بخش اول : فیزیک (۱)

فصل اول

«بردارها و دستگاه‌های مختصات»

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال۱: دو جابه‌جایی، یکی به بزرگی $3m$ و دیگری به بزرگی $4m$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که چگونه می‌توان از ترکیب این بردارهای جابجایی، برآیندی به بزرگی الف) $7m$، ب) $1m$ و ج) $5m$ به دست آورد؟

☑ **پاسخ:** الف) کافی است دو بردار هم‌راستا و هم‌جهت باشند: $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|=4+3=7$

ب) کافی است دو بردار هم‌راستا و غیر هم‌جهت باشند: $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|=4-3=1$

ج) کافی است دو بردار بر هم عمود باشند: $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

مثال۲: دو بردار با روابط $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ و $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ مفروض‌اند. مطلوب است:

الف) $\vec{a}+\vec{b}$ ب) $\vec{a}-\vec{b}$ ج) برداری مانند $\vec{c}$ به گونه‌ای که $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0$ باشد.

☑ **پاسخ:** الف) مؤلفه‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم: $\vec{a}+\vec{b}=(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})+(-\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k})=3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$

ب) مؤلفه‌ها را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم: $\vec{a}-\vec{b}=(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})-(-\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k})=5\hat{i}-4\hat{j}-3\hat{k}$

ج) کافی است بردار $\vec{c}$ با $\vec{a}-\vec{b}$ قرینه باشد: $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}-\vec{b}=-\vec{c}\Rightarrow\vec{c}=-5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

مثال۳: حاصل‌ضرب برداری دو بردار $\begin{cases}\vec{a}=2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}\\ \vec{b}=6\hat{i}+8\hat{j}-15\hat{k}\end{cases}$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** برای یافتن حاصل‌ضرب برداری $\vec{a}\times\vec{b}$ از رابطه:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}$$

استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ 2&-4&1\\ 6&8&-15\end{vmatrix}=(60-8)\hat{i}+(6+30)\hat{j}+(16+24)\hat{k}=52\hat{i}+36\hat{j}+40\hat{k}$$

مثال۴: ذره‌ای با تندی ثابت v در صفحه xy طوری حرکت می‌کند که مؤلفه‌های سرعت آن در دستگاه مختصات قطبی به صورت $v_r=v\sin\frac{\theta}{2}$ و $v_\theta=v\cos\frac{\theta}{2}$ است. معادله مسیر ذره در این دستگاه مختصات کدام است؟

۱) ثابت= $r\cos^2\frac{\theta}{2}$ ۲) ثابت= $r\cos\frac{\theta}{2}$ ۳) ثابت = $r\sin^2\frac{\theta}{2}$ ۴) ثابت = $r\sin\frac{\theta}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای پیدا کردن معادله مسیر، باید رابطه بین r و θ در مختصات قطبی را به دست آوریم. ابتدا با توجه به معادلات سرعت زاویه‌ای و شعاعی در مختصات قطبی داریم:

$$\left.\begin{aligned}v_r&=\dot{r}=\frac{dr}{dt}=v\sin\frac{\theta}{2}\\ v_\theta&=r\dot{\theta}=r\frac{d\theta}{dt}=v\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{با تقسیم دو رابطه برهم}}\frac{dr}{rd\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$$

حال از دو طرف رابطه فوق انتگرال می‌گیریم:

$$\int\frac{dr}{r}=\int\tan\frac{\theta}{2}d\theta\ \Rightarrow Lnr=-2Ln\cos\frac{\theta}{2}+c\ \Rightarrow Lnr=-Ln\cos^2\frac{\theta}{2}+c$$

$$\Rightarrow Lnr+Ln\cos^2\frac{\theta}{2}=c\ \Rightarrow Lnr\cos^2\frac{\theta}{2}=c\ \Rightarrow r\cos^2\frac{\theta}{2}=constant$$

مثال۵: ذره‌ای با تندی ثابت v در صفحه xy طوری حرکت می‌کند که مؤلفه‌های سرعت آن در دستگاه مختصات قطبی به صورت $v_r = v\sin ۲\theta$ و $v_\theta = v\cos ۲\theta$ است. معادله مسیر ذره در این دستگاه مختصات کدام است؟

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که در دستگاه مختصات قطبی مؤلفه‌های سرعت به صورت $v_r = \dot{r}$ و $v_\theta = r\dot{\theta}$ می‌باشند. بنابراین طبق صورت سؤال خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_r = v\sin ۲\theta \Rightarrow \dot{r} = v\sin ۲\theta \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{\theta}\dfrac{dr}{d\theta} = v\sin ۲\theta \\ v_\theta = v\cos ۲\theta \Rightarrow r\dot{\theta} = v\cos ۲\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v}{r}\cos ۲\theta \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\cancel{v}}{r}\cos ۲\theta\dfrac{dr}{d\theta} = \cancel{v}\sin ۲\theta \Rightarrow \dfrac{dr}{r} = \dfrac{\sin ۲\theta}{\cos ۲\theta}d\theta$$

اکنون از طرفین رابطه، انتگرال می‌گیریم: $\int \dfrac{dr}{r} = \int \dfrac{\sin ۲\theta}{\cos ۲\theta}d\theta \Rightarrow \ln r = -\dfrac{۱}{۲}\ln|\cos ۲\theta| + c \Rightarrow \ln r + \ln\sqrt{|\cos ۲\theta|} = c \Rightarrow \ln r\sqrt{|\cos ۲\theta|} = c$

در نتیجه معادله مسیر ذره به صورت مقابل در می‌آید: $\Rightarrow r\sqrt{\cos ۲\theta} = \text{Constant}$

مثال۶: معادلات حرکت ذره‌ای در صفحه به شکل $r = ke^{at}$ و $\theta = bt$ است. به ازای چه نسبتی از $\dfrac{b}{a}$ زاویه بین سرعت و شتاب همواره ۶۰° است؟ (k و a و b ثابت)

☑ **پاسخ:** بدیهی است که باید از دستگاه مختصات قطبی استفاده کنیم. برای یافتن زاویه بین سرعت و شتاب می‌توانیم از ضرب داخلی دو بردار شتاب و سرعت استفاده کنیم.

$$\vec{a}.\vec{v} = |\vec{a}||\vec{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} \qquad (۱)$$

پس کافی است بردارهای سرعت و شتاب و طول آن‌ها را در دستگاه مختصات قطبی به دست آوریم:

$$\vec{v} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad , \quad \vec{a} = a_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)\hat{e}_r + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$$

$$\dot{r} = ake^{at} \quad , \quad \dot{\theta} = b \Rightarrow \vec{v} = ake^{at}\hat{e}_r + bke^{at}\hat{e}_\theta \qquad (۲)$$

$$\ddot{r} = a^۲ke^{at} \quad , \quad \ddot{\theta} = ۰ \Rightarrow \vec{a} = (a^۲ke^{at} - b^۲ke^{at})\hat{e}_r + (۲abke^{at} + ۰)\hat{e}_\theta \qquad (۳)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{k^۲e^{۲at}(a^۲ + b^۲)} = ke^{at}\sqrt{a^۲ + b^۲} \qquad (۴)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{k^۲e^{۲at}(a^۲ - b^۲)^۲ + ۴a^۲b^۲k^۲e^{۲at}} = ke^{at}\sqrt{a^۴ + b^۴ - ۲a^۲b^۲ + ۴a^۲b^۲} = ke^{at}\sqrt{(a^۲ + b^۲)^۲} = ke^{at}(a^۲ + b^۲) \qquad (۵)$$

$$\vec{v}.\vec{a} = ak \times ke^{۲at}(a^۲ - b^۲) + bke^{at} \times ۲abke^{at} = ak^۲e^{۲at}(a^۲ - b^۲) + ۲ab^۲k^۲e^{۲at}$$

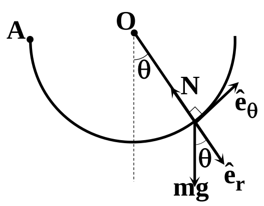
$$\Rightarrow \vec{v}.\vec{a} = a(ke^{at})^۲ \times (a^۲ - b^۲ + ۲b^۲) = ak^۲e^{۲at}(a^۲ + b^۲) \qquad (۶)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۶)} \cos\theta = \frac{ak^۲e^{۲at}(a^۲ + b^۲)}{k^۲e^{۲at}\sqrt{a^۲ + b^۲}(a^۲ + b^۲)} \xrightarrow{\theta = ۶۰^\circ} \frac{۱}{۲} = \frac{a}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow ۳a^۲ = b^۲ \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{۳}$$

مثال۷: ذره‌ای به جرم m از نقطه A در یک نیم‌کره ثابت، شروع به حرکت می‌کند. وقتی که ذره با راستای قائم، زاویه θ می‌سازد، نیروی عکس‌العمل سطح را به دست آورید. اصطکاک ناچیز است.

☑ **پاسخ:** چون این حرکت بر روی نیم‌دایره است بهترین مختصات برای توصیف آن، دستگاه مختصات قطبی است. همچنین از آنجا که شعاع حرکت ثابت است، داریم: $\dot{r} = \ddot{r} = ۰$. قانون دوم نیوتن را در دو راستای $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \hat{e}_r : \sum F = ma_r \Rightarrow -N + mg\cos\theta = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲) = -mr\dot{\theta}^۲ & (۱) \\ \hat{e}_\theta : \sum F = ma_\theta \Rightarrow -mg\sin\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta}) = mr\ddot{\theta} & (۲) \\ \xrightarrow{(۱)} N = mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^۲ & (۳) \end{cases}$$

هدف ما در این مسئله، یافتن مقدار N بر حسب پارامترهای معلوم می‌باشد، اگر بخواهیم $\dot{\theta}$ را از معادله (۳) حذف کنیم به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(۲)} g\sin\theta = -r\ddot{\theta} \Rightarrow g\sin\theta\, d\theta = -r\ddot{\theta}d\theta \qquad (۴) \quad ; \quad \ddot{\theta}d\theta = \frac{d\dot{\theta}}{dt}d\theta = \frac{d\theta}{dt}d\dot{\theta} = \dot{\theta}d\dot{\theta} \qquad (۵)$$

$$\xrightarrow{(۴),(۵)} \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\theta} g\sin\theta\, d\theta = \int_{۰}^{\dot{\theta}} -r\dot{\theta}d\dot{\theta}$$

سؤالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید، این است که چرا حدود انتگرال‌ها به صورت بالا انتخاب شده‌اند؟ پاسخ این است که در نقطه A (شروع حرکت)، θ برابر $-\frac{\pi}{۲}$ است چرا که جهت مثبت‌تر شدن، زاویه‌ی θ را جهت پادساعتگرد در نظر گرفته و جهت منفی‌تر شدن θ را جهت ساعتگرد در نظر می‌گیریم و چون اگر به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ در جهت ساعتگرد از محور عبوری از o (خط مرجع) حرکت کنیم، به نقطه A خواهیم رسید، در نتیجه $\theta = -\frac{\pi}{۲}$است و چون در نقطه A جسم ساکن است، داریم: $\dot{\theta} = ۰$.

$$-g\cos\theta\,\Big|_{\frac{-\pi}{۲}}^{\theta} = -\frac{r}{۲}\dot{\theta}^۲\,\Big|_{۰}^{\dot{\theta}} \Rightarrow g\cos\theta = \frac{r}{۲}\dot{\theta}^۲ \Rightarrow \dot{\theta}^۲ = \frac{۲g\cos\theta}{r} \qquad (۶)$$

اکنون مقدار $\dot{\theta}$ را در معادله (۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$N = mg\cos\theta + mr\left(\frac{۲g\cos\theta}{r}\right) = ۳mg\cos\theta \qquad (۷)$$

توجه داشته باشید که طبق رابطه (۷) بیشترین مقدار N به ازای $\theta = ۰$ به دست می‌آید. یعنی نیروی عکس‌العمل سطح، زمانی بیشترین مقدار خود را دارد که جسم در پایین‌ترین نقطه نیمکره قرار داشته باشد. $\theta = ۰ \Rightarrow N_{max} = ۳mg\cos ۰ = ۳mg$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۸: ذره‌ای بر روی مسیری حرکت می‌کند که به وسیله معادلات $\rho = bt^۳$ و $\varphi = \omega$ و $z = ct^۲ + t$ توصیف می‌شود. مقدار شتاب این ذره را در لحظه $t = ۲s$ پیدا کنید (b و c و ω ثابت).

☑ **پاسخ:** طبق داده‌های مسئله بدیهی است که باید از رابطه شتاب در دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. مؤلفه‌های شتاب در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$\rho = bt^۳ \Rightarrow \dot{\rho} = ۳bt^۲ \Rightarrow \ddot{\rho} = ۶bt \qquad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^۲ \ , \ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + ۲\dot{\varphi}\dot{\rho} \ , \ a_z = \ddot{z}$$

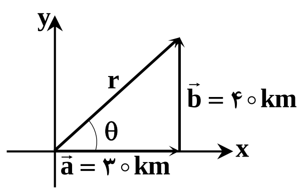
$$\varphi = \omega \Rightarrow \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = ۰ \ ; \quad z = ct^۲ + t \Rightarrow \dot{z} = ۲ct + ۱ \Rightarrow \ddot{z} = ۲c$$

$$\Rightarrow a_\rho = ۶bt - bt^۳ \times ۰ \xrightarrow{t=۲s} a_\rho = ۱۲b \quad , \quad a_\varphi = bt^۳ \times ۰ + ۲ \times ۰ \times ۳bt^۲ \Rightarrow a_\varphi = ۰ \quad , \quad a_z = ۲c$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_\rho^۲ + a_\varphi^۲ + a_z^۲} = \sqrt{۱۴۴b^۲ + ۰ + ۴c^۲} = ۲\sqrt{۳۶b^۲ + c^۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۹: اتومبیلی روی یک جاده افقی، مسافت $۳۰km$ را به سمت شرق می‌پیماید. سپس در یک تقاطع به سمت شمال می‌پیچد و تا قبل از توقف مسافت $۴۰km$ را طی می‌کند. جابجایی برآیند اتومبیل را پیدا کنید.



☑ **پاسخ:** برای یافتن برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، مؤلفه‌های آن‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$\vec{a} = ۳۰\hat{i} \quad , \quad \vec{b} = ۴۰\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} r_x = a_x + b_x = ۳۰ + ۰ = ۳۰ \\ r_y = a_y + b_y = ۰ + ۴۰ = ۴۰ \end{cases}$$

برای یافتن جهت و طول بردار برآیند، از روابط $\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$ ، $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲}$ استفاده می‌کنیم.

$$r = \sqrt{r_x^۲ + r_y^۲} = \sqrt{۳۰^۲ + ۴۰^۲} = \sqrt{۹۰۰ + ۱۶۰۰} = \sqrt{۲۵۰۰} \Rightarrow r = ۵۰km$$

$$\tan\theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{۴۰}{۳۰} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{۴}{۳}$$

مثال۱۰: دو بردار $\vec{a}=2\hat{i}-4\hat{j}$ و $\vec{b}=6\hat{i}+10\hat{j}$ مفروض هستند. طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و زاویه آن با محور x ها را به دست آورید. همچنین بردار $\vec{c}$ را به گونه‌ای بیابید که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$:

☑ **پاسخ:** برای یافتن جهت و طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ از روابط $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\,,\tan\theta=\dfrac{a_y}{a_x}$ استفاده می‌کنیم: $\vec{a}+\vec{b}=(2+6)\hat{i}+(-4+10)\hat{j}=8\hat{i}+6\hat{j}$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10\ ,\quad \tan\theta=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow\theta=\arctan\frac{3}{4}$$

برای قسمت دوم داریم:

$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0\Rightarrow\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}=4\hat{i}+14\hat{j}$$

مثال۱۱: زاویه بین دو بردار $\begin{cases}\vec{a}=3\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}\\ \vec{b}=-2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\end{cases}$ را پیدا کنید.

☑ **پاسخ:** برای به دست آوردن زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از ضرب نرده‌ای بین دو بردار استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{3^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9+9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}\\ |\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\end{cases}\quad ;\quad \vec{a}.\vec{b}=3\times(-2)+3\times2+(-3)\times(-2)=-6+6+6=6$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{6}{3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=\arccos\frac{1}{3}$$

مثال۱۲: اگر P و Q کمیت‌های فیزیکی با بعد متفاوت باشند، کدام عبارت به لحاظ فیزیکی معنی‌دار است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۶)

۱) $P+Q$ ۲) PQ ۳) $\dfrac{PQ}{P+Q}$ ۴) $\dfrac{P-Q}{P}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کمیت‌های فیزیکی با بعد مختلف را نمی‌توانیم با هم جمع کرده و یا از هم کم کنیم. تنها می‌توان چنین کمیت‌هایی را در هم ضرب کرده و یا بر هم تقسیم کرد و کمیت فیزیکی جدیدی را به‌دست آورد. در همه گزینه‌ها عمل ریاضی جمع یا تفریق دیده می‌شود، به جز گزینه (۲) که پاسخ صحیح سؤال است.

مثال۱۳: اگر $\vec{r}$ بردار مکان و r اندازه آن، $f(r)$ تابع هموراری از ۰ و $\vec{A}(\vec{r})$ بردار دلخواهی باشد، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟
(فوتونیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\nabla^2\vec{r}=\vec{0}$ ۲) $\vec{\nabla}\ln r=\dfrac{\vec{r}}{r^2}$ ۳) $\vec{\nabla}\times(f(r)\vec{r})=\vec{0}$ ۴) $(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{r}=3\vec{A}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

مثال۱۴: اگر $\vec{A}(1,-1,2)$ و $\vec{B}(2,1,3)$ باشد.آنگاه حاصل $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ کدام است؟

۱) $-5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ۲) $-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ ۳) $\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$ ۴) $-\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\2&1&3\end{vmatrix}=[(-1\times3)-(2\times1)]\vec{i}+[(2\times2)-(3\times1)]\vec{j}+[(1\times1)-(-1\times2)]\vec{k}=-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

فصل دوم

«سینماتیک یک، دو و سه بعدی»

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال ۱: راننده‌ی ترنی که با سرعت v_1 حرکت می‌کند، ناگهان در مقابل خود ترنی باری را می‌بینند که با سرعت ثابت v_2 $(v_2 < v_1)$ و در فاصله d از او حرکت می‌کند و تصمیم گرفت با شتاب a ترمز نماید تا با ترن برخورد نکند. ولی متوجه شد که در هر صورت با ترن باری تصادف خواهد کرد، زمان لازم برای برخورد دو ترن برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{v_1 - v_2 + \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2ad}}{a}$

۲) $\dfrac{v_1 - v_2}{a}$

۳) $\dfrac{\sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2ad}}{a}$

۴) $\dfrac{v_1 - v_2 - \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2ad}}{a}$

پاسخ: گزینه «۴» محور مختصات را در جهت حرکت ترن‌ها و مبدأ آن را بر روی ترن اول (با سرعت v_1) در لحظه‌ی ترمز، قرار می‌دهیم. در لحظه برخورد مکان دو ترن یکی می‌شود و سرعت نسبی در لحظه‌ی ترمز گرفتن $v_1 - v_2$ و بعد از برخورد صفر است چون متحرک دومی شتاب ندارد لذا شتاب نسبی آن‌ها نیز a است. پس می‌توان زمان لازم برای اینکه یک متحرک با سرعت اولیه‌ی v و شتاب a مسافت d بپیماید را حساب کرد.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow d = -\frac{1}{2}at^2 + vt = -\frac{1}{2}at^2 + (v_1 - v_2)t$$

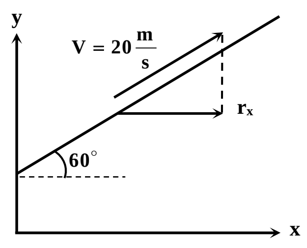
شتاب کندشونده است. علامت منفی است.

$$\frac{1}{2}at^2 - (v_1 - v_2)t + d = 0 \xrightarrow[t\text{ برحسب ۲ حل معادله درجه}]{} t = \frac{(v_1 - v_2) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2ad}}{a}$$

اگر $d = 0$ باشد، برخورد در $t = 0$ رخ می‌دهد؛ یعنی فقط علامت منفی قابل قبول است.

مثال ۲: متحرکی با سرعت $20\dfrac{m}{s}$ بر روی خط $y = \sqrt{3}x + 1$ در حال حرکت است. در مدت ۳ ثانیه چند متر در راستای محور x جابه‌جا می‌شود؟

۱) ۳۰　　۲) $30\sqrt{3}$　　۳) $60\sqrt{3}$　　۴) ۶۰



پاسخ: گزینه «۱» شیب خط $\sqrt{3}$ است؛ یعنی tan زاویه‌ای که خط با افق می‌سازد $\sqrt{3}$ می‌باشد.

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

بنابراین، خط با افق زاویه 60° درجه می‌سازد. برای اینکه جابه‌جایی در راستای محور x را به دست آوریم نیاز به سرعت در راستای محور x داریم. بنابراین سرعت $20\dfrac{m}{s}$ را در راستای محور x تجزیه می‌کنیم.

$$v_x = v\cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10\frac{m}{s} \quad ; \quad \Delta x = v_x t = 10 \times 3 = 30\,m$$

مثال ۳: متحرکی در مدت ۲ ثانیه از نقطه $A\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ به نقطه $B\begin{vmatrix}5\\9\end{vmatrix}$ می‌رود. اندازه سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟

۱) ۵　　۲) ۱۰　　۳) ۲/۵　　۴) ۰

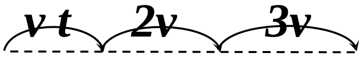
پاسخ: گزینه «۳»

$$\bar{v} = \frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{t} = \frac{\sqrt{(5-2)^2 + (9-5)^2}}{t} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = 2/5\frac{m}{s}$$

مثال ۴: متحرکی در بازه‌های زمانی به ترتیب t ، $2t$ و $3t$ با سرعت‌های v ، $2v$ و $3v$ حرکت می‌کند. سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۶}{۱۴}v$ ۲) $\frac{۹}{۱۷}v$ ۳) $\frac{۱۴}{۹}v$ ۴) $\frac{۱۴}{۶}v$

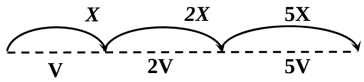
پاسخ: گزینه «۴» برای حل مسئله باید به داده‌های آن توجه کنیم.



در صورت مسئله از v و t صحبت شده است پس با توجه به رابطه $\Delta x = \overline{v}\Delta t$ می‌توان نوشت:

$$\overline{v} = \frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \frac{vt + ۴vt + ۹vt}{t + ۲t + ۳t} = \frac{۱۴vt}{۶t} = \frac{۱۴}{۶}v$$

مثال ۵: متحرکی جابه‌جایی‌های x ، $2x$ و $5x$ را با سرعت‌های v ، $2v$ و $5v$ طی می‌کند. سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟



۱) $۲v$ ۲) $۸v$ ۳) $\frac{۸}{۳}v$ ۴) $\frac{۳}{۸}v$

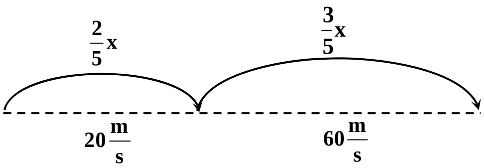
پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ و رابطه $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ داریم:

$$\overline{v} = \frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \frac{x + ۲x + ۵x}{\frac{x}{v} + \frac{۲x}{۲v} + \frac{۵x}{۵v}} = \frac{\frac{۸x}{۱}}{\frac{۳x}{v}} = \frac{۸}{۳}v$$

مثال ۶: متحرکی $\frac{۲}{۵}$ مسیر خود را با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ و مابقی را با سرعت $۶۰\frac{m}{s}$ می‌پیماید. سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{۲۰۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰۰}{۳}$ ۳) $\frac{۴۰۰}{۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» xها را بالا و v ها را پایین می‌نویسیم تا $\frac{x}{v}$ همان t باشد.



$$\overline{v} = \frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \frac{\frac{۲}{۵}x + \frac{۳}{۵}x}{\frac{\frac{۲}{۵}x}{۲۰} + \frac{\frac{۳}{۵}x}{۶۰}} = \frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۲x}{۱۰۰} + \frac{۳x}{۳۰۰}} = \frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۲x}{۱۰۰} + \frac{x}{۱۰۰}} = \frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۳x}{۱۰۰}} = \frac{۱۰۰}{۳}\frac{m}{s}$$

مثال ۷: توپی از ارتفاع h رها شده به سطح زمین برخورد می‌کند. تندی برخورد با زمین $۰/۷$ تندی قبل از برخورد آن است. ارتفاعی که توپ بالا می‌رود برابر است با:

۱) $۰/۴۹h$ ۲) $۰/۷h$ ۳) h ۴) $۱/۴h$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این مسئله کافی است بین پارامترهای قبل و بعد از برخورد با زمین ارتباط برقرار کنیم:

در هنگام فرود $v = \sqrt{۲gh}$ و در هنگام صعود $v' = \sqrt{۲gh'} \Rightarrow v' = ۰/۷v = ۰/۷\sqrt{۲gh}$; $h' = \frac{v'^۲}{۲g} = \frac{(۰/۷)^۲(۲gh)}{۲g} = ۰/۴۹h$

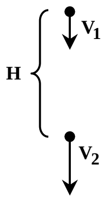
h: ارتفاع اولیه، h': ارتفاع بالا آمدن

مثال ۸: دو گلوله به ترتیب با سرعت‌های $۱۰\frac{m}{s}$ و $۲۰\frac{m}{s}$ هم‌زمان از بالا و پایین برجی به ارتفاع ۳۰۰ متر به سمت هم پرتاب می‌شوند، پس از چند ثانیه به هم می‌رسند؟

۱) ۵   ۲) ۱۰   ۳) ۱۵   ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق داریم:

$$\Delta y_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}t \Rightarrow ۳۰۰ = (۱۰+۲۰)t \Rightarrow t = \frac{۳۰۰}{۳۰} = ۱۰\,(s)$$



اگر دو گلوله با سرعت‌های v_1 و v_2 $(v_2 > v_1)$ در شرایط خلأ به طور همزمان در یک جهت پرتاب شوند، سرعت نسبی‌شان برابر تفاضل سرعت‌ها است.

$$\Delta y_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\, t = (v_2 - v_1)t \Rightarrow H = (v_2 - v_1)t$$

H فاصله‌ی نسبی بین دو گلوله پس از گذشت زمان t از لحظه‌ی شروع به حرکت دو گلوله است.

مثال ۹: دو گلوله را هم‌زمان از یک نقطه با سرعت اولیه $v_1 = 20\frac{m}{s}$ و $v_2 = 25\frac{m}{s}$ در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. در لحظه‌ای که گلوله اول به نقطه اوج خود می‌رسد، فاصله دو گلوله چند متر است؟ (مقاومت هوا ناچیز و $g = 10\frac{N}{kg}$)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون سرعت گلوله اول $20\frac{m}{s}$ است بنابراین گلوله طی ۲ ثانیه به اوج می‌رسد.

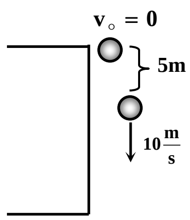
چون فاصله بین دو گلوله خواسته شده است از فرمول زیر استفاده می‌کنیم. چون سرعت‌ها هم‌جهت می‌باشند سرعت نسبی آن‌ها تفاضل اندازه‌هایشان است.

$$\Delta y_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\, t = (v_2 - v_1)t \Rightarrow H = (v_2 - v_1)t \quad ; \quad \Delta y_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\, t \quad ; \quad \Delta y_{\text{نسبی}} = (25 - 20) \times 2 = 10\ (m)$$

توجه داشته باشید که در حرکت قائم، هر کمیتی را که رو به پایین است با علامت منفی به کار می‌بریم (چون سوی مثبت محورها رو به بالا اختیار می‌شود).

مثال ۱۰: دو جسم به فاصله زمانی یک ثانیه از حال سکون و از ارتفاع مساوی به طور آزاد سقوط می‌کنند. پس از گذشت چه مدت از زمانی که اولین جسم پرتاب شده، فاصله دو جسم $20m$ می‌شود؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

۱) ۲/۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱ ۴) ۳



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون دو جسم همزمان تحت تأثیر شتاب گرانش زمین قرار گرفته‌اند، حرکتشان نسبت به هم از نوع حرکت‌های سرعت ثابت است زیرا شتاب نسبی‌شان صفر خواهد شد. البته گلوله‌ای که یک ثانیه زودتر رها شده در این مدت به اندازه $5m$ پایین آمده و سرعت اولیه $10\frac{m}{s}$ را به دست آورده است. برای این که فاصله آن‌ها به $20m$ برسد، این گلوله باید فاصله $15m$ دیگر را طی کند. $\Delta y_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\, t' \Rightarrow 15 = 10t' \Rightarrow t' = 1/5s$

$$t = t' + 1 = 1/5 + 1 = 2/5(s)$$

مثال ۱۱: جسمی از حال سکون سقوط می‌کند و نصف مسیر حرکت را در ثانیه آخر می‌پیماید. ارتفاع سقوط تقریباً چند متر است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

۱) ۵۸ ۲) ۲۹ ۳) ۱۱۶ ۴) ۳۴

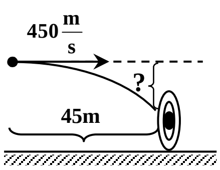
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر کل زمان حرکت n ثانیه باشد، مسافت طی شده در ثانیه nام حرکت برابر است با:

$$h_n = (\frac{2n-1}{2})g \quad ; \quad h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gn^2$$

و کل ارتفاع (مسافت سقوط) برابر است با:

$$\Rightarrow h_n = \frac{1}{2}h \Rightarrow (\frac{2n-1}{2})g = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}gn^2 \Rightarrow n^2 - 4n + 2 = 0 \Rightarrow n \simeq 3/4 \Rightarrow h = 58\ (m)$$

مثال ۱۲: گلوله‌ای با سرعت $450\frac{m}{s}$ به سوی هدفی که در فاصله ۴۵ متری قرار دارد شلیک می‌شود. چه ارتفاعی در بالای هدف را باید نشانه بگیریم تا گلوله به هدف بخورد؟



☑ **پاسخ:** گلوله در ابتدای پرتاب فقط سرعت افقی دارد. اما بعد از رها شدن به دلیل نیروی گرانش زمین به سمت پایین نیز حرکت خواهد کرد. طبق رابطه $x = v_x t$ این گلوله فاصله ۴۵ متری را در زمان زیر طی می‌کند:

$$45 = 450 \times t \Rightarrow t = 0/1\ (s)$$

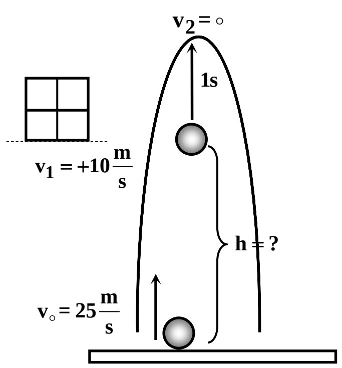
در زمان ۰/۱ ثانیه، ارتفاعی که گلوله طی می‌کند به این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\times 10\times (0/1)^2=-\frac{1}{20}\ (m)$$

یعنی طی ۰/۱ثانیه، گلوله $\frac{1}{20}$ متر یا ۵ سانتی‌متر به طرف پایین سقوط آزاد خواهد داشت. بنابراین برای اینکه گلوله حتماً به مرکز هدف بخورد باید 5cm بالای هدف را نشانه بگیریم.

مثال۱۳: از سطح زمین گلوله‌ای را با سرعت $25\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌کنیم. این گلوله در مدت ۲ ثانیه دو بار از مقابل پنجره‌ای می‌گذرد، ارتفاع پنجره از زمین چند متر است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۲۷/۵   ۲) ۲۶/۵   ۳) ۲۶/۲۵   ۴) ۲۷/۲۵



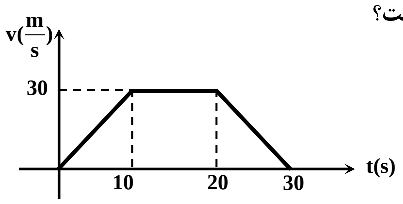
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این‌که گلوله در مدت ۲ ثانیه، دو بار از مقابل پنجره عبور می‌کند به این معنی است که زمانی که برای اولین بار به لبه‌ی پنجره می‌رسد ۱ ثانیه تا ارتفاع اوج فاصله‌ی زمانی دارد. می‌خواهیم بدانیم گلوله با چه سرعتی به لبه‌ی پنجره می‌رسد. با استفاده از فرمول $v_2=-gt+v_1$ و قرار دادن $v_2=0$ (چون سرعت در نقطه اوج برابر صفر است) می‌توانیم v_1 را که سرعت گلوله در لبه‌ی پنجره است به دست آوریم:

$$v_2=-gt+v_1 \quad ; \quad 0=-10\times 1+v_1 \Rightarrow v_1=10\ (\frac{m}{s})$$

اکنون با دانستن سرعت در لحظه پرتاب و سرعت در لبه‌ی پنجره می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان، ارتفاع پنجره از سطح زمین را به دست آوریم.

$$v_1^2-v_0^2=-2gh \quad ; \quad 10^2-25^2=-2\times 10\times h \quad ; \quad -525=-20h \Rightarrow h=26/25\ (m)$$

مثال۱۴: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان مقابل سرعت متوسط پس از ۳۰ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟

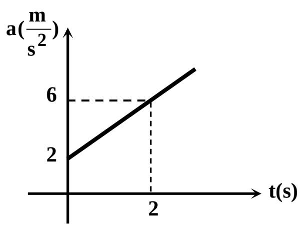


۱) ۱۰
۲) ۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این مثال برای سرعت متوسط نیاز به کل جابه‌جایی داریم و کل جابه‌جایی را می‌توانیم از سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان به دست آوریم. مساحت ذوزنقه برابر با مجموع دو قاعده ضرب در نصف ارتفاع می‌باشد.

$$\bar{v}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{S}{t}=\frac{(30+10)\frac{30}{2}}{30}=20\ (\frac{m}{s})$$

مثال۱۵: با توجه به نمودار شتاب ـ زمان مقابل اگر اندازه سرعت اولیه $-5\frac{m}{s}$ باشد، اندازه سرعت در لحظه $t=2s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۸
۲) ۱۳
۳) ۳
۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان همان تغییرات سرعت می‌باشد.

$$S=\Delta v \Rightarrow S=v_2-v_1 \quad ; \quad \frac{(2+6)2}{2}=v_2-(-5) \Rightarrow 8=v_2+5 \Rightarrow v_2=3\ (\frac{m}{s})$$

مثال۱۶: برد پرتابه‌ای دو برابر ارتفاع اوج آن است، تانژانت زاویه پرتاب آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به رابطه ارتفاع اوج و برد پرتابه، مسئله به راحتی قابل حل است.

α: زاویه اولیه پرتابه

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \text{ برد پرتابه} \quad \text{و} \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \text{ ارتفاع اوج} \qquad R = 2h \xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال}} \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow tg\alpha = 2$$

روش ساده‌تر:

$$\tan\alpha = \frac{4h}{R} \xrightarrow{R=2h} \tan\alpha = \frac{4h}{2h} = 2$$

مثال۱۷: پرتابه‌ای از سطح زمین با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق از مبدأ مختصات پرتاب می‌شود و از نقطه $\begin{vmatrix} 24 \\ 14 \end{vmatrix}$ می‌گذرد. اندازه‌ی سرعت اولیه کدام گزینه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون نقطه‌ای از مسیر حرکت را داده‌اند از معادله مسیر کمک می‌گیریم و با جایگذاری مقادیر x ، y و α می‌توان v_0 را حساب کرد.

$$y = 14 \quad , \quad x = 24 \quad , \quad \alpha = 45^\circ \quad , \quad x_0 = y_0 = 0$$

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha + y_0 \Rightarrow 14 = \frac{-10\times(24)^2}{2v_0^2\times\cos^2 45^\circ} + 24\times\tan 45^\circ + 0 \Rightarrow 14 = \frac{-10\times(24)^2}{2v_0^2\times\frac{1}{2}} + 24\times 1$$

$$\Rightarrow -10 = \frac{-10\times(24)^2}{v_0^2} \Rightarrow v_0^2 = 24^2 \Rightarrow v_0 = 24\,(\frac{m}{s})$$

مثال۱۸: پرتابه‌ای را یک بار با زاویه ۳۰ درجه و بار دیگر با همان سرعت اولیه تحت زاویه ۶۰ درجه به بالا پرتاب می‌کنیم. برد حالت دوم چند برابر برد حالت اول است؟

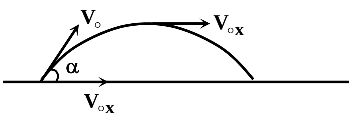
۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون زاویه‌های پرتاب متمم هستند بردها با هم برابر می‌شوند.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{v_0^2}{g}\sin(2\times 60^\circ)}{\frac{v_0^2}{g}\sin(2\times 30^\circ)} = \frac{\sin(120^\circ)}{\sin(60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

مثال۱۹: سرعت اولیه پرتابه‌ای ۲ برابر سرعت پرتابه در اوج است. زاویه پرتاب چند درجه است؟

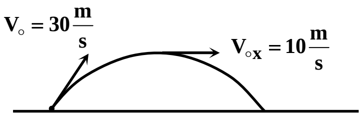
۱) ۳۰
۲) ۶۰
۳) ۴۵
۴) ۱۵



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اطلاعات مسئله $v_0 = 2v_{0x}$ می‌باشد. با توجه به شکل می‌توانیم بگوییم:

$$v_{0x} = v_0\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{v_{0x}}{2v_{0x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

مثال۲۰: سرعت اولیه و سرعت پرتابه‌ای در اوج به ترتیب $30\frac{m}{s}$ و $10\frac{m}{s}$ می‌باشند. ارتفاع اوج پرتابه چند متر است؟



۱) ۴۵

۲) ۴۰

۳) ۲۰

۴) ۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:**

$$v_\circ^2 = v_{\circ x}^2 + v_{\circ y}^2 \Rightarrow 900 = 100 + v_{\circ y}^2 \Rightarrow v_{\circ y}^2 = 800$$

$$v_y^2 - v_{\circ y}^2 = -2g\Delta y \Rightarrow 0 - 800 = -20h \Rightarrow h = 40\,m$$

روش دوم: چون در شرایط خلأ هستیم اصطکاک نداریم. بنابراین می‌توانیم از قانون پایستگی انرژی برای حل این مسئله استفاده کنیم:

$$\frac{1}{2}mv_\circ^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_{\circ x}^2 \Rightarrow v_\circ^2 - v_{\circ x}^2 = 2gh \Rightarrow 30^2 - 10^2 = 20h \Rightarrow h = 40\,(m)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۱: دو پرتابه را از سطح زمین با سرعت اولیه برابر تحت زاویه‌های 30° و 60° نسبت به افق به بالا پرتاب می‌کنیم. ارتفاع اوج پرتابه دوم چند برابر ارتفاع اوج پرتابه اول است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

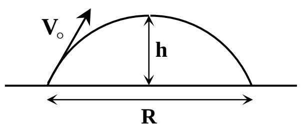
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از رابطه مربوط به ارتفاع اوج کمک می‌گیریم.

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{v_\circ^2 \sin^2 60^\circ}{2g}}{\frac{v_\circ^2 \sin^2 30^\circ}{2g}} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۲: پرتابه‌ای با سرعت اولیه $v_\circ = 20\frac{m}{s}$ به گونه‌ای پرتاب می‌شود که $h = \frac{\sqrt{3}}{12}R$ است. برد پرتابه را به دست آورید. ($g = 10\frac{m}{s^2}$)

☑ **پاسخ:** با توجه به این که رابطه بین ارتفاع اوج و برد داده شده است خواهیم داشت:



$$\tan\alpha = \frac{4h}{R} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{12}\cancel{R}}{\cancel{R}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$R = \frac{v_\circ^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(20)^2 \sin(\frac{\pi}{3})}{10} = \frac{400\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = 20\sqrt{3}m$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۳: انرژی جنبشی یک پرتابه در نقطه اوج آن $\frac{3}{4}$ انرژی جنبشی در نقطه‌ی پرتاب است. زاویه پرتاب چقدر است؟

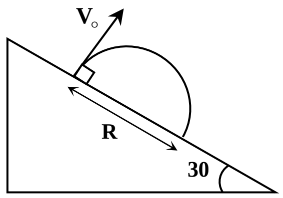
☑ **پاسخ:** از آنجا که در نقطه اوج $v_y = 0$ است انرژی جنبشی در نقطه اوج برابر $\frac{1}{2}mv_{\circ x}^2$ می‌باشد. اما در نقطه پرتاب هر دو مؤلفه افقی و عمودی سرعت غیر صفرند.

$$T_{\text{اولیه}} = \frac{1}{2}mv_\circ^2 \quad ; \quad T_{\text{اوج}} = \frac{1}{2}mv_{\circ x}^2 = \frac{1}{2}mv_\circ^2\cos^2\alpha$$

$$T_{\text{اوج}} = \frac{3}{4}T_{\text{اولیه}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_\circ^2\cos^2\alpha = \frac{3}{4}(\frac{1}{2}mv_\circ^2) \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

مثال۲۴: گلوله‌ای با سرعت اولیه $10\frac{m}{s}$ با زاویه قائم نسبت به سطح تپه از روی تپه‌ای که شیب آن نسبت به افق 30° است شلیک می‌شود. برد پرتابه چقدر است؟

☑ **پاسخ:** در این مسئله چون پرتابه از بالای تپه به پایین آن پرتاب شده است و نیز با توجه به این که بردار سرعت اولیه بر سطح شیب‌دار عمود است داریم:

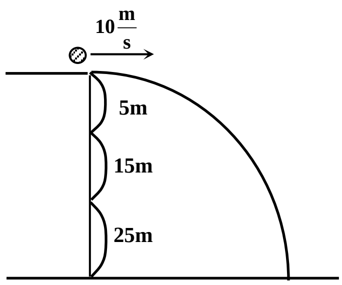


$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=30^\circ\end{cases}$$

$$R=\frac{2v_0^2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}=\frac{2\times(10)^2\times\cos 0\times\sin(0+30)}{10\times\cos^2 30} \Rightarrow R=\frac{200\times\frac{1}{2}}{10\times\frac{3}{4}}=\frac{40}{3}\,(m)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۵: گلوله‌ای را از ارتفاع 45m سطح زمین با سرعت افقی $10\frac{m}{s}$ پرتاب می‌کنیم گلوله چند ثانیه بعد به زمین برخورد می‌کند؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۲/۵

۴) ۱/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون در راستای قائم سرعت اولیه صفر است، گلوله در ثانیه اول 5m، در ثانیه دوم 15m و در ثانیه سوم 25m می‌پیماید و در کل 45m را در ۳ ثانیه طی می‌کند. درست مانند حرکت‌های سقوط آزاد سرعت اولیه افقی $10\frac{m}{s}$ هیچ تأثیری بر روی سقوط قائم ندارد. اثر این سرعت اولیه در برد پرتابه است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۶: گلوله‌ای را از ارتفاع 45m سطح زمین با سرعت افقی $10\frac{m}{s}$ پرتاب می‌کنیم. برد افقی گلوله چند متر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به مثال قبل این گلوله طی ۳ ثانیه به زمین برخورد می‌کند و در هر ثانیه سرعت افقی $10\frac{m}{s}$ را دارد. بنابراین:

$$R=\Delta x=V_x t=10\times 3=30\,(m)$$

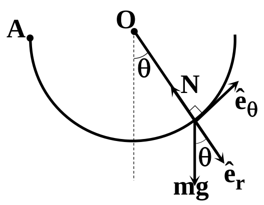
فصل سوم

«دینامیک»

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال۱: ذره‌ای به جرم m از نقطه A در یک نیم‌کره ثابت، شروع به حرکت می‌کند. وقتی که ذره با راستای قائم، زاویه θ می‌سازد، نیروی عکس‌العمل سطح را به دست آورید. اصطکاک ناچیز است.

☑ **پاسخ:** چون این حرکت بر روی نیم‌دایره است بهترین مختصات برای توصیف آن، دستگاه مختصات قطبی است. همچنین از آنجا که شعاع حرکت ثابت است، داریم: $\dot{r} = \ddot{r} = ۰$. قانون دوم نیوتن را در دو راستای $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \hat{e}_r : \sum F = ma_r \Rightarrow -N + mg\cos\theta = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲) = -mr\dot{\theta}^۲ & (۱) \\ \hat{e}_\theta : \sum F = ma_\theta \Rightarrow -mg\sin\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta}) = mr\ddot{\theta} & (۲) \\ \xrightarrow{(۱)} N = mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^۲ & (۳) \end{cases}$$

هدف ما در این مسئله، یافتن مقدار N بر حسب پارامترهای معلوم می‌باشد، اگر بخواهیم $\dot{\theta}$ را از معادله (۳) حذف کنیم به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(۲)} g\sin\theta = -r\ddot{\theta} \Rightarrow g\sin\theta\, d\theta = -r\ddot{\theta} d\theta \quad (۴) \quad ; \quad \ddot{\theta} d\theta = \frac{d\dot{\theta}}{dt} d\theta = \frac{d\theta}{dt} d\dot{\theta} = \dot{\theta} d\dot{\theta} \quad (۵)$$

$$\xrightarrow{(۴),(۵)} \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\theta} g\sin\theta\, d\theta = \int_{۰}^{\dot{\theta}} -r\dot{\theta} d\dot{\theta}$$

سؤالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید، این است که چرا حدود انتگرال‌ها به صورت بالا انتخاب شده‌اند؟ پاسخ این است که در نقطه A (شروع حرکت)، θ برابر $-\frac{\pi}{۲}$ است چرا که جهت مثبت‌تر شدن، زاویه‌ی θ را جهت پادساعتگرد در نظر گرفته و جهت منفی‌تر شدن θ را جهت ساعتگرد در نظر می‌گیریم و چون اگر به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ در جهت ساعتگرد از محور عبوری از o (خط مرجع) حرکت کنیم، به نقطه A خواهیم رسید، در نتیجه $\theta = -\frac{\pi}{۲}$است و چون در نقطه A جسم ساکن است، داریم: $\dot{\theta} = ۰$.

$$-g\cos\theta \Big|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\theta} = -\frac{r}{۲}\dot{\theta}^۲ \Big|_{۰}^{\dot{\theta}} \Rightarrow g\cos\theta = \frac{r}{۲}\dot{\theta}^۲ \Rightarrow \dot{\theta}^۲ = \frac{۲g\cos\theta}{r} \quad (۶)$$

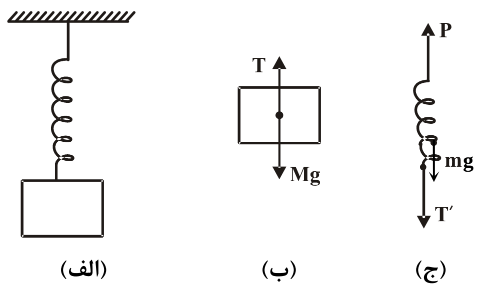
اکنون مقدار $\dot{\theta}$ را در معادله (۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$N = mg\cos\theta + mr\left(\frac{۲g\cos\theta}{r}\right) = ۳mg\cos\theta \quad (۷)$$

توجه داشته باشید که طبق رابطه (۷) بیشترین مقدار N به ازای $\theta = ۰$ به دست می‌آید. یعنی نیروی عکس‌العمل سطح، زمانی بیشترین مقدار خود را دارد که جسم در پایین‌ترین نقطه نیمکره قرار داشته باشد.
$\theta = ۰ \Rightarrow N_{max} = ۳mg\cos۰ = ۳mg$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: فنری به جرم m را در نظر بگیرید که به سقفی متصل شده است و در طرف دیگر آن جسمی به جرم M در حالت سکون قرار دارد. نمودار جسم آزاد را برای جسم و فنر رسم کنید و قانون دوم نیوتن را برای آن دو بنویسید.



(الف) (ب) (ج)

☑ **پاسخ:** شکل «ب» نمودار جسم آزاد وزنه را نشان می‌دهد، همان طور که در شکل دیده می‌شود، نیروهای وارد بر جسم عبارتند از: وزن آن (Mg) و نیروی کشش فنر (T). از آنجا که سیستم حرکتی نمی‌کند داریم:

$$\begin{cases} \sum F = Ma \\ a = ۰ \end{cases} \Rightarrow \sum F = ۰ \Rightarrow T - Mg = ۰ \Rightarrow T = Mg$$

در شکل «ج» نیز نمودار جسم آزاد فنر را می‌بینیم که سه نیروی وارد بر آن را نشان می‌دهد: وزن فنر (mg)، کشش جسم روی فنر (T') و نیروی کششی که سقف به طرف بالا به فنر وارد می‌کند (P).

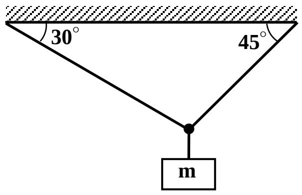
بدیهی است که T و T' عمل و عکس‌العمل هستند. قانون دوم نیوتن را برای فنر نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases}\sum F = ma \\ a = ۰\end{cases} \Rightarrow \sum F = ۰ \Rightarrow P - mg - T' = ۰ \quad (۱) \quad , \quad T = T' = Mg \quad (۲)$$

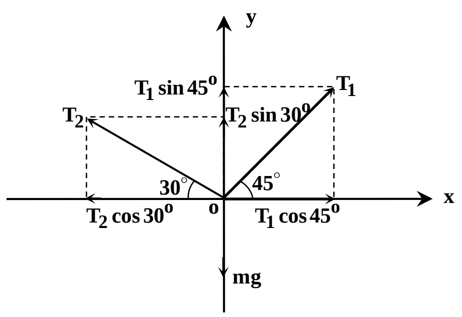
$$(۱),(۲) \Rightarrow P - mg - Mg = ۰ \Rightarrow P = (m+M)g$$

نتیجه اینکه نیروی کشش سقف بر فنر برابر است با مجموع وزن فنر و جسم. عکس‌العمل P ، نیرویی است که فنر به سمت پایین بر سقف وارد می‌کند. توجه کنید که تنها در صورتی که بتوان از وزن فنر چشم‌پوشی کرد، می‌توان گفت که فنر توسط نیروی کشش T، نیروی وزن جسم را به سقف منتقل می‌کند.

مثال۳: شکل مقابل وزنه‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که به وسیله ریسمان‌هایی آویخته شده است. نمودار جسم آزاد را برای نیروهای وارد بر این جسم رسم کنید. اگر وزن جسم ۱۰۰N باشد بزرگی سایر نیروها را به دست آورید.



پاسخ: همان طور که در نمودار جسم آزاد دیده می‌شود، سه نیرو بر جسم وارد می‌شوند که یکی از آن‌ها نیروی وزن و دو نیروی دیگر کشش نخ هستند. با انتخاب محورهای x و y مطابق شکل و تجزیه نیروهای بر روی این دو محور، می‌توانیم قانون دوم نیوتن را در راستای x و y بنویسیم. چون جسم در حالت تعادل (سکون) است پس برآیند نیروهای وارد بر آن در هر دو راستای x و y برابر صفر می‌باشد.



$$x: T_۱ \cos ۴۵^\circ - T_۲ \cos ۳۰^\circ = ۰ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}T_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}T_۲ \Rightarrow \sqrt{۲}T_۱ = \sqrt{۳}T_۲ \quad (۱)$$

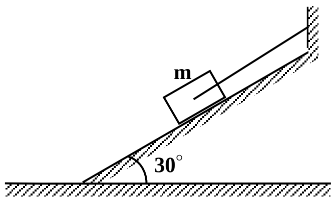
$$y: T_۱ \sin ۴۵^\circ + T_۲ \sin ۳۰^\circ - mg = ۰ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}T_۱ + \frac{۱}{۲}T_۲ = mg$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}T_۱ + T_۲ = ۲mg = ۲\times ۱۰۰ = ۲۰۰ \quad (۲)$$

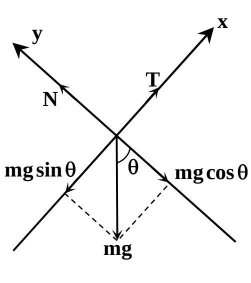
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \sqrt{۳}T_۲ + T_۲ = ۲۰۰ \Rightarrow (\sqrt{۳}+۱)T_۲ = ۲۰۰ \Rightarrow T_۲ = \frac{۲۰۰}{\sqrt{۳}+۱} = ۱۰۰(\sqrt{۳}-۱)N$$

$$\xrightarrow{(۱)} T_۱ = \sqrt{\frac{۳}{۲}}T_۲ \Rightarrow T_۱ = \sqrt{\frac{۳}{۲}} \times ۱۰۰(\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow T_۱ = \frac{۱۰۰(۳-\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}} = ۵۰\sqrt{۲}(۳-\sqrt{۳})N$$

مثال۴: الف) شکل مقابل جسمی به جرم m را روی یک سطح شیب‌دار صیقلی با زاویه θ نشان می‌دهد. این جسم به وسیله ریسمانی که به دیواره قائمی متصل شده به حال سکون نگه داشته شده است. کشش نخ و نیروی عمودی سطح را به دست آورید. $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲} \ , \ m = ۵kg)$



پاسخ: نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر جسم در شکل زیر دیده می‌شود. چون جسم ساکن است برآیند نیروهای وارد بر آن در دو راستای x و y برابر صفر است. در اینجا برای سادگی کار، محور x را در راستای سطح شیب‌دار و محور y را عمود بر سطح انتخاب می‌کنیم. با به‌کارگیری قانون دوم نیوتن خواهیم داشت:



$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ a_x = ۰\end{cases} \Rightarrow \sum F_x = ۰ \Rightarrow T - mg\sin\theta = ۰ \Rightarrow T = mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow T = ۵\times ۱۰ \times \sin ۳۰ = ۲۵ \ (N)$$

$$\begin{cases}\sum F_y = ma_y \\ a_y = ۰\end{cases} \Rightarrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow N - mg\cos\theta = ۰ \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow N = ۵\times ۱۰ \times \cos ۳۰ = ۵۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۵\sqrt{۳} \ (N)$$

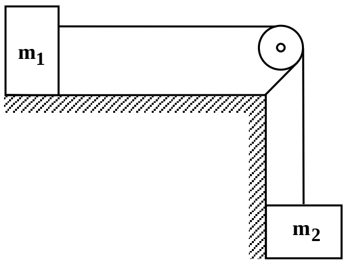
ب) اکنون فرض کنید که ریسمان قطع می‌شود. در این صورت شتاب جسم را پیدا کنید.

☑ **پاسخ:** با قطع شدن ریسمان، نیروی کشش نخ (T) حذف می‌شود. بدیهی است که نیروی برآیند وارد بر جسم دیگر صفر نیست و جسم در راستای محور x شتاب پیدا می‌کند.

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow -mg\sin\theta = ma_x \Rightarrow a_x = -g\sin\theta = -۱۰\times\frac{۱}{۲} = -۵\ (\frac{m}{s^۲})$$

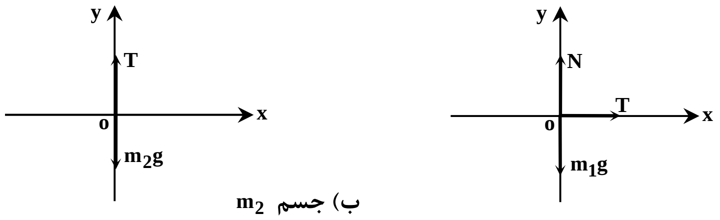
$$\sum F_y = ma_y\ ,\ a_y = ۰ \Rightarrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow N = mg\cos\theta = ۲۵\sqrt{۳}\ (N)$$

بنابراین در این حالت، جسم شتابی برابر $۵\frac{m}{s^۲}$ و به طرف پایین سطح شیب‌دار پیدا می‌کند. علت منفی شدن شتاب این است که سوی مثبت محور x را به طرف بالای سطح شیب‌دار انتخاب کردیم و جهت شتاب به طرف پایین سطح است. اما شتابی که جسم پیدا می‌کند اثری بر نیروی عمودی سطح نمی‌گذارد و مقدار N مانند قسمت (الف) برابر $۲۵\sqrt{۳}N$ خواهد بود.



مثال۵: شکل مقابل دو جسم به جرم‌های $m_۱ = ۲kg$ و $m_۲ = ۱kg$ را نشان می‌دهد که به وسیله ریسمان بدون جرمی به یکدیگر متصل شده‌اند. $m_۱$ روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد و $m_۲$ از روی قرقره‌ی بدون جرمی آویزان است. شتاب سیستم و نیروی کشش نخ را به دست آورید. $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

☑ **پاسخ:** در شکل زیر نمودار جسم آزاد برای هر یک از اجسام $m_۱$ و $m_۲$ رسم شده است.



الف) جسم m_1 ب) جسم m_2

ابتدا حرکت $m_۱$ را بررسی می‌کنیم. T، یعنی نیروی کشش ریسمان جسم را به سمت راست می‌کشد. $m_۱g$ نیروی وزن بوده و N نیز نیروی قائم وارد بر جسم از طرف میز صیقلی است. این جسم فقط در امتداد محور x شتاب می‌گیرد و در نتیجه $a_y = ۰$ است.

$$m_۱ : \begin{cases} \sum F_x = m_۱a_{۱x} \Rightarrow T = m_۱a_{۱x} & (۱) \\ \sum F_y = m_۱a_{۱y} = ۰ \Rightarrow N - m_۱g = ۰ \Rightarrow N = m_۱g & (۲) \end{cases}$$

برای تعیین T باید حرکت جسم $m_۲$ را بررسی کنیم:

$$m_۲ : \sum F_y = -m_۲a_{۲y} \Rightarrow T - m_۲g = -m_۲a_{۲y} \qquad (۳)$$

چون طول ریسمان ثابت است و از جرم نخ و قرقره صرف‌نظر کرده‌ایم نتیجه می‌گیریم که مقدار شتابی که $m_۱$ روی سطح افقی می‌گیرد با شتابی که $m_۲$ در راستای عمودی می‌گیرد برابر است $(a_{۱x} = a_{۲y})$. در نتیجه می‌توانیم شتاب دستگاه را صرفاً با a نمایش دهیم.

