\frac{\pi^۴}{۳۵}$ ۴) $\frac{\pi^۴}{۹۰}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» خُب ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم: $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}=۱+\frac{۱}{۲^۴}+\cdots=۱+\frac{۱}{۱۶}$

حاصل این سری از عدد ۱ بزرگ‌تره، پس گزینه (۲) غلطه، از طرفی از $۱+\frac{۳}{۱۶}=۱+۲\times\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+۱$ کمتره، پس گزینه (۳) هم غلطه! حالا باید از این گزینه‌های (۱) و (۴) یکی رو انتخاب کنیم، هرچند با محاسبات ساده معلومه که در گزینه (۱)، $\frac{\pi^۲}{۶}=۱/۶$ و ۱/۶ از $۱+\frac{۳}{۱۶}$ بیشتره و این گزینه غلطه؛ اما می‌تونیم به مطلبی که در مورد سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^\alpha}$ گفتیم هم متوسل شیم! چون توی این تست $\alpha=۴$ داده، پس باید در توان π هم عدد ۴ باشه، پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۱۱: فرض کنید $-L<x<L$ و $f(x)=x$ و سری فوریه تابع f به صورت $f(x)=\frac{۲L}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$ باشد، در این صورت مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۲۰}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۶}$ ۴) $\frac{۲\pi^۲}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» خُب طبق معمول چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم: $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۴}+\cdots$

معلومه مقدار سری عددی بزرگ‌تر از ۱ و کوچکتر از $۱+\frac{۳}{۴}=۱+۲\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+۱$ میشه، پس گزینه‌های (۲) و (۴) رو مرخص می‌کنیم! حالا باید از بین گزینه‌های (۱) و (۳) یکی رو انتخاب کنیم، اما چه جوری؟ گفتیم تو **حاصل** سری‌هایی به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^\alpha}$ ، توان π به صورت π^α هستش، پس فقط گزینه (۳) می‌تونه صحیح باشه (در واقع چون توی مخرج توان n رو برابر با ۲ داریم، باید در توان π هم عدد ۲ رو داشته باشیم.)

مثال ۱۲: تابع متناوب f(x) در یک دوره تناوب به صورت زیر است: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

$$f(x)=\begin{cases}۰ \ , & ۰<x<\pi-\alpha \\ ۱ \ , & \pi-\alpha<x<\pi+\alpha \ ; \ (۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}) \\ ۰ \ , & \pi+\alpha<x<۲\pi\end{cases}$$

اگر بسط فوریه آن به صورت مقابل باشد $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}-\frac{۲}{\pi}(\frac{\sin\alpha\cos x}{۱}-\frac{\sin ۲\alpha\cos ۲x}{۲}+\frac{\sin ۳\alpha\cos ۳x}{۳}+\cdots)$ ، حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n}{n})^۲$ چقدر است؟

۱) $\pi-۱$ ۲) $\pi^۲-۱$ ۳) $\frac{\pi-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\pi^۲-۱}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» می‌دونیم $\sin n\le ۱$ ، بنابراین حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(\sin n)^۲}{n^۲}$ از حاصل سری $S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ کمتره، و چون حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ برابر با $\frac{\pi^۲}{۶}$ هستش، پس حاصل سری اصلی داده شده توی صورت سؤال یعنی $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n}{n})^۲$ از $\frac{\pi^۲}{۶}$ کمتره، فقط گزینه (۳) چنین شرایطی داره

(حتی اگه ندونین که حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ ، برابر با $\frac{\pi^۲}{۶}$ میشه، با نوشتن چند جمله‌ی اول سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ ، می‌تونین به این نتیجه برسین، چون معلومه حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ از ۱ بیشتر و از ۲ کمتره)

یه نکته هم «بین مریض» بِهتون بگم! گفته بودم تو سری‌هایی به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^\alpha}$ ، $(\alpha>۱)$ تو حاصل سری و تو صورت کسر، باید توان π^α داشته باشیم. اگه صورت کسر عددی حقیقی نباشه و مثه این سؤال $\sin(n)$ باشه، یه واحد از توان π کم میشه، مثلاً همون‌طور که می‌بینین، توی این سؤال توان π برابر با ۱ شده. اینو واسه این گفتم که اگه جایی گیر افتادین شاید به دردتون خورد. به هر حال اینم یه سلاح دیگه واسه برخورد با این نوع سری‌هاست مثلاً تو این تست از همون اول معلوم میشه گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن و یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) جوابه

مثال ۱۳: سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\le x\le 0\\ -x+1 & 0\le x\le 1\end{cases}$ ، $f(x+2)=f(x)$ کدام است؟

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\dots)$

۲) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\dots)$

۳) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 6\pi x+\dots)$

۴) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 6\pi x+\dots)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» خُب اگه به جای x تو ضابطه‌ی تابع صفر قرار بدیم، اونوقت مقدار تابع برابر با ۱ میشه، حالا تو گزینه‌ها $x=0$ قرار میدیم، هر کدوم مقدارشون نزدیک به ۱ بود، جوابه! گزینه‌های (۱) و (۳) که به راحتی از بین جواب‌ها خارج میشن (چون عبارت داخل پرانتز بعد از این که $x=0$ قرار می‌دیم، همواره مقداری مثبت داره و چون در عدد $-\frac{4}{\pi^2}$ ضرب میشن، مقداری منفی ایجاد میشه که باید از $\frac{1}{2}$ کم بشه، پس به هیچ وجه نزدیک به ۱ نمی‌شن! بنابراین دعوای اصلی رو گزینه‌های (۲) و (۴) با هم دارن!

$x=0$ مقدار گزینه (۲) به ازای $=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots)$ ، $x=0$ مقدار گزینه (۴) به ازای $=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots)$

از اون‌جایی که قدرت اصلی پرانتزها تو همون جملات اولِ، پس اگه توی هر دو پرانتز فقط جمله‌ی اول رو در نظر بگیریم، داریم:

$x=0$ مقدار گزینه (۲) به ازای $\simeq\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\times 1\Rightarrow$ عددی کمتر از ۱ و البته نزدیک به یکِ

$x=0$ مقدار گزینه (۴) به ازای $\simeq\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi^2}\Rightarrow$ عددی نزدیک به $\frac{1}{2}$ است نه به یک!

پس گزینه (۲) جوابه

مثال ۱۴: موج مثلثی f با دورهٔ تناوب 2π چنین تعریف می‌شود: $f(x)=\begin{cases}x & ; \ 0<x<\pi\\ -x & ; \ -\pi<x<0\end{cases}$. کدام یک از چهار سری زیر، سری فوریهٔ f است؟

(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots)$

۲) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos 2x}{1\times 3}+\frac{\cos 4x}{3\times 5}+\frac{\cos 6x}{5\times 7}+\cdots)$

۳) $\frac{\pi^2}{3}-4(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots)$

۴) $\frac{\pi^2}{6}-(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\cdots)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» اگه توی صورت سؤال به جای x، عدد $\frac{\pi}{2}$ رو قرار بدیم، مقدار تابع برابر با $\frac{\pi}{2}$ میشه، حالا باید ببینیم تو کدوم گزینه‌ها اگه به جای x ها، $\frac{\pi}{2}$ قرار بدیم، برابر $\frac{\pi}{2}$ میشه، اولین گزینه‌ای که چشمک میزنه و دقیقاً برابر با $\frac{\pi}{2}$ میشه گزینه (۱) هستش که جوابه

دقت کنین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) هیچوقت به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ نمی‌شن! چون داخل پرانتزها اعدادی منفی هستن و با توجه به منفی پشت پرانتزها عمل جمع صورت می‌گیره.

مثال ۱۵: اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ و $0<x<2\pi$ آنگاه جواب صحیح کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) $f(x)=\frac{\pi+x}{2}$　۲) $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$　۳) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$　۴) $f(x)=\frac{\pi}{2}+x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به اینکه به ازای $x=\pi$، حاصل سری $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ همواره برابر با صفر میشه، تنها گزینه‌ای که اگه به جای x اون عدد π رو قرار بدیم، حاصلش صفر میشه، گزینه (۳) هستش پس نیاز به حل سؤال نیست!

مثال ۱۶: تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π بر بازه $(0,2\pi)$ دارای فوریه‌ای به صورت $1+\cos x+\frac{\cos 2x}{2!}+\frac{\cos 3x}{3!}+\cdots$ می‌باشد. $f(x)$ برابر است با:

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ ۲) $e^{\sin x}\cos(\sin x)$ ۳) $e^{\cos x}\sin(\cos x)$ ۴) $e^{\sin x}\sin(\cos x)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این تست از دو روش کَلَک می‌زنیم!

روش اول: تو این روش فرض می‌گیریم شما حتی بسط e رو نمی‌دونین (البته باعث خجالته اگه ندونین!) به ازای $x=\pi$ حاصل سری به شکل زیر میشه:

$$1+\cos\pi+\frac{\cos 2\pi}{2}+\frac{\cos 3\pi}{6}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+-\cdots=\frac{1}{3}+(\text{عددی مثبت ولی خیلی کوچک})$$

خُب تو گزینه‌ها هر کدوم مقدارشون نزدیک به $\frac{1}{3}$ باشه، باید کاندیدای جواب در نظر گرفته بِشه! گزینه‌های (۳) و (۴) به ازای $x=\pi$ مقدارشون منفی میشه، بنابراین غلطن پس مقایسه بین گزینه‌های (۱) و (۲) هستش:

$$x=\pi \text{ به ازای } (1) \text{ مقدار گزینه } =e^{-1}\cos(0)=\frac{1}{2/7} \qquad \text{و} \qquad x=\pi \text{ به ازای } (2) \text{ مقدار گزینه } =e^{0}\cos(0)=1$$

معلومه گزینه (۲) به هیچ‌وجه نمی‌تونه نزدیک به عدد $\frac{1}{3}$ باشه، پس غلطه و گزینه (۱) جوابه

روش دوم: با توجه به این که بسط فوریه $f(x)$، کسینوسیه، بنابراین باید تابع $f(x)$ زوج باشه، پس گزینه‌های (۲) و (۴) صحیح نیستن، از طرفی به ازای $x=0$، مقدار تابع f برابر با مقدار زیر:

$$1+\cos(0)+\frac{\cos(0)}{2!}+\frac{\cos(0)}{3!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

فقط گزینه یکِ که به ازای $x=0$، مقدارش برابر با e میشه

مثال ۱۷: اگر برای $0<x<2$ داشته باشیم: $x=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots)$ ، در این صورت دو جمله اول بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$، در فاصله $0<x<2$ عبارت است از:

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» می‌دونیم «مقادیر جملات اول سری فوریه تخمین مناسبی از مقدار خود تابع هستن»، اگه $x=1$ رو تو ضابطه‌ی $f(x)$ قرار بدیم، اونوقت $f(1)=\frac{3}{4}$ میشه، (دقت کنین؛ $x=1$ تو بازه‌ی داده شده قرار داره، پس حواستون باشه، اعدادی رو انتخاب کنین که تو بازه‌ی داده شده باشن)، حالا تو گزینه‌ها به جای xها، عدد ۱ رو قرار میدیم، هر کُدوم نزدیک به $\frac{3}{4}$ باشه، جوابه! کاملاً معلومه گزینه‌های (۲) و (۳) کاندیدای جوابن. حالا برای حذف یکی از اونا، مقدار $x=0^+$ قرار داده و می‌بینیم که مقدار تابع برابر با $f(0^+)=1$ میشه، فقط تو گزینه (۳)، اگه $x=0^+$ قرار بِدیم، حاصل به عدد ۱ نزدیک میشه، پس گزینه (۲) غلطه و گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۸: اگر تابع f در یک دوره تناوب به صورت $f(x)=\frac{L}{2}-x$ ، $-\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2}$، با دوره تناوب $T=L$ ، تعریف شده باشد، آنگاه سری فوریه آن کدام است؟

(مهندسی نانومواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$ ۲) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۳) $\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$ ۴) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اولاً به ازای $x=0$ مقدار تابع برابر با $\frac{L}{2}$ میشه. حالا تو گزینه‌ها به جای xها، عدد صفر قرار میدیم، هر کدوم $\frac{L}{2}$ نشد، از بین جواب‌ها خارج میشه، پس گزینه‌های (۳) و (۴) از گردونه‌ی رقابت‌ها خارج میشن حالا اگه $x=\frac{L}{4}$ قرار بِدیم، مقدار تابع f برابر با $\frac{L}{4}$ میشه، حالا تو گزینه‌های (۱) و (۲)، $x=\frac{L}{4}$ قرار میدیم و بنابراین داریم:

$$x=\frac{L}{4} \text{ به ازای (۱) مقدار گزینه } =\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})=\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}[\frac{-1}{1}+\frac{1}{3}-+\cdots]\simeq\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}(-\frac{2}{3})$$

$$x=\frac{L}{4} \text{ به ازای (۲) مقدار گزینه } =\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})=\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}[-1+\frac{1}{3}-+\cdots]\simeq\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}(-\frac{2}{3})$$

خُب، از نظر شما کدوم گزینه به $\frac{L}{4}$ نزدیک‌تره؟ همون جوابه (دقت کنین مقادیر هر دو سری یکسان بود، پس ما از هر سری، دو جمله‌ی اول رو حساب کرده و به عنوان تخمین مناسبی از مقدار سری جایگزین کردیم.)

مثال ۱۹: بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\cos^3 x$, $0<x<2\pi$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$
۲) $\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$
۳) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$
۴) $\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$

پاسخ : گزینه «۳» به ازای $x=\pi$، داریم: $\cos^3 x=-1$. تو گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی «۳» هستش که به ازای $x=\pi$ مقدارش برابر با ۱- میشه
البته برای داوطلبان آزمون ارشد، این سؤال یه تست بسیار ساده و معموليه، کافیه داوطلب فرمول دبیرستانی $\cos^3 x$ رو بدونه

مثال ۲۰: سری فوریه تابع تناوبی $0<|x|<\pi$ و $f(x)=\frac{x}{|x|}$ با دوره تناوب $p=2\pi$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots)$
۲) $\frac{\pi}{4}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots)$
۳) $\frac{4}{\pi}(\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x-+\cdots)$
۴) $\frac{\pi}{4}(\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x-+\cdots)$

پاسخ : گزینه «۱» به ازای $x=\frac{\pi}{2}$، مقدار تابع برابر با ۱ میشه، بنابراین گزینه‌ای جوابه که به ازای $x=\frac{\pi}{2}$، مقدارش برابر با ۱ (یا حداقل نزدیک به ۱) بشه:

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ به ازای (۱) مقدار گزینه} =\frac{4}{\pi}[\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2})+\text{مقداری مثبت و کوچک}]\simeq\frac{4}{\pi}[1-\frac{1}{3}]=\frac{4}{\pi}(\frac{2}{3})=\frac{8}{3\pi}\rightarrow \text{عددی نزدیک به ۱ میشه}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ به ازای (۲) مقدار گزینه} =\frac{\pi}{4}[\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2})+\text{مقداری مثبت و کوچک}]\simeq\frac{\pi}{4}[1-\frac{1}{3}]\simeq\frac{\pi}{4}(\frac{2}{3})=\frac{\pi}{6}\rightarrow \text{عددی نزدیک به ۰/۵ میشه}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ به ازای (۳) مقدار گزینه} =\frac{4}{\pi}[\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2})+\text{مقداری مثبت و کوچک}]\simeq\frac{4}{\pi}[1+\frac{1}{3}]=\frac{4}{\pi}(\frac{4}{3})=\frac{16}{3\pi}\rightarrow \text{عددی نزدیک به ۱/۵ میشه}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ به ازای (۴) مقدار گزینه} =\frac{\pi}{4}[\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2})+\text{مقداری مثبت و کوچک}]\simeq\frac{\pi}{4}[1+\frac{1}{3}]=\frac{\pi}{4}(\frac{4}{3})=\frac{\pi}{3}$$

در گزینه‌ی (۴) چون یک مقدار مثبت هم باید به $\frac{\pi}{3}$ اضافه بشه جواب از یک بزرگتر میشه. نزدیک‌ترین گزینه به عدد یک همان گزینه‌ی (۱) میشه

مثال ۲۱: سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

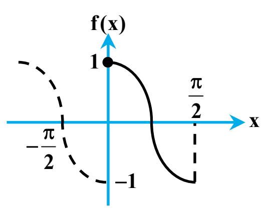
۱) $2\sin x+3\cos 2x$
۲) $2\sin x+3\sin 3x$
۳) $\sin x+\cos 2x$
۴) $\sin x+\sin 3x$

پاسخ : گزینه «۴» اگه تو ضابطه‌ی تابع به جای x عدد $\frac{\pi}{2}$ رو قرار بِدیم، مقدار تابع برابر با صفر میشه، حالا باید ببینیم تو گزینه‌ها کدوم وقتی به جای x هاشون $\frac{\pi}{2}$ قرار بِدیم، صفر میشن!؟ فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره.

مثال ۲۲: سری فوریه تابع $f(x)=\cos(2x)$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ چگونه است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) سینوسی
۲) کسینوسی
۳) سینوسی ـ کسینوسی
۴) سری فوریه ندارد

پاسخ : گزینه «۱» شکل تابع داده شده به صورت مقابلِ که تابعی فرد و با دوره تناوب $T=\frac{\pi}{2}$ هستش و سری فوریه آن سینوسی میشه. پس گزینه (۱) جوابه



مثال ۲۳: سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $(0,2\pi)$ به صورت $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ است، اگر سری فوریه $\int_0^x f(y)dy$ در همان بازه به صورت $\frac{A_0}{2}+\sum(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$ باشد، در این صورت B_n برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{a_n}{n}$
۲) $\frac{b_n}{n}$
۳) $\frac{1}{n}(a_n-a_0)$
۴) $\frac{1}{n}(b_n-a_n)$

پاسخ: گزینه «۳» وقتی از سری فوریه f انتگرال می‌گیریم، $\frac{a_0}{2}$ به $\frac{a_0x}{2}$ تبدیل میشه و این یعنی تو B_n، حتماً باید a_0 دخالت داشته باشه! (چون x خودش فردِ) فقط تو گزینه‌ی (۳) چنین شرایطی داریم (البته با توجه به این که B_n باید نسبت به n فرد باشه، گزینه‌های (۲) و (۴) از همون اول کنار میرن!)

مثال ۲۴: اگر سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $g(x)=x$، $0\le x\le L$، به صورت $x=\frac{L}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه $f(x)=px+q$، $0\le x\le L$ کدام است؟ (p و q ثابت حقیقی). (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

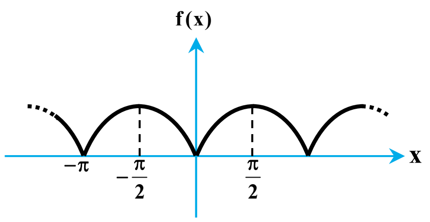
۱) $(\frac{pL}{2}+q)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$
۲) $(\frac{pL}{2}+q)-\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}+q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$
۳) $(\frac{pL}{2}+\frac{q}{2})-\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}-q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$
۴) $(\frac{pL}{2}+\frac{q}{2})-\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{4pL}{\pi^2(2m-1)^2}+q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه $q\in R$ بوده و تو قسمت مثلثاتی بسط فوریه شرکت نمی‌کنه و فقط بر جمله‌ی اول سری فوریه یعنی a_0 تأثیرگذاره، تو گزینه‌های داده شده، فقط گزینه‌ی «۱» از این قاعده پیروی کرده در واقع طبق مطالب کتاب گفتیم سری فوریه عدد، خود اون عدد میشه نه یه تابع مثلثاتی

مثال ۲۵: بسط کسینوسی تابع $\sin x$ در محدوده $0<x<\frac{\pi}{2}$ به کدام صورت است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(nx)$
۲) $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}n}{4n^2-1}\cos(2nx)$
۳) $\sin x=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(2nx)$
۴) تابع دارای بسط مذکور نمی‌باشد چون تابع فرد و بسط زوج است.

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنین دوره تناوب تابع $T=\pi$ هستش و اگه به صورت کسینوسی بسطش بِدیم، شکل مقابل رو داریم. مشخصه که مقدار متوسط تابع صفر نیست، پس فقط گزینه (۳) که مقدار متوسط اون (یعنی a_0) صفر نیست، می‌تونه جواب باشه البته به غیر از دونستن این هم شما میتونین بلافاصله با توجه به گزینه‌ها مقدار a_0 رو حساب کنین و به جواب برسین، چون گفتیم اگه مقدار a_0 تو گزینه‌ها متفاوت بود، یکی از روش‌های مناسب، بدست آوردن سریع a_0 هستش!



مثال ۲۶: سری فوریه تابع $f(x+4)=f(x)$، $f(x)=\begin{cases}0 & ;\ -2<x<-1\\ 1 & ;\ -1<x<1\\ 0 & ;\ 1<x<2\end{cases}$ به کدام شکل است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{3}+\cdots)$
۲) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{3}+\cdots)$
۳) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x+\cdots)$
۴) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x+\cdots)$

پاسخ: گزینه «۳» اولاً چون دوره تناوب تابع $T=4=2\times2$ داده شده، پس $L=2$ هستش و از اونجایی که فرم کسینوس‌ها باید به صورت $\cos(\frac{n\pi x}{L})$ باشه، پس کسینوس‌ها باید به صورت $\cos\frac{n\pi}{2}x$ باشن، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن! از طرفی به ازای $x=0$ مقدار تابع برابر با $\frac{1}{2}$ میشه، اما مقدار گزینه (۴) به ازای $x=0$، کمتر از $\frac{1}{2}$ میشه (چون از $\frac{1}{2}$ مقداری مثبت کم میشه)، پس فقط گزینه (۳) جوابه

مقدار گزینه (۴) به ازای $x=0$ $=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\underbrace{(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+-\cdots)}_{\text{مقداری مثبت}}<\frac{1}{2}$

مثال ۲۷: اگر $f(x)=\begin{cases} x & , \circ \le x \le \frac{L}{۳} \\ \frac{۱}{۲}(L-x) & , \frac{L}{۳}<x<L \end{cases}$ و $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ که در آن b_nها ضرایب ثابت‌اند، آنگاه این رابطه سری ایجاب می‌کند که کدامیک از روابط زیر صحیح باشند؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

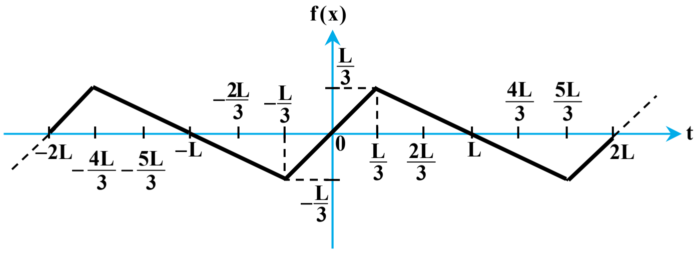
۱) $f(x)=\begin{cases} -x & , -\frac{L}{۳} \le x \le \circ \\ \frac{۱}{۲}(L+x) & , -L<x<-\frac{L}{۳} \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x & , -\frac{L}{۳} \le x \le \circ \\ \frac{۱}{۲}(L-x) & , -L<x<-\frac{L}{۳} \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}(L-x) & , L \le x \le \frac{۵L}{۳} \\ x & , \frac{۵L}{۳}<x \le ۲L \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}(L-x) & , L \le x \le \frac{۵L}{۳} \\ x-۲L & , \frac{۵L}{۳}<x \le ۲L \end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به اینکه بسط نیم‌دامنه سینوسی نوشته شده، بنابراین $f(x)$ رو باید به صورت تابعی فرد با دوره تناوب $T=۲L$ بنویسیم. اولاً $f(۲L)$ باید صفر باشه، پس گزینه (۳) غلطه! چون $f(۲L)$ تو این گزینه برابر با $۲L$ بدست میاد. همچنین $f(-L)=\circ$، پس گزینه (۲) هم غلطه، از طرفی $f(-\frac{L}{۳})=-\frac{L}{۳}$ بنابراین گزینه (۱) هم غلطه و می‌مونه گزینه (۴) که جواب سؤال همینه



مثال ۲۸: سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب f با یک دوره‌ی تناوب $f(x)=\begin{cases} ۱ & ; \frac{L}{۲} \le x \le \frac{۳L}{۲} \\ \circ & ; \circ \le x \le \frac{L}{۲}, \frac{۳L}{۲}<x<۲L \end{cases}$ عبارت است از: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۴)

۱) $\frac{۱}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^m}{(۲m-۱)\pi}\cos\frac{۲m-۱}{L}x$

۲) $\frac{۱}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{m+۲}}{(۲m-۱)\pi}\cos\frac{۲m-۱}{L}x+\sum_{m=۱}^{\infty}\sin\frac{۲m\pi}{L}x$

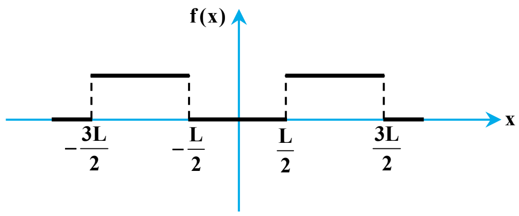
۳) $\frac{۱}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{m-۱}}{m}\sin\frac{۲m\pi}{L}x$

۴) $\frac{۱}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^m}{(۲m-۱)\pi}\cos\frac{(۲m-۱)\pi}{L}x$

پاسخ : گزینه «۴» شکل سری فوریه به صورت زیر:

(بین $\frac{L}{۲}$ تا $\frac{۳L}{۲}$ مقدارش برابر با یکِ و از صفر تا $\frac{L}{۲}$ و از $\frac{۳L}{۲}$ تا $۲L$ مقدارش صِفره!)

معلومه تابع زوجِ، پس گزینه‌های (۲) و (۳) غلطن، چون جمله‌ی سینوسی دارن، از طرفی چون دوره تناوب تابع $T=۲L$ هستش، پس جملات کسینوسی باید به صورت $\cos\frac{n\pi}{L}x$ نمایش داده بِشن، و این یعنی گزینه (۱) نمی‌تونه نمایش سری فوریه این تابع باشه، پس گزینه (۴) جوابه



مثال ۲۹: سری فوریه تابع $f(x)=|\sin x|$ اگر $\circ<x<۲\pi$ کدام است؟ (دکتری برق ـ سراسری ۷۲)

۱) $\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin nx}{۲n+۱}$

۲) $\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{۴n^۲-۱}$

۳) $\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos nx}{۲n-۱}$

۴) $\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲nx}{۴n^۲-۱}$

پاسخ : گزینه «۴» سؤال رو به دو روش پاسخ میدیم:

روش اول: می‌دونیم a_n باید نسبت به n زوج و b_n باید نسبت به n فرد باشه، اگه دقت کنین، می‌بینین که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) این شرایط رو ندارن، پس گزینه (۴) صحیح (خدا وکیلی سؤال از این ساده‌تر میشه طرح کرد!)

روش دوم: چون تابع زوجِ، پس فقط گزینه‌های (۳) و (۴) می‌تونن صحیح باشن! از طرفی می‌دونیم تابع $f(x)=|\sin x|$ تو $x=\circ$ که ریشه ساده داخل قدر مطلق هستش، مشتق‌ناپذیره، پس مشتق مرتبه **اول** تابع پیوسته نیست، بنابراین ضریب a_n حداقل با سرعت $\frac{۱}{n^۲}$ صفر میشه. پس فقط گزینه (۴) می‌تونه صحیح باشه البته از این که خود تابعِ $|\sin x|$ تو $x=\circ$ پیوسته هستش هم راحت می‌تونین بگین ضریب a_n حداقل با سرعت $\frac{۱}{n^۲}$ صفر میشه

(البته تو صفحات بعدی درس این قسمت رو دادم!)

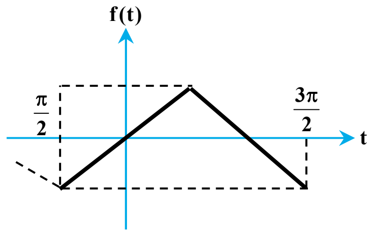
مثال۳۰: سری فوریه تابع زیر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۵)

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi t}{۴} & ;-\dfrac{\pi}{۲}\le t<\dfrac{\pi}{۲}\\[2mm] \dfrac{\pi(\pi-t)}{۴} & ;\dfrac{\pi}{۲}\le t<\dfrac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

۱) $\sum\limits_{n=۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}-\dfrac{۱}{n^۲}\sin(nt)$
۲) $\sum\limits_{n=۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}-\dfrac{۱}{n\pi}\sin(nt)$
۳) $\sum\limits_{n=۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}\dfrac{۱}{n^۲}\sin(nt)$
۴) $\sum\limits_{n=۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}\dfrac{-(-۱)^{\frac{n+۱}{۲}}}{n^۲}\sin(nt)$

پاسخ : گزینه «۴» نمودار تابع $f(t)$ رو رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل که می‌تونیم اونو یه جوراِیی شبیه به $\sin t$ بدونیم، علامت اولین سینوس باید مثبت باشه، پس یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) درسته! (بدون رسم نمودار f، از گزینه‌ها معلومه که f فرد هستش؛ حالا در $t=۰^+$ از ضابطه‌ی $f(t)=\frac{\pi t}{۴}$، معلومه که مقدار f مثبته؛ پس اولین ضریب $\sin$ باید مثبت باشه.)



از طرفی چون b_n باید نسبت به n فرد باشه، بنابراین گزینه (۳) غلطه! (چون b_n اون نسبت به n زوجِ) پس گزینه (۴) جوابه البته یه روش دیگه هم اینِ که از همون اول بگیم؛ چون b_n تو گزینه‌های (۱) و (۳) زوج داده شده، پس این گزینه‌ها غلطن و چون تابع پیوسته هستش، بنابراین b_nها با سرعت $\frac{۱}{n^۲}$ به سمت صفر میل می‌کنن، پس گزینه (۲) غلطه و گزینه (۴) جوابه

مثال۳۱: مطلوب است بسط $f(x)=x^۲$ ، $۰<x<۲\pi$ بر حسب یک سری فوریه با دوره‌ی تناوب ۲π. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(x)=\dfrac{۴\pi^۲}{۳}+\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(\dfrac{۴}{n^۲}\cos nx+\dfrac{۴\pi}{n}\sin nx)$
۲) $f(x)=\dfrac{۴\pi^۲}{۳}+\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(\dfrac{۴}{n^۳}\cos nx+\dfrac{۴\pi}{n^۲}\sin nx)$
۳) $f(x)=\dfrac{۴\pi^۲}{۳}+\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(\dfrac{۴}{n^۲}\cos nx-\dfrac{۴\pi}{n}\sin nx)$
۴) $f(x)=\dfrac{۴\pi^۲}{۳}+\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(\dfrac{۴}{n^۳}\cos nx-\dfrac{۴\pi}{n}\sin nx)$

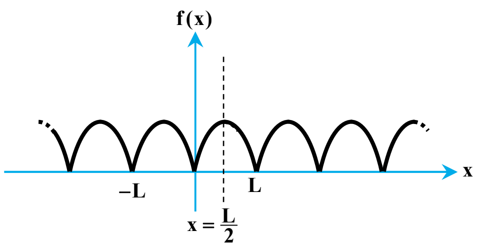
پاسخ : گزینه «۳» اولاً a_n باید نسبت به n زوج باشه، پس همین‌جا گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن و باید مرخص شَن! خُب حالا باید از بین گزینه‌های (۱) و (۳) یکی رو انتخاب کنیم. مقدار $a_۰$ که برای هر دو سری برابر با $\frac{۴\pi^۲}{۳}$ داده شده، پس باید نگاهمون به داخل سری‌ها باشه!

اینجاست که نکته‌ی شبیه بودن به $-\sin x$ به کارمون میاد، نمودار $f(x)=x^۲$ تو بازه ۰ تا ۲π، شبیه $-\sin x$ هستش، (دقت کنید که تقعرِ $x^۲$ به سمت بالاست. تقعر $\sin x$ به سمت پایینه، پس $x^۲$ و $-\sin x$ از این نظر مثل هَم هستن!) بنابراین ضریب اولین هارمونیک سینوسی باید منفی باشه، به نظر شما تو کدوم گزینه ضریب اولین هارمونیک سینوسی منفی داده شده!؟ معلومه گزینه (۳)

مثال۳۲: سری فوریه کسینوسی نیم دامنه‌ی تابع $f(x)=x(L-x)\ ,\ ۰\le x\le L$ ، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۲)

۱) $\dfrac{L^۲}{۴}+\sum\limits_{m=۱}^{\infty}\dfrac{۴L^۲}{۴(m\pi)^۲}\cos\dfrac{۲m\pi x}{L}$
۲) $\dfrac{L^۲}{۳}-\sum\limits_{m=۱}^{\infty}\dfrac{L^۲}{۴(m\pi)^۲}\cos\dfrac{۲m\pi x}{L}$
۳) $\dfrac{L^۲}{۶}-\sum\limits_{m=۱}^{\infty}\dfrac{۴L^۲}{۴(m\pi)^۲}\cos\dfrac{۲m\pi x}{L}$
۴) $\dfrac{L^۲}{۶}-\sum\limits_{m=۱}^{\infty}\dfrac{۴L^۲}{(۲m-۱)^۲\pi^۲}\cos\dfrac{(۲m-۱)\pi x}{L}$

پاسخ : گزینه «۳» سؤال رو به دو روش حل می‌کنیم:



روش تستی اول: خُب سه تا از گزینه‌ها میگن؛ تابع فقط دارای هارمونیک‌های زوج و یکی از گزینه‌ها (یعنی گزینه ۴) میگه تابع فقط دارای هارمونیک‌های فردِ. اول شکل تابع رو رسم می‌کنیم، همون‌طور که می‌بینین اگه خط $x=\frac{L}{۲}$ رو رسم کنیم، می‌بینیم که قسمتی از نمودار که تو نیم‌پریود ۰ تا L قرار داره، نسبت به این خط تقارن **زوج** داره و چون خود تابع هم **زوجِ**، پس قطعاً فقط هارمونیک‌های **زوج** خواهیم داشت، (زوج = زوج × زوج) پس گزینه (۴) غلطه!

برای انتخاب گزینه‌ی صحیح چون $a_۰$ تو همشون فرق میکنه، بهتره $a_۰$ رو حساب کنیم که معلوم میشه، گزینه (۳) جوابه

روش محاسبه برای اثبات نداشتن هارمونیک فرد: می‌تونیم از روش محاسبه بدون رسم شکل بِریم:

$$\begin{cases} f(\frac{L}{2}-x)=(\frac{L}{2}-x)[L-(\frac{L}{2}-x)]=(\frac{L}{2}-x)(\frac{L}{2}+x) \\ f(\frac{L}{2}+x)=(\frac{L}{2}+x)[L-(\frac{L}{2}+x)]=(\frac{L}{2}+x)(\frac{L}{2}-x) \end{cases} \Rightarrow f(\frac{L}{2}-x)=f(\frac{L}{2}+x) \Rightarrow$$ سری فوریه فقط شامل هارمونیک‌های زوجِ

روش تستی دوم: دانشجوی باهوش می‌تونه بعد از محاسبه‌ی a_0 و مشخص شدن این که یکی از گزینه‌های ۳ و ۴ جوابه، به صورت زیر به جواب برسه:

بر اساس قضیه دیریکله مقدار سری فوریه تابع تو $x=0$ برابر با صفر میشه، چون داریم: $f(x)=x(L-x) \Rightarrow f(0)=0$

حالا تو گزینه‌های (۳) و (۴) به جای x، عدد صفر رو قرار میدیم، هر کدوم صفر شد، جوابه:

$$\text{مقدار سری گزینه (۳) به ازای } x=0 = \frac{L^2}{6}-\frac{L^2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} \xrightarrow{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}} \text{مقدار سری گزینه (۳) به ازای } x=0 = \frac{L^2}{6}-\frac{L^2}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{L^2}{6}-\frac{L^2}{6}=0$$

پس گزینه (۳) جواب سؤاله!

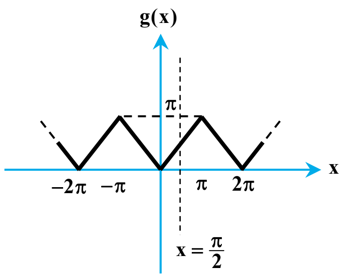
نکته: پیشنهاد می‌کنم، حاصل دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ رو حفظ باشین، چون هم حاصل اونا بارها بـه صـورت مسـتقیم مـورد سـؤال بـوده و هـم ازشون توی حل سؤالات مختلف استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

مثال ۳۳: هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد و $f(x)=x+\cos 2x$ به ازای $\pi \ge x \ge 0$، آنگاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ ضریب $\cos 2x$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $1-\frac{1}{2\pi}$ ۴) $1+\frac{1}{2\pi}$

پاسخ : گزینه «۲» نمودار تابع $g(x)=x$ رو تو بازه‌ی $0 \le x \le \pi$ رسـم مـی‌کنـیم و در دوره تنـاوب $T=2\pi$ گسترش زوج میدیم، (گسترش زوج به این خاطر که تو صورت سؤال گفتـه شـده $f(x)$ تـابعی زوجِ و چـون $\cos 2x$ زوجِ، حتماً باید $g(x)=x$ هم زوج گسترش داده بشه) و همونطور که می‌بینین یه تابع داریـم کـه بسط فوریـه اون فقط شامل هارمونیک‌های فرد کسینوسی میشه، (اگه خط $x=\frac{L}{2}=\frac{\pi}{2}$ رو رسم کنیم، می‌بینـیم؛ قسـمتی از نمـودار که تو فاصله‌ی ۰ تا π قـرار داره، نسـبت بـه خـط $x=\frac{\pi}{2}$ تقارن **فـرد** داره، چـون تـابع خـودش **زوج**، پـس فقـط هارمونیک‌های **فرد** رو داریم!) و این یعنی تو بسط $g(x)=x$ خبری از جمله‌ی $\cos 2x$ نیست و نتیجه این که ضریب $\cos 2x$ تو بسط « $x+\cos 2x$ » برابر با ۱ هستش. (یعنی ضریب همون $\cos 2x$ که از اول داشتیم)



مثال ۳۴: ضرایب سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x<0 \\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$ کدامند؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

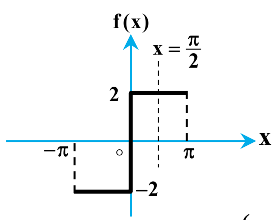
۱) $a_n=b_n=\frac{8}{n\pi}$ به ازای هر n

۲) $a_n=0$, $b_n=\frac{8}{n\pi}$ به ازای هر n

۳) $a_n=\frac{2n}{\pi}$, $b_n=0$ به ازای هر n

۴) $a_n=0$ به ازای هر $n \ge 0$ و $b_n=\begin{cases}\frac{8}{n\pi} ; & \text{n فرد} \\ 0 ; & \text{n زوج}\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» اگه نمودار تابع رو رسم کنیم، کاملاً مشخصه کـه تـابع $f(x)$ **فـرد**ِ، پـس $a_n=0$ میشه، این یعنی یکی از گزینه‌های (۲) و (۴) جوابه! و چون تقارن نیم‌موج داریم و نمـودار تـابع تـو قسـمت ۰ تا π، نسبت به خط $x=\frac{\pi}{2}$ تقارن **زوج** داره، بنابراین باید فقط هارمونیـک‌هـای **فـرد** رو داشـته باشـیم (فرد = زوج × فرد)، پس گزینه (۲) هم غلطه و گزینه (۴) جوابه



البته اگه بخوایم از روش محاسبه، داشتن تقارن نیم‌موج رو تشخیص بِدیم، مثلاً از روی ضابطه‌ی اول داریم: $(-\pi<x<0)$

$$f(\frac{L}{2}-x)=f(\frac{\pi}{2}-x)=-2 \quad , \quad f(\frac{L}{2}+x)=f(\frac{\pi}{2}+x)=-2$$

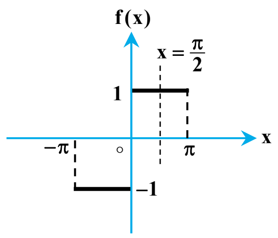
چون $f(\frac{L}{2}-x)=f(\frac{L}{2}+x)$، و خود تابع فردِ، پس تابع فقط شامل هارمونیک‌های فردِ.

مثال ۳۵: مطلوب است بسط $f(x)=\begin{cases}-۱ & ; -\pi<x<۰\\ ۱ & ; ۰<x<\pi\end{cases}$ بر حسب یک سری سینوسی فوریه.