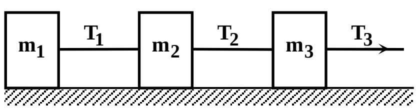
$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow m_۱a - m_۲g = -m_۲a \Rightarrow a(m_۱ + m_۲) = m_۲g \qquad (۴)$$

شتاب سیستم برابر است با:

$$\Rightarrow a = \frac{m_۲}{m_۱ + m_۲}g = \frac{۱}{۲+۱}\times۱۰ = \frac{۱۰}{۳}\ (\frac{m}{s^۲})$$

نیروی کشش نخ برابر $\frac{۲۰}{۳}N$ به دست آمد.

$$(۱),(۴) \Rightarrow T = m_۱\times\frac{m_۲}{m_۱ + m_۲}g = \frac{m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}g \Rightarrow T = \frac{۲\times۱}{۲+۱}\times۱۰ = \frac{۲۰}{۳}\ (N)$$



مثال۶: سه جسم مطابق شکل مقابل روی یک میز افقی بدون اصطکاک به هم وصل شده‌اند و با نیروی $T_۳ = ۶۰N$ به سمت راست کشیده می‌شوند. اگر $m_۱ = ۱۰kg$، $m_۲ = ۲۰kg$ و $m_۳ = ۳۰kg$ باشد، نیروهای کشش $T_۱$ و $T_۲$ را پیدا کنید.

☑ **پاسخ:** در این‌گونه مسائل می‌توانیم حرکت اجسام را به صورت گروهی یا تک‌تک بررسی کنیم. بدیهی است که شتاب کل سیستم برابر شتاب تک‌تک اجسام است. اگر مجموع سه جسم را سیستم در نظر بگیریم نیروهای $T_۱$ و $T_۲$ حذف می‌شوند (چون داخلی محسوب می‌شوند.)

$$\sum F_x = (\sum m)a_x \qquad T_۳ = (m_۱ + m_۲ + m_۳)a_x \Rightarrow a_x = \frac{T_۳}{m_۱ + m_۲ + m_۳} = \frac{۶۰}{۱۰+۲۰+۳۰} = ۱\,(\frac{m}{s^۲})$$

در نتیجه شتاب کل سیستم و تک‌تک اجسام برابر $۱\frac{m}{s^۲}$ است.

اکنون حرکت جسم $m_۱$ را به تنهایی بررسی می‌کنیم، تنها نیرویی که بر $m_۱$ وارد می‌شود کشش نخ $T_۱$ است.

$$\sum F_x = m_۱ a_x \Rightarrow T_۱ = m_۱ a_x \Rightarrow T_۱ = ۱۰ \times ۱ = ۱۰\,N$$

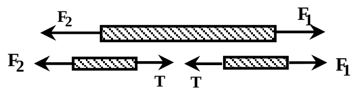
برای محاسبه $T_۲$ نیز حرکت $m_۲$ را بررسی می‌کنیم، بر جسم $m_۲$ دو نیروی کشش نخ $T_۱$ و $T_۲$ در خلاف جهت هم وارد می‌شوند.

$$\sum F_x = m_۲ a_x \Rightarrow T_۲ - T_۱ = m_۲ a_x \Rightarrow T_۲ - ۱۰ = ۲۰ \times ۱ \Rightarrow T_۲ = ۳۰\,N$$

مثال ۷: میله‌ای افقی صلبی به جرم m را از دو طرف با نیروهای افقی $F_۱$ و $F_۲$ می‌کشیم. مقدار نیروی کشش در وسط میله چقدر است؟

۱) $F_۱ - F_۲$ ۲) $F_۱ + F_۲$ ۳) $\frac{F_۱ - F_۲}{۲}$ ۴) $\frac{F_۱ + F_۲}{۲}$

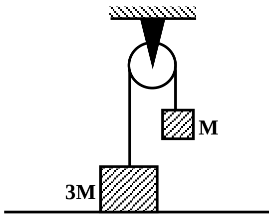
پاسخ: گزینه «۴» این سؤال، سؤال جالبی است که به یادگیری قانون دوم نیوتن بسیار کمک می‌کند.



در دو حالت فوق می‌توان نوشت:

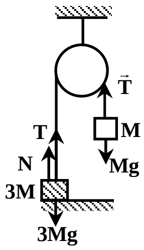
$$F_۱ - T = [\frac{m}{۲}]a \qquad F_۱ - F_۲ = ma \qquad \frac{F_۱ - F_۲}{۲} = F_۱ - T \Rightarrow T = \frac{F_۱ + F_۲}{۲}$$

مثال ۸: در شکل زیر، فردی به جرم M حداکثر با چه شتابی از طناب سمت راست می‌تواند بالا برود به طوری که جسم A به جرم ۳M روی زمین ساکن باقی بماند؟ (نیروهای اتلافی و جرم نخ و قرقره ناچیز است.)



۱) g
۲) ۲g
۳) ۳g
۴) ۴g

پاسخ: گزینه «۲» معمولاً برای حل این‌گونه سؤالات با مشخص کردن نیروهای موجود در مسئله، قانون دوم نیوتن را برای نیروها می‌نویسیم و یا بعضاً از قانون پایستگی تکانه خطی استفاده می‌کنیم که در مورد این مسئله نیازی نیست.

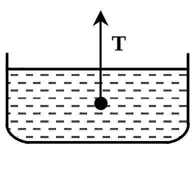


برای جسم M: $T - Mg = Ma$ برای جسم $۳M$: $T + N - ۳Mg = ۰$

حداقل نیرویی که سبب بلند شدن جسم می‌شود زمانی است که $N = ۰$ در نتیجه روابط بالا به معادلات زیر تبدیل می‌شوند:

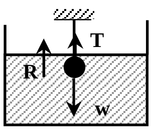
$$\begin{matrix} T - Mg = Ma \\ T = ۳Mg \end{matrix} \Rightarrow a = ۲g$$

مثال ۹: در شکل مقابل جسمی به جرم m که به طنابی قائم متصل شده در مایعی غوطه‌ور است. اگر کشش در طناب T باشد، نیرویی که جسم بر مایع وارد می‌کند چقدر است؟



۱) T
۲) mg
۳) mg-T
۴) صفر

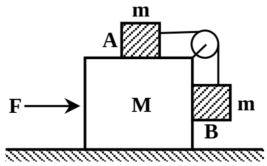
پاسخ: گزینه «۳» برای حل این سؤال کافی است نیروهای موجود در مسئله را مشخص کنیم.



فرض می‌کنیم R عکس‌العمل نیرویی باشد که جسم به مایع وارد می‌کند.

$$\sum \vec{F} = ۰ \Rightarrow \vec{T} + \vec{R} + \vec{W} = ۰ \Rightarrow R + T - W = ۰ \Rightarrow R = W - T$$

مثال۱۰: مطابق شکل زیر، جسم A به جرم m بر روی مکعبی به جرم M قرار دارد، و توسط نخی که از روی قرقره بدون اصطکاک گذشته است به جسم B به جرم m متصل است. جسم B با مکعب در تماس است. مکعب بر روی سطح افقی قرار دارد. اگر از جرم نخ و قرقره صرف‌نظر کنیم و اصطکاک کلیهٔ سطوح تماس ناچیز باشد، نیروی افقی اعمال شده‌ی F چقدر باشد تا جسم A نسبت به مکعب ساکن بماند؟



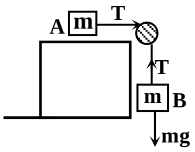
۱) $(M+2m)g$

۲) $(M+2m)\frac{g}{2}$

۳) $(M+m)g$

۴) $2\,mg$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای اینکه جسم A نسبت به مکعب ساکن بماند باید کل سیستم با یک شتاب حرکت کند، یعنی:

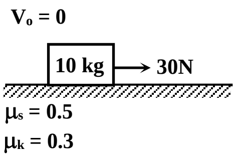


$$F=(m+m+M)a=(2m+M)a$$

از طرفی برای این که جسم B ساکن بماند باید $T=mg$ باشد. همچنین جسم A باید با شتاب a حرکت کند پس چون تنها نیروی وارد بر آن کشش نخ T است بنابراین $T=ma$ و در نتیجه:

$$\Rightarrow F=(2m+M)\frac{T}{m}=(2m+M)\frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}}=(2m+M)g$$

مثال۱۱: در شکل مقابل اصطکاک با چند درصد از بیشینه‌ی خود ظاهر شده است؟



۱) ۱۰۰

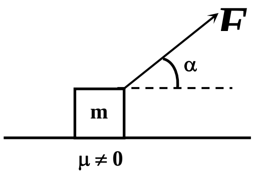
۲) ۳۰

۳) ۵۰

۴) ۶۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این مثال، بیشینه‌ی اصطکاک ایستایی برابر است با: $F_s=0/5\times10\times10=50\ N$ ولی نیروی وارد بر جسم برابر با $30\ N$ است پس نیروی اصطکاک با $30\ N$ از $50\ N$ بیشینه ظاهر می‌گردد. در نتیجه: $\frac{30}{50}\times100=60\%$

مثال۱۲: α چند درجه باشد تا جسم بیشترین شتاب را داشته باشد؟ ضریب اصطکاک $\mu=1$ فرض می‌شود.



۱) ۴۵

۲) ۳۰

۳) ۶۰

۴) ۱۵

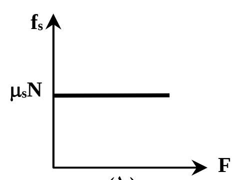
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نیروی F را به دو مؤلفه افقی و قائم تجزیه می‌کنیم. مؤلفه F_y سبب می‌شود که f_N از mg کمتر شود و جسم نیرویی کمتر از وزن خود به زمین وارد می‌کند. نیروی افقی F_x هم شتاب حرکت سیستم را تأمین می‌کند.

$$f_N=mg-F_y\quad;\quad F_x-\mu(mg-F_y)=ma\quad;\quad F\cos\alpha-\mu mg+\mu F\sin\alpha=ma$$

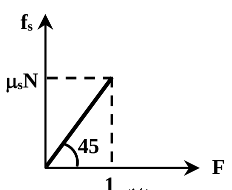
برای به دست آوردن زاویه‌ی بیشینه از رابطه‌ی شتاب مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{da}{d\alpha}=-\frac{F\sin\alpha}{m}+\mu\frac{F\cos\alpha}{m}=0\ \Rightarrow\ \sin\alpha=\mu\cos\alpha\ \Rightarrow\ \mu=\tan\alpha\ \Rightarrow\ 1=\tan\alpha\ \Rightarrow\alpha=45^\circ$$

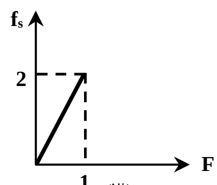
مثال۱۳: بر جسمی ساکن نیروی F با تابع $F=2t$ اثر می‌دهیم. اگر قبل از حرکت جسم، نیروی اصطکاک وارد بر جسم f_s باشد، نمودار (f_s-F) کدام خواهد بود؟



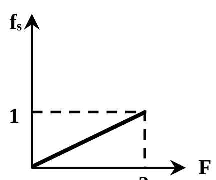
(۱)



(۲)



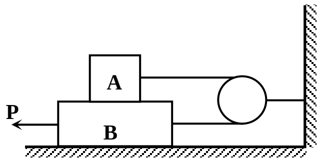
(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نظر به اینکه جسم حرکت نکرده است و با توجه به نمودار موجود در درس در انتخاب گزینه (۲) شک نمی‌کنیم و می‌دانیم تا زمانی که جسم حرکت نکرده نیروی محرک با نیروی مقاوم برابر است.

مثال۱۴: در شکل زیر، جرم جسم A، M و جرم جسم B، $3M$ و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی میان سطح تماس دو جسم A و B و نیز جسم B با سطح میز افقی به ترتیب μ_s و μ_k است. جرم نخ و قرقره ناچیز و اصطکاک قرقره با محورش قابل چشم‌پوشی است. نیروی افقی P چقدر باشد تا جسم A حرکت یکنواخت داشته باشد؟



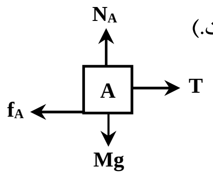
۱) $۴\mu_k Mg$

۲) $۵\mu_k Mg$

۳) $۶\mu_k Mg$

۴) $(۲\mu_s + ۴\mu_k)Mg$

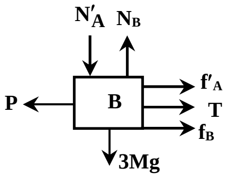
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق صورت مسئله باید شرایطی را بررسی کنیم که جسم A حرکت یکنواخت داشته باشد پس مطمئناً جسم A هم روی B می‌لغزد. بنابراین شرایط ایستایی نیست و گزینه ۴ خود به خود از جواب‌ها کنار گذاشته می‌شود (چون μ_s را وارد جواب کرده است.)



برای جسم A : $\sum F = ۰$ حرکت یکنواخت

$$\left.\begin{array}{l} T = f_A \\ N_A = Mg \end{array}\right\} \Rightarrow T = \mu_k N_A = \mu_k Mg \quad (۱)$$

برای جسم B :



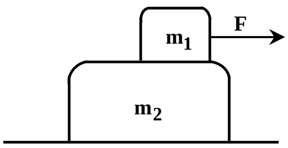
$$N'_A = N_A = Mg \Rightarrow f'_A = f_A = \mu_k Mg \quad (۲)$$

$$N_B = N'_A + ۳Mg = Mg + ۳Mg = ۴Mg \Rightarrow f_B = \mu_k N_B = ۴\mu_k Mg \quad (۳)$$

$$P = f'_A + f_B + T \xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} P = \mu_k Mg + ۴\mu_k Mg + \mu_k Mg = ۶\mu_k Mg$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۵: در شکل زیر، نیروی F به جسم $m_۱$ وارد می‌شود و مقدار آن به گونه‌ای است که جسم $m_۱$ بر روی جسم $m_۲$ نمی‌لغزد. اصطکاک بین جرم $m_۲$ و زمین قابل اغماض است. نیروی اصطکاک وارد بر $m_۱$ چگونه است؟



۱) از F کوچک‌تر است.

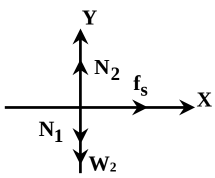
۲) از F بزرگ‌تر است.

۳) با F مساوی است.

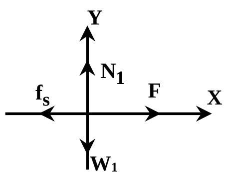
۴) بسته به مقدار $\frac{m_۱}{m_۲}$ از F کوچک‌تر یا بزرگ‌تر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» این مسئله با استفاده از قانون دوم نیوتن حل می‌شود و البته قبل از آن باید نیروها را مشخص کنیم.

از روی نمودارهای جسم آزاد برای $m_۱$ و $m_۲$، می‌توان گفت:



برای جسم (m_2)



برای جسم (m_1)

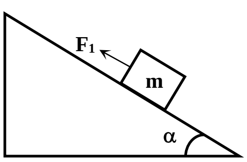
$$\left\{\begin{array}{l} F = (m_۱ + m_۲)a \\ f_s = m_۲ a \end{array}\right. \Rightarrow f_s = m_۲\left[\frac{F}{m_۱ + m_۲}\right]$$

$$f_s = \left(\frac{m_۲}{m_۱ + m_۲}\right)F \Rightarrow f < F$$

توجه داشته باشید که چون جسم $m_۱$ روی جسم $m_۲$ نمی‌لغزد بنابراین نیروی اصطکاک بین آن‌ها از نوع اصطکاک ایستایی است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۶: با وجود نیروی $F_۱$ جسم درآستانه‌ی لغزش به پایین است. نیروی $F_۱$ را چه مقدار زیاد کنیم تا جسم در آستانهٔ لغزش به بالا قرار گیرد؟



$\mu_s \neq 0$

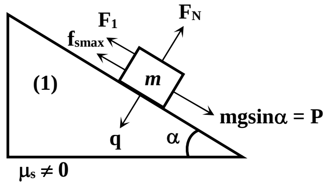
۱) $\mu_s mg\cos\alpha$

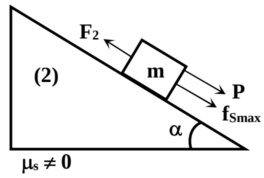
۲) $۲\mu_s mg\cos\alpha$

۳) $mg\sin\alpha$

۴) $۲mg\sin\alpha$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کلیه‌ی نیروهایی که بر جسم واقع بر سطح شیب‌دار وارد می‌شود به صورت زیر می‌باشد. با توجه به اینکه در آستانه لغزش، اصطکاک ایستایی حتماً به بیشینه مقدار خود می‌رسد، قانون دوم نیوتن به صورت زیر در می‌آید.



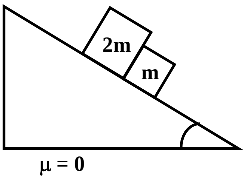


$$F_1 + f_{s\max} = P \qquad F_2 = f_{s\max} + P$$

$$F_1 = P - f_{s\max}$$

$$\Delta F = (P + f_{s\max}) - (P - f_{s\max}) \quad , \quad \Delta F = 2f_{s\max} = 2\mu_s mg\cos\alpha$$

✍ **مثال ۱۷: در شکل زیر نیرویی که جسم $2m$ به جسم m وارد می‌کند کدام گزینه است؟**



۱) $mg\sin\alpha$

۲) $2mg\sin\alpha$

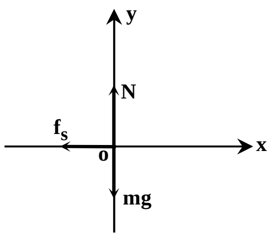
۳) 0

۴) $3mg\sin\alpha$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» سطح شیب‌دار کاملاً صیقلی و بدون اصطکاک است. در نتیجه با توجه به اینکه شتاب جسم مستقل از جرم است به راحتی می‌توانیم بگوییم هر دو جسم با شتاب یکسان حرکت می‌کنند و کاملاً بر هم مماس هستند بنابراین هیچ نیرویی به هم وارد نمی‌کنند.

✍ **مثال ۱۸: اتومبیلی را در نظر بگیرید که با سرعت v_0 در امتداد یک جاده‌ی افقی مستقیم حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و جاده μ_s باشد، کوتاه‌ترین مسیری که اتومبیل پیش از توقف طی می‌کند چقدر است؟**

☑ **پاسخ:** نیروهای وارد بر اتومبیل که در اینجا ذره فرض می‌شود، در شکل زیر نشان داده شده است. فرض کنید اتومبیل در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. اگر f_s نیروی ثابتی فرض شود، در این صورت یک حرکت کند شونده با شتاب ثابت خواهیم داشت. برای تعیین شتاب حرکت از قانون دوم نیوتن برای دو راستای x و y استفاده می‌کنیم.



$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow -f_s = ma_x \Rightarrow a_x = -\frac{f_s}{m} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \qquad (2)$$

$$f_s = \mu_s N \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow f_s = \mu_s mg \qquad (4)$$

$$(1),(4) \Rightarrow a_x = -\frac{\mu_s \cancel{m} g}{\cancel{m}} = -\mu_s g \qquad (5)$$

با استفاده از معادله مستقل از زمان برای به دست آوردن مسافت طی شده پیش از توقف داریم:

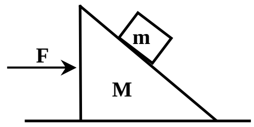
$$v^2 - v_0^2 = 2ax \xrightarrow{v=0} x = \frac{-v_0^2}{2a} \qquad (6)$$

به این دلیل سرعت نهایی را برابر صفر گرفتیم که اتومبیل قرار است توقف کند. علامت منها در رابطه (6) نشان می‌دهد که a در جهت منفی محور x است. اکنون مقدار شتاب را از معادله (5) جایگذاری می‌کنیم.

$$(5),(6) \Rightarrow x = \frac{-v_0^2}{-2\mu_s g} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} \qquad (7)$$

معادله (7) نشان می‌دهد که هر چه سرعت اولیه بیشتر باشد مسافت طی شده پیش از توقف نیز بیشتر می‌شود. ما در این مسئله ضریب اصطکاک ایستایی را به جای ضریب اصطکاک لغزشی به‌کار بردیم، زیرا فرض کردیم که هیچ لغزشی بین لاستیک‌ها و جاده وجود ندارد. همچنین فرض کردیم که بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی $(f_s = \mu_s N)$ در کار است، زیرا در این مسئله کوتاه‌ترین مسافت طی شده پیش از توقف موردنظر است. واضح است که هر چه نیروی اصطکاک ایستایی کمتر باشد مسافت طی شده پیش از توقف بیشتر خواهد بود.

مثال۱۹: در شکل زیر بیشینه نیروی افقی F طوری به گوه وارد می‌شود که جسم m روی آن ساکن می‌ماند. هرگاه ضریب اصطکاک بین m و M، $\mu = \frac{۱}{۵}$ و بین M و سطح افق قابل چشم‌پوشی است. در آن صورت شتاب M برابر کدام است؟



۱) F/M

۲) $\frac{۳}{۲}g$

۳) $\frac{۳}{۴}g$

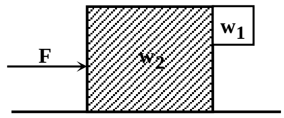
۴) $F/(M+m)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این سؤال ابتدا باید نیروهای موجود را مشخص کنیم. سپس از قانون دوم نیوتن استفاده کنیم.

$$F = (M+m)a \quad ; \quad a = \frac{F}{M+m}$$

چون جرم m نسبت به گوه ساکن می‌ماند، دو جسم را در حکم یک سیستم در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتن را برای آن می‌نویسیم.

مثال۲۰: مطابق شکل، جسم با وزن $w_۲$ بر روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین سطوح $w_۱$ و $w_۲$، μ باشد، حداقل نیروی لازم که جسم $w_۱$ نسبت به $w_۲$ ساکن بماند کدام است؟



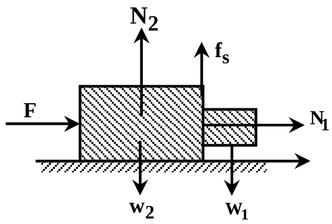
۱) $\mu w_۱$

۲) $\mu(w_۱ + w_۲)$

۳) $\frac{(w_۱ + w_۲)}{\mu}$

۴) $\frac{w_۲}{\mu}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» وقتی $w_۱$ نسبت به $w_۲$ ساکن باشد یعنی هر دو با یک شتاب حرکت می‌کنند. نیروهای وارد به هر یک از جسم‌ها را مشخص می‌کنیم. در نتیجه می‌توان نوشت:



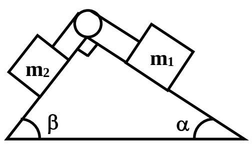
$$\begin{cases} N_۱ = m_۱ a = [\frac{w_۱}{g}]a \\ f_s = \mu N_۱ \\ f_s = w_۱ \end{cases}$$

$$F = (m_۱ + m_۲)a = \frac{(w_۱ + w_۲)a}{g} \qquad (۱)$$

$$w_۱ = \mu[\frac{w_۱}{g}]a \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{۱}{\mu} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow F = \frac{۱}{\mu}(w_۱ + w_۲)$$

مثال۲۱: سیستم در حال تعادل است، جرم $m_۲$ چند برابر جرم $m_۱$ است؟



۱) $\tan\alpha$

۲) $\cot\alpha$

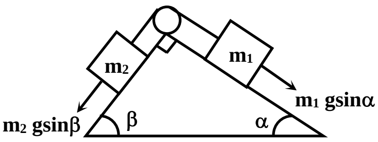
۳) $\sin\alpha$

۴) $\cos\alpha$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این سؤال لازم است برخی خواص مثلثاتی را مرور کنیم. مثلث فوق، قائم‌الزاویه می‌باشد. بنابراین زوایای α و β متمم یکدیگر می‌باشند. در نتیجه داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$$

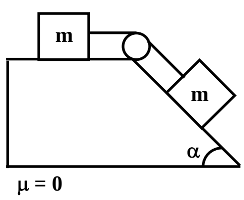
در بحث دینامیکی برآیند نیروها صفر می‌باشد. با رسم نیروهای وارد بر سیستم می‌توانیم بنویسیم:



$$m_۱ g\sin\alpha = m_۲ g\sin\beta \quad , \quad m_۱\sin\alpha = m_۲\cos\alpha$$

$$\frac{m_۲}{m_۱} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

مثال۲۲: وزنه‌ها از حال سکون به راه می‌افتند و پس از 2s هر یک به اندازه‌ی ۱۰m جابجا می‌شوند. α کدام گزینه است؟

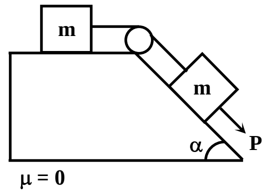


۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۳}$

۴) $\frac{\pi}{۱۲}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به نیروهای وارد بر سیستم توجه می‌کنیم. عامل حرکت P می‌باشد که برابر با حاصل‌ضرب کل جرم سیستم در شتاب حرکت سیستم می‌باشد.

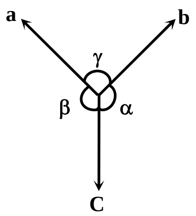
$$P = ۲ma \Rightarrow mg\sin\alpha = ۲ma \Rightarrow g\sin\alpha = ۲a$$

$$\Rightarrow ۱۰\sin\alpha = ۲a \qquad (۱)$$

از طرف دیگر با استفاده از معادلات حرکت، شتاب حرکت وزنه‌ها را پس از طی ۱۰ متر به دست می‌آوریم: $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \quad , \quad v_\circ = \circ$

$$\Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲}a(۲)^۲ \Rightarrow a = ۵(\frac{m}{s^۲}) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۰\sin\alpha = ۲\times۵ \Rightarrow \sin\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۲}rad$$



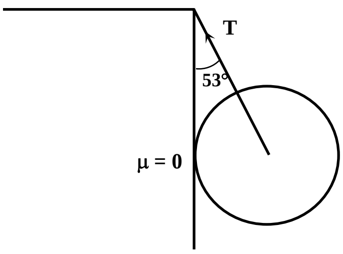
نکته۶: بین سه نیرو که برآیند آن‌ها صفر است، رابطه‌ی زیر برقرار است: (قانون سینوس‌ها)

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{\circ}$$

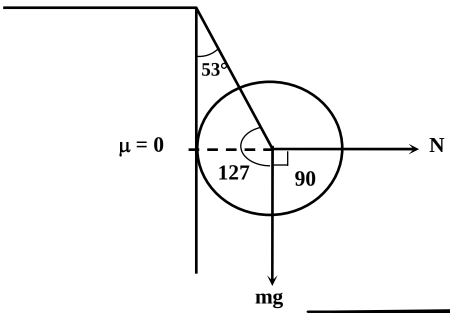
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۳: در شکل زیر اگر کشش ریسمان برابر ۲۰۰N باشد، نیرویی که از طرف دیوار بر کره وارد می‌شود چند نیوتن است؟



۱) ۱۲۰N
۲) ۱۶۰N
۳) ۲۴۰N
۴) ۲۰۰N

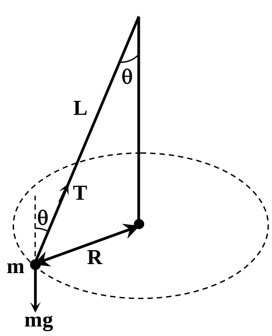


☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بردار نیروهای وارد بر جسم به شکل مقابل است. با توجه به شکل، قانون سینوس‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\frac{N}{\sin۱۲۷} = \frac{T}{\sin۹۰} \Rightarrow \frac{N}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۲۰۰}{۱} \Rightarrow N = ۱۶۰(N)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۴: آونگ مخروطی: شکل زیر جسمی به جرم m را نشان می‌دهد که با سرعت ثابت v در انتهای نخی به طول L روی یک دایره افقی دوران می‌کند. وقتی جسم دور می‌زند، نخ سطح یک مخروط را جاروب می‌کند. زمان لازم برای یک دور کامل جسم را پیدا کنید.



☑ **پاسخ:** اگر نخ با امتداد قائم زاویه θ بسازد، شعاع مسیر دایره برابر $R = L\sin\theta$ است. همان طور که در شکل دیده می‌شود نیروهای وارد بر جسم عبارتند از: کشش نخ و نیروی وزن جسم. اگر کشش نخ (T) را به دو مؤلفه شعاعی و قائم تجزیه کنیم، مؤلفه شعاعی آن شتاب مرکزگرا را تأمین می‌کند. اکنون قانون دوم نیوتن را در دو راستای شعاعی و قائم می‌نویسیم:

راستای قائم: $a = \circ \Rightarrow \sum F = \circ \Rightarrow T\cos\theta - mg = \circ \Rightarrow T\cos\theta = mg \qquad (۱)$

راستای شعاعی: $a = \frac{v^۲}{R} \Rightarrow \sum F = \frac{mv^۲}{R} \Rightarrow T\sin\theta = \frac{mv^۲}{R} \qquad (۲)$

از تقسیم معادله (۲) بر (۱) داریم:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow v = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

اگر t زمان یک دور کامل باشد داریم:

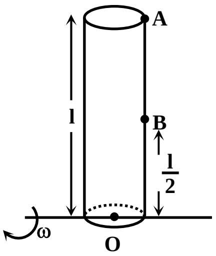
$$v = \frac{2\pi R}{t} = \sqrt{Rg\tan\theta} \Rightarrow t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}}$$

اما با توجه به $R = L\sin\theta$ داریم:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L\sin\theta}{g\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

معادله‌ی بالا رابطه بین L , t و θ را به دست می‌دهد. توجه کنید t که همان دوره تناوب جسم است به جرم جسم بستگی ندارد.

مثال۲۵: میله‌ای به طول ℓ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور گذرنده از نقطه‌ی O که عمود بر محور استوانه است دوران می‌کند. سرعت خطی نقطه‌ی A چند برابر سرعت خطی نقطه B است؟



۱) ۲

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{2}$

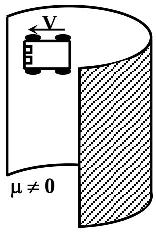
پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم که رابطه‌ی سرعت خطی و بسامد زاویه‌ای $v = R\omega$ است.

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\ell\omega_A}{\frac{\ell}{2}\omega_B}$$

همچنین می‌دانیم که در یک جسم صلب ωی تمام نقاط جسم باهم برابرند.

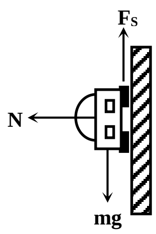
$$\omega_A = \omega_B = \omega \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{\ell\cancel{\omega}}{\frac{\cancel{\ell}}{2}\cancel{\omega}} = 2$$

مثال۲۶: حداقل سرعت اتومبیل چقدر باشد تا اتومبیل از دیوار مرگ سقوط نکند؟



۱) $\sqrt{\frac{g}{R\mu}}$ ۲) $\sqrt{\mu Rg}$ ۳) $\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$ ۴) $\sqrt{\frac{Rg}{\mu}}$

پاسخ: گزینه «۴» تمام نیروهای وارد بر اتومبیل را رسم می‌کنیم. برای اینکه این اتومبیل سقوط نکند f_s باید بیشتر از mg باشد. می‌دانیم که رابطه‌ی اصطکاک $f_s = \mu_s N$ است. چون μ_s ثابت است، برای اینکه f_s را افزایش دهیم مجبوریم N را افزایش دهیم. نیروی تأمین‌کننده‌ی N (نیروی عمودی سطح) همان عکس‌العمل نیروی گریز از مرکز است. پس طبق این توضیحات:



$$\begin{cases} f_s \geq mg \\ \mu_s.N \geq mg \end{cases} \Rightarrow \mu m\frac{v^2}{R} \geq mg \Rightarrow v^2 \geq \frac{Rg}{\mu} \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{Rg}{\mu}}$$

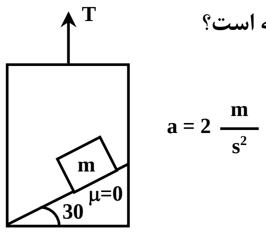
مثال۲۷: در یک پیچ جاده حداکثر سرعت مجاز را $72\frac{km}{h}$ نوشته‌اند. اگر شعاع چرخش $40\sqrt{3}m$ باشد. شیب عرضی جاده کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{30\sqrt{3}}{3}$ ۳) ۳۰ ۴) $30\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۱» طبق فرمول شیب عرضی جاده داریم:

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{Rg} = \frac{400}{400\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال۲۸: آسانسوری با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ تندشونده به بالا می‌رود. شتاب حرکت جسم بر روی سطح شیب‌دار کدام گزینه است؟



۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

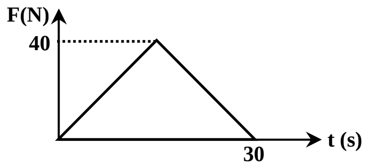
۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شتاب حرکت جسم بر روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک از رابطهٔ $a = g\sin\alpha$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه سیستم درون آسانسور قرار دارد اندازهٔ g به g' تغییر پیدا خواهد کرد که g' را از رابطه‌ی زیر حساب می‌کنیم:

$$g' = g + (+2) = 10 + 2 = 12\,(\frac{m}{s^2}) \;\;;\;\; a = g'\sin\alpha \Rightarrow a = 12 \times \frac{1}{2} = 6(\frac{m}{s^2})$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۹: نمودار نیرو ـ زمان جسم $60\,kg$ که در مبدأ زمان از حال سکون به راه می‌افتد، به صورت زیر است. سرعت جسم در $t = 30\,s$ چند $\frac{km}{h}$ است؟



۱) ۱۰

۲) ۷۲

۳) ۱۸

۴) ۳۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان طور که گفتیم، سطح زیر نمودار نیرو ـ زمان تغییرات اندازه حرکت است.

$$S = \Delta P \Rightarrow S = P_2 - P_1 = mv_2 - mv_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 40 \times 30 = 60\,(v_2 - \cancel{v_1}) \Rightarrow 600 = 60\,v_2 \Rightarrow v_2 = 10\frac{m}{s} = 36\frac{km}{h}$$

۰ چون از حال سکون شروع به حرکت کرده است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۰: تابع انرژی پتانسیل روبه‌رو مفروض است. $U(\vec{r}) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma z + c$

که در آن γ, β, α و c مقادیر ثابتی هستند. تابع نیرو را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** با بهره‌گیری از عملگر گرادیان خواهیم داشت:

$$F = -\nabla U = -(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}) = -(2x + y\beta)\hat{i} - (x\beta)\hat{j} - \gamma\hat{k}$$

توجه کنید که ثابت c که همان مقدار پتانسیل در مبدأ مختصات است در تابع نیرو ظاهر نمی‌شود.

نکته۱۵: تابع انرژی پتانسیل تنها برای نیروهای پایستار قابل تعریف است. به نیروهای غیرپایستار نمی‌توان انرژی پتانسیل نسبت داد.

نکته ۱۶: شرط لازم و کافی برای پایستار بودن یک نیرو این است که کرل آن نیرو صفر باشد. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۱: به ازای چه مقادیری از ثابت‌های c, b, a نیروی $F = (ax + by^2)\hat{i} + cxy\hat{j}$ پایستار است؟

۱) $b = c$ و همه مقادیر a ۲) $a = b$ و همه مقادیر c ۳) $c = 2b$ و همه مقادیر a ۴) $a = 2b$ و همه مقادیر c

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شرط پایستار بودن یک نیرو آن است که کرل آن صفر شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix} = (c - 2b)y\hat{k} = 0 \Rightarrow c - 2b = 0 \Rightarrow c = 2b$$

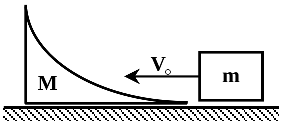
مقدار a در نتیجه بی‌تأثیر است بنابراین به ازای همه مقادیر a نیروی F پایستار خواهد بود.

مثال۳۲: یک دستگاه منزوی از دو ذره با جرم‌های مساوی تشکیل شده است. اگر این دو ذره در فاصله بسیار دور از یکدیگر باشند، در لحظه‌ای ذره اول ساکن و ذره دوم با سرعت به ذره اول نزدیک می‌شود، در این صورت انرژی مکانیکی دستگاه:

۱) ثابت نیست ۲) صفر و ثابت است ۳) منفی و ثابت است ۴) مثبت و ثابت است

پاسخ: گزینه «۴» انرژی پتانسیل در حالت اول چون ذرات در فاصله دور از هم قرار دارند صفر است و چون انرژی جنبشی یکی از ذرات غیر صفر است و همچنین این مقدار مثبت است پس انرژی مکانیکی که جمع انرژی پتانسیل و جنبشی است مقداری مثبت است و چون هیچ عامل مقاوم یا غیر پایستاری وجود ندارد، مقدار انرژی کل ثابت می‌باشد. (طبق صورت سؤال که گفته دستگاه منزوی است).

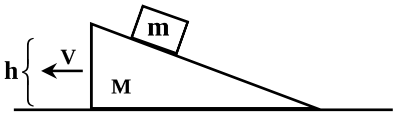
مثال۳۳: جسمی به جرم m مطابق شکل با سرعت $V_\circ$ به سمت سطح شیب‌داری به جرم M حرکت می‌کند و از آن بالا می‌رود. جرم m حداکثر به چه ارتفاعی دست می‌یابد؟ از اصطکاک بین m و M و بین M و سطح زمین صرف‌نظر شود.



۱) $h=\frac{m}{M}\frac{V_\circ^2}{2g}$ ۲) $h=(\frac{m}{m+M})\frac{V_\circ^2}{2g}$

۳) $h=\frac{V_\circ^2}{2g}$ ۴) $h=(\frac{M}{m+M})\frac{V_\circ^2}{2g}$

پاسخ: گزینه «۴» چون از اصطکاک صرف‌نظر شده یعنی نیروی مقاوم نداریم، که بهترین رابطه برای ارتباط برقرار کردن بین این دو پارامتر و حل مسئله، پایستگی انرژی است و البته چون سطح شیب‌دار هم حرکت می‌کند نیاز به یک معادله دیگر نیز داریم که از روی قانون پایستگی تکانه خطی این معادله را به دست می‌آوریم.



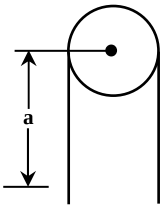
$$\begin{matrix}E_i=E_f\\P_i=P_f\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}mV_\circ^2=\frac{1}{2}(M+m)V^2+mgh & (1)\\ mV_\circ=(M+m)V & (2)\end{cases}$$

i : نقطه‌ی شروع حرکت جرم m f : نقطه‌ای که تا آن نقطه جرم m بالا می‌رود.

توضیح اینکه در نوشتن رابطه‌های بالا توجه به این نکته ضروری است که در لحظه‌ای که m نسبت به M (سطح شیب‌دار) ساکن می‌شود مجموع سطح شیب‌دار و جرم m هر دو با سرعت V حرکت می‌کنند.

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow\frac{1}{2}mV_\circ^2=mgh+[\frac{m^2V_\circ^2}{2(M+m)}]\Rightarrow h=\frac{MV_\circ^2}{2g(M+m)}$$

مثال۳۴: طناب یکنواختی به طول 2a در حال تعادل از یک میخ افقی ثابت آویزان است. ضربه‌ی بسیار کوچکی سبب می‌شود که طناب به آرامی از روی میخ بلغزد. اصطکاک بین طناب و میخ ناچیز است. سرعت طناب، وقتی از میخ جدا می‌شود کدام است؟



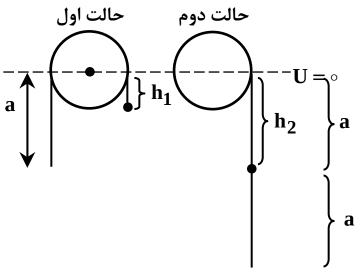
۱) $\sqrt{ag}$

۲) $\sqrt{2ag}$

۳) $2\sqrt{a\,g}$

۴) $\frac{1}{2}\sqrt{a\,g}$

پاسخ: گزینه «۱» مرجع پتانسیل را خط افقی که از مرکز میخ می‌گذرد، در نظر می‌گیریم.



پایستگی انرژی $\underset{\text{حالت اول}}{E_1}=\underset{\text{حالت دوم}}{E_2}\rightarrow K_1+U_1=K_2+U_2$

$$-mgh_1+\circ=-mgh_2+\frac{1}{2}mv_2^2\ ,\ h_2-h_1=\frac{a}{2}$$

h_1, h_2: ارتفاع مرکز جرم طناب نسبت به خط پتانسیل صفر در دو حالت می‌باشد. علامت منفی در نوشتن جمله پتانسیل به دلیل آن است که مرجع پتانسیل را بالا انتخاب کردیم: $\Rightarrow v=\sqrt{ga}$

مثال۳۵: ذره‌ای به جرم ۳kg در راستای x حرکت می‌کند و انرژی پتانسیل آن به صورت $U = 2x^2 + \frac{3}{x}$ است. بسامد زاویه‌ای نوسانات کوچک حول نقطه تعادل پایدار ذره را پیدا کنید.

☑ **پاسخ:** برای یافتن نقطه تعادل کافیست مشتق اول انرژی پتانسیل نسبت به مکان را برابر صفر قرار دهیم. اگر به ازای نقطه تعادل، مشتق دوم انرژی پتانسیل مثبت شد، آن نقطه محل تعادل پایدار خواهد بود.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 4x - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 4 + \frac{6x}{x^4} = 4 + \frac{6}{x^3}\Big|_{x=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{\text{نقطه تعادل}} = 4 + \frac{6}{\frac{3}{4}} = 4 + 8 = 12$$

چون مشتق دوم پتانسیل مثبت شد، پس در $x = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$ تعادل پایدار داریم. فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه تعادل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}}}{m}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2(\frac{rad}{s})$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۶: ذره‌ای به جرم ۴۰ گرم تحت تأثیر پتانسیل $V(x) = -(1-x^2)e^{-x^2}$ که در آن x برحسب متر و V(x) برحسب ژول است، در راستای محور x حرکت می‌کند. محل تعادل پایدار و زمان تناوب نوسانات کوچک حول این نقطه به ترتیب از راست به چپ برحسب متر و ثانیه برابر است با:

۱) $-\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{2}\pi}{10}$ ۲) $\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{2}\pi}{10}$ ۳) ۰ و $\frac{\sqrt{2}\pi}{10}$ ۴) ۰ و $0/2\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این سؤال نیاز به مشتق‌گیری از تابع پتانسیل داریم. توضیح اینکه اگر تابع پتانسیل را دادند و از ما بسامد نوسان یا دوره تناوب را خواستند، کافی است مشتق اول پتانسیل را مساوی صفر قرار داده و نقطه تعادل را بیابیم و به ازای آن نقطه، مشتق دوم پتانسیل که همان k در حرکت نوسانی است را حساب کنیم. می‌دانیم که ω برابر $\sqrt{\frac{k}{m}}$ است.

$$k = \frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{\text{نقطه تعادل}} \qquad U(x) = -(1-x^2)e^{-x^2} \qquad \frac{dU}{dx} = 2xe^{-x^2} + 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 2x(2-x^2)e^{-x^2}$$

$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0 \,,\ x = \sqrt{2} \,,\ x = -\sqrt{2}$ نقاط تعادل هستند.

$$\frac{d^2U}{dx^2} = (2(2-x^2) - 4x^2 - 4x^2(2-x^2))e^{-x^2}$$

$\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=0} > 0 \Rightarrow$ نقطه تعادل پایدار $x = 0$

$\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=\pm\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow$ نقاط تعادل ناپایدار $x = \pm\sqrt{2}$

$$k = \frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=0} = 4 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{40\times10^{-3}}} = 10\,s^{-1} \qquad \text{زمان تناوب } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0/2\pi$$

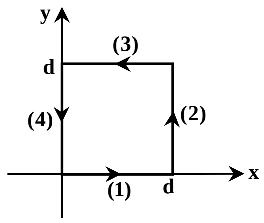
◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۷: جسمی به جرم یک کیلوگرم از ارتفاع ۵ متر روی توده شن می‌افتد. اگر جسم ۵ سانتیمتر در شن فرو رود و متوقف شود، نیروی میانگینی که توده‌ی شن روی جسم وارد می‌کند، چند نیوتن است؟ $(g = 10\,m/s^2)$

۱) ۱۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۱۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در هنگام سقوط جسم در هوا، چون جسم تحت تأثیر نیروی پایستار گرانش (وزن) قرار دارد، انرژی مکانیکی آن ثابت می‌ماند $E_1 = E_2 = mgh$ هنگام فرورفتن در توده شن به واسطه‌ی وجود نیروی غیر پایستار، انرژی جسم کاهش یافته و به صفر می‌رسد. یعنی:

$$\Delta E = w_f \Rightarrow 0 - E_2 = -f \times d \Rightarrow 0 - mgh = -f \times d \Rightarrow 0 - 1\times10\times5 = -\bar{f}\times0/05 \Rightarrow \bar{f} = 1000\,N$$



مثال۳۸: نیروی F به صورت $\vec{F} = 2y^3\hat{i} + 3x^2\hat{j}$ تعریف می‌شود. کار انجام شده توسط این نیرو در مسیر شکل مقابل چقدر است؟

☑ **پاسخ:** همان طور که گفتیم رابطه کار در سیستم دکارتی به صورت زیر است:

$$w = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

اما چون شکل مقابل دو بعدی است می‌توانیم از مختصه z در فرمول کار صرف‌نظر کنیم.

کار را در ۴ مسیر (اضلاع مربع) حساب می‌کنیم. طبق صورت سؤال داریم:

$$F_x = 2y^3 \ , \ F_y = 3x^2$$

$$\text{مسیر}1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow w_1 = \int F_x dx = \int_0^d 2y^3 dx = 0$$

$$\text{مسیر}2 \Rightarrow x = d = \text{constant} \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow w_2 = \int F_y dy = \int_0^d 3x^2 dy = 3x^2 \int_0^d dy \Rightarrow w_2 = 3d^2 \times [y]_0^d = 3d^2 \times d = 3d^3$$

$$\text{مسیر}3 \Rightarrow y = d = \text{constant} \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow w_3 = \int F_x dx = \int_d^0 2y^3 dx \Rightarrow w_3 = 2y^3 \int_d^0 dx = 2d^3 \times [x]_d^0 = -2d^4$$

$$\text{مسیر}4 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow w_4 = \int F_y dy = \int_d^0 3x^2 dy = 0$$

$$w_{\text{کل}} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0 + 3d^3 - 2d^4 + 0 = d^3(3 - 2d)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۹: توده‌ای به جرم m روی یک سطح بدون اصطکاک در مبدأ در حال سکون است. در لحظه $t = 0$ یک نیروی کاهشی به صورت $F = F_0 e^{-\lambda t}$ به آن اعمال می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ کدام است؟

☑ **پاسخ:** با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F(t) = m\frac{dv}{dt} = F_0 e^{-\lambda t} \quad ; \quad dv = \frac{F_0}{m} e^{-\lambda t} dt \xrightarrow{\text{با انتگرال‌گیری از طرفین}} v = \frac{F_0}{m}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} + C$$

چون در $t = 0$ داریم $v = v_0 = 0$، پس خواهیم داشت:

$$C = \frac{F_0}{m\lambda}$$

بنابراین سرعت برابر است با:

$$v = \frac{F_0}{m\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

حال با نوشتن $v = \frac{dx}{dt}$ و انتگرال‌گیری مجدد از رابطه‌ی بالا داریم:

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{F_0}{m\lambda}(1 - e^{-\lambda t})dt$$

که پس از انتگرال‌گیری با این شرط اولیه که در $t = 0$ داریم $x = 0$، می‌دهد:

$$x = \frac{F_0}{m\lambda^2}(e^{-\lambda t} - 1) + \frac{F_0}{m\lambda}t$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۰: قطعه‌ای به وزن ۱۰ نیوتن بر روی سطح میز قرار دارد. نیروی F(t)=t (نیوتن) به صورت افقی به آن وارد و پس از ۲ ثانیه حذف می‌شود. اگر ضریب اصطکاک سطح میز $\mu_s = 0/1$ باشد، کدام گزینه زمان شروع حرکت قطعه را نشان می‌دهد؟

۱) یک ثانیه ۲) دو ثانیه ۳) سه ثانیه ۴) چهار ثانیه

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در زمان شروع اولیه چون شتاب صفر است، می‌توان گفت:

$$F = f_s \qquad f_s = \mu_s N = \mu_s mg \quad ; \quad F = \mu_s mg = (0/1)(10) = 1N \Rightarrow f(t) = t \Rightarrow t = 1s$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۱: اتومبیلی در نظر بگیرید که روی یک سطح صاف بدون اصطکاک با سرعت v_0 حرکت می‌کند و موتور آن ناگهان خاموش می‌شود. اگر مقاومت هوا متناسب با سرعت باشد، معادله مکان ـ زمان آن به چه صورت است؟

۱) $x = -\frac{mv_0}{k}$ ۲) $x = \frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$ ۳) $x = \frac{mv_0}{k}(1 + e^{-\frac{k}{m}t})$ ۴) $x = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

با توجه به قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:
$$F(v) = -kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{-k}{m}dt = \frac{dv}{v}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله خواهیم داشت:
$$\int_{0}^{t} dt = \frac{-m}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} \quad \text{و} \quad \int\frac{dv}{v} = \ln v$$

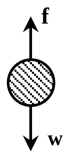
در نتیجه:
$$t = \frac{-m}{k}\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \Rightarrow v = v_0 e^{-(\frac{k}{m})t}$$

با قرار دادن $v = \frac{dx}{dt}$ و مرتب‌سازی داریم:
$$dx = v_0 e^{-(\frac{k}{m})t}dt \Rightarrow x = \frac{mv_0}{k}[1 - e^{-(\frac{k}{m})t}]$$

مثال۴۲: جسمی به جرم m از حال سکون از ارتفاع h رها می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوا به شکل $-bV$ که در آن V تندی جسم و b عدد ثابتی است، باشد، مدت زمانی که طول می‌کشد تا تندی جسم به نصف تندی حد برسد کدام است؟

۱) $\frac{2m}{b}$ ۲) $\frac{m}{2b}$ ۳) $\frac{bh}{mg}+\frac{m\ell n2}{b}$ ۴) $\frac{m\ell n2}{b}$

پاسخ: گزینه «۴» نیروی مقاومت هوا به سمت بالا و نیروی وزن به سمت پایین به جسم افتان وارد می‌شود.



$$mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int dt = \int_{0}^{\frac{v_c}{2}}\frac{mdv}{mg - bv}$$

حد بالای انتگرال را $\frac{v_c}{2}$ قرار دادیم یعنی فرض کردیم v_c سرعت حد باشد و چون در صورت سؤال ذکر شده "به دست آورید که سرعت جسم به نصف سرعت حد برسد"، لذا $\frac{v_c}{2}$ قرار می‌دهیم. سرعت حد سرعتی است که در آن شتاب جسم در حال سقوط صفر شده و جسم با سرعت ثابت ادامه مسیر را بپیماید یعنی اگر در معادله $mg - bv = ma$ به جای a صفر قرار دهیم، سرعت حد به دست می‌آید. $(v = v_c)$

$$a = 0 \to mg - bv_c = 0 \to v_c = \frac{mg}{b} \Rightarrow t = \frac{-m}{b}\ln(mg - bv)\Big|_{0}^{\frac{v_c}{2}} \Rightarrow t = -\frac{m}{b}\ln(mg - bv)\Big|_{0}^{\frac{mg}{2b}} = -\frac{m}{b}\ln\frac{1}{2} = \frac{m}{b}\ln 2$$

مثال۴۳: ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F(x) = -cx + \frac{k}{x^3}$ که k و c ثابت هستند قرار دارد. کار انجام شده روی جسم وقتی از مکان x_0 تا x جابه‌جا شود کدام است؟

پاسخ:
$$w = \int_{x_0}^{x}F(x)dx = \int_{x_0}^{x}(-cx + \frac{k}{x^3})dx = -c\frac{x^2}{2} - \frac{kx^{-2}}{2}\Big]_{x_0}^{x} = -\frac{cx^2}{2} - \frac{k}{2x^2} + \frac{cx_0^2}{2} + \frac{k}{2x_0^2} = \frac{1}{2}[c(-x^2 + x_0^2) + k(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x_0^2})]$$

مثال ۴۴: کامیونی روی جاده‌ای مستقیم به طور یکنواخت در حرکت است که راننده ناگهان ترمز می‌کند. کامیون دارای شتاب $\frac{g}{2}$ نسبت به زمین می‌شود و جعبه‌ای که در عقب کامیون قرار دارد رو به جلو می‌لغزد. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین جعبه و کف کامیون $\frac{1}{3}$ باشد، اندازه شتاب جعبه نسبت به کامیون چقدر است؟

۱) $\frac{g}{2}$ ۲) $\frac{g}{3}$ ۳) $\frac{g}{6}$ ۴) $\frac{5g}{6}$

پاسخ: گزینه «۳» این سؤال عیناً یکی از تمرینات انتهای فصل کتاب «مکانیک تحلیلی فالز» می‌باشد.

شتاب کامیون منفی است (به سمت عقب)

$$\begin{cases} f = -\mu_k N = -\mu_k mg \\ f = ma \quad \text{شتاب جعبه نسبت به زمین} \end{cases} \Rightarrow a = -\mu_k g = -\frac{g}{3}$$

شتاب کامیون $A_0 = \frac{-g}{2}$, $a = -\mu_k g \Rightarrow a = a' + A_0 \Rightarrow a' = a - A_0 \qquad a' = -\frac{g}{3} + \frac{g}{2} = \frac{g}{6}$

شتاب کامیون و جعبه نسبت به هم

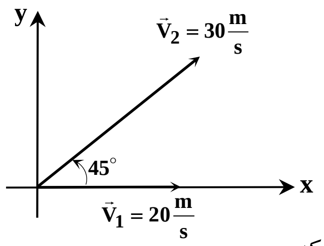
فصل چهارم

«برخورد و مرکز جرم»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال۱: توپی به جرم $۰/۵kg$ با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ به سمت راست می‌رود که شوت شده و با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ در جهت ۴۵° بالای افق بـه حرکـت در می‌آید. ضربه نیروی خالص و نیروی خالص میانگین را با فرض زمان برخورد $\Delta t = ۰/۰۱s$ به دست آورید.

☑ **پاسخ:** جهت اولیه و ثانویه حرکت توپ در شکل مقابل نشان داده شده است. لازم است بردار سـرعت ثانویـه را در دو راستای x و y تجزیه کنیم.



$$\begin{cases} v_{1x} = ۲۰\frac{m}{s} \\ v_{1y} = ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2x} = v_2 \cos ۴۵^{\circ} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۳۰ = ۱۵\sqrt{۲}\ (\frac{m}{s}) \\ v_{2y} = v_2 \sin ۴۵^{\circ} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۳۰ = ۱۵\sqrt{۲}\ (\frac{m}{s}) \end{cases}$$

از آنجا که تکانه و ضربه نیز هر دو کمیت‌های برداری هستند، از قضیه ضربه ـ تکانه در دو بعد به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$J_x = P_{2x} - P_{1x} = m(v_{2x} - v_{1x}) = ۰/۵ \times (۱۵\sqrt{۲} - ۲۰) \simeq ۰/۶\ (\frac{kg.m}{s})$$

$$J_y = P_{2y} - P_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y}) = ۰/۵ \times (۱۵\sqrt{۲} - ۰) = ۷/۵\sqrt{۲} \simeq ۱۰/۶\ (\frac{kg.m}{s})$$

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(۰/۶)^2 + (۱۰/۶)^2} = \sqrt{۰/۳۶ + ۱۱۲/۳۶} = \sqrt{۱۱۲/۷۲}\ (\frac{kg.m}{s})$$

ضربه نیروی خالص برابر $\sqrt{۱۱۰/۵}\ \frac{kg.m}{s}$ به دست آمد. برای محاسبه نیروی خالص میانگین از رابطه‌هایی به شکل $F_x = \frac{J_x}{\Delta t}$ و $F_y = \frac{J_y}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم.

$$F_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{۰/۶}{۰/۰۱} = ۶۰\ (N) \quad , \quad F_y = \frac{J_y}{\Delta t} = \frac{۱۰/۶}{۰/۰۱} = ۱۰۶۰\ (N) \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{۶۰^2 + ۱۰۶۰^2} \simeq ۱۰۶۱/۷\ (N)$$

جهت نیروی میانگین را نیز می‌توانیم به شکل روبرو تعیین کنیم:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{۱۰۶۰}{۶۰} = ۱۷/۶۶ \Rightarrow \theta = \arctan ۱۷/۶۶ \simeq ۸۶/۸^{\circ}$$

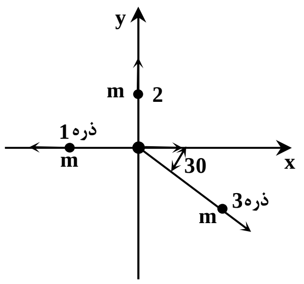
مثال۲: گلوله‌ای به جرم m با سرعت $\vec{v}$ به دیواری برخورد می‌کند و با سرعت $\frac{۱}{۲}\vec{v}$ برمی‌گردد. تغییر اندازه‌ی حرکت خطی گلوله برابر است با:

۱) $-\frac{۱}{۲}m\vec{v}$ ۲) صفر   ۳) $\frac{۱}{۲}m\vec{v}$ ۴) $\frac{۳}{۲}m\vec{v}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» علامت منفی به این دلیل است که جهت سرعت، قبل و بعد از برخورد متفاوت است.

$$v_i = -v \quad v_f = \frac{v}{۲} \qquad \Delta P = m(v_f - v_i) = m(\frac{v}{۲} - (-v)) = \frac{۳}{۲}mv$$

مثال۳: ذره‌ای به جرم ۳m با سرعت $v_۰$ در امتداد مثبت محور xها در حرکت است. ناگهان این ذره به سه ذره با جرم‌های مساوی m تقسیم مـی‌شـود و مطابق شکل ذره اول در امتداد منفی محور xها و ذره دوم در امتداد محور yها و ذره سوم در امتدادی که با محور x ها زاویه ۳۰− درجه می‌سازد حرکت می‌کنند. اگر انرژی آزاد شده در این انفجار پنج برابر انرژی جنبشی ذره اول با جرم ۳m باشد، در این صورت تندی ذره سوم تولید شده پس از انفجار برابر است با:



۱) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}v_۰$

۲) $\frac{۳\sqrt{۳} + \sqrt{۵۱}}{۴}v_۰$

۳) $\frac{\sqrt{۳} + \sqrt{۳۵}}{۴}v_۰$

۴) $۲\sqrt{۳}v_۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به سراغ پایستگی انرژی و تکانه خطی می‌رویم:

$$\sum P_{ix}=\sum P_{fx}\Rightarrow 3mv_0=-mv_1+mv_3\cos30^\circ\Rightarrow v_1=\frac{\sqrt{3}}{2}v_3-3v_0$$

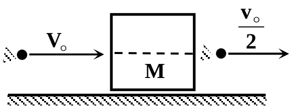
$$\sum P_{iy}=\sum P_{fy}\Rightarrow 0=+mv_2-mv_3\sin30^\circ\Rightarrow v_2=\frac{1}{2}v_3$$

در معادله انرژی هر یک از سرعت‌های v_1 و v_2 را بر حسب v_0 و v_3 جایگزین می‌کنیم.

$$E_f=5E_i\Rightarrow\frac{m}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)=5(\frac{3m}{2}v_0^2)$$

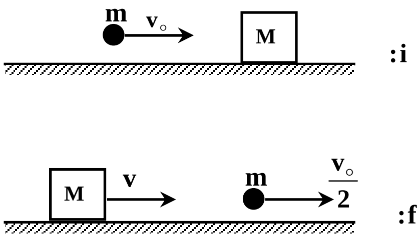
$$\frac{3}{4}v_3^2+9v_0^2-3\sqrt{3}V_0V_3+\frac{V_3^2}{4}+V_3^2=15v_0^2\Rightarrow 2v_3^2-3\sqrt{3}v_0v_3-6v_0^2=0\Rightarrow v_3=\frac{3\sqrt{3}v_0+\sqrt{27v_0^2+48v_0^2}}{4}=2\sqrt{3}v_0$$

مثال۴: گلوله کوچکی به جرم m مطابق شکل با سرعت اولیه v_0 به یک نقطه به جرم $M=2m$ برخورد می‌کند و پس از سوراخ کردن آن با سرعت نهایی $\frac{v_0}{2}$ از آن خارج می‌شود. حرارت ایجاد شده در این پدیده چقدر است؟



۱) $\frac{5}{16}mv_0^2$
۲) $\frac{7}{16}mv_0^2$
۳) $\frac{3}{4}mv_0^2$
۴) $\frac{5}{8}mv_0^2$

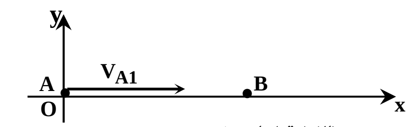
☑ **پاسخ:** گزینه «۱»



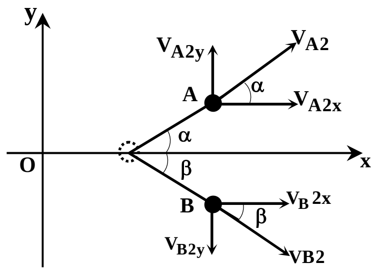
$$\begin{cases}E_i=E_f+Q\\P_i=P_f\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}m(\frac{v_0^2}{4})+Q & (1)\\ mv_0=Mv+m\frac{v_0}{2} & (2)\end{cases}$$

$$M=2m,\ (1),(2)\Rightarrow Q=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}(2m)\frac{v_0^2}{16}-\frac{1}{8}mv_0^2=\frac{5}{16}mv_0^2$$

مثال۵: شکل مقابل دو جسم A و B با جرم‌های $m_A=5kg$ و $m_B=3kg$ را نشان می‌دهد. جسم B ساکن است و جسم A با سرعت افقی $2\frac{m}{s}$ به آن برخورد می‌کند. پس از برخورد، جسم A با سرعت $1\frac{m}{s}$ در جهتی با زاویه $\alpha=30^\circ$ نسبت به جهت اولیه حرکت می‌کند. سرعت نهایی B چقدر است؟



(الف) قبل از برخورد



(ب) بعد از برخورد

☑ **پاسخ:** داریم:

$$\begin{cases}v_{A1x}=2\frac{m}{s}\\v_{A1y}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}v_{B1x}=0\\v_{B1y}=0\end{cases}$$

به سیستم هیچ نیروی خارجی وارد نمی‌شود، بنابراین تکانه کل پایسته می‌ماند. اصل پایستگی تکانه را به زبان ریاضی به صورت زیر می‌نویسیم:

در راستای x: $m_Av_{A1x}+m_Bv_{B1x}=m_Av_{A2x}+m_Bv_{B2x}$ (۱)

در راستای y: $m_Av_{A1y}+m_Bv_{B1y}=m_Av_{A2y}+m_Bv_{B2y}$ (۲)

زاویه α مشخص است (30°) ولی زاویه β را نداریم. مجهول اصلی مسئله v_{B2} است که مؤلفه‌های v_{B2x} و v_{B2y} در معادله‌های (۱) و (۲) دیده می‌شوند.

$$(1)\Rightarrow v_{B2x}=\frac{m_Av_{A1x}+m_Bv_{B1x}-m_Av_{A2x}}{m_B}=\frac{5\times2+3\times0-5\times1\times\cos30^\circ}{3}=1/89\,(\frac{m}{s})\qquad(3)$$

$$(2)\Rightarrow v_{B2y}=\frac{m_Av_{A1y}+m_Bv_{B1y}-m_Av_{A2y}}{m_B}=\frac{5\times0+3\times0-5\times1\times\sin30^\circ}{3}=-0/83\,(\frac{m}{s})\qquad(4)$$

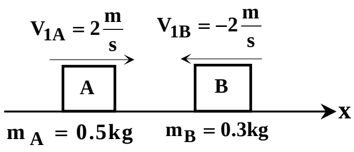
همان طور که از رابطه‌های (۳) و (۴) پیداست، جسم B بعد از برخورد به سمت جلو و پایین (مطابق شکل ب) حرکت می‌کند. بزرگی $v_{B۲}$ برابر است با:

$$v_{B۲}=\sqrt{v_{B۲x}^{۲}+v_{B۲y}^{۲}}=\sqrt{(۱/۸۹)^{۲}+(-۰/۸۳)^{۲}}=۲/۱\,(\frac{m}{s})$$

و زاویه‌ای که با سوی مثبت محور x ها می‌سازد برابر است با:

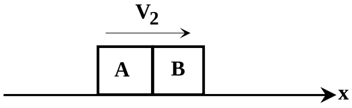
$$\beta=\arctan\frac{v_{B۲y}}{v_{B۲x}}=\arctan\frac{-۰/۸۳}{۱/۸۹}=-۲۴^{\circ}$$

مثال۶: دو جسم A و B با سرعت‌های اولیه $۲\frac{m}{s}$ روی سطح بدون اصطکاکی به طرف هم حرکت کرده و با هم برخورد می‌کنند. اگر دو جسم بعد از برخورد به هم بچسبند، سرعت نهایی مشترک $v_۲$ را یافته و انرژی جنبشی اولیه و نهایی را با هم مقایسه کنید.
(جرم‌ها و سرعت‌های اولیه در شکل نشان داده شده‌اند.)



(الف) قبل از برخورد

پاسخ: از آنجایی که این برخورد کاملاً ناکشسان است پایستگی تکانه برقراراست ولی انرژی جنبشی پایسته نمی‌ماند. از آنجا که این حرکت یک بعدی است محور x را در راستای حرکت در نظر می‌گیریم و یک بار نوشتن اصل پایستگی تکانه کافی است.



(ب) بعد از برخورد

$$m_A v_{۱A}+m_B v_{۱B}=(m_A+m_B)v_۲ \;\Rightarrow\; v_۲=\frac{m_A v_{۱A}+m_B v_{۱B}}{m_A+m_B}$$

$$\Rightarrow\; v_۲=\frac{(۰/۵)(۲)+(۰/۳)(-۲)}{۰/۵+۰/۳}=۰/۵\,(\frac{m}{s})$$

مثبت بودن $v_۲$ به این معنی است که هر دو جسم پس از برخورد به سمت راست حرکت می‌کنند.
انرژی جنبشی اجسام A و B قبل از برخورد عبارت است از:

انرژی جنبشی کل قبل از برخورد:

$$\left.\begin{aligned}K_A&=\frac{۱}{۲}m_A v_{۱A}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۰/۵)(۲)^{۲}=۱(J)\\ K_B&=\frac{۱}{۲}m_B v_{۱B}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۰/۳)(-۲)^{۲}=۰/۶(J)\end{aligned}\right\}\Rightarrow K_۱=K_A+K_B=۱/۶(J)$$

انرژی جنبشی بعد از برخورد عبارت است از:

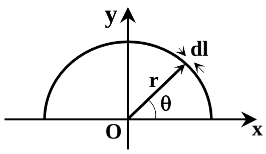
$$K_۲=\frac{۱}{۲}(m_A+m_B)v_۲^{۲}=\frac{۱}{۲}(۰/۵+۰/۳)(۰/۵)^{۲}=۰/۱\,(J)$$

نسبت انرژی جنبشی نهایی به انرژی جنبشی اولیه سیستم برابر است با:

$$\frac{K_۲}{K_۱}=\frac{۰/۱}{۱/۶}=\frac{۱}{۱۶}$$

بنابراین $\frac{۱۵}{۱۶}$ انرژی جنبشی طی این برخورد تلف شده است.

مثال۷: مختصات مرکز جرم یک میله با چگالی خطی λ را که به صورت نیم‌دایره در آمده است به دست آورید.



پاسخ: چون با نیم‌دایره در صفحه x-y سروکار داریم بهتر است از دستگاه مختصات قطبی استفاده کنیم. چرا که در مسائل مربوط بـه مرکـز جـرم، انتخاب دستگاه مختصات مناسب اهمیت زیادی دارد. با توجه به شکل مسئله داریم:

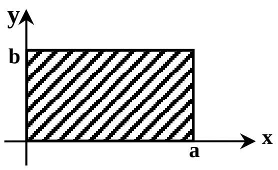
$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},\ ۰\le\theta\le\pi\ \begin{cases}dm=\lambda dl\\ dl=rd\theta\end{cases}\Rightarrow\ dm=\lambda rd\theta$$

$$x_{cm}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int r\cos\theta\times\lambda rd\theta}{\int\lambda rd\theta}=\frac{\lambda r^{۲}\int_{۰}^{\pi}\cos\theta d\theta}{\lambda r\int_{۰}^{\pi}d\theta}\Rightarrow\ x_{cm}=\frac{r\times\sin\theta|_{۰}^{\pi}}{\theta|_{۰}^{\pi}}=\frac{r(\sin\pi-\sin۰)}{\pi-۰}=۰$$

$$y_{cm}=\frac{\int ydm}{\int dm}=\frac{\int r\sin\theta\times\lambda rd\theta}{\int\lambda rd\theta}=\frac{\lambda r^{۲}\int_{۰}^{\pi}\sin\theta d\theta}{\lambda r\int_{۰}^{\pi}d\theta}\Rightarrow\ y_{cm}=\frac{r\times[-\cos\theta]_{۰}^{\pi}}{\theta|_{۰}^{\pi}}=\frac{r\times(-\cos\pi+\cos۰)}{\pi-۰}=\frac{۲r}{\pi}$$

بنابراین مرکز جرم این میله بر روی محور yها در نقطه‌ای به مختصات $(۰,\frac{۲r}{\pi})$ قرار دارد. توجه داشته باشید که مرکز جرم یک جسم لزوماً روی خود آن جسم قرار ندارد.

مثال۸: مطلوب است مرکز جرم صفحه‌ای مستطیل شکل به ابعاد a و b که چگالی سطحی آن با رابطه $\sigma = \sigma_\circ(x^۲y)$ تغییر می‌کند. ($\sigma_\circ$ ثابت)



☑ **پاسخ:** از آنجا که این مسئله دو بعدی است از $dm = \sigma ds$ استفاده می‌کنیم. دستگاه مختصات مناسب برای این مسئله، دستگاه دکارتی است.

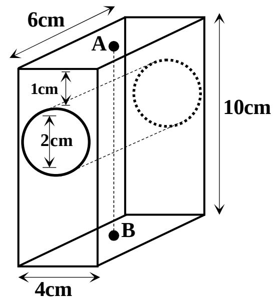
$$\begin{cases} dm = \sigma ds \\ ds = dxdy \end{cases} \Rightarrow dm = \sigma dxdy = \sigma_\circ(x^۲y)dxdy$$

$$x_{cm} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\iint x(\sigma_\circ x^۲y)dxdy}{\iint \sigma_\circ(x^۲y)dxdy} = \frac{\sigma_\circ\int_\circ^a x^۳dx\int_\circ^b ydy}{\sigma_\circ\int_\circ^a x^۲dx\int_\circ^b ydy} \Rightarrow x_{cm} = \frac{\frac{a^۴}{۴}\times\frac{b^۲}{۲}}{\frac{a^۳}{۳}\times\frac{b^۲}{۲}} = \frac{۳}{۴}a$$

$$y_{cm} = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{\iint y(\sigma_\circ x^۲y)dxdy}{\iint \sigma_\circ(x^۲y)dxdy} = \frac{\sigma_\circ\int_\circ^a x^۲dx\int_\circ^b y^۲dy}{\sigma_\circ\int_\circ^a x^۲dx\int_\circ^b ydy} \Rightarrow y_{cm} = \frac{\frac{a^۳}{۳}\times\frac{b^۳}{۳}}{\frac{a^۳}{۳}\times\frac{b^۲}{۲}} = \frac{۲}{۳}b$$

پس مرکز جرم این جسم نقطه‌ای است به مختصات $(\frac{۳}{۴}a, \frac{۲}{۳}b)$.

مثال۹: مکعب مستطیلی به ابعاد $۶\times۴\times۱۰\ cm^۳$ داریم که از آن استوانه‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر را برداشته‌ایم. مختصات مرکز جرم جسم باقیمانده را بیابید.



☑ **پاسخ:** ابتدا استوانه برداشته شده را سرجایش می‌گذاریم. در این حالت یک جسم مرکب خواهیم داشت. جسم مرکب، یک مکعب خواهد بود که به راحتی می‌توانیم مرکز جرم آن را پیدا کنیم و اجزای این جسم مرکب، یک استوانه و بخشی از مکعب که با برداشتن استوانه، باقی می‌ماند، می‌باشند. حال مرکز جرم استوانه نیز به آسانی قابل محاسبه است که در نتیجه از رابطه‌ی مربوط به مرکز جرم اجسام مرکب، می‌توان مرکز جرم قسمت باقی‌مانده را به دست آورد.

مکعب دارای سه، صفحه‌ی تقارن می‌باشد که نقطه‌ی اشتراک آن‌ها در مرکز مکعب است. در نتیجه اگر محور متقارن AB را برای مکعب رسم کنیم و دستگاه مختصات را روی این محور بنا کنیم به گونه‌ای که نقطه‌ی A مرکز دستگاه و محور AB، محور z دستگاه باشد، آنگاه مختصات مرکز مکعب که همان مرکز جرمش می‌باشد در این دستگاه مختصات، عبارت است از:

$$R_۱ : \begin{cases} x_۱ = \circ \\ y_۱ = \circ \\ z_۱ = ۵(cm) \end{cases} \qquad M_۱ = \rho V_۱ = \rho(۴\times۶\times۱۰)$$

اما مرکز جرم استوانه در این دستگاه مختصات عبارت است از:

$$R_۲ = \begin{cases} x_۲ = \circ \\ y_۲ = \circ \\ z_۲ = ۲(cm) \end{cases} \qquad M_۲ = \rho V_۲ = \rho(\pi\times(۱)^۲\times۶)$$

حال با توجه به رابطه‌ی مربوط به محاسبه‌ی مرکز جرم اجسام مرکب، داریم:

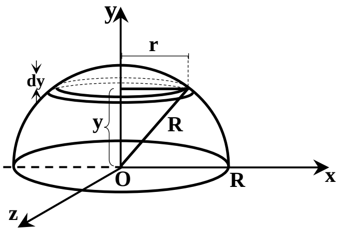
$$\begin{matrix} M_۱R_۱ = M_۲R_۲ + M_۳R_۳ \Rightarrow \\ M_۳ = \rho(V_۱ - V_۲) = \rho(۲۴\circ - ۶\pi) \end{matrix} \begin{cases} M_۱x_۱ = M_۲x_۲ + M_۳x_۳ \rightarrow x_۳ = \dfrac{M_۱\times\circ - M_۲\times\circ}{M_۳} = \circ \\ M_۱y_۱ = M_۲y_۲ + M_۳y_۳ \rightarrow y_۳ = \dfrac{M_۱\times\circ - M_۲\times\circ}{M_۳} = \circ \\ M_۱z_۱ = M_۲z_۲ + M_۳z_۳ \rightarrow z_۳ = \dfrac{(۲۴\circ\rho)\times۵ - (۶\pi\rho)\times۲}{\rho(۲۴\circ - ۶\pi)} \Rightarrow z_۳ = \dfrac{۱۲\circ\circ - ۱۲\pi}{۲۴\circ - ۶\pi} = ۵/۲۵۵(cm) \end{cases}$$

در نتیجه مرکز جرم خواسته شده در صورت سؤال، عبارت است از:

$$R_۳ : \begin{cases} x_۳ = \circ \\ y_۳ = \circ \\ z_۳ = ۵/۲۵۵(cm) \end{cases}$$

مثال۱۰: مطلوب است مکان مرکز جرم یک نیمکره همگن به جرم M و شعاع R.

☑ **پاسخ:** از آن جا که این نیم‌کره دارای محور تقارنی منطبق بر محور yها است بنابراین مرکز جرم حتماً روی محور yها است و داریم:



$$x_{cm}=\circ\ ,\ z_{cm}=\circ\ ,\ y_{cm}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

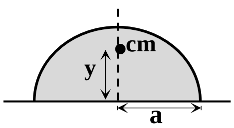
$$\int dm=M\ \Rightarrow\ y_{cm}=\frac{۱}{M}\int y\rho dV=\frac{\rho}{M}\int y(\pi r^{۲})dy$$

در رابطه‌ی بالا به جای dV از حاصل‌ضرب مساحت دایره‌ای به شعاع r در dy استفاده کردیم. طبق شکل مسئله می‌توانیم از قضیه فیثاغورث استفاده کنیم:

$$r^{۲}=R^{۲}-y^{۲}\Rightarrow\ y_{cm}=\frac{\rho\pi}{M}\int_{y=\circ}^{R}y(R^{۲}-y^{۲})dy\ ,\ \rho=\frac{M}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}\ \ ;\ \ y_{cm}=\frac{\pi}{M}\times\frac{M}{\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}}[\int_{y=\circ}^{R}yR^{۲}dy-\int_{y=\circ}^{R}y^{۳}dy]$$

$$y_{cm}=\frac{۳}{۲R^{۳}}[\frac{R^{۴}}{۲}-\frac{R^{۴}}{۴}]=\frac{۳}{۲R^{۳}}(\frac{R^{۴}}{۴})\ \Rightarrow\ y_{cm}=\frac{۳}{۸}R$$

مثال۱۱: مکان مرکز جرم یک صفحه نیم‌دایره‌ی همگن با ضخامت ناچیز به شعاع a را محاسبه کنید.

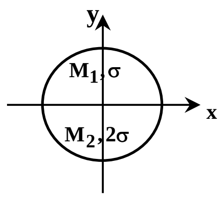


☑ **پاسخ:** بدیهی است که با دوران صفحه‌ی نیم‌دایره‌ای حول محور Δ، یک کره‌ی توپر ایجاد می‌شود که حجم آن طبق قضیه پاپوس محاسبه می‌شود. سطح A نیز برابر نصف مساحت یک دایره است.

$$V=۲\pi y_{cm}A\ \Rightarrow\ \frac{۴}{۳}\pi a^{۳}=۲\pi y_{cm}\frac{\pi a^{۲}}{۲}\ \Rightarrow\ y_{cm}=\frac{۴a}{۳\pi}$$

مثال۱۲: قرص دایره‌ای شکلی به شعاع a در صفحه xy چنان قرار دارد که مرکز آن در مبدأ مختصات است. نیمه‌ی بالای محور x قرص دارای چگالی σ و نیمه‌ی پایینی آن دارای چگالی ۲σ است. مرکز جرم این قرص را بیابید.

☑ **پاسخ:** برای حل این مسئله می‌توانیم از قضیه پاپوس ۲ استفاده کنیم. چون هر نیم‌دایره چگالی سطحی خودش را دارد پس شکل را به دو بخش تقسیم می‌کنیم و مرکز جرم هر نیم‌دایره را جداگانه محاسبه می‌کنیم.



$$M_{۱}:V=۲\pi y_{۱cm}A\ \Rightarrow\ \frac{۴}{۳}\pi a^{۳}=۲\pi y_{۱cm}\frac{\pi a^{۲}}{۲}\ \Rightarrow\ y_{۱cm}=\frac{۴a}{۳\pi}$$

$$M_{۲}:V=۲\pi y_{۲cm}A\ \Rightarrow\ \frac{۴}{۳}\pi a^{۳}=-۲\pi y_{۲cm}\frac{\pi a^{۲}}{۲}\ \Rightarrow\ y_{۲cm}=\frac{-۴a}{۳\pi}$$

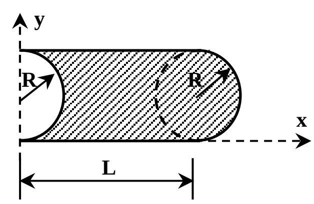
علامت منفی در بالا به این دلیل است که مرکز جرم نیم‌دایره پایینی در پایین محور xها است.

$$My_{cm}=M_{۱}y_{۱cm}+M_{۲}y_{۲cm}\ \Rightarrow\ (\frac{\pi a^{۲}}{۲}\times\sigma+\frac{\pi a^{۲}}{۲}\times۲\sigma)y_{cm}=\frac{\pi a^{۲}}{۲}\times\sigma(\frac{۴a}{۳\pi})-\frac{\pi a^{۲}}{۲}\times۲\sigma(\frac{۴a}{۳\pi})$$

$$\Rightarrow\frac{۳\pi a^{۲}\sigma}{۲}\times y_{cm}=\frac{۲a^{۳}\sigma}{۳}-\frac{۴a^{۳}\sigma}{۳}\Rightarrow\ \frac{۳\pi a^{۲}\sigma}{۲}\times y_{cm}=\frac{-۲a^{۳}\sigma}{۳}\ \Rightarrow\ y_{cm}=\frac{-۴a}{۹\pi}$$

منفی شدن مکان مرکز جرم به این معنی است که مرکز جرم روی نیم‌دایره پایینی قرار دارد.

مثال۱۳: از ورقه‌ای همگن، قطعه‌ای به جرم m مطابق شکل هاشور خورده زیر بریده شده است. مختصات مرکز جرم این قطعه نسبت به مبدأ O چیست؟



۱) $x_{CM}=\frac{L}{۲}+\frac{\pi R}{۲}\ ,y_{CM}=R$ ۲) $x_{CM}=\frac{L}{۲}+\frac{\pi R}{۴}\ ,y_{CM}=R$

۳) $x_{CM}=\frac{L}{۲}+\frac{\pi R}{۲}\ ,y_{CM}=\frac{R}{۲}$ ۴) $x_{CM}=\frac{L}{۲}\ ,y_{CM}=R$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» محور تقارن ورقه خط $y=R$ است لذا: $Y_{cm}=R$.

این شکل ترکیب دو شکل است: یکی دایره‌ای که مرکز جرم آن در $Y_{cm}=R$ و $x_{1cm}=L$ قرار دارد و دیگری مستطیلی که دو نیم‌دایره از دو طرف آن جدا شده است و مرکز جرم آن در $Y_{cm}=R$ و $X_{2cm}=\frac{L}{2}$ قرار دارد. پس می‌توان گفت:

$$x_{cm}=\frac{m_1x_{1cm}+m_2x_{2cm}}{m_1+m_2}=\frac{\pi R^2\sigma L+(2RL-\pi R^2)\sigma(\frac{L}{2})}{(2RL)\sigma}\quad ; \quad x_{cm}=\frac{\pi R}{2}+\frac{L}{2}-\frac{\pi R}{4}=\frac{\pi R}{4}+\frac{L}{2}$$

توضیح: در نوشتن رابطه بالا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که چگالی سطحی(σ) برابر است با نسبت جرم به مساحت $(\sigma=\frac{m}{A})$.

m_1 جرم دایره که برابر است با: $\sigma\pi R^2=\sigma A_1$. m_2 جرم مستطیلی که دو نیم‌دایره هرکدام به مساحت $\frac{\pi R^2}{2}$ از دو طرف آن جدا شده (ابعاد مستطیل L و $2R$ است) و m_2 برابر است با σA_2.

$$\sigma A_2=(\underbrace{2RL}_{\text{مساحت مستطیل}}-\underbrace{(2)\frac{\pi R^2}{2}}_{\text{جمع مساحت دو نیم‌دایره}})$$

مثال۱۴: یک قطره باران با جرم اولیه M_0 از حالت سکون تحت اثر گرانش شروع به سقوط می‌کند. فرض کنید که جرم این قطره با آهنگی متناسب با حاصل‌ضرب جرم لحظه‌ای در سرعت لحظه‌ای آن در ابر افزایش می‌یابد.

$$\frac{dM}{dt}=kM\vec{v}$$

که k مقدار ثابتی است. نشان دهید سرعت ذره سرانجام ثابت می‌شود.

☑ **پاسخ:** با توجه به قانون دوم نیوتن می‌توان گفت:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

جرم اولیه قطره باران M_0 است که با آهنگ $\frac{dM}{dt}=kM\vec{v}$ افزایش می‌یابد. جهت مثبت را به سمت پایین در نظر می‌گیریم:

$$M(t)g\Delta t=P(t+\Delta t)-P(t)$$

$$M(t)g\Delta t=(M(t)+\frac{dM}{dt}\Delta t)v(t+\Delta t)-M(t)v(t)\ \ -KM(t)V(t)V(t+\Delta t)\Delta t+M(t)g\Delta t=M(t)(v(t+\Delta t)-v(t))$$

اگر Δt به سمت صفر میل کند (سرعت حدی)، داریم:

$$g-kv^2(t)=\frac{dv}{dt}\ \Rightarrow\ kv_f^2=g\ \Rightarrow\ v_f=\sqrt{\frac{g}{k}}$$

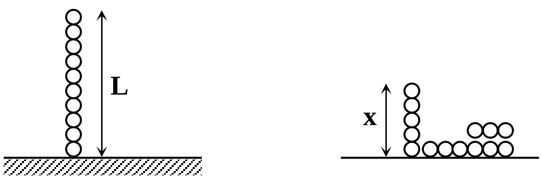
$$g-kv^2=\frac{dv}{dt}\ \Rightarrow\ \int dt=\int\frac{dv}{g-kv^2(t)}\ \Rightarrow\ t=[\frac{1}{\sqrt{gk}}\tanh^{-1}\frac{v(gk)^{\frac{1}{2}}}{g}]_0^v\Rightarrow\ v=\sqrt{\frac{g}{k}}\tanh(\sqrt{gk}t)$$

اگر $t\to\infty$ خواهیم داشت:

$$\boxed{v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}}$$

از آن‌جایی‌که y و k هر دو مقدار ثابتی هستند پس $v(t)$ مقداری ثابت است.

مثال۱۵: زنجیری به طول l و جرم M به طور قائم به نحوی نگه داشته شده است که انتهای پایینی آن همان طور که در شکل نشان داده شده سطح میز افقی را لمس می‌کند. اگر انتهای بالایی زنجیر رها شود نیروی وارد بر سطح میز به هنگام سقوط بر حسب طولی از زنجیر که بالای میز در هوا است کدام است؟



۱) $3wl$
۲) $\frac{w(l-x)}{3}$
۳) $3w(l-x)$
۴) $w(l-x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرض می‌کنیم چگالی طولی زنجیر λ باشد، پس خواهیم داشت:

$$\lambda=\frac{M}{L}$$

در زمان t طول x زنجیر در هوا و طول $(l-x)$ آن روی میز است و زنجیر هنوز در حال سقوط است. در زمان t وزن قسمت روی میز $\lambda(L-x)g$ که رو به پایین است و یک عکس‌العمل F ایجاد می‌کند.

بنابراین نیروی وارد بر زنجیر عبارت است از:

$$F_{ext}=F-\lambda(L-x)g \qquad (1)$$

جرم روی میز حاصل از سقوط آزاد با آهنگ $\frac{dm}{dt}=\lambda v$ افزایش می‌یابد که v سرعت زنجیر در زمان t است. بنا بر قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{ext}=\frac{d}{dt}(mv)=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}=0+v(\lambda v) \qquad (2)$$

با برابر قرار دادن معادلات ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$F-\lambda(L-x)g=\lambda v^2 \;\Rightarrow\; F=\lambda[(L-x)g+v^2] \qquad (3)$$

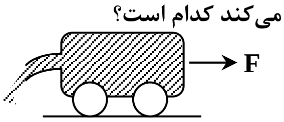
سرعت زنجیر در بالای میز برابر با سرعت ناشی از سقوط آزاد بوده و عبارت است از $v=\sqrt{2g(L-x)}$ که با قرار دادن این مقدار در معادله (۳) خواهیم داشت:

$$F=\lambda[(L-x)g+2g(L-x)]=3\lambda g(L-x)$$

که با قرار دادن $\lambda g=w$ داریم:

$$F=3w(L-x)$$

مثال۱۶: تانکر پر از آبی در جاده مستقیمی در حرکت است. آب از انتهای تانکر و موازی راستای جاده با تندی $15\frac{m}{s}$ نسبت به زمین و آهنگ ثابت $\frac{10\,kg}{s}$ خارج می‌شود. توان نیروی افقی F در لحظه دلخواه t برای تانکر که با سرعت یکنواخت $20\frac{m}{s}$ در جاده حرکت می‌کند کدام است؟



۱) ۱۲۲۵۰ وات ۲) ۱۰۰۰ وات

۳) ۳۰۰۰ وات ۴) ۷۰۰۰ وات

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم توان از رابطه $\vec{P}=F\vec{v}$ به دست می‌آید. از طرفی چون با سیستم با جرم متغیر روبه‌رو هستیم داریم: $\vec{F}=m\dot{\vec{v}}-\vec{u}\dot{m}$

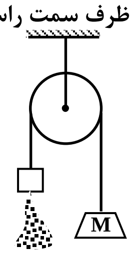
از آنجا که تانکر دارای سرعت ثابت است $\dot{\vec{v}}=0$ می‌باشد. همچنین:

$$u=15\vec{i}-20\vec{i}=-5\vec{i}\,\frac{m}{s}$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$F=-u\dot{m}=5\times10=50\,N\vec{i} \;\Rightarrow\; p=Fv=50\times20=1000\ \text{watts}$$

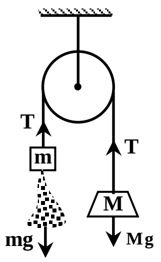
مثال۱۷: در شکل زیر دو ظرف حاوی ماسه هر دو به جرم کل M نشان داده شده است، که از طریق طناب سبکی که از روی یک قرقره بدون جرم و اصطکاک می‌گذرد، به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر زیر ظرف سمت چپ سوراخ شود و ماسه از آن با آهنگ ثابت k بیرون بریزد، شتاب ظرف سمت راست پس از گذشت مدت زمان t_0 چقدر خواهد شد؟



۱) $\frac{kt_0}{M+kt_0}g$ ۲) $\frac{M-kt_0}{M+kt_0}g$

۳) $\frac{kt_0}{2M-kt_0}g$ ۴) $\frac{2kt_0}{M-kt_0}g$

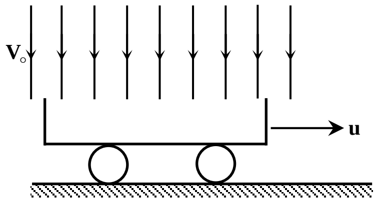
پاسخ: گزینه «۳»



$$\frac{dm}{dt}=-k\Rightarrow m'=M-kt_0\Rightarrow\begin{cases}Mg-T=Ma\\ T-m'g=m'a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Mg-T=Ma\\ T-(M-kt_0)g=(M-kt_0)a\end{cases}\Rightarrow a=\frac{kt_0}{2M-kt_0}g$$

مثال۱۸: از دید ناظر ساکن روی زمین، باران به طور منظم و یکنواخت در راستای قائم با شار B کیلوگرم در واحد زمان از واحد سطح می‌بارد. سرعت قطره‌های باران نسبت به این ناظر مقدار ثابت $v_\circ$ است. واگن سربازی به مساحت A در جاده‌ای افقی با سرعت ثابت u در حرکت است. نیروی افقی لازم برای ثابت نگه داشتن سرعت واگن چقدر است؟



۱) $BA\sqrt{u^۲+v_\circ^۲}$ ۲) BAu

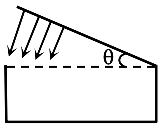
۳) $\dfrac{BAv_\circ u}{\sqrt{|u^۲-v_\circ^۲|}}$ ۴) $\dfrac{BAv_\circ u}{\sqrt{u^۲+v_\circ^۲}}$

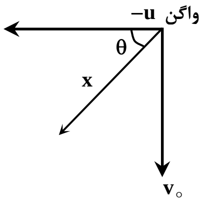
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» رابطه قانون دوم نیوتن برای جرم متغیر را می‌نویسیم (در راستای افقی):

$$F_{x(Ext)} = m\frac{dv_x}{dt} + v_{rel}\frac{dm}{dt} \quad V_x = u \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \circ$$

تعریف شار $\vec{B}.\vec{A} = \dfrac{dm}{dt} = BA\cos\theta$

$A\cos\theta$ سطحی است که ناظر داخل واگن می‌بیند.





$$\cos\theta = \frac{u}{x} = \frac{u}{\sqrt{v_\circ^۲+u^۲}} \quad , \quad v_{rel} = \sqrt{u^۲+v_\circ^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = B\frac{Au}{\sqrt{v_\circ^۲+u^۲}} \Rightarrow F_{x(Ext)} = \sqrt{v_\circ^۲+u^۲} \times \frac{BAu}{\sqrt{v_\circ^۲+u^۲}} = BAu$$

فصل پنجم

«دوران»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال۱: چرخ لنگر یک ماشین بخار با سرعت زاویه‌ای ۱۵۰ دور بر دقیقه می‌چرخد. وقتی بخار متوقف می‌شود اصطکاک یاتاقان‌ها و مقاومت هوا موجب توقف چرخ بعد از ۲ ساعت می‌شود. شتاب کل در لحظه‌ای که چرخ با سرعت زاویه‌ای ۷۰ دور بر دقیقه می‌چرخد، در فاصله ۰/۵ متری از محور چرخ کدام است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۲۴۷/۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$a = \sqrt{a_T^۲ + a_R^۲} = \sqrt{(r\alpha)^۲ + (r\omega^۲)^۲}$$

لازم است مقدار ω و α را محاسبه کنیم.

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_\circ}{t} = \frac{\circ - ۱۵\circ \times \frac{۲\pi}{۶\circ}}{۲ \times ۳۶\circ\circ} \simeq \frac{۱۵}{۷۲\circ\circ} = ۲/\circ ۸ \times ۱\circ^{-۳} \ (\frac{rad}{s^۲}) \quad , \quad a_T = r\alpha = \circ/۵ \times ۲/\circ۸ \times ۱\circ^{-۳} = ۱/\circ۴ \times ۱\circ^{-۳} \ (\frac{m}{s^۲})$$

از طرفی در لحظه مربوطه $\omega = ۷\circ \times \frac{۲\pi}{۶\circ} \simeq ۷(\frac{rad}{s})$ بوده و $r \times \omega^۲ = \circ/۵ \times ۴۹ = ۲۴/۵ \ (\frac{m}{s^۲})$ می‌باشد. با جایگذاری خواهیم داشت:

$$a = \sqrt{(۱/\circ۴ \times ۱\circ^{-۳})^۲ + (۲۴/۵)^۲} = ۲۴/۵ \ (\frac{m}{s^۲})$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: جسمی به جرم **2kg** دارای مکان $\mathbf{r = ۳t^۲\hat{i} + ۲t\hat{j}}$ می‌باشد. گشتاور نیروی وارد بر جسم کدام است؟

۱) $۲۴t$ ۲) $۱۲t$ ۳) $-۲۴t$ ۴) $-۱۲t$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه میان گشتاور نیرو و تکانه می‌توان نوشت:

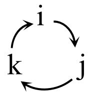
$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{P})}{dt}$$

و می‌دانیم $P = mv = m\dot{r}$ با جایگذاری در رابطه گشتاور می‌توان نوشت:

$$\tau = \frac{d}{dt}(r \times m\dot{r}) = \frac{d}{dt}۲((۳t^۲\hat{i} + ۲t\hat{j}) \times (۶t\hat{i} + ۲\hat{j})) = \frac{d}{dt}(۱۲t^۲\hat{k} - ۲۴t^۲\hat{k}) = \frac{d}{dt}(-۱۲t^۲\hat{k}) = -۲۴t\hat{k}$$

یادآوری: رابطه ضرب خارجی دو بردار به صورت زیر است:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

و نیز رابطه چرخشی بین مؤلفه‌های $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ برقرار است. یعنی  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ و $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ و $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: معادله حرکت پرتابه‌ای به جرم **m** چنین است: $\vec{r} = \frac{۱}{۲}\vec{g}t^۲ + \vec{v}_\circ t$ اندازه حرکت زاویه‌ای آن برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}mgt^۲\vec{v}_\circ$ ۲) $\frac{۱}{۲}m(\vec{v}_\circ \times \vec{g})t^۲$ ۳) $\vec{r} \times (m\vec{g}t)$ ۴) $\frac{۳}{۲}m(\vec{v}_\circ \times g)t^۲$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم تعریف اندازه حرکت خطی $\vec{P} = m\vec{v}$ و اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

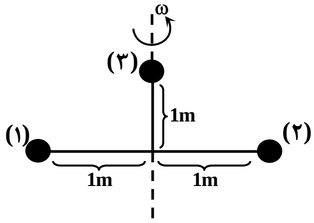
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \ , \ \dot{r} = \vec{g}t + \vec{v}_\circ \Rightarrow \vec{L} = m(\frac{\vec{g}t^۲}{۲} + \vec{v}_\circ t) \times (\vec{g}t + \vec{v}_\circ)$$

$$\vec{L} = m(\frac{۱}{۲}t^۲\vec{g} \times \vec{v}_\circ + t^۲\vec{v}_\circ \times \vec{g}) \xrightarrow{\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}} \Rightarrow \vec{L} = \frac{m}{۲}(\vec{v}_\circ \times \vec{g})t^۲$$

مثال۴: جسمی را شامل سه کره کوچک به جرم $5\,kg$ در نظر بگیرید که به وسیله ۳ میله سبک و صلب به طول یک متر از هم جدا شده‌اند. لختی دورانی جسم حول محوری که از جسم (۳) می‌گذرد و عمود بر میله‌های واصل کره‌های (۱) و (۲) می‌باشد، کدام است؟

۱) $۱۵\,kgm^۲$ ۲) $۱۰\,kgm^۲$ ۳) $۵\,kgm^۲$ ۴) $۲۰\,kgm^۲$

پاسخ: گزینه «۲»

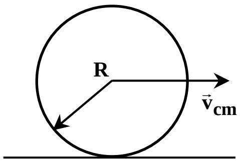


چون جسم (۳) روی محور قرار گرفته پس $m_۳r^۲=۰$ است. بنابراین لختی دورانی سیستم برابر است با:

$$I=\sum_{i=۱}^{۳}m_ir_i^۲=m_۱r_۱^۲+m_۲r_۲^۲+m_۳r_۳^۲=۵\times۱^۲+۵\times۱^۲+۰=۱۰\,kgm^۲$$

مثال۵: کره‌ای بر روی سطح افقی بدون لغزش با سرعت ثابتی می‌غلتد. نسبت انرژی جنبشی دورانی آن به انرژی جنبشی کل آن برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$



پاسخ: گزینه «۱» ابتدا جمله انرژی جنبشی دورانی و انتقالی را می‌یابیم:

$$K_{rot}=\frac{۱}{۲}I_{cm}\omega^۲=\frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۵}MR^۲)\omega^۲=\frac{۱}{۵}MR^۲\omega^۲$$

$$K_{tot}=K_{rot}+K_{tran}=\frac{۱}{۵}MR^۲\omega^۲+\frac{۱}{۲}mv_{cm}^۲\xrightarrow[\text{شرط غلتش}]{v=R\omega}K_{tot}=\frac{۱}{۵}MR^۲\omega^۲+\frac{۱}{۲}MR^۲\omega^۲=\frac{۷}{۱۰}MR^۲\omega^۲\Rightarrow\frac{K_{rot}}{K_{tot}}=\frac{\frac{۱}{۵}MR^۲\omega^۲}{\frac{۷}{۱۰}MR^۲\omega^۲}=\frac{۲}{۷}$$

مثال۶: استوانه توپری به جرم M و شعاع R حرکت غلتشی بدون لغزش انجام می‌دهد. نسبت انرژی جنبشی دورانی این استوانه به انرژی جنبشی کل آن کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» شرط غلتش عبارت است از $v_{cm}=R\omega$، از این نمونه سؤال و مشابه آن چندین بار تست آمده است.

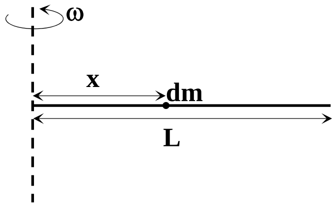
K_{rot}: انرژی جنبشی دورانی و K_{tran} انرژی جنبشی انتقالی است. $K_{tran}=\frac{۱}{۲}mv_{cm}^۲$ و $K_{rot}=\frac{۱}{۲}I_{cm}\omega^۲=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}MR^۲)\omega^۲=\frac{۱}{۴}MR^۲\omega^۲$

$$K_{tot}=K_{rot}+K_{tran}=\frac{۱}{۲}I_{cm}\omega^۲+\frac{۱}{۲}mv_{cm}^۲=\frac{۱}{۴}MR^۲\omega^۲+\frac{۱}{۲}MR^۲\omega^۲=\frac{۳}{۴}MR^۲\omega^۲\Rightarrow\frac{K_{rot}}{K_{tot}}=\frac{\frac{۱}{۴}MR^۲\omega^۲}{\frac{۳}{۴}MR^۲\omega^۲}=\frac{۱}{۳}$$

مثال۷: لختی دورانی میله همگنی به طول L و جرم M نسبت به محوری که از یک سر آن می‌گذرد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}ML^۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}ML^۲$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}ML^۲$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}ML^۲$

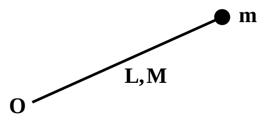
پاسخ: گزینه «۲» میله را به صورت مقابل در نظر بگیرید.



یک المان dm روی سطح در نظر می‌گیریم. با گسترش این عنصر در واحد طول می‌توان I را حساب کرد. x فاصله عنصر dm تا محور دوران است و نیز می‌دانیم: $M=\lambda L\rightarrow dm=\lambda\,dx$

$$I=\int r^۲dm=\int_۰^L x^۲\lambda\,dx=[\frac{x^۳\lambda}{۳}]_۰^L=\frac{L^۳\lambda}{۳}=\frac{(L\lambda)L^۲}{۳}=\frac{ML^۲}{۳}$$

مثال۸: ذره‌ای به جرم m به انتهای میله‌ای به طول L و جرم M = ۳m متصل است. لختی دورانی دستگاه حول نقطه O چقدر است؟



پاسخ: لختی دورانی دستگاه حول نقطه O برابر است با مجموع لختی دورانی جسم m و میله حول این نقطه. برای جسم m داریم:

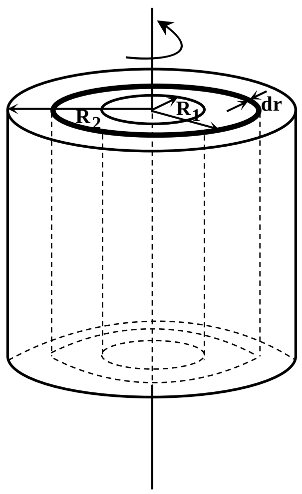
$$I_1 = mL^2$$

با توجه به مثال قبل، معلوم است که لختی دورانی میله حول نقطه O برابر است با $I_2 = \frac{1}{3}ML^2$. بنابراین لختی دورانی کل به صورت زیر است:

$$I = I_1 + I_2 = mL^2 + \frac{1}{3}ML^2 = mL^2 + \frac{1}{3}(3m)L^2 = mL^2 + mL^2 \Rightarrow I = 2mL^2$$

مثال ۹: لختی دورانی پوسته استوانه‌ای همگن به طول L، شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 حول محور استوانه کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}M(R_2^2 - R_1^2)$
۲) $\frac{1}{2}M(R_2^2 - R_1^2)$
۳) $\frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$
۴) $\frac{1}{12}M(R_2^2 + R_1^2)$



پاسخ: گزینه «۳» مناسب‌ترین عنصر جرمی، پوسته استوانه‌ای بی‌نهایت نازکی بـه شـعاع r، ضـخامت dr و طول L است. اگر چگالی حجمی ماده ρ در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$dm = \rho dv = \rho(2\pi r)(dr)L$$

در نتیجه لختی دورانی نسبت به محور استوانه برابر است با:

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L\rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi L\rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$$

از طرفی جرم کل پوسته استوانه‌ای برابر است با چگالی استوانه ضرب در حجم کل آن:

$$M = \rho V = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)L$$

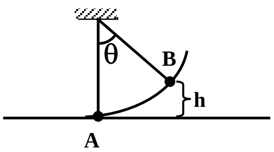
بنابراین لختی دورانی پوسته استوانه‌ای عبارت خواهد بود از:

$$I = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$$

توجه شود که: $R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$

مثال۱۰: میله نازک یکنواختی به طول L و جرم m را از یک سر آن می‌آویزیم و به نوسان در می‌آوریم. اگر سرعت زاویه‌ای میله حـول نقطـه آویـز هنگام گذشتن از وضع قائم ω باشد و از اصطکاک و مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، مرکز جرم میله چه مقدار از پایین‌ترین وضعیت خود بالا می‌رود؟

۱) $h = \frac{L^2\omega^2}{6g}$
۲) $h = \frac{2L^2\omega^2}{3g}$
۳) $h = \frac{7L^2\omega^2}{24g}$
۴) $h = \frac{L^2\omega^2}{8g}$



پاسخ: گزینه «۱» به علت عدم وجود نیروهای اتلافی پایستگی انرژی را در نقطه A و B می‌توان نوشت:

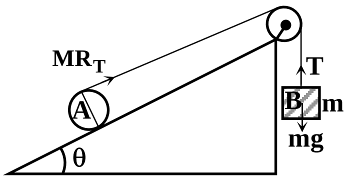
$$E_A = E_B \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{\text{انرژی جنبشی میله در نقطه A}} = mgh$$

(در بیشترین ارتفاع گلوله ساکن می‌شود.)

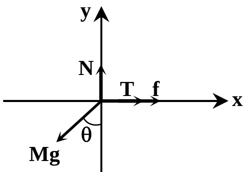
توضیح: در نقطه A انرژی جنبشی میله بیشینه و انرژی پتانسیل صفر است و در نقطه B انرژی پتانسیل بیشینه و انرژی جنبشی به دلیل سکون میله، صفر است.

$$v_{cm} = \frac{l}{2}\omega \ ; \quad \frac{1}{2}m(\frac{l^2\omega^2}{4}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{12}ml^2)\omega^2 = mgh \Rightarrow \frac{l^2\omega^2}{6g} = h$$

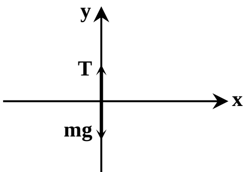
مثال۱۱: مطابق شکل نوار نازک و سبکی به دور استوانه‌ای به جـرم M و شـعاع R کـه روی سطح شیب‌داری به زاویه شیب θ قرار دارد پیچیده شده است. این نوار پس از گذشـتن از روی یک قرقره سبک و بدون اصطکاک به جسمی به جرم m متصل است. با فرض آنکه استوانه غلتش کامل دارد شتاب مرکز جرم آن هنگام پایین آمدن از سطح شیب‌دار کدام است؟



☑ **پاسخ:** ابتدا نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر دو جسم m و M را رسم می‌کنیم:



نمودار جسم آزاد A



نمودار جسم آزاد B

اکنون برای جسم A معادله $\tau = I\alpha$ را نوشته و حل می‌کنیم:

$$\text{جسم } A: \tau_{ext} = I_{cm}\alpha \Rightarrow Mg\sin\theta(R) - T(۲R) = I_A\alpha$$

اما جسم B فقط حرکت انتقالی دارد. بنابراین:

$$\text{جسم } B: \sum F_{ext} = ma_{cm} \Rightarrow T - mg = ma_B$$

شتاب جرم m دو برابر شتاب مرکز جرم جسم M است زیرا شتاب α که به نقطه تماس جسم با سطح شیب‌دار وارد می‌شود، اگر در شعاع R ضرب شود شتاب مرکز جرم و اگر در شعاع $۲R$ ضرب شود شتاب نقطه اتصال طناب به کره را می‌دهد که این همان شتاب جرم m است. پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} I_A = I_{cm} + MR^۲ = \frac{۳}{۲}MR^۲ \\ T = mg + ۲ma_{cm} \ , \ \alpha = \frac{a_{cm}}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{cm} = \left(\frac{M\sin\theta - ۲m}{\frac{۳}{۲}M + ۴m}\right)g$$

مثال۱۲: میله‌ای به طول l را از یک انتهایش به طور قائم روی زمین نگه داشته و سپس رها می‌کنیم. با فرض اینکه انتهایی که روی زمین است، نلغزد شتاب انتهای دیگر میله هنگامی که با امتداد قائم زاویه ۶۰° بسازد، برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۷}}{۴}g$ ۲) $\frac{۳}{۴}g$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۴}g$ ۴) $\frac{۳}{۲}g$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نقطه انتهایی میله طوری حرکت می‌کند که گویی روی محیط یک دایره حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد. برای حرکت دایره‌ای ما دو نوع شتاب داریم: شتاب شعاعی a_r و شتاب مماسی a_t که اولی به خاطر تغییر جهت سرعت و دومی ناشی از تغییر اندازه سرعت است و شتاب کل جمع برداری این دو شتاب است که با هم زاویه $\frac{\pi}{۲}$ می‌سازند. $a_r = r\omega^۲$ و $a = \sqrt{a_t^۲ + a_r^۲}$ کل

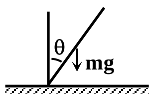
لذا نیاز داریم که در زاویه مفروض سرعت زاویه‌ای نقطه انتهایی میله را داشته باشیم. برای این کار می‌توانیم قانون پایستگی انرژی را برای نقطه آغازی حرکت و برای نقطه‌ای که میله زاویه ۶۰° با امتداد قائم می‌سازد، بنویسیم.

$$E_i = E_f \qquad mg\frac{l}{۲} = mg\frac{l}{۲}\cos۶۰^\circ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

انرژی جنبشی فقط دورانی است و گشتاور لختی میله حول یک انتها $\frac{۱}{۳}ml^۲$ می‌باشد در نتیجه:

$$mg\frac{l}{۲} = mg\frac{l}{۲}(\frac{۱}{۲}) + \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳}ml^۲)\omega^۲ \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۳g}{۲l}}$$

پس $a_r = l\omega^۲ = \frac{۳g}{۲}$ برای یافتن a_t می‌توانیم از مفهوم شتاب زاویه‌ای کمک بگیریم.



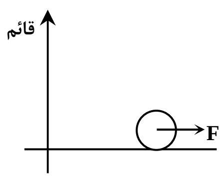
$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \ , \ \vec{\tau} = (\vec{r} \times \vec{F}) \qquad \tau = mg\frac{l}{۲}\sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = (mg\frac{l}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) \ , \ I = \frac{۱}{۳}ml^۲$$

$$(mg\frac{l}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = (\frac{۱}{۳}ml^۲)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}\frac{g}{l} \xrightarrow{\text{برای نقطه انتهایی میله}} a_t = l\alpha = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}g$$

پس شتاب کل به صورت مقابل می‌شود:

$$a = \sqrt{a_t^۲ + a_r^۲} = \sqrt{(\frac{۳}{۲}g)^۲ + (\frac{۳\sqrt{۳}g}{۴})^۲} = \frac{۳\sqrt{۷}}{۴}g$$

مثال۱۳: قرص نازکی به جرم M تحت تأثیر نیروی افقی که به مرکز جرم آن وارد می‌شود دارای حرکت غلتشی بر روی سطح افقی است. این نیرو برحسب شتاب مرکز جرم آن a برابر کدام است؟



۱) Ma ۲) $\frac{۲}{۳}Ma$ ۳) $\frac{۳}{۲}Ma$ ۴) $۲Ma$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل مسائل دینامیک دورانی کافی است که معادله گشتاور و همین طور قانون دوم نیوتن را بنویسیم.

قانون دوم نیوتن: $F - f = Ma \quad (۱)$

F نیروی افقی است که باعث حرکت قرص می‌شود و f نیروی اصطکاک وارد به قرص است.

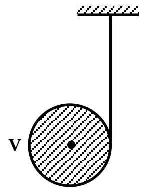
F بر مرکز جرم وارد می‌شود و گشتاور ایجاد نمی‌کند تنها نیرویی که گشتاور ایجاد می‌کند f است.

a: شتاب خطی ، α: شتاب زاویه‌ای

گشتاور $\begin{cases}\tau = Rf \\ \tau = I_{cm}\alpha\end{cases} \xrightarrow{I_{cm}=\frac{MR^2}{2}} Rf = \frac{MR^2}{2}\alpha \Rightarrow f = \frac{MR}{2}\alpha \xrightarrow{R\alpha=a} f = \frac{Ma}{2} \quad (2)$

(۱) و (۲) $\Rightarrow F - \frac{Ma}{2} = Ma \Rightarrow F = \frac{3}{2}Ma$

مثال۱۴: نخ نازک و سبکی چندین دور بر روی گلوله توپری پیچیده شده است. انتهای این نخ به سقف متصل است. چنانچه گلوله تحت نیروی گرانش سقوط کند اندازه شتاب مرکز جرم گلوله کدام است؟



۱) $\frac{2}{5}g$ ۲) $\frac{1}{2}g$

۳) $\frac{5}{7}g$ ۴) $\frac{3}{4}g$

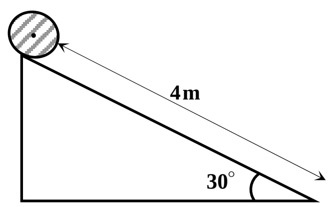
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان طور که قبلاً ذکر شد، برای حل این‌گونه سؤالات نوشتن دو معادله به ما کمک می‌کند:۱ـ گشتاور نیرو.۲ـ قانون دوم نیوتن. mg به مرکز جرم وارد می‌شود و گشتاور ندارد ولی T گشتاور دارد.

گشتاور $TR = I_{cm}\alpha \qquad I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2 \Rightarrow TR = \frac{2}{5}mR^2\alpha \xrightarrow[R\alpha=a_{cm}]{} T = \frac{2}{5}ma_{cm}$

قانون دوم $\qquad mg - T = ma_{cm} \qquad mg - \frac{2}{5}ma_{cm} = ma_{cm} \quad a_{cm} = \frac{5}{7}g$

مثال۱۵: استوانه توپری به جرم 2kg از بالای سطح شیب‌داری با زاویه 30° از حالت سکون رها می‌شود. در صورتی که طول سطح شیب‌دار 4cm باشد، هنگام رسیدن استوانه به پایین سطح شیب‌دار سرعت آن چقدر می‌باشد؟ (شعاع استوانه $R = 20cm$)

۱) $\sqrt{20}$ ۲) $\sqrt{\frac{80}{3}}$ ۳) $\frac{\sqrt{20}}{3}$ ۴) $\sqrt{40}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون عامل اتلافی در کار نیست می‌توان اصل بقای انرژی را برای حل مسئله بـه کـار بـرد. وقتی استوانه در بالای سطح شیب‌دار قرار دارد، چون به حالت سکون است $v = 0$ و انرژی جنبشی آن صـفر اسـت. اما از آنجا که در فاصله‌ای از سطح زمین که مرجع پتانسیل است قرار دارد، دارای انرژی پتانسیل گرانشی می‌باشد. وقتی به پایین سطح شیب‌دار برسد دارای سرعت است و انرژی جنبشی دارد، اما چون ارتفاع از سطح زمـین صـفر می‌شود انرژی پتانسیل آن صفر است. بنابراین می‌توان نوشت: $E_1 = E_2 \Rightarrow \cancel{K_1}^{0} + U_1 = K_2 + \cancel{U_2}^{0}$

چون استوانه علاوه بر لغزش دارای غلتش نیز می‌باشد، انرژی جنبشی آن شامل انرژی جنبشی انتقالی و انرژی جنبشی دورانی است.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad , \qquad h = l \times \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2m$$

از طرفی رابطه میان سرعت خطی مرکز جرم و سرعت دورانی به صورت $v_{cm} = R\omega$ می‌باشد، پس با توجه به $I_{استوانه} = \frac{1}{2}mR^2$ داریم:

$$m \times 10 \times 2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times mR^2 \times \frac{v_{cm}^2}{R^2} \Rightarrow 20\cancel{m} = \cancel{m}(\frac{1}{2}v_{cm}^2 + \frac{1}{4}v_{cm}^2) \Rightarrow 20 = \frac{3}{4}v_{cm}^2 \Rightarrow v_{cm}^2 = \frac{80}{3} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{80}{3}}\ (\frac{m}{s})$$

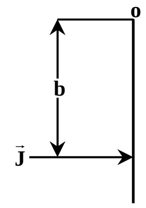
مثال۱۶: حلقه یکنواخت بر روی سطح افقی صافی بدون لغزش با سرعت ثابت می‌غلتد، نسبت انرژی جنبشی دورانی به انرژی جنبشی کل آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $I_{\text{حلقه}} = MR^2$ پس می‌توان نوشت:

$$\frac{K_{\text{دورانی}}}{K_{\text{کل}}} = \frac{K_{\text{دورانی}}}{K_{\text{انتقالی}} + K_{\text{دورانی}}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{v_{cm}^2}{R^2}} = \frac{\frac{1}{2}\times MR^2\frac{v_{cm}^2}{R^2}}{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2} = \frac{1}{2}$$

مثال۱۷: میله همگنی به جرم m و طول 2a از یک انتها از محور افقی بدون اصطکاک O آویزان است. مطابق شکل ضربه‌ی افقی $\vec{J}$ در فاصله‌ی b از O بر میله وارد می‌شود سرعت زاویه‌ای میله درست بعد از اثر ضربه کدام است؟



۱) $\frac{3bJ}{4ma^2}$ ۲) $\frac{3J}{4ma}$

۳) $\frac{3bJ}{ma^2}$ ۴) $\frac{3J}{ma^2}$

پاسخ: گزینه «۱» اگر نقطه O را مبدأ در نظر بگیریم پس از برخورد ضربه، سیستم تکانه زاویه‌ای روبرو را به دست می‌آورد: $L = Jb$

از طرفی $L = I\omega \Rightarrow L = (\frac{4ma^2}{3})\omega = Jb \Rightarrow \omega = \frac{3Jb}{4ma^2}$ میله حول یک انتهایش $I = \frac{ml^2}{3} \xrightarrow{l=2a} I = \frac{4ma^2}{3}$

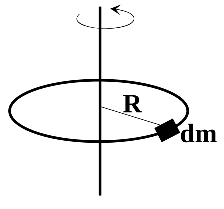
مثال ۱۸: لختی دورانی حلقه دایره‌ای شکل با چگالی توزیع خطی $\lambda = 3\theta^2$ و شعاع R کدام است؟ (نسبت به محور عمود بر دایره، گذرنده از مرکز آن).