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰ و مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$ ۲) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{n}$ ۳) $f(x)=\frac{-۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{n}$ ۴) $f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{n-۱}$

پاسخ : گزینه «۱» اول شکل اصلی تابع رو رسم می‌کنیم:



همون‌طور که می‌بینین؛ وقتی خط $x=\frac{\pi}{۲}$ رو رسم می‌کنیم، اون قسمتی از نمودار که تو فاصله‌ی ۰ تا π قرار داره، نسبت به خط $x=\frac{\pi}{۲}$ تقارن **زوج** داره و چون خود تابع **فرد**ِ، پس باید فقط هارمونیک‌های **فرد** رو داشته باشیم! (فرد = زوج × فرد)

روش تستی‌تر: اگه تو ضابطه‌ی تابع $x=\frac{\pi}{۲}$ قرار بدیم، اونوقت مقدار تابع برابر با ۱ میشه، حالا اگه تو گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) به جای x ها، عدد $\frac{\pi}{۲}$ رو قرار بدیم، مقدار هر سه گزینه برابر با صفر میشه، پس هر سه به اتفاق هم غلطن

مثال ۳۶: سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}۰ & , -\pi\le x<۰\\ ۱ & , ۰\le x\le\pi\end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۲}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲kx}{۲k}$ ۲) $\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲\sin(۲k+۱)x}{\pi(۲k+۱)}$

۳) $\frac{\pi}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{k}\sin kx$ ۴) $\sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲k+۱}\sin(۲k+۱)x+\frac{۱}{k}\cos kx)$

پاسخ : گزینه «۲» خُب می‌دونیم a_k ها باید نسبت به k زوج باشن، پس گزینه‌های (۱) و (۴) هر دوتاشون غلطن! از طرفی با رسم نمودار تابع یا از روش محاسبه، معلوم میشه که فقط باید هارمونیک‌های فرد وجود داشته باشه، بنابراین گزینه (۳) هم غلطه و گزینه (۲) جوابه

البته تابع دارای تقارن مخفیه، اگه $f(x)$ رو مثلاً به اندازه‌ی $\frac{۱}{۲}$ پایین بیاریم، اونوقت تابعی فرد داریم که $a_۰$ اون صفرِ! و بعد راحت می‌تونیم شکل رو رسم کنیم و یا از فرمول استفاده کنیم، در واقع ضابطه‌ی تابع این میشه؛ $f(x)-\frac{۱}{۲}=\begin{cases}-\frac{۱}{۲} & ; -\pi\le x<۰\\ \frac{۱}{۲} & ; ۰\le x\le\pi\end{cases}$.

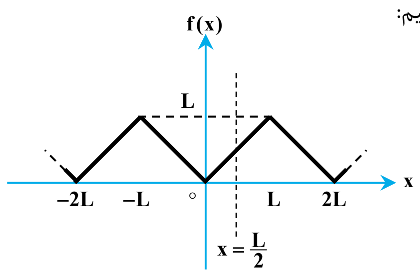
مثال ۳۷: در سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}x & , ۰\le x\le L\\ ۲L-x & , L<x\le ۲L\end{cases}$ ، با دوره‌ی تناوب ۲L، یعنی: $f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}]$، داریم:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳ و مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $a_k=۰$ که در آن $k=۰,۱,۲,۳,۴,...$ ۲) $a_{۲k}=۰$ و $b_n=۰$ به ازای $n\in N$ و k

۳) $a_{۲k-۱}=۰$ و $b_n=۰$ به ازای $n\in N$ و k ۴) $b_n=۰$ و $a_k\ne۰$ به ازای هر $n\in N$ و هر $k=۰,۱,۲,۳,۴,...$

پاسخ : گزینه «۲» همون‌طور که گفتیم؛ کاری که اول باید بکنیم اینه که شکل سری فوریه رو رسم کنیم:



کاملاً مشخصه تابع زوجِ، بنابراین حتماً $b_n=۰$ و فقط a_k خواهیم داشت، حالا باید ببینیم کدوم a_k ها هستن که صفرن؟ دوره تناوب تابع که $T=۲L$ داده شده، خُب همون‌طور که می‌بینین؛ اگه خط $x=\frac{L}{۲}$ رو رسم کنیم، اون قسمت از نمودار که تو قسمت ۰ تا L قرار داره نسبت به این خط تقارن **فرد** داره، و چون خود تابع **زوج**ِ، پس فقط هارمونیک‌های **فرد** وجود دارن! (فرد = فرد × زوج) بنابراین گزینه (۲) جواب درسته

مثال ۳۸: سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x & ، -\pi\le x<0\\ \frac{\pi}{2}-x & ، 0\le x<\pi\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

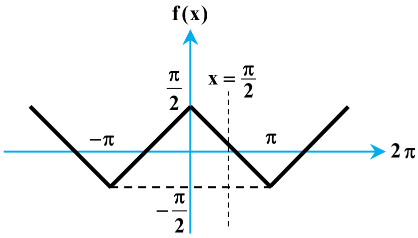
۱) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx$

۲) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[(-1)^{n+1}+1]\cos nx$

۳) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\sin nx$

۴) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[\sin nx+(-1)^n\cos nx]$

پاسخ : گزینه «۲» اول به شکل نمودار تابع $f(x)$ توجه کنین. سری فوریه $f(x)$ باید به صورت کسینوسی باشه، چون f **زوجِ**، پس یکی از گزینه‌های (۱) و (۲) جوابه! از طرفی چون f تقارن نیم‌موج داره، (وقتی که خط $x=\frac{\pi}{2}$ رو رسم می‌کنیم، اون قسمت از نمودار که تو فاصله‌ی ۰ تا π قرار داره، نسبت به این خط تقارن **فرد** داره، بنابراین فقط باید هارمونیک‌های **فرد** رو داشته باشه، معلومه گزینه (۱) نمی‌تونه جواب باشه، چون تمام هارمونیک‌ها رو داره. اما گزینه (۲) فقط هارمونیک‌های فرد رو داره. (اگه به ازای n ها اعداد زوج رو قرار بِدیم عبارت $[(-1)^{n+1}+1]$ صفر میشه و بنابراین هارمونیک‌های زوج حذف میشن، پس گزینه (۲) جوابه



روش دوم برای تشخیص گزینه‌ی صحیح از بین گزینه‌های (۱) و (۲): به ازای $x=\frac{\pi}{2}$، $f(x)=0$ میشه، حالا تو گزینه‌های (۱) و (۲) به جای x عدد $\frac{\pi}{2}$ رو قرار میدیم، هر کدوم برابر با صفر شد، جواب سؤاله:

$$x=\frac{\pi}{2}\ \text{مقدار گزینه (۱) به ازای}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\text{اگه } n \text{ زوج باشه، صفر نمیشه}\\ \text{اگه } n \text{ فرد باشه، } \cos\frac{n\pi}{2} \text{ صفر میشه}\end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{2}\ \text{مقدار گزینه (۲) به ازای}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2}]\cos\frac{n\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\text{اگه } n \text{ زوج باشه، داخل کروشه صفر میشه}\\ \text{اگه } n \text{ فرد باشه، } \cos\frac{n\pi}{2} \text{ صفر میشه}\end{cases}$$

همون‌طور که می‌بینین تو گزینه (۲) در هر حالت برای n، صفر میشه، پس جوابه

مثال ۳۹: در بسط فوریه تابع $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi t}{3})+b_n\sin(\frac{n\pi t}{3})$ اگر در یک پریود (دوره تناوب)

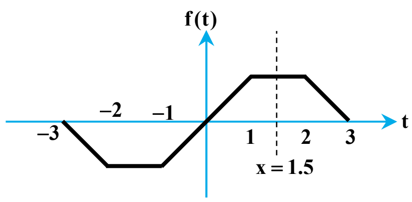
$$f(t)=\begin{cases}-t-3 & ;\ -3\le t\le -2\\ -1 & ;\ -2\le t\le -1\\ t & ;\ -1\le x\le 1\\ 1 & ;\ 1\le t\le 2\\ -t+3 & ;\ 2\le t\le 3\end{cases}$$

باشد، آن‌گاه ضرایب غیر صفر فقط عبارتند از: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)

۱) a_n و n فرد
۲) a_n و n زوج
۳) b_n و n زوج
۴) b_n و n فرد

پاسخ : گزینه «۴» اول نمودار تابع رو رسم می‌کنیم:

خُب تابع $f(t)$، یه تابع فردِ، پس a_n و a_0 اون صفر می‌شن! و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن! دوره تناوب تابع $T=2\times3=6$ هستش و این یعنی $L=3$ و بنابراین $x=\frac{L}{2}=1/5$، حالا همون‌طور که می‌بینین؛ قسمتی از نمودار که تو نیم‌پریود (۰ تا ۳) قرار داره، نسبت به خط $x=1/5$ تقارن زوج داره و خودِ تابع هم فردِ و ... این یعنی تابع فقط شامل هارمونیک‌های فرد سینوسیه، پس گزینه (۴) جوابه

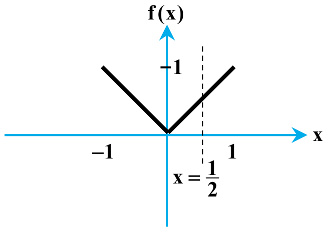


مثال۴۰: حاصل کدام‌یک از سری‌های زیر را می‌توان از بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ در فاصله‌ی $(-1,1)$ به دست آورد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۶)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» اول نمودار تابع $f(x)=|x|$ رو رسم می‌کنیم:



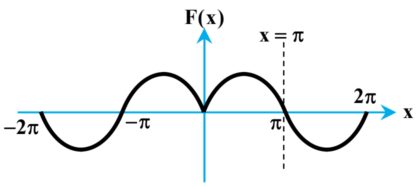
تو این تست $\frac{L}{2}=\frac{1}{2}$ هستش، اگه خط $x=\frac{1}{2}$ رو رسم کنیم، اونوقت میشه دید که؛ اون قسمت از نمودار که تو نیم‌پریود ۰ تا ۱ قرار داره، نسبت به این خط تقارن **فرد** داره و چون خود تابع **زوج** پس فقط هارمونیک‌های **فرد** باید وجود داشته باشه (فرد = فرد × زوج) پس گزینه (۱) جوابه

مثال۴۱: هرگاه $F(x)=\begin{cases}\sin x &, 0<x<2\pi\\ -\sin x &, -2\pi<x<0\end{cases}$ و $F(x+4\pi)=F(x)$ در سری فوریه‌ی $F(x)$ فقط ضرایب جملات زیر ممکن است غیرصفر باشند.

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۱)

۱) زوج کسینوسی   ۲) فرد کسینوسی   ۳) زوج سینوسی   ۴) فرد سینوسی

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» نمودار سری فوریه تابع به صورت زیر:



همون‌طور که تو نمودار مشخص شده تابع زوجِ، پس فقط جملات کسینوسی رو داره (یعنی جملات سینوسی رو نداره)، اما برای تعیین این که جملات کسینوسی زوج یا جملات کسینوسی فرد رو داره؟ باید از تقارن نیم‌موج استفاده کنیم. دوره تناوب $T=4\pi$، داده شده و $\frac{L}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$، همون‌طور که می‌بینین اون قسمت از نمودار تابع F که تو فاصله‌ی ۰ تا 2π قرار داره نسبت به خط $x=\pi$ تقارن **فرد** داره و چون خود تابع هم **زوجِ**، بنابراین فقط هارمونیک‌های فرد وجود دارن! (فرد = فرد × زوج) پس گزینه (۲) جوابه

مثال۴۲: اگر بسط به سری کسینوسی فوریه $f(x)=x$, $0<x<\pi$ به صورت $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots)$ باشد، بسط به سری فوریه سینوسی $g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{8}$, $0<x<\pi$ برابر است با:

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{(2n)^3}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^3}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» اگه در طرفین رابطه‌ی $g(x)$، به جای x، عدد $\frac{\pi}{2}$ رو قرار بدیم، داریم: $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(\pi-\frac{\pi}{2})\frac{\pi}{8}$، بدون این که نیاز به محاسبه باشه، معلومه این مقدار صفر نیست. حالا تو گزینه‌ها اگه به جای x عدد $\frac{\pi}{2}$ رو قرار بدیم، معلومه که گزینه‌های (۱) و (۳) صفر می‌شَن، این یعنی اونا نمی‌تونن جواب باشن از بین دو تا گزینه‌ی (۲) و (۴) کافیه ببینین گزینه (۲) هارمونیک فرد $\sin(1\times x)$ رو نداره، پس گزینه (۲) جواب نیست (اولین جمله‌ی اون $\frac{\sin 3x}{3^3}$ هستش) پس گزینه (۴) جوابه

مثال۴۳: در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x^2$، $-L\le x\le L$، به صورت $\frac{1}{3}L^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $\frac{x}{3}(\frac{x^2}{L^2}-1)$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{\pi n^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$ ۲) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$ ۳) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{L}$ ۴) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون تابع x^2 پیوسته هستش، انتگرال اون (یعنی $\frac{x^3}{3}$) یه تابع هموارِ و سرعت همگرایی اون از درجه $\frac{C}{n^3}$ هستش، پس فقط گزینه (۱) این شرایط رو داره

مثال ۴۴: اگر سری فوریه تابع $f(x)=2x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ برابر با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$ باشد، سری فوریه تابع $g(x)=x^2-\pi^2$ کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}[\cos(nx)-(-1)^n]$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}[\sin(nx)-(-1)^n]$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n}[\cos(nx)+(-1)^n]$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n}[\sin(nx)+(-1)^n]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به اینکه تابع $g(x)$ تابعی زوج، پس سری فوریه مربوط به اون کسینوسیه، خُب همین‌جا با گزینه‌های (۲) و (۴) خداحافظی می‌کنیم! و از اونجایی که مشتق $g(x)$ برابر با تابع $f(x)$ میشه، بنابراین حتماً سرعت همگرایی اون به صورت $\frac{C}{n^2}$ میشه، پس فقط گزینه «۱» میتونه صحیح باشه

روش تستی‌تر: به ازای $x=\pi$، حاصل $g(x)$ برابر با صفر میشه، حالا باید ببینیم تو کدوم گزینه اگه به جای xها، عدد π رو قرار بِدیم، حاصل صفر میشه!؟ معلومه! فقط گزینه (۱) چنین شرایطی داره (می‌دونیم $(\cos n\pi=(-1)^n$)

مثال ۴۵: سری فوریه تابع فرد $\begin{cases} f(x)=x \\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$ بر فاصله $[-2,2]$ عبارت است از:

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}$

۲) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

۳) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$

۴) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos\frac{n\pi x}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» تابع فردِ، پس‌گزینه‌های (۲) و (۴) نمی‌تونن صحیح باشن و چون خود تابع ناپیوسته هستش، پس سرعت همگرایی باید مثل $\frac{C}{n}$ باشه، بنابراین گزینه (۳) جوابه

مثال ۴۶: در معادله‌ی انتگرالی $\int_0^{\infty}f(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda=\begin{cases}\cos x & ;\ 0<x<\pi \\ 0 & ;\ x>\pi\end{cases}$، تابع $f(\lambda)$ کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{2\lambda}{\pi(\lambda^2-1)}(1-\cos\lambda\pi)$

۲) $\frac{2}{\pi(\lambda^2-1)}(1+\cos\lambda\pi)$

۳) $\frac{2\lambda}{\pi(\lambda^2-1)}(1+\cos\lambda\pi)$

۴) $\frac{2}{\pi(\lambda^2-1)}(1-\cos\lambda\pi)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به صورت سؤال $f(\lambda)$ ضریب انتگرال فوریه سینوسی تابع است. بنابراین باید نسبت به λ فرد باشه. (دقت کنین اینجا $f(\lambda)$ همون $B(\omega)$ خودمونه!) پس همین‌جا با گزینه‌های (۲) و (۴) خداحافظی می‌کنیم! چون نسبت به λ زوجن. خُب حالا چه جوری از بین گزینه‌های (۱) و (۳) یکی رو انتخاب کنیم!؟ باید یه ذره از اطلاعات ریاضی عمومی خودمون کمک بگیریم! دقت کنین؛ به ازای $\lambda=1$ مخرج هر دو تا کسر صفر میشه، اگه قرار باشه صورت کسر هم به ازای $\lambda=1$ صفر نشه، اونوقت انتگرال فوریه ناپیوسته میشه، بنابراین گزینه‌ای جوابه که به ازای $\lambda=1$ صورت اون هم صفر بِشه، به همین راحتی گزینه (۱) هم از بین گزینه‌ها حذف و گزینه (۳) جواب قطعی میشه

مثال ۴۷: اگر تبدیل فوریه تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر و تکه‌ای هموار $f(x)$ به صورت $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ باشد، تبدیل عکس فوریه $F(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$، یعنی $f(x)$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۳)

۱) e^x

۲) e^{-x}

۳) $e^{-|x|}$

۴) $\cosh x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون تابع $f(x)$ مطلقاً انتگرال‌پذیره، پس حد $f(x)$ وقتی $x\to\pm\infty$، باید کراندار باشه. با همین شرط، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) مرخص میشن و گزینه (۳) جوابه (دقت کنین تو گزینه (۲)، مقدار $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}$ کراندار نیست، برای گزینه (۱) هم $\lim_{x\to+\infty}e^x$ این وضعیتو داره، و گزینه (۴) هم که برابر با $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ هستش، تو $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ حدش بی‌نهایت میشه.)

مثال ۴۸: مقدار انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; |x|<1\\ 0 & ; |x|>1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به اینکه $x=-1$ نقطه ناپیوستگی تابع هستش، پس طبق قضیه مقدار اون برابر با عدد زیر:

$$\text{مقدار تابع در } x=-1 = \frac{\text{حد راست تابع } f + \text{حد چپ تابع } f}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

پس گزینه (۱) جوابه

مثال ۴۹: اگر تبدیل فوریه تابع $f(t)=\frac{t}{t^2+a^2}$ ($a>0$ ثابت) به صورت $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f(t)dt$ $(\omega\in R)$ تعریف شود آنگاه $F(\omega)$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\pi i e^{-\omega a}$ ۲) $\pi i e^{-\omega a}$ ۳) $2\pi i e^{-\omega a}$ ۴) $\begin{cases}-\pi i e^{-\omega a} & , \omega>0\\ \pi i e^{\omega a} & , \omega<0\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» چون تابع $f(t)$ حقیقی و فردِ، پس $F(\omega)$ باید فرد و موهومی باشه، فقط گزینه چهارِ که چنین شرایطی رو داره (بقیه گزینه‌ها نسبت به ω فرد نیستن)

مثال ۵۰: انتگرال فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}1 & ; -1<t<1\\ 0 & ; t>1, t<-1\end{cases}$ عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega)\sin(\omega t)}{\omega}d\omega$ ۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}[\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega+\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\sin(\omega t)}{\omega}d\omega]$ ۴) $\frac{2}{\pi}[\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega+\int_0^{\infty}\frac{\cos^2\omega\sin(\omega t)}{\omega}d\omega]$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که باید $B(\omega)=0$ باشه، چون تابع $f(t)$ زوجِ، پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) همگی به اتفاق هم غلطن می‌مونه گزینه (۲) که با داشتن $A(\omega)=\frac{2}{\pi}(\frac{\sin\omega}{\omega})$ می‌تونه جواب این تست باشه

مثال ۵۱: در معادله انتگرالی $\int_0^{\infty}f(\omega)\sin\omega x d\omega=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$، تابع $f(\omega)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{2}{\pi(\omega^2-1)}(1+\cos\omega\pi)$ ۲) $\frac{2\omega}{\pi(\omega^2-1)}(1+\cos\omega\pi)$ ۳) $\frac{2}{\pi(\omega^2-1)}(1-\cos\omega\pi)$ ۴) $\frac{2\omega}{\pi(\omega^2-1)}(1-\cos\omega\pi)$

پاسخ : گزینه «۲» اولاً گزینه‌های (۳) و (۴) نمی‌تونَن صحیح باشن، چون به ازای $\omega=1$، مخرج صفر میشه. اگه قرار باشه صورت کسرها هم صفر نَشه، اونوقت رفع ابهام صورت نمی‌گیره، پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) جوابه. از طرفی $f(\omega)$ باید فرد باشه، خُب پس فقط گزینه (۲) می‌تونه جواب باشه

مثال ۵۲: انتگرال فوریه تابع e^{-x^2} کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4}}e^{-i\omega x}d\omega$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{-i\omega x}}{1+\omega^2}d\omega$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\omega^2}}{\omega^2}e^{-i\omega x}xd\omega$ ۴) انتگرال فوریه ندارد.

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به اینکه e^{-x^2} انتگرال‌پذیر مطلقِ، پس می‌تونه دارای انتگرال فوریه باشه، پس گزینه (۴) غلطه، و چون تابع زوجِ، انتگرال فوریه اونم باید زوج باشه، پس گزینه (۲) هم غلطه!

یادتون باشه انتگرال فوریه تابع e^{-x^2} همیشه بر خود تابع منطبقه، یعنی فرم انتگرال فوریه اون باید به صورت $e^{-k\omega^2}$ باشه پس فقط گزینه «۱» می‌تونه صحیح باشه

مثال ۵۳: تبدیل فوریه e^{-x^2} برابر است با: $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$. تبدیل فوریه تابع $f(x)=xe^{-x^2}$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}}$　　۲) $-\frac{\omega}{2}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$　　۳) $\frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$　　۴) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}i\omega e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

پاسخ : گزینه «۴» چون $f(x)$ خودش یه تابع فرد و حقیقیه پس تبدیل فوریه اون، یه تابع فرد و موهومی میشه، بنابراین فقط گزینه (۴) می‌تونه جواب این سؤال باشه

مثال ۵۴: انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & ;\ x<\pi\\ -\sin x & ;\ x\ge\pi\end{cases}$ کدام مورد است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\cos x}{1+\omega^2}dx$　　۲) $f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos\omega x+\sin\omega x}{1+\omega^2}dx$

۳) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}dx$　　۴) $f(x)$ انتگرال فوریه ندارد.

پاسخ : گزینه «۴» یادتونه تو درسنامه گفتیم، واسه اینکه تابع $f(x)$ انتگرال فوریه داشته باشه، باید $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ موجود باشه؟ ولی توی این مثال می‌بینیم که مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}|-\sin x|dx$ معین نیست، پس گزینه (۴) جوابه از طرفی این نکته رو لازمه بگیم که بدون دونستن این قضیه هم با توجه به اینکه تو گزینه‌های دیگه زیر انتگرال به جای $d\omega$ عبارت dx قرار داده شده، می‌تونیم به اشتباه بودن اونا پی ببریم.

مدرسان شریف

فصل ششم

« معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی »

درسنامه۱: مسائل اشتروم ـ لیوویل و روش تفکیک متغیرها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مثال۱: در مسأله مقدار مرزی $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ \lambda>0 \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$، مقادیر ویژه (λ_n) در کدام معادله صدق می‌کنند؟ $(n=1,2,3,\cdots)$

۱) $tg\sqrt{\lambda_n}=\sqrt{\lambda_n}$　　۲) $cotg\sqrt{\lambda_n}=\sqrt{\lambda_n}$　　۳) $tg\sqrt{\lambda_n}=-\sqrt{\lambda_n}$　　۴) $cotg\sqrt{\lambda_n}=-\sqrt{\lambda_n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حل معادله‌ی $y''+\lambda y=0$ $(\lambda>0)$ را با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی آن آغاز می‌کنیم:

$$r^2+\lambda=0 \Rightarrow r=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow y=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x$$

بنابراین: $y'=-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$. اکنون شرایط مرزی را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y(0)-y'(0)=a-b\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow a=b\sqrt{\lambda} \\ y'(1)=-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0 \end{cases}$$

با جایگذاری $b\sqrt{\lambda}=a$ از معادله‌ی اول در معادله‌ی دوم خواهیم داشت:

$$-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+a\cos\sqrt{\lambda}=a(-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+\cos\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}=\cos\sqrt{\lambda} \Rightarrow \sqrt{\lambda}=cotg(\sqrt{\lambda})$$

پس مقادیر ویژه‌ی این معادله در تساوی $cotg(\sqrt{\lambda_n})=\sqrt{\lambda_n}$ صدق می‌کنند.

مثال۲: معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi=0$، $\lambda>0$ و $0<x<\pi$، با شرایط مرزی $\varphi'(0)=0$ و $\varphi(0)+\varphi(\pi)=0$ مفروض است. مقادیر ویژه توابع آن عبارت است از: $(n=1,2,3,\ldots)$

۱) $\sqrt{\lambda}=n\pi \ , \ \cos\sqrt{\lambda}x$　　۲) $\sqrt{\lambda}=n \ , \ \cos\sqrt{\lambda}x$　　۳) $\sqrt{\lambda}=(2n-1)\pi \ , \ \cos\sqrt{\lambda}x$　　۴) $\sqrt{\lambda}=2n-1 \ , \ \cos\sqrt{\lambda}x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در خودِ سؤال مشخص شده $\lambda>0$ است و برای مقادیر مثبت λ به راحتی با حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت، داریم:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi=0 \Rightarrow \varphi(x)=k_1\cos\sqrt{\lambda}x+k_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$\varphi'(0)=0 \Rightarrow k_2=0 \Rightarrow \varphi(x)=k_1\cos\sqrt{\lambda}x$$

با جایگذاری $\varphi(x)$ در رابطه $\varphi(0)+\varphi(\pi)=0$ خواهیم داشت:

$$k_1+k_1\cos\sqrt{\lambda}\pi=0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\pi=-1 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi=(2n-1)\pi \ , \ n=1,2,3,\ldots \Rightarrow \sqrt{\lambda}=2n-1 \ , \ n=1,2,3,\ldots$$

مثال ۳: جواب معادله $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3y^2u=0$ کدام است؟

۱) $u=ce^{-(\frac{1}{kx}+ky^3)}$
۲) $u=ce^{-(\frac{1}{ky}+kx^3)}$
۳) $u=ce^{(\frac{1}{kx}-ky^3)}$
۴) $u=ce^{-k(x+y^3)}$

پاسخ : گزینه «۱» با فرض $u(x,y)=F(x).G(y)$ داریم:

$$x^2.F'.G'+3y^2.F.G=0\Rightarrow x^2.\frac{F'}{F}=-3y^2\frac{G}{G'}=k_1$$

$$\begin{cases} x^2\dfrac{F'(x)}{F(x)}=k_1\Rightarrow Ln\dfrac{F}{c_1}=-\dfrac{k_1}{x}\Rightarrow F(x)=c_1e^{-\frac{k_1}{x}} \\ -3y^2.\dfrac{G(y)}{G'(y)}=k_1\Rightarrow Ln\dfrac{G}{c_2}=-\dfrac{y^3}{k_1}\Rightarrow G(y)=c_2e^{-\frac{y^3}{k_1}} \end{cases}\Rightarrow u(x,y)=c_1.c_2e^{-\frac{k_1}{x}-\frac{y^3}{k_1}}=ce^{-(\frac{k_1}{x}+\frac{y^3}{k_1})}$$

با فرض $k_1=\frac{1}{k}$ جواب به صورت $\mathbf{u=ce^{-(\frac{1}{kx}+ky^3)}}$ نوشته می‌شود.

مثال ۴: کدامیک از معادلات زیر را می‌توان با روش جدا کردن متغیرها حل کرد؟

۱) $a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+bu=0$
۲) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
۳) هیچکدام
۴) گزینه‌های ۱و۲ صحیح هستند.

پاسخ : گزینه «۴» با فرض $u(x,y)=F(x).G(y)$ داریم:

$$1)\ aF'(x)G'(y)+bF(x)G(y)=0\Rightarrow a\frac{F'(x)}{F(x)}=-\frac{bG(y)}{G'(y)}=k$$

$$2)\ x^2F''(x).G(y)+yF(x).G''(y)=0\Rightarrow\frac{x^2F''(x)}{F(x)}=-y\frac{G''(y)}{G(y)}=k$$

مثال ۵: کدامیک از معادلات مشتق جزئی زیر با روش جداسازی متغیرها قابل حل است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $u_{xx}+u_xu_y=x+y$
۲) $u_{xx}-x=u_{yy}+y$
۳) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$
۴) $e^{x+2y}u_{xx}+xe^{2y}u_x+y^2u_{yy}=0$

پاسخ : گزینه «۴» با فرض $u(x,y)=F(x).G(y)$ داریم:

$$e^xe^{2y}F''(x)G(y)+xe^{2y}F'(x)G(y)+y^2F(x)G''(y)=0$$

با تقسیم طرفین بر $e^{2y}F(x)G(y)$ داریم:

$$\frac{e^xF''(x)}{F(x)}+x\frac{F'(x)}{F(x)}=-\frac{y^2G''(y)}{e^{2y}G(y)}=k$$

مثال ۶: معادله $(\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ یک معادله: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

۱) غیرخطی و همگن است.
۲) خطی و همگن است.
۳) غیرخطی و غیرهمگن است.
۴) خطی و غیرهمگن است.

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به توان دو، این معادله غیرخطی می‌باشد و همچنین همگن $((\frac{\partial u}{\partial x})^2-(\frac{\partial u}{\partial y})^2=0)$ نیز هست.

مثال ۷: مقادیر و توابع ویژه مسأله $y''+\lambda y=0$ با فرض $y(a)=0$ و $y'(0)=0$ کدامند؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2, y_n=\cos\frac{n\pi x}{a}$
۲) $\lambda_n=\frac{n\pi}{a}, y_n=\cos\frac{n\pi x}{a}$
۳) $\lambda_n=(\frac{2n-1}{2a}\pi)^2, y_n=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$
۴) $\lambda_n=\frac{2n-1}{2a}\pi, y_n=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بـدون حـل پاسـخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

معادله‌ی دیفرانسیل $y''+\lambda y=0$ را با دو شرط همگنِ $y'(0)=0$ و $y(a)=0$ داریم. با توجه به متن درس می‌دانید که وقتی دو شرط همگن داریم، جواب ویژه‌ی $y(x)$ نهایتاً مثلثاتی است. به عبارتی داریم:
$$y(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x$$
اکنون شرط مرزی $y'(0)=0$ را اعمال می‌کنیم:
$$y'(0)=-a\sqrt{\lambda}\sin(0)+b\sqrt{\lambda}\cos(0)=0 \Rightarrow b\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow b=0$$
دقت کنید اگر $\lambda=0$ باشد، مقدار ویژه‌ای بدست نمی‌آید. بنابراین $y(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x$ است. (هر چند می‌دانستیم کـه شـرط نیـومن در $x=0$ بـه جـواب کسینوسی منجر خواهد شد.) حال شرط مرزی $y(a)=0$ را در نظر می‌گیریم:
$$\cos(\sqrt{\lambda}a)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}a=(2n-1)\frac{\pi}{2}$$
بنابراین $\lambda_n=(\frac{2n-1}{2a}\pi)^2$ و $y_n=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$ است.

مثال ۸: برای فاصله‌ی بسته و کراندار $a\le x\le b$ $(a<b)$، مسأله‌ی مقدار ویژه به صورت زیر مفروض است:
$$\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(a)=y(b)\\ y'(a)=y'(b)\end{cases}$$
برای این‌که این مسأله دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی باشد:
(مسأله‌ی مقدار ویژه ترجمه‌ی eigen value problem است.) (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۷)

۱) لازم است که $a\le 0\le b$
۲) لازم است که $a\le 0$ و $b\le 0$
۳) شرطی لازم نیست.
۴) لازم است که $a\ge 0$ و $b\ge 0$

پاسخ : گزینه «۳» معادله‌ی داده، یک معادله‌ی اشتروم ـ لیوویل است، لذا داریم:
$$y''+\lambda y=0 \Rightarrow y=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y(a)=y(b) \Rightarrow C_1\cos\sqrt{\lambda}a+C_2\sin\sqrt{\lambda}a=C_1\cos\sqrt{\lambda}b+C_2\sin\sqrt{\lambda}b \Rightarrow C_2=\frac{C_1(\cos\sqrt{\lambda}a-\cos\sqrt{\lambda}b)}{\sin\sqrt{\lambda}b-\sin\sqrt{\lambda}a} \quad (1)$$
$$y'=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$y'(a)=y'(b) \Rightarrow -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}b+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}b$$
$$\Rightarrow -C_1\sin\sqrt{\lambda}a+C_2\cos\sqrt{\lambda}a=-C_1\sin\sqrt{\lambda}b+C_2\cos\sqrt{\lambda}b \Rightarrow C_1(\sin\sqrt{\lambda}b-\sin\sqrt{\lambda}a)=C_2(\cos\sqrt{\lambda}b-\cos\sqrt{\lambda}a)$$
$$\xrightarrow{(1)} C_1(\sin\sqrt{\lambda}b-\sin\sqrt{\lambda}a)=C_1\frac{(\cos\sqrt{\lambda}a-\cos\sqrt{\lambda}b)(\cos\sqrt{\lambda}b-\cos\sqrt{\lambda}a)}{\sin\sqrt{\lambda}b-\sin\sqrt{\lambda}a}$$
$$\Rightarrow \sin^2\sqrt{\lambda}b-2\sin\sqrt{\lambda}a\sin\sqrt{\lambda}b+\sin^2\sqrt{\lambda}a=-\cos^2\sqrt{\lambda}b-\cos^2\sqrt{\lambda}a+2\cos\sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda}b$$
$$\Rightarrow 2=2(\sin\sqrt{\lambda}a\sin\sqrt{\lambda}b+\cos\sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda}b) \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}(b-a)=1$$
برای مقادیر مختلف a و b همواره می‌توان مقدار ویژه حقیقی یافت که تساوی بالا را برآورده کند، لذا نیازی به برقراری شرطی بین a و b نیست.

مثال ۹: کدام یک از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل نمود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)
$$\text{I)}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+4x \quad , \quad \text{II)}\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}]$$
۱) هر دو معادله قابل حل هستند.
۲) هیچ‌کدام از دو معادله قابل حل نیستند.
۳) معادله I قابل حل نیست ولی II قابل حل است.
۴) معادله II قابل حل نیست ولی I قابل حل است.

پاسخ : گزینه «۳» برای معادله‌ی I با فرض $y=F(x).G(t)$ داریم:
$$F(x).G''(t)=9F''(x).G(t)+4x \Rightarrow \frac{G''(t)}{G(t)}=\frac{9F''(x)}{F(x)}+\frac{4x}{F(x)G(t)}$$
ملاحظه می‌گردد که این معادله یک معادله‌ی ناهمگن بوده و به روش جداسازی متغیرها نمی‌توان آنرا حل نمود.
حال معادله‌ی II را بررسی می‌کنیم با فرض $u=F(t).G(r)$ داریم:
$$F'(t).G(r)=a^2[F(t).G''(r)+\frac{1}{r}F(t).G'(r)] \Rightarrow \frac{F'(t)}{F(t)}=a^2[\frac{G''(r)}{G(r)}+\frac{1}{r}\frac{G'(r)}{G(r)}]$$
ملاحظه می‌گردد که معادله‌ی II را می‌توان از طریق جداسازی متغیرها حل نمود.

مثال۱۰: کدام یک از اسم‌های زیر، مسأله‌ی
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \ , \ a \le x \le b \ , \ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \quad a \le x \le b \\ u_t(x,0) = g(x) \ , \quad a \le x \le b \\ u(a,t) = u(b,t) = 0 \ , \quad t \ge 0 \end{cases}$$
را بهتر توصیف می‌کند؟ (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۸)

۱) مسأله‌ی مقدار مرزی (boundary value problem)
۲) مسأله‌ی مقدار اولیه (initial value problem)
۳) مسأله‌ی مقدار اولیه ـ مرزی (initial – boundary value problem)
۴) مسأله‌ی دیریکله (Dirichlet problem)

پاسخ : گزینه «۳» چون مقادیر u برای حالتی که $t = 0$ باشد داده شده در نتیجه مقادیر اولیه u داده شده است، از طرفی چون مقادیر u در مرزهای a و b برای زمان‌های مختلف داده شده‌اند، لذا مقادیر مرزی u نیز داده شده‌اند، لذا مسأله مطرح شده یک مسأله مقدار اولیه ـ مرزی می‌باشد.

مثال۱۱: می‌توان گفت که: مسأله‌ی
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \ , \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = y'(1) \\ y'(0) = y(1) \end{cases}$$
(دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۸)

۱) مقدار ویژه‌ی $\lambda = -1$ دارد.
۲) مقدار ویژه‌ی $\lambda = 0$ دارد.
۳) مقدار ویژه‌ی $\lambda = 1$ دارد.
۴) غیر از λ به صورت $\lambda = n^2\pi^2 \ (n = 1,2,3,\ldots)$ مقدار ویژه‌ی دیگری ندارد.

پاسخ : گزینه «۳» معادله داده شده، معادله‌ی دیفرانسیل اشتروم لیوویل است، لذا داریم:

$$y'' + \lambda y = 0 \ \to y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y' = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$\begin{cases} y(0) = y'(1) \ \Rightarrow c_1 = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} & (1) \\ y'(0) = y(1) \ \Rightarrow c_2\sqrt{\lambda} = c_1\cos\sqrt{\lambda} + c_2\sin\sqrt{\lambda} \ \Rightarrow c_2 = \dfrac{c_1\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}} & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1),(2)} c_1(1 + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}) = c_1 \times \frac{\sqrt{\lambda} \times \cos^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda} + \lambda\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\sin^2\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}\cos^2\sqrt{\lambda}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} + \sin\sqrt{\lambda}(\lambda - 1) = \sqrt{\lambda}(\sin^2\sqrt{\lambda} + \cos^2\sqrt{\lambda}) \ \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}(\lambda - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda - 1 = 0 \ \Rightarrow \lambda = 1 \ \text{یا} \ \sin\sqrt{\lambda} = 0 \ \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi \ \Rightarrow \lambda = n^2\pi^2$$

در نتیجه مسأله مطرح شده می‌تواند مقدار ویژه‌ی $\lambda = 1$ و $\lambda = n^2\pi^2$ را داشته باشد.

مثال۱۲: می‌توان گفت که مجموعه‌ی $\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots\}$ برای مجموعه‌ی توابع تکه‌ای پیوسته روی فاصله‌ی $-\pi \le x \le \pi$: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۹)

۱) نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ یک مجموعه‌ی متعامد و کامل است.
۲) نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ یک مجموعه‌ی متعامد است اما کامل نیست.
۳) نسبت به تابع وزن $w(x) = e^x$ یک مجموعه‌ی متعامد و کامل است.
۴) نسبت به تابع وزن $w(x) = e^x$ یک مجموعه‌ی متعامد است اما کامل نیست.

پاسخ : گزینه «۲» مجموعه توابع $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ و ... در بازه‌ی $a \le x \le b$ با تابع وزن $r(x) \ge 0$ متعامدند هرگاه:

$$\int_a^b r(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \ , \quad (m \ne n)$$

از طرفی می‌دانیم که:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \ , \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \ , \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

لذا مجموعه‌ی $\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ با تابع وزن $r(x) = 1$ متعامد است. از طرفی مجموعه‌ای را کامل می‌گوییم که هر تابعی را بتوان با سری از آن مجموعه توابع نمایش داد. مجموعه توابع فوق کامل نیست، چون عدد ثابت را نمی‌توان به صورت سری از توابع متعامد فوق نشان داد، لذا مجموعه‌ی توابع متعامد فوق مجموعه‌ی کاملی نیست.

مثال ۱۳: معادله‌ی $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=0$ که در آن A و B و C و D و E و F اعداد ثابت و حقیقی هستند و $A\neq 0$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان گفت که این معادله: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۹)

۱) تفکیک‌پذیر است (یعنی قراردادن جوابی به صورت حاصل‌ضرب $u(x,y)=X(x)Y(y)$ در آن منجر به دو معادله‌ی دیفرانسیل معمولی می‌شود) اگر و فقط اگر $B=0$.

۲) تفکیک‌پذیر است اگر $B=0$.

۳) تفکیک‌پذیر است فقط اگر $B=0$.

۴) تفکیک‌پذیر است (مستقل از این که $B=0$ یا $B\neq 0$)

پاسخ : گزینه «۲» برای رسیدن به جواب درست کافی است، ابتدا $B=0$ و سپس $u(x,y)=X(x)Y(y)$ را در معادله قرار دهیم:

$$AX''Y+CXY''+DX'Y+EXY'+FXY=0\xrightarrow{\text{طرفین را بر XY تقسیم می‌کنیم}}A\frac{X''}{X}+C\frac{Y''}{Y}+D\frac{X'}{X}+E\frac{Y'}{Y}+F=0$$

ملاحظه می‌شود در صورتی که $B=0$ باشد، حتماً معادله تفکیک‌پذیر است. حال این شرط را بررسی کنیم که معادله فقط وقتی که $B=0$ باشد تفکیک‌پذیر است یا خیر. برای پاسخ به این سؤال از یک مثال نقض استفاده می‌کنیم:

$$\text{مثال نقض}: Au_{xx}+Bu_{xy}=0\xrightarrow{u(x,y)=X(x)Y(y)}AX''Y+BX'Y'=0\xrightarrow{\text{طرفین را بر X'Y تقسیم می‌کنیم}}A\frac{X''}{X'}+B\frac{Y'}{Y}=0$$

ملاحظه می‌شود با وجود این‌که $B\neq 0$ بوده ولی باز هم حالتی وجود داشت که معادله تفکیک‌پذیر شود، در نتیجه اگر $B=0$ باشد، معادله تفکیک‌پذیر است ولی برای تفکیک‌پذیری حتماً نباید $B=0$ باشد.

مثال ۱۴: کدام یک از این چهار معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای، خطی است؟ (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۹۰)

۱) $u\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0$

۲) $(\frac{\partial u}{\partial x})^2-(\frac{\partial u}{\partial y})^2=0$

۳) $2xy(\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

۴) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin u=0$

پاسخ : گزینه «۳» تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): وجود عامل $u\frac{\partial u}{\partial x}$ باعث غیرخطی بودن معادله شده است.

بررسی گزینه (۲): وجود عامل $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ و $(\frac{\partial u}{\partial y})^2$ باعث غیرخطی بودن معادله شده است.

بررسی گزینه (۳): این معادله، معادله‌ای خطی از مرتبه‌ی ۲ می‌باشد.

بررسی گزینه (۴): وجود عامل $\sin u$ باعث غیرخطی بودن معادله در این گزینه شده است.

مثال ۱۵: برای مساله اشتروم ـ لیوویل $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\y(0)=0,y(\pi)=0\end{cases}$ ویژه مقدارها و ویژه توابع کدامند؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $y=\cos\lambda x\ ,\ \lambda=0,1,2,\ldots$

۲) $y=\cos\sqrt{\lambda}x\ ,\ \lambda=0,2,4,\ldots$

۳) $y=\sin\lambda x\ ,\ \lambda=1,2,3,\ldots$

۴) $y=\sin\sqrt{\lambda}x\ ,\ \lambda=1,4,9,\ldots$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل را بدست می‌آوریم:

$$y=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x \quad \text{و} \quad y(0)=0\to A=0 \quad \text{و} \quad y(\pi)=0\to y=B\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$$

با توجه به اینکه B باید مخالف صفر باشد، آرگومان sin باید طوری انتخاب شود که y صفر شود.

$$\sqrt{\lambda}\pi=n\pi\to n^2=\lambda\to\lambda=1,4,9\ldots$$

مثال ۱۶: معادله موج دو بعدی $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ با کدام دستگاه معادلات هم‌ارز است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\ddot{G}+\lambda^2 G=0\ ,\ F_{xx}+F_{yy}+v^2 F=0$

۲) $\ddot{G}-\lambda^2 G=0\ ,\ \ddot{F}+F_{yy}+v^2 F=0$

۳) $\ddot{G}+\lambda^2\dot{G}+\lambda G=0\ ,\ F_{xx}+vF_y+v^2 F=0$

۴) $\lambda^2 F_{xx}+\lambda^2 F_{yy}+v^2 F=0\ ,\ \lambda^2\ddot{G}+\lambda^2\dot{G}+G=0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با فرض $u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$ و جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$G''F=c^2(F_{xx}G+F_{yy}G)\Rightarrow \frac{G''}{G}=\frac{c^2(F_{xx}+F_{yy})}{F}=-\lambda^2\Rightarrow\begin{cases}G''+\lambda^2 G=0\\ F_{xx}+F_{yy}+\frac{\lambda^2}{c^2}F=0\end{cases}\xrightarrow{v^2=\frac{\lambda^2}{c^2}}F_{xx}+F_{yy}+v^2F=0$$

به خاطر این است که در صورت سؤال از λ^2 و λ استفاده کرده است ما هم در حل به جای λ از λ^2 استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱۷: توابع ویژه (eigen functions) مسئله مقدار مرزی زیر کدام است؟ (مکانیک ـ دکتری ۹۲)

$$y''(x)-2y'(x)+\lambda y(x)=0\qquad 0\le x\le\pi$$
$$y(0)=y(\pi)=0$$

۱) $\varphi_n(x)=e^x\cos nx\ ;\ n=1,2,\dots$

۲) $\varphi_n(x)=e^x\sin nx\ ;\ n=1,2,\dots$

۳) $\varphi_n(x)=\sinh\sin nx\ ;\ n=1,2,\dots$

۴) $\varphi_{n,m}(x)=\sinh mx\sin nx\ ;\ n,m=1,2,\dots$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با یک مسأله اشتروم ـ لیوویل روبه‌رو هستیم: $y''-2y'+\lambda y=0\quad,\quad y(0)=y(\pi)=0$

$$\text{معادله مشخصه}: m^2-2m+\lambda=0\Rightarrow m=1\pm\sqrt{1-\lambda}\Rightarrow y=Ae^{(1+\sqrt{1-\lambda})x}+Be^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

حالت اول: فرض می‌کنیم $\lambda<1$ باشد:

$$y(0)=0\to A=-B$$

$$y(\pi)=0\to Ae^{(1+\sqrt{1-\lambda})\pi}-Ae^{(1-\sqrt{1-\lambda})\pi}=0\Rightarrow\lambda=1$$

همان‌طور که در ابتدا فرض کرده بودیم، $\lambda<1$ و چون از این تساوی $\lambda=1$ به دست آمده است، بنابراین جواب غیر قابل قبول است.

حالت دوم: فرض می‌کنیم $\lambda>1$ باشد، داریم $1-\lambda<0$ بنابراین $m=1\pm\sqrt{-(\lambda-1)}=1\pm i\sqrt{\lambda-1}$ و جواب عمومی به شکل زیر است:

$$y=e^x(C\sin\sqrt{\lambda-1}\,x+D\cos\sqrt{\lambda-1}\,x)$$

$$y(0)=0\to D=0\Rightarrow y=Ce^x\sin\sqrt{\lambda-1}\,x$$

$$y(\pi)=0\xrightarrow{C\neq0}\sin\sqrt{\lambda-1}\,\pi=0\Rightarrow\pi\sqrt{\lambda-1}=n\pi\Rightarrow\sqrt{\lambda-1}=n$$

در نتیجه $y_n(x)=e^x\sin(nx)$ خواهد بود، پس گزینه ۲ درست است.

درسنامه۲: حل و بررسی معادله موج

مثال۱: در معادله موج $\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}\ ,\ 0<x<17\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=6x^2\ ,\ 0\le x\le 17 \\ u(0,t)=u(17,t)=0\ ,\ t\ge 0 \end{cases}$، مقدار $u(5,19)$ کدام است؟

۱) ۳۷۰
۲) ۳۶۹/۵
۳) ۳۶۸
۴) ۳۶۹

پاسخ : گزینه «۴» در گام اول به جای x عدد ۵، به جای t عدد ۱۹ و به جای c عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$u(5,19)=\frac{1}{2}[f^*(5+2\times 19)+f^*(5-2\times 19)]+\frac{1}{2\times 2}[G^*(5+2\times 19)-G^*(5-2\times 19)]=\frac{1}{2}[f^*(43)+f^*(-33)]+\frac{1}{4}[G^*(43)-G^*(-33)]$$

حالا خوب دقت کنید که اعداد ۴۳ و ۳۳− هیچ‌کدام در بازه $0<x<17$ قرار ندارند. اینجاست که باید دست به دامن دوره تناوب شویم! چون هر دو شرط روی u است، بنابراین $T=2L=2\times 17=34$ است، پس می‌توانیم عبارت را با اضافه و کم کردن دوره تناوب به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{1}{2}[f^*(43-34)+f^*(-33+34)]+\frac{1}{4}[G^*(43-34)-G^*(-33+34)]=\frac{1}{2}[f^*(9)+f^*(1)]+\frac{1}{4}[G^*(9)-G^*(1)]$$

$$=\frac{1}{2}[f(9)+f(1)]+\frac{1}{4}[G(9)-G(1)]$$

حالا دقت کنید که $f(x)=x$ و $G(x)=\int_0^x 6x^2dx=2x^3$، لذا داریم: $u(5,19)=\frac{1}{2}(9+1)+\frac{1}{4}(2\times(9)^3-2\times 1)=5+\frac{1}{2}(729-1)=5+364=369$

همان‌طور که دیدید در این مسأله نیازی به استفاده از نوع گسترش f^* و G^* نداشتیم! ولی همیشه این‌طور نیست و در بیش از ۷۰ درصد سؤالات آزمون‌ها نیاز به گسترش توابع f^* و G^* وجود دارد.

مثال۲: با استفاده از روش دالامبر مقدار $u(23,12)$ برای مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=16u_{xx}\ \ ;\ \ 0<x<29\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=u(29,t)=0 \\ u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=3x^2+4x \end{cases}$$

۱) ۱۸۰۴/۵−
۲) ۱۷۹۲/۵−
۳) ۱۷۹۸/۵
۴) ۱۷۹۸/۵−

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال $c=4$، $x=23$ و $t=12$ می‌باشد، لذا داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}[f^*(23+4\times 12)+f^*(23-4\times 12)]+\frac{1}{2\times 4}[G^*(23+4\times 12)-G^*(23-4\times 12)]=\frac{1}{2}[f^*(71)+f^*(-25)]+\frac{1}{8}[G^*(71)-G^*(-25)]$$

چون هر دو شرط مرزی روی u است، بنابراین $T=2\times 29=58$. حالا با اضافه و کم کردن دوره تناوب در موارد موردنیاز داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}[f^*(71-58)+f^*(-25)]+\frac{1}{8}[G^*(71-58)-G^*(-25)]=\frac{1}{2}[f^*(13)+f^*(-25)]+\frac{1}{8}[G^*(13)-G^*(-25)]$$

مقادیر $f^*(13)$ و $G^*(13)$ به راحتی با توجه به این که عدد ۱۳ در بازه $0<x<29$ قرار دارد، حساب می‌شوند. اما با توجه به گسترش فرد تابع f^*، مقدار $f^*(-25)$ برابر $-f^*(25)$ نوشته می‌شود، تا بتوان آن را نیز حساب کرد، از طرفی چون G^* دارای گسترش زوج می‌باشد، لذا $G^*(-25)=G^*(25)$، پس داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}[f^*(13)-f(25)]+\frac{1}{8}[G^*(13)-G(25)]$$

از طرفی $G(x)=\int_0^x g(x)dx=\int_0^x(3x^2+4x)dx=x^3+2x^2$ و $f(x)=x$، بنابراین داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}(13-25)+\frac{1}{8}[(13)^3+2(13)^2-(25)^3-2\times(25)^2]=-6+\frac{1}{8}[2197+338-15625-1250]=-6-1792/5=-1798/5$$

مثال ۳: در مسأله مقدار مرزی زیر، مقدار $u(0,1)$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} u_{xx}=u_{tt} \ , \ 0\le x\le 4 \ , \ t>0 \\ u_x(0,t)=u_x(4,t)=0 \\ u(x,0)=2\cos(\pi x)+5 \ , \ u_t(x,0)=1-\cos(2\pi x) \end{cases}$$

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» برای تمرین بیشتر، این سؤال را به دو روش (دالامبر و روش ضربی) حل می‌کنیم، تا یکسان بودن جواب‌ها را ببینید.

روش اول: از روش دالامبر استفاده می‌کنیم (دقت کنید که در این سؤال هر دو شرط مرزی روی u_x است؛ اما چون $(x+ct)$ در بازه $[0,4]$ قرار دارد و $(x-ct)$ هم بدون نیاز به دوره تناوب و صرفاً با توجه به گسترش در بازه $[0,4]$ قرار می‌گیرد، می‌توان از روش دالامبر جبری کمک گرفت):

$$u(0,1)=\frac{1}{2}[f^*(0+1)+f^*(0-1)]+\frac{1}{2}[G^*(0+1)-G^*(0-1)]=\frac{1}{2}[f^*(1)+f^*(-1)]+\frac{1}{2}[G^*(1)-G^*(-1)]$$

با توجه به شرایط مرزی، باید f نسبت به $x=0$ گسترش زوج یابد، بنابراین $f^*(1)=f^*(-1)$ و همچنین g، نسبت به $x=0$، گسترش زوج و در نتیجه G باید نسبت به $x=0$ گسترش فرد یابد، لذا $G^*(1)=-G^*(-1)$، پس جواب به شکل مقابل خلاصه می‌شود: $u(0,1)=\frac{1}{2}[2f(1)]+\frac{1}{2}[2G(1)]=f(1)+G(1)$

اما $G(x)$ از رابطه‌ی مقابل حساب می‌شود: $G(x)=\int_0^x g(x)dx=\int_0^x(1-\cos 2\pi x)dx=x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x$

بنابراین $G(1)=1$ و لذا داریم:

$$u(0,1)=2\cos(\pi\times 1)+5+1-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\times 1)=2\times(-1)+5+1+0=4$$

روش دوم: با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,t)=F(x).G(t)\ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{F''(x)}{F(x)}=-\lambda \\ \dfrac{G''(t)}{G(t)}=-\lambda \end{cases}$$

جواب معادله‌ی $F''(x)+\lambda F(x)=0$ به شکل $F(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x$ است. در $x=0$ شرط $u_x(0,t)=0$ نتیجه می‌دهد که $F'(0)=0$ است بنابراین $\sqrt{\lambda_n}b=0$ است.

اگر $\lambda=0$ باشد که مقدار ویژه‌ای نخواهیم داشت، پس $b=0$ است و $F(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x$ خواهد بود. اکنون شرط $u_x(4,t)=0$ را اعمال می‌کنیم که طبق آن $F'(4)=0$ است، پس $\sin 4\sqrt{\lambda}=0$. از این جا داریم $4\sqrt{\lambda_n}=n\pi$ و در نتیجه تساوی $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{4}$ مقادیر ویژه را می‌دهد. اکنون می‌دانیم که جواب‌های ویژه به صورت $\cos\frac{n\pi}{4}x$ هستند. معادله‌ی مربوط به $G(t)$ را حل می‌کنیم. دقت کنید که چون $F_n(x)$ کسینوسی شده است، $n=0,1,2,\ldots$ خواهد بود. یعنی جمله‌ی ثابت a_0 هم خواهیم داشت.

$$\frac{G''(t)}{G(t)}=-(\frac{n\pi}{4})^2 \xrightarrow{\text{برای } n\neq 0} G_n(t)=A_n\sin(\frac{n\pi}{4}t)+B_n\cos(\frac{n\pi}{4}t)$$

اما برای $n=0$ داریم:

$$\frac{G''(t)}{G(t)}=0\ \Rightarrow G''(t)=0\ \Rightarrow G(t)=at+b$$

بنابراین جواب کلی به صورت مقابل است:

$$u(x,t)=at+b+\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi x}{4})[A_n\sin(\frac{n\pi t}{4})+B_n\cos(\frac{n\pi t}{4})]\qquad (*)$$

حالا شرایط اولیه را لحاظ می‌کنیم. با توجه به شرط $u(x,0)$، لازم است در رابطه‌ی $(*)$ به جای تمام t ها صفر قرار دهیم:

$$u(x,0)=2\cos(\pi x)+5\xrightarrow{t=0} 2\cos(\pi x)+5=b+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(\frac{n\pi x}{4})\ \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ B_n=0 \ , \ n\neq 4 \\ B_n=2 \ , \ n=4 \end{cases}$$

با توجه به شرط $u_t(x,0)$، ابتدا از رابطه $(*)$ نسبت به t مشتق می‌گیریم، بعد به جای تمام t ها صفر قرار می‌دهیم:

$$u_t(x,0)=1-\cos(2\pi x)\xrightarrow{t=0} 1-\cos 2\pi x=a+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n\pi}{4})A_n\cos(\frac{n\pi}{4}x)\ \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ A_n=0 \ , \ n\neq 8 \\ A_n=-\frac{1}{2\pi} \ , \ n=8 \end{cases}$$

بنابراین جواب نهایی به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{u(x,t)=5+t+2\cos(\pi x)\cos(\pi t)-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\sin(2\pi t)}$$

با توجه به مقدار خواسته شده داریم: $u(0,1)=5+1+2\cos(0)\cos\pi-\frac{1}{2\pi}[\cos(0)\sin 2\pi]=5+1-2=4$

مثال ۴: جواب معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \\ u(0,t)=u(\pi,t)=u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=k\sin 3x-\frac{k}{2}\sin 6x \end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $u(x,t)=\frac{k}{3}\cos 3t\cos 3x-\frac{k}{4}\cos 6t\cos 6x$

۲) $u(x,t)=\frac{k}{3}\sin 4t\sin 4x-\frac{k}{12}\sin 4t\sin 6x$

۳) $u(x,t)=\frac{k}{3}\sin 3t\sin 3x-\frac{k}{12}\sin 6t\sin 6x$

۴) $u(x,t)=\frac{k}{2}\sin 3t\sin 3x-\frac{k}{10}\sin 6t\sin 6x$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود: با توجه به شرایط کرانه‌ای $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ جواب معادله به صورت $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\sin nx$ است، از طرفی با توجه به شرط $u(x,0)=0$ داریم:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx=0\Rightarrow a_n=0$$

از طرفی با توجه به شرط $u_t(x,0)=k\sin 3x-\frac{k}{2}\sin 6x$ داریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt.\sin nx\Rightarrow u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\sin nx=k\sin 3x-\frac{k}{2}\sin 6x$$

توجه شود ضرایب b_n به غیر از b_3 و b_6 همگی صفرند و لذا با متحد قرار دادن طرفین داریم:

$$3b_3=k\ ,\ 6b_6=-\frac{k}{2}\Rightarrow b_3=\frac{k}{3}\ ,\ b_6=-\frac{k}{12}\Rightarrow u(x,t)=\frac{k}{3}\sin 3t\sin 3x-\frac{k}{12}\sin 6t\sin 6x$$

مثال ۵: در معادله ارتعاش، $t>0$ ، $0<x<1$ ، $u_{tt}=u_{xx}$ و $u(x,0)=x$ ، $u_t(x,0)=0$ با توجه به جواب دالامبر $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]$ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $u(\frac{1}{2},1)=0$

۲) $u(\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}$

۳) $u(\frac{1}{2},1)=-\frac{1}{2}$

۴) $u(\frac{1}{2},1)=1$

پاسخ : گزینه «۳» در این مثال $g(x)=0$ و $f(x)=x$ است، همچنین $c=1$ می‌باشد، لذا داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\}\xrightarrow[t=1]{x=\frac{1}{2}}u(\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}\{f^*(\frac{3}{2})+f^*(-\frac{1}{2})\}=\frac{1}{2}\{f^*(2-\frac{1}{2})+f^*(-\frac{1}{2})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f^*(-\frac{1}{2})+f^*(-\frac{1}{2})\}=\frac{1}{2}\{2f^*(-\frac{1}{2})\}=-f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

توجه کنید که $f^*(x)$ گسترش فرد تابع f است، لذا $f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})$ در نظر گرفته شده است. (**تذکر:** با توجه به این که در سؤال شرایط مرزی داده نشده، تست قابل جواب‌گویی نبود و ما با توجه به کلید سازمان سنجش، شرایط مرزی را روی u در نظر گرفتیم.)

مثال ۶: جواب مسأله مقدار اولیه کرانه‌ای (یا مرزی) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<\pi\ ,t>0 \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=2\sin x\ ,0\le x\le\pi\ \text{(شرایط اولیه)} \\ u(0,t)=0=u(\pi,t)\ ,\ t\ge 0\ \text{(شرایط مرزی)} \end{cases}$ ، کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $u(x,t)=2\sin x\sin t$

۲) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\sin(nx)\sin(nt)$

۳) $u(x,t)=2\sin x\cos t$

۴) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos(nx)\sin(nt)$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود: با استفاده از حل معادله‌ی موج یک بعدی $(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ به روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}\ \ ,\ \ \lambda_n=\frac{cn\pi}{L}=\frac{n\pi}{\pi}=n$$

$$u(x,0)=0\Rightarrow A_n=0$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{L}=g(x)\Rightarrow B_n=\frac{2}{\lambda_n L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ \ ,\ \ n=1,2,\dots$$

حال برای این سؤال با توجه به فرمول‌های فوق داریم: $g(x)=u_t(x,0)=2\sin x \;,\; \lambda_n=n \Rightarrow B_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}2\sin x\sin nx dx$

اگر $n\neq 1$ باشد، طبق متن درس حاصل انتگرال $\int_0^{\pi}\sin x\sin nx dx$ برابر با صفر است. بنابراین برای هر $n\neq 1$ داریم $B_n=0$. به ازای $n=1$ نیز داریم:

$$B_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin^2 x dx=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{2}{\pi}[x-\frac{\sin 2x}{2}]_0^{\pi}=2 \Rightarrow u(x,t)=B_1\sin\lambda_1 t\sin x=\frac{2}{1}\sin t.\sin x=2\sin t.\sin x$$

مثال ۷: در مسأله مقدار اولیه ــ مرزی زیر، مقدار $u(x,t)$ در $x=\frac{1}{3}$ و $t=5$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۹)

$$u_{tt}-u_{xx}=0 \quad , \quad 0<x<1 \;,\; t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}x & , \quad 0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{2}\le x<1\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}u_t(x,0)=0\\ u_x(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$$

۱) ۱

۲) ۰

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $u_t(x,0)=0$ و این یعنی $g(x)=0$. بنابراین نوشتن کروشه دوم لازم نیست و لذا داریم:

$$u(\frac{1}{3},5)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{3}+1\times 5)+f^*(\frac{1}{3}-1\times 5)]$$

از طرفی با توجه به شرایط مرزی که یکی روی u و دیگری روی u_x است، لذا دوره تناوب $T=4\times 1=4$ است. پس با اضافه و کم کردن آن داریم:

$$u(\frac{1}{3},5)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{3}+5-4)+f^*(\frac{1}{3}-5+4)]=\frac{1}{2}[f^*(1+\frac{1}{3})+f^*(-\frac{2}{3})]$$

حالا خوب دقت کنید چون شرط مرزی در $x=0$ روی u_x است، پس f^* نسبت به $x=0$ گسترش زوج دارد، لذا $f^*(-\frac{2}{3})=f^*(\frac{2}{3})$، مشکل بعدی سر به راه کردن $f^*(1+\frac{1}{3})$ است!! چون در $x=1$ شرط مرزی روی u است، پس f^* نسبت به $x=1$ گسترش فرد دارد. پس داریم: $f^*(1+\frac{1}{3})=-f(1-\frac{1}{3})=-f(\frac{2}{3})$

دقت کنید وقتی f نسبت به $x=L$ گسترش فرد دارد، آن‌گاه $f^*(L+x)=-f^*(L-x)$ بنابراین داریم: $u(\frac{1}{3},5)=\frac{1}{2}[-f(\frac{2}{3})+f(\frac{2}{3})]=0$

مثال ۸: جواب معادله $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ، $0<x<2$ ، $t>0$ با شرایط مرزی زیر کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

$$y(0,t)=0 \;,\; y(2,t)=0 \;,\; \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0 \quad \text{و} \quad y(x,0)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ -x+2 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

۱) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\sin n\pi t$

۲) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos(2n-1)\pi t$

۳) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2n-1)\pi t.\sin\frac{n\pi x}{2}$

۴) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos n\pi x.\sin\frac{(2n-1)}{2}\pi t$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

همان‌طور که قبلاً گفتیم جواب معادله موج با دو شرطِ مرزی $y(0,t)=0$ و $y(2,t)=0$ به صورت زیر است، (مقادیر ویژه به صورت $\lambda_n=(\frac{n\pi}{2})^2$ هستند.)

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)F_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

برای به دست آوردن $G_n(t)$ باید معادله زیر را حل کنیم:

$$G_n''(t)+c^2\lambda_n G_n(t)=0 \xrightarrow{c^2=4} G_n''(t)+4(\frac{n^2\pi^2}{4})G_n(t)=0 \Rightarrow \mathbf{G_n''+(n^2\pi^2)G_n(t)=0}$$

معادله فوق یک معادله درجه دوم همگن با ضرایب ثابت بوده و می‌دانیم جواب عمومی آن به شکل مقابل است: $G_n(t)=A_n\cos(n\pi t)+B_n\sin(n\pi t)$

بنابراین جواب کلی به صورت مقابل است:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(n\pi t)+B_n\sin(n\pi t)]\sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

برای تعیین مقادیر B_n و A_n باید از $y(x,0)$ و $y_t(x,0)$ استفاده کنیم:

$$y_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[-n\pi A_n\sin(n\pi t)+n\pi B_n\cos(n\pi t)]\sin(\frac{n\pi}{2}x)\Rightarrow y_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi B_n\sin(\frac{n\pi}{2}x)=0\Rightarrow B_n=0$$

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(0)+B_n\times 0]\sin(\frac{n\pi}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

بنابراین A_n سری فوریه سینوسی تابع $y(x,0)$ است:

$$A_n=\frac{2}{2}\int_0^2 y(x,0)\sin(\frac{n\pi}{2}x)dx=\int_0^1 x\sin(\frac{n\pi}{2}x)dx+\int_1^2(-x+2)\sin(\frac{n\pi}{2}x)dx=\frac{8}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

برای اعداد زوج و فرد، A_{2n} و A_{2n-1} را جداگانه حساب می‌کنیم. $A_{2n}=\frac{8}{4n^2\pi^2}\sin n\pi=0$ و $A_{2n-1}=\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=\frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}$ با

جایگذاری در سری جواب خواهیم داشت:

$$y(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(\frac{2n-1}{2})\pi x\cos(2n-1)\pi t$$

مثال ۹: جواب معادله‌ی با شرایط اولیه‌ی

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & ;0<x<L\\ u(x,0)=f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) & ;0\le x\le L\\ u(0,t)=u(L,t)=0\end{cases}$$

، به روش جداسازی متغیرها به صورت $u=XT$، وقتی $\frac{X''}{X}\ge 0$، کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) $u(x,t)=0$

۲) $u(x,t)=(a\cos\frac{2\pi}{L}t+b\sin\frac{2\pi}{L}t)\cos\frac{\pi x}{L}$

۳) $u(x,t)=(a\cos\frac{2\pi}{L}x+b\sin\frac{2\pi}{L}x)\cos\frac{\pi t}{L}$

۴) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2\pi n}{L}t+b_n\sin\frac{2\pi n}{L}t)\sin\frac{n\pi x}{L}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با یک معادله روبه‌رو هستیم که باید با استفاده از روش ضربی به آن جواب دهیم: (T تابعی صرفاً بر حسب t و X تابعی صرفاً بر حسب x است)

$$u=X.T\xrightarrow{\text{جایگزین کردن در معادله اصلی}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(X.T)-4\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X.T)=0\Rightarrow XT''-4X''T=0\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 4TX}\frac{T''}{4T}=\frac{X''}{X}$$

برای این که عبارات فوق که یکی فقط بر حسب x و دیگری فقط بر حسب t است، بتوانند مساوی هم باشند، لازم است هر دوی آن‌ها را برابر مقدار ثابتی قرار دهیم. معمولاً این ثابت را به صورت $\frac{X''}{X}=-\lambda$ انتخاب می‌کنیم. اما در این مثالِ خاص؛ شرط شده است که $\frac{X''}{X}\ge 0$ باشد به همین خاطر برای جلوگیری از دردسرهای بعدی؛ ثابت تناسب را λ می‌نامیم و می‌نویسیم: $\frac{T''}{4T}=\frac{X''}{X}=\lambda\ge 0$

حالا باید سراغ حل این معادلات برویم. دقت کنید در صورت سؤال $\frac{X''}{X}\ge 0$ در نظر گرفته شده، بنابراین باید دو حالت در نظر بگیریم:

حالت اول: فرض می‌کنیم $\lambda=\frac{X''}{X}=0$:

$$\frac{X''}{X}=0\Rightarrow X''=0\Rightarrow X=Ax+B$$

با توجه به شرط $u(0,t)=u(L,t)=0$، داریم:

$$X(0)=A(0)+B=0\Rightarrow B=0$$

بنابراین $X=Ax$ و چون $X(L)=0$، پس $AL=0$ و چون $L\ne 0$، لذا $A=0$، بنابراین تا اینجا جواب بدیهی $u=0$ را داریم.

حالت دوم: $\lambda>0$: در این صورت معادله‌ی مقابل را داریم:

$$\frac{X''}{X}=\lambda\Rightarrow X''-X\lambda=0$$

که می‌دانیم جواب معادله‌ی فوق به صورت مقابل است:

$$X=c_1\sinh\sqrt{\lambda}x+c_2\cosh\sqrt{\lambda}x$$

با توجه به شرط مرزی $u(0,t)=0$، واضح است $X(0)=0$ و لذا داریم:

$$0=c_1\sinh(0)+c_2\cosh(0)\Rightarrow c_2=0$$

پس تا اینجا می‌توان گفت جواب به شکل $X=c_1\sinh\sqrt{\lambda}x$ است، اما با توجه به شرط $X(L)=0$ داریم:

$$0=c_1\sinh\sqrt{\lambda}L$$

و چون $L\sqrt{\lambda}\ne 0$، بنابراین $\sinh\sqrt{\lambda}L\ne 0$ و بنابراین $c_1=0$ است، پس از این حالت نیز به جواب $X=0$ می‌رسیم و در نتیجه جواب آخر به صورت $u(x,t)=0$ می‌باشد. پس تنها جواب معادله به صورت $u(x,t)=0$ خواهد بود.

توضیح: از شرایط مرزی همگن به این نتیجه رسیدیم که $u(x,t)=0$ تنها جواب معادله است. بنابراین شرط اولیه‌ی $u_t(x,0)=g(x)$ هم فقط وقتی می‌تواند رخ دهد که $g(x)=0$ باشد. اگر شرط می‌شد که $g(x)\ne 0$ باشد، معادله جوابی نداشت که همه‌ی شرایط صدق کند.

مثال ۱۰: اگر $u(x,y)$ جواب مسأله‌ی $u_{xx}-u_{yy}=0\ ,\ x\in\mathbb{R}\ ,y\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ با شرایط مرزی $u(x,0)=0\ ,\ u_y(x,0)=x$ باشد آنگاه $u(1,1)$ برابر است با:
(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}$　۲) ۱　۳) $\frac{3}{2}$　۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» مسأله فوق فرم معادله موج است که در کتاب‌ها معمولاً به جای متغیر y از t استفاده می‌شود، به هر حال با کمک حل دالامبر موج، با توجه به این‌که $f(x)=0$ و $g(x)=x$ و نتیجتاً $G(x)=\frac{x^2}{2}$، خواهیم داشت:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[G^*(x+y)-G^*(x-y)]\Rightarrow u(1,1)=\frac{1}{2}[G^*(2)-G^*(0)]\xrightarrow{G^*(0)=0}u(1,1)=\frac{1}{2}G^*(2)=\frac{1}{2}(\frac{2^2}{2})=\frac{1}{2}\times 2=1$$

مثال ۱۱: اگر u جواب معادله‌ی $4u_{xx}=u_{tt}\ ,\ t\geq 0\ ,\ -\infty<x<\infty$ همراه با شرایط $\begin{cases}u(x,0)=\cos x & ;\ -\infty<x<\infty\\ u_t(x,0)=0 & ;\ -\infty<x<\infty\end{cases}$ باشد، آن‌گاه $u(\pi,\pi)$ برابر است با:
(مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $+1$　۲) $\frac{1}{2}$　۳) -1　۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با یک معادله‌ی موج روبه‌رو هستیم که $g(x)=0$، $\begin{cases}u(x,0)=f(x)=\cos x\\ u_t(x,0)=g(x)=0\end{cases}$ با استفاده از روش دالامبر معادله موج و با توجه به اینکه $c=2$ می‌باشد، به راحتی با نوشتن معادله مشخصه جواب تعیین می‌شود: $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]=\frac{1}{2}[\cos(x+2t)+\cos(x-2t)]$

$$u(\pi,\pi)=\frac{1}{2}[\cos(\pi+2\pi)+\cos(\pi-2\pi)]=\frac{1}{2}[\cos 3\pi+\cos(-\pi)]=\frac{1}{2}(-1-1)=-1$$

مثال ۱۲: پاسخ $u(x,t)$ مسأله موج مقابل: $\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & ,\ 0<x<1\ ,\ t>0\\ u_x(0,t)=0\ ,\ u(1,t)=0\\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=\sin x\end{cases}$، عبارت است از:
(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\pi t)\sin(n\pi x)$　۲) $\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$　۴) $\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\pi t)\cos(n\pi x)$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

از روش جداسازی متغیرها برای حل این مسأله استفاده می‌کنیم. اگر $u(x,t)=F(x)T(t)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$u_{tt}=u_{xx}\Rightarrow FT''=F''T\Rightarrow\frac{T''}{T}=\frac{F''}{F}=-\lambda$$

می‌دانیم که برای $\lambda=0$ و $\lambda<0$ هیچ جواب ویژه‌ای به دست نمی‌آید. با فرض $\lambda>0$ داریم:

$$\begin{cases}F''+\lambda F=0\\ T''+\lambda T=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x\\ T(t)=C\sin\sqrt{\lambda}t+D\cos\sqrt{\lambda}t\end{cases}$$

با استفاده از شرایط مرزی مسأله، توابع و مقادیر ویژه را می‌یابیم:

$$u_x(0,t)=0\Rightarrow F'(0)=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}(A\cos\sqrt{\lambda}x-B\sin\sqrt{\lambda}x)\Big|_{x=0}=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}A=0\Rightarrow A=0\Rightarrow F(x)=B\cos\sqrt{\lambda}x$$

می‌دانیم اگر $\lambda=0$ باشد، مقدار ویژه‌ای به دست نمی‌آید.

$$u(1,t)=0\Rightarrow F(1)=0\Rightarrow B\cos\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}=\frac{2n-1}{2}\pi\ ;\ n=1,2,\ldots$$

بنابراین جواب‌های ویژه به صورت $\cos(\frac{2n-1}{2}\pi x)$ هستند. برای $T(t)$ از شرایط اولیه‌ی همگن استفاده می‌کنیم:

$$u(x,0)=0\Rightarrow T(0)=0\Rightarrow D\cos(\sqrt{\lambda}\times 0)=0\Rightarrow D=0\Rightarrow T(t)=C\sin\sqrt{\lambda}t$$

بنابراین $T_n(t)=\cos\sqrt{\lambda_n}t=\cos(\frac{2n-1}{2}\pi t)$ و جواب عمومی این مسأله به صورت مقابل است: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

درسنامه۳: حل و بررسی معادله گرما

مثال۱: جواب معادله‌ی انتقال حرارت زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;,\; 0<x<2\pi \;,\; t>0 \\ u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \\ u(x,0)=2\sin(\dfrac{3x}{2}) \end{cases}$$

۱) $2\sin(\frac{3}{2}x)e^{-4t}$

۲) $2\sin(\frac{3}{2}x)e^{-9t}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(\frac{3n}{2}x)e^{-n^2t}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(\frac{n}{2}x)e^{-n^2t}$

پاسخ: گزینه «۲» فرم کلی جواب به ازای $L=2\pi$ و $c^2=4$ چنین است:

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\sqrt{\lambda_n}x+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}x)e^{-4\lambda_n t}$$

شرط مرزی $u(0,t)=0$ نشان می‌دهد که $F_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$ است و جمله‌ی کسینوسی حذف می‌شود. شرط مرزی $u(2\pi,t)=0$ را برای تعیین مقادیر ویژه اعمال می‌کنیم:

$$u(2\pi,t)=0 \Rightarrow F_n(2\pi)=\sin(2\sqrt{\lambda_n}\pi)=0 \Rightarrow 2\sqrt{\lambda_n}\pi=n\pi \Rightarrow \lambda_n=(\frac{n}{2})^2$$

بنابراین داریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n}{2}x)e^{-\frac{4n^2}{4}t}$$

اکنون شرط اولیه‌ی ناهمگن $u(x,0)=2\sin\frac{3x}{2}$ را برای یافتن ضرایب b_n استفاده می‌کنیم. به ازای $t=0$ داریم:

$$2\sin\frac{3}{2}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n}{2}x)$$

از تساوی طرفین و با توجه به آن که $\sin\frac{3}{2}x$ در سری فوریه به ازای $n=3$ ظاهر می‌شود داریم: $b_3=2$ و $b_n=0$ برای هر $n\neq 3$. به این ترتیب و با جایگذاری ضرایب b_n در جواب داریم:

$$u(x,t)=b_3\sin\frac{3}{2}xe^{-9t}=2\sin(\frac{3}{2}x)e^{-9t}$$

مثال۲: فرض کنید میله‌ای به طول ۱۰ متر که دو سر آن در دمای صفر است، در لحظه اولیه در دمای $u(x,0)=x(10-x)$ باشد، اگر در نقطه x و در زمان t، دما با رابطه روبرو مشخص شود: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\sqrt{\lambda_n}x.e^{-\lambda_n c^2 t}$ و $\lambda_n=(\frac{n\pi}{10})^2$ و $c^2=1$ باشد، معادله دما در وسط میله برابر کدام گزینه می‌شود؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{800}{(2n-1)^3\pi^3}(-1)^{n-1}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{100}}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{800}{(2n)^3\pi^3}(-1)^{n-1}e^{-\frac{(2n)^2\pi^2}{100}t}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{800}{(2n-1)^3\pi^3}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi}{100}t}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{800}{(2n)^3\pi^3}e^{-\frac{(2n)^2\pi^2}{100}t}$

پاسخ: گزینه «۱» به راحتی با استفاده از شرط اولیه $u(x,0)=x(10-x)$ داریم:

$$x(10-x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(\frac{n\pi}{10})xe^{0}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، a_n ضریب بسط سینوسی تابع $x(10-x)$ است:

$$a_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}x(10-x)\sin(\frac{n\pi}{10})xdx$$

پس از محاسبه، a_n به صورت مقابل خلاصه می‌شود:

$$a_n=\frac{400}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]$$

با توجه به اینکه به ازای nهای زوج، a_n صفر می‌شود؛ لذا $u(x,t)$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{800}{(2n-1)^3\pi^3}\sin[\frac{(2n-1)\pi}{10}x].e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{100}t}$$

با قرار دادن $x=5$ (چون دما در وسط میله سؤال شده) داریم:

$$u(5,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{800}{(2n-1)^3\pi^3}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}]e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{100}t}$$

برای کسی پوشیده نیست که همواره رابطه $\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n-1}$ برقرار است، پس گزینه (۱) جواب این تست است.

مثال ۳: از حل معادله حرارت $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$ تحت شرایط مرزی ـ اولیه؛ $\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}(L,t)+\beta\theta(L,t)=0$ و $\theta(0,t)=0$ ، $\theta(x,0)=g(x)$ در بازه $0<x<L$، کدام فرم از جواب‌های ذیل به دست می‌آید؟

۱) $\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)e^{-\alpha\lambda_n t}$

۲) $\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x)e^{-\alpha\lambda_n t}$

۳) $\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n[\cos(\lambda_n x)+\sin(\sqrt{\lambda_n}x)]e^{-\alpha\lambda_n t}$

۴) $\theta(x,t)=g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)e^{-\alpha\lambda_n t}$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به این که شرط مرزی به شکل $\theta(0,t)=0$ می‌باشد، لذا تابع $F_n(x)$ به صورت سینوسی است.
با دقت در گزینه‌ها می‌بینیم لازم نیست λ_n معلوم شود، لذا داریم:

$$G'_n(t)+\alpha\lambda_n G(t)=0 \Rightarrow \frac{G'_n(t)}{G(t)}+\alpha\lambda_n=0 \Rightarrow \int\frac{G'_n(t)}{G_n(t)}dt=\int-\alpha\lambda_n dt \Rightarrow Ln[G_n(t)]=-\alpha\lambda_n t+Ln(c) \Rightarrow G_n(t)=ce^{-\alpha\lambda_n t}$$

به ازای $c=1$ داریم $G_n(t)=e^{-\alpha\lambda_n t}$ بنابراین فقط در گزینه‌های (۱) و (۴) توابع $F_n(x)$ و $G_n(t)$ به صورت صحیح آمده‌اند. اما گزینه‌ی (۴) در شرط اولیه‌ی $\theta(x,0)=g(x)$ صدق نمی‌کند. وقتی $t=0$ قرار می‌دهیم حاصل آن برابر با $g(x)$ نمی‌شود. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۴: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\ ,\ u(x,0)=4\sin 2x\ ;\ 0\le x\le\pi\ ,\ t\ge 0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $4e^{-6t}\sin 2x$ ۲) $4e^{-3t}\sin 3x$ ۳) $4e^{-12t}\sin 2x+t\cos x$ ۴) $4e^{-12t}\sin 2x$

پاسخ: گزینه «۴» شرط مرزی همگن $u(0,t)=0$ نشان می‌دهد $F_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ سینوسی است. برای محاسبه‌ی λ_n شرط مرزی $u(\pi,t)=0$ را اعمال می‌کنیم. داریم: $F_n(\pi)=\sin(\sqrt{\lambda_n}\pi)=0$ بنابراین $\sqrt{\lambda_n}\pi=n\pi$ است، یعنی $\lambda_n=n^2$. همچنین می‌توان چنین گفت، از آن جا که دو شرط مرزی یکسان در $x=0$ و $x=\pi$ داریم: $\lambda_n=(\frac{n\pi}{\pi})^2=n^2$ و $F_n(x)=\sin nx$ است. بنابراین فرم کلی جواب در مسأله‌ی انتقال حرارتِ فوق چنین است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-c^2n^2t}\sin nx\quad,\quad(c^2=3)$$

برای مشخص شدن مقدار a_n، از شرط اولیه‌ی داده شده استفاده می‌کنیم:

$$u(x,0)=4\sin 2x\xrightarrow{t=0}4\sin 2x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

با نگاهی به تساوی فوق، واضح است که $\sin 2x$ به ازای $n=2$ در سری فوریه موجود است. پس a_n فقط برای $n=2$ غیرصفر است. و مقدارش برابر ۴ می‌شود و لذا داریم:

$$u(x,t)=a_2e^{-3\times 4t}\sin 2x=\mathbf{4e^{-12t}\sin 2x}$$

مثال ۵: بدنه یک میله به طول L عایق بوده و حرارت در یک بعد منتقل می‌شود، درجه حرارت اولیه میله ثابت و برابر با u_0 است. در لحظه‌ی $t=0$ درجه حرارت ابتدا و انتهای میله به‌طور ناگهانی صفر می‌شود. معادله‌ی $u(x,t)$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{4u_0}{n\pi}e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{L^2}}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۲) $\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{4u_0}{n\pi}e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{L^2}}\cos\frac{n\pi}{L}x$

۳) $\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{4u_0}{(n\pi)^2}e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{L^2}}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۴) $\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{4u_0}{(n\pi)^2}e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{L^2}}\cos\frac{n\pi}{L}x$

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم که $F_n(x)=a_n\cos\sqrt{\lambda_n}x+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}x$ است. حال شرط مرزی $u(0,t)=0$ نشان می‌دهد که $F_n(0)=0$ است. بنابراین $F_n(x)=b_n\sin\sqrt{\lambda_n}x$ سینوسی است. از طرفی شرط مرزی $u(L,t)=0$ ایجاب می‌کند که $\sin(\sqrt{\lambda_n}L)=0$ باشد، یعنی $\sqrt{\lambda_n}L=n\pi$ در نتیجه $\lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2$ است.