۱) MR^2 ۲) $\frac{1}{3}MR^2$ ۳) $2MR^2$ ۴) $\frac{MR^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این مسئله ابتدا باید در نظر داشته باشیم که $r = R$ شعاع دایره است زیرا هر عنصر دایره در فاصله R از محور دوران قرار دارد. حال باید dm را محاسبه کنیم: $dm = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$

زیرا مؤلفه طول در این حالت برابر است با $r\,d\theta$. حال با استفاده از این اطلاعات و با توجه به رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \times \lambda R\, d\theta = 3R^3\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta = \theta^3\Big]_0^{2\pi}\times R^3 = 8\pi^3 R^3 \qquad (1)$$



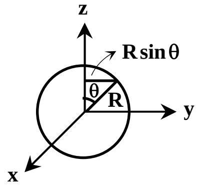
از آنجایی که باید لختی دورانی برحسب جرم نوشته شود، باید M را در رابطه ظاهر کنیم پس M را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \int_0^{2\pi} 3\theta^2 R\, d\theta = R\,\theta^3\Big]_0^{2\pi} = R\times 8\pi^3 \qquad (2)$$

با جایگذاری مقدار M در رابطه (۱) می‌توان نوشت: $(1), (2) \Rightarrow I = MR^2$

مثال۱۹: اینرسی دورانی یک پوسته همگن به جرم M و شعاع R نسبت به یک قطر آن برابر است با:

۱) $\frac{2}{5}MR^2$ ۲) $\frac{1}{2}MR^2$ ۳) $\frac{2}{3}MR^2$ ۴) MR^2



پاسخ: گزینه «۳» چون گشتاور حول محور تقارن خواسته شده لذا حاصل‌ضرب لختی یعنی I_{xy} و I_{xz} و I_{zy} همگی صفرند. پس می‌توان گفت که ما از همان فرمول ساده گشتاور برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم یعنی: $I = \int r^2 dm$

در اینجا مختصات کروی بهترین مختصات انتخابی می‌باشد. چون جواب را حول یک قطر خواسته برای سادگی قطر منطبق بر محور z را در نظر می‌گیریم. در رابطه $\int r^2 dm$ می‌دانیم r فاصله المان جرم dm از محور دوران که در اینجا محور z است، می‌باشد. لذا در این رابطه به جای r می‌بایست $R\sin\theta$ جایگذاری کنـیم. از آن جایی که المان سطح با شعاع ثابت در مختصات کروی $R^2\sin\theta d\theta d\varphi$ می‌باشد پس می‌توان گفت: $dm = \sigma ds = (\sigma)(R^2\sin\theta d\theta d\varphi)$

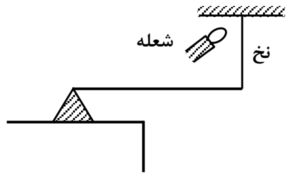
σ: چگالی سطحی (خودمان فرض می‌کنیم)

$$I = \int r^2 dm = \sigma\int (R\sin\theta)^2 (R^2\sin\theta d\theta d\varphi) = \sigma R^4 \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^3\theta d\theta d\varphi = (\sigma R^4)(2\pi)\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^3\theta d\theta}_{\frac{4}{3}}$$

از طرفی σ برابر $\dfrac{\text{جرم}}{\text{سطح پوسته کروی}}$ می‌باشد.

$$= (\sigma)(R^4)(2\pi)(\frac{4}{3}) = \frac{M}{4\pi R^2}(R^4)(2\pi)(\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}MR^2$$

مثال۲۰: سر میله‌ای افقی بر روی یک پایه و سر دیگر آن مطابق شکل به نخی متصل است. نخ را می‌سوزانیم تا میله شروع به حرکت نماید، شـتاب سر میله در این لحظه برابر کدام است؟



۱) g
۲) $\frac{2}{3}g$
۳) $\frac{1}{4}g$
۴) $\frac{3}{2}g$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نیرویی که سبب می‌شود میله حرکت کند، نیروی گرانش است که به میله گشتاور وارد می‌کند و این گشتاور به صورت زیر است:

$$\tau = mg\frac{l}{2} \quad , \quad \tau = I\alpha \quad , \quad I = \frac{1}{3}ml^2 \quad mg\frac{l}{2} = \frac{ml^2}{3}\alpha \Rightarrow \text{شتاب زاویه‌ای}\ \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l} \qquad \text{شتاب خطی}\ a = \alpha l = \frac{3}{2}g$$

فصل ششم

«نوسان»

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال۱: معادله حرکت یک نوسانگر ساده به صورت $x = 2\sin(2\pi t + \frac{\pi}{6})$ است. چند ثانیه پس از لحظه‌ی $t = 0(s)$ سرعت ذره برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

۱) $\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از معادله حرکت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم تا معادله سرعت به دست آید. $x = 2\sin(2\pi t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow v = 4\pi\cos(2\pi t + \frac{\pi}{6})$

شرط ماکزیمم شدن سرعت آن است که مقدار cos برابر ± 1 شود.

$\cos(2\pi t + \frac{\pi}{6}) = \cos 0$ یا $\cos\pi \Rightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2\pi t = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = -\frac{1}{12}\ (s)$ غیر قابل قبول

$2\pi t + \frac{\pi}{6} = \pi \Rightarrow 2\pi t = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2\pi t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{5}{12}\ (s)$ قابل قبول

مثال۲: بیشترین شتاب نوسانگری $100\frac{m}{s^2}$ و بیشترین سرعت آن $4\frac{m}{s}$ است. زمان تناوب آن چند ثانیه است؟

۱) $0/08\pi$ ۲) $0/04\pi$ ۳) $0/02\pi$ ۴) $0/01\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» شتاب ماکزیمم نوسانگر برابر $A\omega^2$ و سرعت ماکزیمم آن برابر $A\omega$ است.

$$\begin{cases} a_{max} = A\omega^2 = 100 \\ v_{max} = A\omega = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{A\omega^2}{A\omega} = \frac{100}{4} \Rightarrow \omega = 25\frac{rad}{s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 25 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{25} \Rightarrow T = 0/08\pi(s)$$

مثال۳: معادله حرکت یک نوسانگر به صورت $y = 0/1\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$ می‌باشد. اگر جرم جسم 1 kg باشد، اندازه نیروی وارد بر جسم در لحظه‌ی $t = 1(s)$ چند نیوتن است؟ $(\pi^2 = 10)$

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $0/1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دو بار مشتق گرفتن از معادله حرکت، معادله شتاب ـ زمان را به دست می‌آوریم و سپس از قانون دوم نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$y = 0/1\sin(\pi t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow v = 0/1\pi\cos(\pi t + \frac{\pi}{6}) \to a = -0/1\pi^2\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$$F = ma \Rightarrow F = -0/1\pi^2\sin(\pi t + \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{t=1} F = -0/1\pi^2\sin(\frac{7\pi}{6})$$

$$F = -0/1\times 10(-\sin\frac{\pi}{6}) \Rightarrow F = \frac{1}{2}N$$

مثال ۴: ذره‌ای حرکت نوسانی ساده دارد. در لحظه‌ای که بعد حرکت $\frac{1}{2}$ دامنه نوسان است انرژی جنبشی ذره چه کسری از انرژی مکانیکی آن می‌باشد؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به این‌که انرژی مکانیکی مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل است داریم:

$x = \frac{1}{2}A$, $\frac{K}{E} = ?$

$$E = K + U$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}k\frac{A^2}{4} = \frac{1}{8}kA^2$$

$$U = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}kA^2) \Rightarrow U = \frac{1}{4}E \quad , \quad E = K + U \Rightarrow E = K + \frac{1}{4}E \quad , \quad K = E - \frac{1}{4}E = \frac{3}{4}E \Rightarrow \frac{K}{E} = \frac{3}{4}$$

مثال ۵: بیشینه سرعت نوسانگری برابر $10\pi \frac{m}{s}$ و جرم نوسانگر برابر ۱۰۰ گرم است. انرژی مکانیکی نوسانگر چند ژول است؟ ($\pi^2 \simeq 10$)

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۱» وقتی سرعت نوسانگر بیشینه است، تمام انرژی مکانیکی به صورت جنبشی می‌باشد و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر صفر خواهد بود.

$$v_{max} = 10\pi ,\quad m = 100g = 0/1kg ,\quad E = ?$$

$$E = K_{max}$$

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

$$E = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times (10\pi)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times 100\pi^2 \Rightarrow E = 50\,(J)$$

مثال ۶: در لحظه‌ای که بعد نوسانگر نصف بعد بیشینه آن است اندازه سرعت نوسانگر چه کسری از سرعت بیشینه آن خواهد شد؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ : گزینه «۲» برای محاسبه سرعت نوسانگر از رابطه $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ و برای سرعت بیشینه از $v = A\omega$ استفاده می‌کنیم.

$$x = \frac{1}{2}A ,\quad \frac{v}{v_{max}} = ?$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{\frac{3A^2}{4}}$$

$$v = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega \Rightarrow \frac{v}{A\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{v}{v_{max}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۷: وزنه‌ای به جرم m به انتهای فنری متصل به سقف آویخته شده و با دوره‌ی T_1 نوسان می‌کند. فنر را از وسط نصف می‌کنیم و یک نیمه را می‌آویزیم و وزنه m ۲ را به انتهای آن بسته و به نوسان در می‌آوریم. دوره آن T_2 می‌شود. نسبت $\frac{T_2}{T_1}$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۴» چون فنر را نصف کرده‌ایم ($k_2 = 2k_1$) می‌شود.

$$\frac{2}{k_2} = \frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = 2k_1 \;;\; \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \times \frac{k_1}{k_2}} \quad;\quad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{2m}{m} \times \frac{k_1}{2k_1}} = 1 \Rightarrow T_2 = T_1$$

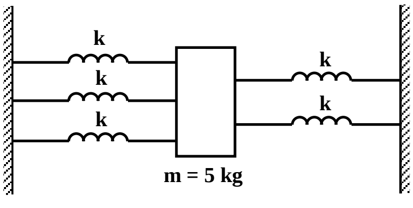
مثال ۸: در شکل زیر دوره نوسان‌های کم دامنه جسم تقریباً چند ثانیه است؟ ($k = 100\frac{N}{m}$)

۱) $0/2\pi$ ۲) $0/1\pi$ ۳) π ۴) 2π

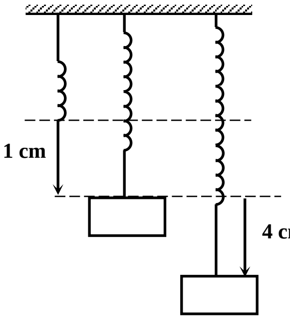
پاسخ : گزینه «۱» ابتدا ثابت معادل فنرها را به دست آورده و سپس از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ استفاده می‌کنیم. چون فنرها به صورت موازی به هم بسته شده‌اند، بنابراین:

$$k_T = 5k = 5 \times 100 = 500\,(\frac{N}{m}) \quad \text{معادل}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{500}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = 0/2\pi\,(s)$$



مثال۹: به انتهای فنری با ضریب سختی $100\ \frac{N}{m}$ وزنه‌ای به جرم $100g$ را آویخته و پس از برقراری تعادل وزنه را $4cm$ نسبت به وضعیت تعادلش جابجا کرده و سپس رها می‌کنیم. دامنه نوسانات چند سانتی‌متر می‌شود؟

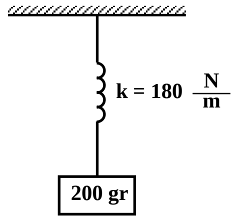


۱) ۱
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۶

پاسخ : گزینه «۲» در این حالت $A = d' - d$ در نتیجه آن:

$$d = \frac{mg}{k} = \frac{1}{100}(m) = 1(cm) \quad ; \quad \begin{cases} d' = 1 + 4 = 5cm \\ d = 1cm \end{cases} \Rightarrow A = d' - d = 5 - 1 = 4cm$$

مثال ۱۰: در شکل مقابل وزنه در حالت تعادل قرار دارد. اگر آن را $5cm$ به آرامی پایین بکشیم و رها کنیم، سرعت وزنه در لحظه‌ای که بعد از رها شدن $1cm$ بالا رفته است چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۹
۲) ۰/۵
۳) ۰/۸
۴) ۰/۴

پاسخ : گزینه «۱» از رابطه $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ استفاده می‌کنیم. چون وزنه بالا رفته است از علامت مثبت آن استفاده می‌کنیم.

$$A = 5cm = 0/05m \quad و \quad x = 4cm = 0/04m \quad و \quad m = 200\,gr = 0/2\,kg$$

$$k = m\omega^2 \Rightarrow 180 = 0/2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{180}{0/2} = 900 \Rightarrow \omega = 30\,(\frac{rad}{s})$$

$$v = +\omega\sqrt{A^2 - x^2} = 30\sqrt{(5\times10^{-2})^2 - (4\times10^{-2})^2} = 30\sqrt{25\times10^{-4} - 16\times10^{-4}}$$

$$v = 30\sqrt{9\times10^{-4}} \Rightarrow v = 90\times10^{-2} \Rightarrow v = 0/9\,(\frac{m}{s})$$

مثال ۱۱: دو پاندول ساده به طول‌های L_1 و L_2 در یک مکان نوسان می‌کنند و به ازای هر ۱۰ نوسان آونگ اول، آونگ دوم ۹ نوسان می‌کند. نسبت $\frac{L_1}{L_2}$ کدام است؟

۱) ۰/۸۱ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases} \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} & (1) \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2} & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1),(2)} \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad ; \quad \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \Rightarrow \frac{9}{10} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \Rightarrow 0/81 = \frac{L_1}{L_2}$$

مثال ۱۲: دو آونگ A و B با دوره‌های ۴ و ۲ ثانیه با هم شروع به نوسان می‌کنند. بعد از چند ثانیه یکی از دو آونگ یک نوسان کامل بیشتر انجام می‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۴» چون دوره آونگ B کمتر است پس در یک مدت زمان معین نوسانات بیشتری انجام خواهد داد.

$$n_B - n_A = 1 \Rightarrow \begin{cases} n_B = \frac{t}{T_B} \\ n_A = \frac{t}{T_A} \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{T_B} - \frac{t}{T_A} = 1 \Rightarrow \frac{t}{2} - \frac{t}{4} = 1 \Rightarrow \frac{2t - t}{4} = 1 \Rightarrow t = 4\,(s)$$

مثال ۱۳: میله نازکی به جرم $0/1\text{kg}$ و طول $0/1\text{m}$ به وسیله سیمی که از مرکز میله گذشته و بر آن عمود است، آویخته شده است. سیم را می‌پیچانیم تا میله نوسان کند. دوره تناوب نوسان 2s است. هنگامی که جرم مسطحی به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع را به همان ترتیب از مرکز جرمش می‌آویزیم تا نوسان کند می‌بینیم که دوره تناوب آن 6s است. لختی دورانی مثلث را نسبت به این محور پیدا کنید.

پاسخ: لختی دورانی میله‌ای به جرم M و طول l حول مرکز آن برابر $\frac{Ml^2}{12}$ است. در این صورت:

$$I_{\text{میله}}=\frac{(0/1)\times(0/1)^2}{12}=8/3\times10^{-5}\ (\text{kg.m}^2)$$

اکنون با توجه به معادله مربوط به دوره تناوب آونگ پیچشی می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{T_{\text{میله}}}{T_{\text{مثلث}}}=\left(\frac{I_{\text{میله}}}{I_{\text{مثلث}}}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow I_{\text{مثلث}}=I_{\text{میله}}\left(\frac{T_{\text{مثلث}}}{T_{\text{میله}}}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{\text{مثلث}}=(8/3\times10^{-5})\times\left(\frac{6}{2}\right)^2=8/3\times10^{-5}\times9=7/5\times10^{-4}\ (\text{kg.m}^2)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۴: حلقه یکنواختی به شعاع R را از یک نقطه آن در سطح قائم می‌آویزیم و به نوسان کم دامنه در می‌آوریم. زمان تناوب آن برابر است با:

۱) $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ ۲) $2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ ۳) $2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$ ۴) $2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$

پاسخ: گزینه «۲» در اکثر کتاب‌های فیزیک رابطه $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$ برای دوره تناوب یک آونگ فیزیکی بیان شده است که b فاصله نقطه آویز از مرکز جرم و I گشتاور حول نقطه دوران می‌باشد. برای حلقه‌ای که از یک نقطه روی محیطش آویزان شده باشد طبق قضیه محورهای موازی برای گشتاور لختی داریم:

$$\begin{cases}I=I_{cm}+mR^2=mR^2+mR^2=2mR^2\\ b=R\end{cases}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{2\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{\cancel{m}g\cancel{R}}}=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۵: طول یک آونگ ساده را که دوره تناوب آن با دوره تناوب آونگ فیزیکی خاصی برابر است پیدا کنید.

پاسخ: با مساوی قرار دادن دوره تناوب آونگ ساده با دوره تناوب آونگ فیزیکی داریم:

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}=\sqrt{\frac{I}{Mgd}}\Rightarrow\frac{l}{\cancel{g}}=\frac{I}{M\cancel{g}d}\Rightarrow l=\frac{I}{Md}$$

بنابراین اگر دوره تناوب نوسان را بخواهیم، جرم آونگ فیزیکی را می‌توان در نقطه‌ای که به فاصله $l=\frac{I}{Md}$ از محور قرار دارد متمرکز دانست. این نقطه را مرکز نوسان آونگ فیزیکی می‌نامند. توجه کنید که برای هر جسم معین محل این مرکز به محل محور بستگی دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۶: جسمی به جرم m به فنری با سختی k متصل است و میرایی به گونه‌ای است که $\gamma=\frac{\omega_0}{4}$ است. نسبت دامنه‌های دو نوسان متوالی کدام است؟

پاسخ: با توجه به اینکه $\gamma<\omega_0$ است بنابراین حرکت از نوع کند میرا، می‌باشد. از تعریف افت حرکت استفاده می‌کنیم.

گفتیم که برای حرکت کند میرا نسبت دو دامنه متوالی برابر با $e^{\gamma T}$ است. بنابراین لازم است زمان تناوب حرکت (T) را به دست آوریم. فرکانس زاویه‌ای حرکت کند میرا $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ می‌باشد.

$$T=\frac{2\pi}{\omega_1}\ ,\ \omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\omega_0^2}{16}}=\sqrt{\frac{15}{16}\omega_0^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}\omega_0\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{15}}{4}\omega_0}=\frac{8\pi}{\sqrt{15}\omega_0}\Rightarrow e^{\gamma T}=e^{\frac{\omega_0}{4}\times\frac{8\pi}{\sqrt{15}\omega_0}}=e^{\frac{2\pi}{\sqrt{15}}}$$

بنابراین نسبت دامنه‌های دو نوسان متوالی یا همان افت حرکت برابر است با $e^{\frac{2\pi}{\sqrt{15}}}$.

فصل هفتم

«نیروهای مرکزی، گرانش و قوانین کپلر»

تست‌های تألیفی فصل هفتم

مثال۱: با توجه به تعریف شتاب گرانش مؤثر در هر نقطه روی سطح زمین $\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$، کدام یک از گزینه‌ها نادرست است؟

۱) راستای شاقول در هر نقطه در راستای $\vec{g}_e$ است.

۲) سطح آزاد مایعات در حال تعادل عمود بر $\vec{g}_e$ است.

۳) نیروی گرانشی وارده بر جرم m در حال سکون زمین که به طور تجربی اندازه‌گیری می‌شود $m\vec{g}_e$ است.

۴) جسمی که از نزدیکی سطح زمین رها شود شتاب حرکت آن $\vec{g}$ است.

پاسخ: گزینه «۴» طبق معادلاتی که برای دستگاه شتاب‌دار بیان می‌شود، برای دستگاهی که متصل به زمین است و مبدأ آن مرکز زمین است معادله به صورت مقابل است (این همان اثر استاتیکی حرکت زمین است):

$$m\vec{g} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = m\vec{a}' \Rightarrow a' = g_e = g - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

نسبت به زمین

اجسام نسبت به ناظر ساکن روی زمین با شتاب g_e سقوط می‌کنند، در نتیجه گزینه ۴ نمی‌تواند صحیح باشد.

مثال۲: اگر ۱۶km از سطح زمین بالا برویم، شتاب گرانش g از مقدار $۹/۸\frac{m}{s^۲}$ به چه مقداری می‌رسد؟

پاسخ: چون در مسائل گرانش ارتفاع را در واقع فاصله از مرکز زمین در نظر می‌گیریم، پس برای جسمی که روی زمین است داریم: $r = R_e = ۶۴۰۰km$. اکنون اگر جسمی ۱۶km از سطح زمین فاصله بگیرد، مقدار r به ۶۴۱۶km می‌رسد.

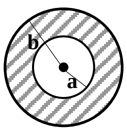
$$\frac{dr}{r} = \frac{۱۶}{۶۴۰۰} = \frac{۱}{۴۰۰}$$

از طرفی داریم:

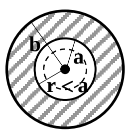
$$\frac{dg}{g} = -۲\frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{dg}{g} = -۲(\frac{۱}{۴۰۰}) = -\frac{۱}{۲۰۰} \Rightarrow dg = \frac{-۱}{۲۰۰}(۹/۸) \simeq -۰/۰۵$$

اکنون برای به دست آوردن مقدار جدید شتاب گرانش، مقدار قبلی g را با تغییرات (دیفرانسیل) آن جمع جبری می‌کنیم.

$$۹/۸ - ۰/۰۵ = ۹/۷۵\ (\frac{m}{s^۲})$$



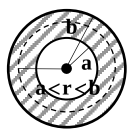
مثال۳: شدت میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی را برای یک پوسته کروی به شعاع درونی a و شعاع بیرونی b به دست آورید. (جرم کره برابر M است).



پاسخ: اگر سطح گاوسی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $r < a$ باشد، درون سطح گاوسی هیچ جرمی وجود نخواهد داشت. طبق قانون گاوس خواهیم داشت:

$$\int \vec{g}.\hat{n}ds = \vec{g}(۴\pi r^۲) = ۰ \Rightarrow g = ۰$$

بنابراین در داخل پوسته شدت میدان گرانشی برابر صفر است.



اکنون سطح گاوسی را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $a < r < b$ باشد. طبق قانون گاوس داریم:

$$\int \vec{g}.\hat{n}ds = -\int ۴\pi G\rho dv$$

اگر جرم M از شعاع a تا b به طور یکنواخت توزیع شده باشد داریم:

$$\rho = \frac{M}{\frac{۴}{۳}\pi(b^۳ - a^۳)} \Rightarrow g(۴\pi r^۲) = \frac{-۴\pi MG}{\frac{۴}{۳}\pi(b^۳ - a^۳)}\int_a^r (۴\pi r^۲)dr = \frac{-۱۲\pi MG}{b^۳ - a^۳}(\frac{r^۳}{۳} - \frac{a^۳}{۳})$$

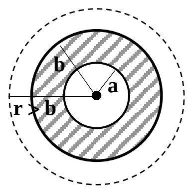
$$\Rightarrow g = \frac{-۱۲\pi MG(r^۳ - a^۳)}{۱۲\pi r^۲(b^۳ - a^۳)} = \frac{-MG}{(b^۳ - a^۳)}(\frac{r^۳ - a^۳}{r^۲})$$

مقداری که به دست آمد برابر است با شدت میدان گرانشی داخل پوسته در فاصله بین a و b.

و در آخر سطح گاوسی را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که تمام پوسته داخل آن قرار گیرد $(r > b)$.

$$\int \vec{g}.\hat{n}ds = -۴\pi GM$$

این بار چون تمام جرم پوسته داخل سطح گاوسی قرار می‌گیرد نیازی به استفاده از $\int \rho dv$ به جای جرم نداریم.



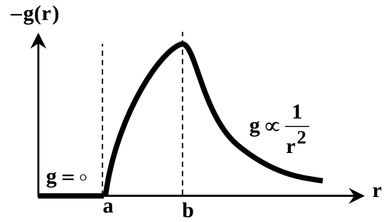
$$g(4\pi r^2) = -4\pi GM \Rightarrow g = -\frac{GM}{r^2}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود شدت میدان گرانشی در این حالت به گونه‌ای است که انگار تمام جرم پوسته در مرکز آن قرار دارد (مسئله مرکز جرم).

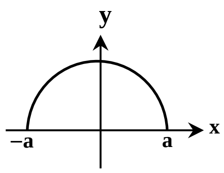
حال به راحتی می‌توان به کمک رابطه $V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{g}(r).d\vec{r}$ پتانسیل را برای نقاط مختلف محاسبه کرد که عبارتند از:

$$V(r) = \begin{cases} -2\pi\rho G(b^2 - a^2) & r < a \\ -4\pi\rho G(\frac{b^2}{2} - \frac{a^3}{3r} - \frac{r^2}{6}) & a < r < b \\ -\frac{GM}{r} & r > b \end{cases}$$

نمودار تغییرات g نسبت به شعاع در شکل زیر نشان داده شده است.



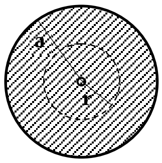
مثال۴: شدت میدان گرانشی را در مرکز کمان زیر بیابید. چگالی خطی کمان برابر $\frac{\lambda}{2}$ است.



☑ **پاسخ:** $g(r) = \frac{2G\lambda}{2a}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{G\lambda}{a}$

نکته۸: میدان گرانشی در خارج از یک صفحه بی‌نهایت با چگالی سطحی σ از رابطه $g = 2\pi G\sigma$ به دست می‌آید که مستقل از فاصله از ورقه است یعنی در همه جا یکی است. ضمناً بر ورقه عمود و به طرف آن است.

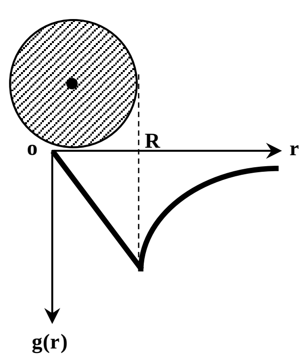
مثال۵: شدت میدان گرانشی را درون یک کره با چگالی جرم یکنواخت ρ و شعاع a به دست آورید.



☑ **پاسخ:** سطح گاوسی کره‌ای به شعاع r در داخل کره اصلی است. چگالی کره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad ; \quad \int \vec{g}.\hat{n}ds = -\int 4\pi G\rho dv$$

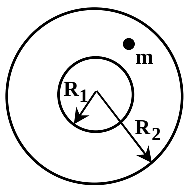
$$\Rightarrow \quad g(4\pi r^2) = \frac{-4\pi GM}{\frac{4}{3}\pi a^3}\int_0^r (4\pi r^2)dr \Rightarrow g(4\pi r^2) = \frac{-4\pi GMr^3}{a^3} \Rightarrow \vec{g} = \frac{-GM}{a^3} r\hat{e}_r$$



توجه شود که علامت منفی که در معادله $\int \vec{g}.\hat{n}ds = -\int 4\pi G\rho dv$ و مثال‌های بالا به کار برده شد به این معنی است که جهت بردار میدان گرانشی به سمت کاهش r (مرکز کره) می‌باشد و برای اندازه میدان گرانشی می‌توان از علامت مثبت آن استفاده کرد.

نمودار تغییرات g نسبت به شعاع برای یک کره همگن توپر به صورت روبرو است:

مثال۶: دو پوسته کروی نازک هم مرکز و با چگالی یکنواخت را به جرم‌های $M_۱$ و $M_۲$ شعاع $R_۱$ و $R_۲$ در نظر بگیرید ($R_۲ > R_۱$ و $M_۲ > M_۱$). ذره‌ای به جرم m در فضای خالی بین دو پوسته و به فاصله a از مرکز آن‌ها قرار دارد. نیروی گرانشی که به ذره m وارد می‌شود کدام است؟

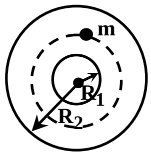


۱) به سمت $M_۱$ و مقدار آن $\frac{GM_۱m}{a^۲}$

۲) به سمت $M_۱$ و مقدار آن $\frac{GM_۱m}{a^۲}-\frac{GM_۲m}{(R_۲-a)^۲}$

۳) به سمت $M_۱$ و مقدار آن $\frac{GM_۲m}{(R_۲-a)^۲}$

۴) به سمت $M_۲$ و مقدار آن $\frac{GM_۱m}{a^۲}-\frac{GM_۲m}{(R_۲-a)^۲}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این سؤال از قانون گاوس استفاده می‌کنیم:

$$I = \oint \vec{g}.\vec{n}ds = -۴\pi\int dm$$

سطح نقطه‌چین سطح گاوس را نشان می‌دهد.

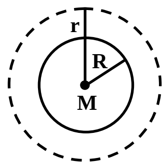
$$(g)(۴\pi a^۲) = -۴\pi GM_۱ \Rightarrow g = -\frac{GM_۱}{a^۲} \Rightarrow F = mg = -\frac{GM_۱m}{a^۲}$$

$M_۱$: جرم محصور در سطح گاوس است. در نتیجه مقدار نیروی گرانشی وارد بر ذره m برابر با $\frac{GM_۱m}{a^۲}$ و جهت آن به سمت پوسته داخلی به جرم $M_۱$ می‌باشد.

مثال۷: جسمی به جرم m در درون کره زمین و در عمق D قرار دارد. در این عمق انرژی پتانسیل سیستم جسم و زمین کدام گزینه است؟ (G ثابت جهانی گرانش، M جرم زمین و R شعاع زمین است).

۱) $-\frac{GMm}{۲R}[۳-(\frac{D}{R})^۲]$ ۲) $-\frac{GMm}{۲R}[۲-(\frac{D}{R})^۲]$ ۳) $-\frac{GMm}{۲R}[۳-(۱-\frac{D}{R})^۲]$ ۴) $-\frac{GMm}{۲R}[۴-\frac{D}{R}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این سؤال از انتگرال سطح گاوس مربوط به گرانش کمک می‌گیریم. با استفاده از این قانون میدان گرانشی جرم M را درون و بیرون آن به دست آورده و از روی آن پتانسیل گرانشی را محاسبه می‌کنیم.



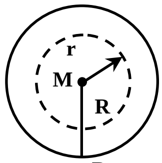
$r > R$

الف) میدان گرانشی $\vec{g}$ بیرون کره‌ای به جسم M و شعاع R:

$$۴\pi GM = \oint \vec{g}_{out} \cdot \vec{ds}$$

که در آن M جرم محصور در درون سطح بسته گاوسی است:

$$۴\pi GM = (۴\pi r^۲)g_{out} \Rightarrow g_{out} = \frac{GM}{r^۲}$$



$r < R$

ب) برای میدان گرانشی g داخل کره به جرم M و شعاع R

$$M' = \frac{۴}{۳}\pi r^۳\rho$$

که در آن:

$$\rho = \frac{m}{(\frac{۴}{۳}\pi R^۳)}$$

در نتیجه داریم: $M' = \frac{r^۳}{R^۳}M$ بنابراین $g_{in} = \frac{GMr}{R^۳}$ از طرفی تعریف پتانسیل گرانشی را می‌دانیم یعنی:

$$V(r) = \int_{\infty}^{R} \vec{g}_{out}.\vec{dr} + \int_{R}^{r} \vec{g}_{in}.\vec{dr} \Rightarrow V(r) = \int_{\infty}^{R} \frac{GMdr}{r^۲} + \int_{R}^{r} \frac{GMrdr}{R^۳} \Rightarrow V(r) = (-\frac{GM}{R}) + \frac{GM}{۲R^۳}(r^۲ - R^۲)$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{۳GM}{۲R} + \frac{GMr^۲}{۲R^۳}$$

$$V(r) = \frac{GM}{۲R}(\frac{r^۲}{R^۲} - ۳) = \frac{GM}{۲R}(\frac{r^۲ - ۳R^۲}{R^۲}) \quad , \quad V(r) = \frac{-GM}{۲R}(۳ - (\frac{r}{R})^۲)$$

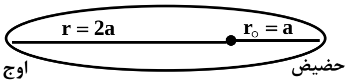
از طرفی اگر پتانسیل گرانشی را در جرم آزمون ضرب کنیم، انرژی پتانسیل دستگاه به دست می‌آید.

$$E = mV(r) = -\frac{GMm}{۲R}(۳ - (\frac{r}{R})^۲) \xrightarrow{r=D} E(r = D) = \frac{-GMm}{۲R}[۳ - (\frac{D}{R})^۲]$$

مثال۸: ذره‌ای تحت تأثیر نیروی مرکزی بر روی مدار بیضی شکل حرکت می‌کند. فاصله ذره از مرکز نیرو در حالتی که در اوج و حضیض است به ترتیب $2a$ و a است. نسبت سرعت‌های ذره در دو نقطه مزبور برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی می‌دانیم اندازه حرکت زاویه‌ای مقداری ثابت است لذا در دو نقطه اوج و حضیض می‌توانیم بنویسیم:

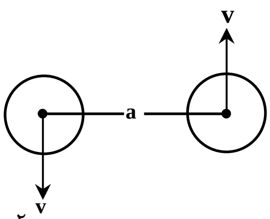


$$L_{\text{اوج}} = L_{\text{حضیض}}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v} \xrightarrow{\vec{r} \perp \vec{v}} \vec{L} = m\vec{r}\,\vec{v}$$

$$L_{\text{اوج}} = L_{\text{حضیض}} \Rightarrow r_\circ \cancel{m} v_\circ = r \cancel{m} v \Rightarrow \frac{v}{v_\circ} = \frac{r_\circ}{r} = \frac{a}{۲a} = \frac{۱}{۲}$$

مثال۹: دو ستاره هم‌جرم مطابق شکل به دور یکدیگر می‌چرخند. جرم هر یک از ستاره‌ها برحسب زمان تناوب T، فاصله بین آن دو a و ثابت جهانی گرانش G کدام است؟



۱) $\frac{۴\pi^۲ T^۲}{Ga^۳}$ ۲) $\frac{۴\pi^۲ a^۳}{GT^۲}$

۳) $\frac{\pi^۲ a^۳}{GT^۲}$ ۴) $\frac{۲\pi^۲ a^۳}{GT^۲}$

پاسخ: گزینه «۴» از قانون نیروی مرکزی و گرانش استفاده می‌کنیم:

$$\frac{mv^۲}{r} = \frac{Gmm}{a^۲} \xrightarrow{v = r\omega} v = \frac{۲\pi r}{T} \Rightarrow \frac{۴\pi^۲ r}{T^۲} = \frac{Gm}{a^۲}$$

چون دو ستاره حول یکدیگر می‌چرخند می‌توان گفت که هر دو حول محوری که عمود منصف خط واصل مرکزهای آن‌هاست می‌چرخند و فاصله‌ی هر مرکز تا این عمود منصف $r = \frac{a}{۲}$ است. $\Rightarrow m = \frac{۲\pi^۲ a^۳}{GT^۲}$

مثال۱۰: دو ماهواره به جرم‌های m و $۲m$ به دور زمین می‌چرخند. ماهواره اولی در مدار دایره‌ای به شعاع a و ماهواره دوم در مداری بیضی شکل با اقطار $۸a$ و $۲a$ قرار دارند. اگر ماهواره اول در هر شبانه‌روز یک‌بار دور زمین بچرخد، زمان تناوب ماهواره دوم چند شبانه‌روز است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) $۱۶\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق قانون سوم کپلر که صحبت از زمان تناوب ماهواره و نیم قطر بزرگ آن و رابطه این دو است می‌توان نوشت:

a : شعاع مدار دایروی

$۴a$: نیم‌قطر بزرگ مدار بیضوی

$$\left.\begin{array}{l} T_۱ = ۲\pi\sqrt{\dfrac{a^۳}{GM}} \\ T_۲ = ۲\pi\sqrt{\dfrac{(۴a)^۳}{GM}} \end{array}\right\} \rightarrow T_۲ = ۸T_۱$$

مثال۱۱: سرعت فرار از سطح سیاره‌ای که جرم آن ۱۸ برابر جرم زمین و شعاع آن ۲ برابر شعاع زمین است، چند برابر سرعت فرار از سطح زمین است؟

پاسخ: با استفاده از رابطه $v_e = \sqrt{\frac{۲GM}{R}}$ داریم:

زمین : $M_۱ \,,\, R_۱ \Rightarrow v_{۱e} = \sqrt{\frac{۲GM_۱}{R_۱}}$

سیاره : $M_۲ = ۱۸M_۱ \,,\, R_۲ = ۲R_۱ \Rightarrow v_{۲e} = \sqrt{\frac{۲GM_۲}{R_۲}} = \sqrt{\frac{۲G \times ۱۸M_۱}{۲R_۱}}$

$$\frac{v_{۲e}}{v_{۱e}} = \sqrt{\frac{\dfrac{۳۶GM_۱}{۲R_۱}}{\dfrac{۲GM_۱}{R_۱}}} = \sqrt{۹} \Rightarrow v_{۲e} = ۳v_{۱e}$$

مثال۱۲: **جسمی به جرم m با سرعت نصف سرعت فرار از سطح زمین در راستای قائم به هوا پرتاب می‌شود. با چشم‌پوشی از مقاومت هوا این جسم حداکثر از سطح زمین تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (R_e شعاع زمین است.)**

۱) R_e ۲) $\frac{1}{3}R_e$ ۳) $\frac{1}{7}R_e$ ۴) $\frac{1}{2}R_e$

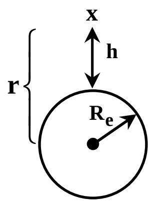
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» وقتی جسمی دارای سرعت فرار است انرژی کل آن صفر است.

$$E_{کل}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R_e}=0$$

در نتیجه رابطه سرعت فرار به صورت مقابل است:

$$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R_e}}$$

قانون پایستگی انرژی را به کار می‌بریم در سطح زمین و در فاصله r از سطح زمین:



در سطح زمین $E_0=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_e}$ در فاصله r از سطح زمین $E=-\frac{GMm}{r}$

پایستگی انرژی $E_0=E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_e}=-\frac{GMm}{r} \xrightarrow{v=\frac{v_e}{2}} \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R_e}=-\frac{GMm}{r}$

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2GM}{R_e}}\right)^2-\frac{GMm}{R_e}=-\frac{GMm}{r}\Rightarrow\frac{3}{4}\frac{GMm}{R_e}=\frac{GMm}{r}\Rightarrow r=\frac{4}{3}R_e \qquad h=r-R_e=\frac{4}{3}R_e-R_e=\frac{1}{3}R_e$$

توضیح: سرعت فرار حداقل سرعتی است که جسم برای ترک زمین به آن نیاز دارد.

بخش دوم : فیزیک (۲)

فصل هشتم

«الکترواستاتیک»

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال۱: دو کولن بار الکتریکی شامل چند الکترون می‌باشد؟

۱) ۶۲۵×۱۰^{۱۶} ۲) $۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}$ ۳) ۱۲۵۰×۱۰^{۱۶} ۴) $۳/۲\times ۱۰^{-۱۹}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$q = ne \Rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{۲}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}} = ۲\times \frac{۱۰^{۱۹}}{۱/۶} = ۱۲۵۰\times ۱۰^{۱۶}$$

مثال۲: نیروی بین دو بار الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ که با فاصله r از یکدیگر قرار دارند، F است. اگر اندازه‌ی هر یک از دو بار و همچنین فاصله بین دو بار دو برابر گردد، نیروی بین آن‌ها چند برابر F می‌شود ؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به رابطه قانون کولن یعنی $F = K\frac{q_۱q_۲}{r^۲}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F = K\frac{q_۱q_۲}{r^۲} \\ r' = ۲r \\ q'_۱ = ۲q_۱ \\ q'_۲ = ۲q_۲ \end{cases} \Rightarrow F' = K\frac{(۲q_۱)(۲q_۲)}{(۲r)^۲} = K\frac{q_۱q_۲}{r^۲}$$

مثال۳: شعاع هسته اتم آهن تقریباً ۴×۱۰^{-۱۵} m می‌باشد، این اتم ۲۶ پروتون دارد. بزرگی نیروی الکترواستاتیکی دافعه بین دو پروتون در فاصله ۴×۱۰^{-۱۵} m تقریباً چقدر است ؟

۱) ۱۲N ۲) ۱۴N ۳) ۱۶N ۴) ۱۸N

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» توجه شود که مقدار دو بار با هم برابر و معادل $e = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}$ C می‌باشد.

$$F = K\frac{q_۱q_۲}{r^۲} = ۹\times ۱۰^۹ \times \frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})^۲}{(۴\times ۱۰^{-۱۵})^۲} = ۱۴N$$

مثال۴: فاصلهٔ میان دو پروتون تقریباً چند سانتی‌متر باشد تا نیروی دافعهٔ الکتریکی وارد بر هر کدام با وزن آن در سطح زمین مساوی باشد؟ جرم پروتون $۱/۷\times ۱۰^{-۲۷}$ kg است. $(g = ۹/۸\frac{m}{s^۲})$

۱) ۱/۲ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۳۵

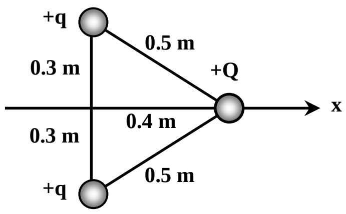
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تنها کاری که باید انجام دهیم این است که نیروی دافعه الکتریکی وارد بر هر پروتون را برابر نیروی وزن آن قرار دهیم:

$$W = F \Rightarrow mg = k\frac{q^۲}{r^۲} \Rightarrow r^۲ = \frac{kq^۲}{mg}$$

$$r^۲ = \frac{۹\times ۱۰^۹ \times (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})^۲}{۱/۷\times ۱۰^{-۲۷}\times ۹/۸} = \frac{۹\times (۱/۶)^۲\times ۱۰^{-۲۹}}{۱۶/۶۶\times ۱۰^{-۲۷}} \Rightarrow r \simeq \frac{۳\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱}}{۴} = ۰/۱۲m = ۱۲cm$$

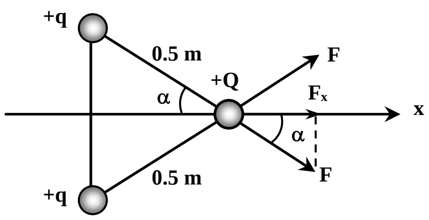
برای انجام محاسبات به صورت تقریبی فرض کردیم که $(۴)^۲ \simeq ۱۶/۶۶$ است.

مثال۵: سه بار الکتریکی مثبت مطابق شکل قرار گرفته‌اند. اگر $q = ۲\mu C$ و $Q = ۴\mu C$ باشد، آنگاه مقدار کل نیروی وارد بر بار Q در راستای محور xها کدام است ؟



۱) $۰/۱۷N$
۲) $۰/۴۶N$
۳) $۰/۲۹N$
۴) $۰/۲۳N$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا مقدار نیروی F ناشی از بار $+q$ بالایی را محاسبه می‌کنیم :



$$F = ۹\times۱۰^۹\times\frac{۴\times۱۰^{-۶}\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۰/۵)^۲} = ۰/۲۹N$$

با استفاده از تجزیه نیروها مقدار مؤلفه F_x را محاسبه می‌کنیم :

$$F_x = F\cos\alpha = ۰/۲۹\times\frac{۰/۴}{۰/۵} = ۰/۲۳N$$

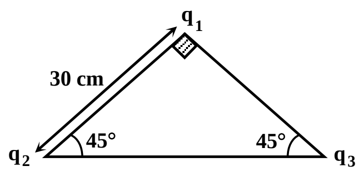
توجه شود که مقدار نیروی وارده از طرف بار $+q$ پایینی نیز دقیقاً همین مقدار است (چرا؟)

لذا برآیند نیروی وارده برابر است با: $F_x = ۰/۲۳N + ۰/۲۳N = ۰/۴۶N$ (کل)

تمرین ۱ : مقدار نیروی کل وارده بر بار Q در راستای محور yها چند نیوتن است؟

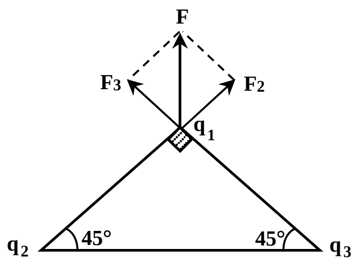
پاسخ : صفر

مثال۶: سه بار نقطه‌ای $q_۱ = q_۲ = q_۳ = ۱۰\mu C$ در سه رأس مثلث قائم‌الزاویه مطابق شکل قرار دارند. نیروی وارد بر $q_۱$ چند نیوتن است؟



۱) $۱۰۰\sqrt{۲}$
۲) $۱۰\sqrt{۲}$
۳) ۲۰
۴) $۲۰\sqrt{۲}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا نیروی وارد بر $q_۱$ از طرف $q_۳$ را محاسبه می‌کنیم:



$$F_۳ = K\frac{q_۱q_۳}{r^۲} = ۹\times۱۰^۹\times\frac{۱۰\times۱۰^{-۶}\times۱۰\times۱۰^{-۶}}{(۰/۳)^۲} = ۱۰N$$

مقدار $F_۲$ نیز دقیقاً همین مقدار است (چون فاصله آن از بار $q_۱$ و مقدار بار آن مانند $q_۳$ می‌باشد.)

چون دو نیرو بر هم عمودند برآیند آن‌ها برابر است با: $F = \sqrt{F_۳^۲ + F_۲^۲} = \sqrt{(۱۰)^۲ + (۱۰)^۲} = ۱۰\sqrt{۲}N$

توجه شود که مطابق قانون کسینوس‌ها نیز می‌توان F را حساب کرد:

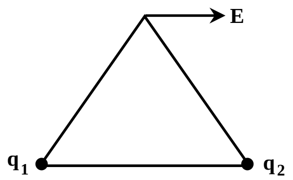
$$\text{نیروی وارد بر بار } q_۱\quad F = ۲F_۲\cos\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow F = ۲F_۲\cos(\frac{۹۰}{۲}) = ۲F_۲\times\cos۴۵^\circ = ۲\times۱۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\sqrt{۲}N$$

مثال۷: شش بار مساوی q را در گوشه‌های یک شش ضلعی منتظم قرار می‌دهیم. اگر یک بار q' در مرکز این شش ضلعی که فاصله آن از هر کدام از بارها r است قرار دهیم، نیروی کل وارد بر بار q' برابر ...... می‌باشد و اگر یکی از بارهای q را برداریم نیروی کل وارد بر بار q' برابر .... می‌شود.

۱) صفر و $\frac{kqq'}{r^۲}$
۲) صفر و $\frac{۵kqq'}{r^۲}$
۳) $\frac{۶kqq'}{r^۲}$ و صفر
۴) $\frac{۶kqq'}{r^۲}$ و $\frac{۵kqq'}{r^۲}$

پاسخ : گزینه «۱» در حالت اول چون تقارن در شش ضلعی منتظم برقرار است، لذا نیروی هر کدام از بارها بر بار q' با نیروی ناشی از بار مقابل خنثی می‌شود و نیروی کل وارده بر بار q' در این حالت صفر است. در حالت دوم اگر یکی از بارها را برداریم پنج بار باقی می‌مانند که چهار بار دو به دو نیروی یکدیگر را خنثی کرده و فقط باید نیروی وارد از طرف یک بار را در نظر بگیریم، در نتیجه نیروی کل وارد بر بار q' برابر $F = \frac{kqq'}{r^۲}$ است.

مثال۸: در دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع دو ذره با بار الکتریکی q_1 و q_2 قرار دارند و شدت میدان الکتریکی حاصل از آن‌ها در رأس دیگر مطابق شکل است. کدام گزینه صحیح است؟

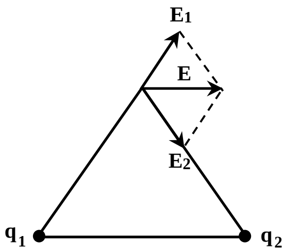


۱) q_1 مثبت و q_2 منفی و اندازه‌ی آن‌ها برابر است.

۲) q_1 مثبت و q_2 منفی و اندازه‌ی آن‌ها متفاوت است.

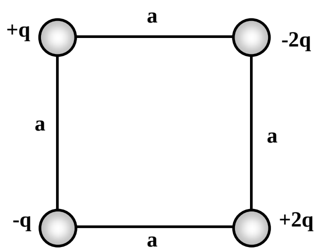
۳) q_1 منفی و q_2 مثبت و اندازه‌ی آن‌ها برابر است.

۴) q_1 منفی و q_2 مثبت و اندازه‌ی آن‌ها متفاوت است.



☑ **پاسخ :** گزینه «۱» توجه شود که تنها در حالتی که بردارهای شدت میدان E_1 و E_2 مطابق شکل باشند جهت بردار E می‌تواند به فرم نشان داده شده در صورت سؤال باشد و این در حالتی است که q_2 منفی و q_1 مثبت باشد. در صورتی مؤلفه عمودی میدان برآیند صفر می‌شود که اندازهٔ دو بار q_1 و q_2 با هم برابر باشند.

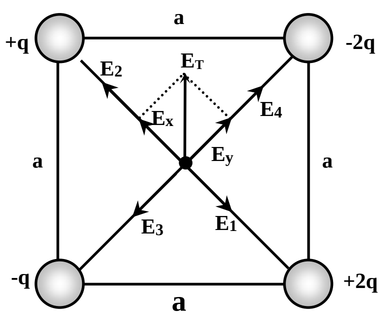
مثال۹: در مربع شکل زیر اگر $q = 1\times10^{-8}\,C$ و $a = 5\,cm$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی در مرکز آن چقدر است؟



۱) $1/02\times10^{4}\ \frac{N}{C}$ ۲) $1/02\times10^{6}\ \frac{N}{C}$

۳) $2/01\times10^{5}\ \frac{N}{C}$ ۴) $1/02\times10^{5}\ \frac{N}{C}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» فاصله هر بار از مرکز مربع $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$ می‌باشد. اگر E_1 شدت میدان ناشی از بار $+q$ و E_2 شدت میدان ناشی از بار $+2q$ باشد، میدان برآیند آن‌ها E_x خواهد بود که جهت آن به سمت میدان بزرگ‌تر می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:



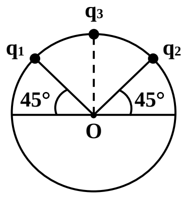
$$\begin{cases} E_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{q}{\frac{a^2}{2}} \\ E_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{(2q)}{\frac{a^2}{2}} \end{cases} \xrightarrow{\text{برآیند دو میدان}} E_x=E_2-E_1=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=7/19\times10^{4}\ \frac{N}{C} \quad (1)$$

و اگر E_3 شدت میدان ناشی از بار $-q$ و E_4 شدت میدان ناشی از بار $-2q$ باشد برآیند آن‌ها بردار E_y است که جهت آن در شکل مشخص شده است و داریم:

$$\begin{cases} E_3=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{a^2}{2})} \\ E_4=\dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{a^2}{2})} \end{cases} \xrightarrow{\text{برآیند دو میدان}} E_y=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=7/19\times10^{4}\ \frac{N}{C} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{شدت میدان کل}} E_T=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{2(7/19\times10^{4})^2}=1/02\times10^{5}\ \frac{N}{C}$$

مثال۱۰: در شکل مقابل اگر $q_1 = q_2 = -2\mu C$ باشد، q_3 چقدر باید باشد تا شدت میدان الکتریکی در نقطه O برابر صفر شود؟



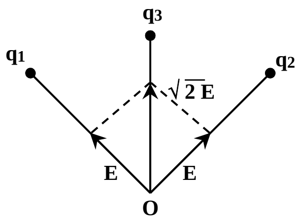
۱) $-2\sqrt{2}\mu C$

۲) $2\mu C$

۳) $-2\mu C$

۴) $2\sqrt{2}\mu C$

پاسخ : گزینه «۴»



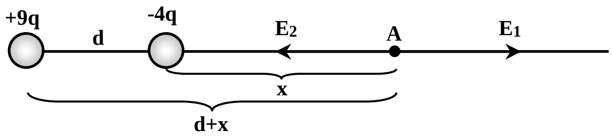
بار q_3 باید مثبت باشد تا شدت میدان الکتریکی در نقطه O صفر شود، پس یکی از گزینه‌های ۲ یا ۴ جواب خواهند بود.

$$E' = \sqrt{2}E \Rightarrow \left|\frac{kq_3}{r^2}\right| = \left|\sqrt{2}\frac{kq_1}{r^2}\right| \Rightarrow q_3 = \sqrt{2}q_1 = \sqrt{2}\times 2 = 2\sqrt{2}\mu C$$

مثال۱۱: دو بار الکتریکی 9q و 4q− در فاصله d از یکدیگر قرار دارند. در چه فاصله‌ای از بار 9q+ شدت میدان روی خط واصل دو بار صفر می‌شود؟

۱) 2d ۲) 3d ۳) $\frac{2}{3}d$ ۴) $\frac{3}{2}d$

پاسخ : گزینه «۲» **روش اول:** اگر E_1 شدت میدان حاصل از بار 9q+ و E_2 شدت میدان حاصل از بار 4q− باشد داریم :



$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{k(9q)}{(x+d)^2} \\ E_2 = \dfrac{k(4q)}{x^2} \end{cases} \xrightarrow[E_1 = E_2]{\text{برای صفر شدن برآیند شدت میدان باید}} \frac{k(9q)}{(x+d)^2} = \frac{k(4q)}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}(x+d)^2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}(x+d) \Rightarrow 3x = 2x + 2d \Rightarrow x = 2d \Rightarrow d_1 = x + d = 2d + d = 3d$$

روش دوم :

$$x = \frac{\sqrt{4q}}{\sqrt{9q}-\sqrt{4q}}\times d = \frac{2\sqrt{q}}{3\sqrt{q}-2\sqrt{q}}\times d = \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{q}}\times d = 2d \Rightarrow d_1 = x + d = 2d + d = 3d$$

مثال۱۲: ذره‌ای که دارای بار $-2\times10^{-9}\,C$ است، در یک میدان الکتریکی یکنواخت تحت تأثیر یک نیروی الکتریکی (رو به پایین) $3\times10^{-6}\,(N)$ قرار می‌گیرد. بزرگی و جهت میدان الکتریکی را تعیین کنید؟

۱) به سمت بالا، $1/5\times10^{3}\,(\frac{N}{C})$

۲) به سمت بالا، $3\times10^{3}\,(\frac{N}{C})$

۳) به سمت پایین، $1/5\times10^{3}\,(\frac{N}{C})$

۴) به سمت پایین، $3\times10^{3}\,(\frac{N}{C})$

پاسخ : گزینه «۱» بر ذره باردار از طرف میدان الکتریکی نیروی $\vec{F} = \vec{E}q$ وارد می‌شود که در آن، E شدت میدان الکتریکی و q بار الکتریکی ذره است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$F = Eq \Rightarrow E = \frac{F}{q} = \frac{3\times10^{-6}}{2\times10^{-9}} = 1/5\times10^{3}\,(\frac{N}{C})$$

از آنجا که جهت نیروی وارد بر ذره به سمت پایین است و بار الکتریکی آن منفی می‌باشد، جهت میدان الکتریکی به سمت بالا خواهد بود.

نکته۶: بار الکتریکی مثبت (q) در جهت میدان الکتریکی و بار الکتریکی منفی (q−) در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کند.

مثال۱۳: اگر فرض کنیم ذره آلفا موجود در هسته اتم هلیم، دارای جرم $۶/۴\times ۱۰^{-۲۶}$ کیلوگرم و بار الکتریکی $+۲e$ کولن باشد، اندازه و جهت میدان الکتریکی که باعث ساکن و معلق ماندن در وزن آن می‌شود، کدام است؟ $(e=۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\ ,\ g=۱۰)$

۱) $۲\mu\frac{N}{C}$ و به طرف بالا
۲) $۲n\frac{N}{C}$ و به طرف بالا
۳) $۴\mu\frac{N}{C}$ و به طرف پایین
۴) $۴n\frac{N}{C}$ و به طرف بالا

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$Eq=mg\ \Rightarrow E=\frac{mg}{q}=\frac{۶/۴\times ۱۰^{-۲۶}\times ۱۰}{۲\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۲\times ۱۰^{-۶}\ \frac{N}{C}=۲\mu\frac{N}{C}$$

توجه شود چون نیروی وزن به سمت پایین است، لذا باید جهت میدان به سمت بالا باشد تا ذره‌ی آلفا ساکن و به حال تعادل بماند.