می‌دانیم که فرم کلی جواب معادله‌ی حرارت برای میله‌ی متناهی با شرایط مرزی فوق چنین خواهد بود:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}t}$$

برای تعیین ضرایب B_n از شرط اولیه‌ی $u(x,0)=u_0$ استفاده می‌کنیم. به ازای $t=0$ در سری جواب داریم:

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

با استفاده از آنالیز فوریه خواهیم داشت:
$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0 \sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = \frac{2u_0}{L}\times\frac{-L}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\Big|_0^L = -\frac{2u_0}{n\pi}(\cos(n\pi)-1) = -\frac{2u_0}{n\pi}((-1)^n-1)$$

برای n های زوج $(-1)^n = 1$ می‌باشد پس $B_n = 0$. برای n های فرد داریم؛ $(-1)^n = -1$، بنابراین $B_n = \frac{4u_0}{n\pi}$. به این ترتیب خواهیم داشت:
$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{4u_0}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}t}$$

مثال ۶: جواب حالت پایدار مسأله $\begin{cases} u_t = 2u_{xx} \\ u(0,t)=10 \ , \ u(3,t)=40 \ , \ u(x,0)=25 \end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲۵ ۳) $10x+10$ ۴) $x^2+7x+10$

پاسخ : گزینه «۳» چون دمای میله در دو طرف آن ثابت است، لذا با توجه به نکات فوق داریم:
$$u(x,t) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{L} \Rightarrow u(x,t) = 10+(40-10)\frac{x}{3} = 10+10x$$

مثال ۷: همواره بایستی به جواب معادله گرمای $u_t = c^2u_{xx}$ با شرایط مرزی $u(0,t) = A$ و $u(L,t) = B$ جواب زیر را نیز افزود:
(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $w(x) = \frac{A-B}{L}x + A$ ۲) $w(x) = \frac{B-A}{L}x + A$ ۳) $w(x) = \frac{A-B}{L}x + B$ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به مطالب گفته شده در مورد تغییر متغیر در معادلات ناهمگن واضح است.

مثال ۸: جواب معادله زیر برای مسأله Boundary – Value چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۲)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \ u(x,0) = \sin 2x \end{cases}$$

۱) $e^{-8t}\cos 2x$ ۲) $e^{8t}\sin 2x$ ۳) $e^{-8t}\sin 2x$ ۴) $e^{8t}\cos 2x$

پاسخ : گزینه «۳» با اعمال شرایط مرزی $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ملاحظه می‌شود گزینه‌های ۱ و ۴ غلط هستند، از طرفی با توجه به مشتق‌گیری از گزینه (۳) و قرار دادن آن در معادله $u_t = 2u_{xx}$ داریم: $-8e^{-8t}\sin 2x = [4\cos 2x.e^{-8t}]' \Rightarrow -8e^{-8t}\sin 2x = -8\sin 2x.e^{-8t}$
حال از آن‌جا که ضرب یا تقسیم جواب بر عدد ثابت ایرادی ندارد، داریم: $u = \sin 2xe^{-8t}$.

مثال ۹: اگر در میله‌ای به طول $L = 1m$ توزیع ابتدایی دما به صورت $T(x,0) = 100\sin\pi x$ باشد و توزیع دمایی این میله در فرمول $\pi^2T_t = T_{xx}$ صدق کند و $T(0,t) = T(1,t) = 0$ آنگاه مقدار $T(0/5,2)$ تقریباً کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱/۸ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۳/۸

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم که فرم کلی جواب در معادله‌ی انتقال حرارتِ $T_t = c^2T_{xx}$ برای میله‌ی متناهی به طول L، چنین است:
$$T(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + b_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,x)e^{-c^2\lambda_n}$$
اکنون کافیست با استفاده از شرایط مرزی همگن، جزئیات جواب را مشخص کنیم. از آنجا که شرط مرزی در $x = 0$ روی u داده شده، جواب‌های ویژه به شکل $F_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ هستند. در نتیجه جمله ثابت a_0 را نیز نخواهیم داشت. در ضمن شرط $u(1,t) = 0$ نشان می‌دهد که $F_n(1) = \sin\sqrt{\lambda_n} = 0$ است پس $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$ خواهد بود. به این ترتیب فرم کلی جواب چنین است:
$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2c^2t}$$
در ضمن دقت کنید که در این مثال $c^2 = \frac{1}{\pi^2}$ است. در نتیجه داریم:
$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)e^{-n^2t}$$
و برای یافتن ضرایب b_n از شرط اولیه‌ی ناهمگن $T(x,0) = 100\sin\pi x$ استفاده می‌کنیم. به ازای $t = 0$ داریم:
$$100\sin\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$$
اولین جمله‌ی سری فوریه، شامل $\sin\pi x$ است. بنابراین از تساوی طرفین داریم: $b_1 = 100$ و $b_n = 0$ برای $n \geq 2$. در نتیجه $T(x,t) = 100\sin(\pi x)e^{-t}$ است. با جایگذاری $x = \frac{1}{2}$ و $t = 2$ خواهیم داشت:
$$T(\frac{1}{2},2) = 100\sin(\frac{\pi}{2})e^{-2} = \frac{100}{e^2} \simeq 13/5$$

مثال ۱۰: برای مسأله یک بعدی حرارت $\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , t > 0 , 0 < x < \pi$ و $u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$، مقدار $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ کدام است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱ ۲) c ۳) ۰ ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به متن کتاب اگر $u(0,t) = u_1$ و $u(L,t) = u_2$ آنگاه دمای جسم پس از گذشت زمان زیاد و رسیدن به تعادل از رابطه $u(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{L}$ به دست می‌آید و با توجه به اینکه $u_1 = u_2 = 0$ پس $u(x) = 0$ خواهد بود.

مثال ۱۱: ویژه مقدارها و ویژه توابع مسأله اشتروم ـ لیوویل وابسته به مسأله مقدار اولیه‌ی: $\begin{cases} u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \\ \lim_{x\to 0^+} u(x,t) = \lim_{x\to\pi^-} u(x,t) = 0 , t > 0 \\ \lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) \qquad 0 < x < \pi \end{cases}$ کدامند؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۸)

۱) $\lambda = n$ ، $\sin\sqrt{n}x$ ، $n = 1,2,\dots$
۲) $\lambda = n^2$ ، $\sin nx$ ، $n = 1,2,\dots$
۳) $\lambda = \frac{1}{n}$ ، $\sin\frac{x}{n}$ ، $n = 1,2,\dots$
۴) $\lambda = \sqrt{n}$ ، $\sin nx$ ، $n = 1,2,\dots$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به متن کتاب، چون معادله‌ی دیفرانسیل داده شده دارای ۲ شرط دیریکله است لذا داریم:

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 \Rightarrow \lambda_n = (\frac{n\pi}{\pi})^2 = n^2 \qquad \text{و} \qquad F_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\,x = \sin nx$$

مثال ۱۲: جواب $u(x,t)$ معادله گرما $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \ 0 < x < \pi , t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & , \ u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $u(x,t) = \sum E_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$
۲) $u(x,t) = \sum E_n e^{(n-\frac{1}{2})^2 t}\sin(\frac{2n-1}{2})x$
۳) $u(x,t) = \sum E_n e^{-(n-\frac{1}{2})^2 t}\cos(\frac{2n-1}{2})x$
۴) $u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum E_n e^{-n^2 t}\cos(nx)$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

می‌دانیم که در معادله‌ی گرمای متناهی $F_n(x) = a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + b_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$ است و $G_n(t) = e^{-\lambda_n c^2 t}$. در $x = 0$ شرط $u_x(0,t) = 0$ نشان می‌دهد که $F_n'(0) = 0$ است و در نتیجه $F_n(x) = a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$ کسینوسی است. از طرفی شرط مرزی $u(\pi,t) = 0$ نشان می‌دهد که $F_n(\pi) = 0$ است. پس $a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,\pi = 0$ است. با فرض $a_n \neq 0$ خواهیم داشت $\sqrt{\lambda_n}\,\pi = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ بنابراین $\sqrt{\lambda_n} = \frac{2n-1}{2}$ است. در ضمن $c^2 = 1$ است. به این ترتیب داریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n-1}{2}x\,e^{-\frac{(2n-1)^2}{4}t}$$

مثال ۱۳: فرض کنید b_n ضریب فوریه « n ام» بسط سینوسی تابع x^3 باشد. جواب مسأله:

$$\begin{cases} t>0\,,\,0<x<\pi\,,\,u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) \\ u(0^+,t)=0\,,\,u(\pi^-,t)=0 \\ u(x,0^+)=x^3 \end{cases}$$

کدام است؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\cos nx$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-nt}\sin nt$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin nx$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 x}\sin nt$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

یک مسأله‌ی حرارت برای میله‌ی متناهی به طول $L=\pi$ داریم. شرط $u(0^+,t)=0$ نشان می‌دهد که $F_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$ سینوسی است. (این که در شرایط مرزی این مثال به جای ۰ یا π از 0^+ یا π^- استفاده شده است، تأثیری بر محاسبات ما ندارد.) از شرط مرزی $u(\pi^-,0)$ داریم $F_n(\pi^-)=0$ یعنی $\sin(\sqrt{\lambda_n}\pi)=0$، بنابراین $\sqrt{\lambda_n}=n$ است. جواب $G_n(t)$ نیز در معادله‌ی حرارت به شکل $e^{-\lambda_n c^2 t}=e^{-n^2 t}$ است $(c^2=1)$. در نتیجه داریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx e^{-n^2 t}$$

در این جا حل ما تمام است و گزینه‌ی (۳) جواب خواهد بود. اما دقت کنید که اگر شرط اولیه‌ی $u(x,0^+)=x^3$ را اعمال کنیم داریم:

$x^3=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ و b_n همان‌طور که در مسأله آمده است، ضریب فوریه‌ی سینوسیِ تابع x^3 است.

مثال ۱۴: یک جواب معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t}$ کدام است؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۱)

۱) $z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n e^{a_n x}+b_n e^{int})$

۲) $z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x+b_n e^{it}}$

۳) $z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx+a_n)e^{-kn^2 t}$

۴) $z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx+a_n)\sin(nt+b_n)$

پاسخ : گزینه «۳» با استفاده از روش تفکیک متغیرها خواهیم داشت:

$$z=G(t)F(x)\ \Rightarrow F''G=\frac{1}{k}FG'$$

$$\frac{F''}{F}=\frac{G'}{kG}=-\lambda \Rightarrow \begin{cases} F''+\lambda F=0 \\ \frac{G'}{G}=-k\lambda \end{cases}$$

از حل معادلات فوق خواهیم داشت:

$$F(x)=\alpha_n\cos\sqrt{\lambda}x+\beta_n\sin\sqrt{\lambda}x=C_n\cos(\sqrt{\lambda}x+a_n)$$

از آنجا که هیچ شرط مرزی داده نشده است $\sqrt{\lambda}$ محدودیتی ندارد و می‌تواند موارد مختلفی اختیار کند. اما از گزینه‌ها معلوم است که $\sqrt{\lambda}=n$ است.

بنابراین $F(x)=\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx$، $G(t)=e^{-kn^2 t}$ بنابراین داریم:

$$z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\cos(nx+a_n)e^{-kn^2 t}$$

توضیح: در مورد فرمول مثلثاتی استفاده شده، همواره داریم:

$$a\cos x+b\sin x=c\cos(x+\theta) \quad \text{و} \quad c=\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ \theta=\tan^{-1}\frac{a}{b}-\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۵: اگر u جواب مسأله رسانش گرما $\begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 \le x \le \pi \ , \ t \ge 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos 3x & 0 < x < \pi \end{cases}$ باشد، آنگاه مقدار $u(\pi, \frac{1}{9})$ کدام گزینه زیر است؟

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۱)

۱) $e-1$ ۲) $\frac{e-1}{e}$ ۳) $\frac{1-e}{e}$ ۴) $\frac{e+1}{e}$

پاسخ: گزینه «۲» شرط مرزی $u_x(0,t) = 0$ نشان می‌دهد، $F_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x)$ کسینوسی است. شرط مرزی $u_x(\pi,t) = 0$ نیز ایجاب می‌کند که $F_n'(\pi) = -\sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n}\pi) = 0$ باشد. در نتیجه $\sqrt{\lambda_n}\pi = n\pi$ است و داریم $\lambda_n = (\frac{n\pi}{\pi})^2 = n^2$. فرم کلی جواب چنین است:

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2 \lambda_n t} \cos\sqrt{\lambda_n} x \xrightarrow{c=1, \sqrt{\lambda_n}=n} u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

از طرفی طبق شرط اولیه $u(x,0) = 1 + \cos 3x$ خواهیم داشت:

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = 1 + \cos 3x \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_3 = 1 \\ A_n = 0 \ (n \ne 0, 3) \end{cases}$$

$$u(x,t) = 1 + e^{-9t} \cos 3x \Rightarrow u(\pi, \frac{1}{9}) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

مثال ۱۶: جواب ماندگار (مانا) معادله حرارت $u_t = x^2 u_{xx} - 6x u_x + 6u$ و $0 \le x \le 1$ ، $u_x(0,t) = 6$ ، $u(1,t) = 7$ عبارت است از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $1 + 6x^5$ ۲) $x + 6x^5$ ۳) $x + 6x^6$ ۴) $6x + x^6$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

در حالت ماندگار جواب معادله حرارت به t بستگی ندارد، پس $u_t = 0$ است. بنابراین داریم: $x^2 u_{xx} - 6x u_x + 6u = 0$

با استفاده از اطلاعات درس معادلات دیفرانسیل، می‌دانیم که معادله فوق از نوع کوشی اویلر است و با تغییر متغیر $z = \text{Ln}x$ به معادله‌ی با ضرایب ثابت $u_{zz} + (-6-1)u_z + 6u = 0$ تبدیل می‌شود. حل این معادله‌ی جدید به صورت زیر می‌باشد:

معادله مشخصه : $r^2 + (-6-1)r + 6 = 0 \Rightarrow r^2 - 7r + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 6 \\ r = 1 \end{cases}$

$$u = k_1 e^{6z} + k_2 e^{z} = k_1 x^6 + k_2 x^1 \xrightarrow[u_x(0,t)=6]{u(1,t)=7} \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow u = x^6 + 6x$$

درسنامه۴: حل و بررسی معادله‌ی لاپلاس

مثال۱: فرم کلی جواب مسأله انتقال حرارت پایدار دو بعدی $\begin{cases} T_{xx}+T_{yy}=۰ \ , \ ۰<x<L \ , \ ۰<y<L \\ T(۰,y)=T(L,y)=T(x,۰)=۰ \ , \ T(x,L)=f(x) \end{cases}$ کدام است؟

۱) $T(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}A_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\sinh(\frac{n\pi y}{L})$

۲) $T(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}A_n \cosh(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi y}{L})$

۳) $T(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}A_n \cosh(\frac{n\pi x}{L})\sinh(\frac{n\pi y}{L})$

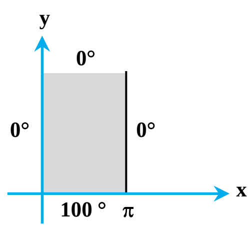
۴) $T(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}A_n \sinh(\frac{n\pi x}{L})\sinh(\frac{n\pi y}{L})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» همه شرایط مرزیِ مربوط به x همگن هستند، بنابراین $F_n(x)$ مثلثاتی است و $G_n(y)$ نمایی (یا هذلولوی) خواهد بود. بـه بیـان دیگـر از آن جـا کـه شـرط مـرزی نـاهمگن بـر حسـب x اسـت، $F_n(x)$ مثلثـاتی و $G_n(y)$ نمـایی خواهـد بـود. در $x=۰$ شـرط $T(۰,y)=۰$ نشان می‌دهد $F_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$ سینوسی است و شرط $T(L,y)=۰$ می‌گویـد $F_n(L)=\sin(\sqrt{\lambda_n}L)=۰$ در نتیجـه $\sqrt{\lambda_n}L=n\pi$ و داریـم $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{L}$.

حال که λ_n معلوم شد به پیروی از آن، $G_n(y)$ ترکیب خطیِ $e^{-\frac{n\pi}{L}y}$ و $e^{\frac{n\pi}{L}y}$ است. با توجه به کران‌دار بـودنِ y، $(۰<y<L)$ هـر دوی آن‌هـا در جـواب حاضرند و توابع هذلولویِ $\cosh\frac{n\pi}{L}y$ و $\sinh\frac{n\pi}{L}y$ را تولید می‌کنند. حال شرط همگن $T(x,۰)=۰$ نشان می‌دهد که به ازای $y=۰$ باید جواب صفر شود یعنی $G_n(y)=\sinh\frac{n\pi}{L}y$ است:

$$T(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}A_n \sin\frac{n\pi}{L}x\sinh\frac{n\pi}{L}y$$

مثال۲: یک نوار نیمه متناهی به عرض π که وجوه زیر و روی آن کاملاً عایق‌بندی شده‌اند، با شرایط کرانه‌ای مطابق شکل داده شده است. دمای یک نقطه دلخواه از آن در حالت تعادل کدام است؟



۱) $\frac{۲۰۰}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{n^۲}\sin nx.e^{ny}$

۲) $\frac{۲۰۰}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{n}\sin nx.e^{ny}$

۳) $\frac{۲۰۰}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{n}\sin nx.e^{-ny}$

۴) $\frac{۲۰۰}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{n^۲}\sin nx.e^{-ny}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» همان‌طور که از شکل پیداسـت شـرایط مـرزی همگـن را در $x=۰$ و $x=\pi$ داریـم. $(u(۰,y)=u(\pi,y)=۰)$ بنـابراین $F_n(x)$ مثلثـاتی و $G_n(y)$ نمـایی اسـت. در $x=۰$ داریـم $u=۰$، پـس $F_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ سینوسـی اسـت. شـرط $u(\pi,y)=۰$ نیـز نتیجـه مـی‌دهـد $F_n(\pi)=\sin(\sqrt{\lambda_n}\pi)=۰$، بنابراین $\sqrt{\lambda_n}\pi=n\pi$ و داریم $\sqrt{\lambda_n}=n$. به این ترتیب $F_n(x)=\sin nx$ است. جواب $G_n(y)$ شـامل ترکیـب خطـیِ e^{ny} و e^{-ny} است. اما در این مثال داریم $۰<y<\infty$. بنابراین e^{ny} بی‌کران می‌شود و نمی‌تواند در جواب ظـاهر شـود. در نتیجـه $G_n(y)=e^{-ny}$ خواهـد بـود.

سریِ جواب را می‌نویسیم:

$$u(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}B_n \sin nxe^{-ny}$$

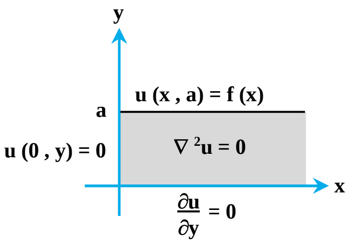
برای محاسبه‌ی B_n از شرط مرزی ناهمگن $u(x,۰)=۱۰۰$ استفاده می‌کنیم. به ازای $y=۰$ داریم:

$$۱۰۰=\sum_{n=۱}^{\infty}B_n \sin nx$$

از آنالیز فوریه داریم:

$$B_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}۱۰۰\sin nxdx=-\frac{۲۰۰}{n\pi}\cos nx\Big|_۰^{\pi}=\frac{۲۰۰}{\pi n}[۱-(-۱)^n]$$

مثال ۳: عبارت پتانسیل الکتریکی $u(x,y)$ در ناحیه نیم نوار داده شده و با شرایط مرزی نشان داده شده به چه شکل خواهد بود؟



۱) $u(x,y)=\int_0^\infty D(p)\cosh(py)e^{-px}dp$

۲) $u(x,y)=\int_0^\infty D(p)\sinh(px)\cos(py)dp$

۳) $u(x,y)=\int_0^\infty D(p)\sin(px)\cosh(py)dp$

۴) $u(x,y)=\int_0^\infty D(p)\cos(py)e^{-px}dp$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای متغیر y یک شرط مرزی ناهمگن $u(x,a)=f(x)$ را داریم. اما x فقط یک شرط مرزی دارد که آن هم همگن است. بنابراین $F(x)$ مثلثاتی است؛ و تعیین می‌کند که جواب به شکل سری است یا انتگرال. $G(y)$ نیز نمایی (یا هذلولوی) است.

چون $0<x<\infty$ بی‌کران است، پس $\lambda=\omega^2$ و جواب به شکل انتگرال فوریه است. همچنین $u(0,y)=0$ است در نتیجه $F_\omega(x)=\sin\omega x$ سینوسی خواهد بود. جواب $G_\omega(y)$ نیز شامل $e^{-\omega y}$ و $e^{\omega y}$ است. از آنجا که $0<y<a$ کران‌دار است؛ هر دو جمله می‌توانند در جواب حاضر باشند و از ترکیب خطی آن‌ها $\cosh\omega y$ و $\sinh\omega y$ ساخته شوند. اما شرط همگن $u_y(x,0)=0$ نشان می‌دهد $G_\omega(y)$ کسینوسی است. (البته کسینوسِ هیپربولیک) به این ترتیب داریم:

$$u(x,y)=\int_0^\infty A(\omega)\sin\omega x\cosh\omega y d\omega$$

که همان گزینه‌ی (۳) است. (در گزینه‌ها به جای ω از p استفاده شده است.)

مثال ۴: جواب معادله لاپلاس مقابل
$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u(0,y)=0\ ,\ 0\le x\le 1\\ u(1,y)=0\ ,\ y\ge 0\\ u(x,0)=\sin^3(2\pi x)\end{cases}$$
، که در آن $u(x,y)$ تابعی کران‌دار است، کدام گزینه است؟

۱) $\frac{3}{4}e^{\pi y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-3\pi y}\sin(6\pi x)$

۲) $\frac{3}{4}e^{-2\pi y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-6\pi y}\sin(6\pi x)$

۳) $\frac{3}{4}e^{-2y}\sin(2\pi x)+\frac{1}{4}e^{-6y}\sin(6\pi x)$

۴) $\frac{3}{4}e^{-2y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-6y}\sin(6\pi x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در این مثال $0\le x\le 1$ متناهی است و $0<y<\infty$ نامتناهی. آیا این را یک مسأله‌ی پتانسیل متناهی فرض کنیم که سری فوریه دارد یا مسأله‌ای نامتناهی که انتگرال فوریه دارد؟ برای یافتن پاسخ باید ببینیم کدام متغیر دارای شرایط مرزی همگن (یا کران‌داری) است. در این مثال x دو شرط همگن دارد. بنابراین چون x متناهی است، جواب عمومی به شکل سری فوریه نوشته می‌شود. در $x=0$ شرط همگن $u(0,y)=0$ را داریم که نشان می‌دهد $F_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ سینوسی است. حالا شرط مرزی $u(1,y)=0$ نشان می‌دهد که $F_n(1)=0$ است، پس $\sin(\sqrt{\lambda_n})=0$ و در نتیجه $\sqrt{\lambda_n}=n\pi$ خواهد بود. (یک راه دیگر آن است که چون شرط مرزی ناهمگن به صورت $f(x)=\sin^3(2\pi x)$ یعنی بر حسب x است، پس متغیر x مثلثاتی است و این متغیر است که λ را تعیین می‌کند.) جواب $u(x,y)$ به فرم مقابل است:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^\infty B_n e^{-\sqrt{\lambda_n}y}\sin\sqrt{\lambda_n}x\xrightarrow{\sqrt{\lambda_n}=n\pi}u(x,y)=\sum_{n=1}^\infty B_n e^{-n\pi y}\sin n\pi x$$

با اعمال شرط مرزی $u(x,0)=\sin^3(2\pi x)$، ضریب B_n را محاسبه می‌کنیم همچنین از اتحاد مثلثاتی $\sin^3(2\pi x)=\frac{3}{4}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}\sin(6\pi x)$ نیز استفاده می‌کنیم:

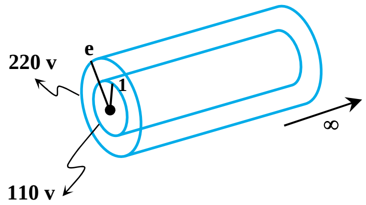
$$u(x,0)=\sin^3(2\pi x)=\frac{3}{4}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}\sin(6\pi x)=\sum_{n=1}^\infty B_n\sin n\pi x$$

با توجه به تساوی طرفین، فقط دو مقدار ویژه به ازای $n=2,6$ در جواب خواهیم داشت:

$$u(x,y)=\frac{3}{4}e^{-2\pi y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-6\pi y}\sin(6\pi x)$$

مثال۵: هرگاه پتانسیل موجود در روی بدنه دو استوانه طویل و هم‌محور به شعاع‌های قاعده ۱ و e به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشد و معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ باشد، آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر کدام است؟

۱) $110(1+Lnr)$ ۲) $\frac{1}{1-e}(\frac{110}{r}-220e+110)$ ۳) $\frac{110}{e-1}(r+e-2)$ ۴) $\frac{110}{e+1}(r+1+Lnr)$



پاسخ : گزینه «۱» در ناحیه‌ی بین دو استوانه داریم $1\le r\le e$ و $0\le\theta\le 2\pi$. در نتیجه θ همه‌ی مقادیر خود را در یک دور کامل، اختیار کرده است. همچنین فقط دو شرط مرزی به صورت $u(1,\theta)=110$ و $u(e,\theta)=220$ داریم که به θ وابسته نیستند. در نتیجه جواب $u(r,\theta)$ نیز تابعی یک متغیره بر حسب r است و داریم $u_{\theta\theta}=0$. طبق توضیحات فوق خواهیم داشت $u=ALnr+B$.

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$u(1,\theta)=ALn1+B=B=110$$
$$u(e,\theta)=ALne+B=A+B=220$$

بنابراین $A=B=110$ است و خواهیم داشت: $u=110(Lnr+1)$

مثال۶: فرض کنید D ناحیه‌ای به شکل دایره و به شعاع ۳ باشد و ارتعاش در آن به صورت شعاعی تغییر کند. اگر ارتعاش روی کرانه‌ی D و سرعت اولیه‌ی آن داده شده باشد، مدل ریاضی ارتعاش در D کدام است؟

۱) $u_{rr}=u_{tt}+c^2u_t, u(r,0)=t(r), u_t(r,0)=g(r), u(3,t)=0$

۲) $u_{tt}=3^2(u_{rr}+u_r), u(r,0)=u_t(r,0)=u(3,t)=0$

۳) $u_{rr}=c^2u_{tt}, u(t,0)=u(0,r)=f(r), u(3,t)=0$

۴) $u_{tt}=c^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r), u(r,0)=f(r), u_t(r,0)=g(r), u(3,t)=0$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانید که معادله‌ی موج یک بعدی به صورت $u_{xx}=\frac{1}{c^2}u_{tt}$ است. حال اگر در یک ناحیه‌ی دو بعدی، ارتعاش رخ دهد این معادله به صورت $u_{xx}+u_{yy}=\frac{1}{c^2}u_{tt}$ در می‌آید. یعنی $\nabla^2u=\frac{1}{c^2}u_{tt}$.

از طرفی معادله‌ی لاپلاس در مختصات قطبی به صورت مقابل قابل نمایش است:
$$\nabla^2u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

پس معادله‌ی موج در مختصات قطبی به شکل مقابل قابل نمایش است:
$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{1}{c^2}u_{tt}$$

گفته شده ارتعاش به صورت شعاعی تغییر می‌کند، بنابراین $u_{\theta\theta}=0$ و لذا معادله به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:
$$\mathbf{c^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r)=u_{tt}}$$

که فقط گزینه (۴) این شرایط را دارد.

مثال۷: پتانسیل الکترواستاتیک بر روی نیم‌دایره‌های فوقانی و تحتانی یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع واحد به ترتیب صفر و یک است. اگر مقدار پتانسیل در نقاط درونی دایره برابر با: $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta]\,,\ 0\le r\le 1\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi$ باشد، آنگاه به ازای هر $n>0$ داریم:

۱) $B_n=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}, A_n=0$ ۲) $B_n=\frac{1+(-1)^n}{n\pi}, A_n=1$ ۳) $B_n=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}, A_n=0$ ۴) $B_n=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}, A_n=1$

پاسخ : گزینه «۱»

$$u(1,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta]=\begin{cases}0 & ;\ \text{بر نیم‌دایره فوقانی}\\ 1 & ;\ \text{بر نیم‌دایره تحتانی}\end{cases}$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}1\times\cos n\theta d\theta=0 \quad \text{و} \quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}1\times\sin n\theta d\theta=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}$$

مثال ۸: پاسخ معادله دیفرانسیل پاره‌ای $\begin{cases}\nabla^2 u=0 \ , \ 0\le r\le 1 \ , \ 0\le\theta\le\pi \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \\ u(1,\theta)=f(\theta)\end{cases}$ ، کدام است؟

۱) $\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta \\ A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{nr} \sin n\theta \\ A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-nr} \sin n\theta \\ A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta.\theta d\theta\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{nr} \sin n\theta \\ A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta.\theta d\theta\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۱» این سؤال با توجه به شکل کلی جواب به راحتی پاسخ داده می‌شود اما برای تمرین، آن را از روش ضربی حل می‌کنیم:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

به کمک روش تفکیک متغیرها، می‌توان چنین نوشت: $u(r,\theta)=F(r)G(\theta)$

$$\nabla^2 u=F''G+\frac{1}{r}F'G+\frac{1}{r^2}FG''=0 \Rightarrow \boxed{-\frac{r^2F''+rF'}{F}=\frac{G''}{G}} \quad (1)$$

طرف اوّل رابطه فوق، تابعی از r و طرف دوّم آن تابعی از θ است، بنابراین لازم است که هر دو طرف برابر مقدار ثابتی باشند. دو شرط همگن در $\theta=0$ و $\theta=\pi$ نشان می‌دهد که این عدد ثابت، منفی است. آن را $-\lambda$ می‌نامیم.

$$-\frac{r^2F''+rF'}{F}=\frac{G''}{G}=-\lambda \Rightarrow \frac{G''}{G}=-\lambda \Rightarrow G(\theta)=k_1\sin\sqrt{\lambda}\theta+k_2\cos\sqrt{\lambda}\theta$$

$$u(r,0)=0 \Rightarrow G(0)=0 \Rightarrow k_2=0 \quad \text{و} \quad u(r,\pi)=0 \Rightarrow G(\pi)=0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}=n \Rightarrow \boxed{G(\theta)=k_1\sin n\theta}$$

با جایگذاری $\lambda=n^2$ در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$-\frac{r^2F''+rF'}{F}=-n^2 \ , \ r^2F''+rF'-n^2F=0 \xrightarrow{\text{معادله کوشی‌اویلر}}$$

$$\text{چند جمله‌ای مشخصه}=s(s-1)+s-n^2=0 \Rightarrow s^2=n^2 \Rightarrow s=\pm n \Rightarrow F(r)=k_3r^n+k_4r^{-n}$$

شرط کرانداری پاسخ در $r=0$ ایجاب می‌کند که: $k_4=0$، بنابراین داریم:

$$u_n(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nF_n(r)G_n(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^n\sin n\theta$$

$$u(1,\theta)=f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta \Rightarrow A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta$$

مثال ۹: جواب مسأله لاپلاس زیر کدام است؟

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ , \quad y>0 \\ \lim\limits_{y\to 0^+} u(x,y)=G(x)=\begin{cases}1 \ , \ x>0 \\ 0 \ , \ x<0\end{cases}\end{cases}$$

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{Arctg}\frac{y}{x}$　　۲) $1+\frac{1}{\pi}\text{Arctg}\frac{y}{x}$

۳) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{Arctg}\frac{x}{y}$　　۴) $1-\frac{1}{\pi}\text{Arctg}\frac{x}{y}$

پاسخ: گزینه «۳» این مسأله را با دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: ابتدا با توجه به فرمول پوآسون برای نیم‌صفحه، مسأله را حل می‌کنیم:

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yG(\eta)d\eta}{y^2+(x-\eta)^2} \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y\times(0)d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y\times 1d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}$$

با توجه به ضابطه‌ی $G(x)$، مقدار انتگرال در بازه‌ی $-\infty$ تا ۰ برابر صفر می‌شود (چون به ازای $x<0$ مقدار $G(x)$ صفر است) لذا داریم:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}=\frac{y}{\pi}\left[-\frac{1}{y}\text{Arctg}\frac{x-\eta}{y}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{\pi}\text{Arctg}(-\infty)+\frac{1}{\pi}\text{Arctg}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\pi}\text{Arctg}\left(\frac{x}{y}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Arctg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

روش دوم: با توجه به این که در نیم‌صفحه $y>0$ جواب به شعاع ارتباطی ندارد، لذا می‌توانیم جواب معادله لاپلاس را در مختصات قطبی به فرم $u(r,\theta)=\mathbf{A\theta+B}$ در نظر بگیریم (چون u به r بستگی ندارد، خواهیم داشت $u_r=u_{rr}=0$ در نتیجه معادله لاپلاس به صورت $u_{\theta\theta}=0$ درمی‌آید که با حل آن به $u=A\theta+B$ می‌رسیم)، با لحاظ کردن این نکته که به ازای $x>0$، باید $\theta=0$ و به ازای $x<0$ باید $\theta=\pi$ لحاظ شود، داریم:

$$u(x,0)=\begin{cases}1 \ ; \ x>0 \\ 0 \ ; \ x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1=A\times(0)+B \\ 0=A\times(\pi)+B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-\frac{1}{\pi} \\ B=1\end{cases}$$

پس جواب به شکل کلی مقابل نوشته می‌شود:

$$u(r,\theta)=A\theta+B=1-\frac{\theta}{\pi}\xrightarrow{\theta=\text{Arctg}\frac{y}{x}} u(x,y)=1-\frac{1}{\pi}\text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Arctg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

توضیح: در قسمت آخر از تساوی $\text{Arctg}\left(\frac{x}{y}\right)+\text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ استفاده کردیم.

مثال ۱۰: اگر پاسخ معادلهٔ لاپلاس در نیم صفحه بالای محور x با شرایط مرزی روی محور x:
$$u(x,0)=\begin{cases}0 & ;\ |x|>1 \text{ برای}\\ u_0\ (\text{ثابت}) & ;\ |x|<1 \text{ برای}\end{cases}$$
را با $u(x,y)$ نمایش دهیم، آنگاه مقدار $u(0,1)$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر
۲) $\frac{u_0}{2}$
۳) $\frac{u_0}{4}$
۴) $\frac{3u_0}{4}$

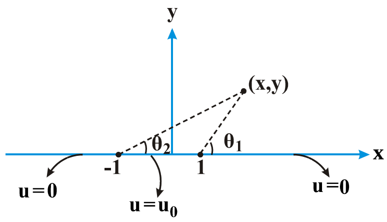
پاسخ : گزینه «۲» سؤال را به دو روش جواب می‌دهیم:

روش اول: با استفاده از فرمول پوآسون برای نیم‌صفحه فوقانی داریم:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\eta)d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{G(\eta)d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{(u_0)d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}=\frac{yu_0}{\pi}\Big[-\frac{1}{y}\text{Arctg}(\frac{x-\eta}{y})\Big]_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=-\frac{u_0}{\pi}\Big[\text{Arctg}(\frac{x-1}{y})-\text{Arctg}(\frac{x+1}{y})\Big]$$

سؤال $u(0,1)$ را از ما خواسته، لذا داریم:
$$u(0,1)=-\frac{u_0}{\pi}\Big[\text{Arctg}(\frac{0-1}{1})-\text{Arctg}(\frac{0+1}{1})\Big]=-\frac{u_0}{\pi}(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=-\frac{u_0}{\pi}(-\frac{\pi}{2})=\frac{u_0}{2}$$



روش دوم: با توجه به آن که ناحیه‌ی داده شده، نیم‌صفحه بالایی است و شرط مرزی روی محور x ها در داخل بازه‌ی $-1<x<1$ و خارج این بازه مقادیر متفاوتی دارد، می‌توانیم مطابق شکل زاویه‌های θ_1 و θ_2 را در نظر بگیریم و از فرم $u=A\theta_1+B\theta_2+C$ استفاده کنیم:

با توجه به شرایط مرزی داریم:
$$\begin{cases}\theta_1=0\ ,\ \theta_2=0\ ,\ u=0\ \Rightarrow 0=0+0+C\\ \theta_1=\pi\ ,\ \theta_2=0\ ,\ u=u_0\ \Rightarrow u_0=A\pi+0+C\\ \theta_1=\pi\ ,\ \theta_2=\pi\ ,\ u=0\ \Rightarrow 0=A\pi+B\pi+C\end{cases}$$

پس $C=0$، $A=\frac{u_0}{\pi}$ و $B=-\frac{u_0}{\pi}$ است. در نتیجه داریم: $u=\frac{u_0}{\pi}\theta_1-\frac{u_0}{\pi}\theta_2$

در نقطه‌ی $(x,y)=(0,1)$ داریم $\theta_1=\frac{3\pi}{4}$ و $\theta_2=\frac{\pi}{4}$ پس داریم: $u=\frac{u_0}{\pi}(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\frac{u_0}{2}$

مثال ۱۱: جواب معادله لاپلاس $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ در قطاع $0\le r\le a\ ,\ \alpha\le\theta\le\beta$ با شرایط مرزی: $u(r,\alpha)=u(r,\beta)=0\ ,\ u(a,\theta)=f(\theta)$ کدام است؟

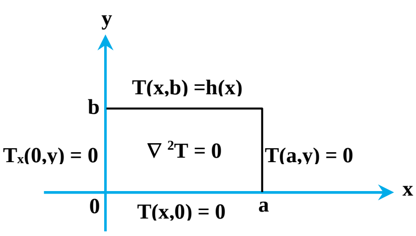
(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $u=g(r)$
۲) $u=g(\theta)$
۳) $u=g(r,\theta)$
۴) $u=g(\theta)+h(r)$

پاسخ : گزینه «۳» در حالت کلی جواب معادله‌ی لاپلاس در فرم قطبی تابعی دو متغیره به صورت $u=g(r,\theta)$ است. حال اگر در ناحیه‌ی داده شده داشته باشیم $0\le r<\infty$ و مقادیر مرزی نیز مستقل از r باشند، $u=g(\theta)$ تابعی یک متغیره بر حسب θ می‌شود. اگر هم در آن ناحیه داشته باشیم $-\pi\le\theta\le\pi$ (یا $0\le\theta\le 2\pi$) و شرایط مرزی مستقل از θ باشند داریم: $u=g(r)$. در این مثال هیچکدام از این حالات را نداریم پس $u=g(r,\theta)$ است.

مثال ۱۲: پایه متعامدی که در مسأله مقدار مرزی (یا کرانه‌ای) زیر برای بسط تابع تکه‌ای هموار داده شده‌ی h مورد استفاده قرار می‌گیرد، کدام است؟

(مهندسی مکانیک و مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)



۱) $\{\sin\frac{k\pi x}{a}\}_{k\in\mathbb{N}}$
۲) $\{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2a}\}_{k\in\mathbb{N}}$
۳) $\{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2a}\}_{k\in\mathbb{N}}$
۴) $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,4,\ldots\},\{\cos\frac{k\pi x}{a}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

می‌دانیم که متغیر x (که دو شرط مرزی همگن دارد) به شکل کلی $F(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$ در جواب ظاهر می‌شود. با توجه به شرایط مرزی $T_x(0, y) = T(a, y) = 0$ می‌دانیم که $F'(0) = 0$ و $F(a) = 0$ خواهند بود. شرایط بدست آمده را اعمال می‌کنیم:

$$F'(0) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(0) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(0) = 0 \Rightarrow c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

در نتیجه $F(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ است. طبق شرط مرزی دوم داریم:

$$F(a) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, a) = 0$$

اگر $c_1 = 0$ باشد که به جواب بدیهی $F(x) = 0$ می‌رسیم. فرض کنیم $\cos(\sqrt{\lambda}\, a) = 0$ باشد. بنابراین $\sqrt{\lambda_n}\, a = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $\sqrt{\lambda_n} = (2n-1)\frac{\pi}{2a}$ است. پایه‌ی متعامد جواب عبارت است از $\{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2a}x\}_{n\in\mathbb{N}}$. دقت کنید که چون فقط هارمونیک‌های فرد را داریم، عدد ثابت در پایه‌ی جواب ظاهر نمی‌شود. به بیان دیگر عدد ثابت در شرط مرزی $F(a) = 0$ صدق نمی‌کند، پس در پایه جواب قرار ندارند.

مثال ۱۳: کدامیک از توابع زیر در معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ صدق نمی‌کند؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ۲) $e^{-x}\cosh y$ ۳) $\operatorname{Ln}(x^2 + y^2)$ ۴) $\sin x \sinh y$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= e^{-x}\cosh y \\ u_{yy} &= e^{-x}\cosh y \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} \neq 0$$

اما بقیه‌ی گزینه‌ها در معادله‌ی $u_{xx} + u_{yy} = 0$ صدق می‌کنند.

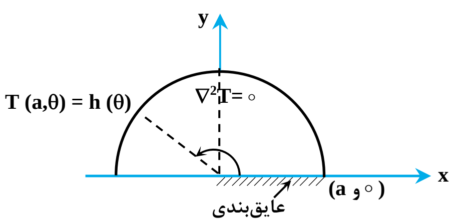
مثال ۱۴: کدام تابع یک جواب معادله لاپلاس دو بعدی است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۷)

۱) $u = e^{-9x}\cos y$ ۲) $u = \cos 4y \sin 2x$ ۳) $u = e^{xy}\sin y$ ۴) $u = \cos x \sinh y$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$u = \cos x \sinh y \Rightarrow \begin{cases} u_x = -\sin x \sinh y\,,\; u_{xx} = -\cos x \sinh y \\ u_y = \cos x \cosh y \quad u_{yy} = \cos x \sinh y \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

مثال ۱۵: در مسأله مقدار مرزی زیر در داخل یک نیم دایره به شعاع a حل معادله لاپلاس مورد نظر است. بر پیرامون نیم‌دایره، $h(\theta)$ تکه‌ای هموار فرض می‌شود. بر روی نیمه راست قطر عایق‌بندی داریم و بر روی نیمه چپ آن $T(r, \pi) = 0$، پایه (مبنای) متعامد بسط فوریه تابع $h(\theta)$ در این مسأله کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)



۱) $\{\cos k\theta\}_{k=0}^{\infty}$

۲) $\{\cos(\frac{2k-1}{2})\theta\} k \in \mathbb{Z}$

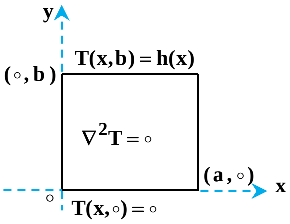
۳) $\{\cos(k - \frac{1}{2})\theta\} k \in \mathbb{N}$

۴) $\{\sin(k - \frac{1}{2})\theta\} k \in \mathbb{N}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

روی مرز $\theta = 0$ عایق‌بندی را داریم که به معنای شرط نیومن است، یعنی $T_\theta(0, r) = 0$ است. بنابراین $F_k(\theta) = \cos\sqrt{\lambda_k}\,\theta$ کسینوسی است. اما روی مرز $\theta = \pi$ داریم $T(\pi, r) = 0$. بنابراین $F_k(\pi) = \cos\sqrt{\lambda_k}\,\pi = 0$ است و داریم $\sqrt{\lambda_k}\,\pi = (2k-1)\frac{\pi}{2}$، به همین علت $\sqrt{\lambda_k} = (2k-1)\frac{\pi}{2L} = \frac{2k-1}{2}$ خواهد بود. در ضمن چون در $\theta = 0$، شرط همگن روی مشتق آمده است، پس جواب برحسب θ کسینوسی است. در نتیجه‌ی پایه‌ی متعامد جواب به صورت $\{\cos\frac{2k-1}{2}\theta\}_{k\in\mathbb{N}}$ است. یعنی به شکل $\{\cos(k - \frac{1}{2})\theta\}_{k\in\mathbb{N}}$ است. در این تست اگر به گزینه‌های (۲) و (۳) دقت کنیم و توجه داشته باشیم که $\frac{2k-1}{2}\theta = (k - \frac{1}{2})\theta$ است، این دو جواب یکسان هستند. تنها فرق آن‌ها در این است که $k \in \mathbb{N}$ عدد طبیعی است یا $k \in \mathbb{Z}$ عدد صحیح؟ می‌دانید که در سری فوریه‌ی مثلثاتی، متغیر سری یا $k \geq 0$ است یا $k \geq 1$. بنابراین هیچگاه $k \in \mathbb{Z}$ نداریم. به همین خاطر گزینه‌ی (۲) نادرست است.

مثال ۱۶: برای حل مسأله مقدار مرزی معادله دیفرانسیل لاپلاس در داخل مستطیل با شرایط مرزی داده شده طبق شکل، تابع تکّه‌ای هموار معلوم (مفروض h بر حسب کدام پایه متعامد باید بسط داده شود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)



$T(0,y)=T(a,y)$

$T_x(0,y)=T_x(a,y)$

۱) $\frac{1}{2}, \sin\frac{2\pi x}{a}, \cos\frac{2\pi x}{a}, \sin\frac{4\pi x}{a}, \cos\frac{4\pi x}{a}, \ldots, \sin\frac{2n\pi x}{a}, \cos\frac{2n\pi x}{a}, \ldots$

۲) $\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{a}, \cos\frac{2\pi x}{a}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{a}, \ldots$

۳) $\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi x}{a}, \cos\frac{4\pi x}{a}, \ldots, \cos\frac{2n\pi x}{a}, \ldots$

۴) $\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi x}{a}, \cos\frac{\pi x}{a}, \sin\frac{2\pi x}{a}, \cos\frac{2\pi x}{a}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{a}, \cos\frac{n\pi x}{a}, \ldots$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با توجه به شرایط مرزی، می‌بینیم که در $x=0$ و $x=a$ دو شرط تناوبی به صورت $T(0,y)=T(a,y)$ و $T_x(0,y)=T_x(a,y)$ داریم. می‌دانیم که فرم کلی $F_n(x)$ به صورت $F_n(x)=a_n\cos\sqrt{\lambda_n}x+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}x$ است. از دو شرط تناوبی داریم:

$$\begin{cases}F_n(0)=F_n(a)\\ F_n'(0)=F_n'(a)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{\lambda_n}a+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}a\\ \sqrt{\lambda_n}b_n=-\sqrt{\lambda_n}a_n\sin\sqrt{\lambda_n}a+\sqrt{\lambda_n}b_n\cos\sqrt{\lambda_n}a\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم $\sqrt{\lambda_n}$ را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_n\cos\sqrt{\lambda_n}a+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}a=a_n\\ b_n\cos\sqrt{\lambda_n}a-a_n\sin\sqrt{\lambda_n}a=b_n\end{cases}$$

با حل این دستگاه داریم: $\cos\sqrt{\lambda_n}a=1$ و $\sin\sqrt{\lambda_n}a=0$. بنابراین $\sqrt{\lambda_n}a=2n\pi$ یعنی $\sqrt{\lambda_n}=\frac{2n\pi}{a}$ برای $n=0,1,2,\ldots$ است. در نتیجه جمله‌ی ثابت a_0 هم در جواب ظاهر می‌شود. اکنون با توجه به آن که $F_n(x)$ شامل جمله‌ی ثابت و $\cos\frac{2n\pi}{a}x$ و $\sin\frac{2n\pi}{a}x$ است، گزینه‌ی (۱) پایه‌ی متعامد را به صورت کامل نشان می‌دهد. هر عدد ثابت غیر صفری می‌تواند نماینده‌ی جمله‌ی ثابت در پایه جواب باشد. معمولاً از عدد ثابت ۱ یا $\frac{1}{2}$ استفاده می‌کنند اما از نظر علمی، انتخاب هر عدد ثابت غیر صفر، بلامانع است.

مثال ۱۷: مسأله مقدار مرزی، با شرایط مرزی داده شده در داخل مستطیل $0\le x\le a$ و $0\le y\le b$.

$$\begin{cases}\nabla^2u=f(x,y)\\ u(x,0)=0\,,\,u(x,b)=h(x)\\ u(0,y)=u(a,y)\,,\,u_x(0,y)=u_x(a,y)\end{cases}$$

که در آن f و h توابع پیوسته و تکه‌ای هموار هستند، دارای کدام پایهٔ متعامد است؟ (نسبت به متغیر x) (مکانیک ـ دکتری ۹۱)

۱) $1, \cos\frac{k\pi x}{a}, \sin\frac{k\pi x}{a}, k=1,2,3,4,\ldots$

۲) $1, \cos\frac{2k\pi x}{a}, \sin\frac{2k\pi x}{a}, k=1,2,3,4,\ldots$

۳) $\cos\frac{2k\pi x}{a}, \sin\frac{2k\pi x}{a}, k=1,2,3,4,\ldots$

۴) $\cos\frac{k\pi x}{a}, \sin\frac{k\pi x}{a}, k=1,2,3,4,\ldots$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

شرط مرزی ناهمگن به صورت $h(x)$ است. پس $F_n(x)$ مثلثاتی خواهد بود. (می‌توانستیم بگوییم شرایط مرزی در $x=0$ و $x=a$ همگن (شرط تناوبی) هستند پس جواب $F_n(x)$ مثلثاتی است.)

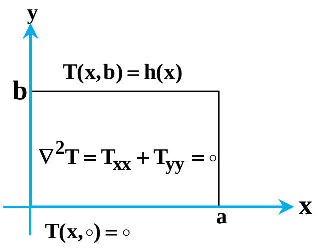
بنابراین $F(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$ است. شرایط تناوبی را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases}F(0)=F(a)\\ F'(0)=F'(a)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=A\cos(\sqrt{\lambda}a)+B\sin(\sqrt{\lambda}a)\\ B\sqrt{\lambda}=-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a)\end{cases}$$

از معادله دوم $\sqrt{\lambda}$ را ساده کنید. با حل دستگاه داریم $\cos(\sqrt{\lambda}a)=1$ و $\sin(\sqrt{\lambda}a)=0$، بنابراین $\sqrt{\lambda}a=2n\pi$ و $\sqrt{\lambda}=\frac{2n\pi}{a}$ است. این نشان می‌دهد که جواب‌های ویژه شامل $\sin(\frac{2n\pi}{a}x)$ و $\cos(\frac{2n\pi}{a}x)$ هستند. در شرایط تناوبی داریم $n\ge 0$ بنابراین به ازای $n=0$ جمله‌ی ثابت هم در پایه‌ی جواب ظاهر می‌شود.

مثال ۱۸: **پایه‌ی متعامد موردنیاز برای استفاده در حل مسأله مقدار مرزی داده شده از طریق جداسازی متغیرها، کدام است؟**

(مهندسی برق و مکانیک ـ سراسری ۹۲)



$\begin{cases} T(۰,y) = T(a,y) \\ T_x(۰,y) = T_x(a,y) \end{cases}$ شرایط مرزی روی دو ضلع راست و چپ

۱) $\frac{۱}{۲}, \sin\frac{۲\pi x}{a}, \cos\frac{۲\pi x}{a}, \cdots, \sin\frac{۲n\pi x}{a}, \cos\frac{۲n\pi x}{a}, \cdots$

۲) $\frac{۱}{۲}, \sin\frac{\pi x}{a}, \cos\frac{\pi x}{a}, \cdots, \sin\frac{n\pi x}{a}, \cos\frac{n\pi x}{a}, \cdots$

۳) $\frac{۱}{۲}, \sin\frac{\pi x}{a}, \cos\frac{\pi x}{a}, \cdots, \sin\frac{(۲n-۱)\pi x}{a}, \cos\frac{(۲n-۱)\pi x}{a}, \cdots$

۴) $\sin\frac{۲\pi x}{a}, \cos\frac{۲\pi x}{a}, \cdots, \sin\frac{۲n\pi x}{a}, \cos\frac{۲n\pi x}{a}, \cdots$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

چون شرط ناهمگن به صورت $h(x)$ است، معلوم می‌شود که $F(x)$ به صورت مثلثاتی است. (البته این را می‌توان از همگن بودن شرایط مرزی در $x = ۰$ و $x = a$ نیز فهمید.) در حالت کلی داریم: $F(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

حال شرایط تناوبی داده شده را برای تعیین مقدار λ به کار می‌گیریم:

$$\begin{cases} F(۰) = F(a) \\ F'(۰) = F'(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = A\cos\sqrt{\lambda}a + B\sin\sqrt{\lambda}a \\ \sqrt{\lambda}B = -\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}a + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a \end{cases}$$

از طرفین معادله‌ی دوم λ را ساده می‌کنیم. با حل این دستگاه خواهیم داشت: $\sin\sqrt{\lambda}a = ۰\ ,\ \cos\sqrt{\lambda}a = ۱$

بنابراین $\sqrt{\lambda}a = ۲n\pi$ است. یعنی $\sqrt{\lambda_n} = \frac{۲n\pi}{a}$ برای $n = ۰,۱,۲,\ldots$. به این ترتیب پایه‌ی متعامد جواب شامل جمله‌ی ثابت، $\cos\frac{۲n\pi}{a}x$ و $\sin\frac{۲n\pi}{a}x$ است.

درسنامه ۵: حل و بررسی معادلات ناهمگن

مثال ۱: اگر معادله‌ی موج با شرایط مرزی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ به معادله‌ای با شرایط مرزی همگن بر حسب $v(x,t)$ تبدیل شود. آنگاه $v_t(x,0)$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \\ u(0,t)=a(t) \\ u(L,t)=b(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

۱) $g(x)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

۲) $g(x)+a'(0)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

۳) $f(x)+\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

۴) $g(x)-a'(0)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

پاسخ: گزینه «۴» $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)\Rightarrow v_t(x,t)=u_t(x,t)-w_t(x,t)\Rightarrow v_t(x,0)=u_t(x,0)-w_t(x,0)=g(x)-w_t(x,0)$

حالا باید $w_t(x,0)$ را محاسبه کنیم. همان‌طور که عنوان شد، تغییر متغیر مناسب به صورت مقابل است: $w(x,t)=\frac{x}{L}[b(t)-a(t)]+a(t)$

بنابراین $w_t(x,t)$ برابر با مقدار زیر است:

$$w_t(x,t)=\frac{x}{L}[b'(t)-a'(t)]+a'(t)\Rightarrow w_t(x,0)=\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]+a'(0)\Rightarrow v_t(x,0)=g(x)-a'(0)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$$

مثال ۲: اگر بخواهیم مسأله مقابل را به روش تفکیک متغیرها و با استفاده از تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$ به معادله‌ای با شرایط مرزی همگن بر حسب v تبدیل کنیم، $w(x,t)$ به کدام صورت خواهد بود؟

$$\begin{cases} u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0 \quad ; \quad 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u_{xx}(0,t)=0 \quad , \quad u_{xx}(\pi,t)=\sin t \end{cases}$$

۱) $w(x,t)=\frac{c\sin t}{2}\left[\frac{\sinh x\sqrt{\frac{1}{c}}-\sin x\sqrt{\frac{1}{c}}}{\sinh \pi\sqrt{\frac{1}{c}}+\sin \pi\sqrt{\frac{1}{c}}}\right]$

۲) $w(x,t)=\frac{c\sin t}{2}\left[\frac{\sinh x\sqrt{\frac{1}{c}}}{\sinh \pi\sqrt{\frac{1}{c}}}+\frac{\sin x\sqrt{\frac{1}{c}}}{\sin \pi\sqrt{\frac{1}{c}}}\right]$

۳) $w(x,t)=\frac{c\sin t}{2}\left[\frac{\sinh x\sqrt{\frac{1}{c}}-\sin x\sqrt{\frac{1}{c}}}{\sinh \pi\sqrt{\frac{1}{c}}-\sin \pi\sqrt{\frac{1}{c}}}\right]$

۴) $w(x,t)=\frac{c\sin t}{2}\left[\frac{\sinh x\sqrt{\frac{1}{c}}}{\sinh \pi\sqrt{\frac{1}{c}}}-\frac{\sin x\sqrt{\frac{1}{c}}}{\sin \pi\sqrt{\frac{1}{c}}}\right]$

پاسخ: گزینه «۴» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$ و قرار دادن آن در معادله داریم:

$$(w_{tt}+c^2w_{xxxx})+(v_{tt}+c^2v_{xxxx})=0$$

می‌دانیم که $v(x,t)$ جواب معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن است و شرایط مرزی w هم از رابطه‌ی $w=u-v$ به دست می‌آید. پس دو معادله‌ی به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} v_{tt}+c^2v_{xxxx}=0 \ ; \ 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ v(0,t)=v(\pi,t)=0 \ , \ v_{xx}(0,t)=v_{xx}(\pi,t)=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_{tt}+c^2w_{xxxx}=0 \ ; \ 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ w(0,t)=0 \ , \ w(\pi,t)=0 \ , \ w_{xx}(0,t)=0 \ , \ w_{xx}(\pi,t)=\sin t \end{cases}$$

برای به دست آوردن $w(x,t)$ با استفاده از روش تفکیک متغیرها داریم: $w(x,t)=F(x)G(t)$

با در نظر گرفتن شرط $w_{xx}(\pi,t)=\sin t$ داریم: $F''(\pi)G(t)=\sin t$، بنابراین $\mathbf{G(t)=\sin t}$ و $F''(\pi)=1$، با توجه به شرایط دیگر مسأله شرایط زیر را داریم:

$$F(0)=F(\pi)=0 \ , \ F''(0)=0$$

حالا با جایگذاری $\mathbf{w(x,t)=F(x)\sin t}$ در معادله داریم:

$$-F(x)\sin t+c^2F_{xxxx}(x)\sin t=0$$

با توجه به این که $\sin t\neq 0$، لذا باید داشته باشیم: $-F(x)+c^2F_{xxxx}(x)=0\Rightarrow F_{xxxx}(x)-\frac{1}{c^2}F(x)=0$

این معادله دارای جواب عمومی زیر است:

$$F(x)=A\sinh\sqrt{\frac{1}{c}}x+B\cosh\sqrt{\frac{1}{c}}x+D\sin\sqrt{\frac{1}{c}}x+E\cos\sqrt{\frac{1}{c}}x$$

با اعمال شرط‌های کرانه‌ای $B=E=0$، همچنین A و D نیز به شکل مقابل به دست می‌آیند: $A=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{\sinh\sqrt{\frac{1}{c}}\pi}\right) \quad , \quad D=-\frac{c}{2}\left(\frac{1}{\sin\sqrt{\frac{1}{c}}\pi}\right)$

بنابراین ضابطه $w(x,t)$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{w(x,t)=\frac{c\sin t}{2}\left[\frac{\sinh\sqrt{\frac{1}{c}}x}{\sinh\sqrt{\frac{1}{c}}\pi}-\frac{\sin\sqrt{\frac{1}{c}}x}{\sin\sqrt{\frac{1}{c}}\pi}\right]}$$

مثال ۳: اگر معادله‌ی موج غیرهمگن زیر که بر حسب u است با تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+\varphi(x)$، به معادله‌ای همگن با شرایط مکانی همگن برحسب w تبدیل شود، ضابطه‌ی تابع $\varphi(x)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+\sin x \quad , \quad 0<x<\frac{\pi}{2} \quad , \quad t>0 \\ u(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

۱) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\frac{6x}{\pi}-3\sin x)$

۲) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\frac{2x}{\pi}-\sin x)$

۳) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\sin x-\frac{2x}{\pi})$

۴) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(3\sin x-\frac{6x}{\pi})$

پاسخ: گزینه «۳» دقت کنید بر خلاف مسائل قبلی، در این سؤال شرایط مرزی همگن و معادله ناهمگن است. با توجه به تغییر متغیر داده شده داریم:
$u(x,t)=w(x,t)+\varphi(x)$

با دو بار مشتق‌گیری بر حسب t و x، داریم:

$$u_{tt}=w_{tt}+0 \quad , \quad u_{xx}=w_{xx}+\varphi''(x)$$

با قرار دادن تساوی‌های فوق در معادله‌ی اصلی داریم: $w_{tt}=c^2[w_{xx}+\varphi''(x)]+\sin x \Rightarrow w_{tt}=c^2w_{xx}+c^2\varphi''(x)+\sin x$

از طرفی با توجه به شرایط اولیه، داریم: $u(0,t)=w(0,t)+\varphi(0) \Rightarrow \mathbf{w(0,t)+\varphi(0)=0}$

$$u(\frac{\pi}{2},t)=w(\frac{\pi}{2},t)+\varphi(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \mathbf{w(\frac{\pi}{2},t)+\varphi(\frac{\pi}{2})=0}$$

مطابق صورت سؤال w جواب معادله‌ی همگن با شرایط مکانی همگن است. یعنی داریم: $\begin{cases} w_{tt}=c^2w_{xx} \\ w(0,t)=w(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$. با قرار دادن این نتایج در تساوی‌های بالا می‌بینیم که:

$$\begin{cases} c^2\varphi''(x)+\sin x=0 \\ \varphi(0)=0 \quad , \quad \varphi(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

برای حل معادله فوق با دو بار انتگرال‌گیری از طرفین معادله، داریم:

$$\varphi''(x)=-\frac{1}{c^2}\sin x \Rightarrow \varphi'(x)=-\frac{1}{c^2}\int \sin x dx=\frac{1}{c^2}(\cos x+k_1) \Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{c^2}\int(\cos x+k_1)dx \Rightarrow \boldsymbol{\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\sin x+k_1x)+k_2}$$

برای به دست آوردن مقادیر k_1 و k_2 از شرایط اولیه به دست آمده برای φ، استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(0)=0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}[(\sin(0)-k_1\times(0)]+k_2=0 \Rightarrow k_2=0$$

$$\varphi(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}[\sin\frac{\pi}{2}+k_1(\frac{\pi}{2})]=0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}(1+\frac{k_1\pi}{2})=0 \Rightarrow k_1=-\frac{2}{\pi}$$

بنابراین ضابطه‌ی $\varphi(x)$ به صورت زیر است:

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\sin x-\frac{2x}{\pi})}}$$

مثال ۴: هرگاه تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ برای مسأله غیرهمگن برحسب u (معادله‌ی سمت چپ) به کار رود، ضابطه‌ی $w(x)$ به کدام صورت باشد تا معادله همگن سمت راست برحسب v به دست آید؟

$$\begin{cases} u_t-c^2u_{xx}=e^{-\alpha x} \quad , \quad 0\le x\le L \;,\; t\ge 0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_t-c^2v_{xx}=0 \\ v(L,t)=v(0,t)=0 \\ v(x,0)=f(x)-w(x) \end{cases}$$

۱) $w(x)=-\frac{1}{\alpha^2c^2}e^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha^2c^2L}(e^{-\alpha L}-1)x+\frac{1}{\alpha^2c^2}$

۲) $w(x)=-\frac{1}{\alpha^2c^2}e^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha^2c^2L}(e^{-\alpha L}-1)x-\frac{1}{\alpha^2c^2}$

۳) $w(x)=-\frac{1}{\alpha^2c^2}e^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha^2c^2L}(e^{-\alpha L}-1)x^2+\frac{1}{\alpha^2c^2}$

۴) $w(x)=-\frac{1}{\alpha^2c^2}e^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha^2c^2L}(e^{-\alpha L}-1)x^2-\frac{1}{\alpha^2c^2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به تغییر متغیر داده شده با یک بار مشتق گرفتن نسبت به t و دو بار مشتق گرفتن نسبت به x، داریم:

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x) \Rightarrow \begin{cases} u_{xx}=v_{xx}+w''(x) \\ u_t=v_t+0 \end{cases} \Rightarrow u_t-c^2u_{xx}=e^{-\alpha x} \Rightarrow v_t-c^2[v_{xx}+w''(x)]=e^{-\alpha x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v_t=c^2v_{xx}+c^2w''(x)+e^{-\alpha x}}$$

برای این که صورت معادله‌ی حاضر به شکل معادله سمت راست داده شده در صورت سؤال شود، باید داشته باشیم:

$$c^2 w''(x) + e^{-\alpha x} = 0$$

با دو بار انتگرال‌گیری از طرفین نسبت به x، داریم:

$$w''(x) = -\frac{1}{c^2}(e^{-\alpha x}) \Rightarrow w'(x) = -\frac{1}{c^2}(-\frac{1}{\alpha})e^{-\alpha x} + k_1 \Rightarrow w'(x) = \frac{1}{\alpha c^2}(e^{-\alpha x}) + k_1 \Rightarrow w(x) = \frac{1}{\alpha c^2}(-\frac{1}{\alpha})e^{-\alpha x} + k_1 x + k_2$$

برای روشن شدن وضعیت k_1 و k_2، لازم است از شرایط مرزی استفاده کنیم:

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0) \Rightarrow 0 = 0 + w(0) \Rightarrow w(0) = 0$$

$$w(0) = -\frac{1}{\alpha^2 c^2}(e^0) + k_2 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\alpha^2 c^2} + k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{\alpha^2 c^2}$$

$$u(L,t) = v(L,t) + w(L) \Rightarrow 0 = 0 + w(L) \Rightarrow w(L) = 0$$

$$w(L) = \frac{-1}{\alpha^2 c^2}e^{-\alpha L} + k_1 L + k_2 \xrightarrow{k_2 = \frac{1}{\alpha^2 c^2}} 0 = -\frac{1}{\alpha^2 c^2}e^{-\alpha L} + k_1 L + \frac{1}{\alpha^2 c^2} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{L\alpha^2 c^2}(e^{-\alpha L} - 1)$$

بنابراین معادله $w(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x) = -\frac{1}{\alpha^2 c^2}e^{-\alpha x} + \frac{1}{L\alpha^2 c^2}(e^{-\alpha L} - 1)x + \frac{1}{\alpha^2 c^2}$$

مثال۵: معادله موج یک‌بعدی و غیرهمگن زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(\pi x)\ ;\ 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ ;\ t > 0 \\ u_t(x,0) = g(x), u(x,0) = f(x)\ ;\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

اگر پاسخ کامل به صورت $u(x,t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\sin(n\pi x)$ تعریف شود، آنگاه ضریب a_n از کدام رابطه‌ی زیر به دست می‌آید؟

۱) $a_n = 2\int_0^1 [(f(x) - \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x)\sin n\pi x]dx$

۲) $a_n = \int_0^1 [(f(x) + \frac{2}{\pi^2}\sin \pi x)\sin n\pi x]dx$

۳) $a_n = \int_0^1 [(f(x) - \frac{2}{\pi^2}\sin \pi x)\sin n\pi x]dx$

۴) $a_n = 2\int_0^1 [(f(x) + \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x)\sin n\pi x]dx$

پاسخ: گزینه «۱» فرم کلی جواب در صورت سؤال داده شده است:

$$u(x,t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\sin n\pi x$$

با جایگذاری $t = 0$ و استفاده از شرط اولیه‌ی $u(x,0) = f(x)$ داریم:

$$f(x) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \Rightarrow f(x) - w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x$$

بنابراین طبق فرمول ضرایب فوریه (به ازای $L = 1$) داریم:

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 [f(x) - w(x)]\sin n\pi x\, dx \quad (*)$$

پس ضریب a_n از رابطه‌ی (*) به دست می‌آید و تنها کاری که باید انجام دهیم، مشخص کردن $w(x)$ است.

طبق صورت سؤال داریم:

$$u(x,t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\sin n\pi x = w(x) + v(x,t)$$

تابع $v(x,t)$ جواب معادله‌ی همگن $v_{tt} = v_{xx}$ است، پس با جایگذاری $u = w(x) + v$ در معادله ناهمگن داریم:

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin \pi x \Rightarrow (v_{tt} - v_{xx}) + (0 - w''(x)) = \sin \pi x \Rightarrow w''(x) = -\sin \pi x$$

$$\Rightarrow w'(x) = \frac{1}{\pi}\cos \pi x + c_1 \Rightarrow w(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x + c_1 x + c_2$$

با توجه به شرایط مرزی $u(0,t) = u(L,t) = 0$ داریم:

$$w(0) = 0\ ,\ w(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} w(0) = 0 + 0 + c_2 = 0 \\ w(1) = 0 + c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow w(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x$$

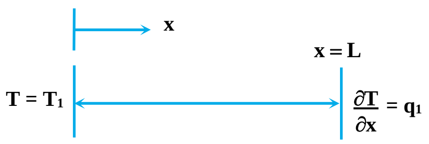
با جایگذاری $w(x)$ در رابطه (*) داریم:

$$a_n = 2\int_0^1 [f(x) - \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x]\sin n\pi x\, dx$$

توضیح: همان‌طور که در مثال قبل مشاهده کردید، جواب معادله‌ی ناهمگن با شرایط مرزی همگن، از دو بخش $w(x)$ و $v(x,t)$ تشکیل می‌شود. $w(x)$ به زمان بستگی ندارد و فقط برحسب x است. به همین علت آن را جواب پایدار **(مانا)** می‌نامیم. $w(x)$ از حل یک معادله‌ی دیفرانسیل یک متغیره به دست می‌آید و فقط در شرایط مرزی صدق می‌کند. بخش دوم جواب یعنی $v(x,t)$ به متغیر زمان بستگی دارد و به آن جواب **(گذرا)** می‌گوییم. $v(x,t)$ جواب یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن است و در شرایط اولیه‌ی معادله هم صدق می‌کند.

مثال ۶: می‌خواهیم مسأله انتقال حرارت را در مورد شکل زیر با استفاده از تبدیل فوریه محدود تحلیل کنیم. کرنل تبدیل مزبور کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)



۱) $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ۲) $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

۳) $\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)$ ۴) $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)$

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

منظور از کِرنل (هسته) در این‌جا همان پایه‌ی متعامد جواب است. می‌دانیم که $F(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x$ است. درست است که دو شرط مرزی ناهمگن به صورت $T(0,t) = T_1$ و $T_x(L,t) = q_1$ داریم، اما می‌دانیم که پس از انجام تغییر متغیر مناسب به صورت $T = u + v$، که u جواب عمومی معادله همگن و v جواب ویژه‌ی ناهمگن باشد، پایه‌ی متعامد جواب، ربطی به جواب ناهمگن ندارد و با استفاده از شرایط همگن $u(0,t) = 0$ و $u_x(L,t) = 0$ تعیین می‌شود. (به طور خلاصه برای تعیین پایه‌ی متعامد، شرایط مرزی را همیشه همگن فرض کنید.) حال در $x = 0$ شرط $u(0,t) = 0$ می‌گوید که جواب $F_n(x) = \sin\sqrt{\lambda}x$ سینوسی است. و از شرط مرزی $u_x(L,t) = 0$، داریم $F_n'(L) = 0$ یعنی $\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}L) = 0$. از این‌جا داریم $\sqrt{\lambda_n}L = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

در نتیجه $\sqrt{\lambda_n} = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$ است. نهایتاً جواب‌های پایه به صورت $\sin(\frac{2n+1}{2L}\pi x)$ به دست می‌آیند.

توضیح: در این مثال چون در گزینه‌ها، عدد فرد را به فرم $2n+1$ نشان داده‌اند، ما هم این کار را کرده‌ایم.

مثال ۷: معادله حرارت غیرهمگن در امتداد میله‌ای به طول L به شکل $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1\,,\ 0 < x < L\,,\ t > 0$ است. شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = f(x)$$

در این صورت پاسخ حالت پایدار u (یعنی وقتی $t \to \infty$) برابر است با :

(مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $x(L-x)$ ۲) $x(x-\frac{1}{2})$ ۳) $\frac{x(L-x)}{2}$ ۴) $-\frac{x^2}{2} + Lx + L^2$

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

در حالت پایدار $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -x + k_1 \Rightarrow u = -\frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \\ u(L,t) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow u = \frac{-x^2}{2} + \frac{L}{2}x = \frac{x}{2}(L-x)$$

مثال ۸: معادله‌ی غیرهمگن یک بعدی حرارت در ناحیه $0 < x < 1$ و برای $0 < x < 1, t > 0$ ؛ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 1$ است. شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$\begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$، **در این صورت پاسخ حالت پایدار $(t \to \infty)$ در $x = \frac{1}{2}$ برابر کدام است؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

در حالت پایدار $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ می‌باشد، بنابراین می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = x + k_1 \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + k_1 x + k_2$$

با بررسی شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \\ x = 1 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} u = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

مثال ۹: به ازای کدام تابع $\psi(x)$، تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)$، مسأله $\begin{cases} u_t=4u_{xx}+\sin x \\ u(0,t)=1, u_x(0,t)=-1 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ را به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن بر حسب w تبدیل خواهد کرد؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $\psi(x)=-\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{4}x+1$
۲) $\psi(x)=\frac{1}{4}\sin x-\frac{5}{4}x+1$
۳) $\psi(x)=\frac{1}{4}\cos x-\frac{5}{4}x+1$
۴) $\psi(x)=-\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{4}x+1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

تابع $\psi(x)$ جواب معادله دیفرانسیل معمولی زیر است:

$$\begin{cases} 4\psi''(x)=-\sin x \\ \psi(0)=1 \\ \psi_x(0)=-1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi''(x)=\frac{-1}{4}\sin x \Rightarrow \psi(x)=\frac{1}{4}\sin x+k_1x+k_2 \\ \psi(0)=1 \Rightarrow k_2=1 \\ \psi_x(0)=-1 \Rightarrow k_1=-\frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(x)=\frac{1}{4}\sin x-\frac{5}{4}x+1$$

مثال ۱۰: تابع $h(x)$ چگونه باشد تا تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+h(x)$، معادله $u_t=2u_{xx}-\cos x$ را به یک معادله همگن بر حسب w تبدیل کند؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $h(x)=-\frac{1}{2}\sin x+Ax+B$
۲) $h(x)=-\frac{1}{2}\cos x+Ax+B$
۳) $h(x)=-2\sin x+Ax+B$
۴) $h(x)=-2\cos x+Ax+B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا $u=w(x,t)+h(x)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم: $w_t=2w_{xx}+2h_{xx}-\cos x$

برای اینکه معادله بر حسب w همگن شود باید داشته باشیم: $2h_{xx}-\cos x=0$

حال با انتگرال‌گیری از این معادله، $h(x)$ را به دست می‌آوریم: $h_x=\frac{1}{2}\sin x+A \Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\cos x+Ax+B$

مثال ۱۱: معادله حرارت $u_t=c^2u_{xx}-u$ و $t>0, 0<x<L$ با شرایط $u(L,t)=0$ ، $u(0,t)=0$ ، $u(x,0)=f(x)$ را در نظر بگیرید. تابع $h(t)$ چگونه باشد تا تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)h(t)$ منجر به یک معادله دیفرانسیل همگن به صورت $(w_t=c^2w_{xx})$ برای W گردد؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) e^{-t}
۲) e^t
۳) Lnt
۴) $tg^{-1}t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا u_t و u_{xx} را به دست می‌آوریم: $u(x,t)=w(x,t)h(t) \Rightarrow \begin{cases} u_t=w_th+h_tw \\ u_{xx}=w_{xx}h \end{cases}$

با جایگذاری روابط فوق در معادله دیفرانسیل داده شده، خواهیم داشت: $w_th+h_tw=c^2w_{xx}h-wh \Rightarrow w_t=c^2w_{xx}-w-\frac{h_t}{h}w$

برای تبدیل شدن معادله فوق به فرم همگن $w_t=c^2w_{xx}$ لازم است که رابطه روبرو برقرار باشد. $w+\frac{h_t}{h}w=0 \Rightarrow 1+\frac{h_t}{h}=0 \Rightarrow h(t)=e^{-t}$

مثال ۱۲: برای تبدیل معادله گرمای غیرهمگن $u_t = c^2 u_{xx} + 10$ با شرایط مرزی $\begin{cases} u(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$، به یک معادله همگن، کدام تغییر متغیر صحیح است؟

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۱)

۱) $u(x,t) = v(x,t) - \frac{5}{c^2} x(x-\pi)$

۲) $u(x,t) = v(x,t) - \frac{5}{c^2} x(x+\pi)$

۳) $u(x,t) = v(x,t) - \frac{10}{c^2} x(x-\pi)$

۴) $u(x,t) = v(x,t) - \frac{10}{c^2} x(x+\pi)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

اگر تغییر متغیر لازم به صورت $u(x,t) = v(x,t) + f(x)$ باشد، بنابراین معادله به شکل مقابل بازنویسی می‌شود: $v_t = c^2 v_{xx} + c^2 f''(x) + 10$

برای از بین بردن عامل ناهمگنی معادله، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$c^2 f''(x) + 10 = 0$$

$$f''(x) = \frac{-10}{c^2} \Rightarrow f(x) = \frac{-5}{c^2} x^2 + k_1 x + k_2$$

حال با اعمال شرایط اولیه می‌توانیم مقادیر k_1 و k_2 را به دست آوریم:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow f(\pi) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{5\pi}{c^2}$$

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{5}{c^2} x^2 + \frac{5\pi}{c^2} x = v(x,t) - \frac{5}{c^2} x(x-\pi)$$

درسنامه ۷: استفاده از تبدیلات انتگرالی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مثال ۱: تبدیل لاپلاس جواب مسأله $\begin{cases} u_x + xu_t = 0 \ , \ 0 < x < \infty \\ u(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x < \infty \ , \ u(0,t) = t \ , \ t > 0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $U(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{sx^2}{2}}$　۲) $U(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{sx^2}{2}}$　۳) $U(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{sx}{2}}$　۴) $U(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{sx}{2}}$

پاسخ : گزینه «۱» با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله داریم: $U_x + x[sU - u(x,0)] = 0 \Rightarrow U_x + xsU = 0$

معادله به دست آمده یک معادله دیفرانسیل معمولی با متغیر مستقل x است و جواب عمومی آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} U(x,s) = k(s)e^{-\frac{sx^2}{2}} \Rightarrow U(0,s) = k(s) \\ u(0,t) = t \xrightarrow{\text{از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} U(0,s) = \frac{1}{s^2} \end{array}\right\} \Rightarrow k(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow U(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{sx^2}{2}}$$

مثال ۲: با فرض $\ell\{u(x,t)\} = U(x,s)$، تبدیل لاپلاس معادله $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = xt$ با شرط $u(x,0) = 0$ عبارت است از:　(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\partial U}{\partial t} + sU = \frac{x}{s^2}$　۲) $\frac{\partial U}{\partial t} - (s+1)U = \frac{x}{t^2}$　۳) $\frac{\partial U}{\partial x} - (s+1)U = \frac{x}{s^2}$　۴) $\frac{\partial U}{\partial x} + (s+1)U = \frac{x}{s^2}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\frac{\partial U}{\partial x} + sU(x,s) - u(x,0) + U(x,s) = \frac{x}{s^2} \xrightarrow{u(x,0)=0} \frac{\partial U}{\partial x} + sU(x,s) + U(x,s) = \frac{x}{s^2}$$

مثال ۳: جواب مسأله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x \sin t$، $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ و $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ کدام است؟　(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $u = \cos x(\sin t - x\cos x)$　۲) $u = \sin t(\sin x - t\cos t)$　۳) $u = \frac{1}{2}\sin x(\sin t - t\cos t)$　۴) $u = \sin t(\cos x - x\cos t)$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

معادله دیفرانسیل داده شده ناهمگن است اما شرایط مرزی و اولیه‌ی آن همگن هستند. در این موارد معمولاً بهترین راه استفاده از تبدیل لاپلاس است.

فرض کنیم $L[u(x,t)] = U(x,s)$ باشد، داریم: $s^2U - su(x,0) - u_t(x,0) - U_{xx} = \sin x \frac{1}{1+s^2}$

شرایط اولیه همگن هستند: $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$، بنابراین به معادله‌ی دیفرانسیل $s^2U - U_{xx} = \frac{\sin x}{1+s^2}$ می‌رسیم. معادله‌ی مشخصه‌ی آن $s^2 - \lambda^2 = 0$ و ریشه‌ها $\lambda = \pm s$ هستند. پس جواب عمومی همگن $U_h = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx}$ است. c_1 و c_2 می‌توانند توابعی بر حسب s باشند. با توجه به عبارت سمت راست معادله‌ی دیفرانسیل، جواب ویژه‌ی ناهمگن هم به شکل $U_p = A(s)\sin x$ است.

با جایگذاری آن در معادله داریم: $s^2A(s)\sin x + A(s)\sin x = \frac{\sin x}{1+s^2}$

با ساده کردن $\sin x$ و انجام محاسبات داریم $A(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$. بنابراین تبدیل لاپلاسِ u برابر است با: $U = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx} + \frac{\sin x}{(s^2+1)^2}$

حال از دو شرط مرزیِ $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ داریم $U(0,s) = U(\pi,s) = 0$. پس به ازای $x = 0$ و $x = \pi$ مقدار $U = 0$ را داریم. یعنی $\begin{cases} c_1 + c_2 + 0 = 0 \\ c_1e^{-s\pi} + c_2e^{s\pi} + 0 = 0 \end{cases}$ که تنها جواب آن $c_1 = c_2 = 0$ است. بنابراین $U = \frac{\sin x}{(s^2+1)^2}$ است. با کمک ضرب پیچشی، تبدیل معکوس می‌گیریم و به جواب می‌رسیم:

$$u = \ell^{-1}[\frac{\sin x}{(s^2+1)^2}] = \sin x\,\ell^{-1}[\frac{1}{s^2+1} \times \frac{1}{s^2+1}] = \sin x \int_0^t \sin(x)\sin(t-x)dx = \sin x \int_0^t \frac{1}{2}[\cos(2x-t) - \cos(t)]dx$$

$$= \frac{\sin x}{2}[\frac{1}{2}\sin(2x-t) - x\cos t]\Big|_0^t = \frac{\sin x}{2}[\frac{1}{2}\sin t - t\cos t - \frac{1}{2}\sin(-t)] = \frac{1}{2}\sin x(\sin t - t\cos t)$$

توجه کنید که $\sin(-t) = -\sin t$ است.

مثال ۴: برای $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ، $-\infty<x<\infty$ و $t>0$, $u(x,0)=f(x)$ ، $-\infty<x<\infty$ تبدیل فوریه تابع $u(x,t)$ نسبت به متغیر x یا $U(\omega,t)$ کدام است؟ $(j=\sqrt{-1})$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-\omega t}$ ۲) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-\omega^2 t}$ ۳) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-j\omega t}$ ۴) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-j\omega^2 t}$

پاسخ : گزینه «۲» از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$F\{u(x,t)\}=U(\omega,t)\ \Rightarrow (i\omega)^2U(\omega,t)=\frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t)\Rightarrow\frac{du}{u}=-\omega^2dt\Rightarrow Lnu=-\omega^2t+Lnc\Rightarrow u=c(\omega)e^{-\omega^2t}$$

با تبدیل فوریه گرفتن از شرط مرزی $u(x,0)=f(x)$ داریم:

$$U(\omega,0)=F(\omega)\ \Rightarrow U(\omega,t)=F(\omega)e^{-\omega^2t}$$

مثال ۵: اگر $w(x,t)$ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=100\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+100\frac{\partial w}{\partial t}+25w\ ,\ w(0,t)=\sin t\ ,\ w(x,0)=0$$
$$w_t(x,0)=0\ \forall\ t\ge 0\ ,\ x\ge 0\ ,\lim_{x\to\infty}w(x,t)=0$$

و اگر $W(x,s)$ تبدیل لاپلاس جواب باشد، در آن صورت کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) $W(x,s)=A(s)e^{-(10s+5)x}$ و $A(s)$ یک تابع حقیقی غیرصفر است.

۲) $W(x,s)=A(s)e^{(10s+5)x}$ و $A(s)$ یک تابع حقیقی غیرصفر است.

۳) $W(x,s)=A(s)\sin(10s+5)x$ و $A(s)$ یک تابع حقیقی غیرصفر است.