مثال۱۴: الکترونی به جرم $۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\ kg$ در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲\times ۱۰^{۴}\ (\frac{N}{C})$ از حالت سکون رها می‌شود، شتاب الکترون کدام است؟

۱) $۳۵۱\times ۱۰^{۱۳}\ \frac{m}{s^۲}$
۲) $۳۵۱\times ۱۰^{۱۵}\ \frac{m}{s^۲}$
۳) $۳/۵۱\times ۱۰^{۱۳}\ \frac{m}{s^۲}$
۴) $۳۵/۱\times ۱۰^{۱۵}\ \frac{m}{s^۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$a=\frac{eE}{m}=\frac{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\times ۲\times ۱۰^{۴}}{۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}}=۳/۵۱\times ۱۰^{۱۵}\ \frac{m}{s^۲}$$

مثال۱۵: یک دو قطبی با ممان دو قطبی $P=۱/۵nc.m$ در میدانی به اندازه $۴\times ۱۰^{۶}\ (\frac{N}{C})$ که زاویه ۳۰° با امتداد p می‌سازد، قرار دارد. مقدار گشتاور دو قطبی برحسب نیوتن متر کدام است؟

۱) ۰/۰۰۳
۲) ۰/۰۳
۳) ۳
۴) ۰/۰۰۰۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$T=P\times E=PE\sin\theta=۱/۵\times ۱۰^{-۹}\times ۴\times ۱۰^{۶}\times\frac{۱}{۲}=۳\times ۱۰^{-۳}\ N.m=۰/۰۰۳N.m$$

مثال۱۶: یک دو قطبی الکتریکی شامل دو بار مخالف به بزرگی $q=۲\mu c$ در میدان خارجی $۲۰۰\frac{N}{C}$ قرار دارد. اگر فاصله بین دو بار $d=۱۰cm$ باشد، حداکثر گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی از طرف میدان چند N.m است؟

۱) ۴×۱۰^{-۵}
۲) ۴۰۰
۳) ۴×۱۰^{-۴}
۴) ۰/۰۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\tau=PE\sin\theta\Rightarrow\tau_{max}=PE\ \ ;\ \ P=qd=۲\times ۱۰^{-۶}\times ۰/۱=۲\times ۱۰^{-۷}\Rightarrow\tau_{max}=۲\times ۱۰^{-۷}\times ۲۰۰=۴\times ۱۰^{-۵}\ N.m$$

مثال۱۷: یک خط بار نامتناهی در فاصله ۲متری خود یک میدان به شدت $۴/۵\times ۱۰^{۴}\ \frac{N}{C}$ ایجاد می‌کند. چگالی بار خطی کدام است ؟

۱) $۵\times ۱۰^{-۵}\ \frac{c}{m}$
۲) $۵\times ۱۰^{-۶}\ \frac{c}{m}$
۳) $۱۰\times ۱۰^{-۵}\ \frac{c}{m}$
۴) $۱۰\times ۱۰^{-۶}\ \frac{c}{m}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\lambda=E۲\pi\varepsilon_۰ r=۴/۵\times ۱۰^{۴}\times ۲\pi\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\times ۲=۵\times ۱۰^{-۶}\ \frac{c}{m}$$

مثال۱۸: چگالی بار سطحی σ قرص باردار روی سطح بالایی آن $+۵/۳\ \frac{\mu c}{m^۲}$ است. میدان الکتریکی در سطح قرص کدام است؟

۱) $۳\times ۱۰^{۶}\ \frac{N}{C}$
۲) $۳\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$
۳) $۶\times ۱۰^{۶}\ \frac{N}{C}$
۴) $۶\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}=\frac{۵/۳\times ۱۰^{-۶}}{۲\times(۸/۸۵)\times ۱۰^{-۱۲}}=۳\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

مثال۱۹: دو صفحهٔ فلزی بزرگ هر کدام به مساحت $1m^2$ رو به روی یکدیگر قرار دارند. فاصلهٔ این صفحات ۵cm است و حامل بارهای مساوی و مخالف در سطوح داخلی خود هستند. اگر E در بین صفحات $55\frac{N}{C}$ باشد، بار روی صفحات چقدر است؟ $(\varepsilon_0 = 8/85\times10^{-12}\frac{C^2}{N.m^2})$

۱) $4/8\times10^{-11}$ ۲) $4/8\times10^{-10}$ C ۳) $4/8\times10^{-12}$ C ۴) $0/48\times10^{-12}$ C

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» وقتی دو صفحهٔ فلزی باردار با بار مخالف روبه‌روی هم قرار می‌گیرند میدان الکتریکی در فضای بین دو صفحه عبارت است از $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ که در آن σ چگالی سطحی بار روی صفحات است. $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 A}\Rightarrow q=E\varepsilon_0 A=(55)\times(8/85\times10^{-12})\times1=4/8\times10^{-10}\ C$

مثال۲۰: الکترونی با انرژی ۱۰۰ev مستقیماً به طرف صفحهٔ فلزی بزرگی که دارای چگالی سطحی بار $-1\times10^{-6}\frac{C}{m^2}$ است، پرتاب می‌شود. از چه فاصله‌ای الکترون باید پرتاب شود تا درست در لحظهٔ برخورد سرعت آن صفر شود؟ $(\varepsilon_0 = 8/9\times10^{-12}\frac{C^2}{N.m^2})$

۱) 4/4mm ۲) 0/44mm ۳) 0/89mm ۴) 8/9mm

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» صفحه فلزی باردار در فضا میدان الکتریکی E را ایجاد می‌کند که بزرگی آن از رابطهٔ $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ به دست می‌آید. این میدان بر الکترون نیرو وارد می‌کند. کاری که این نیرو بر روی الکترون انجام می‌دهد باید با انرژی اولیه الکترون برابر باشد تا سرعت آن در لحظه برخورد با صفحه صفر باشد: $k_0=100eV=100\times1/6\times10^{-19}=1/6\times10^{-17}\ J$

$$\begin{cases}F=Eq=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}q\\ W=F.d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}W=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}qd\\ W=k_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1/6\times10^{-17}=\frac{1\times10^{-6}}{8/9\times10^{-12}}\times1/6\times10^{-19}\times d\\ d=0/89\times10^{-3}=0/89mm\end{cases}$$

مثال۲۱: شار الکتریکی عبوری هر یک از وجوه یک تاس، به جز وجه ششم که شش خال دارد، از رابطه $\varphi_B=+n(\frac{Nm^2}{C})$ به دست می‌آید که n تعداد خال‌های موجود روی هر وجه است. برای nهای زوج شار مثبت (به طرف خارج) و برای nهای فرد شار منفی (به طرف داخل) است. با فرض اینکه بار الکتریکی در داخل تاس وجود نداشته باشد، شار عبوری از وجه ششم این تاس کدام است؟

۱) $1(\frac{N.m^2}{C})$ ۲) $2(\frac{N.m^2}{C})$ ۳) $3(\frac{N.m^2}{C})$ ۴) $6(\frac{N.m^2}{C})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\sum_{i=1}^{6}\varphi_i=0\Rightarrow\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5+\varphi_6=0\Rightarrow\varphi_6=-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)=-(-1+2-3+4-5)=3(\frac{N.m^2}{C})$$

مثال۲۲: یک سیم نازک مستقیم بسیار بلند، حامل بار منفی با چگالی خطی بار $-3/14\frac{nc}{m}$ است. اگر استوانه‌ای یکنواخت با بار مثبت، به شعاع 1/5cm و هم‌محور با سیم، این سیم را احاطه کند، چگالی حجمی بار ρ (استوانه) کدام است، با شرط اینکه میدان الکتریکی برآیند در خارج استوانه صفر باشد؟

۱) $5/1\frac{\mu c}{m^3}$ ۲) $4/4\frac{\mu c}{m^3}$ ۳) $4/4\frac{n\mu}{m^3}$ ۴) $\frac{5/1nc}{m^3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون شرط صفر شدن میدان الکتریکی را داریم، باید شار عبوری از سطح گوسی (سطحی شامل سیم و استوانه) نیز صفر شود و طبق قانون گوس داریم: $\varphi=\frac{Q_{کل}}{\varepsilon_0}$؛ پس باید $Q_{کل}$ صفر شود:

$$Q_{کل}=Q_{استوانه}+Q_{سیم}=\rho\pi R^2L+\lambda\times L=0\Rightarrow\rho=\frac{-\lambda}{\pi R^2}=\frac{3/14\times10^{-9}}{\pi\times(1/5\times10^{-2})^2}\simeq4/4(\frac{\mu c}{m^3})$$

مثال۲۳: چگالی بار سطحی یک کره رسانای باردار یکنواخت به شعاع $120\,cm$ برابر $8/1\frac{\mu c}{m^2}$ می‌باشد، شار الکتریکی کل که از سطح کره بیرون می‌آید کدام است ؟

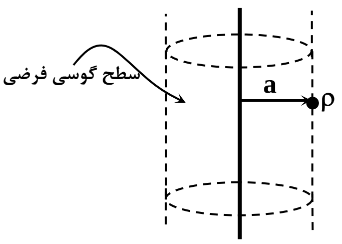
۱) $3/66\times10^{5}$ ۲) $3/66\times10^{-6}$ ۳) $1/65\times10^{7}$ ۴) $1/46\times10^{-4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» طبق قانون گوس داریم:

$$q=\sigma A=\sigma(4\pi R^2)=1/46\times10^{-4}\ (C)\quad;\quad \varphi=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{1/46\times10^{-4}\ (C)}{8/85\times10^{-12}\ (\frac{C^2}{N.m^2})}=1/65\times10^{7}\ (\frac{N.m^2}{C})$$

◆◆◆◆

مثال۲۴: مطلوبست محاسبه میدان حاصل از یک توزیع بار خطی بی‌نهایت طویل با چگالی بار خطی λ در یک نقطه خارج خط.



☑ **پاسخ:** با توجه به قانون گوس:

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

طول خط بی‌نهایت طویل $l:$ ، $q:$ کل بار موجود در داخل سطح $=\lambda\times l$

$S:$ مساحت سطح گوسی مفروض $=2\pi a l$

میدان الکتریکی در فاصله a از یک خط بی‌نهایت طویل:

$$E=\frac{\lambda \cancel{l}}{\varepsilon_0 2\pi a \cancel{l}}=\frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi a}$$

◆◆◆◆

مثال۲۵: کره نارسانایی به شعاع $10\,cm$ بار نامعلومی دارد. اگر میدان الکتریکی در فاصله $15\,cm$ از مرکز کره برابر $3\times10^{3}\frac{N}{C}$ و به سمت مرکز کره باشد، بار خالص کره چقدر است ؟

۱) $7/5\times10^{-9}\ C$ ۲) صفر ۳) $-7/5\times10^{-9}\ C$ ۴) $15\times10^{-9}\ C$

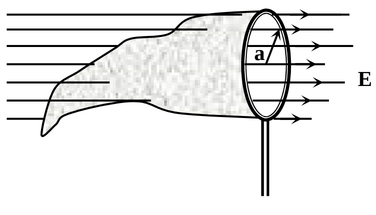
☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Rightarrow q=4\pi\varepsilon_0 r^2E=4\pi\times8/85\times10^{-12}\times(0/15)^2\times3\times10^{3}=7/5\times10^{-9}\ C$$

با توجه به اینکه در صورت سؤال ذکر شده است که جهت شدت میدان به سمت مرکز کره می‌باشد، لذا بار منفی است، یعنی $q=-7/5\times10^{-9}\ C$ می‌باشد.

◆◆◆◆

مثال۲۶: یک تور پروانه‌گیری مطابق شکل زیر در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد. قاب فلزیِ این تور، دایره‌ای به شعاع a که عمود بر میدان است در نظر گرفته شده است. شار الکتریکی که از تور می‌گذرد نسبت به بردار عمود بر سطح به طرف خارج کدام است؟



۱) πa^2E ۲) $\frac{\pi a^2E}{2}$ ۳) $-\frac{\pi a^2E}{2}$ ۴) $-\pi a^2E$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» اگر یک سطح گوسی شامل تور و قاب دایره‌ای آن در نظر بگیریم، چون هیچ بار الکتریکی درون این سطح قرار ندارد، لذا شار کل عبوری از این سطح مفروض صفر است. اگر φ_1 را شار عبوری از تور و φ_2 را شار عبوری از قاب در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\sum\varphi=0\Rightarrow\varphi_1+\varphi_2=0\Rightarrow\varphi_1=-\varphi_2=-\pi a^2E$$

◆◆◆◆

مثال۲۷: بار نقطه‌ای q را در روی سطح خارجی کره‌ی نارسانایی قرار می‌دهیم شار الکتریکی عبوری از کره چقدر است؟

۱) $\frac{q}{\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{q}{2\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{q}{9\varepsilon_0}$ ۴) $\sqrt{3}\frac{q}{5\varepsilon_0}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر دو کره‌ی یکسان را مماس بر هم به طوری قرار دهیم که بار نقطه‌ای بین آن دو قرار بگیرد شار عبوری از مجموع ۲ کره برابر $\frac{q}{\varepsilon_0}$ می‌باشد.

مثال۲۸: **پتانسیل الکتریکی در فاصله $r = ۲/۱۲\times ۱۰^{-۱۰}\,m$ از هسته یک اتم هیدروژن (هسته یک پروتون دارد) چقدر است؟**

۱) ۷/۷۸ ولت ۲) ۸/۷۸ ولت ۳) ۶/۷۸ ولت ۴) ۵/۷۸ ولت

پاسخ : گزینه «۳»

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{e}{r}\right) = \frac{ke}{r} = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}{۲/۱۲\times ۱۰^{-۱۰}} = ۶/۷۸v$$

مثال۲۹: **اگر اختلاف پتانسیل میان نقطه A و B، ۱۵۰۰ باشد، با صرف $۱/۲\times ۱۰^{-۳}\,J$ انرژی چند میکروکولن بار را می‌توان از یک نقطه به نقطه دیگری انتقال داد؟**

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۸ ۴) ۴۰

پاسخ : گزینه «۲»

$$V = \frac{W}{q} \Rightarrow q = \frac{W}{V} = \frac{۱/۲\times ۱۰^{-۳}}{۱۵۰۰} = ۰/۸\times ۱۰^{-۶}\,(c) = ۰/۸\mu c$$

مثال۳۰: **دو جسم فلزی ۱ و ۲ را با یک سیم به هم وصل می‌کنیم و مشاهده می‌شود جریان الکتریکی از جسم ۱ به طرف جسم ۲ می‌باشد. کدام گزینه درست است ؟**

۱) $Q_۱ = Q_۲$ ۲) $V_۱ = V_۲$ ۳) $Q_۱ < Q_۲$ ۴) $V_۲ < V_۱$

پاسخ : گزینه «۴» مطابق توضیحات نکته فوق جهت از جسم با پتانسیل بیشتر به سمت جسم با پتانسیل کمتر است.

نکته۱۴: پتانسیل الکتریکی بر روی سطح کره‌ای به شعاع R که حامل بار الکتریکی q می‌باشد عبارت است از $V = K\frac{q}{R}$. اگر کره رسانا باشد، پتانسیل نقاط داخل آن نیز همین مقدار را خواهند داشت.

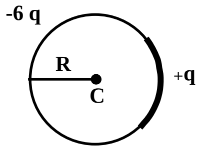
مثال۳۱: **پتانسیل یک قطره کروی آب که حامل ۳۰pc بار روی سطح خود است، ۵۰۰v می‌باشد، شعاع کره چند متر است ؟**

۱) $۵/۴\times ۱۰^{-۳}$ ۲) $۵/۴\times ۱۰^{-۲}$ ۳) $۵/۴\times ۱۰^{-۵}$ ۴) $۵/۴\times ۱۰^{-۴}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow r = \frac{kq}{V} = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۳۰\times ۱۰^{-۱۲}}{۵۰۰} = ۵/۴\times ۱۰^{-۴}\,(m)$$

مثال۳۲: **بار مثبت q+ به طور یکنواخت روی یک چهارم پیرامون یک میله پلاستیکی دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است و بار منفی ‎-6q روی بقیه پیرامون دایره به طور یکنواخت پخش شده است. پتانسیل الکتریکی در مرکز دایره چقدر می‌باشد؟**



۱) $-\frac{۷q}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$ ۲) $-\frac{۵q}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$

۳) $\frac{۷q}{۲\pi\varepsilon_۰ R}$ ۴) $\frac{-۵q}{۲\pi\varepsilon_۰ R}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به آن که در محاسبه‌ی پتانسیل سطح کره یا محیط دایره، فرض می‌شود که بار الکتریکی در مرکز کره یا دایره جمع شده است، می‌توان نوشت.

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{q}{R} - \frac{۶q}{R}\right] = -\frac{۵q}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$$

مثال۳۳: **اگر پتانسیل کره رسانایی به شعاع $r = ۰/۹m$، ۱۵۰۰v و در بی‌نهایت $V = ۰$ باشد، بار اضافی روی این کره چقدر است ؟**

۱) $۱۵\times ۱۰^{-۸}\,C$ ۲) $-۱۵\times ۱۰^{-۷}\,C$ ۳) $۱۵\times ۱۰^{-۷}\,C$ ۴) $۱۵\times ۱۰^{-۹}\,C$

پاسخ : گزینه «۱»

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow q = \frac{rV}{k} = \frac{۰/۹\times ۱۵۰۰}{۹\times ۱۰^{۹}} = ۱۵\times ۱۰^{-۸}\,C$$

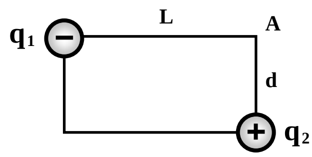
مثال۳۴: دو کره فلزی کوچک با شعاع‌های مساوی و بارهای الکتریکی هم نام q و 5q به فاصله d از یکدیگر قرار گرفته‌اند و بر هم نیروی $F_۱$ را وارد می‌کنند.اگر دو کره را چند لحظه با هم تماس داده و باز در همان فاصله d قرار دهیم،بر هم نیروی $F_۲$ وارد می‌کنند. نسبت $\frac{F_۲}{F_۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ : گزینه «۱» بار هر کره پس از تماس:

$$q' = \frac{۵q+q}{۲} = ۳q \quad ; \qquad \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{\frac{K(۳q)(۳q)}{d^۲}}{\frac{K(۵q)(q)}{d^۲}} \Rightarrow \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{(۳q)(۳q)}{(۵q)(q)} = \frac{۹}{۵}$$

مثال۳۵: در مستطیل شکل زیر طول مستطیل 15cm و عرض آن 5cm می‌باشد و بار روی آن $q_۱ = -۵\mu c$ و $q_۲ = ۲\mu c$ است، پتانسیل الکتریکی در نقطه A چند ولت است ؟



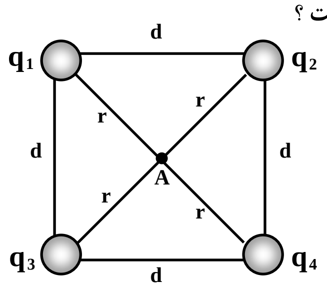
۱) ۷×۱۰^۳ ۲) ۶×۱۰^۳

۳) ۶×۱۰^۴ ۴) ۷×۱۰^۴

پاسخ : گزینه «۳» اگر $L = ۰/۱۵m$ طول مستطیل و $d = ۰/۰۵m$ عرض مستطیل باشد، داریم:

$$V_A = k[\frac{q_۱}{L} + \frac{q_۲}{d}] = ۹\times۱۰^۹ [\frac{-۵\times۱۰^{-۶}}{۰/۱۵} + \frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۰/۰۵}] = ۶\times۱۰^۴ \text{ v}$$

مثال۳۶: پتانسیل الکتریکی حاصل از چهار بار نشان داده شده در شکل زیر در مرکز مربع تقریباً چند ولت است ؟



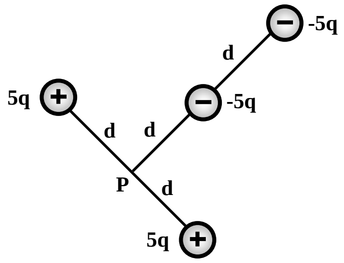
$$\begin{cases} q_۱ = ۱۲nc \\ q_۲ = -۲۴nc \\ q_۳ = ۳۱nc \\ q_۴ = ۱۷nc \\ r = ۰/۹۲m \end{cases}$$

۱) ۲۵۰V
۲) ۳۵۰V
۳) ۴۰۰V
۴) ۴۸۰V

پاسخ : گزینه «۲»

$$V = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{q_۴}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = k(\frac{q_۱+q_۲+q_۳+q_۴}{r}) = \frac{۹\times۱۰^۹\times(۱۲-۲۴+۳۱+۱۷)\times۱۰^{-۹}}{۰/۹۲} \simeq ۳۵۰ \text{ v}$$

مثال۳۷: پتانسیل خالص حاصل از چهار بار نقطه‌ای در نقطه p مطابق شکل چقدر است ؟



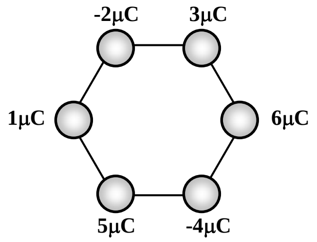
۱) $\frac{۵q}{۴\pi\varepsilon_۰ d}$ ۲) $\frac{۳q}{۸\pi\varepsilon_۰ d}$

۳) $\frac{۵q}{۸\pi\varepsilon_۰ d}$ ۴) $\frac{۳q}{۴\pi\varepsilon_۰ d}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$V = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}[-\frac{۵}{۲d} - \frac{۵}{d} + \frac{۵}{d} + \frac{۵}{d}] = \frac{۵q}{۸\pi\varepsilon_۰ d}$$

مثال۳۸: شش بار به اندازه‌های ۱، ۲- ، ۳، ۶، ۴- و ۵ میکروکولن مطابق شکل در رئوس یک شش ضلعی منتظم به ضلع $۳۰cm$ قرار گرفته‌اند. پتانسیل در مرکز شش ضلعی چند کیلوولت است؟



۱) ۸۱۰
۲) ۲۷۰
۳) ۹۰
۴) ۳۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در یک شش ضلعی منتظم، شعاع دایره محیطی با طول هر کدام از اضلاع برابر است. بنابراین شعاع دایره محیطی برابر $r = ۳۰cm$ خواهد بود. پتانسیل الکتریکی یک کمیت عددی است، در نتیجه پتانسیل نهایی در مرکز شش ضلعی، مجموع پتانسیل ناشی از هر کدام از بارها در مرکز خواهد بود. از آنجایی که فاصله هر کدام از بارها تا مرکز شش ضلعی، برابر شعاع دایره محیطی است می‌توان نوشت:

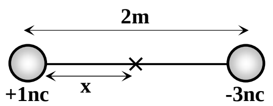
$$V = V_۱ + V_۲ + V_۳ + V_۴ + V_۵ + V_۶ = \frac{kq_۱}{r} + \frac{kq_۲}{r} + \frac{kq_۳}{r} + \cdots + \frac{kq_۶}{r} = \frac{k}{r}(q_۱ + q_۲ + q_۳ + \cdots + q_۶)$$

$$= \frac{۹\times۱۰^۹}{۳۰\times۱۰^{-۲}}(۱-۲+۳+۶-۴+۵)\times۱۰^{-۶} = ۲۷\times۱۰^۴ \ v = ۲۷۰kv$$

مثال۳۹: دو بار نقطه‌ای $۱nc$+ و $۳nc$− به فاصله $۲m$ از یکدیگر قرار دارند، در چه نقطه‌ای بر روی خط واصل دو بار پتانسیل صفر است؟

۱) در فاصله $۰/۵m$ از بار $۱nc$+
۲) در فاصله $۰/۵m$ از بار $۳nc$−
۳) در فاصله $۰/۷۵m$ از بار $۱nc$+
۴) در فاصله $۰/۷۵m$ از بار $۳nc$−

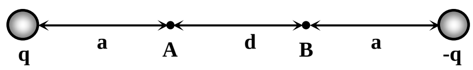
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» پتانسیل الکتریکی در واقع پتانسیل ناشی از دو بار است و می‌دانیم در نقطه‌ای بین دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر صفر خواهد شد. اگر فاصله نقطه مورد نظر تا بار $۱nc$+ را x در نظر بگیریم. خواهیم داشت:



$$V_۱ + V_۲ = ۰ \Rightarrow \frac{kq_۱}{x} + \frac{kq_۲}{(۲-x)} = ۰$$

$$\frac{۹\times۱۰^۹\times۱\times۱۰^{-۹}}{x} - \frac{۹\times۱۰^۹\times۳\times۱۰^{-۹}}{(۲-x)} = ۰ \Rightarrow \frac{۹}{x} - \frac{۲۷}{(۲-x)} = ۰ \ ; \ \frac{۹(۲-x)-۲۷x}{x(۲-x)} = ۰ \Rightarrow \frac{۱۸-۳۶x}{x(۲-x)} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} = ۰/۵m$$

مثال۴۰: با توجه به شکل زیر رابطه پتانسیل $V_A - V_B$ کدام است؟



۱) $\frac{۲Kqd}{a(a+d)}$
۲) $\frac{Kqd}{a(a+d)}$
۳) $\frac{۲Kqd}{a+d}$
۴) $\frac{Kqd}{۲a(a+d)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

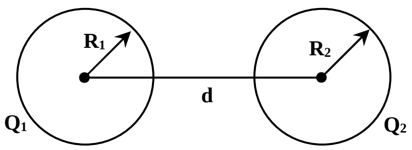
$$\begin{cases} V_A = K(\frac{q}{a} + \frac{(-q)}{a+d}) = \frac{Kqd}{a(a+d)} \\ V_B = K(\frac{q}{a+d} + \frac{(-q)}{a}) = \frac{-Kq(d)}{a(a+d)} \end{cases} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{۲Kqd}{a(a+d)}$$

مثال۴۱: دو کره رسانای مشابه که هر کدام $۵cm$ شعاع دارند و بار هر کدام برابر $۰/۰۱۲\mu C$ است به فاصله ۸ متر از هم واقع شده‌اند. اختلاف پتانسیل بین دو کره برابر .... ولت و میدان در سطح هر یک از کره‌ها حدوداً برابر .... می‌باشد.

۱) $۴/۳\times۱۰^۴$ و صفر
۲) صفر و $۴/۳۲\times۱۰^۴$
۳) $۲۱/۶\times۱۰^۲$ و $۴/۳۲\times۱۰^۴$
۴) $۴/۳۲\times۱۰^۴$ و ۲۱×۱۰^۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به قضیه جمع آثار، پتانسیل هر یک از کره‌ها را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$V_۱ = \frac{kQ_۱}{R_۱} + \frac{kQ_۲}{d} \ ; \quad V_۲ = \frac{kQ_۱}{d} + \frac{kQ_۲}{R_۲}$$



$$\left.\begin{aligned} V_۱ &= \frac{۹\times۱۰^۹\times۱۲\times۱۰^{-۹}}{۵\times۱۰^{-۲}} + \frac{۹\times۱۰^۹\times۱۲\times۱۰^{-۹}}{۸} \\ V_۲ &= \frac{۹\times۱۰^۹\times۱۲\times۱۰^{-۹}}{۸} + \frac{۹\times۱۰^۹\times۱۲\times۱۰^{-۹}}{۵\times۱۰^{-۲}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_۱ - V_۲ = ۰$$

پتانسیل بین دو کره برابر صفر خواهد بود.
البته این نتیجه را بدون انجام محاسبات نیز می‌توان گرفت، زیرا به علت تقارن، پتانسیل دو کره مشابه یکدیگر خواهد بود و لذا تفاضل آن‌ها صفر خواهد شد. با توجه به این‌که فاصله دو کره از یکدیگر نسبتاً دور می‌باشد، بنابراین از تأثیر کره‌ها به یکدیگر می‌توان صرف‌نظر نمود. بنابراین شدت میدان الکتریکی در سطح هر یک از کره‌ها تقریباً برابر است با:

$$E=\frac{kQ}{R^2}=\frac{9\times10^9\times12\times10^{-9}}{(5\times10^{-2})^2}=\frac{108}{25}\times10^4=4/32\times10^4\ \frac{N}{C}$$

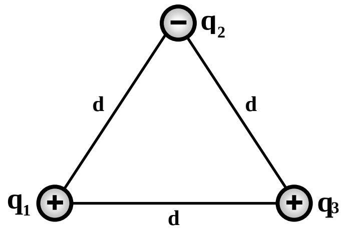
مثال۴۲: دو کره فلزی کوچک A و B به جرم $m_A=5g$ و $m_B=10g$ بار یکسانی برابر با $q=5\mu c$ دارند. این دو کره را با نخی نارسانا و بدون جرم به طول $d=1m$ که در مقایسه با شعاع کره‌ها خیلی بزرگ است، به هم وصل می‌کنیم انرژی پتانسیل دستگاه چند ژول است؟

۱) ۱۲/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۰/۲۲۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$U=\frac{kq^2}{d}=\frac{9\times10^9(5\times10^{-6})^2}{1}=0/225J$$

مثال۴۳: مطابق شکل سه بار ثابت در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. انرژی پتانسیل کل این دستگاه چقدر است ؟



$$\begin{cases} d=0/12m \\ q_1=+q \\ q_2=-4q \\ q_3=+2q \\ q=150nc \end{cases}$$

۱) $27mJ$
۲) $-27mJ$
۳) $17mJ$
۴) $-17mJ$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$U=U_{12}+U_{13}+U_{23}=k\frac{q_1q_2}{r_{12}}+k\frac{q_2q_3}{r_{23}}+k\frac{q_1q_3}{r_{13}}=k\Big[\frac{(+q)(-4q)}{d}+\frac{(+q)(+2q)}{d}+\frac{(-4q)(+2q)}{d}\Big]$$

$$=-\frac{k(10q^2)}{d}=-\frac{9\times10^9\times10\times(150\times10^{-9})^2}{0/12m}=-17mJ$$

مثال۴۴: پتانسیل سطح یک کره به شعاع r از رابطه $V=\frac{kq}{r}$ به دست می‌آید، شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای دقیقاً روی کره چقدر است؟

☑ **پاسخ :** اندازه پتانسیل تنها در راستای شعاعی تغییر می‌کند و باید نسبت به r مشتق بگیریم:

$$\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}=+\frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

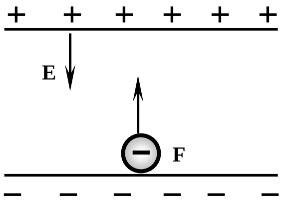
مثال۴۵: تابع میدان الکتریکی در یک فضا به صورت $E=\frac{1}{r}+2$ است، که r فاصله تا مبدأ مختصات می‌باشد. اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه $r_1=1m$ و $r_2=2m$ چند ولت است؟

۱) $Ln2+2$ ۲) ۵ ۳) $-(Ln2+2)$ ۴) -5

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$V_2-V_1=-\int_{r_1}^{r_2}Edr=-\int_1^2\left(\frac{1}{r}+2\right)dr=-[Lnr+2r]_1^2=-(Ln2+2)$$

مثال۴۶: بین دو ورقه که مطابق شکل زیر $4cm$ از هم فاصله دارند، اختلاف پتانسیل $1600v$ برقرار است. در یک زمان الکترونی را روی ورقهٔ منفی و پروتونی را روی ورقه مثبت رها می‌کنند، نیروی وارد بر الکترون چند نیوتن است ؟



۱) 6×10^{-15}

۲) $6/4\times10^{-15}$

۳) 6×10^{-16}

۴) $6/4\times10^{-16}$

پاسخ : گزینه «۲» $E=\frac{V}{d}=\frac{1600}{0/04}=4\times10^4\ (\frac{N}{C})\Rightarrow F=qE=eE=1/6\times10^{-19}\times4\times10^4=6/4\times10^{-15}\ N$

مثال۴۷: میدان الکتریکی در نزدیکی سطح زمین تقریباً $100\frac{V}{m}$ می‌باشد، اگر این مقدار میدان، روی تمام سطح باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای روی سطح زمین چند ولت است ؟

۱) $6/4\times10^7$ ۲) $6/4\times10^8$ ۳) $6/4\times10^9$ ۴) $0/64\times10^6$

پاسخ : گزینه «۲» فرض کنیم بار q بر روی زمین با تقارن کروی به طور یکنواخت توزیع شده باشد. اگر شعاع زمین $R=6/4\times10^6$ در نظر گرفته شود، پتانسیل در سطح زمین (همانند پتانسیل در سطح یک کره) از رابطه $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ به دست خواهد آمد. البته در این مسئله نیازی به استفاده از فرمول پتانسیل نیست چون میدان داده شده است: $V=ER=100\times6/4\times10^6=6/4\times10^8\ V$

فصل نهم

«خازن، جریان و مقاومت»

تست‌های تألیفی فصل نهم

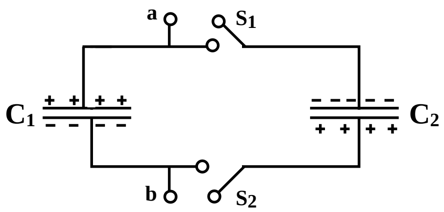
مثال۱: یک خازن به ظرفیت $۲\mu F$ را با ولتاژ $۵۰V$ شارژ کرده و سپس از باتری جدا می‌کنیم. دو سر آن را به خازن دیگری بـه ظرفیـت $۳\mu F$ کـه خالی است وصل می‌کنیم. در این حالت اختلاف پتانسیل دو سر خازن دوم چند ولت خواهد بود؟

۱) $۳۵V$ ۲) $۰V$ ۳) $۲۰V$ ۴) $۱۸V$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» دو خازن ذکر شده در سؤال به صورت موازی به هم وصل شده‌اند پس ولتاژ دو سر آن‌ها یکسان خواهد بود و به صـورت زیـر محاسـبه می‌شود:

$$V = \frac{C_۱V_۱ \pm C_۲V_۲}{C_۱ + C_۲} = \frac{۲\times۱۰^{-۶}\times۵۰ + ۳\times۱۰^{-۶}\times۰}{(۳+۲)\times۱۰^{-۶}} = ۲۰\,v$$

مثال۲: خازن‌های $C_۱ = ۱\mu F$ و $C_۲ = ۳\mu F$ با قطبیدگی مخالف تا اختلاف پتانسـیل $V = ۱۰۰v$ بـاردار شـده‌انـد. اکنـون کلیـدهای $S_۱$ و $S_۲$ را می‌بندیم، بار روی $C_۲$ چقدر است؟



۱) $۳\times۱۰^{-۴}\,C$

۲) $۱/۵\times۱۰^{-۴}\,C$

۳) $۳\times۱۰^{-۵}\,C$

۴) $۱/۵\times۱۰^{-۵}\,C$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» وقتی کلیدها بسته می‌شوند اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌ها یکسان شده و خازن‌ها در وضعیت مـوازی قـرار مـی‌گیرنـد. اخـتلاف پتانسیل V_{ab} با استفاده از رابطه $V_{ab} = \frac{q}{C_{eq}}$ محاسبه می‌شود.

بار روی هر خازن قبل از بسته شدن کلید به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} C_{eq} = C_۱ + C_۲ = ۴\times۱۰^{-۶}\,F \\ q_۱ = C_۱V_۱ = (۱\times۱۰^{-۶})(۱۰۰V) = ۱\times۱۰^{-۴}\,C \quad , \quad q_۲ = C_۲V_۲ = ۳\times۱۰^{-۶}\times۱۰۰ = ۳\times۱۰^{-۴}\,(C) \end{cases}$$

بار خالص کل ترکیب به صورت مقابل می‌باشد :

$$Q = q_۲ - q_۱ = ۳\times۱۰^{-۴}\,(C) - ۱\times۱۰^{-۴}\,(C) = ۲\times۱۰^{-۴}\,(C)$$

$$V_{ab} = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{۲\times۱۰^{-۴}}{۴\times۱۰^{-۶}} = ۵۰\,v \Rightarrow q_۲ = V_{ab}C_۲ = ۳\times۱۰^{-۶}\times۵۰ = ۱/۵\times۱۰^{-۴}\,C$$

مثال۳: خازن مسطحی به وسیله دو دی‌الکتریک با ثابت‌های $k_۱$ و $k_۲$ که ضخامت هر کدام $\frac{e}{۲}$ است، پر شده است ظرفیت خازن برابر است با :

۱) $\frac{\varepsilon.A}{e}(\frac{k_۱+k_۲}{k_۱k_۲})$ ۲) $\frac{\varepsilon.A}{e}(\frac{k_۱k_۲}{k_۱+k_۲})$ ۳) $\frac{۲\varepsilon.A}{e}(\frac{k_۱+k_۲}{k_۱k_۲})$ ۴) $\frac{۲\varepsilon.A}{e}(\frac{k_۱k_۲}{k_۱+k_۲})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» هرگاه بین صـفحات خـازن تختـی کـه دی‌الکتریـک آن هـوا اسـت $(k=۱)$ دی الکتریـک بـا ثابـت‌هـای دی‌الکتریـک متفـاوت (k های مختلف) قرار دهیم، مجموعه تشکیل شده در واقع معادل دو خازن سری با یکدیگر خواهد بود .

$$\begin{cases} C_۱ = k_۱\varepsilon_۰\frac{A}{d_۱} = k_۱\varepsilon_۰\frac{A}{\frac{e}{۲}} = ۲k_۱\varepsilon_۰\frac{A}{e} \\ C_۲ = k_۲\varepsilon_۰\frac{A}{d_۲} = k_۲\varepsilon_۰\frac{A}{\frac{e}{۲}} = ۲k_۲\varepsilon_۰\frac{A}{e} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲} = \frac{۴\varepsilon_۰^۲k_۱k_۲(\frac{A^۲}{e^۲})}{۲\varepsilon_۰(\frac{A}{e})(k_۱+k_۲)} = \frac{۲\varepsilon_۰A}{e}(\frac{k_۱k_۲}{k_۱+k_۲})$$

مثال۴: چگالی جریان الکتریکی در یک سیم استوانه‌ای به شکل زیر تعریف شده است. کل جریانی که از استوانه‌ای با مشخصات $r = 1$ و $3 \le Z \le 0$ در داخل سیم عبور می‌کند چه مقدار است؟ $J = \frac{1}{r}\hat{r} + (\frac{2}{1+r^2})\hat{z}$

۱) $2\pi(3 + Ln2)$ ۲) $2\pi Ln2$ ۳) 6π ۴) 0

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در ابتدا چگالی جریان را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: $J_1 = \frac{1}{r}\hat{r} \;,\; J_2 = \frac{2}{1+r^2}\hat{z}$

جریان حاصل از تک‌تک چگالی جریان‌ها به صورت مقابل خواهد بود: $I = I_1 + I_2 = \int J_1 dS_1 + \int J_2 dS_2 = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{3}\frac{1}{r} r d\varphi dz + \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\frac{2}{1+r^2} r d\varphi dr$

دقت شود سطح S سطحی است که بر راستای عبور جریان عمود است به همین دلیل:

$dS_1 = r dz d\varphi$ عمود بر راستای شعاعی (r)، $dS_2 = r d\varphi dr$ عمود بر راستای محور z

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^{3} dz + \int_{r=1}^{1}\frac{2r}{1+r^2}dr\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 6\pi + 2\pi\ln(2) = 2\pi(3+\ln 2)\ A$$ آمپر

مثال۵: قطر یک سیم رسانا 1mm و طول آن 2m و مقاومت آن $50\,m\Omega$ است، مقاومت ویژه این ماده چند اهم‌متر است ؟

۱) 3×10^{-8} ۲) 2×10^{-8} ۳) 3×10^{-7} ۴) 2×10^{-7}

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» شعاع سیم برابر است با: $r = \frac{1mm}{2} = 0/5mm = 0/5\times10^{-3}\ m$

$$A = \pi r^2 = \pi(0/5\times10^{-3})^2 = 7/85\times10^{-7} \quad ; \quad \rho = \frac{RA}{L} = \frac{50\times10^{-3}\times7/85\times10^{-7}}{2} = 2\times10^{-8}\ \Omega m$$

مثال۶: سه خازن مشابه و خالی را یک بار به طور متوالی و بار دیگر به طور موازی به هم می‌بندیم. اگر مجموعه را هر بار با اختلاف پتانسیل ثابت V پر کنیم، نسبت بار الکتریکی جابه‌جا شده در حالت اول به بار الکتریکی جابه‌جا شده در حالت دوم چقدر است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» بار الکتریکی جابه‌جا شده یعنی بار الکتریکی ذخیره شده در مجموعه. ظرفیت معادل خازن‌ها در حالتی که متوالی بسته شوند برابر $\frac{C}{3}$ و در حالتی که موازی بسته شوند برابر $3C$ می‌باشد، لذا داریم: $\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1V_1}{C_2V_2} = \frac{\frac{C}{3}\times V}{3C\times V} = \frac{1}{9}$

مثال۷: یک خازن $6\mu F$ به طور متوالی به یک خازن $4\mu F$ بسته شده است. به دو سر این مجموعه اختلاف پتانسیل $200v$ اعمال می‌کنیم، بار روی خازن $6\mu F$ و اختلاف پتانسیل دو سر خازن $4\mu F$ کدام است ؟

۱) $V_2 = 120\,v \;,\; q_1 = 4/8\times10^{-4}\ C$ ۲) $V_2 = 80\,v \;,\; q_1 = 48\times10^{-4}\ C$

۳) $V_2 = 120\,v \;,\; q_1 = 1/2\times10^{-3}\ C$ ۴) $V_2 = 80\,v \;,\; q_1 = 12\times10^{-4}\ C$

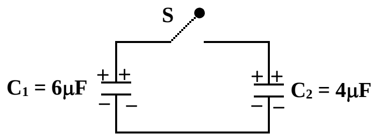
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا ظرفیت معادل دو خازن سری را به دست می‌آوریم :

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{6\times4}{6+4} = 2/4\times10^{-6}\ F \quad ; \quad q = VC = 200\times2/4\times10^{-6} = 4/8\times10^{-4}\ C$$

چون دو خازن سری بسته شده‌اند لذا بار هر یک برابر با بار کل می‌باشد: $q = q_1 = q_2$

اما اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن متفاوت خواهد بود : $V_1 = \frac{q}{C_1} = 80\,v \quad , \quad V_2 = \frac{q}{C_2} = 120\,v$

مثال۸: در شکل زیر، بار خازن C_1 برابر ۵۰۰ میکروکولن و خازن C_2 بدون بار است. اگر کلید K را ببندیم، بار خازن C_2 چند میکروکولن می‌شود؟



۱) ۱۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۳۰۰

۴) ۴۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» وقتی کلید k را می‌بندیم دو خازن باهم موازی می‌شوند و ولتاژ دو سر خازن‌ها با هم برابر خواهد شد، و بار با توجه به ظرفیت خازن‌ها تقسیم خواهد شد:

$$V_1 = V_2 \quad ; \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow q_1 = \frac{C_1}{C_2} \times q_2 = \frac{6}{4} \times q_2 = \frac{3}{2} q_2$$

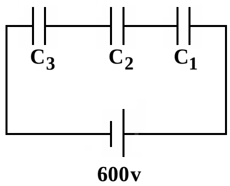
از طرفی می‌دانیم $q_1 + q_2 = 500(\mu C)$ است، لذا داریم:

$$\frac{3}{2} q_2 + q_2 = 500 \Rightarrow \frac{5}{2} q_2 = 500 \Rightarrow q_2 = 200 \mu C$$

مثال۹: سه خازن ۳۰، ۳۷/۵ و ۵۰ میکروفارادی را به صورت سری به یک منبع ولتاژ ۶۰۰ ولتی وصل کرده‌ایم. پس از پر شدن خازن‌ها، آن‌ها را از منبع جدا کرده و به صورت موازی می‌بندیم. ولتاژ خازن C_1 در حالت دوم چقدر از ولتاژ خازن C_3 در حالت اول بیشتر است؟

۱) ۸۶/۲-   ۲) ۴۱/۵   ۳) ۸/۵   ۴) ۵۸-

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ولتاژ خازن C_3 وقتی خازن‌ها به صورت سری وصل هستند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

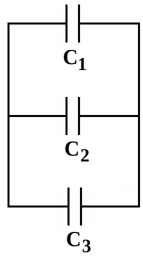


$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 12/5 \mu F$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = C_{eq} V = 12/5 \times 10^{-6} \times 600 = 7500 \times 10^{-6}\ C$$

$$V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{7500 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6}} = 150\ V$$

ولتاژ خازن C_1 وقتی خازن‌های پر شده به صورت موازی بسته می‌شوند نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$q_{eq} = q_1 + q_2 + q_3 = 3q_1 = 3 \times 7500 \times 10^{-6}\ C \quad ; \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 117/5 \mu F = 117/5 \times 10^{-6}\ F$$

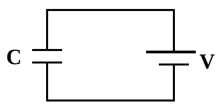
بنابراین در نهایت اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها در حالت موازی برابر است با:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \frac{q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{3 \times 7500 \times 10^{-6}}{117/5 \times 10^{-6}} \simeq 191/5 V$$

و در نهایت اختلاف بین ولتاژ خازن C_1 در حالت دوم با ولتاژ خازن C_3 در حالت اول عبارت است از:

$$V_1 - V_3 = 191/5 - 150 = 41/5 V$$

مثال۱۰: در مدار شکل مقابل، در حالی که باتری به خازن وصل است، فاصله صفحه‌های خازن را زیاد می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟



۱) ظرفیت و بار خازن هر دو کم می‌شود.

۲) ظرفیت کم و بار ثابت می‌ماند.

۳) ظرفیت زیاد و بار کم می‌شود.

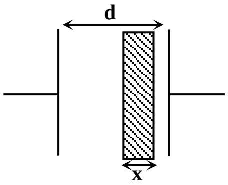
۴) ظرفیت و بار هر دو زیاد می‌شود.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون خازن به دو سر منبع ولتاژ وصل است، لذا ولتاژ آن باید ثابت باشد و طبق رابطه $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ اگر فاصله صفحات را زیاد کنیم، آنگاه ظرفیت خازن کم می‌شود. از طرفی طبق رابطه $V = \frac{q}{C}$ چون V ثابت است و ظرفیت خازن کم شده است، باید بار خازن نیز کاهش یابد تا ولتاژ تغییر نکند.

مثال۱۱: شعاع صفحه دایره‌ای یک خازن تخت برابر با $8/2\,cm$ و فاصله بین صفحات $1/3\,mm$ است. اگر اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن $120\,v$ باشد، چقدر بار روی خازن جمع می‌شود ؟

۱) $17\times10^{-8}\,C$ ۲) $18\times10^{-8}\,C$ ۳) $18nc$ ۴) $17nc$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا ظرفیت خازن را محاسبه می‌کنیم، چون صفحات دایره‌ای شکل هستند مساحت هر صفحه $A=\pi R^2$ می‌باشد، لذا داریم :



$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}=\frac{\varepsilon_0\pi R^2}{d}=\frac{8/85\times10^{-12}\times3/14\times(8/2\times10^{-2})^2}{1/3\times10^{-3}}=1/4\times10^{-10}\,(F)$$

$$q=VC\Rightarrow q=120\times1/4\times10^{-10}=1/7\times10^{-8}=17nc$$

مثال۱۲: خازنی با عایق هوا و صفحات موازی به سطح $A=10\,cm^2$ داریم. فاصله صفحات $d=5cm$ است. بین این دو صفحه را با عایق به ضخامت $5cm$ و با سطح $10\,cm^2$ پر می‌کنیم. برای این که ظرفیت خازن تغییر نکند، یکی از صفحات را به اندازه $0/04$ متر از صفحه دیگر دور می‌کنیم، ضریب دی‌الکتریک عایق چقدر است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۵

پاسخ : گزینه «۴» قبل از قرار دادن عایق، ظرفیت خازن عبارتست از: $C=\varepsilon_0\frac{A}{d}$

بعد از قرار دادن عایق بین صفحات و دور کردن یکی از صفحات به اندازه $d'=4cm$، در واقع مثل این است که دو خازن با ظرفیت‌های $K\varepsilon_0\frac{A}{d}$ و $\varepsilon_0\frac{A}{d'}$ داریم که به صورت سری به هم وصل‌اند. ظرفیت معادل آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$C'=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{K\frac{\varepsilon_0A}{d}\frac{\varepsilon_0A}{d'}}{K\frac{\varepsilon_0A}{d}+\frac{\varepsilon_0A}{d'}}=\frac{K\varepsilon_0A}{Kd'+d}$$

اما می‌خواهیم ظرفیت C' با ظرفیت C برابر باشد:

$$\frac{K\varepsilon_0A}{Kd'+d}=\frac{\varepsilon_0A}{d}\Rightarrow Kd=Kd'+d\Rightarrow K=\frac{d}{d-d'}=\frac{5}{5-4}=5$$

مثال۱۳: دو عایق با ثابت دی الکتریک $k_1=4$ و $k_2=6$ و با ضخامت‌های $d_1=6$ و $d_2=3$ میلی‌متر فاصله بین صفحات یک خازن مسطح را پر کرده‌اند. فاصله صفحات چند میلی‌متر زیادتر شود تا ظرفیت خازن به میزان قبل از قرار دادن عایق‌ها برسد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ : گزینه «۳» با زیاد کردن فاصله صفحات در واقع سه خازن با ثابت‌های دی‌الکتریک $k_1=4$ ، $k_2=6$ ، $k_3=1$ و فاصله صفحات $d_1=6mm$ و $d_2=3mm$ و d_3 داریم که به صورت سری به هم وصل‌اند. ظرفیت خازن معادل را حساب می‌کنیم.

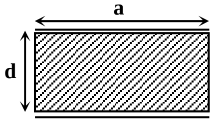
$$C_{eq}=\frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}=k_1k_2k_3\frac{\varepsilon_0A}{k_1k_3d_2+k_2k_3d_1+k_1k_2d_3}$$

طبق صورت سؤال این ظرفیت باید با ظرفیت خازن قبل از قرار دادن عایق‌ها برابر باشد:

$$k_1k_2k_3\frac{\varepsilon_0A}{k_1k_3d_2+k_2k_3d_1+k_1k_2d_3}=\frac{\varepsilon_0A}{d_1+d_2}\xrightarrow[d_1=6mm\,,\,d_2=3mm]{k_1=4\,,\,k_2=6\,,\,k_3=1}\frac{24}{4\times3\times10^{-3}+6\times6\times10^{-3}+24d_3}=\frac{1}{9\times10^{-3}}$$

$$\frac{24}{48\times10^{-3}+24d_3}=\frac{1}{9\times10^{-3}}\Rightarrow\frac{1}{2\times10^{-3}+d_3}=\frac{1}{9\times10^{-3}}\Rightarrow d_3=7\times10^{-3}=7mm$$

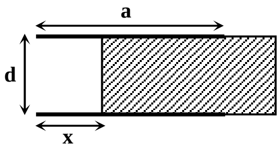
مثال۱۴: خازن مسطحی به ظرفیت C با عایقی به ضریب دی‌الکتریک k پر شده است، عایق را چقدر از بین صفحات آن بیرون بکشیم تا ظرفیت خازن به $\frac{C}{۲}$ برسد؟



۱) $\frac{ka}{(k-۱)}$ ۲) $\frac{ka}{۲(k-۱)}$

۳) $\frac{۲ka}{(k-۱)}$ ۴) $\frac{(k-۱)a}{۲k}$

پاسخ: گزینه «۲» فرض می‌کنیم عایق را به اندازه x خارج کرده‌ایم، در این حالت می‌توان نوشت:



$$C = k\varepsilon_\circ \frac{a\ell}{d}$$

$$C' = k\varepsilon_\circ \frac{(a-x)\ell}{d} + \varepsilon_\circ \frac{x\ell}{d} \Rightarrow C' = \frac{C}{۲} \Rightarrow k\varepsilon_\circ \frac{a\ell}{۲d} = k\varepsilon_\circ \frac{(a-x)\ell}{d} + \varepsilon_\circ \frac{x\ell}{d}$$

$$x = \frac{ka}{۲(k-۱)}$$

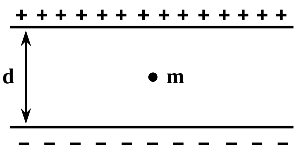
مثال۱۵: دو صفحه موازی با اختلاف پتانسیل V به فاصله ۰/۵cm از یکدیگر قرار دارند. اگر ذره‌ای با بار الکتریکی ۰/۱μC بین دو صفحه قرار گیرد، نیروی $۱۰^{-۳}$ N بر آن وارد می‌شود، اختلاف پتانسیل V چند ولت است ؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ : گزینه «۱»

$$E = \frac{F}{q} = \frac{۱۰^{-۳}}{۰/۱\times۱۰^{-۶}} = ۱۰^{۴}\,(\frac{V}{m})\ ,\ E = \frac{V}{d} \Rightarrow V = ۱۰^{۴}\times۰/۵\times۱۰^{-۲} = ۵۰\,v$$

مثال۱۶: ذره‌ای به جرم m با بار الکتریکی Q مطابق شکل بین دو صفحه خازنی به اختلاف پتانسیل V که صفحه‌های آن افقی و به فاصله d از یکدیگر می‌باشند در حال تعادل است کدام رابطه صحیح است ؟



۱) $mg = \frac{V}{d}Q$ ۲) $mg = V.Q.d$

۳) $mg = \frac{V}{Q}d$ ۴) $mg = \frac{V}{Q.d}Q$

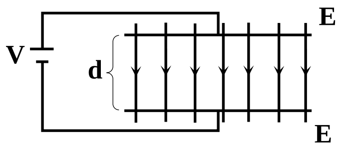
پاسخ : گزینه «۱» بار در حال تعادل است لذا برآیند نیروهای وارد بر آن صفر می‌باشد یعنی نیروی وزن $(w = mg)$ باید با نیرویی که از طرف میدان بر بار وارد می‌شود $(F = QE)$ برابر باشد .

$$mg = QE \xrightarrow{E=\frac{V}{d}} mg = Q\frac{V}{d}$$

مثال۱۷: یک خازن مسطح داریم که به یک باتری V ولتی متصل است. اگر یک دی‌الکتریک به ضخامت d و ضریب دی‌الکتریک K در این خازن قرار دهیم و سپس خارج کنیم چگالی شار الکتریکی، میدان داخلی و همچنین بردار قطبی شدگی را در هر دو حالت بیابید (فرض کنید عایق کل سطح خازن را می‌پوشاند).

پاسخ: در ابتدا خازن بدون عایق را بررسی می‌نماییم.

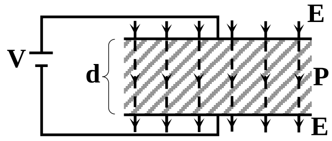
میدان الکتریکی ایجاد شده در دو سر خازن و چگالی شار حاصل:



$$E = \frac{V}{d}\quad ,\quad D = \varepsilon_\circ E = \varepsilon_\circ \frac{V}{d}$$

و چون عایقی نداریم در نتیجه در این حالت $P = ۰$ ، $P = \varepsilon_\circ (K-۱)E = ۰$ و $K = ۱$ است.

حال در حضور عایق داریم:



میدان الکتریکی ایجاد شده در دو سر خازن: $E=\frac{V}{d}$

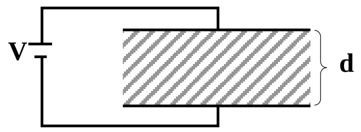
بردار قطبی شدگی نیز به صورت مقابل قابل تعریف است: $P=\varepsilon_{\circ}\chi E=\varepsilon_{\circ}(K-۱)E=\varepsilon_{\circ}(K-۱)\frac{V}{d}$

در نهایت چگالی شار را نیز می‌توان محاسبه نمود: $D=\varepsilon_{\circ}E+P=\frac{\varepsilon_{\circ}V}{d}+\varepsilon_{\circ}(K-۱)\frac{V}{d}=\varepsilon_{\circ}k\frac{V}{d}=\varepsilon E$

تذکر۴: همان طور که مطرح شد در حضور میدان خارجی بار در ناحیه میانی دی‌الکتریک به طور متوسط صفر خواهد بود. اما اگر ناحیه کوچکی از این فضا را در نظر بگیریم می‌توانیم مقدار بار حجمی موجود در آن را با استفاده از روابط ریاضی محاسبه نماییم. مقدار این بار از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$\rho_{V\,(\text{دی‌الکتریک})}=\text{div}\vec{D}=(\vec{D})$ دیورژانس

مثال۱۸: مقدار بار سطحی موجود بر روی سطوح دی‌الکتریک در خازن زیر برابر چه مقداریست؟ فرض کنید صفحات خازن با ابعاد بی‌نهایت باشند و ضریب دی‌الکتریک را نیز K فرض کنید.