۴) $W(x,s)=A(s)\cos(10s+5)x$ و $A(s)$ یک تابع حقیقی غیرصفر است.

پاسخ : گزینه «۱» از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,s)=100[s^2W(x,s)-sw(x,0)-w_t(x,0)]+100[sW(x,s)-w(x,0)]+25W(x,s)$$

اما می‌دانیم که $w(x,0)=w_t(x,0)=0$ است. پس داریم:

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,s)-(100s^2+100s+25)W(x,s)=0$$

$$\Rightarrow\ \lambda^2-(10s+5)^2=0\ \Rightarrow\ \lambda=\pm(10s+5)\ \Rightarrow W(x,s)=A(s)e^{-(10s+5)x}+B(s)e^{(10s+5)x}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از شرایط مرزی داده شده داریم:

$$W(0,t)=\sin t\to W(0,s)=\frac{1}{1+s^2}\quad,\quad\lim_{x\to\infty}w(x,t)=0\ \to\ \lim_{x\to\infty}W(x,s)=0$$

با اعمال شرط $\lim_{x\to\infty}W(x,s)=0$ نتیجه می‌شود $B(s)=0$، پس داریم:

$$W(0,s)=\frac{1}{1+s^2}\to A(s)=\frac{1}{1+s^2}\quad \text{و}\quad W(x,s)=A(s)e^{-(10s+5)x}$$

مثال ۶: تبدیل لاپلاس جواب مسأله با شرایط مرزی داده شده کدام است؟ $w_t=w_{xx}\ ,\ 0\le x\le 1\ ,\ t\ge 0\ ,\ w(0,t)=w(x,0)=0\ ,\ w(1,t)=t$

(فرض کنید $L\{w(x,t)\}=W(x,s)$) (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2\sinh\sqrt{s}}$ ۲) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh\sqrt{s}}$ ۳) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{2s^2\sinh\sqrt{s}}$ ۴) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{2s\sinh\sqrt{s}}$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده، خواهیم داشت: $sW=\frac{d^2W}{dx^2}$ و با حل این معادله‌ی دیفرانسیل داریم:

$$W=k_1\sinh(\sqrt{s}\,x)+k_2\cosh(\sqrt{s}\,x)$$

البته k_1 و k_2 می‌توانند عباراتی برحسب s باشند.

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases}x=0\ \Rightarrow W=0\ \Rightarrow k_2=0\ \Rightarrow W=k_1\sinh(\sqrt{s}\,x)\\ x=1\ \Rightarrow W=L\{t\}=\frac{1}{s^2}\ \Rightarrow k_1\sinh\sqrt{s}=\frac{1}{s^2}\ \Rightarrow k_1=\frac{1}{s^2\sinh\sqrt{s}}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$W=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2\sinh\sqrt{s}}$$

درسنامه ۷: دسته‌بندی معادلات با مشتقات جزئی، روش‌های حل و فرم استاندارد این نوع معادلات

مثال ۱: در مورد معادله با مشتق جزئی $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) در ناحیه $xy>0$ بیضی‌گون و در ناحیه $xy=0$ سهمی‌گون است.
۲) در ناحیه $xy>0$ هذلولی‌گون و در ناحیه $xy<0$ بیضی‌گون است.
۳) در ناحیه $xy>0$ بیضی‌گون و در ناحیه $xy<0$ هذلولی‌گون است.
۴) در ناحیه $xy<0$ هذلولی‌گون و در ناحیه $xy=0$ سهمی‌گون است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در این مثال $A=x$، $B=0$ و $C=y$ می‌باشد، لذا $B^2-4AC=-4xy$ خواهد بود که در ناحیه $xy>0$ معادله بیضی‌گون، در ناحیه $xy<0$ هذلولی‌گون و به ازای $xy=0$ معادله سهموی است.

مثال ۲: جواب‌های معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $u_{xy}=-u_x$ کدام است؟

۱) $f(x)e^y+g(x)$
۲) $f(x)e^{-y}+g(y)$
۳) $f(y)e^x+g(x)$
۴) $f(y)e^{-x}+g(x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با فرض $u_x=P$ معادله به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P_y=-P\Rightarrow\frac{P_y}{P}=-1\Rightarrow\int\frac{P_y}{P}dy=\int(-1)dy\Rightarrow LnP=-y+Ln[k(x)]\Rightarrow P=k(x)e^{-y}$$

$$\Rightarrow\int Pdx=\int k(x)e^{-y}dx\Rightarrow u=f(x)e^{-y}+g(y)$$

که در این رابطه $f(x)=\int k(x)dx$ است.

مثال ۳: پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ کدام است؟

۱) $f(x+y)+xg(x+y)$
۲) $xf(x+y)+yg(x+y)$
۳) $f(x+y)+xyg(x+y)$
۴) $f(x+y)+f^2(x+y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$$

لذا جواب عمومی به صورت مقابل است:

$$u(x,y)=f(y+\lambda x)+xg(y+\lambda x)\xrightarrow{\lambda=1}\mathbf{u(x,y)=f(x+y)+xg(y+x)}$$

مثال ۴: جواب $u(x,y)$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $g(y-x)+h(x+\frac{1}{2}y)$
۲) $g(x+y)+h(x+\frac{1}{2}y)$
۳) $g(x-y)+h(x-\frac{1}{2}y)$
۴) $g(y-x)+h(x-\frac{1}{2}y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=2\ ,\ \lambda=-1$$

$$u(x,y)=g(y+\lambda_1 x)+h(y+\lambda_2 x)=g(y-x)+h(y+2x)=g(y-x)+h(x+\frac{1}{2}y)$$

توضیح: دقت کنید آرگومان جواب عمومی را می‌توان بر هر عدد دلخواه ضرب یا تقسیم کرد و بنابراین برای هماهنگی با گزینه‌ها عبارت داخل پرانتز بر ۲ تقسیم شد. از طرفی طبق همین استدلال گزینه‌های (۳) و (۴) فرقی با هم ندارند و به اشتباه طرح شده‌اند.

مثال ۵: جواب معادله دیفرانسیل $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ که در آن z تابعی از x و y می‌باشد، با استفاده از دستگاه لاگرانژ $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$ کدام است؟
(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۰)

۱) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $u=xz$ و $v=yz$
۲) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $u=\frac{x}{z}$ و $v=yz$
۳) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $u=\frac{x}{z}$ و $v=xz$
۴) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $u=\frac{z}{x}$ و $v=xy$

☑ **پاسخ:** گزینه‌های «۲ و ۴» صحیح هستند. اگر این دستگاه را به دو معادله‌ی $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}$ و $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ تفکیک کنیم با حل آن‌ها داریم $Lnx=-Lny+Lnc_1$ و $Lnz=Lnx+Lnc_2$ یعنی $x=\frac{c_1}{y}$ و $z=c_2x$ بنابراین $xy=c_1$ و $\frac{z}{x}=c_2$ پس گزینه‌ی (۴) صحیح است. از طرف دیگر اگر از همان ابتدا دستگاه لاگرانژ را به صورت دو معادله‌ی $\frac{dz}{z}=-\frac{dy}{y}$ و $\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$ می‌نوشتیم با طی کردن مسیر مشابهی در پایان به جواب‌های $zy=c_1$ و $\frac{z}{x}=c_2$ می‌رسیدیم. پس گزینه‌ی (۲) هم صحیح است.

مثال ۶: اگر در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول $\begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz \\ x>0 \ , \ y>0 \end{cases}$، تغییر متغیرهای مستقل $\begin{cases} p=\frac{1}{2}(Lnx+Lny) \\ q=\frac{1}{2}(Lnx-Lny) \end{cases}$ را به کار ببریم، آنگاه:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\partial z}{\partial p}=nz$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial q}=nz$ ۳) $\frac{\partial z}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial q}=nz$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial p}-\frac{\partial z}{\partial q}=nz$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial p}.\frac{1}{2x}+\frac{\partial z}{\partial q}.\frac{1}{2x} \\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial p}.\frac{1}{2y}+\frac{\partial z}{\partial q}(-\frac{1}{2y}) \end{cases} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial q}=\frac{\partial z}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial p}=nz$$

مثال ۷: کدام عبارت درباره‌ی معادله‌ی $yu_{xx}+u_{yy}=0$ صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) به ازای $y>0$ بیضی‌گون است. ۲) به ازای $y<0$ سهمی‌گون است.

۳) به ازای $y>0$ هذلولی‌گون است. ۴) بر روی محور xها هذلولی‌گون است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $B^2-4AC=(0)^2-4y=-4y \xrightarrow{y>0} B^2-4AC<0 \Rightarrow$ معادله بیضی‌گون است

مثال ۸: اگر $u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}f(t)$ که در آن $t=\frac{x}{\sqrt{y}}$ یکی از جواب‌های معادله با مشتقات جزئی $u_y-u_{xx}=0$ باشد و c عدد ثابت، کدام رابطه زیر درست است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $f'(t)+t.f(t)=c$ ۲) $2f'(t)+t.f(t)=c$ ۳) $f'(t)+2t.f(t)=c$ ۴) $t.f'(t)+f(t)=c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$u(x,y)=y^{-\frac{1}{2}}f(xy^{-\frac{1}{2}}) \Rightarrow \begin{cases} u_y=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}f(t)+xy^{-\frac{1}{2}}[-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}]f'(t) \\ u_x=y^{-1}f'(t) \Rightarrow u_{xx}=y^{-\frac{3}{2}}f''(t) \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم: $f''(t)+\frac{1}{2}tf'(t)+\frac{1}{2}f(t)=0 \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} 2f'(t)+tf(t)=c$

مثال ۹: جواب مسأله مقدار مرزی $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=x^2y \ , \ u(x,0)=x^2 \ , \ u(1,y)=\cos y$ با شرایط داده شده، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{x^3y^3}{6}+\cos y-\frac{y^3}{6}+x^2-1$ ۲) $\frac{x^3y^2}{6}+2\cos y-\frac{y^2}{6}+x^2-2$

۳) $\frac{x^2y^2}{6}+x\cos y-\frac{y^2}{6}+x^2-x$ ۴) $\frac{x^3y^2}{6}+\cos y-\frac{y^2}{6}+x^2-1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با دو بار انتگرال‌گیری جواب عمومی معادله به صورت روبرو خواهد بود: $u=\frac{1}{6}x^3y^2+f(x)+g(y)$

با توجه به جواب ملاحظه می‌گردد گزینه ۱ که جمله $\frac{1}{6}x^3y^2$ را ندارد، غلط است و همچنین گزینه ۳ نیز به دلیل داشتن عبارت $x\cos y$ نمی‌تواند جواب باشد. از طرفی با اعمال شرط $u(1,y)=\cos y$ ملاحظه می‌گردد گزینه ۲ نیز غلط است.

مثال ۱۰: کدامیک از عبارت‌های زیر در مورد معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی: $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$ صحیح است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) در ناحیه $xy<0$، این معادله از نوع سهمی‌گون است.
۲) در ناحیه $xy<0$، این معادله از نوع بیضی‌گون است.
۳) در ناحیه $xy>0$، این معادله از نوع بیضی‌گون است.
۴) در ناحیه $xy>0$، این معادله از نوع سهمی‌گون و هم از نوع هذلولی‌گون است.

پاسخ : گزینه «۳» $B^2-4AC=(0)^2-4xy$

اگر $xy>0$ آنگاه $B^2-4AC<0$ و لذا معادله از نوع بیضی‌گون و اگر $xy<0$ آنگاه $B^2-4AC>0$ و معادله از نوع هذلولی‌گون است.

مثال ۱۱: $u(x,y)$ جواب معادله $u_x+2u_y-u=0$ عبارتست از:

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $u(x,y)=e^x\varphi(y-2x)$
۲) $u(x,y)=e^{-x}\varphi(y-2x)$
۳) $u(x,y)=e^x\varphi(2y-x)$
۴) $u(x,y)=e^{-x}\varphi(2y-x)$

پاسخ : گزینه «۱» جواب به صورت روبرو خواهد بود: $u=e^{-\frac{c}{a}x}\varphi(ay-bx)=e^x\varphi(y-2x)$

مثال ۱۲: یک حل معادله $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $(xy)^9$
۲) $(x-y)^9$
۳) $(x+y)^9$
۴) $(y-x)^9$

پاسخ : گزینه «۳» فرم کلی جواب معادله $au_x+bu_y=0$ به صورت $f(ay-bx)$ خواهد بود، در این تست $a=1$ و $b=-1$ است، لذا شکل جواب باید به صورت $f(y+x)$ باشد. همچنین با توجه به گزینه‌ها واضح است که گزینه (۳) درست است.

مثال ۱۳: در مورد معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۳)

۱) از نوع هذلولی‌گون بوده و جواب آن به شکل $F(y-x)+G(y-5x)$ است.
۲) از نوع هذلولی‌گون بوده و جواب آن به شکل $C_1(y-x)+C_2(y-5x)$ است که در آن C_1 و C_2 مقادیری ثابت باشند.
۳) از نوع سهمی‌گون بوده و جواب آن به شکل $F(y-x)+G(y-5x)$ است.
۴) از نوع سهمی‌گون بوده و جواب آن به شکل $C_1(y-x)+C_2(y-5x)$ است که در آن C_1 و C_2 مقادیری ثابت باشند.

پاسخ : گزینه «۱» $B^2-4AC=(6)^2-4\times1\times5=16>0\Rightarrow$ معادله هذلولی‌گون است

از طرفی معادله مشخصه به صورت روبرو است: $\lambda^2+6\lambda+5=0\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda+5)=0\Rightarrow\lambda=-5\ ,\ \lambda=-1$

لذا شکل جواب به صورت روبرو است: $u(x,y)=F(y-x)+G(y-5x)$

مثال ۱۴: جواب عمومی معادله $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x$ کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۳)

۱) $x-z=y\phi(x^2+z^2)$
۲) $x+z=\phi(\frac{x^2-z^2}{y})$
۳) $x+z=y\phi(x^2-z^2)$
۴) $x-z=\phi(\frac{x^2+z^2}{y})$

پاسخ : گزینه «۳» فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد. $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x}\Rightarrow\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x}\Rightarrow xdx-zdz=0\Rightarrow x^2-z^2=c_1\Rightarrow$

مثال ۱۵: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ کدامیک از توابع زیر است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $z=f(\frac{x}{y})$
۲) $z=f(xy)$
۳) $z=f(x-y)$
۴) $z=f(x^2-y^2)$

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از دستگاه لاگرانژ داریم: $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}\Rightarrow x^2-y^2=k_1\Rightarrow z=f(x^2-y^2)$

مثال ۱۶: معادله $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$: (مهندسی ابزار دقیق ـ سراسری ۸۴)

۱) یک معادله بیضوی است.
۲) یک معادله سهموی است.
۳) یک معادله هذلولی است.
۴) در بعضی نقاط سهموی و در بعضی نواحی بیضوی است.

پاسخ : گزینه «۱» معادله بیضوی است $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4\times1\times2 = -4 < 0 \Rightarrow$

مثال ۱۷: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول $au_x + bu_y = 0$ (a و b ثابت حقیقی) بر روی کدام منحنی ثابت می‌ماند؟ (راهنمایی: می‌توانید ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب خطی، این معادله را به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول ساده تبدیل کنید.) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $ax + by = c$، c ثابت حقیقی دلخواه
۲) $bx - ay = c$، c ثابت حقیقی دلخواه
۳) $ax - by = c$، c ثابت حقیقی دلخواه
۴) $bx + ay = c$، c ثابت حقیقی دلخواه

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: با استفاده از تابع کمکی $u = e^{k_1x + k_2y}$ و جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$k_1a + k_2b = 0 \Rightarrow k_2 = -k_1\frac{a}{b} \Rightarrow u = e^{k_1x - k_1\frac{a}{b}y} = e^{\frac{k_1}{b}(bx-ay)} = F(bx - ay)$$

برای ثابت ماندن جواب معادله باید $\boxed{bx - ay = c}$ باشد.

روش دوم: معادله شبه خطی است، با استفاده از دستگاه لاگرانژ داریم:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \Rightarrow bdx - ady = 0 \Rightarrow bx - ay = c$$

مثال ۱۸: معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} 2x - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$ در کدام گزاره صدق می‌کند؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۵)

۱) همواره سهموی است.
۲) همواره هذلولوی است.
۳) همواره بیضوی است.
۴) در ناحیه $x^2 > 1$ هذلولوی است.

پاسخ : گزینه «۴» در ناحیه $x^2 > 1$ هذلولی‌گون است $B^2 - 4AC = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) \Rightarrow$

مثال ۱۹: جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ کدام است؟ (ϕ و ψ توابع مشتق‌پذیر دلخواه) (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $z = \frac{1}{x}\phi(y) + c$
۲) $z = \frac{1}{x}\phi(y) + \psi(x)$
۳) $z = \frac{1}{x} + \psi(x)$
۴) $z = x\phi(y) + \psi(x)$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = u \Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u}{x} \Rightarrow \frac{\partial u}{u} = -\frac{\partial x}{x} \Rightarrow \text{Ln}\,u = \text{Ln}\frac{1}{x} + f(y) = \text{Ln}\frac{1}{x} + \text{Ln}\,g(y)$$

$$\Rightarrow u = g(y)\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = g(y)\frac{1}{x} \Rightarrow z = \varphi(y)\frac{1}{x} + \psi(x)$$

مثال ۲۰: جواب دستگاه $\frac{dx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $\begin{cases} y = c_1x \\ z = c_2y \end{cases}$
۲) $\begin{cases} z = c_1y \\ z = c_2(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$
۳) $\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1z \\ xy + yz + zx = c_2z \end{cases}$
۴) $\begin{cases} z = c_1(x + y) \\ z = c_2(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases} \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \text{Ln}y = c_1 + \text{Ln}z = \text{Ln}c_2z \Rightarrow y = c_2z \Rightarrow z = cy \\ \frac{dx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow \frac{2x\,dx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \text{Ln}(x^2 + y^2 + z^2) = k_1 + \text{Ln}z \Rightarrow z = k(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$$

مثال ۲۱: در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\alpha u_{xx}+\beta u_{yy}=0$، به ازای کدام مقدار α و β معادله دیفرانسیل از نوع هذلولوی (Hyperbolic) می‌باشد؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\beta>0\ ,\ \alpha>0$ ۲) $\beta>0\ ,\ \alpha<0$ ۳) $\beta\neq 0\ ,\ \alpha\neq 0$ ۴) $\alpha\neq 0\ ,\ \beta=0$

پاسخ : گزینه «۲»

$$B^2-4AC=(0)^2-4\alpha\beta=-4\alpha\beta$$

برای آنکه معادله هذلولی‌گون باشد، باید $B^2-4AC>0$ و به عبارت دیگر $4\alpha\beta<0$ که به ازای $\alpha<0$ و $\beta>0$ این اتفاق می‌افتد.

مثال ۲۲: جواب معادله $u_{xy}=u_x$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(y)e^x+g(x)$ ۲) $f(x)e^y+g(y)$ ۳) $f(x)e^x+g(y)$ ۴) $f(y)e^y+g(x)$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\xrightarrow{\frac{\partial u}{\partial x}=v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\Rightarrow v=k(x)e^y$$

با توجه به فرض $\frac{\partial u}{\partial x}=v$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=k(x)e^y\Rightarrow u=f(x)e^y+g(y)$$

مثال ۲۳: با توجه به روابط $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2+2xz-1=0\end{cases}$ چه رابطه‌ای بین z,y,x برقرار باشد تا y,x تابع‌هایی از z باشند؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۶)

۱) $x+z=0$ ۲) $2(x+z)^2=1$ ۳) $y\neq x+z$ ۴) $y=x^2+y^2$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ (x+y+z)^2-2xy-2yz-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\ 2y(x+z)+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-(x+z)\\ 2(x+z)^2=1\end{cases}$$

مثال ۲۴: تابع $z=z(t,s)$ در معادله $\frac{\partial z}{\partial s}=0$ صدق می‌کند. با فرض $t=x+2y$ و $s=x$، معادله‌ی دیفرانسیل فوق به کدام معادله تبدیل می‌شود؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۶)

۱) $2\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۳) $2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\begin{cases}x=s\\ y=\frac{t-s}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{2\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

مثال ۲۵: تابع $z=f(2x+y)+g(x-y)-xy$ که درآن f و g دو بار مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته‌اند، جواب عمومی کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+1$ ۲) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$ ۳) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+1$ ۴) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به مطالب کتاب، جواب عمومی معادلاتی به فرم $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=0$ به صورت زیر است:

$$u=f(y+\lambda_1 x)+g(y+\lambda_2 x)$$

در این تست $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=-1$ است، که ریشه‌های معادله مشخصه $\lambda^2-\lambda-2=0$ هستند، و با مقایسه آن با حالت کلی، $A=1$، $B=-1$ و $C=-2$ خواهد بود.

$$z=\underbrace{f(2x+y)+g(x-y)}_{\text{پاسخ عمومی}}-xy$$

مثال ۲۶: جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $xu_x - u = yx^2$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $u(x,y) = x + yx$
۲) $u(x,y) = yx^2 + cx$
۳) $u(x,y) = yx^2 + x\phi(y)$ (ϕ تابع دلخواه است.)
۴) $u(x,y) = yx^2 + xy^2 + cx$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا معادله‌ی همگن را حل می‌کنیم:
$$xu_x - u = 0 \Rightarrow xu_x = u \Rightarrow \frac{u_x}{u} = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow Lnu = Lnx + f(y) = Lnx + Ln\phi(y) \Rightarrow u = x\phi(y)$$

فقط گزینه ۳ می‌تواند صحیح باشد. جواب خصوصی را نیز به فرم kyx^2 در نظر می‌گیریم، در این صورت:
$$u_x = 2kyx \Rightarrow xu_x - u = 2kyx^2 - kyx^2 = kyx^2 = yx^2 \Rightarrow k = 1$$
جواب کلی = جواب عمومی + جواب خصوصی $\Rightarrow u(x,y) = x\phi(y) + yx^2$

مثال ۲۷: جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_x - u_y = u$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $u = e^x$
۲) $u = 2(x-y)$
۳) $u = ce^{\frac{x-y}{2}}$
۴) $u = e^{\frac{x-y}{2}}\phi(\frac{x+y}{2})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»
$$u_x - u_y = u \Rightarrow u_x - u_y - u = 0$$

با فرض اینکه u را به صورت $e^{k_1x+k_2y}$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:
$$k_1e^{k_1x+k_2y} - k_2e^{k_1x+k_2y} - e^{k_1x+k_2y} = 0 \Rightarrow (k_1 - k_2 - 1)e^{k_1x+k_2y} = 0$$
$$\Rightarrow k_1 - k_2 - 1 = 0 \Rightarrow k_2 = k_1 - 1 \Rightarrow u = e^{k_1x+(k_1-1)y} = \boxed{e^{k_1(x+y)}.e^{-y}} \qquad (1)$$
$$k_1 - k_2 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 + 1 \Rightarrow u = e^{(k_2+1)x+k_2y} = \boxed{e^{k_2(x+y)}.e^{x}} \qquad (2)$$

با ضرب طرفین معادله ۱ و ۲ خواهیم داشت:
$$u^2 = e^{x-y}.e^{k_2(x+y)} \Rightarrow u = e^{\frac{x-y}{2}}.e^{k_2(\frac{x+y}{2})} = \boxed{e^{\frac{x-y}{2}}\phi(\frac{x+y}{2})}$$

مثال ۲۸: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $yu_y + 2u = 6x - 3y$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۶)

۱) $u(x,y) = 3x - y$
۲) $u(x,y) = (3x - y + \frac{1}{y^2})\phi(x)$ (ϕ تابع دلخواه)
۳) $u(x,y) = 3x - y + \frac{c}{y^2}$ (c ثابت دلخواه)
۴) $u(x,y) = 3x - y + \phi(x)y^{-2}$ (ϕ تابع دلخواه)

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:
$$yu_y + 2u = 6x - 3y$$

برای محاسبه جواب معادله همگن خواهیم داشت:
$$yu_y + 2u = 0 \Rightarrow yu_y = -2u \Rightarrow \frac{u_y}{u} = -\frac{2}{y} \Rightarrow Lnu = -2Lny + Ln\phi(x) \Rightarrow u = \phi(x)y^{-2}$$

و لذا فقط گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۲۹: تابع $u(x,y) = y^2F(x) - 3x + 4y$ جواب کدام معادله دیفرانسیل زیر است؟ (F تابعی دلخواه از x است.) (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶)

۱) $yu_y - 2u = 6x - 4y$
۲) $yu_y - 2u = 6x + 4y$
۳) $yu_y + 2u = 6x + 4y$
۴) $yu_y + 2u = 6x - 4y$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به اینکه فرم جواب عمومی به صورت $u_h = y^2F(x)$ می‌باشد، لذا معادله دیفرانسیل همگن مربوط به آن عبارت است از:
$$\begin{cases} u_y = 2yF(x) \\ u = y^2F(x) \end{cases} \Rightarrow yu_y - 2u = 0$$

لذا گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست‌اند.

با جایگذاری جواب خصوصی $u = -3x + 4y$ در معادله غیرهمگن فوق خواهیم داشت:
$$yu_y - 2u = 6x - 4y$$

مثال ۳۰: معادله $(x+1)u_{xx}+2xu_{xy}+yu_{yy}=u$ روی منحنی $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ و $x\neq -1$ از نوع: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶)

۱) بیضوی است.

۲) سهموی است.

۳) هذلولوی است.

۴) به ازای $x+1>0$ هذلولوی است و به ازای $x+1<0$ بیضوی است.

پاسخ : گزینه «۲» $B^2-4AC=4[x^2-xy-y]$

از طرفی بر روی منحنی $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ خواهیم داشت $x^2-xy-y=0$، بنابراین $B^2-4AC=0$ و معادله از نوع سهموی می‌باشد.

مثال ۳۱: معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $yu_{xx}-xu_{yy}+2(xy-1)u_{xy}+x^2u_x-y^2u_y=1$ از کدام نوع است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) سهمی‌گون

۲) بیضی‌گون

۳) هذلولی‌گون

۴) نوع معادله به ازای x و y مختلف فرق می‌کند.

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به مطالب کتاب داریم: $B^2-4AC=4(xy-1)^2+4xy=4(x^2y^2-xy+1)>0$

از طرفی عبارت داخل پرانتز با فرض $z=xy$ یک عبارت درجه دوم همواره مثبت است زیرا دلتای آن کوچکتر از صفر است. بنابراین معادله از نوع هذلولی‌گون است.

مثال ۳۲: جواب معادله دیفرانسیل $x^2u_{xx}+2xu_x-2u=0$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) $u(x,y)=c_1(y)x^{-2}+c_2(y)x$

۲) $u(x,y)=c_1(y)x^{-2}+c_2(y)$

۳) $u(x,y)=c_1(y)x+c_2(y)$

۴) $u(x,y)=c_1(y)x^2+c_2(y)x^{-1}$

پاسخ : گزینه «۱» $x^2u_{xx}+2xu_x-2u=0$

معادله فوق یک معادله‌ی دیفرانسیل کوشی ـ اویلر است و لذا با تشکیل معادله مشخصه داریم:

$$r^2+(2-1)r-2=0 \Rightarrow r^2+r-2=0\begin{cases} r=-2 \\ r=1 \end{cases}$$

بنابراین داریم: $u(x,y)=c_1(y)x^{-2}+c_2(y)x^1$

$c_1(y)$ و $c_2(y)$ توابع دلخواهی از متغیر y هستند.

مثال ۳۳: در معادله $6u_{xx}-u_{xy}+u_x-y=0$ کدام‌یک از تبدیل‌های زیر را اختیار کنیم تا معادله به فرم کانونی تبدیل شود؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\begin{cases}\xi=x\\ \eta=6x+y\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\xi=y\\ \eta=6y+x\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\xi=x\\ \eta=12x+y\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\xi=y\\ \eta=12y+x\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۲» در معادله با مشتقات جزئی $au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$ که در آن c,b,a می‌توانند توابعی از y,x باشند، برای یافتن تغییر متغیرهای لازم جهت رسیدن به فرم کانونیک معادله مشخصه‌ای بصورت مقابل تشکیل می‌دهیم: $a(\dfrac{dy}{dx})^2-2b(\dfrac{dy}{dx})+c=0$

در این سؤال داریم:

$$a=6\ ,\ \ b=\frac{-1}{2}\ ,\ c=0\Rightarrow 6(\frac{dy}{dx})^2+(\frac{dy}{dx})=0\Rightarrow(\frac{dy}{dx})(6\frac{dy}{dx}+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow y=c_1\rightarrow \xi=y\\ 6\dfrac{dy}{dx}+1=0\Rightarrow 6\dfrac{dy}{dx}=-1\Rightarrow 6y=-x+c_2\Rightarrow 6y+x=c_2\Rightarrow \eta=6y+x\end{cases}$$

مثال ۳۴: جواب عمومی معادله $z_x + z_y = 2(x+y)z$ عبارت است از: (ϕ تابع دلخواه است.) (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $z = ce^{x^2+y^2}$ (c ثابت حقیقی) ۲) $z = \phi(\frac{x-y}{2})e^{\frac{1}{2}(x+y)^2}$ ۳) $z = \phi(\frac{x+y}{2})e^{\frac{1}{2}(x-y)}$ ۴) $z = \phi(\frac{x-y}{2})e^{\frac{1}{2}(x+y)}$

پاسخ : گزینه «۲» برای حل معادله با استفاده از دستگاه لاگرانژ داریم:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} \Rightarrow y - x = c_1$$

$$dx = \frac{dz}{2z(x+y)} \xrightarrow{y=x+c_1} dx = \frac{dz}{2z(x+x+c_1)} \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2(2x+c_1)dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \operatorname{Ln}z = 2x^2 + 2c_1x + \operatorname{Ln}c_2$$

$$\Rightarrow z = c_2e^{2x^2+2c_1x} \Rightarrow z = c_2e^{2x(x+c_1)} = c_2e^{2xy}$$

بنابراین به روابط $y - x = c_1$ و $ze^{-2xy} = c_2$ می‌رسیم. با فرض $u = y - x$ و $v = ze^{-2xy}$ جواب به فرم $v = h(u)$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$ze^{-2xy} = h(y-x) \Rightarrow z = e^{2xy}h(y-x)$$

حالا دقت کنید که $2xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2$ است پس داریم:

$$z = e^{\frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2}h(y-x) = e^{\frac{1}{2}(y+x)^2}\underbrace{e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2}h(y-x)}_{\varphi}$$

اگر عبارت مشخص شده را $\varphi(y-x)$ بنامیم داریم $z = e^{\frac{1}{2}(y+x)^2}\varphi(y-x)$ و در پایان چون ضرب و تقسیم آرگومان بر عدد ثابت ایرادی ندارد خواهیم داشت:

$$z = e^{\frac{1}{2}(x+y)^2}\varphi(\frac{x-y}{2})$$

مثال ۳۵: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx} - 4u_{yy} = 0$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $u(x,y) = F(y+2x) + G(2xy)$ ۲) $u(x,y) = F(2xy) + G(y-2x)$
۳) $u(x,y) = F(y+2x) + G(y-2x)$ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به توضیحات کتاب، معادله مشخصه را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \Rightarrow u = F(y+2x) + G(y-2x)$$

مثال ۳۶: منحنی‌ها و معادلات مشخصه‌ی $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$ از کدام یک از چهار معادله‌ی زیر به دست می‌آیند؟ (A,B,C توابعی از (x,y) هستند و $A \neq 0$.) (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۸)

۱) $A(\frac{dy}{dx})^2 - B(\frac{dy}{dx}) + C = 0$ ۲) $A(\frac{dy}{dx})^2 + B(\frac{dy}{dx}) + C = 0$ ۳) $B^2 - 4AC = 0$ ۴) $B^2 + 4AC = 0$

پاسخ : گزینه «۱» برای کانونیک کردن فرم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم، از معادله‌ی مشخصه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$A(\frac{dy}{dx})^2 - B(\frac{dy}{dx}) + C = 0$$

که با حل معادله‌ی فوق که یک معادله‌ی درجه دوم برای $\frac{dy}{dx}$ است، دو جواب $f(x,y) = c_1$ و $g(x,y) = c_2$ به دست می‌آید که تغییر متغیرهای لازم $r = f(x,y)$ و $s = g(x,y)$ خواهند بود.

مثال ۳۷: معادله $xu_{xy} - yu_{yy} = 0$ یک معادله از کدام نوع است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) سهمی‌گون است.
۲) بیضی‌گون است.
۳) هذلولی‌گون است.
۴) هذلولی‌گون است هرگاه $xy > 0$ باشد، بیضی‌گون است هرگاه $xy < 0$ باشد و سهمی‌گون است هرگاه $xy = 0$ باشد.

پاسخ : گزینه «۳» در معادلاتی به فرم کلی $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$ اگر $B^2 - 4AC > 0$، معادله هذلولی‌گون و اگر $B^2 - 4AC < 0$، معادله بیضی‌گون و با شرط $B^2 - 4AC = 0$ معادله سهمی‌گون است. در این تست $A = 0$، $B = x$ و $C = -y$ می‌باشد، لذا داریم:

$$B^2 - 4AC = x^2 - 4(0)(-y) = x^2$$

و چون x^2 همواره عبارتی مثبت است، لذا معادله از نوع هذلولی‌گون است. البته باید شرط $x \neq 0$ برای تست لحاظ شود.

مثال ۳۸: جواب خصوصی معادله با مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \sin t = 0$، با شرط $u(x,0) = x$, $u(0,t) = 0$ کدام است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $x\cos t$　　۲) $x(\cos t + x)$　　۳) $x(\cos t - \sin t)$　　۴) $x(\cos t + \sin t)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\sin t \xrightarrow{\text{نسبت به } t \text{ انتگرال می‌گیریم}} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos t + f(x)$$

حالا از طرفین نسبت به x انتگرال می‌گیریم. فرض کنید $\int f(x)dx = F(x) + g(t)$ باشد که $g(t)$ ثابت انتگرال است.

$$\xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ انتگرال می‌گیریم}} u(x,t) = x\cos t + F(x) + g(t) \quad , \quad u(0,0) = F(0) + g(0) = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = F(0) + g(t) = 0 \\ u(x,0) = x + F(x) + g(0) = x \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین دو رابطه را باهم جمع می‌کنیم}} F(0) + g(0) + F(x) + g(t) = 0 \xrightarrow{(1)} F(x) + g(t) = 0 \Rightarrow u(x,t) = x\cos t$$

مثال ۳۹: پاسخ معادله با مشتقات جزئی $(1+xy)(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}) + x^2 + y^2 = 0$ کدام است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $u = \frac{-(x^2 - y^2)}{2(1+xy)} + c$　　۲) $u = \frac{(x-1)(x^2+y^2)}{(1+xy)x} + c$　　۳) $u = \frac{8(1-xy)}{(x^2+y^2)^2} + c$　　۴) $u = \frac{1 - xy + 2x + 4y}{1+xy} + c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$x\frac{du}{dx} - y\frac{du}{dy} = -\frac{(x^2+y^2)}{1+xy} \rightarrow xu_x - yu_y = -\frac{(x^2+y^2)}{1+xy}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده، شرط فوق فقط در مورد گزینه ۱ برقرار است.

مثال ۴۰: پاسخ معادله با مشتقات جزئی $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ کدام است؟

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۸۹)

۱) $u(x,y) = F(x+4y) + G(x-2y)$　　۲) $u(x,y) = F(x+iy) + G(x-3iy)$

۳) $u(x,y) = F(x - \frac{\sqrt{3}}{2}iy) + G(x + \frac{\sqrt{7}}{2}iy)$　　۴) $u(x,y) = F(x + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})y) + G(x + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2})y)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» دقت کنید در این تست اگر معادله مشخصه به صورت زیر تعریف شود، داریم:

$$2 + \lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow u = F[x + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})y] + G[x + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2})y]$$

مثال ۴۱: معادله موج $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ با تغییر متغیرهای $v = x + ct$ و $w = x - ct$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $u_{ww} = 0$　　۲) $u_{vv} = 0$　　۳) $u_{vw} = 0$　　۴) $u_{ww} + u_{vv} = 0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با استفاده از قاعده مشتق‌گیری جزئی داریم:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = u_v c + u_w(-c) \Rightarrow u_{tt} = c^2 u_{vv} - c^2 u_{vw} - c^2 u_{wv} + c^2 u_{w\omega} \qquad (1)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$u_x = u_v + u_w \Rightarrow u_{xx} = u_{vv} + u_{vw} + u_{wv} + u_{ww} \qquad (2)$$

با جایگذاری (۱) و (۲) در معادله اولیه خواهیم داشت: $u_{vw} = 0$

توضیح: از همان ابتدا معلوم بود معادله داده شده معادله موج و فرم کانونی آن به صورت $u_{vw} = 0$ است.

مثال ۴۲: تابع $z=e^{ax+bt+c}$ جوابی برای معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial z}{\partial t}$ است. اعداد c,b,a در کدام شرط یا شرایط صدق می‌کنند؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $a^2=4b^2+4c^2$ ۲) $a>0$ ، $b>0$ و $c>0$ ۳) $b^2=4a^2$ و $c>0$ ۴) $b=-4n^2$ ، $a=\pm in$ و c دلخواه

پاسخ : گزینه «۴» مقدار داده شده را در معادله قرار می‌دهیم:

$$a^2e^{ax+bt+c}=\frac{1}{4}be^{ax+bt+c}\to a^2=\frac{1}{4}b\to b=4a^2$$

اگر $a=\pm in$ در نظر بگیریم، داریم:

$$b=-4n^2\ ,\ a=\pm in$$

مثال ۴۳: با حذف a و b از معادله $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$ کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل می‌شود؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1-z^2$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z^2}-1$

۳) $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=\frac{1}{z^2}-1$ ۴) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=-1+\frac{1}{z^2}$

پاسخ : گزینه «۳» برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل تابع داده شده از تابع نسبت به x و y به صورت جداگانه مشتق می‌گیریم و a و b را بدست می‌آوریم و داخل تابع می‌گذاریم.

$$2(x-a)+2z\frac{dz}{dx}=0\Rightarrow a=x+z\frac{dz}{dx}\ ;\ 2(y-b)+2z\frac{dz}{dy}=0\to b=y+z\frac{dz}{dy}$$

حال a و b به دست آمده را در تابع قرار می‌دهیم، داریم:

$$(\frac{dz}{dx})^2+(\frac{dz}{dy})^2=\frac{1}{z^2}-1$$

مثال ۴۴: معادله دیفرانسیل $xu_{xx}-yu_{xy}=0$ از چه نوعی است و با کدام تغییر متغیر قابل تبدیل به یک معادله به فرم نرمال (کانونی) است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $z=y$ و $v=xy$ و هذلولی‌گون است. ۲) $z=y$ و $v=xy$ و بیضی‌گون است.

۳) $z=y-x$ و $v=y+x$ هذلولی‌گون است. ۴) $z=\frac{y}{x}$ و $v=y+x$ بیضی‌گون است.

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به این که $A=x$ ، $B=-y$ و $C=0$ ، لذا B^2-4AC برابر y^2 و در نتیجه مثبت است و این یعنی معادله هذلولی‌گون است. از طرفی معادله زیر را داریم:

$$A(\frac{dy}{dx})^2-B(\frac{dy}{dx})+C=0\Rightarrow x(\frac{dy}{dx})^2+y(\frac{dy}{dx})=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-y\pm\sqrt{y^2}}{2x}=\begin{cases}0\\-\frac{2y}{2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow y=c_1\Rightarrow \mathbf{z=y}\\ \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow Lny=-Lnx+Lnc_2\Rightarrow Lny=Ln\frac{c_2}{x}\Rightarrow y=\frac{c_2}{x}\Rightarrow c_2=xy\Rightarrow \mathbf{v=xy}$$

مثال ۴۵: جواب معادله $x^2u_{xy}+y^2u=0$ با روش ضربی کدام است؟ (λ و A در جواب اعداد ثابتی هستند.)

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $u(x,y)=Ae^{(\frac{1}{\lambda y^2}+\frac{x}{y})}$ ۲) $u(x,y)=Ae^{(\frac{y^3}{3\lambda}+\frac{x}{y})}$ ۳) $u(x,y)=Ae^{(\frac{1}{\lambda y^2}-\frac{x}{y})}$ ۴) $y=\pm 2$

پاسخ : هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$u(x,y)=F(x)G(y)\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}x^2F'G'+y^2FG=0$$

$$\frac{x^2F'}{F}=-\frac{y^2G}{G'}=-\lambda\Rightarrow\begin{cases}\frac{F'}{F}=\frac{-\lambda}{x^2}\\ \frac{G'}{G}=\frac{y^2}{\lambda}\end{cases}\Rightarrow F=e^{\frac{\lambda}{x}}\ ,\ G=e^{\frac{y^3}{3\lambda}}\Rightarrow u=e^{(\frac{y^3}{3\lambda}+\frac{\lambda}{x})}$$

مثال ۴۶: جواب خصوصی معادله با مشتقات جزئی $x,t>0$ ، $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+x\frac{\partial u}{\partial x}=x\\ u(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$ کدام گزینه زیر است؟

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۰)

۱) $x(1-e^{t})$ ۲) $x(1-e^{-t})$ ۳) $x(1+e^{t})$ ۴) $x(1+e^{-t})$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

احتیاج به حل معادله نیست! اولاً با توجه به شرط مرزی باید مقدار $u(x,0)$ برابر صفر شود، لذا فقط گزینه‌های ۱ و ۲ می‌توانند کاندیدای جواب باشند، از بین این دو گزینه کافیست یکی را در معادله قرار دهیم، گزینه (۲) را قرار می‌دهیم:

$$u=x(1-e^{-t})\Rightarrow\begin{cases}u_t=xe^{-t}\\ u_x=1-e^{-t}\end{cases}\Rightarrow u_t+xu_x=xe^{-t}+x(1-e^{-t})=x$$

پس جواب همین گزینه است. البته اگر گزینه (۱) را نیز امتحان می‌کردیم، در معادله صدق نمی‌کرد و باز هم گزینه (۲) جواب صحیح انتخاب می‌شد.