۱) $\circ$
۲) $\varepsilon_{\circ}(K-۱)\frac{V}{d}$
۳) $\varepsilon_{\circ}K\frac{V}{d}$
۴) $\varepsilon_{\circ}\frac{K-۱}{۲}\frac{V}{d}$

پاسخ: گزینه «۲» در ابتدا میدان را محاسبه می‌کنیم:

$E=\frac{V}{d}$

حال مقدار بردار P را به دست می‌آوریم:

$P=\varepsilon_{\circ}(K-۱)E=\varepsilon_{\circ}(K-۱)\frac{V}{d}$

از آنجا که بار سطحی دقیقاً برابر P می‌باشد پس:

$\sigma=P=\varepsilon_{\circ}(K-۱)\frac{V}{d}$

مثال۱۹: ظرفیت یک قطره کروی جیوه به شعاع R با رابطه $C=۴\pi\varepsilon_{\circ}R$ داده شده است، اگر دو قطره با شرایط فوق با هم ترکیب شوند و یک قطره بزرگ تشکیل دهند، ظرفیت آن چقدر خواهد بود؟

۱) $۱/۲۶C$
۲) $۲/۲۶C$
۳) $۳/۲۶C$
۴) $۴/۲۶C$

پاسخ : گزینه «۱» هرگاه قطره‌ها ترکیب شود حجم دو برابر می‌شود پس $V'=۲(\frac{۴\pi}{۳})R^{۳}$. شعاع جدید R' با رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{۴\pi}{۳}(R')^{۳}=۲\times\frac{۴\pi}{۳}R^{۳}\Rightarrow R'=\sqrt[۳]{۲}R$$

$$C'=۴\pi\varepsilon_{\circ}R'=۴\pi\varepsilon_{\circ}\sqrt[۳]{۲}R=\sqrt[۳]{۲}C\Rightarrow C'=۱/۲۶C$$

مثال۲۰: خازنی به ظرفیت $C=۱\mu F$ و انرژی انباشتهٔ اولیهٔ $U=\circ/۵J$ از راه مقاومت $R=۱\times۱\circ^{۶}$ بی‌بار می‌شود. بار اولیهٔ خازن چند کولن است؟

۱) $۲\times۱\circ^{-۳}\,C$
۲) $\sqrt{۲}\times۱\circ^{-۳}\,C$
۳) $۱\circ^{-۳}\,C$
۴) $\circ/۵\times۱\circ^{-۳}\,C$

پاسخ : گزینه «۳» چون ظرفیت خازن و انرژی ذخیره شده در آن را داریم از رابطهٔ $V=\frac{۱}{۲}\frac{q^{۲}}{C}$ می‌توان بار اولیه خازن را پیدا کرد.

$$V_{\circ}=\frac{۱}{۲}\frac{q_{\circ}^{۲}}{C}\Rightarrow q_{\circ}=\sqrt{۲CV_{\circ}}=\sqrt{۲\times۱\times۱\circ^{-۶}\times\circ/۵}=۱\circ^{-۳}\,C$$

مثال۲۱: فلاش یک دوربین عکاسی برای هر فلاش ۵ ژول انرژی لازم دارد. اگر لامپ این فلاش با ولتاژ ۲۰۰ ولت کار کند، چه خازنی برای ذخیره کردن انرژی فلاش زدن لازم است؟

۱) $C = \frac{1}{4000}(F)$ ۲) $\frac{1}{40000}(F)$ ۳) $\frac{1}{4}(\mu F)$ ۴) $\frac{1}{4}(\mu F)$

پاسخ : گزینه «۱»

$$u_C = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2}\times C\times(200)^2 \Rightarrow C = \frac{10}{40000} = \frac{1}{4000}(F)$$

مثال۲۲: سه خازن $C_1 = 1/6(\mu F)$ و $C_2 = 2(\mu F)$ ، $C_3 = 4(\mu F)$ به صورت موازی به یک منبع ولتاژ وصل شده‌اند. بار الکتریکی خازن C_1 برابر $q_1 = 400$ میکروکولن می‌باشد. انرژی ذخیره شده در خازن C_3 چند میلی‌ژول است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۲۵

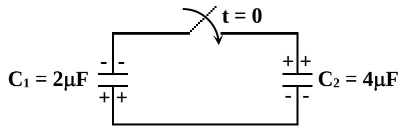
پاسخ : گزینه «۴» چون خازن‌ها موازی هستند، پس ولتاژ آن‌ها با هم برابر است یعنی $V = V_1 = V_2 = V_3$. از طرفی ولتاژ خازن C_1 از رابطه $V_1 = \frac{q_1}{C_1}$ محاسبه می‌شود، پس داریم:

$$V = V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{400\times10^{-6}}{1/6\times10^{-6}} = \frac{400}{1/6} = \frac{4000}{16} = 250\,v$$

همان طور که گفتیم این ولتاژ در واقع ولتاژ خازن C_3 نیز می‌باشد، پس داریم:

$$u_3 = \frac{1}{2}C_3V^2 = \frac{1}{2}\times4\times10^{-6}\times(250)^2 = 2\times10^{-6}\times625\times10^2 = 1250\times10^{-4} = 125\times10^{-3}\,(J) = 125(mJ)$$

مثال۲۳: خازن $C_1 = 2\mu F$ با پتانسیل $1000\,v$ و خازن $C_2 = 4\mu F$ با پتانسیل ۲۰۰۰ ولت جداگانه پر شده‌اند. اگر مطابق شکل این دو خازن را با یک کلید به هم وصل کنیم، انرژی دستگاه قبل از بسته شدن کلید چند ژول است؟



۱) صفر ۲) ۳
۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ : گزینه «۴» قبل از بستن کلید، اختلاف پتانسیل خازن‌ها همان مقادیر ابتدایی است:

$$u = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}\times2\times10^{-6}(1000)^2 + \frac{1}{2}\times4\times10^{-6}\times(2000)^2 = 1 + 8 = 9J$$

مثال۲۴: در مثال فوق مجموع انرژی دستگاه پس از بسته شدن کلید چند ژول است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ : گزینه «۲» بعد از بسته شدن کلید ولتاژ خازن‌ها با هم یکی می‌شود. ولتاژ معادل از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \frac{C_2V_2 - C_1V_1}{C_1 + C_2} = \frac{4\times10^{-6}\times2000 - 2\times10^{-6}\times1000}{2\times10^{-6} + 4\times10^{-6}} = \frac{8\times10^{-3} - 2\times10^{-3}}{6\times10^{-6}} = \frac{6\times10^{-3}}{6\times10^{-6}} = 1000\,v$$

$$u' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2 = \frac{1}{2}(4+2)\times10^{-6}\times(1000)^2 = 3J$$

مثال۲۵: انرژی انبار شده در یک خازن استوانه‌ای وقتی که اختلاف پتانسیل دو سر آن دو برابر می‌شود و وقتی که شعاع استوانه‌های داخلی و خارجی دو برابر شوند به ترتیب چند برابر انرژی حالت اولیه آن است؟

۱) ۴ و۴ ۲) ۴ و ۸ ۳) ۱ و ۴ ۴) ۴ و۱

پاسخ : گزینه «۴» ظرفیت یک خازن استوانه‌ای از رابطه روبرو محاسبه می‌شود:

$$C = 2\pi\varepsilon_0\frac{L}{Ln(\frac{b}{a})}$$

در این رابطه L طول خازن، a و b به ترتیب شعاع استوانه‌های داخلی و خارجی استوانه است. در حالت اول که اختلاف پتانسیل دو سر خازن دو برابر می‌شود، چون ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند داریم:

$$U=\frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow{V'=2V} U'=\frac{1}{2}CV'^2=\frac{1}{2}C(2V)^2=4(\frac{1}{2}CV^2)=4V$$

یعنی با دو برابر شدن اختلاف پتانسیل، انرژی ذخیره شده در خازن ۴ برابر می‌شود. اما در حالتی که شعاع استوانه‌های داخلی و خارجی دو برابر می‌شوند وضعیت متفاوت است در این حالت داریم:

$$C=2\pi\varepsilon_0\frac{L}{Ln(\frac{b}{a})} \xrightarrow[a'=2a]{b'=2b} C'=2\pi\varepsilon_0\frac{L}{Ln(\frac{b'}{a'})}=2\pi\varepsilon_0\frac{L}{Ln(\frac{b}{a})} \Rightarrow C'=C$$

چون ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند انرژی ذخیره شده در آن نیز تغییر نخواهد کرد.

$$U=\frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow{C'=C} U'=U$$

مثال۲۶: یک کره رسانا به شعاع $10\,cm$ در اختیار داریم. سیمی جریان $2A$ را وارد کره می‌کند و سیم دیگری جریان $1A$ را از آن خارج می‌سازد. حدوداً چه مدت طول می‌کشد تا پتانسیل کره $1000\,V$ افزایش یابد؟

۱) $10\,ns$ ۲) $10\,\mu s$ ۳) $5\,ns$ ۴) $5\,\mu s$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اختلاف دو جریان به صورت بار ذخیره شده بر روی کره سبب افزایش ولتاژ آن می‌گردد. از آنجایی که رابطه ولتاژ و بار در کره به صورت زیر قابل تعریف است داریم:

در مورد یک کره پتانسیل از رابطه‌ی مقابل قابل محاسبه است:

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\xrightarrow{q=it} V=\frac{it}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{(2-1)t}{4\pi\varepsilon_0\times10\times10^{-2}}=1000 \Rightarrow 9\times10^{10}\,t=10^3 \qquad t=\frac{1}{9}\times10^{-7}\,S\cong0/1\times10^{-7}\,S=10^{-8}=10\,ns$$

مثال۲۷: چگالی جریان یکنواختی در یک سیم استوانه‌ای به شعاع $R=2mm$ برابر با $J=2\times10^5\,\frac{A}{m^2}$ می‌باشد، جریانی که از بخش بیرونی سیم بین فاصله‌های شعاعی $\frac{R}{2}$ و R می‌گذرد کدام است؟

۱) $19A$ ۲) $1/9A$ ۳) $0/9A$ ۴) $0/019A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون چگالی جریان یکنواخت است از رابطه $i=JA$ استفاده می‌کنیم و باید جریان را در مقطعی به مساحت A که کمتر از مساحت کل مقطع می‌باشد محاسبه کنیم:

$$A=\pi R^2-\pi(\frac{R}{2})^2=\pi(\frac{3}{4}R^2)=\frac{3\pi}{4}(2\times10^{-3})^2=3\pi\times10^{-6}\,(m^2)$$

$$i=JA=2\times10^5\times3\pi\times10^{-6}=6\pi\times10^{-1}\simeq1/9A$$

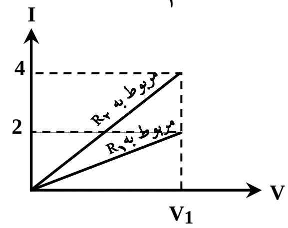
مثال۲۸: چگالی جریان الکتریکی در مختصات دکارتی به صورت $\vec{J}=3\hat{i}+4\hat{j}$ است. کل جریان عبوری از سیمی با مقطع مربع به طول a که در امتداد محور x ها قرار دارد چقدر است؟

۱) $4a^2$ ۲) $3a^2$ ۳) a^2 ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه سیم در امتداد محور x ها قرار دارد المان سطح به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d\vec{A}=dydz\,\hat{i} \quad ; \quad I=\int\vec{J}.d\vec{A}=\int(3\hat{i}+4\hat{j}).(dydz)\hat{i}=\int3dydz=3a^2$$

مثال۲۹: نمودار تغییر جریان با تغییرات ولتاژ برای دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ دریک محور مختصات رسم شده است. نسبت $\frac{R_۱}{R_۲}$ کدام است ؟



۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{۱}{R_۱}=\frac{۲}{V_۱}\Rightarrow R_۱=\frac{V_۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{R_۲}=\frac{۴}{V_۱}\Rightarrow R_۲=\frac{V_۱}{۴}\Rightarrow\frac{R_۱}{R_۲}=\frac{\frac{V_۱}{۲}}{\frac{V_۱}{۴}}=۲$$

مثال۳۰: مقاومت ویژه‌ی فلز B سه برابر مقاومت ویژه‌ی فلز A، طول A نصف طول B، و قطر B دو برابر قطر A می‌باشد. نسبت مقاومت الکتریکی A به B در دمای مساوی کدام است ؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times(\frac{D_B}{D_A})^۲=\frac{\rho_A}{۳\rho_A}\times\frac{\frac{۱}{۲}L_B}{L_B}\times(\frac{۲D_A}{D_A})^۲=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}\times۴=\frac{۲}{۳}$$

مثال۳۱: یک میلهٔ آلومینیومی با مقطع مربع به ضلع 5mm، 1m طول دارد. قطر یک میلهٔ مسی گرد به طول 1m چقدر باشد تا همان مقاومت میله آلومینیومی را داشته باشد؟ $(\rho_{cu}=۱/۷\times۱۰^{-۸}\,\Omega m\ ,\ \rho_{Al}=۲/۸\times۱۰^{-۸}\,\Omega.m)$

۱) ۱/۵mm ۲) ۲۲mm ۳) ۷/۳mm ۴) ۸/۱mm

پاسخ : گزینه «۲» میلهٔ آلومینیومی و مسی باید مقاومت‌های برابر داشته باشند، در نتیجه:

$$R_{A\ell}=R_{Cu}\ \Rightarrow\ \rho_{A\ell}\frac{L_{A\ell}}{A_{A\ell}}=\rho_{Cu}\frac{L_{Cu}}{A_{Cu}}\xrightarrow{L_{A\ell}=L_{cu}}A_{cu}=\frac{\rho_{cu}}{\rho_{A\ell}}A_{A\ell}$$

$$A_{cu}=\frac{\pi D_{cu}^۲}{۴}\ \Rightarrow\ D_{cu}=\sqrt{\frac{۴}{\pi}\frac{\rho_{cu}}{\rho_{A\ell}}A_{A\ell}}=\sqrt{\frac{۴}{\pi}\times\frac{۱/۷\times۱۰^{-۸}}{۲/۸\times۱۰^{-۸}}\times۲۵\times۱۰^{-۶}}=۲۲mm$$

تذکر۸: حجم یک سیم از رابطه $V=lA$ محاسبه می‌شود. در مسائل دقت شود وقتی سیمی را می‌کشیم (با استفاده از حدیده و یا هر وسیله دیگری) حجم همواره ثابت می‌ماند.

مثال۳۲: سیمی با مقاومت ۶Ω را با حدیده می‌کشیم به طوری که طول آن به سه برابر طول اولیه برسد با فرض اینکه مقاومت ویژه و چگالی ماده تغییر نکند، مقاومت سیم بلندتر کدام است ؟

۱) ۹Ω ۲) ۵۴Ω ۳) ۱۸Ω ۴) ۲۷Ω

پاسخ : گزینه «۲» طول سیم جدید $L'=۳L$ می‌باشد و با توجه به اینکه حجم سیم نیز ثابت می‌ماند لذا باید $L'A'=LA$ باشد. در نتیجه $A'=\frac{LA}{L'}=\frac{LA}{۳L}=\frac{A}{۳}$ و طبق رابطه مقاومت داریم:

$$R'=\frac{\rho L'}{A'}=\frac{\rho۳L}{\frac{A}{۳}}=۹\frac{\rho L}{A}\xrightarrow{R=\rho\frac{L}{A}}R'=۹R=۹\times۶=۵۴\Omega$$

مثال۳۳: مقاومت یک تکه فلز در دمای $۲۰^\circ C$ برابر R می‌باشد. اگر ضریب دمایی این قطعه فلز حدوداً $(۴\times۱۰^{-۳}\,{}^\circ C^{-۱})$ باشد به ازای چه دمایی مقاومت این قطعه ۳ برابر خواهد شد؟

۱) ۵۰۰ ۲) ۵۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه «۲»

$$R_۲=R_۱(۱+\alpha\Delta T)\Rightarrow۳\cancel{R}=\cancel{R}(۱+\alpha\Delta T)\Rightarrow\alpha\Delta T=۲$$

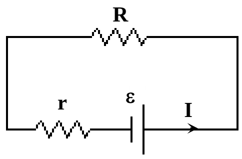
با توجه به رابطه ضریب دمایی در مقاومت‌ها داریم:

$$\Delta T=\frac{۲}{\alpha}=\frac{۲}{۴\times۱۰^{-۳}}=۵۰۰^\circ C\Rightarrow T_۲-T_۱=۵۰۰\Rightarrow T_۲=۵۰۰+۲۰=۵۲۰^\circ C$$

مثال۳۴: یک مقاومت $0/1\Omega$ به یک باتری با نیروی محرکهٔ الکتریکی $1/5V$ بسته شده است. انرژی گرمایی با آهنگ $10\,W$ تولید می‌شود. مقاومت داخلی باتری چند اهم است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل روبرو می‌توان نوشت:



$$\varepsilon = I(R+r) \Rightarrow r = \frac{\varepsilon - IR}{I}$$

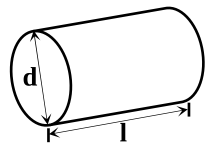
مقادیر ε و R را داریم، اما مقدار I باید محاسبه شود. از آنجایی که توان مصرفی در مقاومت را داریم می‌نویسیم:

$$P = RI^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{10}{0/1}} = 10\,A \quad ; \quad r = \frac{\varepsilon - IR}{I} = \frac{1/5 - (10)\times(0/1)}{10} = 0/05\Omega$$

مثال۳۵: دو مقاومت استوانه‌ای شکل از یک جنس ساخته شده‌اند و طول یکسانی دارند. این مقاومت‌ها وقتی به دو سر باتری‌های مشابهی وصل می‌شوند یکی از آن‌ها دو برابر دیگری توان مصرف می‌کند. نسبت قطرهای دو مقاومت را بیابید.

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» در مورد یک مقاومت استوانه‌ای مقدار مقاومت از رابطه زیر قابل محاسبه است.



d: قطر مقاومت

$$R = \rho_0 \frac{l}{A} = \rho_0 \frac{l}{\pi(\frac{d}{2})^2} = \rho_0 \frac{4l}{\pi d^2}$$

توان تلفاتی در مقاومت اول $P_1 = \dfrac{V_1^2}{R_1}$

توان تلفاتی در مقاومت دوم $P_2 = \dfrac{V_2^2}{R_2}$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} = \frac{\cancel{V_2^2}}{R_2} \times \frac{R_1}{\cancel{V_1^2}} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow R_2 = 2R_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = 2 = \frac{\cancel{\rho_{0_2}} \frac{\cancel{4}l_2}{\cancel{\pi} d_2^2}}{\cancel{\rho_{0_1}} \frac{\cancel{4}l_1}{\cancel{\pi} d_1^2}} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{2}$$

مثال۳۶: یک مقاومت استوانه‌ای به شعاع $0/5cm$ و طول $3cm$ دارای مقاومت ویژهٔ $4\times10^{-5}\,\Omega.m$ است. هنگامی که توان مصرفی $0/1w$ باشد چگالی جریان چند آمپر بر مترمربع خواهد بود؟ $(\pi \simeq 3)$

۱) $4/1\times10^{-4}$ ۲) $4/1\times10^{4}$ ۳) $3/3\times10^{-4}$ ۴) $3/3\times10^{4}$

پاسخ : گزینه «۴» توان مصرفی در مقاومت R از رابطهٔ $P = RI^2$ به دست می‌آید و از آنجایی که برای مقاومت R می‌توان نوشت $R = \rho\dfrac{L}{A}$ خواهیم داشت:

$$P = RI^2 = (\rho\frac{L}{A})(JA)^2 = J^2\rho LA$$

در رابطه بالا J چگالی جریان، ρ مقاومت ویژه، L طول مقاومت و A سطح مقطع آن است.

$$P = J^2\rho LA \Rightarrow J = (\frac{P}{\rho LA})^{\frac{1}{2}} = (\frac{0/1}{4\times10^{-5}\times3\times10^{-2}\times\pi\times(5\times10^{-3})^2})^{\frac{1}{2}} = 3/3\times10^{4}\,\frac{A}{m^2}$$

مثال۳۷: یک دستگاه گرم کنندهٔ $500W$ برای کار با خط $115V$ طراحی شده است. اگر ولتاژ به $110V$ افت پیدا کند، چند درصد از گرمای خروجی افت می‌کند؟ (فرض کنید که مقاومت تغییر نمی‌کند.)

۱) ۸۵% ۲) ۸/۵% ۳) ۰/۸۵% ۴) ۰/۰۸۵%

پاسخ : گزینه «۲» توان مصرفی در دستگاه از رابطهٔ $P = \dfrac{V^2}{R}$ محاسبه می‌شود و از آنجایی که مقاومت دستگاه ثابت فرض شده است با تغییر ولتاژ اعمالی به آن توان مصرفی در دستگاه تغییر می‌کند.

میزان افت گرمای خروجی $P_1 = \dfrac{V_1^2}{R}\ ,\ P_2 = \dfrac{V_2^2}{R} \Rightarrow \Delta P = \dfrac{V_1^2}{R} - \dfrac{V_2^2}{R} = \dfrac{V_1^2 - V_2^2}{R} = \dfrac{(115)^2 - (110)^2}{R} = \dfrac{1125}{R}$

میزان افت گرمای خروجی به درصد: $\frac{\Delta P}{P_۱}\times ۱۰۰ = \frac{\frac{۱۱۲۵}{R}}{\frac{۱۱۱۲}{R}}\times ۱۰۰ = ۸/۵\%$

مثال۳۸: شرکت‌های بیمه آتش‌سوزی، میزان جریان مجاز انواع متعدد سیم‌ها را مشخص کرده‌اند. برای سیم مسی روپوش دار نمرهٔ ۱۰ (قطر سیم = $۰/۱۰in = ۲/۵mm$) بیشینه جریان مجاز $۲۵A$ است. با این جریان، آهنگ تولید انرژی گرمایی در $۳۰۵m$ از این سیم چند وات است؟ (مقاومت ویژه مس $\rho = ۱/۷\times ۱۰^{-۸}\ \Omega.m$)

۱) $۱۶۰w$ ۲) $۶۴۰w$ ۳) $۵۰۳w$ ۴) $۶۳۶w$

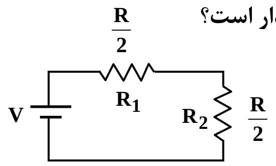
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر مقاومت الکتریکی سیم R باشد توان مصرفی در آن از رابطهٔ $P = RI^۲$ قابل محاسبه است. جریان عبوری از سیم $I = ۲۵A$ می‌باشد. تنها کافی است مقاومت آن را به دست آوریم:

$$P = RI^۲ = (\rho\frac{L}{A})I^۲ = (\frac{۱/۷\times ۱۰^{-۸}\times ۳۰۵}{\pi\frac{(۲/۵\times ۱۰^{-۳})}{۴}})\times (۲۵)^۲ = ۶۴۰w$$

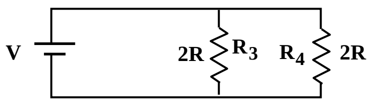
مثال۳۹: در دو مدار زیر توان تلفاتی بر روی هر یک از مقاومت‌ها چه مقدار است؟

۱) $\frac{V^۲}{R}, \frac{۲V^۲}{R}$ ۲) $\frac{V^۲}{R}, \frac{V^۲}{۲R}$

۳) $\frac{V^۲}{۲R}, \frac{V^۲}{۲R}$ ۴) $\frac{۲V^۲}{R}, \frac{۲V^۲}{R}$



مدار ۱



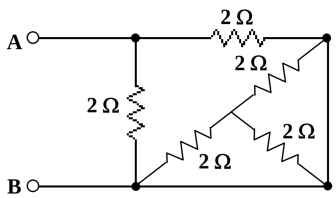
مدار ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در هر دو حالت مقاومت معادل برابر R می‌باشد و جریان عبوری از منبع $I = \frac{V}{R}$ خواهد بود. پس در هر دو حالت توان تلفاتی در دو مقاومت یکسان خواهند بود.

توان تلف شده بر روی مقاومت‌ها در حالت اول: $P_۱ = R_۱I^۲ = \frac{R}{۲}\times\frac{V^۲}{R^۲} = \frac{V^۲}{۲R}$

توان تلف شده بر روی مقاومت‌ها در حالت دوم: $P_۳ = \frac{V^۲}{R_۳} = \frac{V^۲}{۲R} = \frac{V^۲}{۲R}$

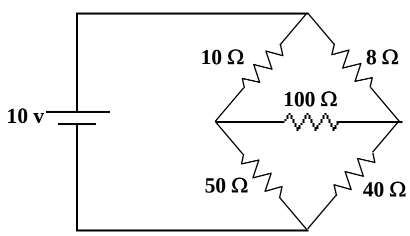
مثال۴۰: مقاومت معادل در شکل روبرو از دو پایانه A و B چند اهم است؟



۱) ۱
۲) ۱/۳۳
۳) ۱/۴
۴) ۲

☑ **پاسخ** : گزینه «۱» با دقت مشاهده می‌شود که مقاومت‌های ۲ اهمی شاخه بالا و سمت چپ مدار با هم موازی هستند (مقاومت‌های شاخه مثلثی شکل در واقع اتصال کوتاه شده‌اند.) لذا: $R_{AB} = \frac{۲\times ۲}{۲+۲} = ۱\Omega$

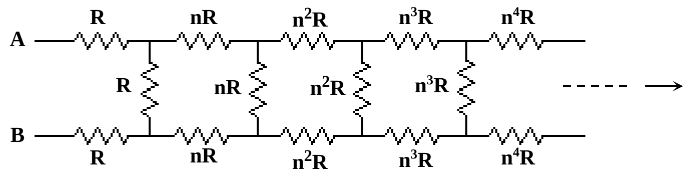
مثال۴۱: در مدار مقابل توان مصرفی در مقاومت ۱۰۰Ω چند میلی‌وات است؟



۱) ۰
۲) ۱۰
۳) ۲۰
۴) ۳۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مدار یک پل وتستون در حال تعادل می‌باشد $(۸\times ۵۰ = ۱۰\times ۴۰)$ و جریان عبوری از مقاومت ۱۰۰ اهم صفر و لذا توان مصرفی در آن نیز برابر صفر خواهد بود.

مثال۴۲: در مدار زیر R_{eq} از دو سر B و A کدام است؟ ($n = R = 1$)



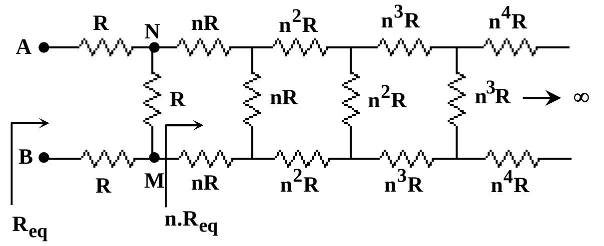
۱) $2/73\Omega$

۲) $3/21\Omega$

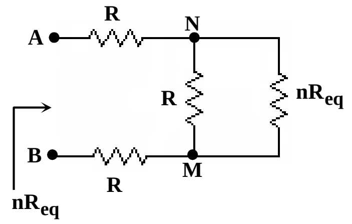
۳) $4/12\Omega$

۴) $1/19\Omega$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این مدار باید به این نکته توجه شود که اگر در شبکه‌ای تمام مقاومت‌ها در عدد n ضرب شوند، مقاومت معادل از دو سر آن شبکه نیز در عدد n ضرب می‌شود. لذا برای مدار فوق می‌توان فرض کرد که مقاومت معادل از دو سرN و M، n برابر مقاومت معادل از دو سر B و A است. بنابراین داریم:



$\Rightarrow$



$$R_{eq} = 2R + R \parallel nR_{eq}$$

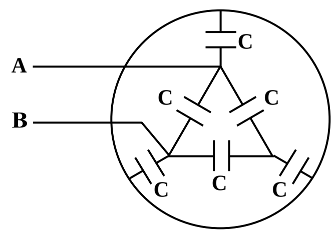
معادله فوق یک معادله درجه دوم است که یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد که جواب مثبت به صورت زیر قابل قبول است:

$$R_{eq} = 2R + \frac{R \times nR_{eq}}{R + nR_{eq}}$$

در صورتی که $n = R = 1$ باشد داریم:

$$R_{eq} = 2 + \frac{R_{eq}}{1 + R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} = 2/73\Omega$$

مثال۴۳: ظرفیت معادل خازن‌ها در مدار شکل داده شده از دو نقطه A وB چند C است؟



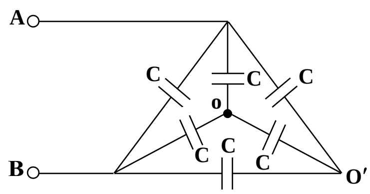
۱) $0/5$

۲) ۲

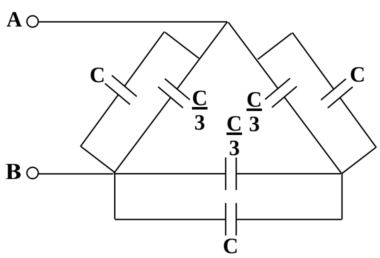
۳) ۱

۴) $1/2$

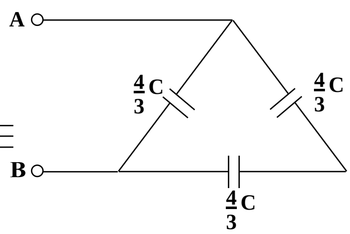
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» **روش اول :** شکل را به صورت روبرو می‌توان نمایش داد:



توجه شود نقطه o همان نقطه مشترک سه خازن بیرونی است که ما آن را به داخل مثلث هدایت کردیم. حال اگر اتصال ستاره داخلی را بـه اتصـال مثلث تبدیل کنیم، آنگاه مدار شکل زیر را خواهیم داشت :



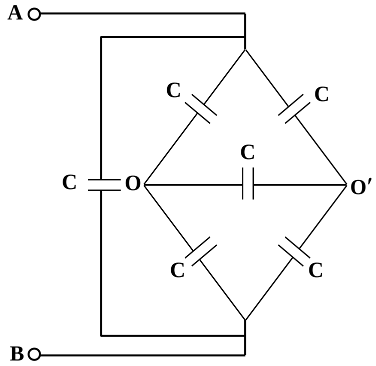
$\equiv$

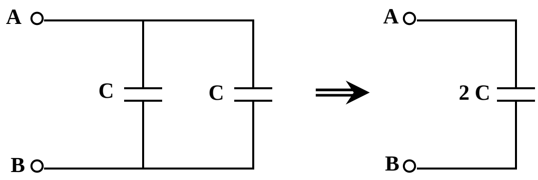


$$C_{AB} = \frac{\frac{4C}{3} \times \frac{4C}{3}}{\frac{4C}{3} + \frac{4C}{3}} \parallel \frac{4C}{3}$$

$$\Rightarrow C_{AB} = \frac{2C}{3} \parallel \frac{4C}{3} = 2C$$

روش دوم: چون تمام اضلاع، خازن C است لذا پل وتستون معادل یک C خواهد بود.





$$\Rightarrow C_{AB} = ۲C$$

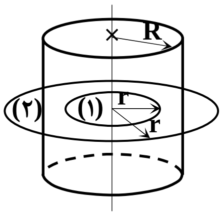
فصل دهم

«میدان‌های مغناطیسی»

تست‌های تألیفی فصل دهم

مثال۱: از یک سیم مسی استوانه‌ای به شعاع R جریان i، که به طور یکنواخت در مقطع سیم توزیع شده است، می‌گذرد. میدان مغناطیسی حاصل از این سیم در داخل و خارج سیم کدام است؟

۱) $\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲},\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}$ ۲) $\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲},\frac{\mu_\circ i}{۲\pi R}$ ۳) $\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r},\frac{\mu_\circ i}{۲\pi R}$ ۴) $\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲},\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲}$



پاسخ: گزینه «۱» با توجه به توزیع جریان، حلقه دایره‌ای انتخاب مناسبی برای منحنی آمپر می‌باشد، چرا که میدان بر روی تمام نقاط آن با توجه به تقارن جریان یکسان و ثابت است.

۱) نقاط داخل سیم: یک حلقه دایره‌ای فرضی در داخل سیم در نظر می‌گیریم و با استفاده از قانون آمپر B را محاسبه می‌کنیم: $B=\frac{\mu_\circ I_{in}}{L}$

برای محاسبه I_{in} بهتر است در ابتدا چگالی جریان را در داخل سیم به دست آورده و سپس کل جریان عبوری از داخل منحنی را حساب کنیم:

$$J=\frac{I}{S}=\frac{i}{\pi R^۲}\Rightarrow I_{in}=J.S=\frac{i}{\pi R^۲}\times\pi r^۲=\frac{ir^۲}{R^۲}\xrightarrow{\text{پس}}B=\frac{\mu_\circ i\frac{r^۲}{R^۲}}{۲\pi r}=\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲}$$

۲) نقاط خارج سیم: در این حالت نیز یک حلقه دایره‌ای با شعاع بزرگ‌تر از R فرض می‌کنیم:

دقت شود در این حالت کل جریان i از داخل منحنی بسته عبور می‌کند پس $I_{in}=i$:

$$B=\frac{\mu_\circ I_{in}}{L}=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}$$

مثال۲: درون سیم‌لوله‌ای که در هر متر آن ۵۰۰۰ حلقه موجود است و شدت جریان ۱۰ آمپر از آن عبور می‌کند، میدان مغناطیسی برحسب تسلا تقریباً کدام است؟

۱) $۶/۳\times ۱۰^{-۲}$ ۲) $۶/۳\times ۱۰^{-۳}$ ۳) $۶/۳\times ۱۰^{-۴}$ ۴) $۶/۳\times ۱۰^{-۱}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$B=\mu_\circ ni=۴\pi\times ۱۰^{-۷}\times ۵۰۰۰\times ۱۰=۶/۳\times ۱۰^{-۲}\ (T)$$

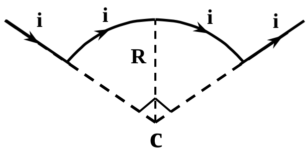
مثال۳: میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ای به شعاع ۳۰ سانتی‌متر که از آن جریان ۵ آمپر می‌گذرد، تقریباً چند تسلا است؟ $(\pi\approx ۳)$

۱) $۱۰^{-۵}$ ۲) $۱۰^{-۷}$ ۳) ۲×۱۰^{-۵} ۴) ۳×۱۰^{-۷}

پاسخ: گزینه «۱»

$$B=\frac{\mu_\circ}{۲}.\frac{I}{r}=\frac{۴\pi\times ۱۰^{-۷}}{۲}\times\frac{۵}{۰/۳}=۱۰^{-۵}\ T$$

مثال۴: سیمی مطابق شکل حامل جریان i می‌باشد، اگر زاویه مرکزی کمان $\frac{\pi}{۲}$ باشد میدان مغناطیسی B در مرکز کمان (نقطه c) کدام است؟



۱) $\frac{\mu_\circ i}{۴R}$ ۲) $\frac{\mu_\circ i}{۸R}$ ۳) $\frac{\mu_\circ i}{R}$ ۴) $\frac{\mu_\circ i}{۲R}$

پاسخ: گزینه «۲» توجه شود که میدان ناشی از قسمت‌های راست سیم در نقطه c صفر می‌باشد و فقط باید میدان ناشی از ربع دایره را در نقطه c محاسبه کنیم. طبق رابطه چون $\phi=\frac{\pi}{۲}$ است، خواهیم داشت:

$$B=\frac{\mu_\circ i(\frac{\pi}{۲})}{۴\pi R}=\frac{\mu_\circ i}{۸R}$$

مثال۵: حلقه جریانی به مساحت A که جریان I از آن عبور می‌کند، در امتداد خطوط میدان $\vec{B}$ قرار دارد. کار لازم برای دوران حلقه به اندازه زاویه θ چقدر است؟

۱) $-\vec{\tau}.\vec{B}$ ۲) $\vec{\tau}.\vec{B}$ ۳) $\vec{\tau}\times\vec{B}$ ۴) $-\vec{\tau}\times\vec{B}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» گشتاور نیروی وارد بر حلقه را محاسبه می‌کنیم. $\tau = IAB\sin\theta$

$$W=\int_{90^\circ}^{\theta}\tau d\theta=\int_{90^\circ}^{\theta}IAB\sin\theta d\theta=IAB(-\cos\theta]_{90^\circ}^{\theta}=IAB(\cos 90^\circ-\cos\theta)$$

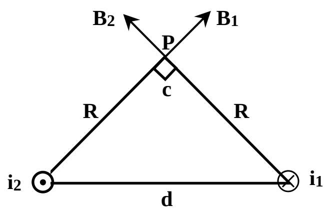
از آنجایی که حلقه در امتداد خطوط میدان بوده، یعنی $\theta_0=90^\circ$ است. بنابراین می‌توان نوشت: $W=-IAB\cos\theta=-\vec{\tau}.\vec{B}$

مثال۶: از سیم مستقیمی شدت جریان I عبور می‌کند و میدان مغناطیسی حاصل از آن در نقطه‌ای به فاصله ۲ متر از سیم برابر $2/5\times10^{-7}$ تسلا می‌باشد، I چند آمپر است ؟

۱) ۲/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۲ ۴) ۱/۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» $B=k\frac{I}{d}\Rightarrow 2/5\times10^{-7}=2\times10^{-7}\times\frac{I}{2}\Rightarrow I=2/5A$

مثال۷: دو سیم موازی دراز مطابق شکل حامل جریان‌های $i_1=6A$ و $i_2=8A$ در جهت‌های مخالف‌اند. بزرگی و جهت میدان مغناطیسی برآیند در نقطه p کدام است ؟ (فاصله بین دو سیم $d=2cm$ می‌باشد.)



۱) $\sqrt{2}\times10^{-5}\,T$

۲) $\sqrt{2}\times10^{-4}\,T$

۳) $\sqrt{2}\times10^{-6}\,T$

۴) $\sqrt{2}\times10^{-7}\,T$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اینکه $R=d\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}d=\frac{d}{\sqrt{2}}$ می‌باشد، داریم:

$$\begin{cases}B_1=\frac{\mu_0 i_1}{2\pi R}=\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(\frac{d}{\sqrt{2}})}=\frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d}i_1\\ B_2=\frac{\mu_0 i_2}{2\pi R}=\frac{\mu_0 i_2}{2\pi(\frac{d}{\sqrt{2}})}=\frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d}i_2\end{cases}\xrightarrow{\text{برآیند دو میدان}}B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d}\sqrt{i_1^2+i_2^2}\Rightarrow$$

$$B=\frac{\sqrt{2}\times4\pi\times10^{-7}\times\sqrt{6^2+8^2}}{2\pi\times2\times10^{-2}}=10\sqrt{2}\times10^{-5}=\sqrt{2}\times10^{-4}\,T$$

مثال۸: دو سیم راست و طویل A و B با جریان‌های هم‌جهت ۱۰ و ۲۰ آمپری در فاصله $20cm$ از یکدیگر موازی هم قرار دارند. میدان مغناطیسی حاصل در وسط فاصله بین دو سیم چند تسلا است ؟

۱) 2×10^{-5} ۲) 6×10^{-5} ۳) $2\pi\times10^{-5}$ ۴) $6\pi\times10^{-5}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون جریان‌های I_A و I_B هم‌جهت هستند، در وسط فاصله بین دو سیم میدان‌های B_A و B_B مختلف‌الجهت خواهند بود.

$$\begin{cases}B_A=\frac{\mu_0 I_A}{2\pi r_A}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{2\pi\times0/1}=2\times10^{-5}\,T\\ B_B=\frac{\mu_0 I_B}{2\pi r_B}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times20}{2\pi\times0/1}=4\times10^{-5}\,T\end{cases}\Rightarrow B=B_B-B_A=4\times10^{-5}-2\times10^{-5}=2\times10^{-5}\,(T)$$

مثال۹: دو سیم راست و موازی A و B به فاصله $40\,cm$ از یکدیگر قرار دارند اگر $I_A = 4A$ و $I_B = 3A$ و جریان‌های دو سیم ناهمسو باشند، میدان مغناطیسی حاصل بین دو سیم و در فاصله ۱۰ سانتی‌متر از سیم A چند تسلا است ؟

۱) 10×10^{-8} ۲) 6×10^{-8} ۳) 10×10^{-6} ۴) 6×10^{-6}

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} B_A = \dfrac{\mu_\circ I_A}{2\pi r_A} = \dfrac{4\pi\times10^{-7}\times4}{2\pi\times0/1} = 8\times10^{-6}\ T \\ B_B = \dfrac{\mu_\circ I_B}{2\pi r_B} = \dfrac{4\pi\times10^{-7}\times3}{2\pi\times0/3} = 2\times10^{-6}\ T \end{cases} \Rightarrow B = B_B + B_A = 8\times10^{-6} + 2\times10^{-6} = 10\times10^{-6}\ T$$

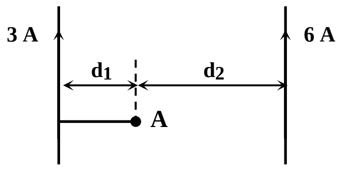
مثال۱۰: کابل راست و بلند انتقال تلفنی شامل ۶ سیم است که هر یک از آن‌ها جریان $0/5A$ را عبور می‌دهند. اگر فاصله بین سیم‌ها ناچیز باشد و همه جریان‌ها همسو باشند اندازه شدت میدان در فاصله $0/1m$ از کابل چقدر است ؟

۱) $10^{-6}\ T$ ۲) $6\times10^{-6}\ T$ ۳) $6\times10^{-5}\ T$ ۴) $10^{-5}\ T$

پاسخ : گزینه «۲» چون جریان‌ها همسو هستند لذا B از جمع میدان هر سیم به دست می‌آید:

$$B = 6\left(\frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\right) = \frac{6\times(4\pi\times10^{-7}\times0/5)}{2\pi\times0/1} = 6\times10^{-6}\ T$$

مثال۱۱: از دو سیم مستقیم و موازی مطابق شکل شدت جریان‌های ۳ و ۶ آمپر در جهت‌های نشان داده شده عبور می‌کند. شدت میدان مغناطیسی در نقطه A به فاصله ۱۰ سانتی‌متر از سیم ۳ آمپری صفر است. فاصله دو سیم چند متر می‌باشد؟



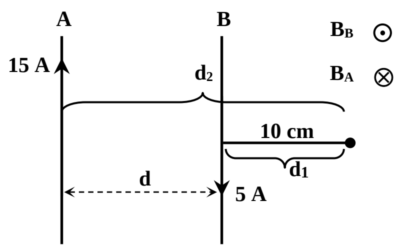
۱) ۰/۳
۲) ۰/۲
۳) ۰/۴
۴) ۰/۶

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{0/1}{d_2} \Rightarrow d_2 = 0/2 \Rightarrow d = d_1 + d_2 = 0/1 + 0/2 = 0/3m$$

مثال۱۲: از دو سیم مستقیم و موازی A و B به ترتیب جریان‌هایی به شدت ۱۵ آمپر و ۵ آمپر در دو جهت مخالف عبور می‌کند. اگر شدت میدان حاصل از دو جریان در نقطه‌ای واقع در صفحه‌ی دو سیم و به فاصله‌ی ۱۰ سانتی‌متر از سیم B برابر صفر باشد، فاصله‌ی دو سیم از هم چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۵ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰

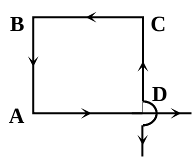


پاسخ : گزینه «۴» چون جهت جریان‌ها مخالف یکدیگر می‌باشد لذا شدت میدان در خارج از دو سیم، نزدیک سیمی که جریانش کمتر است صفر خواهد شد.

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \frac{10}{d_2} = \frac{5}{15} \Rightarrow d_2 = 30\,cm$$

$$d = d_2 - d_1 = 30 - 10 = 20\,cm$$

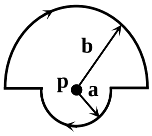
مثال۱۳: جریان پیوسته از مدار مربع شکل $ABCD$ مطابق شکل می‌گذرد، بردار شدت میدان مغناطیسی در مرکز مربع:



۱) صفر است.
۲) در صفحه‌ی کاغذ است.
۳) عمود بر صفحه‌ی کاغذ رو به بیرون است.
۴) عمود بر صفحه‌ی کاغذ رو به داخل است.

پاسخ : گزینه «۳» مطابق قاعده دست راست میدان مغناطیسی هر چهار ضلع در مرکز مربع عمود بر صفحه کاغذ و رو به بیرون است.

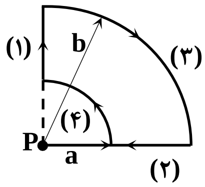
مثال۱۴: در مدار بسته‌ای به شعاع‌های a و b مطابق شکل جریان I برقرار است. بزرگی و جهت میدان مغناطیسی در نقطه P چند تسلا و به کدام سمت است؟



۱) $\frac{\mu_0 I}{4}(\frac{ab}{a+b}),\otimes$
۲) $\frac{\mu_0 I}{4}(\frac{a+b}{ab}),\odot$
۳) $\frac{\mu_0 I 4ab}{a+b},\odot$
۴) $\frac{\mu_0 I}{4}(\frac{a+b}{ab}),\otimes$

پاسخ : گزینه «۴» سیم نیم‌دایره بالا به شعاع b در نقطه p میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که بزرگی آن $B_b=\frac{\mu_0 I}{4b}$ و به سمت داخل صفحه است. سیم نیم‌دایره پایین به شعاع a نیز در نقطه p میدان مغناطیسی به بزرگی $B_a=\frac{\mu_0 I}{4a}$ و به سمت داخل صفحه ایجاد می‌کند. برآیند این دو میدان در نقطه p به صورت روبرو محاسبه می‌شود:
$$B=B_b+B_a=\frac{\mu_0 I}{4b}+\frac{\mu_0 I}{4a}=\frac{\mu_0 I}{4}(\frac{a+b}{ab})$$
جهت آن نیز به سمت داخل است.

مثال۱۵: برای جریان‌های خطی نشان داده شده در شکل، مقدار میدان مغناطیسی در نقطه P کدام است؟

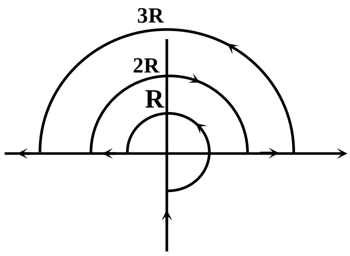


۱) 0
۲) $\frac{\mu_0 I}{8}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$
۳) $\frac{\mu_0 I}{8}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+\frac{\mu_0}{2}$
۴) $\frac{\mu_0 I}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» این توزیع جریان شامل ۴ زیر بخش است. در مورد دو زیر بخش (۱) و (۲) چون نقطه مشاهده در راستای جریان است هیچ میدانی توسط این دو زیربخش در نقطه P به وجود نمی‌آید و تنها دو تکه سیم (۳) و (۴) نقش تولید میدان را برعهده دارند.

میدان حاصل از توزیع جریان شکل بالا در نقطه‌ی P برابر است با:
$$\left.\begin{aligned}B_3&=\frac{\mu_0 I(\alpha)}{4\pi a}=\frac{\mu_0 I\frac{\pi}{2}}{4\pi a}=\frac{\mu_0 I}{8a}\\ B_4&=\frac{-\mu_0 I(\alpha)}{4\pi a}=\frac{-\mu_0 I\frac{\pi}{2}}{4\pi b}=\frac{-\mu_0 I}{8b}\end{aligned}\right\}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I}{8}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$$

مثال۱۶: سیم حامل جریان $I=3A$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.
چنانچه $R=10cm$ باشد میدان مغناطیسی در مبدأ برابر است با:



۱) $3\mu_0$
۲) $10\mu_0$
۳) $20\mu_0$
۴) $30\mu_0$

پاسخ: گزینه «۲» میدان حاصل از قسمت‌های شکستگی صفر هستند چرا که با مبدأ هم‌راستا می‌باشند. پس کافیست با اعمال جهت مناسب میدان حاصل از ۳ کمان دایره‌ای را در مبدأ محاسبه نماییم.

پس:
$$\left.\begin{aligned}B_1&=\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi}\times\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{3}{8R}\mu_0 I &&\text{در جهت برون‌سو}\\ B_2&=\frac{\pi}{2\pi}\times\frac{\mu_0 I}{2\times 2R}=\frac{1}{8R}\mu_0 I &&\text{در جهت درون‌سو}\\ B_3&=\frac{\pi}{2\pi}\times\frac{\mu_0 I}{2\times 3R}=\frac{1}{12R}\mu_0 I &&\text{در جهت برون‌سو}\end{aligned}\right\}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I}{R}(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12})=\frac{\mu_0 I}{R}(\frac{8}{24})\Rightarrow B=\frac{\mu_0\times 3\times 8}{10\times 10^{-2}\times 24}=10\mu_0$$

مثال۱۷: از سیمی به طول $400cm$ برای ساختن پیچه‌ی مسطحی به شعاع $r=10cm$ استفاده کرده‌ایم. اگر از این پیچه جریان $I=2A$ عبور کند میدان مغناطیسی در مرکز پیچه چند تسلا می‌باشد؟

۱) 8×10^{-5} ۲) 4×10^{-5} ۳) 8×10^{-6} ۴) 4×10^{-6}

پاسخ : گزینه «۱»

$$B=N\frac{\mu_0 I}{2r}\xrightarrow{N=\frac{x}{2\pi r}}B=\left(\frac{x}{2\pi r}\right)\left(\frac{\mu_0 I}{2r}\right)=\frac{400\times10^{-2}\times4\pi\times10^{-7}\times2}{4\pi\times(10\times10^{-2})^2}=\frac{8\times10^{-7}}{10^{-2}}=8\times10^{-5}\ T$$

مثال۱۸: طول سیم A سه برابر طول سیم B است. این دو سیم را به صورت سیم‌پیچ‌های مسطح هم قطر در می‌آوریم. اگر جریان‌های مساوی از دو سیم‌پیچ عبور دهیم، نسبت شدت میدان مغناطیسی حاصل در مرکز سیم‌پیچ A به شدت میدان حاصل در مرکز سیم‌پیچ B چقدر است؟

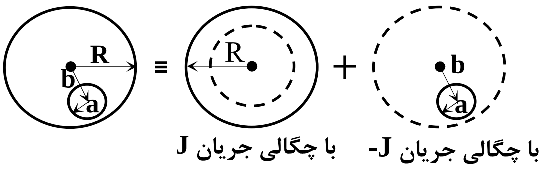
۱) ۹ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ : گزینه «۲» چون طول سیم A سه برابر طول سیم B می‌باشد و قطرهای دو سیم با هم برابر هستند. لذا تعداد حلقه‌های سیم‌پیچ A سه برابر تعداد حلقه‌های سیم‌پیچ B است، از طرفی جریان دو سیم نیز با هم برابر بوده، لذا داریم:

$$\frac{B_A}{B_B}=\frac{N_A}{N_B}\Rightarrow\frac{B_A}{B_B}=\frac{3N_B}{N_B}=3$$

مثال۱۹: سطح مقطع رسانای راست و دراز حامل جریان i ، دایره‌ای به شعاع R است. در داخل رسانا یک استوانه توخالی به شعاع a وجود دارد که محورش به فاصله b از محور رسانا واقع و با آن موازی است. میدان مغناطیسی را در داخل حفره به دست آورید.

۱) $\frac{\mu_0 J}{3}(b+a)^2$ ۲) $\frac{\mu_0 J}{2}b$ ۳) $\frac{\mu_0 J}{2a}b$ ۴) $\mu_0 Jb$



پاسخ: گزینه «۲» همواره در مسائلی از این دست که یک حفره در داخل یک جسم ایجاد می‌شود فرض می‌کنیم سیستم ترکیبی از یک استوانه کامل توپر و یک استوانه باریک‌تر با چگالی جریان منفی می‌باشد. حال از ترکیب این دو به جسم حفره‌دار می‌رسیم. $B=B_1+B_2$

برای محاسبه B_1 یک منحنی آمپر با شعاع بیش از $b-a$ در نظر می‌گیریم که از داخل حفره عبور کند. به این ترتیب:
میدان حاصل از استوانه توپر در نقاط داخل حفره:

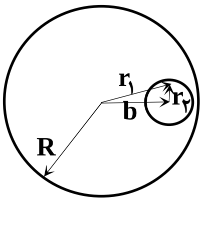
$$B_1=\frac{\mu_0 I_{in}}{L}\ ,\ J=\frac{I}{S}=\frac{i}{\pi R^2}\Rightarrow I=JS_1=\frac{i}{\cancel{\pi}R^2}\times\cancel{\pi}r_1^2=\frac{ir_1^2}{R^2}\Rightarrow B_1=\frac{\mu_0 i\frac{r_1^2}{R^2}}{2\pi r_1}=\frac{\mu_0 i r_1}{2\pi R^2}$$

برای محاسبه B_2 نیز به طریق مشابه یک منحنی دایره‌ای در داخل استوانه باریک‌تر در نظر می‌گیریم به نحوی که مرکز آن روی محور این استوانه باشد.

$$B_2=\frac{\mu_0 I'_{in}}{L}\quad,\quad J'_{in}=\frac{I'}{S'}=\frac{-i}{\pi a^2}\quad,\quad I'_{in}=J'_{in}S=\frac{-i}{\pi a^2}\times\pi r_2^2=\frac{-ir_2^2}{a^2}\ \Rightarrow B_2=\frac{\mu_0\frac{-ir_2^2}{a^2}}{2\pi r_2}=\frac{-\mu_0 i r_2}{2\pi a^2}$$

برای محاسبه میدان نهایی داریم:

$$\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{b}\quad;\quad B=B_1+B_2=\frac{\mu_0 i r_1}{2\pi R^2}-\frac{\mu_0 i r_2}{2\pi a^2}$$



اگر چگالی جریان‌ها را یکسان فرض کنیم:

$$J_1=-J'_2\ \Rightarrow\frac{i}{\pi R^2}=\frac{i}{\pi a^2}$$

و میدان به صورت مقابل خواهد شد:

$$B=\frac{\mu_0 J}{2}(r_1-r_2)=\frac{\mu_0 J}{2}\vec{b}$$

مثال۲۰: یک سیم مسی به قطر $4\times10^{-3}\,m$ می‌تواند یک جریان $100A$ را بدون داغ شدن از خود عبور دهد. به ازای این جریان، شدت میدان مغناطیسی B در سطح سیم چند تسلا است؟

۱) ۰/۰۰۱ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۰/۰۴

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه B از قانون آمپر کمک می‌گیریم. مسیر بسته‌ای که انتگرال روی آن گرفته می‌شود در واقع محیط سطح مقطع سیم مسی است. از آنجایی که میدان مغناطیسی بر روی مسیر بسته مقداری ثابت دارد می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}.d\vec{L}=\mu_0 i \Rightarrow B(2\pi r)=\mu_0 i \Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times100}{2\pi\times2\times10^{-3}}=10^{-2}=0/01T$$

به این موضوع توجه داریم که در این مثال جریان عبوری از درون مسیر بسته، کل جریان عبوری از سیم مسی است.

مثال۲۱: چنبره‌ای به شعاع داخلی $2cm$ و شعاع خارجی $3/5cm$ و با ۱۲۰۰ دور سیم مفروض است. اگر جریان عبوری از آن $0/5A$ باشد، حداکثر میدان مغناطیسی داخل چنبره چند تسلا است؟

۱) $12T$ ۲) $1/2T$ ۳) $6\times10^{-3}\,T$ ۴) $0/3T$

پاسخ: گزینه «۳» رابطه $B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$ میدان مغناطیسی داخل یک چنبره را مشخص می‌کند که در این رابطه R فاصله نقطه مورد نظر تا محور چنبره است. در این مثال این فاصله حداقل برابر $2cm$ و حداکثر برابر $3/5cm$ خواهد بود. چون B با R نسبت عکس دارد زمانی میدان حداکثر مقدار خود را دارد که R به کمترین مقدار ممکن برسد.

$$B_{max}=\frac{\mu_0 NI}{2\pi R_{min}}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1200\times0/5}{2\pi\times2\times10^{-2}}=600\times10^{-5}=6\times10^{-3}\,T$$

مثال۲۲: یک حلقه سیمی به شعاع $5cm$ حامل جریان $100A$ است، چگالی انرژی در مرکز حلقه چند ژول است؟ ($\pi\approx3$)

۱) ۰/۰۶ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۶

پاسخ: گزینه «۴»

$$U_B=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2r}\right)^2=\frac{\mu_0 i^2}{8r^2}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times(100)^2}{8\times(5\times10^{-2})^2}=\frac{\pi\times10^{-3}}{50\times10^{-4}}=\frac{\pi}{5}\approx\frac{3}{5}=0/6\left(\frac{J}{m^3}\right)$$

مثال۲۳: میدان‌های یکنواخت الکتریکی E و مغناطیسی B یک منطقه از فضا را اشغال می‌کنند. اگر چگالی انرژی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکسان باشد کدام رابطه صحیح است؟

۱) $\frac{B}{E}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ ۲) $\frac{B}{E}=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ۳) $\frac{B}{E}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ ۴) $\frac{E}{B}=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases}U_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\\ U_B=\frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right)\end{cases}\xrightarrow{U_E=U_B}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right)\Rightarrow\varepsilon_0\mu_0=\frac{B^2}{E^2}\Rightarrow\frac{B}{E}=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

مثال۲۴: فرض کنید در فضایی میدان مغناطیسی از غرب به سمت شرق ممتد باشد، اگر یک بار الکتریکی مثبت در خلاف جهت میدان مغناطیسی در این فضا حرکت کند، نیروی وارد بر بار چگونه است؟

۱) رو به جنوب اثر می‌کند. ۲) رو به شمال اثر می‌کند.
۳) صفر است. ۴) نیرو در جهت میدان بر ذره اثر می‌کند.

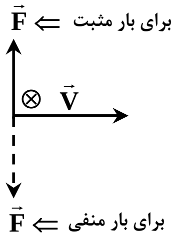
پاسخ: گزینه «۳» چون راستای بردار میدان و سرعت با هم زاویه π می‌سازد، لذا $F=0$ خواهد بود.

$\xleftarrow{\vec{V}}\quad\xrightarrow{\vec{B}}$

مثال۲۵: فرض کنید یک میدان مغناطیسی عمود بر صفحه کاغذ رو به داخل داشته باشیم. هرگاه بر ذره‌ای که با سرعت $\vec{V}$ در جهت محور x هـا در حرکت است نیرویی در خلاف جهت مثبت محور y ها اثر کند، این ذره چه می‌تواند باشد؟

۱) آلفا ۲) الکترون ۳) پروتون ۴) نوترون

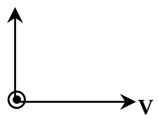
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به شکل اگر بار مثبت باشد، نیرو در جهت محور y هـا و اگـر منفی باشد، نیرو در خلاف جهت محور y ها خواهد بود، لذا این ذره دارای بار منفی است.



مثال۲۶: اگر در یک فضا که میدان مغناطیسی در آن رو به شمال است، ذره‌ای با بار مثبت به طور افقی و به سمت شرق در حرکت باشد نیروی وارد بر آن از طرف میدان به کدام سمت است؟

۱) عمود بر صفحه به سمت داخل ۲) عمود بر صفحه به سمت بیرون ۳) شمال ۴) جنوب

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با استفاده از قانون دست راست و توضیحات داده شـده در مـورد نحوه استفاده از این قانون، مشخص است که نیروی وارد از طرف میدان عمـود بـر صـفحه کاغذ و به سمت بیرون صفحه است.



مثال۲۷: سـرعت الکترونـی برحسـب متـر بـر ثانیـه برابـر بـا $\vec{V} = 2\times10^6\,\hat{i} + 3\times10^6\,\hat{j}$ مـی‌باشـد، ایـن الکتـرون وارد میـدان مغناطیسـی $\vec{B} = 0/03\hat{i} - 0/15\hat{j}$ (برحسب تسلا) می‌شود، نیروی وارد بر الکترون برحسب نیوتن کدام است ؟

۱) $-6/24\times10^{-14}\,\hat{k}$ ۲) $6/24\times10^{-14}\,\hat{j}$ ۳) $6/24\times10^{-14}\,\hat{k}$ ۴) $-6/24\times10^{-14}\,\hat{j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B} = (-1/6\times10^{-19})[2\times10^6\,\hat{i} + 3\times10^6\,\hat{j}]\times[0/03\hat{i} - 0/15\hat{j}]$$

$$= -1/6\times10^{-19}\,[2\times10^6\times(-15\times10^{-2})(\hat{i}\times\hat{j}) + 3\times10^6\times3\times10^{-2}\,(\hat{j}\times\hat{i})]$$

$$= -1/6\times10^{-19}\,[-30\times10^4\,\hat{k} - 9\times10^4\,\hat{k}] = (-1/6\times10^{-19})\times(-3/9\times10^5\,\hat{k}) = 6/24\times10^{-14}\,(\hat{k})$$

مثال۲۸: ذره باردار $q = 6\mu c$ با جرم $m = 9\times10^{-15}\,kg$ با سرعت $V = 120000\frac{m}{s}$ به طور عمود وارد میـدان مغناطیسـی بـه شـدت $0/003T$ می‌شود. شعاع دایره مسیر چند متر است؟

۱) $60\,cm$ ۲) $6cm$ ۳) $0/6cm$ ۴) $0/06cm$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$R = \frac{9\times10^{-15}\times120000}{6\times10^{-6}\times3\times10^{-3}} = 6\times10^{-2}\,m = 6cm$$

مثال۲۹: سیـمی به طول ۲ متر در میدان مغناطیسی یکنـواخت $B = 0/004T$ قرار دارد. اگر جـریان $5A$ از سیم بگذرد بیشترین نیـروی وارد از طرف میدان مغناطیسی بر سیم چند نیوتن می‌تواند باشد ؟

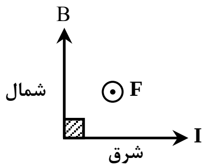
۱) $0/04$ ۲) $0/02$ ۳) ۲ ۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» بیشترین نیرو زمانی بر سیم وارد می‌شود که زاویه بین سیم و میدان برابر با $\frac{\pi}{2}$ و به عبارت دیگر $\sin\alpha = 1$ باشد.

$$F = ILB\sin\alpha = 5\times2\times0/004\times1 = 0/04N$$

مثال۳۰: سیم راستی به طول ۰/۵ متر که از آن جریان ۱۰ آمپر می‌گذرد، عمود بر خط میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت ۰/۰۱ تسلا قرار دارد، اگر جهت میدان رو به شمال و جهت جریان رو به شرق باشد، نیروی وارد بر سیم چند نیوتن و در چه جهتی است ؟

۱) ۰/۲۵ بالا ۲) ۰/۲۵ پایین ۳) ۰/۰۵ پایین ۴) ۰/۰۵ بالا

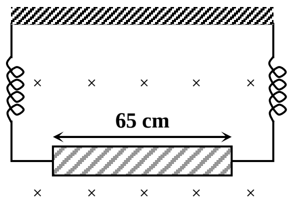


پاسخ : گزینه «۴»

جهت نیرو به سمت بیرون صفحه (بالا) می‌باشد. زاویه بین بردار میدان و سیم $\alpha=\frac{\pi}{2}$ است:

$$F=ILB\sin\alpha=10\times 0/5\times 0/01\times 1=0/05N$$

مثال۳۱: سیمی به طول ۶۵cm و جرم ۱۳gr به وسیله یک جفت سیم رابط که حالت فنری دارد در میدان مغناطیسی به شدت ۴۴۰mT آویخته شده است، اندازه و جهت جریانی که باید در سیم برقرار شود تا کشش در سیم‌های نگهدارنده را خنثی کند، کدام است؟



۱) ۲۶۰mA، از چپ به راست

۲) ۲۶۰mA از راست به چپ

۳) ۴۵۴/۵mA از راست به چپ

۴) ۴۵۴/۵mA از چپ به راست

پاسخ : گزینه «۴» نیروی مغناطیسی باید با نیروی وزن سیم برابر باشد:

$$ILB=mg \Rightarrow I=\frac{mg}{LB}=\frac{13\times 10^{-3}\times 10}{65\times 10^{-2}\times 440\times 10^{-3}}\simeq 454/5mA$$

چون نیرو باید به سمت بالا باشد، باید جهت جریان از چپ به راست باشد.

مثال۳۲: سیمی عمود بر میدان مغناطیسی $\vec{B}=0/4\vec{i}+0/3\vec{j}$ تسلا قرار دارد. اگر از سیم شدت جریان ۵ آمپر عبور کند، نیروی وارد بر ۱۰ سانتی‌متر از آن چند نیوتن خواهد بود؟

۱) ۰/۴ ۲) ۱/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۳/۵

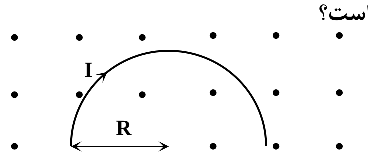
پاسخ : گزینه «۳» اندازه میدان مغناطیسی برابر است با:

$$B=\sqrt{(0/4)^2+(0/3)^2}=0/5T$$

از طرفی چون سیم عمود بر میدان می‌باشد پس $\alpha=90^\circ$ خواهد بود:

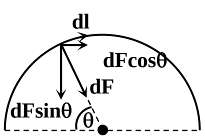
$$F=ILB\sin 90^\circ=5\times 0/1\times 0/5\times 1=0/25N$$

مثال۳۳: در شکل زیر نیرویی که از طرف میدان برون سوی $\vec{B}$ بر سیم حامل جریان I وارد می‌شود کدام است؟



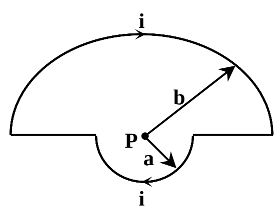
۱) IRB ۲) $\frac{3}{2}IRB$ ۳) $3IRB$ ۴) $2IRB$

پاسخ : گزینه «۴» مؤلفه افقی نیرو یعنی $\int_0^{\pi} dF\cos\theta$ صفر خواهد بود و تنها مؤلفه قائم باقی می‌ماند.



$$F_{\text{برآیند}}=\int dF\sin\theta=\int_0^{\pi} IRB\sin\theta d\theta=2IRB$$

مثال۳۴: در شکل زیر گشتاور دو قطبی مغناطیسی کدام است؟



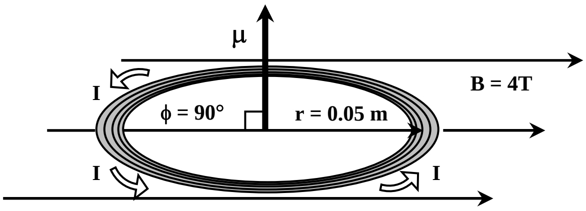
۱) $\mu=\frac{i}{2}(\pi b^2-\pi a^2)$ ۲) $\mu=\frac{i}{2}(\pi a^2+\pi b^2)$

۳) $\mu=\frac{i(\pi b-\pi a)}{2}$ ۴) $\mu=\frac{i}{2}(\pi a^2-\pi b^2)$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\mu=iA=i\times\frac{1}{2}(\pi a^2+\pi b^2)$$

مثال۳۵: یک پیچه دایره‌ای به شعاع $r = ۵cm$ دارای ۳۰ حلقه است. حلقه‌ها مطابق شکل در یک سطح افقی قرار دارند. جریان $I = ۵A$ در جهت نشان داده شده در حال گذر از حلقه می‌باشد. پیچه در میدان مغناطیسی ۴T که رو به راست امتداد دارد قرار گرفته است. مقدار گشتاور نیروی مؤثر بر پیچه کدام است؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱) ۳N.m
۲) ۹N.m
۳) ۴/۵N.m
۴) ۱/۵N.m

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$A = \pi r^۲ = ۳ \times (۵ \times ۱۰^{-۲})^۲ = ۷۵ \times ۱۰^{-۴}\ m^۲$$

$$\tau = NIAB\sin\phi = ۳۰ \times ۵ \times ۷۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۴ \times \sin ۹۰^\circ = ۴۵ \times ۱۰^{-۱}\ N.m = ۴/۵ N.m$$

مثال۳۶: سیمی به طول L که حامل جریان i است را به صورت یک پیچه حلقوی که شامل N حلقه است در می‌آوریم، بیشترین گشتاور نیرو کدام است؟

۱) $\frac{۳L^۲iB}{۴N\pi}$
۲) $\frac{L^۲iB}{۲\pi}$
۳) $\frac{L^۲iB}{۲N\pi}$
۴) $\frac{L^۲iB}{۴\pi}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\frac{L}{N} = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{۲\pi N}\ ,\ A = \pi r^۲ = \pi(\frac{L}{۲\pi N})^۲ = \frac{L^۲}{۴\pi N^۲} \Rightarrow \mu = ANi = \frac{L^۲}{۴\pi N^۲} \times N \times i = \frac{L^۲ i}{۴\pi N}$$

اگر $N = ۱$ باشد آنگاه μ ماکزیمم مقدار خود را دارا خواهد بود:

$$\tau_{max} = B.\mu_{max} = \frac{L^۲iB}{۴\pi}$$

مثال۳۷: یک حلقه دایره‌ای به شعاع ۱۰cm حامل جریان ۱۵A است. در مرکز این حلقه، یک پیچه مسطح به شعاع ۱cm قرار دارد که شامل ۵۰ دور و حامل جریان ۱A است. گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر پیچه از طرف حلقه کدام است؟

۱) $۱/۴۸ \times ۱۰^{-۶}$ N.m
۲) $۱/۴۸ \times ۱۰^{-۵}$ N.m
۳) $۰/۷۴ \times ۱۰^{-۶}$ N.m
۴) $۰/۷۴ \times ۱۰^{-۵}$ N.m

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» میدان حاصل از حلقه بزرگ در مرکز حلقه کوچک برابر با $B = \frac{\mu_\circ i}{۲R}$ می‌باشد:

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۲R} = \frac{۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times ۱۵}{۲ \times ۰/۱} = ۹/۴۲ \times ۱۰^{-۵}\ T$$

میدان بر صفحه حلقه بزرگ عمود است:

$$\tau = \mu B\sin\theta = NiAB\sin ۹۰^\circ = NiBA = ۵۰ \times ۱ \times \pi \times (۱۰^{-۲})^۲ \times ۹/۴۲ \times ۱۰^{-۵} = ۱/۴۸ \times ۱۰^{-۶}\ N.m$$

مثال۳۸: اشباع مغناطیسی در یک جسم حالتی است که:

۱) از خارج به اندازه کافی دو قطبی وارد شود.
۲) دو قطبی‌های مغناطیسی کاملاً در جهات متفاوت باشند.
۳) هیچ دو قطبی مغناطیسی اتمی در جسم نباشد.
۴) همه‌ی دو قطبی‌های مغناطیسی اتمی به موازات هم در سوی میدان مغناطیسی به خط در آیند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

فصل یازدهم

«القای الکترومغناطیسی»

تست‌های تألیفی فصل یازدهم

مثال۱: سیم راستی به طول ۷۵ سانتی‌متر با سرعت ثابت ۲۰ متر بر ثانیه در یک میدان مغناطیسی ۲۰۰ گوسی در راستای عمود بر خط‌های میدان حرکت می‌کند. نیروی محرکه‌ی القایی که در آن تولید می‌شود، چند ولت است؟

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۳ ۳) ۳ ۴) ۳۰

پاسخ : گزینه «۲» **(توضیح کامل‌تر!!)**

$$\varepsilon = LVB = ۷۵\times۱۰^{-۲}\times۲۰\times۲۰۰\times۱۰^{-۴} = ۰/۳v$$

مثال۲: القائیدگی یک پیچه به هم فشرده ۴۰۰ دوری 8mH می‌باشد. اگر جریان 5mA از این پیچه عبور کند شار مغناطیسی در پیچه چند وبر خواهد بود ؟

۱) $۱۰^{-۷}$ ۲) $۱۰^{-۶}$ ۳) ۲×۱۰^{-۷} ۴) ۲×۱۰^{-۶}

پاسخ : گزینه «۱»

$$\varphi = \frac{Li}{N} = \frac{(۸\times۱۰^{-۳})(۵\times۱۰^{-۳})}{۴۰۰} = ۱۰^{-۷}\ (wb)$$

نکته۱: ضریب خودالقایی برای سیم‌لوله درازی به طول ℓ و دارای N حلقه با سطح مقطعی به مساحت A، نزدیک محور سیم‌لوله از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{L = K\mu_\circ n^۲\ell A = K\mu_\circ\frac{N^۲A}{\ell}}$$

توضیح: در رابطه فوق $n=\frac{N}{\ell}$ تراکم پیچه‌ها و K ضریب مغناطیسی هسته سیم‌پیچ می‌باشد. در صورتی که در مسائل ذکر نشود، $K=۱$ در نظر گرفته می‌شود. در واقع زمانی که درون سیم‌لوله هوا یا خلأ باشد، $k=۱$ است.

مثال۳: تعداد دور سیم یک سیم‌پیچ را دو برابر می‌کنیم. اگر طول و بقیه‌ی مشخصه‌ها ثابت بماند، ضریب خودالقایی چند برابر می‌شود ؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به رابطه ضریب خود القایی، $L = k\mu_\circ\frac{N^۲A}{\ell}$، با دو برابر کردن تعداد حلقه‌ها (تعداد دور) با شرط ثابت بودن بقیه پارامترها ضریب خودالقائی ۴ برابر می‌شود.

مثال۴: میدان مغناطیسی یکنواخت B بر صفحه یک حلقهٔ دایره‌ای به قطر 10cm که از یک سیم مسی به قطر سطح مقطع d = 2mm ساخته شده است، عمود است. این میدان با چه آهنگی نسبت به زمان تغییر کند تا جریان 10A در حلقه برقرار گردد ؟ (مقاومت ویژه مس $\rho_{cu} = ۱/۵\times۱۰^{-۸}\ \Omega.m$ و $\pi\simeq۳$ فرض شود)

۱) $۲(\frac{T}{s})$ ۲) $۴(\frac{T}{s})$ ۳) $۱(\frac{T}{s})$ ۴) $۰/۵(\frac{T}{s})$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases}\varepsilon = -\dfrac{d\varphi_B}{dt} = -\overset{\overset{\text{مساحت حلقه}}{\uparrow}}{A}\dfrac{dB}{dt}\\[2ex] \varepsilon = Ri = \dfrac{\rho L}{\underset{\underset{\text{مساحت مقطع سیم مسی}}{\downarrow}}{S}}i = \rho\dfrac{۲\pi r}{\pi(\frac{d}{۲})^۲}i\end{cases} \Rightarrow -\pi r^۲\frac{dB}{dt} = \rho\frac{۸\pi r}{\pi d^۲}i \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{-۸\times\rho\times i}{\pi\times d^۲\times r} \simeq \frac{-۸\times۱/۵\times۱۰^{-۸}\times۱۰}{۳\times(۲\times۱۰^{-۳})^۲\times(۵\times۱۰^{-۲})}$$

$$\Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{-۸\times۱۵\times۱۰^{-۹}\times۱۰}{۳\times۴\times۱۰^{-۶}\times۵\times۱۰^{-۲}} = -۲(\frac{T}{s})$$

مثال۵: اگر معادله ولتاژ و جریان دو سر مداری در SI به صورت $V = ۲۰۰\sqrt{۲}\cos(۵۰۰t + \frac{\pi}{۴})$ و $I = ۱۰۰\cos ۵۰۰t$ باشد، آنگاه توان مصرفی این مدار چند کیلووات است؟

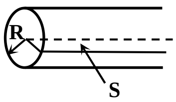
۱) ۲۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ : گزینه «۳» **(توضیح فارسی!!)**

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}(A) \;,\; V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۲۰۰v$$

$$\phi = \phi_V - \phi_I = \frac{\pi}{۴} - ۰ = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \cos\phi = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \;;\quad P = V_{rms}.I_{rms}\cos\phi = ۲۰۰\times\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰۰۰۰w = ۱۰kw$$

مثال۶: یک سیم مسی و دراز حامل جریان ۱۰ A است. شار مغناطیسی که از سطح تخت S، داخل سیم، مطابق شکل می‌گذرد، به ازای هر متر از سیم چند وبر است؟



۱) $۴\pi\times۱۰^{-۶}$ Wb ۲) $\frac{۱}{۴\pi}\times۱۰^{-۶}$ Wb ۳) $۱۰^{-۶}$ Wb ۴) ۴πWb

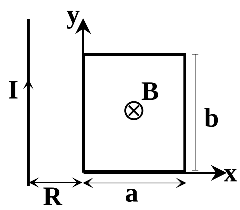
پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه شار عبوری از سطح تخت s ابتدا باید میدان مغناطیسی داخل سیم مسی را محاسبه کنیم برای این منظور از قانون آمپر کمک می‌گیریم:

$$\oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0 i_{enc} \;\Rightarrow\; B(۲\pi r) = \mu_0 i\frac{\pi r^۲}{\pi R^۲} \;\Rightarrow\; B = \frac{\mu_0 ir}{۲\pi R^۲}$$

در این محاسبات استوانه‌ای به شعاع r را در داخل سیم در نظر گرفته و انتگرال را روی آن محاسبه نمودیم. جریان i_{enc} جریان عبوری از مقطع این استوانه است. حالا شار عبوری از سطح s را محاسبه می‌کنیم. میدان مغناطیسی در تمام نقاط بر سطح صفحهٔ تخت s عمود است، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\phi_B = \int_0^R \ell B dr = \frac{\ell\mu_0 i}{۲\pi R^۲}\int_0^R r dr = \frac{\ell\mu_0 i}{۴\pi} = \frac{۱\times۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۱۰}{۴\pi} = ۱۰^{-۶}\ \mathrm{Wb}$$

مثال۷: اگر یک صفحه مستطیل شکل در مقابل یک سیم طویل حامل جریان I قرار بگیرد، چه مقدار شار مغناطیسی از داخل صفحه عبور می‌کند؟



۱) $\mu_0 I$ ۲) $\frac{\mu_0 Ib}{۲\pi}$ ۳) $\frac{\mu_0 Ib}{۲\pi}\ln\frac{a+R}{R}$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۳» دقت شود در اینجا میدان مغناطیسی در تمام نقاط صفحه یکسان نیست چرا که میدان با فاصله تا سیم نسبت عکس دارد، پس از رابطه انتگرالی برای محاسبه شار استفاده می‌کنیم.

با توجه به آنکه میدان با بردار مساحت زاویه ۹۰° می‌سازد، خواهیم داشت:

$$\varphi_m = \int B.ds\cos\theta = \int B.ds$$

همچنین بر طبق قانون آمپر، میدان مغناطیسی برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 I}{۲\pi(x+R)}$$

$$\varphi = \int_{x=0}^a\int_{y=0}^b \frac{\mu_0 I}{۲\pi(x+R)}dx\,dy = \frac{\mu_0 I}{۲\pi}\int_{x=0}^a\frac{dx}{(x+R)}\int_{y=0}^b dy = \frac{\mu_0 I}{۲\pi}(\ln(x+R)]_0^a(y)]_0^b$$

$$= \frac{\mu_0 I}{۲\pi}(\ln(a+R) - \ln R)b = \frac{\mu_0 Ib}{۲\pi}\ln(\frac{a+R}{R})$$

مثال۸: یک سیم‌پیچ در یک میدان مغناطیسی قرار دارد. شار مغناطیسی که از سیم‌پیچ عبور می‌کند به صورت $\varphi(t) = ۵t$ با زمان تغییر می‌کند. نیروی محرکه‌ی القایی در دو سر سیم‌پیچ چگونه است ؟

۱) تناوبی است.　۲) صفر است.　۳) متناسب با زمان تغییر می‌کند.　۴) مقدار ثابتی است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = -N\frac{d(۵t)}{dt} = -۵N$$

با توجه به اینکه تعداد حلقه‌ها ثابت است لذا $-۵N$ نیز عددی ثابت خواهد بود.

مثال۹: اگر شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار بسته نسبت به زمان به صورت $\varphi(t) = ۱/۵t^۲$ تغییر کند (که در آن φ برحسب وبر و t برحسب ثانیه است) درباره‌ی نیروی محرکه‌ی القایی مدار می‌توان گفت:

۱) بین ۱/۵ ولت تا ۱/۵ – ولت متغیر است.　۲) با مجذور زمان زیاد می‌شود.

۳) متناسب با زمان افزایش می‌یابد.　۴) مقداری ثابت برابر با ۳ ولت است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = -N\frac{d(۱/۵t^۲)}{dt} = -۳Nt$$

واضح است که با افزایش زمان نیروی محرکه القائی در مدار نیز افزایش می‌یابد.

مثال۱۰: شار مغناطیسی (در سیستم SI) که از یک سیم‌پیچ می‌گذرد، $\varphi(t) = ۰/۵\sin ۱۰۰t$ است. بیشترین نیروی محرکه‌ی القایی در هر حلقه‌ی آن چند ولت است ؟

۱) ۰/۵　۲) $۲۵\sqrt{۲}$　۳) ۵۰　۴) $۵۰\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = -۱\times۰/۵\times۱۰۰\times\cos۱۰۰t = -۵۰\cos۱۰۰t \Rightarrow |\varepsilon_{max}| = ۵۰v$$

مثال۱۱: شعاع یک حلقه دایره‌ای ۱/۲۳m است. یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت ۷۸۵mT عمود بر این حلقه اعمال می‌شود، وقتی شعاع این حلقه با آهنگ $۷/۵(\frac{cm}{s})$ شروع به کاهش کند، اندازه نیروی محرکه القائی در حلقه چند میلی ولت است؟

۱) ۴۵۴　۲) ۲۳۰　۳) ۳۰۰　۴) ۴۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\varphi = BA = B(\pi r^۲)\ ,\ \varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -۲\pi r.B.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \varepsilon = ۲\pi\times۱/۲۳\times۷۸۵\times۱۰^{-۳}\times۷/۵\times۱۰^{-۲} \simeq ۴۵۴mv$$

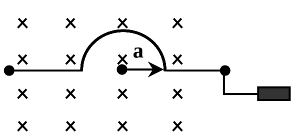
مثال۱۲: یک حلقه سیمی به شعاع $r = ۱۰۰cm$ در میدان مغناطیسی یکنواخت ۸T که بر صفحه حلقه عمود است قرار دارد، شعاع حلقه با آهنگ $۴۰(\frac{cm}{s})$ در حال کاهش می‌باشد، نیروی محرکه القائی در حلقه چند ولت است؟ $(\pi \approx ۳)$

۱) ۱/۹۲　۲) ۱۹/۲　۳) ۹/۶　۴) ۰/۹۶۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{d(\pi r^۲)}{dt} = -B\times۲\pi r(\frac{dr}{dt}) = -۸\times۲\times۳\times۱\times(-۰/۴) = ۱۹/۲v$$

مثال۱۳: در شکل زیر اگر سیم را با فرکانس f در میدان مغناطیسی یکنواختی که در شکل مشخص شده است بچرخانیم، نیروی محرکه القائی ماکزیمم در حلقه کدام است؟



۱) $B\pi^۲af$　۲) $B\pi^۲f^۲a^۲$

۳) $B\pi^۲af^۲$　۴) $B\pi^۲a^۲f$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» اگر زاویه عمود بر سطح نیم‌دایره با میدان را θ فرض کنیم، داریم:

$$\theta = \omega t = ۲\pi f.t$$

$$\varphi = BA\cos\theta = B(\frac{\pi a^۲}{۲})\cos(۲\pi f)t \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = \pi^۲ a^۲ Bf\sin ۲\pi ft \Rightarrow |\varepsilon_{max}| = \pi^۲ a^۲ Bf$$

مثال۱۴: یک پیچه دایره‌ای به شعاع ۱۰cm از سیمی به مقاومت ۹Ω ساخته شده است. میدان مغناطیسی یکنواخت B بر صفحه پیچه عمود می‌باشد. برای اینکه جریان ۰/۰۱A در مدار به وجود آید، آهنگ افزایش B کدام است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) $۶(\frac{T}{s})$ ۲) $۱(\frac{T}{s})$ ۳) $۹(\frac{T}{s})$ ۴) $۳(\frac{T}{s})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -A\frac{dB}{dt} \Rightarrow -A\frac{dB}{dt} = \underbrace{\boxed{iR}}_{\varepsilon} \Rightarrow \frac{dB}{dt} = -\frac{iR}{A} = -\frac{iR}{\pi r^۲} = -\frac{۱\times ۱۰^{-۲}\times ۹}{\pi\times(۱۰\times ۱۰^{-۲})^۲} = ۳(\frac{T}{s})$$

مثال۱۵: شار عبوری از یک پیچه در SI به صورت $\varphi = ۰/۲\sin(۱۰۰t - \frac{\pi}{۸})$ است. پیچه ۵۰ حلقه دارد و مقاومت الکتریکی آن ۵۰ اهم می‌باشد. بیشینه‌ی جریان القایی آن چند آمپر است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = -۵۰\times ۰/۲\times ۱۰۰\cos(۱۰۰t - \frac{\pi}{۸}) = -۱۰۰۰\cos(۱۰۰t - \frac{\pi}{۸}) \Rightarrow |\varepsilon_{max}| = ۱۰۰۰\,v$$

$$|I_{max}| = \frac{|\varepsilon_{max}|}{R} = \frac{۱۰۰۰}{۵۰} = ۲۰\,A$$

مثال۱۶: شار مغناطیسی گذرنده از یک سیم‌پیچ در مدت ۰/۲۵ ثانیه از ۰/۲− وبر به ۱/۲ وبر می‌رسد. نیروی محرکه‌ی القایی متوسط در یک حلقه چند ولت است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۸ ۳) ۵/۶ ۴) ۴

☑ **پاسخ : گزینه «۳»**

$$|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}| \xrightarrow{N=۱} |\bar{\varepsilon}| = |-\frac{\varphi_۲ - \varphi_۱}{\Delta t}| = |-\frac{۱/۲-(-۰/۲)}{۰/۲۵}| = |\frac{-۱/۴}{۰/۲۵}| = ۵/۶v$$

مثال۱۷: یک سیم مسی نمره ۱۸ (۱mm قطر مقطع) به طول ۵۰cm در دست است. این سیم را به شکل یک حلقه دایره‌ای درمی‌آوریم و آن را عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی که با آهنگ ثابت $۰/۰۱\frac{T}{S}$ افزایش می‌یابد قرار می‌دهیم. آهنگ انرژی گرمایی تولید شده در حلقه چند وات است؟

۱) $۳/۶۶\times ۱۰^{-۴}$ ۲) $۳/۶۶\times ۱۰^{-۶}$ ۳) $۱/۸۳\times ۱۰^{-۶}$ ۴) $۱/۸۳\times ۱۰^{-۴}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تغییر میدان مغناطیسی باعث تغییر شار عبوری از سطح حلقه شده که این امر منجر به القای نیروی محرکه در حلقه می‌گردد. نیروی محرکه القایی باعث ایجاد جریان القایی می‌شود. توان مصرفی در حلقه از رابطهٔ $P = RI^۲$ به دست می‌آید. پس برای محاسبه توان ابتدا باید مقاومت سیم مسی و جریان القایی در آن را به دست آوریم.

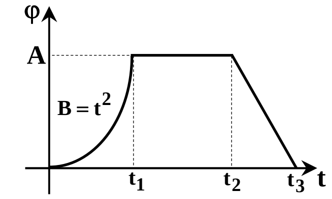
$$R = \rho\frac{\ell}{A} = \rho\frac{\ell}{\pi(\frac{D}{۲})^۲} = \frac{۴\rho\ell}{\pi D^۲} = \frac{۴\times ۱/۷\times ۱۰^{-۸}\times ۵۰\times ۱۰^{-۲}}{\pi(۱\times ۱۰^{-۳})^۲} = ۱/۰۸\times ۱۰^{-۲}\,\Omega$$

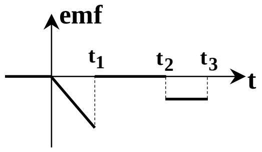
در رابطهٔ بالا D قطر سیم مسی و ℓ طول آن است. با کمک قانون القای فارادی جریان عبوری از حلقه را پیدا می‌کنیم:

$$\varepsilon = iR = -\frac{d\phi}{dt} = -A\frac{dB}{dt} \Rightarrow |i| = \frac{A}{R}\frac{dB}{dt} = \frac{\ell^۲}{۴\pi R}\frac{dB}{dt} = \frac{(۵۰\times ۱۰^{-۲})^۲}{۴\pi(۱/۰۸\times ۱۰^{-۲})}(۰/۰۱) = ۱/۸۴\times ۱۰^{-۲}\,A$$

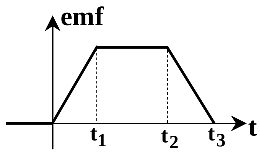
$$P = Ri^۲ = ۱/۰۸\times ۱۰^{-۲}\,(۱/۸۴\times ۱۰^{-۲})^۲ = ۳/۶۶\times ۱۰^{-۶}\,W$$

مثال۱۸: شار مغناطیسی در فضا به صورت تابعی از زمان در شکل زیر نشان داده شده است، مقدار نیروی محرکه القایی در حلقه به چه صورتی خواهد بود؟

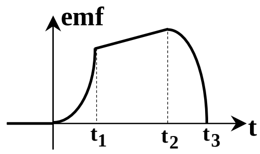




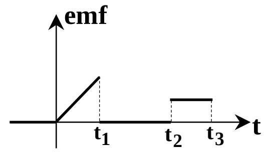
(۴)



(۳)



(۲)

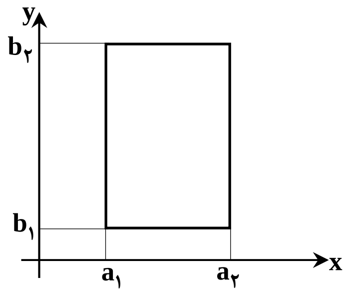


(۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به قانون القای فارادی داریم:

$$emf=-\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)\Rightarrow\begin{cases}0 & t<0\\ -2t & 0<t<t_1\\ 0 & t_1<t<t_2\\ \dfrac{-A}{t_3-t_2} & t_2<t<t_3\end{cases}$$

مثال۱۹: اگر میدان الکتریکی در فضا به صورت $B=(\frac{1}{2}t^2-3\sin t)\frac{1}{x}$ تعریف شده باشد، مقدار نیروی محرکه القایی در حلقه زیر چه مقداری خواهد بود؟



۱) $(2t-3\cos\theta)\times\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$

۲) $-(2t-3\cos\theta)\times\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$

۳) $(-t+3\cos\theta)\ln(\frac{a_1}{a_2})(b_2-b_1)$

۴) $-(2t-3\cos\theta)\ln\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$

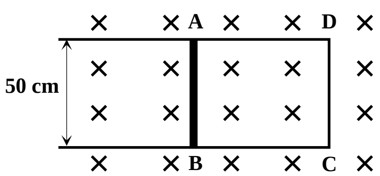
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه emf از فرمول فارادی استفاده می‌کنیم:

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$emf=-\frac{\partial}{\partial t}\iint\frac{(\frac{1}{2}t^2-3\sin t)}{x}dx\,dy=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}t^2-3\sin t)\int_{y=b_1}^{b_2}\int_{x=a_1}^{a_2}\frac{dx\,dy}{x}$$

$$emf=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}t^2-3\sin t)\int_{x=a_1}^{a_2}\frac{dx}{x}\int_{y=b_1}^{b_2}dy=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}t^2-3\sin t)\times\ln(\frac{a_2}{a_1})(b_2-b_1)=(-t+3\cos t)\ln(\frac{a_1}{a_2})(b_2-b_1)$$

مثال۲۰: در شکل میله رسانای AB با ریل‌های فلزی AD و BC که به فاصله ۵۰cm از هم قرار دارند در میدان مغناطیسی یکنواخت 1T به طور عمود بر صفحه شکل واقع شده است. مقاومت کل مدار ABCD برابر با ۰/۴Ω است، اندازه نیروی محرکه القا شده در میله هنگامی که میله با سرعت $8\frac{m}{s}$ به طرف چپ حرکت می‌کند کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\varepsilon=LVB=0/5\times 8\times 1=4v$$

مثال۲۱: سیم راستی به طول $۴۰cm$ عمود بر خط‌های میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۰/۰۵T$ قرار دارد. سیم را با چه سرعتی (برحسب m/s) عمود بر خط‌های میدان حرکت دهیم تا اختلاف پتانسیل بین دو سر آن ۰/۰۲ ولت شود ؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲»

$$\varepsilon = LVB \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۲} = ۴۰\times۱۰^{-۲}\times۵\times۱۰^{-۲}\times V \Rightarrow V = ۱(\frac{m}{s})$$

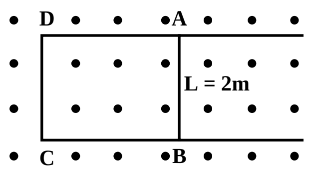
مثال۲۲: میله‌ی رسانایی به طول L با سرعت V عمود بر خطوط مغناطیسی یکنواخت B حرکت می‌کند، اگر طول سیم و میدان مغناطیسی هر دو نصف شوند (با ثابت ماندن V) نیروی محرکه‌ی القایی در دو سر سیم چند برابر می‌شود ؟

۱) ۴۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\varepsilon = LVB \xrightarrow[B'=\frac{B}{۲}]{L'=\frac{L}{۲}} \varepsilon' = L'B'V' = \frac{L}{۲}\times\frac{B}{۲}\times V = \frac{۱}{۴}LBV = \frac{۱}{۴}\varepsilon$$

مثال۲۳: مطابق شکل میله‌ای به طول $L = ۲m$ در میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت $B = ۶\times۱۰^{-۵}$ T که به طور عمود بر صفحه و به طرف خارج است قرار گرفته است. اگر مقاومت مدار $ABCD$ ثابت و برابر $R = ۱/۲\times۱۰^{-۵}\ \Omega$ باشد و میله با سرعت $۰/۵\frac{m}{s}$ در حرکت باشد، بزرگی جریان در میله چند آمپر است ؟



۱) ۲/۴
۲) ۲/۵
۳) ۴/۸
۴) ۵

پاسخ : گزینه «۴»

$$\varepsilon = LVB = ۲\times۰/۵\times۶\times۱۰^{-۵} = ۶\times۱۰^{-۵}\ v \quad ; \quad i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۶\times۱۰^{-۵}}{۱/۲\times۱۰^{-۵}} = ۵A$$

مثال۲۴: تعداد دور سیم یک سیم‌پیچ را دو برابر می‌کنیم. اگر طول و بقیه‌ی مشخصه‌ها ثابت بماند، ضریب خودالقایی چند برابر می‌شود ؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به رابطه ضریب خود القایی، $L = k\mu_۰\frac{N^۲A}{\ell}$، با دو برابر کردن تعداد حلقه‌ها (تعداد دور) با شرط ثابت بودن بقیه پارامترها ضریب خودالقائی ۴ برابر می‌شود.

مثال۲۵: خود القائی سیم‌لوله چنبره‌ای به شعاع متوسط $r = ۱۰cm$ و به سطح مقطع $(m^۲)$ ۵×۱۰^{-۴} که دارای ۱۰۰۰ حلقه می‌باشد چند میلی هانری می‌باشد ؟

۱) ۱ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۰۰۱ ۴) ۰/۰۰۰۱

پاسخ : گزینه «۱»

$$L = \frac{\mu_۰N^۲A}{۲\pi r} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰۰)^۲(۵\times۱۰^{-۴})}{۲\pi(۰/۱)} = ۱\times۱۰^{-۳}\ H = ۱mH$$

مثال۲۶: نیروی محرکه الکتریکی در یک سلف برابر $۱۰۰v$ و آهنگ تغییر جریان $۲۵\frac{kA}{s}$ است، مقدار القاییدگی این سلف چند میلی‌هانری است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه «۲»

$$|\varepsilon| = |-L\frac{di}{dt}| \Rightarrow ۱۰۰ = |-L(۲۵\times۱۰^۳)| \Rightarrow L = \frac{۱۰۰}{۲۵}\times۱۰^{-۳} = ۴mH$$

مثال۲۷: از سیم‌لوله‌ای به ضریب خود القایی L شدت جریان ۵ آمپر عبور می‌کند. اگر در مدت $\frac{1}{100}$ ثانیه شدت جریان بـه صـفر برسـد، نیـروی محرکه‌ی ۱۰ ولت در سیم‌لوله القا می‌شود. L چند هانری است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۲ ۴) ۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\bar{\varepsilon} = |-L\frac{\Delta I}{\Delta t}| \Rightarrow L = |-\frac{\bar{\varepsilon}.\Delta t}{\Delta I}| = |-\frac{10\times 0/01}{0-5}| = 0/02H$$

مثال۲۸: از سیم‌پیچی شدت جریان ۱/۵ آمپر عبور می‌کند. اگر انـرژی الکترومغناطیسـی ذخیـره شـده در آن $4/5\times 10^{-2}$ ژول باشـد، ضـریب خودالقایی سیم چند هانری است ؟

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow 4/5\times 10^{-2} = \frac{1}{2}\times L\times(\frac{3}{2})^2 \Rightarrow 9\times 10^{-2} = \frac{9}{4}L \Rightarrow L = 4\times 10^{-2} = 0/04H$$

مثال۲۹: پیچه‌ای با ضریب خودالقائی 2H و مقاومت 10Ω ناگهان به یک باتری بدون مقاومت داخلی و با ε = 100V وصل می‌شود، انرژی ذخیـره شده در میدان وقتی جریان در پیچه برقرار شود چقدر می‌باشد ؟

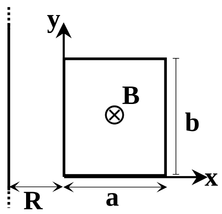
۱) ۲۰۰J ۲) ۵۰J ۳) ۱۰۰J ۴) ۲۰۰J

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{100}{10} = 10 \Rightarrow U = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\times 2\times(10)^2 = 100J$$

تذکر۸: توجه شود که انرژی ذخیره شده در یک سیم‌لوله دراز (یا سیم‌لوله چنبره‌ای) با توجه به مقدار خودالقاکنائی (L) مختص خود قابل محاسبه می‌باشد.

مثال۳۰: در شکل زیر مقدار القای متقابل مابین سیم طویل و حلقه مستطیلی چه مقدار خواهد بود؟



۱) 0 ۲) $\frac{\mu_0 b}{2\pi}$ ۳) μ_0 ۴) $\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{a+R}{R}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در بخش محاسبه شار الکتریکی، شار گذرنده از این حلقه مستطیلی را محاسبه کردیم که برابر بود با:

$$\varphi = \frac{\mu_0 bI}{2\pi}\ln\frac{a+R}{R}$$

در نتیجه مقدار القای متقابل برابر است با:

$$M = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{a+R}{R}$$

مثال۳۱: دو پیچه دارای القای متقابل M = 0/01H هستند. شدت جریان i_1 در پیچه اول با آهنگ $0/05(\frac{A}{s})$ افزایش مـی‌یابـد. نیـروی محرکـه الکتریکی القایی در پیچه دوم چند ولت است؟

۱) 5×10^{-5} ۲) 5×10^{-2} ۳) 5×10^{-3} ۴) 5×10^{-4}

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\varepsilon_2 = M\frac{di_1}{dt} = 0/01\times 0/05 = 5\times 10^{-4}\ (v)$$

مثال۳۲: یک اختلاف پتانسیل 50V را ناگهان به پیچه‌ای با L = 50mH و R= 180Ω اعمال می‌کنیم. بعد از 0/001S جریـان بـا چـه آهنگـی افزایش می‌یابد؟

۱) $27/32\frac{A}{S}$ ۲) $2732\frac{A}{S}$ ۳) $1000\frac{A}{S}$ ۴) $2000\frac{A}{S}$

پاسخ : گزینه «۱» پیچه به عنوان یک القاگر اجازهٔ اینکه جریان به طور آنی به مقدار نهایی خود برسد، نمی‌دهد و با افزایش جریان مخالفت می‌کند به طوری که تغییرات آن نسبت به زمان صورت $i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$ خواهد بود.

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}}) \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}=\frac{50}{50\times10^{-3}}=1000e^{-3/6}=27/32\frac{A}{S}$$

مثال۳۳: در یک مدار RL جریان در مدت 5s به یک سوم مقدار نهایی خود می‌رسد، ثابت زمانی مدار تقریباً چند ثانیه است ؟

۱) ۱۲/۳ ۲) ۱۳/۳ ۳) ۲۴/۶ ۴) ۲۶/۶

پاسخ : گزینه «۱»

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \Rightarrow \frac{1}{3}\times\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}\times5}) \Rightarrow 1-e^{-\frac{R}{L}\times5}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{L}{R}=12/3s$$

مثال۳۴: در یک مدار RL جریان در لحظه $t=0$ برابر 1A است. پس از یک ثانیه جریان به 0/01A افت می‌کند، اگر $L=22H$ باشد مقدار مقاومت R تقریباً چند اهم است ؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲/۲ ۴) ۱۰

پاسخ : گزینه «۱»

$$I=I_0e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow 0/01=1\times e^{-\frac{1}{\tau}} \Rightarrow \tau=0/22s\ ; \qquad \tau=\frac{L}{R} \Rightarrow R=\frac{L}{\tau}=\frac{22}{0/22}=100\Omega$$

مثال۳۵: اختلاف پتانسیل 45v ناگهان به پیچه‌ای با $L=50mH$ و $R=18\Omega$ اعمال می‌شود. پس از گذشت 1/2ms جریان این پیچه با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه «۴»

$$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t(\frac{R}{L})}) \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}e^{-t(\frac{R}{L})} \Rightarrow \frac{45}{50\times10^{-3}}e^{\frac{-1/2\times18\times10^{-3}}{50\times10^{-3}}} \simeq 12(\frac{A}{s})$$

تذکر۱۱: رفتار سلف (القاگر) در مدار بر خلاف یک خازن است؛ یعنی سلف در لحظهٔ اول (لحظهٔ بستن کلید) مانند مدار باز عمل می‌کند و مانع عبور جریان می‌گردد. بعد از رسیدن به شرایط پایدار (شارژ سلف) القاگر مانند اتصالی کوتاه عمل کرده و می‌توانیم آن را همانند یک تکه سیم ببینیم.

مثال۳۶: در یک مدار نوسان کننده LC، $L=1mH$ و $C=4nF$ و بار بیشینه خازن $4\mu C$ می‌باشد. جریان ماکزیمم چند آمپر است؟

۱) ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۲ ۳) ۲ ۴) ۰/۰۲

پاسخ : گزینه «۳»

$$\frac{q_m^2}{2C}=\frac{1}{2}Li_m^2 \Rightarrow i_m=\frac{q_m}{\sqrt{LC}}=\frac{4\times10^{-6}}{\sqrt{1\times10^{-3}\times4\times10^{-9}}}=\frac{4\times10^{-6}}{2\times10^{-6}}=2A$$

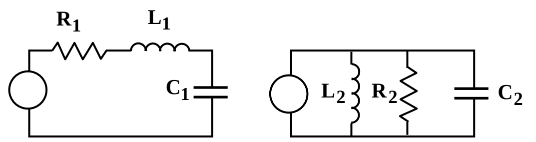
مثال۳۷: در یک مدار LC مقادیر $L=1H$ و $C=25\mu F$ داده شده‌اند. بسامد زاویه‌ای نوسان کدام است؟

۱) $20(\frac{rad}{s})$ ۲) $200(\frac{rad}{s})$ ۳) $10(\frac{rad}{s})$ ۴) $100(\frac{rad}{s})$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{1\times25\times10^{-6}}}=\frac{1}{5\times10^{-3}}=\frac{1000}{5}=200(\frac{rad}{s})$$

مثال۳۸: در دو مدار زیر مقدار $L_۲$ را چقدر انتخاب کنیم تا هر دو در یک فرکانس به تشدید درآیند؟ $(R_۱ = ۴R_۲ \;,\; C_۱ = ۵C_۲)$



۱) $L_۱ = ۲۰L_۲$ ۲) $L_۱ = \frac{۱}{۲۰}L_۲$ ۳) $L_۱ = ۵L_۲$ ۴) $L_۱ = \frac{۱}{۵}L_۲$

پاسخ: گزینه «۴» در هر دو مدار فرکانس تشدید از رابطه $\frac{۱}{\sqrt{LC}}$ حاصل می‌شود پس داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{L_۱C_۱}} = \frac{۱}{\sqrt{L_۲C_۲}} \Rightarrow \frac{L_۲}{L_۱} = \frac{C_۱}{C_۲} = \frac{۵C_۲}{C_۲} = ۵ \Rightarrow L_۱ = \frac{۱}{۵}L_۲$$

مثال۳۹: مقدار جریان جابجایی ایجاد شده در یک خازن مسطح چه مقداری است؟ (i جریان عبوری از سیم‌های رابط)

۱) $\circ$ ۲) i ۳) $\frac{i}{۲}$ ۴) $۲i$

پاسخ: گزینه «۲»

$$i_d = \varepsilon_\circ \frac{d\varphi_E}{dT} \quad , \quad \varphi_E = \int E.dS \xrightarrow{\text{با فرض ثابت بودن میدان}} \varphi_E = ES$$

مقدار میدان در خازن مسطح به صورت مقابل قابل محاسبه است: $q = CV \quad , V = Ed \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_\circ A}$

جریان عبوری از سیم‌های خازن: $i_d = \varepsilon_\circ \frac{d}{dt}(EA) = \varepsilon_\circ A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_\circ A(\frac{dq}{\varepsilon_\circ A dt}) = \frac{dq}{dt} = i$

مثال۴۰: مقدار جریان جابجایی در یک خازن مسطح که ولتاژ پایانه‌های آن با رابطه $V = V_m \cos\omega t$ تغییر می‌کند برابر است با: (C ظرفیت خازن)

۱) $\circ$ ۲) $\omega V_m \sin\omega t$ ۳) $-CV_m\omega \sin\omega t$ ۴) $C\omega V_m \sin\omega t$

پاسخ: گزینه «۳»

$$i_d = \varepsilon_\circ \frac{d\varphi_E}{dt} = \varepsilon_\circ \frac{d(EA)}{dt} = \varepsilon_\circ A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_\circ A \frac{d(\frac{V}{d})}{dt} = \frac{\varepsilon_\circ A}{d}\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

پس جریان جابجایی با مشتق ولتاژ پایانه‌ها متناسب است و ضریب این تناسب ظرفیت خازن می‌باشد: $i_d = C\frac{d(V_m \cos\omega t)}{dt} = -CV_m\,\omega\sin\omega t$

مثال۴۱: در یک جک هیدرولیکی، نیروی کوچک f توسط پیستونی با مساحت $۴۰cm^۲$ به مایع درون جک وارد می‌شود اگر مساحت پیستون بزرگ $۸۰۰cm^۲$ باشد، نیروی f چقدر باشد تا با نیروی $۲۰KN$ وارد بر پیستون بزرگ متوازن شود؟

۱) $۴۰N$ ۲) $۴۰۰N$ ۳) $۴۰kN$ ۴) $۴۰۰kN$

پاسخ: گزینه «۴» طبق رابطه‌ی جک هیدرولیکی می‌توان نوشت:

$$\overset{\text{پیستون بزرگ}}{\frac{F_o}{A_o}} = \overset{\text{پیستون کوچک‌تر}}{\frac{F_i}{A_i}} \Rightarrow F_i = \frac{A_i}{A_\circ}F_\circ \Rightarrow f = \frac{۸۰۰}{۴۰}۲۰KN = ۴۰۰KN$$

مثال۴۲: قطعه چوبی تا دو سوم حجمش در آب و تا ۰/۹ حجمش در روغن شناور می‌شود. چگالی روغن کدام است؟

۱) $۷۲\frac{kg}{m^۳}$ ۲) $۷۳۰\frac{kg}{m^۳}$ ۳) $۶۵۰\frac{kg}{m^۳}$ ۴) $۷۴۰\frac{kg}{m^۳}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر حجم قطعه چوب $V_\circ$ باشد، حجم فرو رفته در آب $V_۱ = \frac{۲}{۳}V_\circ$ می‌باشد و چون چوب شناور است وزن آب جابه‌جا شده با وزن قطعه چوب برابر است:

$$\rho_{\text{آب}} \times V_۱ = \rho_{\text{چوب}} \times V_\circ \Rightarrow \rho_{\text{چوب}} = \frac{۱۰۰۰\times\frac{۲}{۳}V_\circ}{V_\circ} = ۶۶۷\,(\frac{kg}{m^۳})$$

برای حالتی که قطعه چوب در روغن شناور می‌شود $V_۲ = \frac{۹}{۱۰}V_\circ$، پس می‌توان نوشت: $\rho_{\text{روغن}} \times V_۲ = \rho_{\text{چوب}} \times V_\circ \Rightarrow \rho_{\text{روغن}} = \frac{۶۶۷\times V_\circ}{۰/۹\times V_\circ} \simeq ۷۴۰\,(\frac{kg}{m^۳})$

چگالی آب $۱\frac{g}{cm^۳}$ یا $۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}$ است.

مثال۴۳: دو نهر آب که یک رودخانه را تشکیل می‌دهند در نظر بگیرید. اگر یکی از نهرها دارای پهنای $۸m$ و عمق $۳m$ و دارای جریان $۲m/s$ و نهر دیگر با پهنای $۶m$ و عمق $۳m$ و تندی جریان $۳m/s$ باشد پهنای رودخانه $۱۰m$ و تندی جریان آب آن $۳m/s$ است. عمق آن چقدر است؟

۱) ۳/۴ ۲) ۲/۳ ۳) ۴/۳ ۴) ۳/۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به معادله پیوستگی می‌توان نوشت:

$$A_۱ v_۱ + A_۲ v_۲ = Av$$

$$۸\times۳\times۲+۶\times۳\times۳=۱۰\times x\times۳ \Rightarrow x=\frac{۴۸+۵۴}{۳۰}=\frac{۱۰۲}{۳۰}=۳/۴m$$

مثال۴۴: مخزنی تا ارتفاع H محتوی آب است. در عمق h پایین‌تر از سطح آب سوراخی در یکی از دیواره‌های مخزن ایجاد شده است. سوراخ باید در چه عمقی ایجاد شود تا نقطه برخورد جریان آب به زمین از پای مخزن بیشینه باشد؟

۱) $\frac{H}{۴}$ ۲) $\frac{H}{۲}$ ۳) $\frac{H}{۳}$ ۴) $\frac{H}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ما با سقوط یک جرم m مواجه هستیم ابتدا سرعت شاره، هنگام خروج را به کمک معادله برنولی محاسبه می‌کنیم.

$$P_۱+\rho g y_۱+\frac{۱}{۲}\rho v_۱^۲=P_۲+\rho g y_۲+\frac{۱}{۲}\rho v_۲^۲ \quad ; \quad P_۱=P_۲=P_۰$$

از طرفی $Av=const$ می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix}A_۱v_۱=A_۲v_۲\\ A_۱>>A_۲\end{matrix}\right\} v_۱\simeq ۰$$

در نتیجه معادله فوق به صورت روبرو ساده می‌گردد:

$$\rho g(y_۱-y_۲)=\frac{۱}{۲}\rho v_۲^۲$$

توجه کنید اگر ارتفاع صفر را واقع در سطح آب در نظر بگیریم:

$$y_۲=-h \;,\; y_۱=۰ \;;\; v_۲=v=\sqrt{۲gh}$$

مسئله، شبیه مسئله حرکت پرتابی است. با توجه به اصل بقای انرژی مکانیکی می‌توان برای جریان آب که به صورت افقی خارج می‌شود نوشت:

$$mgh=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v=\sqrt{۲gh} \qquad (۱)$$

زمان تخلیه کامل آب تا ارتفاع h را می‌توان با قرار دادن $y_۰=-(H-h)$ در معادله مکان سقوط آزاد به دست آورد:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -(H-h)=-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲}{g}(H-h)} \quad (۲)$$

از طرفی می‌دانیم $x=v_۰ t$ پس با جایگذاری (۱) و (۲) در معادله خواهیم داشت:

$$x=v_۰t=\sqrt{۲gh}\sqrt{\frac{۲}{g}(H-h)} \Rightarrow x=۲\sqrt{h(H-h)}$$

برای بیشینه شدن x، باید مقدار x نسبت به h بهینه شود.

$$x^۲=۴h(H-h) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial h}=۴H-۸h=۰ \Rightarrow h=\frac{H}{۲}$$

مثال ۴۵: چگالی آب دریا ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب است. فشار ناشی از آب در عمق ۲۰ متری چند پاسکال است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰×۱۰^۳ ۴) ۱۹۶×۱۰^۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$P=\rho gh=۱۰۰۰\times۹/۸\times۲۰=۱۹۶\times۱۰^۳ \ Pa$$

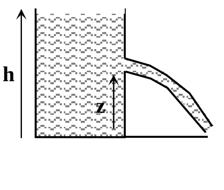
مثال ۴۶: مخزن آبی که تا ارتفاع h پر شده در ارتفاع z سوراخ کوچکی دارد. جریان آبی که از این سوراخ بیرون می‌زند در چه فاصله افقی از پای مخزن به زمین می‌خورد؟

۱) $\sqrt{(h-z)z}$ ۲) $۲\sqrt{(h-z)z}$ ۳) $\sqrt{(h+z)z}$ ۴) $۲\sqrt{(h+z)z}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» مشابه مثال قبل می‌توان معادله برنولی را برای آب در ارتفاع‌های h و z به صورت زیر نوشت:

$$\frac{۱}{۲}\rho v^۲+\rho gz=\rho gh \Rightarrow$$

سرعت در ابتدای سوراخ $v=\sqrt{۲g(h-z)}$



$$\begin{cases} z=\frac{۱}{۲}gt^۲ \\ x=vt \end{cases} \Rightarrow z=\frac{۱}{۲}g(\frac{x^۲}{v^۲}) \Rightarrow x^۲=\frac{۲zv^۲}{g} \Rightarrow x^۲=\frac{۲z\left(۲g(h-z)\right)}{g} \Rightarrow x=۲\sqrt{z(h-z)}$$

بخش سوم : فیزیک (۳)

فصل سیزدهم

«ترمودینامیک»

تست‌های تألیفی فصل سیزدهم

مثال۱: از کدام اثر ترموالکتریکی برای عمل یخچال استفاده می‌شود؟

۱) اثر تامسون ۲) اثر سی یک ۳) اثر ژول ۴) اثر پلیته

پاسخ: گزینه «۴» اثر پلیته اثر ترموالکتریکی است که برای عمل یخچال استفاده می‌شود.

مثال۲: یک ماشین گرمایی کارنو که بین دو منبع با دمای T_1 و T_2 کار می‌کند، کار الکتریکی لازم برای یک یخچال کارنو که بین دو منبع T_3 و T_4 کار می‌کند را تأمین می‌نماید. به ازای $T_1 = ۴۰۰K$ ، $T_2 = ۱۵۰K$ ، $T_3 = ۳۲۵K$ ، $T_4 = ۲۰۰K$ نسبت Q_4 (گرمایی که یخچال از محیط سرد می‌گیرد) به Q_2 (گرمایی که ماشین گرمایی به محیط سرد می‌دهد) چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$K_{\text{یخچال}} = \frac{Q_C}{w} = \frac{T_L}{T_H - T_L} \quad ; \quad \varepsilon_{\text{ماشین گرمایی}} = \frac{W}{Q_H} = ۱ - \frac{T_L}{T_H}$$

$$K = \frac{۲۰۰}{۳۲۵-۲۰۰} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow \frac{Q_{C\,\text{ماشین}}}{W_{\text{یخچال}}} = \frac{۸}{۵} \qquad \varepsilon = ۱ - \frac{۱۵۰}{۴۰۰} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{W_{\text{ماشین}}}{Q_{H\,\text{یخچال}}} = \frac{۵}{۸}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸W_{\text{یخچال}} = ۵Q_{C\,\text{یخچال}} \\ ۸W_{\text{ماشین}} = ۵Q_{H\,\text{ماشین}} \end{cases} \quad \begin{cases} ۸W_{\text{یخچال}} = ۵Q_{C\,\text{یخچال}} \\ ۸W_{\text{ماشین}} = ۵(Q_{C\,\text{ماشین}} + W_{\text{ماشین}}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸W_{\text{یخچال}} = ۵Q_{C\,\text{یخچال}} \\ ۳W_{\text{ماشین}} = ۵Q_{C\,\text{ماشین}} \end{cases} \Rightarrow \frac{Q_{C\,\text{یخچال}}}{Q_{C\,\text{ماشین}}} = \frac{۸}{۳}$$

مثال۳: در چه دمایی مقیاس‌های فارنهایت و سلسیوس بر هم منطبق می‌شوند؟

۱) $-۴۰^\circ F$ ۲) $۳۲^\circ F$ ۳) $۴۰^\circ F$ ۴) $۱۰۴^\circ F$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم مقیاس فارنهایت و مقیاس سلسیوس طبق رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$T_f = \frac{۹}{۵}T_c + ۳۲ \xrightarrow{T_c = T_f} T_f = \frac{۹}{۵}T_f + ۳۲ \rightarrow -\frac{۴}{۵}T_f = ۳۲ \rightarrow T_f = -۴۰^\circ F$$

مثال۴: اگر در مقیاس دمایی خطی یک دماسنج، آب در -۵۰° بجوشد در -۱۷۰° یخ بزند دمای $۲۴۰K$ در این مقیاس چه قدر است؟

۱) $-۲۰۹/۳$ ۲) $-۲۰۹/۶$ ۳) $-۲۰۹/۴$ ۴) -۲۰۹

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم آب در صفر درجه سانتی‌گراد یا ۲۷۳ درجه کلوین یخ می‌زند و در ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد یا ۳۷۳ درجه کلوین بـه جـوش می‌آید. اگر رابطه خطی بین مقیاس دما داده شده و مقیاس کلوین را به صورت زیر بنویسیم خواهیم داشت.

$$T_x = \alpha T_K + \beta$$

$$\begin{cases} -۵۰ = ۳۷۳\alpha + \beta \\ -۱۷۰ = ۲۷۳\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۲۰ = ۱۰۰\alpha \Rightarrow \alpha = ۱/۲ \\ \beta = -۵۰ - ۳۷۳\alpha = -۴۹۷/۶ \end{cases} \Rightarrow T_x = ۱/۲T_K - ۴۹۷/۶$$

$$T_K = ۲۴۰K \Rightarrow T_x = ۱/۲ \times ۲۴۰ - ۴۹۷/۶ = -۲۰۹/۶$$

مثال۵: حداقل چند قطعه یخ $7gr$ با دمای صفر درجه سلسیوس را به ۱۶۷ گرم آب با دمای ۲۵ درجه سلسیوس باید اضافه کنیم تا پس از برقراری تعادل گرمایی مخلوطی از آب و یخ داشته باشیم. از تبادل گرمایی یخ و آب با محیط چشم‌پوشی می‌کنیم. گرمای ویژه آب $۴۲۰۰\frac{J}{kg^{\circ}C}$ و گرمای نهان ذوب یخ $۳۳۶\frac{kJ}{kg}$ است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

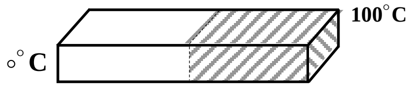
پاسخ: گزینه «۳» M جرم آب و m جرم یخ است:

$$Mc\Delta\theta = mL_f \quad ; \quad (۱۶۷\times۱۰^{-۳})(۴۲۰۰)(۲۵) = m(۳۳۶\times۱۰^{۳}) \Rightarrow m = \frac{۱۶/۷\times۴۲\times۲۵}{۳۳۶\times۱۰^{۳}} \simeq ۰/۰۵۲Kg$$

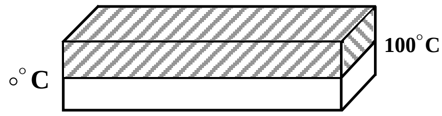
$$\text{تعداد قطعات یخ} = \frac{m}{۷\times۱۰^{-۳}} = \frac{۰/۰۵۲}{۷\times۱۰^{-۳}} \simeq ۷/۴$$

بنابراین حداقل ۷ قطعه یخ ۷گرمی لازم است تا مخلوط آب و یخ داشته باشیم.