مثال ۴۷: $z=x^3f(\frac{y}{x})$ جواب عمومی کدام معادله دیفرانسیل زیر است؟ (مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۰)

۱) $xz_x+yz_y=3z$ ۲) $yz_x+xz_y=3z$ ۳) $xz_x-yz_y=3z$ ۴) $xz_y-yz_x=3z$

پاسخ : گزینه «۱» معادله z، یک معادله همگن از درجه ۳ است زیرا:

$$z(\lambda x,y\lambda)=x^3\lambda^3f(\frac{\lambda y}{\lambda x})=\lambda^3(x^3f(\frac{y}{x}))$$

بنابراین بنا به قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xz_x+yz_y=3z$$

مثال ۴۸: معادله مقابل جزء کدام دسته از معادلات دیفرانسیل قرار می‌گیرد؟ $(2xy-1)u_{xx}+(x+2y)u_{xy}+u_{yy}=0$

(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) بیضی‌گون ۲) سهمی‌گون ۳) هذلولی‌گون ۴) به مقادیر x , y بستگی دارد.

پاسخ : گزینه «۳»

$$\Delta=(x+2y)^2-4(2xy-1)(1)=(x-2y)^2+4>0$$

با توجه به اینکه $\Delta>0$ است، می‌توان نتیجه گرفت که معادله هذلولی‌گون است.

مثال ۴۹: جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx}+3u_{xt}+2u_{tt}=0$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $u=F(t+x)+G(t+3x)$ ۲) $u=F(t+2x)+G(t-x)$ ۳) $u=F(t-x)+G(t+x)$ ۴) $u=F(t-x)+G(t-2x)$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-2\\ \lambda=-1\end{cases}\Rightarrow u=F(t-x)+G(t-2x)$$

مثال ۵۰: اگر جواب مسأله مقدار اولیه $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \ , \ -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} T_1 \ , \ x > 0 \\ T_2 \ , \ x < 0 \end{cases} \end{cases}$ را به صورت $u(x,t) = f(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$ جستجو کنیم، آن‌گاه $u(x,t) = A + B\psi(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$ که در آن: (مکانیک ـ دکتری ۹۱)

۱) $B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 - T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

۲) $B = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 + T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

۳) $B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 + T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

۴) $B = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 - T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با جایگذاری $u(x,t) = f(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$ در معادله دیفرانسیل داده شده، خواهیم داشت:

$$-\frac{x}{4at\sqrt{t}} f'(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) - a^2 (\frac{1}{4a^2 t}) f''(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر $z = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ معادله فوق به صورت مقابل در می‌آید:

$$f''(z) + \frac{x}{a\sqrt{t}} f'(z) = 0 \Rightarrow f''(z) + 2zf'(z) = 0$$

با فرض $f'(z) = g(z)$ خواهیم داشت:

$$g'(z) + 2zg(z) = 0 \Rightarrow g(z) = Be^{-z^2} = f'(z) \Rightarrow f(z) = u(x,t) = A + B\int_0^z e^{-s^2} ds$$

$$u(x,0) = \begin{cases} A + B\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = T_1 & x > 0 \\ A + B\int_0^{-\infty} e^{-s^2} ds = T_2 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به روابط $\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = -\int_0^{-\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A + B(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = T_1 \\ A + B(\frac{-\sqrt{\pi}}{2}) = T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{T_1 + T_2}{2} \\ B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

مثال ۵۱: پاسخ کلی معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی (پاره‌ای) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$، کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $xf(y-x) + yh(y-x)$　۲) $xf(y+x) + h(y+x)$　۳) $f(y+x) + h(y+x)$　۴) $f(y-x) + xh(y-x)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

چون λ ریشه‌ی مضاعف است، لذا فرم کلی جواب به صورت مقابل است:

$$z = f(y + \lambda x) + xh(y + \lambda x)$$

با توجه به این که $\lambda = -1$ به دست آمد، پس پاسخ معادله به صورت مقابل است:

$$z = f(y-x) + xh(y-x)$$

مثال ۵۲: فرم جواب معادله دیفرانسیل $2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ کدام است؟ (f و g توابع دلخواه فرض شوند.)

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) $u = f(y-2x) + g(y-\frac{x}{2})$　۲) $u = f(y-2x) + g(y-x)$　۳) $u = f(2x+y) + g(2x-y)$　۴) $u = f(2y-x) + g(2y+x)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (2\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \ , \ \lambda = -2$$

بنابراین فرم جواب به شکل زیر است:

$$u = f(y-2x) + g(y-\frac{x}{2})$$

حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست!

(روش رد گزینه ها)

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در این فصل قراره با هم به سؤالات «معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی» کَلَک بزنیم!
۱۱۱ تست از سؤالات آزمون های کارشناسی ارشد و دکتری سراسری رو براتون انتخاب و با دسته بندی های مختلف اونا رو ارائه کردم.

مثال ۱: فرض کنید b_n ضریب فوریه « n ام» بسط سینوسی تابع x^3 باشد. جواب مسأله: $u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)\ ,\ 0<x<\pi\ ,\ t>0$، کدام است؟

$$\begin{cases} u(0^+,t)=0\ ,\ u(\pi^-,t)=0 \\ u(x,0^+)=x^3 \end{cases}$$

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\cos nx$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-nt}\sin nt$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin nx$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 x}\sin nt$

پاسخ : گزینه «۳» ما دنبال $u(x,t)$ هستیم، شرط $u(0,t)=0$ به ما میگه جواب جوریه که اگه به جای x های اون صفر قرار بِدیم، مقـدارش صـفر میشـه؛ گزینه‌های این سؤال اونقدر سطحی طرح شده که لازم نیست هیچ اطلاعات دیگه‌ای در مورد مسأله بدونیم، تنها گزینه‌ای که تو شرط $u(0,t)=0$ صـدق میکنـه؛ گزینه (۳) هستش

مثال ۲: جواب مسأله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1$ ، $u(x,0)=\sin x$ ، $u_y(x,0)=x$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۹۲)

۱) $u(x,y)=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin x]+(x+y)$
۲) $u(x,y)=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]+x^2-2xy+x$
۳) $u(x,y)=\sin(x+y)+\sin(x-y)-\sin x$
۴) $u(x,y)=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]+xy-\frac{1}{2}y^2$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به شرط $u(x,0)=\sin x$ ، جواب باید جوری باشه که اگه به جای y های اون صفر قرار دادیم، برابر با $\sin x$ بِشه، پـس تـا اینجا گزینه‌های (۱) و (۲) حذف میشن! خُب جواب باید این خاصیت رو هم داشته باشه که اگه از اون نسبت به y مشتق گرفتیم و به جای y های اون صفر قرار دادیم، مقدارش برابر با x بِشه (چون شرط $u_y(x,0)=x$ اینو میگه!) از بین گزینه‌های (۳) و (۴) کدوم این شرط رو داره؟ کاملاً معلومه هـر جـوری از گزینه (۳) نسبت به y مشتق بگیریم و به جای y هاش صفر قرار بدیم، از توش x در نمیاد! چون فقط سینوس داره! پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۳: جواب ماندگار (مانا) معادله حرارت $u_t=x^2u_{xx}-6xu_x+6u$ و $0\le x\le 1$ ، $u_x(0,t)=6$ ، $u(1,t)=7$ عبارت است از:
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $1+6x^5$
۲) $x+6x^5$
۳) $x+6x^6$
۴) $6x+x^6$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به شرط $u_x(0,t)=6$ ، می‌تونیم سریع به جواب برسیم؛ تنها گزینه‌ای که اگه از اون نسبت به x مشتق بگیـریم، بعـد بـه جای تمام xهای اون عدد صفر رو قرار بِدیم، برابر با ۶ میشه، گزینه‌ی چهارِ

مثال ۴: تبدیل لاپلاس جواب مسأله با شرایط مرزی داده شده کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

$$w_t=w_{xx}\quad,\quad 0\le x\le 1\quad,\quad t\ge 0\quad,\quad w(0,t)=w(x,0)=0\quad,\quad w(1,t)=t$$

(فرض کنید $L\{w(x,t)\}=W(x,s)$)

۱) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2\sinh\sqrt{s}}$
۲) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh\sqrt{s}}$
۳) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{2s^2\sinh\sqrt{s}}$
۴) $W(x,s)=\frac{\sinh x\sqrt{s}}{2s\sinh\sqrt{s}}$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به شرط $w(1,t)=t$ و به عبارت دیگه شرط $W(1,s)=L[t]=\frac{1}{s^2}$ ، (دقت کنین تو صورت سؤال فرض شده $L\{w(x,t)\}=W(x,s)$، برای همین ما نوشتیم $W(1,s)=L[t]$) باید تو گزینه‌ها به جای x عدد ۱ رو قرار بدیم، هر کدوم برابر با $\frac{1}{s^2}$ شد، جوابه! جالبه فقط گزینه (۱) این شرایط رو داره

مثال ۵: تبدیل لاپلاس (نسبت به زمان) جواب معادله $\begin{cases} u_t=u_{xx}-u\ ,\ 0<x<\infty\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0\quad,\quad u(0,t)=1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=0 \end{cases}$ ، کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{s^2}e^{-x\sqrt{s}}$
۲) $\frac{1}{s}e^{-x\sqrt{s+1}}$
۳) $\frac{1}{s^2}e^{x\sqrt{s}}$
۴) $\frac{1}{s}e^{x\sqrt{s+1}}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به شرط $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=0$ ، معلومه توان تابع نمایی باید منفی باشه! پس یکی از گزینـه‌هـای (۱) و (۲) جوابـه! از طرفـی داریم:

$$u(0,t)=1\ \Rightarrow \ell\{u(0,t)\}=\ell[1]\ \Rightarrow U(0,s)=\frac{1}{s}$$

تو گزینه‌های (۱) و (۲) هر کدوم به ازای $x=0$ حاصلشون برابر با $\frac{1}{s}$ شد، جوابه! مشخصه فقط گزینه (۲) این شرایط رو داره

مثال ۶: دمای مانا (پایا، حالت پایدار) در ربع اول صفحه xy با شرایط کرانه‌ای (مرزی) $T(x,0)=T_0$, $T(0,y)=0$ را با $T(x,y)$ نشان می‌دهیم. صورت کراندار آن برابر است با:
(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $T_0-\frac{T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\frac{2xy}{x^2-y^2}$
۲) $T_0-\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\frac{2xy}{x^2-y^2}$
۳) $T_0-\frac{T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\frac{y}{x})$
۴) $T_0-\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}(\frac{y}{x})$

پاسخ: گزینه «۴» شرط $T(0,y)=0$ فقط تو گزینه‌ی (۴) صدق میکنه

$$T(0,y)=T_0-\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Arctg}\frac{y}{0}=T_0-\frac{2T_0}{\pi}\times\frac{\pi}{2}=0$$

مثال ۷: با استفاده از روش دالامبر، جواب مسأله
$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & (0<x<\infty,t>0)\\ u_x(0,t)=0\ ,\ u(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2}\ ,\ u_t(x,0)=0\end{cases}$$
عبارت است از:
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶)

۱) $u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi t}{2}$
۲) $u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi t}{2}$
۳) $u(x,t)=\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi t}{2}$
۴) $u(x,t)=\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi t}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» شرط $u(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2}$ به ما میگه؛ اگه تو گزینه‌ها $t=0$ قرار بدیم، جواب باید مقدارش برابر با $\cos(\frac{\pi x}{2})$ بِشه، فقط گزینه‌ی (۴) چنین شرایطی داره

مثال ۸: کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی (مقدار ثابت $\alpha\equiv$) $0<x<\pi\ ,\ t>0$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ با شرایط کرانه‌ای، $y(x,0)=\sin(x)$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\cos(x)$ باشد؟
(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\sin(x)\cos(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\cos(x)\sin(\alpha t)$
۲) $\sin(x)\cos(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\sin(x)\sin(\alpha t)$
۳) $\sin(x)\sin(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\cos(x)\sin(\alpha t)$
۴) $\frac{1}{\alpha}\cos(x)\sin\alpha t+\frac{1}{\alpha}\cos(x)\cos\alpha t$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها معلومه فقط گزینه‌های (۱) و (۲) هستن که تو شرط $y(x,0)=\sin x$ صدق می‌کنن (تو گزینه‌های (۳) و (۴) به جای t صفر قرار بدین، بی‌تربیت‌ها $\sin x$ نمیشن!) از طرفی فقط گزینه (۱) تو شرط $y_t(x,0)=\cos x$ صدق می‌کنه

مثال ۹: دمای مانای کراندار $T(u,v)$ در نیم صفحه $v\geq 0$ را چنان بیابید که بر قسمت $u<-1$ و $v=0$ از کرانه، شرط $T=b$ و بر قسمت $u>1$، $v=0$ از کرانه، شرط $T=a$ (a و b ثابت حقیقی)، و پاره‌خط $-1<u<1$، $v=0$ از کرانه نیم‌صفحه عایق باشد.
(مکانیک ـ دکتری ۹۱)

۱) $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\frac{v}{u}$
۲) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{(u+1)^2+v^2}-\sqrt{(u-1)^2+v^2}}{2}$
۳) $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\pi}\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{(u+1)^2+v^2}-\sqrt{(u-1)^2+v^2}}{2}$
۴) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{\pi}\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{(u+1)^2+v^2}-\sqrt{(u-1)^2+v^2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» صورت سؤال گفته مقدار T به ازای $v=0$ و $u<-1$ برابر b شده، حالا تو گزینه‌ها $v=0$ و $u<-1$ قرار میدیم، هر کدوم برابر با b شد، جوابه؛ معلومه گزینه «۱» جواب نیست، چون به ازای $v=0$، جواب برابر $\frac{a+b}{2}$ میشه، تو گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) همه‌ی جواب‌ها Arc دارن، به ازای $v=0$ داریم:

$$\operatorname{Arc\,sin}(\frac{|u+1|-|u-1|}{2})\overset{u<-1}{=\!=}\operatorname{Arc\,sin}(\frac{-u-1+u-1}{2})=\operatorname{Arc\,sin}(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

حالا باید دنبال گزینه‌ای باشیم که اگه عبارت پشت Arc اون توی $-\frac{\pi}{2}$ ضرب شد، عبارت برابر $\frac{b-a}{2}$ بشه، تا این عبارت با $\frac{a+b}{2}$ (جملـه‌ی اول جـواب) جمع بشه و حاصل برابر با b بشه، معلومه فقط گزینه (۴) این شرایط رو داره:

$$T=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{\pi}(-\frac{\pi}{2})=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=\frac{2b}{2}=b$$

روش تستی‌تر و راحت‌تر: به ازای $v=0$ و $u\to+\infty$ (چون داریم $u>1$) جواب باید برابر با a و به ازای $v=0$ و $u\to-\infty$ (چون داریم $u<-1$)، جواب باید برابر با b بِشه، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

مثال ۱۰: معادله لاپلاس با یک درجه تقارن در مختصات کروی ($0 \le \theta \le 2\pi$ ، $r \ge 0$ ، $0 \le \varphi \le \pi$) برای $u(r,\varphi)$ جوابی به صورت زیر دارد:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos\varphi)$$

که در آن $P_n(x)$ چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌باشند. اگر شرایط مرزی به صورت $\begin{cases} u(a,\varphi) = 0 \\ u(r,\varphi) \simeq r\cos\varphi, r \to \infty \end{cases}$ باشد، $u(r,\theta)$ برای خارج کره کـدام گزینـه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $(r^{-1} - a^2 r^2) P_1(\cos\varphi)$ ۲) $(1 - a^2 r^{-1}) P_0(\cos\varphi)$ ۳) $(r - a^2 r^{-1}) P_1(\cos\varphi)$ ۴) $(r - a^3 r^{-2}) P_1(\cos\varphi)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» شرط $u(a,\varphi) = 0$ فقط تو گزینه‌های (۳) و (۴) صدق میکنه! (بـه جـای r تـو گزینـه‌هـا a قـرار بـدین، مقـدار گزینـه‌هـای (۱) و (۲) صفر نمیشه!) برای انتخاب جواب از بین گزینه‌های (۳) و (۴)، می‌تونیم این‌جوری استدلال کنیم؛ اگه توی معادله‌ی $u(r,\varphi)$ تو صورت سؤال $n = 1$ قرار بِدیم، بایـد با r^{-2} در کنار $P_1(\cos\varphi)$ برخورد داشته باشیم (به عبارت‌های داخل سیگما در صورت سؤال نگاه کنین) پس فقط گزینه (۴) می‌تونه جواب باشه

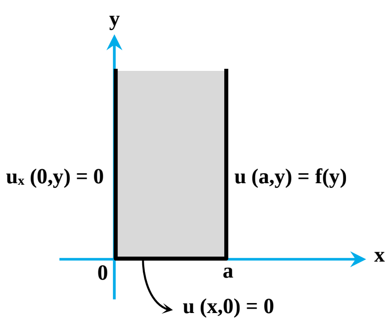
مثال ۱۱: جواب مسأله $\frac{\partial\phi}{\partial x} + x\frac{\partial\phi}{\partial t} = x^3$ ، $x > 0, t > 0$ ، $\phi(0,t) = 0$ ، $\phi(x,0) = 0, x > 0$ کدام است؟ (H : تابع هویساید، δ : دلتای دیراک) (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۹)

۱) $\phi(x,t) = x^2 t - t^2 + (t - \frac{1}{2}x^2)^2 H(t - \frac{1}{2}x^2)$ ۲) $\phi(x,t) = x^2 + t^2 + (t + \frac{1}{2}x^2)\delta(t - \frac{1}{2}x^2)$

۳) $\phi(x,t) = x^2 t - t^2 + (t - \frac{1}{2}x^2)^2 \delta(t)$ ۴) $\phi(x,t) = x^2 - t^2 + (t - \frac{1}{2}x^2)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» شرط $\phi(0,t) = 0$ تو گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) صدق نمی‌کنه! چون اگـه تـو گزینـه‌ی (۳)، $x = 0$ قـرار بـدیم، مقـدار تـابع برابـر $-t^2 + t^2\delta(t)$ میشه که اگه $t = 0$ باشه، تو شرط مزبور صدق میکنه و در غیر این صورت حاصلش برابر $-t^2$ میشه، همچنین تو گزینه‌ی (۴) مقـدار تـابع برابـر با $-t^2 + t$ میشه که همواره صفر نیست! تو گزینه‌ی (۲) هم اگر $x = 0$ قرار بدیم؛ $t^2 + t\delta(t)$ بدست میاد که مقدارش برای $t \ne 0$ میشـه t^2 کـه صـفر نیسـت. پس گزینه‌ی (۱) درسته

مثال ۱۲: جواب معادله لاپلاس $y > 0$ ، $0 < x < a$ و $u_{xx} + u_{yy} = 0$ با شرایط مرزی داده شده در شکل زیر به چه صورت است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)



۱) $\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda x \cosh\lambda y\, d\lambda$

۲) $\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda y \cosh\lambda x\, d\lambda$

۳) $\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda y \cosh\lambda x\, d\lambda$

۴) $\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda y \sinh\lambda x\, d\lambda$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به شرط $u(x,0) = 0$ ، اگه به جای y ها صفر قرار بِدیم، باید جواب برابر با صفر بِشه! گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) کـه شـامل جملات $\cos\lambda y$ و $\cosh\lambda y$ هستن، هیچوقت صفر نمیشن. بنابراین فقط گزینه (۳) میتونه صحیح باشه

مثال ۱۳: هرگاه اختلاف پتانسیل‌های موجود بین استوانه‌های قائم به شعاع‌های ۵ و ۱۰ به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ باشد، پتانسیل بین دو استوانه کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

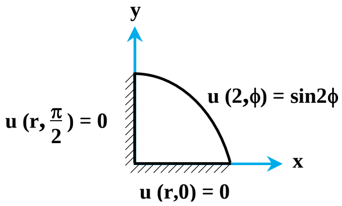
۱) $u = 110\,Lnr + 110$ ۲) $u = 220\,Lnr + 110$

۳) $u = 220\,Lnr + 220(1 - \frac{Ln2}{Ln5})$ ۴) $u = \frac{110}{Ln2}Lnr + 110(1 - \frac{Ln5}{Ln2})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به اطلاعات صورت سؤال $u(5) = 110$ و $u(10) = 220$ ، یعنی به ازای $r = 5$ باید $u = 110$ بدست بیاد کـه ایـن شـرط رو فقط گزینه (۴) داره

مثال ۱۴: پتانسیل الکتریکی در داخل ربع دایره‌ای با شرایط مرزی داده شده در معادلهٔ زیر صدق می‌کند (در مختصات قطبی r و ϕ):

عبارت پتانسیل ، $u(r,\phi)$ کدام است؟ $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0$ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $2r\sin 2\phi$

۲) $\frac{r^2}{2}\sin 2\phi$

۳) $\frac{r}{2}\sin\phi$

۴) $\frac{r^2}{4}\sin 2\phi$

پاسخ : گزینه «۴» این سؤال دیگه واقعاً خیلی آسونه!، به قول شما جوونای امروزی، خوراکه با توجه به شرط $u(2,\phi)=\sin 2\phi$، میشه گفت: فقط گزینه ۴ میتونه صحیح باشه (توی گزینه‌ها به جای r، عدد ۲ رو قرار میدیم، هر کدوم $\sin 2\phi$ شد، جوابه!) واقعاً چه حالی کردن برقی‌هایی که سال ۸۲ امتحان دادن!

مثال ۱۵: جواب معادله لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ در ناحیه $0<x<1$ و $-\infty<y<\infty$ با شرایط $u(0,y)=0$ و $u(1,y)=1$ کدام گزینه خواهد شد؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $u=x+1$

۲) $u=x$

۳) $u=-x$

۴) $u=-x+1$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به شرط $u(0,y)=0$، معلوم میشه گزینه‌های (۱) و (۴) غلطن! (چون اگه به جای x، عدد صفر رو قرار بدیم، مقدار اونا صفر **نمیشه**!) حالا باید از بین گزینه‌های (۲) و (۳) یکی رو انتخاب کنیم، به نظر شما کدوم گزینه تو شرط $u(1,y)=1$ صدق میکنه!؟ (با رسم شکل ثابت کنین جواب به این سؤال کمتر از سه ثانیه طول میکشه)

مثال ۱۶: معادله لاپلاس $\nabla^2 u(x,y)=0$ را در ربع اول $(y\ge 0, x\ge 0)$ با شرایط مرزی زیر در نظر می‌گیریم:

$u(x,0)=f(x)$, $u(0,y)=0$ شکل کلی پاسخ معادله، $u(x,y)$ عبارت است از: [$B(k), A(k)$ توابعی از k هستند.] (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\int_0^\infty A(k)e^{-ky}\cos(kx)dk$

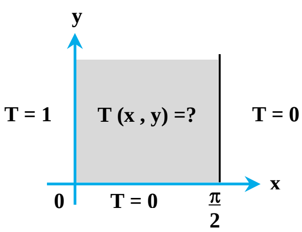
۲) $\int_0^\infty A(k)e^{-ky}\sin(ky)dk$

۳) $\int_0^\infty A(k)e^{-ky}\sin(kx)dk$

۴) $\int_0^\infty (A(k)\cos kx+B(k)\sin kx)e^{-ky}dk$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به شرط $u(0,y)=0$ گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) نمی‌تونن صحیح باشن! (به جای x ها، صفر قرار بِدین، بی‌تربیت‌ها هیچکدوم صفر نمیشن!)، پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۷: حل معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل (ناحیه $(y\ge 0, 0\le x\le \frac{\pi}{2})$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



۱) $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

۲) $\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)$

۳) $\frac{2}{\pi}\text{Arc}\tan(\tanh y)$

۴) $\frac{2}{\pi}\text{Arc}\tan(\cot x\tanh y)$

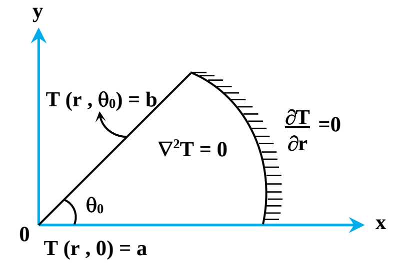
پاسخ : گزینه «۴» با توجه به شرط $T(0,y)=1$، معلوم میشه گزینه (۳) غلطه! از طرفی با کنترل شرط $T(x,0)=0$، میشه گفت؛ گزینه‌های (۱) و (۲) هم غلطن، چون فقط بر حسب x هستن، پس بدون انجام هیچ عملی و کمتر از چند ثانیه میشه گفت؛ گزینه (۴) جوابه

مثال۱۸: می‌دانیم که پاسخ معادلهٔ لاپلاس در هر نقطه داخل یک کره (در حالت تقارن نسبت به $(u(x,t)=\int_0^{\infty}F_\omega(x)G_\omega(t)d\omega$ در مختصات کروی بصورت $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)$ می‌باشد، که $p_n(\cos\theta)$ توابع لژاندر می‌باشند. اگر پتانسیل روی سطح کرهٔ یکه (کره به شعاع واحد) با عبارت $u(1,\theta)=1+2\cos^2\frac{\theta}{2}$ بیان شود، $u(r,\theta)$ داخل کره عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری۷۸)

۱) $2+r\cos\theta$ ۲) $1+2r\cos\theta$ ۳) $1+\frac{r^2}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$ ۴) $2+r^2\cos\theta$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به شرط $u(1,\theta)=1+2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ یا به عبارت دیگه شرط $u(1,\theta)=2+\cos\theta$ (با توجه به فرمول طلایی $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$، رابطهٔ اول به رابطهٔ دوم تبدیل شد) پس باید به ازای $r=1$، جواب به صورت $2+\cos\theta$ باشه، تا اینجا می‌تونیم با گزینه‌های (۲) و (۳) خداحافظی کنیم! در گزینه‌های (۱) و (۴) تفاوت تو توان r هستش، با توجه به صورت سؤال (داخل $\sum$) و نظر به این که $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$، باید توان r که در کنار $\cos\theta$ قرار گرفته، برابر با (۱) باشه، پس فقط گزینه (۱) می‌تونه صحیح باشه

مثال۱۹: مسأله مقدار مرزی (یا کرانه‌ای) زیر را که مربوط به تعیین دمای مانای (پایای) نقاط یک قطاع است، حل کنید. مرز کمانی دایره با عایق حرارتی پوشانیده شده است. (**a**، **b** و θ_0 ثابت‌اند). (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)



۱) $T(r,\theta)=(b-a)\theta+a$

۲) $T(r,\theta)=(b-a)\frac{\theta}{\theta_0}+a$

۳) $T(r,\theta)=(b-a)\frac{\theta^2}{\theta_0^2}+a$

۴) $T(r,\theta)=(b-a)r\frac{\theta}{\theta_0}+a$

پاسخ : گزینه «۲» گزینه‌های (۱) و (۴) تو شرط $T(r,\theta_0)=b$ صدق نمی‌کنن و گزینه (۳) هم تو شرط $\nabla^2T=0$ صدق نمی‌کنه، پس اجباراً گزینه (۲) جواب درسته

مثال۲۰: جواب معادله $u_{tt}=4\pi^2u_{xx}$ با شرایط اولیه $u(x,0)=\sin x$ و $u_t(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$ کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون، مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) $u(x,t)=\sin x\cos2\pi t+\frac{1}{4\pi}[tg^{-1}(x+2\pi t)-tg^{-1}(x-2\pi t)]$

۲) $u(x,t)=\sin x\cos2\pi t+\frac{1}{2\pi}[tg^{-1}(x+2\pi t)-tg^{-1}(x-2\pi t)]$

۳) $u(x,t)=\sin2\pi x\cos t+\frac{1}{4\pi}[tg^{-1}(x+2\pi t)-tg^{-1}(x-2\pi t)]$

۴) $u(x,t)=\sin2\pi x\cos t+\frac{1}{2\pi}[tg^{-1}(x+2\pi t)-tg^{-1}(x-2\pi t)]$

پاسخ : گزینه «۱» اولاً دقت کنین با توجه به شرط $u(x,0)=\sin x$، معلومه که یکی از گزینه‌های (۱) و (۲) جوابن، پس با مشتق گرفتن از هر کدوم از این دو گزینه می‌تونیم به جواب برسیم!

با استفاده از شرط $u_t(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$، می‌تونیم بدون زحمت به جواب برسیم! معلومه قسمت **اول** جواب تو تموم گزینه‌ها بعد از مشتق گرفتن نسبت به t و قرار دادن $t=0$، برابر با صفر میشه (چون همهٔ گزینه‌ها cos دارن و بعد از مشتق گرفتن به sin تبدیل میشن) پس این قسمت **دوم** جوابه که برابر با $\frac{1}{1+x^2}$ میشه (حواستون به شرط $u_t(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$ که هست!) معلومه فقط گزینه (۱) این شرایط رو داره

$$\frac{1}{4\pi}[tg^{-1}(x+2\pi t)-tg^{-1}(x-2\pi t)]'=\frac{1}{4\pi}[\frac{2\pi}{1+(x+2\pi t)^2}-\frac{-2\pi}{1+(x-2\pi t)^2}]$$

که اگه $t=0$، قرار بدیم برابر با $\frac{1}{1+x^2}$ میشه!

مثال ۲۱: توزیع دما در یک میله نامتناهی به صورت $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2cz\sqrt{t})e^{-z^2}dz$ است. در این میله $C=\frac{1}{2}$ و دمای اولیه به صورت $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi} & , |x|<1\\ 0 & , |x|>1\end{cases}$ می‌باشد. در این صورت $u(x,t)$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $\int_{-1}^{1} e^{-z^2}dz$ ۲) $2\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}dz$ ۳) $\int_{(1-x)/\sqrt{t}}^{-(x+1)/\sqrt{t}} e^{-z^2}dz$ ۴) $\int_{-(x+1)/\sqrt{t}}^{(1-x)/\sqrt{t}} e^{-z^2}dz$

پاسخ : گزینه «۴» گزینه‌های (۱) و (۲) چون مستقل از زمان هستن، نمی‌تونن جواب باشن!

اگه زمان صفر رو از بین گزینه‌های (۳) و (۴) در نظر بگیریم، پاسخ بدست میاد، در $t=0$ داریم:

$$u(x,0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-z^2}dz$$

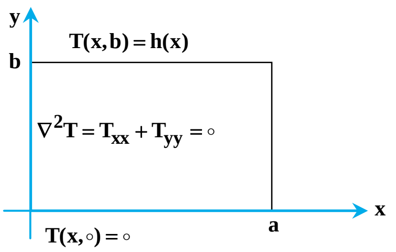
از طرفی برای $|x|<1$، داریم: $f(x)=\sqrt{\pi}$، پس $u(x,0)$ رو می‌تونیم به شکل مقابل بنویسیم:

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

که فقط تو گزینه ۴ صدق میکنه

مثال ۲۲: پایه‌ی متعامد موردنیاز برای استفاده در حل مسأله مقدار مرزی داده شده از طریق جداسازی متغیرها، کدام است؟

(مهندسی برق و مکانیک ـ سراسری ۹۲)



$\begin{cases}T(0,y)=T(a,y)\\ T_x(0,y)=T_x(a,y)\end{cases}$ (شرایط مرزی روی دو ضلع راست و چپ)

۱) $\frac{1}{2},\sin\frac{2\pi x}{a},\cos\frac{2\pi x}{a},\cdots,\sin\frac{2n\pi x}{a},\cos\frac{2n\pi x}{a},\cdots$

۲) $\frac{1}{2},\sin\frac{\pi x}{a},\cos\frac{\pi x}{a},\cdots,\sin\frac{n\pi x}{a},\cos\frac{n\pi x}{a},\cdots$

۳) $\frac{1}{2},\sin\frac{\pi x}{a},\cos\frac{\pi x}{a},\cdots,\sin\frac{(2n-1)\pi x}{a},\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a},\cdots$

۴) $\sin\frac{2\pi x}{a},\cos\frac{2\pi x}{a},\cdots,\sin\frac{2n\pi x}{a},\cos\frac{2n\pi x}{a},\cdots$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به شرایط مرزی به راحتی می‌تونین به سؤال جواب بِدین؛ توجه کنین؛ شرط $T(0,y)=T(a,y)$، یعنی جواب جوریه که اگه به جای x اون، ۰ یا a قرار بِدیم، جملات اون به صورت مجزا هر کدوم مقدارشون یکسان و مساوی هم باشه، واضحِ؛ گزینه‌های (۲) و (۳) غلطن! مثلاً یه جمله از این گزینه‌ها رو اگه انتخاب کنیم، داریم:

$$\cos(\frac{\pi x}{a}) \Rightarrow \begin{cases}x=0 \Rightarrow \cos(0)=1\\ x=a \Rightarrow \cos(\pi)=-1\end{cases} \Rightarrow T(0,y)\neq T(a,y)$$

خُب فرق گزینه‌های (۱) و (۴) اینِ که گزینه (۱) میگه عدد ثابت باید باشه و گزینه (۴) میگه لازم نیست عدد ثابت باشه، برای این که ببینیم کدوم راست میگه، باید ببینیم این آقای عدد ثابت (یعنی $\frac{1}{2}$) تو شرط‌های ما صدق میکنه یا نه؟

$T(0,y)=T(a,y) \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ صدق میکنه و $T_x(0,y)=T_x(a,y) \Rightarrow 0=0 \Rightarrow$ صدق میکنه

همون‌طور که می‌بینین، این عدد تو هر دو شرط صدق میکنه، پس گزینه (۱) راست میگه البته یه جور دیگه هم میشه گزینه‌ی صحیح رو تشخیص داد و اون این که؛ درستی این گزینه به این دلیله که چون محدودیتی روی $h(x)$ نداریم، پس $h(x)$ می‌تونه مقدار DC هم داشته باشه، پس به پایه ثابت هم نیاز داریم!

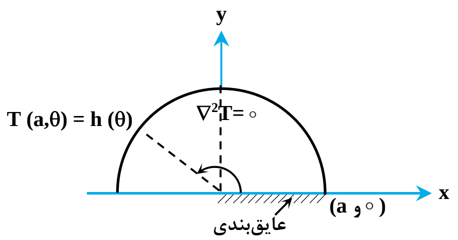
مثال ۲۳: در مسأله مقدار اولیه ـ مرزی $\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)\ ,\ 0<x<L, t>0\\ u(0,t)=0, u_x(L,t)=0\ ,\ u(x,0)=\phi(x)\end{cases}$، که در آن $\phi(x)$ و $f(x,t)$ توابع پیوسته و تکه‌ای هموار مفروض هستند، دنباله توابع پایه متعامد مورد نیاز بسط فوریه، کدام است؟

(مکانیک ـ دکتری ۹۲)

۱) $\left\{\sin\frac{k\pi x}{L}\right\}$ ۲) $\left\{\sin\frac{k\pi x}{2L}\right\}$ ۳) $\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2L}\right\}$ ۴) وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به شرط $u_x(L,t)=0$ جواب باید جوری باشه که اگه از اون نسبت به x مشتق گرفتیم بعد به جای x های اون L قرار دادیم، مقدارش همواره صفر بِشه، فقط گزینه (۳) چنین شرایطی داره

مثال ۲۴: در مسأله مقدار مرزی زیر در داخل یک نیم دایره به شعاع a حل معادله لاپلاس مورد نظر است. بر پیرامون نیم‌دایره، $h(\theta)$ تکه‌ای هموار فرض می‌شود. بر روی نیمه راست قطر عایق بندی داریم و بر روی نیمه چپ آن $T(r,\pi)=0$ ، پایه (مبنای) متعامد بسط فوریه تابع $h(\theta)$ در این مسأله کدام است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)



۱) $\{\cos k\theta\}_{k=0}^{\infty}$

۲) $\{\cos(\frac{2k-1}{2})\theta\} k\in\mathbb{Z}$

۳) $\{\cos(k-\frac{1}{2})\theta\} k\in\mathbb{N}$

۴) $\{\sin(k-\frac{1}{2})\theta\} k\in\mathbb{N}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون $T(r,\pi)=0$، پس جواب باید جوری باشه که اگه به جای θهای اون π قرار دادیم، مقدارش صفر بِشه! خُب تا اینجا فهمیدیم یکی از گزینه‌های (۲) یا (۳) جوابه!، تفاوت گزینه‌های (۲) و (۳) تو تعیین مقدار k هستش، می‌دونیم k باید حتماً عددی طبیعی یا صفر باشه، نه عددی صحیح! پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۲۵: جواب معادله $u_{tt}=c^2u_{xx}$ با شرایط اولیه $u(x,0)=f(x)$ ، $u_t(x,0)=0$ و ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x & ; 0<x<1 \\ 2-x & ; 1<x<2 \end{cases}$ و شرایط مرزی $u(0,t)=u(2,t)=0$ کدام است؟
(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۵)

۱) $u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\{\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi cx}{2}-\frac{1}{3^2}\sin(\frac{3\pi t}{2})\cos(\frac{3\pi cx}{2})+\cdots\}$

۲) $u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\{\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi ct}{2}-\frac{1}{3^2}\sin(\frac{3\pi x}{2})\cos(\frac{3\pi ct}{2})+-\cdots\}$

۳) $u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\{\sin\frac{\pi cx}{2}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{1}{3^2}\sin(\frac{3\pi cx}{2})\cos(\frac{3\pi t}{2})+\cdots\}$

۴) $u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\{\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi ct}{2}+\frac{1}{3^2}\sin(\frac{3\pi x}{2})\cos(\frac{3\pi ct}{2})+\cdots\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به شرط $u(0,t)=0$، جواب باید جوری باشه که وقتی به جای xهای اون صفر قرار می‌دیم، مقدارش صفر بِشه، تا این‌جا معلوم میشه گزینه (۱) غلطه! از طرفی فرم مقادیر ویژه باید بـه صورت $\lambda_n=(\frac{n\pi}{2})^2$ باشه، از کجا فهمیدیم؟ از این جا! مـی‌دونیم تابع ویژه به صورت $\sin\sqrt{\lambda}x$ هستش (اینو از شرط $u(0,t)=0$ فهمیدیم!) پس با توجه به شرط $u(2,t)=0$ داریم:

$$u(2,t)=0 \Rightarrow \sin 2\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow 2\sqrt{\lambda}=n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{2}$$

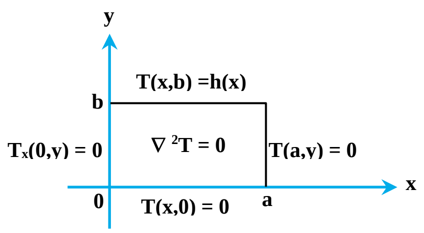
همون‌طور که می‌بینید فرم گزینه (۳) این‌جوری نیست! البته این موضوع از اول هم معلوم بود، چون تو معادله‌ی موج نباید تو کمان سینوس x خبری از c باشه! پس می‌مونن گزینه‌های (۲) و (۴)، برای انتخاب بین این دو گزینه از شرط $u(x,0)=f(x)$ ، استفاده می‌کنیم، البته با قرار دادن $x=1$ شرط رو به صورت $u(1,0)=f(1)$ می‌نویسیم، که $f(1)$ با توجه با ضابطه‌ی اون ۱ میشه، پس شرط جدید به صورت $u(1,0)=1$ میشه که باید برای جواب برقرار باشه، یعنی باید ببینیم تو کدوم گزینه اگه $t=0$ و $x=1$ قرار بِدیم مقدارش ۱ میشه؟

مقدار گزینه (۴) به ازای $t=0$ و $x=1$ $=\frac{8}{\pi^2}(1-\frac{1}{9}+-\cdots)\simeq\frac{8}{\pi^2}\times\frac{8}{9}$ ، مقدار گزینه (۲) به ازای $t=0$ و $x=1$ $=\frac{8}{\pi^2}(1+\frac{1}{9}+\cdots)\simeq\frac{8}{\pi^2}\times\frac{10}{9}$

فقط دو جمله‌ی اول از دو گزینه رو انتخاب کردیم و معلومه مقدار حدودی گزینه (۲) به عدد ۱ نزدیک‌تره

مثال ۲۶: پایه متعامدی که در مسأله مقدار مرزی (یا کرانه‌ای) زیر برای بسط تابع تکه‌ای هموار داده شده‌ی h مورد استفاده قرار می‌گیرد، کدام است؟

(مهندسی مواد و مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)



۱) $\{\sin\frac{k\pi x}{a}\}_{k\in IN}$

۲) $\{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2a}\}_{k\in IN}$

۳) $\{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2a}\}_{k\in IN}$

۴) $IN_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots\}, \{\cos\frac{k\pi x}{a}\}_{k\in IN_0}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» شرط مرزی $T(a,y)=0$، به ما میگه اگه به جای x ها، عدد a رو قرار بِدیم، پایه متعامد جواب باید صفر بِشه. تا اینجا معلوم میشه، گزینه‌های (۲) و (۴) جواب نیستن! شرط $T_x(0,y)=0$، میگه جواب جوریه که اگه از اون نسبت به x مشتق بگیریم، بعد به جای x های اون صفر قرار بِدیم، مساوی صفر میشه، به نظر شما از بین گزینه‌های (۱) و (۳) کدوم چنین شرایطی داره؟! معلومه گزینه (۳) جوابه! غلط بودن گزینه (۱) رو بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه (۱)} \Rightarrow \sin\frac{k\pi}{a}x \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به x}} \frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi}{a}x \xrightarrow{x=0} \text{صفر نمیشه، پس غلطه!}$$

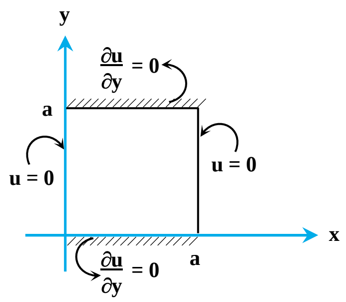
مثال ۲۷: بدست آوردن پاسخ معادلهٔ حرارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0$ روی ناحیهٔ مربعی شکل به ضلع a موردنظر است. حالت اولیه $u(x,y,0)=f(x,y)$ فرض می‌شود. شرایط مرزی عبارت است از:

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

(I) درجهٔ حرارت روی دو ضلع $x=0, a$ صفر است.

(II) دو ضلع دیگر، $y=0, a$ عایق شده است.

شکل کلی پاسخ معادلهٔ حرارت روی این ناحیه عبارت است از:



۱) $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2 t}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}y$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2 t}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}y$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2 t}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}y$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2 t}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}y$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به شرط I، چون در $x=0$ مقدار جواب باید صفر بِشه، پس گزینه (۱) غلطه! از طرفی با توجه به شرط $\frac{\partial u}{\partial y}(x,a)=0$، معلومه که اگه از جواب نسبت به y مشتق بگیریم، بعد به جای y های اون a قرار بِدیم، جواب باید صفر بشه، پس گزینه (۳) هم غلطه! از بین گزینه‌های (۲) و (۴)، تفاوت توی حدود سیگماست. چون جواب بر حسب y، قطعاً به صورت $\cos\frac{n\pi}{a}y$ هستش، n می‌تونه از صفر شروع بشه (به حدود سیگما دقت کنین.) بنابراین گزینه (۴) جوابه

یه سؤال: واقعاً به نظر شما فاز طراح چی بوده که این سؤال رو برای آزمون چند گزینه‌ای طرح کرده! تازه حتماً انتظار داشته سر جلسه از روش ضربی هم سؤال رو حل کنیم؟ این طراح عین اون آمپول‌زن‌هایی می‌مونه که همه‌ی مشکلات زندگیشون رو سَرِ مریض بدبخت خالی می‌کنن، اینم سر داوطلب بی‌گناه خالی کرده که البته ما نذاشتیم این کارو بکنه

مثال ۲۸: پاسخ معادله لاپلاس در ناحیه نیمه محدود $y>0$ و $0<x<a$ مورد نظر است. شرایط مرزی عبارتند از: $V(a,y)=f(y)$ و $V(0,y)=0$ و $V(x,0)=0$، کدام‌یک از عبارت‌های نشان داده شده پتانسیل $V(x,y)$ را در ناحیه نشان خواهد داد؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $\int_0^\infty A(P)\sinh Px\sin PydP$

۲) $\int_0^\infty A(P)\sinh Py\sin PxdP$

۳) $\int_0^\infty A(P)\cosh Px\sin PydP$

۴) $\int_0^\infty A(P)e^{-Py}\sinh PxdP$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به شرط $V(a,y)=f(y)$، جواب بر حسب y قطعاً مثلثاتیه و این یعنی گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن، با توجه به شرط $V(0,y)=0$ هم معلوم میشه گزینه (۳) هم غلطه! بنابراین گزینه (۱) جوابه

مثال۲۹: برای میله‌ای به طول L که سطح جانبی و دو سر آن کاملاً عایق است و $u(x,0)=f(x)$، $u_t = c^2 u_{xx}$، کدام گزینه برای $u(x,t)$ صحیح است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{L})$

۲) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(\frac{n\pi c}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{L})$

۳) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{2L})$

۴) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{L})$

پاسخ : گزینه «۱» خُب اولاً تو معادله‌ی گرما در توان e همیشه c وجود داره، پس گزینه (۴) که کاملاً منکر این قضیه شده، باید اخراج بشه! از طرفی گزینه (۲) هم اصلاً به روی خودش نمیاره که جواب باید کراندار باشه (نگاه کنین توان e رو مثبت داده) پس غلطه! حالا ما موندیم و گزینه‌های (۱) و (۳) که همه چیزِ اونا یکسانه جز کمان کسینوس‌ها، اولاً همین جوری هم معلومه که $(\frac{n\pi}{2L})$ بیخود تو گزینه (۳) داده شده و گزینه دارای $\frac{n\pi}{L}$ جوابه! (چون تو هر دوی این گزینه‌ها λ_n^2 که تو توان e داده شده برابر با $(\frac{n\pi}{L})^2$ هستش و می‌دونیم ضریب x تو کمان cos باید λ_n باشه.) اما اگه بازم اینجوری حال نمی‌کنین! به شرط داده شده تو سؤال مراجعه می‌کنیم؛ «دو سر میله عایق شده» یعنی شرایط اولیه به صورت $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$ بوده، و این یعنی گزینه‌ای جوابه که اگه رفتی از اون مشتق نسبت به x گرفتی بعد به جای xهای اون L قرار دادی صفر بشه، اگه از گزینه (۳) نسبت به x مشتق بگیریم، عبارتی شامل $\sin(\frac{n\pi}{2L}x)$ تولید می‌کنه که اگه $x=L$ قرار بدیم، میشه $\sin(\frac{n\pi}{2})$ که نمی‌تونیم بگیم همیشه صفرِ، پس گزینه (۳) غلطه و گزینه (۱) جوابه

مثال۳۰: پاسخ عمومی معادله لاپلاس با شرایط
$$\begin{cases} M_{xx}+M_{yy}=0 \quad ; \quad x>0, y>0 \\ M_x(0,y)=0 \\ M(x,0)=f(x) \end{cases}$$
عبارت است از:

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-ny}\cos(nx)$

۲) $\int_0^{+\infty} B(\lambda)e^{-\lambda y}\sin(\lambda x)d\lambda$

۳) $\int_0^{+\infty} B(\lambda)e^{-\lambda y}\cos(\lambda x)d\lambda$

۴) $\int_0^{+\infty} B(\lambda)e^{-\lambda y}\cos(\lambda y)d\lambda$

پاسخ : گزینه «۳» اولاً دقت کنین؛ با توجه به این‌که فاصله برای هر دو متغیر x و y نیمه متناهی داده شده، جواب حتماً به صورت انتگرالِ و در نتیجه گزینه (۱) غلطه! از طرفی شرط $M_x(0,y)=0$ میگه؛ اگه از تابع نسبت به x مشتق بگیریم و بعد به جای x، صفر قرار بدیم، جواب باید صفر بشه، پس گزینه (۲) هم غلطه! بین گزینه‌های (۳) و (۴) باید یکی رو انتخاب کنیم، معلومه هر دو تابع نمی‌تونن بر حسب y باشن و تابع مثلثاتی باید برحسب x باشه، پس گزینه (۳) جوابه

مثال۳۱: معادلهٔ انتشار حرارت را در نیم فضای $x\ge 0$ در نظر می‌گیریم:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \; ; \; x>0, t>0, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$
، با شرایط مرزی و اولیه داده شده، شکل کلی پاسخ معادله، $u(x,t)$، کدام گزینه زیر است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\int_0^{\infty} D(p)e^{-pt}\sin(px)dp$

۲) $\int_0^{\infty} D(p)e^{-p^2 t}\sin(px)dp$

۳) $\int_0^{\infty} D(p)e^{-pt}\cos(px)dp$

۴) $\int_0^{\infty} D(p)e^{-p^2 t}\cos(px)dp$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به شرط $u_x(0,t)=0$ باید از تابع $u(x,t)$ نسبت به x مشتق بگیریم بعد به جای x، صفر قرار بدیم، حتماً u باید صفر بشه؛ پس تا اینجا معلوم میشه گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن! (مشتق $\sin px$، میشه $p\cos px$ که در $x=0$، مقدارش صفر نیست) گزینه‌های (۳) و (۴) خیلی شبیه به هم هستن، تنها تفاوتشون تو توان e هستش. تو معادله گرما می‌دونیم اگه ضریب x تو کمان تابع مثلثاتی p باشه، حتماً در توان e باید p^2 وجود داشته باشه، پس قطعاً گزینه (۴) جوابه

مثال ۳۲: پاسخ معادله لاپلاس، $\nabla^2 u(x,y)=0$ در نیم‌صفحه بالای محور x با شرط مرزی: $u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1 & , \ |x|<1\\ 0 & , \ |x|>1\end{cases}$، کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos k}{k}e^{-ky}\sin(kx)dk$ ‏ ۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin k}{k}e^{-ky}\cosh(kx)dk$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin k}{k}e^{-ky}\cos(kx)dk$ ‏ ۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh k}{k}e^{-ky}\cos(kx)dk$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکته‌ای که تو درسنامه گفتیم، چون $u(x,0)=f(x)$، پس جواب بر حسب x قطعاً باید مثلثاتی باشه و این یعنی گزینه (۲) غلطه! برای انتخاب از بین گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) باید ببینین $f(x)$ زوجِ یا فرد؟ اگه زوج بود، $\cos(kx)$ و اگه فرد بود، $\sin(kx)$ انتخاب میشه، از اونجایی که $f(x)$ زوجِ، پس $F_n(x)=\cos kx$، در نتیجه گزینه (۱) هم غلطه، خُب پس یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) جوابه! از طرفی می‌دونیم حد ضرایب انتگرال فوریه وقتی $k\to\infty$ باید صفر بِشه، تو گزینه (۴) چون $\lim_{k\to\infty}(\frac{\sinh k}{k})$ مخالف صفر میشه، پس این گزینه هم جواب نیست و بنابراین گزینه (۳) جوابه

مثال ۳۳: جواب مسأله مقدار مرزی زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)

$$\begin{cases}u_t=u_{xx} \ , \ t>0 \ , \ 0<x<2\\ u_x(0,t)=0 \quad , \ u_x(2,t)=0\\ u(x,0)=4\cos\pi x-2\cos 3\pi x\end{cases}$$

۱) $4e^{-\pi^2 t}\cos\pi x-e^{-4\pi^2 t}\cos 2\pi x+\frac{1}{4}e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$ ‏ ۲) $4e^{-\pi^2 t}\cos\pi x-2e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$

۳) $e^{-\pi^2 t}(4\cos\pi x-2\cos 3\pi x)$ ‏ ۴) $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\cos n\pi x$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به شرط $u(x,0)=4\cos\pi x-2\cos 3\pi x$، معلوم میشه گزینه‌های (۱) و (۴) غلطن! چون اگه به جای t تو ضابطه‌ی اونا صفر قرار بِدیم، برابر با « $4\cos\pi x-2\cos 3\pi x$ » نمیشن! حالا از بین گزینه‌های (۲) و (۳) یکی رو مثلاً گزینه (۳) رو تو معادله‌ی $u_t=u_{xx}$ امتحان می‌کنیم:

$$u(x,t)=e^{-\pi^2 t}(4\cos\pi x-2\cos 3\pi x)$$

$$\left.\begin{aligned}u_t&=-\pi^2 u(x,t)\\ u_x&=e^{-\pi^2 t}(-4\pi\sin\pi x+6\pi\sin 3\pi x)\\ u_{xx}&=e^{-\pi^2 t}(-4\pi^2\cos\pi x+18\pi^2\cos 3\pi x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow u_t\neq u_{xx}\Rightarrow$$ پس گزینه ۲ صحیح و گزینه ۳ غلطه

تذکر: البته برای حذف گزینه (۳) حتی مشتق‌گیری بالا هم لازم نبود! برای این که کاملاً معلومه $e^{-\pi^2 t}$ نمی‌تونه هم ضریب $\cos\pi x$ باشه و هم ضریب $\cos 3\pi x$، چون می‌دونیم تو معادله‌ی گرما ضریب x در کمان‌های مثلثاتی با ضریب t در توان e مرتبطه! یعنی تو این معادله گرما در کنار $\cos 3\pi x$ باید منتظر $e^{-9\pi^2 t}$ و در کنار $\cos\pi x$ باید منتظر $e^{-\pi^2 t}$ باشیم و این مورد تو گزینه (۲) به خوبی رعایت شده

مثال ۳۴: در یک ناحیهٔ نیمه محدود $(x>0)$ معادلهٔ حرارت را به صورت $t>0$، $x>0$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ در نظر می‌گیریم. حالت اولیه عبارت است از $u(x,0)=f(x)$ و ناحیه در $x=0$ عایق شده است. پاسخ عمومی معادله، $u(x,t)$، به کدام صورت است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $\int_0^\infty D(p)e^{-p^2c^2t}\sin pxdp$ ‏ ۲) $\int_0^\infty D(p)e^{-p^2c^2t}\cos pxdp$

۳) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2c^2t}[A(p)\cos px+B(p)\sin px]dp$ ‏ ۴) $\int_0^\infty e^{-p^2c^2t}[A(p)\cos px+B(p)\sin px]dp$

پاسخ : گزینه «۲» ناحیه در $x=0$ عایق شده، و این یعنی شرط به صورت $u_x(0,t)=0$ هستش، بنابراین جواب تابع مثلثاتی بر حسب x باید طوری باشه که اگه از اون نسبت به x مشتق گرفتیم و بعد به جای x های اون عدد صفر قرار دادیم، مقدارش صفر بِشه، بنابراین گزینه (۲) جوابه (دقت کنین در انتگرال فوریه، حدود انتگرال باید از ۰ تا ∞ باشه.)

مثال ۳۵: جواب معادله دیفرانسیل روبه‌رو کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۹)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\ ,\ u(x,0)=4\sin 2x\ ;\ 0\le x\le \pi\ ,\ t\ge 0\end{cases}$$

۱) $u(x,t)=4e^{-6t}\sin 2x$

۲) $u(x,t)=4e^{12t}\sin 2x$

۳) $u(x,t)=4e^{-12t}\sin 2x$

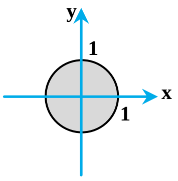
۴) $u(x,t)=4e^{6t}\sin 2x$

پاسخ: گزینه «۳» اولاً همون‌طور که گفتیم تو معادله‌ی گرمای داده شده، توان e نمی‌تونه مثبت باشه، پس گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن! می‌مونه گزینه‌های (۱) و (۳) که لازمه یکیشون رو مرخص کنیم! تفاوت اونا تو توان e هستش، می‌دونیم تو معادله‌ی گرما اگه ضریب x تو کمون sin به صورت $\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$ باشه، اونوقت توان e باید به صورت $-c^2\lambda_n t$ باشه، چون تو این سؤال $\sqrt{\lambda_n}=2$ و $c^2=3$، بنابراین توان e باید به صورت $-12t$ بِشه، پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۳۶: معادله توزیع دما در یک صفحه دایره‌ای به شعاع واحد که وجوه آن عایق شده است پس از تفکیک متغیرها به صورت زیر است:

$$u(\rho,\phi)=(A_1\cos\lambda\phi+B_1\sin\lambda\phi)(A_2\rho^{\lambda}+B_2\rho^{-\lambda})$$

با توجه به شکل مسأله کدام‌یک از عبارات زیر صحیح است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۵)



۱) $B_2=0\ ,\ \lambda=0,1,4,\dots$

۲) $A_2=0\ ,\ \lambda=0,1,2,\dots$

۳) $B_2=0\ ,\ \lambda=0,1,2,\dots$

۴) $A_2=0\ ,\ \lambda=0,2,4,\dots$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به این که $\rho^{-\lambda}=\dfrac{1}{\rho^{\lambda}}$، و نظر به این که در مبدأ $\rho=0$ رو داریم، پس $\rho^{-\lambda}$ بی‌کران میشه و این موضوع با «اصل کراندار بودن توابع ویژه» در تناقضه، بنابراین لازمه که $\rho^{-\lambda}$ وجود نداشته باشه، پس $B_2=0$ میشه و این یعنی گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن! تفاوت گزینه‌های (۱) و (۳) در مقادیر λ داده شده هستش که معلومه λهای داده شده تو گزینه (۱) نمی‌تونن مجموعه‌ی کاملی از مقادیر ویژه برای این سؤال باشن پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۳۷: چه تغییر متغیری مسأله معادلهٔ حرارت $\begin{cases}u_t=u_{xx}+6x\\ u(0,t)=1\ ,\ u(1,t)=1\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$ را به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $u(x,t)=v(x,t)-x^3+x+1$

۲) $u(x,t)=v(x,t)-x^3+2x-1$

۳) $v(x,t)=u(x,t)-x^3+2x+1$

۴) $v(x,t)=u(x,t)-x^3+x+1$

پاسخ : گزینه «۱» وقتی گفته میشه شرایط مرزی همگن هستن! یعنی باید شرطها به صورت $v(0,t)=v(1,t)=0$ باشه، حالا باید ببینیم این شرایط تو کدوم گزینه برقراره؟ اول شرط $u(1,t)=1$ رو چک می‌کنیم:

گزینه (۱) : $u(1,t)=v(1,t)-1^3+1+1\xrightarrow{u(1,t)=1}v(1,t)=0$

تا این‌جا می‌تونیم بِگیم گزینه (۱) جوابه، اما اگه گزینه‌ی دیگه‌ای هم این شرایط رو داشت، چی؟ پس بقیه رو هم چک می‌کنیم:

گزینه (۲) : $u(1,t)=v(1,t)-1^3+2\times1-1\xrightarrow{u(1,t)=1}v(1,t)=1\ \Rightarrow$ غلطه!

گزینه (۳) : $v(1,t)=u(1,t)-1^3+2\times1+1\xrightarrow{u(1,t)=1}v(1,t)=3\ \Rightarrow$ غلطه!

گزینه (۴) : $v(1,t)=u(1,t)-1^3+1+1\xrightarrow{u(1,t)=1}v(1,t)=2\ \Rightarrow$ غلطه!

پس همون گزینه (۱) جوابه

مثال ۳۸: به ازای چه تابع $\varphi(x)$، تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+\varphi(x)$ معادله‌ی حاصل بر حسب w در مورد معادله‌ی گرمای $\begin{cases} u_t=4u_{xx}+x \\ u(0,t)=1\,,\,u_x(\pi,t)=2 \\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$ را همگن می‌کند؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\varphi(x)=6x^3+(\pi^2+2)x+1$ ۲) $\varphi(x)=\frac{x^3}{6}+\pi^2x+1$ ۳) $\varphi(x)=\frac{-x^3}{6}+(\pi^2+2)x+1$ ۴) $\varphi(x)=\frac{-1}{24}x^3+(2+\frac{\pi^2}{8})x+1$

پاسخ : گزینه «۴» برای جواب به این سؤال فقط کافیه بدونیم که مشتق دوم $\varphi(x)$ باید $-\frac{1}{4}x$ داشته باشه! همین نکته اجبار میکنه گزینه (۴) جواب درست باشه

به روش دیگه این‌که؛ شرط $u_x(\pi,t)=2$ رو چک کنیم، و چون معادله بر حسب w همگن میشه، پس $w_x(\pi,t)=0$، بنابراین داریم:

$$u_x(\pi,t)=w_x(\pi,t)+\varphi_x(\pi) \Rightarrow 2=0+\varphi_x(\pi) \Rightarrow \varphi_x(\pi)=2$$

این شرط چی میگه!؟ میگه برو از گزینه‌ها نسبت به x مشتق بگیر، بعد به جای xهای اون π قرار بِده، هر کدوم برابر با ۲ شد، جوابه! فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

مثال ۳۹: برای تبدیل معادله گرمای غیرهمگن $u_t=c^2u_{xx}+10$ با شرایط مرزی $\begin{cases} u(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0\end{cases}$، به یک معادله همگن کدام تغییر متغیر صحیح است؟

(مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۱)

۱) $u(x,t)=v(x,t)-\frac{5}{c^2}x(x-\pi)$ ۲) $u(x,t)=v(x,t)-\frac{5}{c^2}x(x+\pi)$

۳) $u(x,t)=v(x,t)-\frac{10}{c^2}x(x-\pi)$ ۴) $u(x,t)=v(x,t)-\frac{10}{c^2}x(x+\pi)$

پاسخ : گزینه «۱» اولاً چون $u(\pi,t)=0$ و باید $v(\pi,t)$ هم مساوی صفر باشه بنابراین عبارت داده شده در سمت راست $v(x,t)$ (تو گزینه‌ها) باید تو $x=\pi$ صفر بِشه، پس گزینه‌های (۲) و (۴) از حضور ما مرخص میشن! می‌مونن گزینه‌های (۱) و (۳) که باید از دست یکی از اونا خلاص شیم! عبارت داده شده در سمت راست $v(x,t)$ باید تو معادله‌ی اصلی صدق کنه! در واقع جواب باید جوری باشه که تو معادله‌ی $u_t=c^2u_{xx}+10$ صدق کنه و چون عبارت‌ها بر حسب x هستن، تو معادله‌ی $c^2u_{xx}+10=0$، هم صدق کنه و به عبارت دیگه جواب جوری باشه که از اون نسبت به x دو بار مشتق گرفتیم بعد اونو در c^2 ضرب کردیم، مقدارش -10 بِشه تا وقتی با $+10$ جمع میشه، صفر بِشه! حالا شما بِگین ببینم کدوم یکی این‌جوریه (در ضمن طراح رو دارین، عدد ۱۰ رو گذاشته تو گزینه‌ها تا اونایی که شانسی (یا شانسی ـ سطحی) تست می‌زنن، بیچاره شَن!)

مثال ۴۰: به ازای کدام تابع $\psi(x)$، تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)$، مسأله $\begin{cases} u_t=4u_{xx}+\sin x \\ u(0,t)=1, u_x(0,t)=-1 \\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$ را به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن بر حسب w تبدیل خواهد کرد؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $\psi(x)=-\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{4}x+1$ ۲) $\psi(x)=\frac{1}{4}\sin x-\frac{5}{4}x+1$ ۳) $\psi(x)=\frac{1}{4}\cos x-\frac{5}{4}x+1$ ۴) $\psi(x)=-\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{4}x+1$

پاسخ : گزینه «۲» به دو روش می‌تونیم به مسأله جواب بدیم:

روش اول : اولاً لازمه معادله‌ی $4\psi_{xx}+\sin x=0$ برقرار باشه، پس باید $\psi''(x)=-\frac{1}{4}\sin x$ باشه، بنابراین گزینه‌ای درسته که $\frac{1}{4}\sin x$ داشته باشه، پس جواب گزینه (۲) میشه

روش دوم: یه روش دیگه می‌تونه کنترل شرایط مرزی برای $\psi(x)$ باشه، البته این روش فقط دو تا گزینه غلط رو حذف میکنه! چون شرایط مرزی w قراره همگن باشه، پس $w_x(0,t)=0$، از طرفی $u_x(0,t)=-1$ داده شده، پس داریم:

$$u_x(0,t)=w_x(0,t)+\psi_x(0) \Rightarrow -1=0+\psi_x(0) \Rightarrow \psi_x(0)=-1$$

یعنی گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به x مشتق بگیریم، بعد به جای xهای اون عدد صفر رو قرار بدیم، حاصلش برابر با -1 بِشه. خُب از گزینه‌های (۱) و (۳) بعد از مشتق‌گیری نسبت به x، عبارتی بر حسب $\sin x$ و اعدادی ثابت می‌مونه که در $x=0$، مقدار سینوس صفرِ، و اعداد ثابت هم -1 نیستن، پس غلطن بنابراین یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) جواب سؤال هستن! از بین این دو گزینه یکی رو تو معادله امتحان می‌کنیم تا جواب معلوم بِشه!

مثال ۴۱: تابع $h(x)$ چگونه باشد تا تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+h(x)$ معادله $u_t=2u_{xx}-\cos x$ را به یک معادله همگن بر حسب w تبدیل کند؟
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $h(x)=-\frac{1}{2}\sin x+Ax+B$ ۲) $h(x)=-\frac{1}{2}\cos x+Ax+B$ ۳) $h(x)=-2\sin x+Ax+B$ ۴) $h(x)=-2\cos x+Ax+B$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» باید $h(x)$ طوری باشه که تو معادله‌ی $2h_{xx}-\cos x=0$ صدق کنه، یعنی باید وقتی از اون دو بار مشتق گرفتیم و در عدد ۲ ضرب شد، برابر با $\cos x$ بِشه، خُب فقط کافیه به عبارت‌های مثلثاتی چهار گزینه نگاه کنین تا ببینین کدوم این شرایط رو دارن (چون قسمت دوم که یه عبارت درجه اولِ، بعد از دو بار مشتق‌گیری صفر میشه)، فقط گزینه (۲) این شرایط رو داره

مثال ۴۲: اگر در مسأله $\begin{cases} u_t-c^2u_{xx}=Ne^{-\alpha x} \\ u(0,t)=0=u(L,t)\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\ ,\ 0\le x\le L \end{cases}$ (N ثابت) قرار دهیم $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ و تابع w به قسمی باشد که v جواب مسأله $\begin{cases} v_t-c^2v_{xx}=0\ ,\ 0<x<L,t>0 \\ v(0,t)=0=v(L,t) \\ v(x,0)=f(x)-e(x) \end{cases}$ باشد، آنگاه $w(x)$ کدام است؟
(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{Ne^{-\alpha x}}{c^2\alpha^2}x(L-x)$ ۲) $\frac{N}{c^2\alpha^2}[1-e^{-\alpha x}-\frac{1-e^{-\alpha L}}{L}x]$ ۳) $\frac{N}{c^2\alpha^2}(1-e^{-\alpha x})(L-x)$ ۴) $\frac{Ne^{-\alpha x}}{c^2\alpha^2}x(x-L)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به این که $Ne^{-\alpha x}$ باعث شده معادله ناهمگن بِشه، بنابراین بعد از اعمال شرایط مرزی حتماً $e^{-\alpha L}$ ایجاد میشه، فقط تو گزینه (۲) چنین عبارتی داریم (البته یه جور دیگه هم میشه استدلال کرد و اون اینه که $e^{-\alpha x}$ بدون داشتن ضریب x حتماً باید تو جواب باشه!)

مثال ۴۳: درجه حرارت $u(x,t)$ میله‌ای به طول π که دو طرف آن، در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و دمای اولیه‌ی آن $u(x,0)=\sin x$ است و در معادله $u_t-u_{xx}=0$ صدق می‌کند، کدام است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)

۱) $e^{-t}\sin 2x$ ۲) $e^{-t}\sin x$ ۳) $e^{t}\sin x$ ۴) $e^{2t}\sin x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به شرط $u(x,0)=\sin x$ گزینه‌ی $e^{-t}\sin 2x$ حذف میشه (چون اگه به جای t مقدار صفر رو قرار بدیم، برابر با $\sin 2x$ میشه!). با توجه به این که باید $u(x,t)$ کراندار باشه، گزینه‌های $e^{t}\sin x$ و $e^{2t}\sin x$ هم حذف میشن، چون توان e مثبته! پس فقط گزینه‌ی شامل $e^{-t}\sin x$ می‌تونه درست باشه

مثال ۴۴: ابتدای یک میله به طول L (ثابت) در دمای $a>0$ نگهداری می‌شود و بدنهٔ میله و انتهای آن را با عایق حرارتی پوشانده‌ایم. اگر مدت طولانی از لحظه اولیه سپری شده باشد، آنگاه دمای نقاط میله در حالت پایدار برابر است با: (معادله دیفرانسیل حرارت یک بعدی را $u_t-u_{xx}=0$ بگیرید)
(مهندسی مواد و مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) a ۳) $a+x$ ۴) $a-x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به مفهوم فیزیکی کاملاً مشخصه که بعد از یه مدت طولانی به‌خاطر رسانایی میله، دمای همه‌ی قسمت‌ها برابر با a میشه

مثال ۴۵: توزیع مکانی‌ـ‌زمانی درجه حرارت $u(x,t)$ در میله‌ای به طول π که دو طرف آن در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و منبع حرارتی، توزیع دمای اولیهٔ $u(x,0)=f(x)=\sin x$ را از خود بجا گذاشته و در معادله $u_t-u_{xx}=0$ صدق می‌کند، کدام است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sin x\cos t$ ۲) $(\sin x)e^{-\pi t}$ ۳) $(\sin x)e^{-t}$ ۴) $(\sin x)e^{-\frac{t}{\pi}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» معادله‌ی گرما داریم پس جواب باید شامل تابع نمایی باشه و این یعنی گزینه (۱) خودشو بیخود قاطی جواب‌ها کرده! گفتیم اگه تو معادله‌ی گرما مثلاً فرم $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ داشتیم، تو توان e باید $-c^2\lambda_n t$ داشته باشیم، خُب حالا بچه‌های خوب من بگین ببینم کدوم گزینه این شرط رو رعایت کرده

مثال ۴۶: پتانسیل الکتریکی در سطح کره‌ای به شعاع a با عبارت $V_0(1-\cos\theta)$ داده می‌شود که در آن V_0 ثابت بوده و θ زاویه شعاع در هر نقطه با محور z می‌باشد. پتانسیل الکتریکی در نقاط خارج کره به فاصله r از مرکز $(r\ge a)$ عبارت است از: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $V_0(1-\frac{a}{r}\cos\theta)$ ۲) $V_0(1-\frac{a^2}{r^2}\cos\theta)$ ۳) $V_0(1+\frac{a}{r}\cos\theta)$ ۴) $V_0\frac{a}{r}(1-\frac{a}{r}\cos\theta)$

پاسخ : گزینه «۴» این تست رو با توجه به تعریف پتانسیل الکتریکی به راحتی می‌تونیم جواب بِدیم. می‌دونیم پتانسیل در بی‌نهایت صفر میشه، جالبه فقط گزینه (۴) هستش که وقتی $r\to\infty$، پتانسیل اون به سمت صفر میل میکنه

مثال ۴۷: معادلهٔ یک‌بُعدی حرارت به صورت: $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $0<x<1\ ,\ t>0$ را با شرایط مرزی و اولیه زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(0,t)=1 \quad , \quad u(1,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=|x-\frac{1}{2}|$$

در این صورت پاسخ حالت پایدار $(t\to\infty)$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $1-x$ ۳) $x(1-x)$ ۴) $|x-\frac{1}{2}|$

پاسخ : گزینه «۲» شرط $u(0,t)=1$، میگه گزینه‌ای که به ازای $x=0$ برابر با 1 نمیشه، غلطه! با همین یه شرط می‌فهمیم که گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) همگی به اتفاق غلطن، پس گزینه (۲) جوابه

مثال ۴۸: جواب مانا (پایدار Steady−State) معادله حرارت $u_t=u_{xx}-u$ برای یک میله همگن به طول $(0\le x\le 1)$ که در شرایط $u(0,t)=0$ و $u(1,t)=\frac{e^2-1}{e}$ صدق کند، کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{e^2-1}{e}x+2$ ۲) $2\sinh x$ ۳) $2x+\frac{e^2-1}{e}$ ۴) $2\sinh ex$

پاسخ : گزینه «۲» خُب اولاً شرط مرزی $u(0,t)=0$ تو گزینه‌های (۱) و (۳) صدق نمی‌کنه پس این دو تا گزینه غلطن! برای انتخاب جواب از بین گزینه‌های (۲) و (۴) می‌تونیم از شرط دوم مرزی استفاده کنیم، یعنی ببینیم کدوم یکی تو شرط دوم صدق میکنه:

$x=1$ به ازای (۲) مقدار گزینه $=2\sinh 1=2(\frac{e^1-e^{-1}}{2})=e^1-e^{-1}=e-\frac{1}{e}=\frac{e^2-1}{e}$

بنابراین گزینه (۲) جوابه اگه گزینه (۴) رو هم امتحان می‌کردیم فرقی نمی‌کرد، چون تو شرط صدق نمی‌کرد و باز می‌تونستیم بگیم گزینه (۲) جوابه!

مثال ۴۹: معادله انتقال حرارت $\frac{\partial u}{\partial t}=C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در میله‌ای با شرایط مرزی (یا کرانه‌ای) $u(0,t)=T_0$ و $u(L,t)=2T_0$ (ثابت) مفروض است. توزیع دمای میله در حالت پایدار ($t\to\infty$ زمان)، با شرط اولیه $u(x,0)=T_0$، کدام است؟ (مهندسی مکانیک و مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\frac{2}{3}T_0$ ۳) $T_0\left(1+\frac{x}{L}\right)$ ۴) $x^2+\left(\frac{T_0}{L}-1\right)x+T_0$

پاسخ : گزینه «۳» اول شرط $u(0,t)=T_0$ رو چک می‌کنیم، گزینه‌ای که به ازای $x=0$ مقدارش T_0 نشده غلطه، تا اینجا گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن! برای خلاصی از شرِّ گزینه‌ی غلط دیگه، شرط $u(L,t)=2T_0$ رو چک می‌کنیم، یعنی گزینه‌ای که به ازای $x=L$ مقدارش برابر با $2T_0$، نشه مرخصه!

$x=L$ به ازای (۴) مقدار گزینه $=L^2+(\frac{T_0}{L}-1)L+T_0=L^2+T_0-L+T_0\ne 2T_0 \Rightarrow$ گزینه (۴) غلطه

بنابراین گزینه (۳) جوابه

مثال ۵۰: معادلهٔ حرارت را به صورت $0<x<1$, $t>0$ $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در نظر می‌گیریم. شرایط مرزی و اولیه عبارتند از: $u(x,0)=1+x^2$, $u(1,t)=2$, $u(0,t)=1$، پاسخ حالت پایدار برای u (وقتی $t\to\infty$) در نقطه $x=\frac{2}{3}$ عبارت است از: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $\frac{13}{9}$

پاسخ : گزینه «۳» خُب از اونجایی که مقدار جواب رو تو نقطه‌ای خاص از ما می‌خواد، دیگه باید قید کلک رو بزنیم، اما از طرفی چون مـی‌دونیـم در حالت پایدار $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ میشه، خیلی راحت می‌تونیم یه معادله به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ ایجاد کنیم و اونو حل کنیم. این معادله میگه u باید جوری باشه که اگه از اون دو بار نسبت به x مشتق گرفتیم برابر با صفر بشه و این یعنی اگه از اون یه بار نسبت به x مشتق گرفتیم برابر با یه عدد ثابت باشه، پـس فـرم کلـی u حتماً به صورت $u=Ax+B$ بوده که A و B با توجه به شرایط مرزی تعیین میشن!

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0\Rightarrow u_{xx}=0\Rightarrow u=Ax+B\Rightarrow\begin{cases}u(0,t)=1\Rightarrow 1=A(0)+B\Rightarrow B=1\\ u(1,t)=2\Rightarrow 2=A\times 1+B\xrightarrow{B=1}A=1\end{cases}\Rightarrow u=x+1 \text{ در حالت پایدار}$$

با توجه به این که مقدار u رو تو نقطه‌ی $x=\frac{2}{3}$ از ما می‌خواد، پس داریم: $u=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

که نشون می‌ده گزینه (۳) جوابه

مثال ۵۱: مسـأله مقـدار مـرزی دیریکلـه در ناحیـه بـین دو دایـره هـم مرکـز، بـه شـعاع‌هـای a و b ($a<b$)، و بـا شـرایط مـرزی ثابـت داده شده است. جواب مسأله $T(r,\theta)$ کدام است؟ (مهندسی برق و مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

$$\begin{cases}\nabla^2 T=T_{rr}+\frac{1}{r}T_r+\frac{1}{r^2}T_{\theta\theta}=0\ ,\ a<r<b\\ T(a,\theta)=A\ ,\ T(b,\theta)=B\ ,\ (\text{A و B ثابت})\end{cases}$$

۱) $\frac{ab(A-B)}{b-a}\frac{1}{r}+\frac{bB-aA}{b-a}$
۲) $\frac{A-B}{a-b}r+\frac{Ba-Ab}{a-b}$
۳) $\frac{A-B}{Lna-Lnb}Lnr+\frac{BLna-ALnb}{Lna-Lnb}$
۴) $\begin{cases}A+(r-a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\theta)\ ,\ a\le r\le\frac{1}{2}(a+b)\\ B+(b-r)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\theta)\ ,\ \frac{a+b}{2}<r\le b\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دونیم وقتی با تغییر θ مقدار T تغییر نکنه، اونوقت جواب عمومی معادله باید به صورت $T=c_1Lnr+c_2$ باشه، تنها گزینـه‌ای که جوابی به این شکل توش وجود داره، گزینه‌ی سوم

مثال ۵۲: مسأله مقدار مرزی دیریکله در ناحیه بین دو دایره هم مرکز به شعاع‌های a و b ($a<b$) و با شرایط مرزی ثابـت $\begin{cases}\nabla^2 u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\\ u(a,\theta)=A\ ,\ u(b,\theta)=B\end{cases}$ (A و B ثابت) داده شده است. جواب مسأله $u(r,\theta)$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{ab(A-B)}{b-a}\frac{1}{r}+\frac{bB-aA}{b-a}$
۲) $\frac{A-B}{Lna-Lnb}Lnr+\frac{BLna-ALnb}{Lna-Lnb}$
۳) $\frac{B-A}{Lna-Lnb}Lnr+\frac{ALna-BLnb}{Lna-Lnb}$
۴) $\frac{A-B}{a-b}r+\frac{Ba-Ab}{a-b}$

پاسخ : گزینه «۲» می‌دونیم وقتی با تغییر θ مقدار جواب u تغییر نکنه، اونوقت جواب معادله باید بـه صـورت $u=C_1Lnr+C_2$ باشـه، پـس گزینـه‌هـای (۱) و (۴) غلطن. از بین گزینه‌های (۲) و (۳) یکی باید حذف بِشه، شرط مرزی $u(a,\theta)=A$ تو گزینه (۳) صدق نمیکنه، پس غلطه! بنابراین گزینه (۲) جوابه

مثال ۵۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx}+u_{xy}-6u_{yy}=0$ کدام است؟ این معادله دیفرانسیل از کدام نوع است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $u(x,y)=\phi(y-3x)+\psi(y+2x)$ (ϕ و ψ توابع دلخواه)، از نوع هذلولی‌گون

۲) $u(x,y)=\phi(y-3x)+\psi(y+2x)$ (ϕ و ψ توابع دلخواه)، از نوع بیضی‌گون

۳) $u(x,y)=c_1(y-3x)+c_2(y+2x)$ (c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه)، از نوع هذلولی‌گون

۴) $u(x,y)=\phi(y+3x)+\psi(y-2x)$ (ϕ و ψ توابع دلخواه)، از نوع بیضی‌گون

پاسخ: گزینه «۱» اگه دلتای معادله‌رو تشکیل بدیم، معلوم میشه معادله باید از نوع هذلولی‌گون باشه، ($\Delta>0$) پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) جوابه و چون جواب حتماً باید بر حسب تابعی دلخواه بیان بِشه، گزینه (۳) غلطه و گزینه (۱) جوابه

مثال ۵۴: جواب معادله $\frac{u_x}{x}-\frac{u_y}{y}=0$ که در آن $u(0,0)=1$، در صورتی که k مقداری ثابت باشد، کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $e^{k(\frac{y}{x})^2}$ ۲) $e^{k(\frac{x}{y})^2}$ ۳) $e^{\frac{k}{2}(x^2-y^2)}$ ۴) $e^{\frac{k}{2}(x^2+y^2)}$

پاسخ: گزینه «۴» اولاً گزینه‌های (۱) و (۲) تو شرط $u(0,0)=1$ صدق نمی‌کنن، پس غلطن! حالا کافیه یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) رو تو معادله امتحان کنیم تا ببینیم کدوم جوابه؟ فرض کنیم گزینه (۳) جواب باشه:

$$u=e^{\frac{k}{2}(x^2-y^2)}\Rightarrow\begin{cases}u_x=\frac{2xk}{2}e^{\frac{k}{2}(x^2-y^2)}\\ u_y=\frac{-2yk}{2}e^{\frac{k}{2}(x^2-y^2)}\end{cases}\Rightarrow\frac{u_x}{x}-\frac{u_y}{y}=(k+k)e^{k(x^2-y^2)}$$

پس گزینه (۳) هم غلطه و مجبوریم گزینه (۴) رو به عنوان جواب در نظر بگیریم

مثال ۵۵: یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)، $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}=x$ عبارت است از:

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $u(x,y)=f(y)e^{2x}+(2x-1)y+g(x)$

۲) $u(x,y)=f(x)e^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$

۳) $u(x,y)=f(y)e^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$

۴) $u(x,y)=f(x)e^{2x}+(2x-1)y+g(x)$

پاسخ: گزینه «۳» اولاً چون تو معادله‌ی صورت سؤال هم مشتق نسبت به x و هم مشتق نسبت به y داریم، باید تو جواب هم تابع عمومی نسبت به y و هم تابع عمومی نسبت به x داشته باشیم و این یعنی گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن! حالا می‌مونیم من و شما و گزینه‌های (۱) و (۳)، اگه من باشم، میگم فرض کنید؛ $f(y)=0$ و $g(x)=0$، (می‌تونم فرض کنم چون مگه نگفتم تابع دلخواه هستن!) پس یا «$(2x-1)y$» یا «$\frac{1}{4}(2x-1)y$»، باید تو معادله صدق کنن! می‌تونیم یکی از اونا رو تو معادله امتحان کنیم، مثلاً $(2x-1)y$ رو امتحان می‌کنیم:

$$u=2xy-y\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=2x\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\xrightarrow{\text{تو معادله قرار می‌دیم}}2+2(2x)\neq x\Rightarrow \text{گزینه (۱) غلط}$$

بنابراین گزینه (۳) جوابه (لازم نیست چک کنین ولی اگه دوس دارین $u=\frac{1}{4}(2x-1)y$ قرار بدین و چک کنین! و با چشم‌های خودتون این واقعیت رو ببینین!)