مثال۶: دو میله فلزی مشابه با مقطع مربعی مطابق شکل (الف) سر به سر جوش داده شده‌اند. در مدت ۲ دقیقه $۱۰J$ گرما از میله‌ها عبور می‌کند. اگر دو میله مطابق شکل (ب) به هم جوش داده شوند در چه مدت $۱۰J$ گرما از آن‌ها عبور خواهد کرد؟



(الف)



(ب)

۱) $۱min$
۲) $۲min$
۳) $۴min$
۴) $۰/۵min$

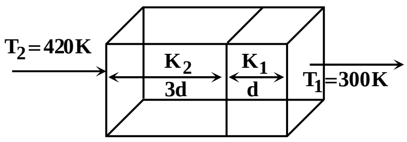
پاسخ: گزینه «۴» طبق رابطه گرمای انتقال یافته بین دو میله آهنگ انتقال گرما از طریق رسانش به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{KA(T_H - T_L)}{L}$$

که در آن K ضریب رسانش، A سطح مقطع دخیل در رسانش و L طول مؤثر میله است. با توجه به گرمای انتقال یافته در حالت (الف) و (ب) می‌توان نوشت سطح مقطع مؤثر در حالت (ب) دو برابر سطح مقطع مؤثر در حالت (الف) و طول مؤثر در حالت (ب) نصف طول مؤثر در حالت (الف) است. Q در هر دو حالت یکسان می‌باشد.

$$\frac{(\text{الف})\dfrac{\cancel{Q}}{t}}{(\text{ب})\dfrac{\cancel{Q}}{t}} = \frac{\dfrac{\cancel{K}\cancel{A}(T_H - T_L)}{\cancel{L}}}{\dfrac{\cancel{K}\,۲\cancel{A}(T_H - T_L)}{\frac{\cancel{L}}{۲}}} = \frac{۱}{۴} \qquad \frac{t'}{t} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow t' = \frac{۱}{۴}\times۲ = ۰/۵min$$

مثال۷: در شکل زیر اگر $K_۲ = ۶K_۱$ (K ضریب رسانایی) باشد و جریان گرما نسبت به زمان تغییر نکند دمای مرز مشترک دو قطعه چند درجه‌ی سانتی‌گراد می‌شود؟



۱) ۱۰۷
۲) ۳۸۰
۳) ۱۲۰
۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینه «۲» دمای مرز مشترک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_x = \frac{K_۱T_۱L_۲ + K_۲T_۲L_۱}{K_۱L_۲ + K_۲L_۱} \quad ; \quad T_x = \frac{\cancel{K_۱}\times۳۰۰\times۳\cancel{d} + ۶\cancel{K_۱}\times۴۲۰\times\cancel{d}}{\cancel{K_۱}\times۳\cancel{d} + ۶\cancel{K_۱}\times\cancel{d}} = \frac{۹۰۰ + ۲۵۲۰}{۹} = ۳۸۰$$

مثال۸: یک ظرف استوانه‌ای به حجم ۱۰۰ لیتر حاوی اکسیژن با دمای $۲۰^\circ C$ و فشار atm ۱۵ است. اگر طی حرکت یک پیستون در استوانه حجم گاز به ۸۰ لیتر و دمای آن به $۲۵^\circ C$ برسد، فشار آن چقدر خواهد شد؟

۱) ۲۵ atm ۲) ۱۹ atm ۳) ۱۲ atm ۴) ۹ atm

پاسخ: گزینه «۲» گاز اکسیژن را می‌توان به عنوان یک گاز کامل در نظر گرفت. چون جرم گاز بدون تغییر باقی می‌ماند می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_i V_i}{T_i}=\frac{P_f V_f}{T_f}$$

شرایط اولیه و نهایی سیستم عبارتند از: $P_i=۱۵atm, T_i=۲۹۳K, V_i=۱۰۰Litr, T_f=۲۹۸K, V_f=۸۰Litr, P_f=?$

بنابراین فشار نهایی برابر است با: $\frac{۱۵\times ۱۰۰}{۲۹۳}=\frac{P_f\times ۸۰}{۲۹۸}\Rightarrow P_f=۱۹atm$

مثال۹: سطح مقطع لوله موبین یک دماسنج جیوه‌ای $A_\circ$ و حجم حباب جیوه در دمای صفر درجه سلسیوس $V_\circ$ است. طول ستون جیوه در دمای t چقدر خواهد بود؟ (ضریب انبساط خطی شیشه α و ضریب انبساط حجمی جیوه β فرض شود)

۱) $(\beta-۳\alpha)t$ ۲) $\frac{A_\circ}{V_\circ}(\beta-۳\alpha)t$ ۳) $\frac{V_\circ}{A_\circ}(\beta-۳\alpha)t$ ۴) $\frac{V_\circ}{A_\circ}(۳\alpha-\beta)t$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه انبساط گرمایی می‌توان نوشت: $\Delta V=V_\circ\beta\Delta t$

از طرفی رابطه حجم به صورت مقابل است. $V=Ah\ \rightarrow\ \Delta V=A\Delta h$

A سطح مقطع لوله و h ارتفاع مایع در لوله است. با جایگذاری داریم: $\Delta h\times A_\circ=V_\circ(\beta-۳\alpha)\Delta t\ \rightarrow\ \Delta h=\frac{V_\circ(\beta-۳\alpha)\Delta t}{A_\circ}$

توجه کنید ضریب انبساط کل برابر است با ضریب انبساط حجمی جیوه منهای ضریب انبساط حجمی شیشه که در صورت مسئله به ما ضریب انبساط خطی (α) شیشه داده شده است، در صورتی که می‌دانیم ضریب انبساط حجمی شیشه $\beta=۳\alpha$ است.

مثال۱۰: گرمای ویژه یک ماده بر حسب دما طبق رابطه $c=۰/۲+۰/۰۴T+۰/۰۳T^۲$ تغییر می‌کند. انرژی لازم برای افزایش دمای ۲kg از این ماده از $۵^\circ C$ به $۱۵^\circ C$ چقدر است؟

۱) $۰/۷۷\ J$ ۲) $۷۷\times ۱۰^{-۳}\ J$ ۳) $۷۷\ J$ ۴) $۷۷\times ۱۰^{-۲}\ J$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه Q و چون c تابع دما است، رابطه به صورت زیر در می‌آید که می‌توان در ناحیه $۵^\circ C$ تا $۱۵^\circ C$ انتگرال گرفت:

$$Q=mc\Delta T=۲\times\int cdT=۲\int_۵^{۱۵}(۰/۲+۰/۰۴T+۰/۰۳T^۲)dT=[۰/۲T+۰/۰۲T^۲+۰/۰۱T^۳|_۵^{۱۵}]\times ۲$$

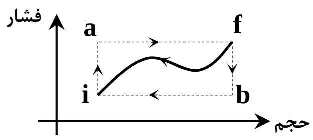
$$Q=۲\times[۰/۲\times ۱۵+۰/۰۲\times(۱۵)^۲+۰/۰۱(۱۵)^۳-(۰/۲\times ۵+۰/۰۲\times(۲۵)+۰/۰۱\times ۱۲۵)]=۷۷J$$

مثال۱۱: چه مکانیزم‌هایی می‌تواند گرما را از میان خلأ انتقال دهد؟

۱) فقط تابش و رسانایی ۲) فقط همرفت ۳) فقط تابش ۴) فقط تابش و همرفت

پاسخ: گزینه «۳» انتقال گرما از طریق تابش چون از طریق امواج الکترومغناطیس انجام می‌شود، برای انتقال به محیط مادی نیازی ندارد. پس این تنها مکانیزمی است که در خلأ امکان‌پذیر است.

مثال۱۲: هنگام بردن یک سیستم از حالت i به f در طول مسیر iaf داریم: $Q=۵۰\ cal$ و $W=۲۰\ cal$ و در طول مسیر ibf، $Q=۳۶cal$ می‌باشد، اگر در طول مسیر برگشت fi داشته باشیم $W=-۱۳cal$، گرمای Q در طول این مسیر چیست؟



۱) ۴۳ cal ۲) ۴۳- cal ۳) ۳۴ cal ۴) ۳۴- cal

پاسخ: گزینه «۲» انرژی داخلی برای مسیرهای iaf و ibf یکسان است طبق قانون اول ترمودینامیک $\Delta E_{in}=Q-W$ که در آن Q گرمای جذب شده توسط سیستم است. $\Delta E_{iaf}=Q-W=۵۰-۲۰=۳۰\ ;\ \ Q=\Delta E_{in}+W=-۳۰-۱۳=-۴۳\ cal$

در تمامی فرآیندهای ترمودینامیکی ذکر شده در بالا مقدار تغییرات انرژی درونی در طی فرآیند برابر است با: $\Delta E = nC_V\Delta T$

که در آن C_V ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت است.

مثال۱۳: به ۱/۶۴۸ مول از یک گاز دو اتمی در فشار ثابت ۲/۷۳ اتمسفر، مقدار ۳۵۰۰ ژول گرما داده‌ایم، تغییر انرژی درونی گاز چند ژول است؟
$\left(C_{Mv} = \frac{۵}{۲}R\ ,\ C_{MP} = \frac{۷}{۲}R\right)$

۱) ۲۱۰۰   ۲) ۳۰۰۰   ۳) ۲۵۰۰   ۴) ۳۵۰۰

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مقدار گرمای داده شده می‌توان نوشت:

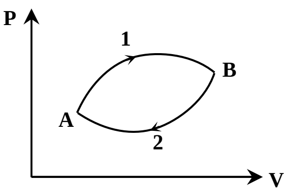
$$Q = nC_p\Delta\theta \Rightarrow \frac{۳۵۰۰}{\frac{۷}{۲}R} = n\Delta\theta$$

از طرفی برای انرژی درونی می‌توان نوشت:

$$\Delta E = nC_V\Delta\theta = n\times\frac{۵}{۲}R\Delta\theta \Rightarrow \Delta E = \frac{۳۵۰۰}{\frac{۷}{۲}R}\times\frac{۵}{۲}R = ۲۵۰۰J$$

مثال۱۴: گازی (مطابق شکل زیر) در راستای مسیر (۱) از حالت A به حالت B می‌رود، ۸۰۰ ژول گرما جذب می‌کند و ۵۰۰ ژول کار انجام می‌دهد. وقتی گاز در راستای مسیر (۲) از حالت B به حالت A برمی‌گردد، ۳۰۰ ژول کار روی آن انجام می‌شود. کارآیی چرخه $A \to B \to A$ چند ژول است؟

۱) ۳۰۰
۲) ۵۰۰
۳) ۶۰۰
۴) ۸۰۰



پاسخ: گزینه «۳» در مسیر (۱) انرژی درونی برابر است با: $\Delta E = Q - W = ۸۰۰ - ۵۰۰ = ۳۰۰$

در مسیر (۲) نیز ۳۰۰ ژول کار روی آن انجام می‌شود. بنابراین کارایی چرخه اگر به معنی کار یا انرژی دریافتی چرخه باشد، برابر است با:
$۳۰۰ + ۳۰۰ = ۶۰۰$ ژول

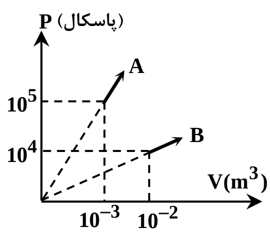
مثال۱۵: رابطه میان فشار P، حجم V و دمای T ماده خاصی چنین است: $P = \frac{AT - BT^۲}{V}$ که در آن A و B مقادیری ثابت هستند. رابطه مربوط به کار انجام شده توسط ماده را در حالی‌که فشار ثابت است، در حین تغییر دما از $T_۱$ تا $T_۲$ پیدا کنید.

پاسخ: با استفاده از رابطه کار که مطابق آن $W = \int P\,dV$ می‌باشد می‌توان مسئله را حل کرد. ابتدا باید رابطه داده شده را به صورت $PV = AT - BT^۲$ بنویسیم. با توجه به ثابت ماندن فشار طی این فرآیند، از طرفین رابطه دیفرانسیل می‌گیریم:

$$PdV = AdT - B۲TdT \Rightarrow P\int dV = \int_{T_۱}^{T_۲} AdT - ۲B\int_{T_۱}^{T_۲} T\,dT$$

$$\Rightarrow W = A(T_۲ - T_۱) - \frac{\cancel{۲}B}{\cancel{۲}}(T_۲^۲ - T_۱^۲) = A(T_۲ - T_۱) - B(T_۲^۲ - T_۱^۲)$$

مثال۱۶: در شکل مقابل دو فرآیند برای دو گاز کامل رسم شده است. تعداد مول‌های هر دو گاز مساوی است. اگر دمای گاز A، T_A و دمای گاز B، T_B باشد (در شروع فرآیند)، کدام گزینه ارتباط این دو دما را نشان می‌دهد؟



۱) $T_A > T_B$
۲) $T_A = T_B$
۳) $T_A < T_B$
۴) $T_A >> T_B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق معادله عمومی گازها $PV = nRT$ دما برابر است با حاصل‌ضرب حجم در فشار گاز، پس داریم:

مشاهده می‌شود که نقاط A و B هم‌دما هستند.

$$\left.\begin{array}{l} T_A = P_A V_A = 10^5 \times 10^{-3} = 10^2 \\ T_B = P_B V_B = 10^4 \times 10^{-2} = 10^2 \end{array}\right\} \Rightarrow T_A = T_B$$

مثال۱۷: برای اعداد ۵،۸،۱۱و۱۳ مقدار متوسط (n_{avg}) و مقدار میانگین مربعی این اعداد (n_{rms}) کدام است؟

☑ **پاسخ:** $n_{avg} = \frac{5+8+11+13}{4} = \frac{37}{4} = 9/25$ و $n_{rms} = \left(\frac{5^2+8^2+11^2+13^2}{4}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{379}{4}} = \sqrt{94/75} = 9/73$

مثال۱۸: مقدار v_{rms} برای ذرات دود با جرم $4/5 \times 10^{-14}$ در هوای $16^\circ C$ و فشار 1atm چند cm/s است؟

۱) $0/017$ ۲) $1/7$ ۳) 17 ۴) 170

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به رابطه $v_{rms} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$ می‌توان مسئله را حل کرد ابتدا دما را برحسب کلوین محاسبه می‌کنیم:

$$T = 16 + 273 = 289 \rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \times 1/38 \times 10^{-23} \times 289}{4/5 \times 10^{-14}}} \Rightarrow v_{rms} = 0/052\left(\frac{cm}{s}\right)$$

مثال۱۹: اگر یک مول از دو گاز ایده‌آل بی‌اثر، با هم مخلوط شوند و حجم و دمای اولیه آن‌ها مساوی باشد، تغییر آنتروپی چقدر است؟

۱) $2R$ ۲) $2R\ln 2$ ۳) $\frac{1}{2}R$ ۴) $\frac{1}{2}R\ln 2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به رابطه آنتروپی برای گازها و توجه به یکسان بودن حجم و دمای اولیه دو گاز می‌توان نوشت:

$$\Delta S = nR\ln\frac{V_f}{V_i} + nc_V \ln\frac{T_f}{T_i}$$

چون دمای هر دو گاز در حالت اولیه یکسان است پس بعد از مخلوط شدن آن‌ها تغییری در دمای دو گاز نخواهیم داشت در نتیجه می‌توان نوشت:

$$T_f = T_i \rightarrow \ln\frac{T_f}{T_i} = 0$$

از طرفی حجم اولیه دو گاز برابر بوده و گازها هر دو بی‌اثر هستند پس حجم ثانویه دو برابر حجم اولیه خواهد بود.

$$V_f = 2V_i \quad \text{و} \quad n_{total} = n_1 + n_2 = 2$$

پس با توجه به توضیحات بالا می‌توان مقدار آنتروپی را حساب کرد.

$$\Delta S = nR\ln\frac{2V_i}{V_i} = 2R\ln 2$$

مثال۲۰: در آبشار نیاگارا در هر ثانیه $6000\,m^3$ آب از فاصله عمودی $50\,m$ سقوط می‌کند و تمام انرژی گرانشی خود را تلف می‌کند. آهنگ افزایش آنتروپی محیط در اثر سقوط آب چند $\frac{J}{K.s}$ است؟ دمای محیط $27^\circ C$ است.

۱) 10^4 ۲) $1/1 \times 10^5$ ۳) 10^7 ۴) $1/1 \times 10^8$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه هر m^3 آب ۱۰۰۰ لیتر است و هر لیتر آب ۱ کیلوگرم وزن دارد، خواهیم داشت:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{mg\Delta h}{T} = \frac{(6000((10^3)(10)(50))}{300K} \Rightarrow 10^7\,J \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{10^7\,J}{10^3\,K.s} = 10^4\,\frac{J}{K.s}$$

مثال۲۱: دو مخزن پر از دو گاز متفاوت مفروض است. دمای این دو مخزن یکی است. فرض کنید که جرم مولکولی دو گاز m_1 و m_2 باشد. تکانه‌ی خطی متوسط مولکول‌های این دو گاز چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱) $p_1 = p_2$ ۲) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2}{m_1}$ ۳) $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ ۴) $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق صورت سؤال گفته شده دمای دو مخزن یکی است یعنی $T_1 = T_2$ از طرفی می‌دانیم v_{rms} گازها با جرم گازها نسبت عکس دارد.

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

که در آن m جرم مولکولی گاز می‌باشد. از طرفی برای تکانه خطی متوسط می‌توان نوشت $p = mv_{rms}$ پس می‌توان نوشت:

$$p = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \times m = \sqrt{3kTm} \xrightarrow{T_1=T_2} \frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{\cancel{3}\cancel{k}\cancel{T_1}m_1}}{\sqrt{\cancel{3}\cancel{k}\cancel{T_2}m_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

مثال۲۲: مسیر آزاد میانگین مربوط به ۱۵ مهره ژلاتینی کروی درون کیسه‌ای که به شدت تکان داده می‌شود چقدر است: حجم کیسه $1/0\ L$ و قطر هر مهره $1/0\ cm$ است. (برخوردهای مهره ــ مهره را در نظر بگیرید نه برخورد مهره ــ کیسه را)

☑ **پاسخ:** ابتدا لازم است چگالی مهره‌ها را در حجم کیسه حساب کنیم: $\frac{N}{V} = \frac{15}{1\times10^{-3}} = 15\times10^{3}$ حال با جایگذاری در رابطه مربوط به λ می‌توان مسیر آزاد میانگین این مهره‌ها را حساب کرد.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 \frac{N}{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times(1\times10^{-2})^2\times15\times10^{3}} = \frac{10}{\sqrt{2}\,\pi\times15} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\times3} = 0/15\,m$$

مثال۲۳: قطر مؤثر مولکول ازت ۳/۱۵ آنگستروم است. در چه چگالی (بر حسب مولکول بر مترمکعب) مسافت آزاد میانگین مولکول‌های گاز ازت از مرتبه‌ی ابعاد یک اتاق است؟

۱) 10^{9} ۲) 10^{18} ۳) 10^{20} ۴) 10^{23}

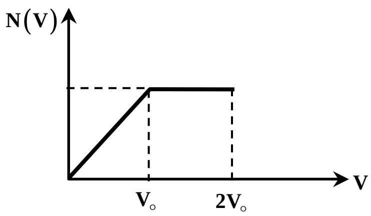
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابعاد اتاق از مرتبه $1m$ پس با توجه به رابطه مسافت آزاد میانگین می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \frac{N}{V}}$$

که صورت سؤال از ما مقدار $\frac{N}{V}$ را خواسته است.

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}\times3/14\times(3/15\times10^{-10})^2\frac{N}{V}} \Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{10^{20}}{\sqrt{2}\times3/14\times(3/15)^2} = 0/022\times10^{+20} = 2/2\times10^{18}$$

مثال۲۴: توزیع سرعت یک گاز فرضی که شامل N ذره است در شکل زیر نشان داده شده است. (به ازای $v > 2v_0$ ، $N(v) = 0$ است)، تعداد ذراتی که سرعت آن‌ها بین $1/5v_0$ و $2v_0$ است چقدر است؟



۱) $\frac{N}{2}$ ۲) $\frac{N}{3}$

۳) $\frac{N}{4}$ ۴) $\frac{N}{6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به مساحت منحنی در این محدوده و سهم آن از کل منحنی می‌توان نوشت:

$$\text{تعداد ذرات} = \frac{\text{سطحی که مساحت آن بین } 1/5v_0 \text{ تا } 2v_0 \text{است}}{\text{سطح کل}} \times N = \frac{0/5v_0\times N}{\frac{Nv_0}{2} + v_0N} \times N = \frac{N}{3}$$

که N تعداد کل ذرات می‌باشد.

مثال۲۵: ضریب انبساط حجمی در فشار ثابت را برای یک گاز ایده‌آل که از رابطه‌ی $P(v-b)=nRT$ پیروی می‌کند به دست آورید؟ (b,R,n ضرایب ثابت هستند)

☑ **پاسخ:**

$$v-b=\frac{nRT}{P}\ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial T}\Big|_P=\frac{nR}{P}\Rightarrow \beta=\frac{۱}{v}(\frac{nR}{P})=\frac{nR}{Pv}$$

مثال۲۶: مقداری گاز در فشار $۱/۴atm$ و دمای $۳۰۰\,K$ حجمی برابر $۴/۲lit$ اشغال می‌کند. اگر آن را به صورت بی‌دررو متراکم کنیم تـا حجـم آن به $۲/۱lit$ کاهش یابد با فرض ایده‌آل بودن گاز و $\gamma=+\frac{۳}{۲}$ فشار پایانی گاز کدام است؟

۱) $۲/۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲/۸\sqrt{۲}$ ۴) $۲۸\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به رابطه میان حجم و فشار در حالت انبساط بی‌دررو می‌توان فشار نهایی گاز را محاسبه کرد.

$$P_i\ V_i^\gamma=P_f\ V_f^\gamma\ \Rightarrow ۱/۴\times(۴/۲)^{\frac{۳}{۲}}=P_f\ (۲/۱)^{\frac{۳}{۲}}\ \Rightarrow P_f=\frac{۱/۴\times(۴/۲)^{\frac{۳}{۲}}}{(۲/۱)^{\frac{۳}{۲}}}=۱/۴\times۲^{\frac{۳}{۲}}=۲/۸\sqrt{۲}\,lit$$

مثال۲۷: در فشار یک اتمسفر و دمای $۳۰۰K$ مقداری گاز، حجمی برابر با ۴ لیتر را اشغال می‌کند. این گاز را به طور بی در رو متراکم می‌کنـیم تـا حجم آن به یک لیتر برسد. با فرض اینکه گاز ایده‌آل است و برای آن $\gamma=۱/۵$ می‌باشد دمای نهایی گاز چند کلوین است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۶۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در فرآیند بی دررو یا آدیاباتیک، رابطه‌ی $PV^\gamma=cte$ برقرار است:

$$PV^\gamma=cte\Rightarrow\begin{cases}PV\,V^{\gamma-۱}=cte\\ PV=nRT\end{cases}\Rightarrow TV^{\gamma-۱}=cte\ \Rightarrow T_f\ V_f^{\ \gamma-۱}=T_i\ V_i^{\gamma-۱}\ ;\ \ T_f\,(۱)^{۱/۵-۱}=(۳۰۰)(۴)^{۱/۵-۱}\ \Rightarrow T_f=۶۰۰K$$

مثال۲۸: در فرآیند انجام شده بر روی n مول از یک گاز کامل، ابتدا گاز را در دمای ثابت T منبسط کرده حجم آن را از $V_۱$، به $V_۲$ می‌رسانیم. سپس گاز را به شکل آدیاباتیک (بی‌دررو) منبسط کرده حجم و فشار آن را از $V_۲$ و $P_۲$ به $V_۳$ و $P_۳$ می‌رسانیم. کل کار انجام یافته بر روی گاز برابر است با:

۱) $W=P_۲V_۲\ln\frac{V_۲}{V_۱}+\frac{P_۳V_۳-P_۲V_۲}{\gamma-۱}$

۲) $W=P_۲V_۲\ln\frac{V_۲}{V_۱}+\frac{P_۲V_۲-P_۳V_۳}{\gamma-۱}$

۳) $W=P_۲V_۲\ln\frac{V_۲}{V_۱}+\frac{P_۲V_۲-P_۳V_۳}{۱-\gamma}$

۴) $W=P_۲V_۲\ln(V_۲-V_۱)+\frac{P_۲V_۲-P_۳V_۳}{\gamma-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در دمای ثابت مقدار کار از رابطه‌ی $dW=-PdV$ به دست می‌آید. به طوری که:

$$\begin{cases}dW=-PdV\\ PV=nRT\end{cases}\xrightarrow{n=۱}dW=\frac{RT}{V}dV\ \Rightarrow\int dW=-RT\int_{V_۱}^{V_۲}\frac{dV}{V}\ ;\ \ W=-RT\ln\frac{V_۲}{V_۱}=-P_۲V_۲\ln\frac{V_۲}{V_۱}$$

در فرآیند بی‌دررو $dQ=۰$ خواهد بود بنابراین از رابطه‌ی $dE=dQ+dW$ خواهیم داشت:

$$dE=dW\Rightarrow dW=dE$$

$$\left.\begin{array}{l}dW=-\frac{۳}{۲}nRdT\\ C_V=\frac{۳}{۲}R\\ \gamma=\frac{C_P}{C_V}\\ C_P=R+C_V\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{n=۱}dW=-C_VdT\\ \Rightarrow\int dW=-C_V\int_{T_۲}^{T_۳}dT\\ \Rightarrow W=C_V(T_۲-T_۳)\end{array}$$

$$=\frac{C_V}{R}(RT_۲-RT_۳)=\frac{C_V}{R}(P_۲V_۲-P_۳V_۳)=\frac{P_۲V_۲-P_۳V_۳}{R/C_V}=\frac{P_۲V_۲-P_۳V_۳}{\gamma-۱}\Rightarrow W=-P_۲V_۲Ln\frac{V_۲}{V_۱}-\frac{P_۲V_۲-P_۳V_۳}{۱-\gamma}$$

$$\Rightarrow |W|=P_۲V_۲Ln\frac{V_۲}{V_۱}+\frac{P_۲V_۲-P_۳V_۳}{۱-\gamma}$$

مثال۲۹: یک گاز کامل دو اتمی را در دمای $۶۰^\circ C$ به طور هم‌دما منبسط می‌کنیم تا حجم آن سه برابر شود. اگر مقدار گاز ۶ مول باشد چقدر کار در این فرآیند انجام می‌شود؟ $R=۱/۹۹\frac{cal}{mol.k}$

۱) $۴/۳۳\times۱۰^۳\ J$ ۲) $۴/۳۳\times۱۰^۳\ cal$ ۳) $۶/۱۲\times۱۰^۳\ cal$ ۴) $۶/۱۲\times۱۰^۳\ J$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases}dW=PdV\\PV=nRT\end{cases}\Rightarrow W=\int_{V_۱}^{V_۲}PdV=\int_{V_۱}^{V_۲}\frac{nRT}{V}dV=nRT\int_{V_۱}^{V_۲}\frac{dV}{V}\Rightarrow W=nRT\ln\frac{V_۲}{V_۱}$$

$$W=(۶)(۱/۹۹)(۳۳۳)\ln۳\simeq۴/۳۳\times۱۰^۳\ cal$$

مثال۳۰: در یک تحول آدیاباتیک گاز دو اتمی $\left(\gamma=\frac{۷}{۵}\right)$ حجم و فشار گاز از (۵ Lit و ۲ اتمسفر) به (۸Lit و ۱/۵۶ اتمسفر) می‌رسد. چند ژول کـار، برای این تحول لازم است؟

۱) ۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۵۰۰۰

پاسخ: گزینه «۳» در فرآیند آدیاباتیک داریم:

$$w=\frac{۱}{\gamma-۱}(P_۲V_۲-P_۱V_۱)\ \Rightarrow\ W=\frac{۱}{\frac{۷}{۵}-۱}(۵\times۲\times۱۰^۲-۸\times۱/۵۶\times۱۰^۲)=\frac{۱}{\frac{۲}{۵}}\times۱۰^۲(۱۰-۱۲/۴۸)=۲/۵\times۱۰۰\times۲/۴۸=۶۲۰\ j$$

مثال۳۱: یک گرماسنج با ظرفیت گرمایی $۱۵۰\frac{J}{^\circ C}$ محتوی ۰/۵ کیلوگرم آب $۸^\circ C$ است. قطعه فلزی به دمای $۱۱۰^\circ C$ را در آن وارد مـی‌کنـیم. دمای تعادل $۱۰^\circ C$ می‌شود. ظرفیت گرمایی قطعه فلز چند $\frac{J}{^\circ C}$ است؟ $(C=۴۲۰۰\frac{J}{kg\ ^\circ C})$

پاسخ: دمای گرماسنج و آب هر دو $۸^\circ C$ است. برای گرماسنج $A\Rightarrow mc=۱۵۰\frac{J}{^\circ C}$ است. داریم: $Q_۱=Q_۲$

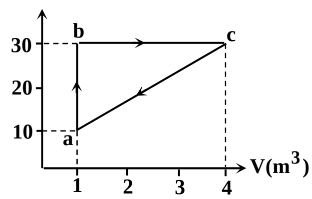
$$[A+m_۱c_۱](\theta-۸)=m_۲c_۲(۱۱۰-\theta)\ \Rightarrow[۱۵۰+۰/۵(۴۲۰۰)](۱۰-۸)=A_۲(۱۱۰-۱۰)\ \Rightarrow A_۲=۴۵\frac{J}{^\circ C}$$

مثال۳۲: گازی به طور بی دررو منبسط می‌شود تغییر آنتروپی آن چگونه است؟

۱) $\Delta S<۰$ ۲) $\Delta S>۰$ ۳) $\Delta S=۰$ ۴) اظهار نظر قطعی نمی‌توان کرد.

پاسخ: گزینه «۳» چون فرآیند بی‌دررو است یعنی $dQ=۰$ در نتیجه $\Delta S=\int_i^f\frac{dQ}{T}=۰$ پس $\Delta S=۰$ است.

مثال۳۳: گاز داخل یک مخزن چرخه abca را مطابق شکل می‌پیماید. مقدار گرمای مبادله شده در طول چرخه چند ژول است؟



۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۴۰

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به شکل، یک چرخه کامل وجود دارد که در آن $\Delta E=۰$ است. بنابراین: $Q+W=۰\Rightarrow Q=-W$

و می‌دانیم کار انجام شده در نمودار $P-V$ برابر مساحت زیر منحنی است:

فرآیند هم‌حجم $W_{ab}=0$ مسیر ab

مساحت زیر منحنی bc مسیر bc $W_{bc}=30\times 3=90\,J$

مساحت زیر منحنی ca مسیر ca $W_{ca}=\frac{1}{2}(10+30)\times 3=60\,J$

در فرآیند bc با انبساط گاز مواجه هستیم، بنابراین طبق رابطهٔ $W=-P\Delta V$ کار منفی است. $W_{bc}=-90\,J$

ولی در فرآیند ca گاز متراکم شده $(\Delta V<0)$ بنابراین:

$$W_{ca}=+60\,J\ ;\ \ W_{abca}=W_{ab}+W_{bc}+W_{ca}=0-90+60=-30\,J$$

از طرفی $Q=-W\Rightarrow Q_{abca}=30\,J$

روش دوم: می‌دانیم که سطح محصور در چرخه کار انجام شده در طی فرآیند را نشان می‌دهد. اگر چرخه ساعتگرد باشد این کار منفی و اگر پاد ساعتگرد باشد این کار مثبت است بنابراین در این سؤال کار انجام شده برابر است با:

$$S=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{2}=\frac{3\times 20}{2}=30\Rightarrow W=-30\,J$$

در طی یک چرخه تغییرات انرژی درونی صفر است بنابراین:

$$\Delta E=0\ \Rightarrow Q+W=0\Rightarrow Q=-W=30\,J$$

مثال۳۴: بازدهی کارنو برای یک ماشین گرمایی که بین دو دمای $227^\circ C$ و $27^\circ C$ عمل می‌کند چند درصد است؟

۱) ۲۵ ۲) ۴۰ ۳) ۶۶/۶ ۴) ۸۸/۱

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه بازده ماشین گرمایی کارنو کافی است دمای T_H و دمای T_L را که به ترتیب بیشترین و کمترین دمای سیستم است بدانیم و سپس با استفاده از رابطه بازده چرخه کارنو می‌توان نوشت:

$$\varepsilon=1-\frac{T_C}{T_H}=1-\frac{27+273}{227+273}=1-\frac{300}{500}=\frac{2}{5}\times 100=40\%$$

توجه کنید بازده ماشین کارنو بیشترین بازده گرمایی ماشین گرمایی است که بین دو منبع سرد و گرم کار می‌کند.

مثال۳۵: در مرحله اول یک ماشین کارنو دو مرحله‌ای انرژی گرمایی Q_1 در دمای T_1 جذب می‌شود، کار W_1 انجام می‌شود و انرژی Q_2 در دمای پایین‌تر T_2 خارج می‌شود. در مرحله دوم ماشین، انرژی Q_2 را جذب می‌کند و کار W_2 را انجام می‌دهد و انرژی Q_3 را در دمای پایین‌تر T_3 خارج می‌کند بازده ماشین دو مرحله‌ای کدام است؟

۱) $\frac{T_1-T_3}{T_1}$ ۲) $\frac{T_1-T_3}{T_2}$ ۳) $\frac{T_3-T_2}{T_1}$ ۴) $\frac{T_2-T_3}{T_3}$

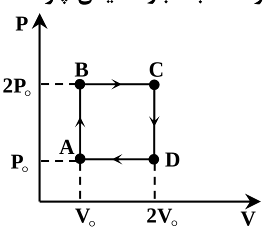
پاسخ: گزینه «۱» کل کار انجام شده در این ماشین کارنو $W=W_1+W_2$ است پس طبق فرمول بازده داریم:

$$\varepsilon=\frac{W_1+W_2}{Q_1}=\frac{(Q_1-Q_2)+(Q_2-Q_3)}{Q_1}=1-\frac{Q_3}{Q_1}$$

از طرفی داشتیم $\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}=\frac{Q_3}{T_3}$ با فرض این که Q_2 توسط مرحله دوم در دمای T_2 جذب شده است. پس بازده ماشین دو مرحله‌ای برابر است با:

$$\varepsilon=1-\frac{T_3}{T_1}=\frac{T_1-T_3}{T_1}$$

مثال۳۶: یک مول گاز ایده‌آل تک اتمی در یک چرخه برگشت‌پذیر، مطابق شکل، به عنوان ماده کار استفاده می‌شود. نسبت بازده این چرخه به بازده یک چرخه کارنو که بین بالاترین و پایین‌ترین دما در این چرخه کار می‌کند، کدام است؟



۱) $\frac{4}{39}$ ۲) $\frac{7}{39}$

۳) $\frac{8}{39}$ ۴) $\frac{3}{13}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $W =$ مساحت چرخه $= P_\circ V_\circ$

گاز مورد نظر ایده‌آل و تک اتمی است در نتیجه $C_V = \frac{۳}{۲}R$ و $C_P = \frac{۵}{۲}R$ علاوه بر آن $n = ۱$ است. $Q_{AB} = nC_V\Delta T = \frac{۳}{۲}R(\frac{۲P_\circ V_\circ - P_\circ V_\circ}{R}) = \frac{۳}{۲}P_\circ V_\circ$

به طور مشابه $Q_{BC} = ۵P_\circ V_\circ$ ، $Q_{CD} = -۳P_\circ V_\circ$ و $Q_{DA} = -\frac{۵}{۲}P_\circ V_\circ$ می‌باشند در نتیجه: $Q_H = \frac{۱۳}{۲}P_\circ V_\circ$

$\varepsilon = \frac{۲}{۱۳}$ از طرفی دمای منابع گرم و سرد به ترتیب $T_H = T_C = \frac{۴P_\circ V_\circ}{R}$ و $T_L = T_A = \frac{P_\circ V_\circ}{R}$ بنابراین، بازده ماشین کارنوی متناظر $\varepsilon_C = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$ خواهد بود لذا $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_C} = \frac{\frac{۲}{۱۳}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸}{۳۹}$.

مثال۳۷: انتقال گرما از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر غیرممکن است چون ....

۱) تمام قوانین ترمودینامیک نقض می‌شود.
۲) قانون اول و دوم ترمودینامیک نقض می‌شود.
۳) قوانین دوم و سوم ترمودینامیک نقض می‌شود.
۴) قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» انتقال گرما از جسمی با دمای پایین‌تر به جسمی با دمای بالاتر طبق دو قانون هم ارز کلوین ـ پلانک و کلاسیوس (بیان‌های مختلف قانون دوم ترمودینامیک) امکان ندارد.

مثال۳۸: یخچالی برای انتقال ۸۰۰J گرما از محفظه سرد، ۱۰۰۰J گرما به آشپزخانه تحویل می‌دهد. ضریب عملکرد یخچال کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۲۰
۳) ۵
۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به رابطه ضریب عملکرد یخچال‌ها داریم: $K = \frac{|Q_L|}{|Q_H| - |Q_L|} = \frac{۸۰۰}{۱۰۰۰ - ۸۰۰} = ۴$

که در اینجا $\begin{cases} Q_H = ۱۰۰۰ \\ Q_L = ۸۰۰ \end{cases}$

مثال۳۹: مخترعی ادعا کرده است ماشین گرمایی ساخته که با دریافت گرمای $Q = ۲۰۰J$ و تحویل کار $W = ۱۵۰J$ به محیط می‌تواند بین دو دمای $T_۱ = ۳۰۰K$ و $T_۲ = ۴۰۰K$ کار کند آیا ادعای او صحت دارد.

۱) بله ناقض قانون دوم ترمودینامیک است.
۲) خیر چون ناقض قانون دوم ترمودینامیک است.
۳) خیر چون ناقض قانون اول ترمودینامیک است.
۴) بله امکان‌پذیر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بازده ماشین گرمایی فوق برابر است با: $\varepsilon = \frac{W}{Q} = \frac{۱۵۰}{۲۰۰} = \frac{۳}{۴}$. در حالی که بازده ماشین گرمایی کارنو که بین این دو منبع کار می‌کند $\varepsilon = ۱ - \frac{T_۱}{T_۲} = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$ خواهد بود از آنجایی که بازده این ماشین گرمایی از بازده ماشین کارنویی که بین همان دو منبع کار می‌کند بیشتر شده بنابراین چنین حالتی امکان‌پذیر نیست چون ناقض قانون دوم ترمودینامیک است.

فصل چهاردهم

«امواج و موج صوتی»

تست‌های تألیفی فصل چهاردهم

مثال ۱: فاصله از چشمه تولید صوت در یک محیط همگن نصف می‌شود. شدت صوت چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۲»

$$r_2=\frac{1}{2}r_1 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{r_1}{\frac{1}{2}r_1}\right)^2=4$$

مثال ۲: دو دیاپازون هم‌زمان شروع به نوسان می‌کنند، فرکانس یکی $400\,Hz$ و فرکانس دیگری مجهول است و ۴ ضربان شنیده می‌شود. در صورتی که قطعه مومی روی دیاپازون با فرکانس مجهول چسبانده شود، تعداد ضربان زیاد می‌شود. فرکانس مجهول چند هرتز است؟

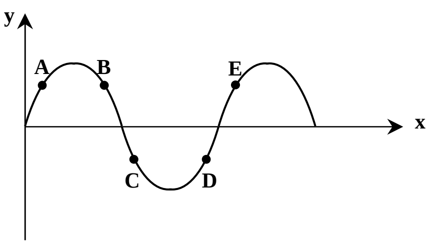
۱) $400\,Hz$ ۲) $396\,Hz$ ۳) $404\,Hz$ ۴) ۲ و ۳

پاسخ: گزینه «۲»

$$n=|\nu_2-\nu_1|=4 \Rightarrow \nu_2-\nu_1=\pm 4 \Rightarrow \nu_2=404\,Hz \text{ یا } \nu_2=396\,Hz$$

با توجه به اینکه با چسباندن قطعه موم فرکانس نوسانی آن کمتر شده است، پس اگر فرکانس اولیه $396Hz$ باشد، با کم شدن آن n بالا می‌رود پس $\nu_2=396Hz$ است.

مثال۳: شکل زیر انتشار موج‌های عرضی در طول یک طناب را نشان می‌دهد. کدام یک از نقاط با نقطه A هم‌فاز است؟



۱) B
۲) C
۳) D
۴) E

پاسخ : گزینه «۴» نقطه E زیرا فاصله آن از A برابر طول موج است.

مثال۴: امواج عرضی با پریود ۰/۵ ثانیه و طول موج ۱۰ متر در طول طنابی منتشر می‌شود. سرعت انتشار چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{matrix} T=0/5(s) \\ \lambda=10m \end{matrix} \Rightarrow v=\frac{\lambda}{T}=\frac{10}{0/5}=20\frac{m}{s}$$

مثال۵: یک منبع ارتعاشی امواجی با بسامد $100Hz$ و طول موج ۰/۵ متر منتشر می‌کند چند ثانیه طول می‌کشد تا این موج‌ها مسافت $200m$ را طی کنند؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ : گزینه «۱»

$$v=\lambda\nu \Rightarrow v=0/5\times 100=50\frac{m}{s}\ ; \quad v=\frac{x}{t}\Rightarrow t=\frac{x}{v}\Rightarrow t=\frac{200}{50}=4(s)$$

مثال۶: نوسانات $y=A\sin 20\pi t$ با سرعت $20\frac{m}{s}$ در محیط منتشر می‌شود، فاصله دو نقطه هم‌فاز متوالی واقع بر راستای انتشار چند متر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۲»

$$\omega=20\pi \rightarrow 2\pi\nu=20\pi \Rightarrow \nu=10\,Hz\ ; \quad \lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{20}{10}=2m$$

می‌دانیم که فاصله دو نقطه هم‌فاز متوالی برابر λ است.

مثال۷: اگر سرعت انتشار موج‌های حاصل از یک منبع ارتعاشی در آب ۵ برابر سرعت انتشار آن در هوا باشد، طول موج در هوا چند برابر طول موج در آب خواهد بود؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۴

پاسخ : گزینه «۳» از آنجا که منبع ارتعاش برای دو محیط یکسان است (ثابت= ν) خواهیم داشت:

$$v_{\text{آب}} = ۵v_{\text{هوا}} \qquad \frac{\lambda_{\text{هوا}}}{\lambda_{\text{آب}}} = \frac{v_{\text{هوا}}}{v_{\text{آب}}} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۰/۲ \qquad \frac{\text{هوا}}{\text{آب}}$$

مثال۸: امواج عرضی در سطح آب منتشر می‌شوند و فاصله دو برآمدگی متوالی ۲۰cm است. اگر فاصله دو نقطه در راستای انتشار ۵cm باشد، اختلاف فاز آن‌ها چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به رابطه موج می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} k = \frac{۲\pi}{\lambda} \\ \lambda = ۲۰\,cm = ۰/۲m \end{cases} \Rightarrow k = \frac{۲\pi}{۰/۲} = ۱۰\pi\frac{rad}{m} \;;\; \begin{cases} \Delta\phi = k\Delta x \\ \Delta x = ۵cm = ۰/۰۵m \end{cases} \Rightarrow \Delta\phi = ۱۰\pi \times \frac{۵}{۱۰۰} = ۰/۵\pi = \frac{\pi}{۲}rad$$

مثال۹: معادله موج در نقطه A از یک محیط $u_A = ۰/۱\sin(\pi t - \frac{\pi}{۳})$ است. تغییر فاز نقطه‌ی A در بازه‌ی زمانی ۰/۰۲ ثانیه چند رادیان است؟

۱) $۰/۰۲\pi$ ۲) $۰/۰۱\pi$ ۳) π ۴) ۲π

پاسخ : گزینه «۱»

$$\Delta\phi = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\phi = ۰/۰۲\pi(rad)$$

مثال۱۰: تابع یک موج در دو نقطه A و B از یک محیط $u_A = a\sin(۲\pi t - \frac{\pi}{۴})$ و $u_B = a\sin(۲\pi t - \frac{\pi}{۸})$ است. اگر کمترین طول AB برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، سرعت انتشار موج در محیط چند $\frac{m}{s}$ است؟

۱) ۳/۲ ۲) ۲ ۳) ۱/۶ ۴) ۲/۵

پاسخ : گزینه «۳» در اینجا اختلاف فاز مکانی است، داریم:

$$\Delta\phi = ۲\pi t - \frac{\pi}{۸} - (۲\pi t - \frac{\pi}{۴}) = \cancel{۲\pi t} - \frac{\pi}{۸} - \cancel{۲\pi t} + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \Delta\phi = -\frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{۸} \quad \text{و} \quad \Delta\phi = k\Delta x \to \frac{\pi}{۸} = ۰/۱k \Rightarrow k = \frac{۱۰\pi}{۸}$$

$$\Delta x = AB = ۰/۱m \quad \text{و} \quad v = \frac{\omega}{k} \to v = \frac{۲\pi}{\frac{۱۰\pi}{۸}} \Rightarrow v = ۱/۶\frac{m}{s}$$

در حالتی که موج عرضی در طول یک طناب ایجاد می‌شود با معلوم بودن مشخصات محیط می‌توان سرعت موج عرضی را با توجه به اصول بنیادی مکانیک نیوتنی محاسبه کرد. اگر F نیروی کشش طناب (نیروی بازگرداننده) و μ جرم واحد طول طناب (مشخصه اینرسی) باشد، سرعت انتشار موج در آن عبارت خواهد بود از:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

بنابراین برای دو حالت متفاوت می‌توانیم سرعت موج عرضی ایجاد شده را با هم مقایسه کنیم:

$$\frac{v_۱}{v_۲} = \sqrt{\frac{F_۱}{F_۲} \times \frac{L_۱}{L_۲} \times \frac{m_۲}{m_۱}}$$

مثال ۱۱: ریسمانی به طول ۴ متر و جرم ۴۰۰ گرم بین دو نقطه محکم کشیده شده است. اگر نیروی کشش ریسمان برابر $100N$ باشد، سرعت انتشار موج‌های عرضی در این ریسمان برابر چند $\frac{m}{s}$ است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $2\sqrt{10}$ ۳) $10\sqrt{10}$ ۴) $4\sqrt{10}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$v=\sqrt{\frac{FL}{m}}=\sqrt{\frac{100\times 4}{0/4}}=\sqrt{\frac{100\times \cancel{4}}{\cancel{4}\times 10^{-1}}}=\sqrt{1000}=10\sqrt{10}\frac{m}{s}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}u_1=A\sin(kx-\omega t)\\ u_2=A\sin(kx+\omega t)\end{array}\right\}\Rightarrow u_T=u_1+u_2=2A\sin kx\cos\omega t$$

دامنه امواج ایستاده عبارت است از $2A\sin kx$ که نسبت به مکان متغیر است، یعنی دامنه ارتعاش برای ذرات مختلف یکسان نیست بلکه با مکان ذره تغییر می‌کند. دامنه امواج ایستاده در نقاطی که مضرب فردی از $\frac{\lambda}{4}$ باشد مقدار بیشینه‌ی $2A$ خواهد بود که به آن‌ها «شکم» گفته می‌شود.

$x=(2n-1)\frac{\lambda}{4}$ نقاط شکم

همچنین دامنه امواج ایستاده در نقاطی که مضرب صحیحی از $\frac{\lambda}{2}$ باشد، مقدار کمینه صفر خواهد بود. به این نقاط «گره» گفته می‌شود. $x=n\frac{\lambda}{2}$ نقاط گره

مثال ۱۲: نیروی کشش تار همگنی را چهار برابر و طول آن را نصف می‌کنیم. سرعت انتشار موج در آن چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ : گزینه «۱» چون طول نصف شده پس جرم نیز نصف شده است. داریم:

$$\begin{cases}F_2=4F_1\\ L_2=\frac{1}{2}L_1\end{cases}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{4F_1}{F_1}\times\frac{\frac{1}{2}L_1}{L_1}\times\frac{m_1}{\frac{1}{2}m_1}}=\sqrt{4}=2$$

مثال ۱۳: موجی در یک محیط قابل ارتعاش به وجود می‌آوریم. اگر شدت منبع ارتعاش نصف شود، سرعت انتشار موج چه تغییری می‌کند؟

۱) ثابت می‌ماند. ۲) نصف می‌شود. ۳) ۴ برابر می‌شود. ۴) ۲ برابر می‌شود.

پاسخ : گزینه «۱» سرعت انتشار موج ثابت می‌ماند، زیرا سرعت انتشار به شرایط فیزیکی منبع تولید موج بستگی ندارد.

مثال ۱۴: سیمی به چگالی $4\frac{gr}{cm^3}$ و سطح مقطع $1mm^2$ بین دو نقطه با نیروی $1000N$ کشیده شده است. سرعت انتشار موج در این سیم را محاسبه کنید.

۱) ۲۵۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۷۵۰ ۴) ۱۰۰۰

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases}\rho=4\frac{gr}{cm^3}=4\times 10^3\frac{kg}{m^3}\\ A=1mm^2=10^{-6}m^2\end{cases}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{1000}{4\times 10^{+3}\times 10^{-6}}}=\sqrt{\frac{1000}{4}\times 10^3}=\sqrt{25\times 10^4}=500\frac{m}{s}$$

مثال ۱۵: نیروی کشش در تار A و تار B با هم برابر است. اگر سطح مقطع تار A نصف سطح مقطع تار B باشد و دو تار هم جنس باشند سرعت انتشار موج عرضی در تار A چند برابر سرعت انتشار موج عرضی در تار B خواهد بود؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۲» چون دو تار هم جنس هستند $\rho_A=\rho_B$ خواهد بود.

$$\begin{cases}\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{F_A}{F_B}\times\frac{\rho_B}{\rho_A}\times\frac{A_B}{A_A}}\\ F_A=F_B\\ \rho_A=\rho_B\\ A_A=\frac{1}{2}A_B\end{cases}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{1\times 1\times\frac{A_B}{\frac{1}{2}A_B}}=\sqrt{2}$$

مثال ۱۶: شعاع مقطع سیمی را نصف می‌کنیم، سرعت انتشار موج عرضی در آن چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\begin{cases} r_2 = \frac{1}{2} r_1 \\ F_1 = F_2 \\ \rho_1 = \rho_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1} \times \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 \times 1 \times \left(\frac{r_1}{\frac{1}{2} r_1}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

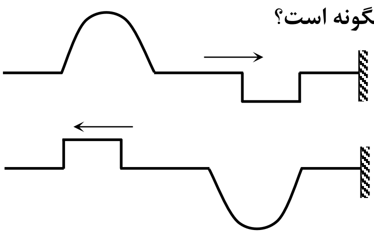
مثال ۱۷: یک تار کشیده، تحت تأثیر نیروی کشش ۱۶۰ نیوتنی قرار دارد. طول تار ۵۰cm و جرم آن ۰/۵ گرم است. اگر این تار به ارتعاش درآید سرعت صوت در آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۵۰ ۴) ۷۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$، می‌توان سرعت را حساب کرد، لازم است ابتدا چگالی طناب که نسبت جرم طناب به طول طناب است را حساب کنیم.

$$\mu = \frac{0/5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-2}} = 10^{-3}\ \frac{kg}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{160}{10^{-3}}} = 400 \frac{m}{s}$$

مثال ۱۸: مطابق شکل زیر موج مرکبی به مانع سخت برخورد کرده و منعکس می‌شود موج بازتابیده چگونه است؟



☑ **پاسخ:** چون مانع سخت است موج وارون می‌شود از طرفی تپ مستطیل زودتر به مانع می‌رسد پس زودتر نیز بازتاب خواهد کرد.

مثال ۱۹: بسامد صوت اصلی تار مرتعشی به طول ۴ متر برابر ۲۰۰ هرتز است. اگر نیروی کشش این تار ۴۰ نیوتن باشد جرم آن چند گرم است؟

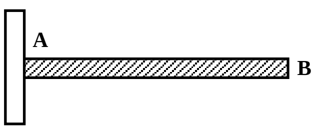
۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{2}{23}$ ۳) $\frac{3}{28}$ ۴) $\frac{1}{18}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$n = 1$ $\quad L = 4m$ $\quad \nu_1 = 200Hz$ اصلی $\quad F = 40N\ ,\ m = ?$

$$\begin{cases} \nu_n = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}} \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}} \\ 200 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{40}{4m}} \Rightarrow 400 = \sqrt{\frac{10}{m}} \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow m = \frac{10}{160000} = \frac{1}{16000} kg = \frac{1}{16} gr$$

مثال ۲۰: یک سرطنابی مطابق شکل به پایه‌ای بسته شده و سر دیگر آن (نقطه B) با حرکت نوسانی ساده‌ای به ارتعاش در می‌آید و امواج ایستاده در طول طناب تشکیل می‌شود. در طول طناب ۶ گره تشکیل شده و فاصله نقطه B از اولین گره ۸ سانتی‌متر می‌شود. طول طناب چند سانتی‌متر است؟



۱) ۴۴
۲) ۸۸
۳) ۹۰
۴) ۶۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در نقطه B شکم داریم در نتیجه فاصله آن از اولین گره $\frac{\lambda_{11}}{4}$ خواهد بود.

$$n = 6 \Rightarrow \frac{\lambda_{11}}{4} = 8 \Rightarrow \lambda_{11} = 32cm$$

$$\lambda_{2n-1} = \frac{4L}{(2n-1)} \Rightarrow \lambda_{11} = \frac{4L}{11} \Rightarrow 32 = \frac{4L}{11} \Rightarrow L = \frac{32 \times 11}{4} = 88cm$$

مثال ۲۱: در یک طناب، موج ایستاده تشکیل شده است. ابتدای طناب ثابت و انتهای آن آزاد است و در طول آن ۳ گره به وجود آمده است. طـول طناب را در صورتی به دست آورید که فاصله دو گره متوالی ۲۰cm باشد.

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$n=3 \Rightarrow 2n-1=2\times 3-1=5 \Rightarrow \frac{\lambda_5}{2}=20 \Rightarrow \lambda_5=40 \; ; \quad \lambda_{2n-1}=\frac{4L}{2n-1} \Rightarrow \lambda_5=\frac{4L}{5} \Rightarrow 4L=200 \Rightarrow L=50\text{cm}$$

مثال ۲۲: دامنه چشمه تولید صوتی دو برابر و بسامد آن نصف می‌شود. اگر فاصله از چشمه تولید صوت نیز نصف شود شدت صوت چند برابر می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$A_2=2A_1,\quad \nu_2=\frac{1}{2}\nu_1,\quad r_2=\frac{1}{2}r_1$$

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=4$$

مثال ۲۳: دامنه چشمه تولید صوتی دو برابر و بدون تغییر بسامد، فاصله از آن ۴ برابر می‌شود. اختلاف تراز شدت صوتی بر حسب بل چقدر خواهد شد؟

۱) $2\log 2$ ۲) $-2\log 2$ ۳) $\log 2$ ۴) $-\log 2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$A_2=2A_1 \;,\quad r_2=4r_1 \;,\quad \nu_2=\nu_1$$

$$\Delta\beta=\log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)^2=\log\left(1\times 2\times\frac{1}{4}\right)^2=\log\frac{1}{4}=\log 1-\log 4=0-2\log 2=-2\log 2$$

یعنی تراز شدت صوت کاهش پیدا خواهد کرد.

مثال ۲۴: کدام عبارت صحیح است:

۱) فرکانس صوت در آب و هوا برابر است.
۲) فرکانس صوت در آب بیشتر از هوا می‌باشد.
۳) فرکانس صوت در آب کمتر از هوا می‌باشد.
۴) سرعت صوت در آب کمتر از هوا می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» زیرا فرکانس جزء خواص ذاتی منبع تولید صوت است و به محیط انتشار صوت بستگی ندارد. هر چه محیط چگال‌تر باشد سرعت صوت در آن بیشتر است. پس گزینه‌ی (۴) صحیح نیست.

مثال ۲۵: مدول بالک آب، برابر است با $B=2/04\times 10^9$ Pa، طول موجی با فرکانس 262Hz را بیابید.

۱) 10/9m ۲) 5/45m ۳) 8/42m ۴) 15/3m

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به رابطه میان سرعت و ضریب بالک داریم:

$$v=\sqrt{\frac{B}{\rho}} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2/04\times 10^9}{10^3}}=1430\frac{m}{s}$$

از طرفی رابطه سرعت و طول موج به صورت $\lambda=\frac{v}{\nu}$ است پس می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{1430}{262}=5/45\text{m}$$

مثال ۲۶: تراز صدای اندازه‌گیری شده از فاصله ۲۰۰ متری یک اتوبان شلوغ ۸۲ دسی بل بوده است. اگر این اتوبان را به عنوان یک منبع خطی در نظر بگیریم، تراز صدا در فاصله ۴۰۰ متری از آن چند دسی‌بل است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۹ ۴) ۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به رابطه تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\Delta\beta_1 = 10\,\mathrm{Log}\frac{I_1}{I_0} = 82\ ,\ \frac{I_2}{I_1} = (\frac{r_1}{r_2})^2 = (\frac{200}{400})^2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}I_1 \quad ; \quad \Delta\beta_2 = 10\,\mathrm{Log}\frac{\frac{1}{4}I_1}{I_0} = 10\log\frac{1}{4} + 10\log\frac{I_1}{I_0} = -6 + 82 \cong 76$$

مثال ۲۷: منبعی امواج صوتی با توان ۲۰۰ وات گسیل می‌دارد. در چه مسافتی شدت دقیقاً زیر آستانه دردناکی قرار می‌گیرد؟ (فرض کنید $I = 1\frac{w}{m^2}$)

۱) $15/94m$ ۲) $15/92m$ ۳) $7/07m$ ۴) $3/99m$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در حین انتشار، مقدار توان امواج صوتی در محیط ثابت باقی می‌ماند.

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{200}{4\pi \times 1}} = 3/99m$$

مثال ۲۸: دمای گازی برابر ۲۷ درجه سانتی‌گراد و جرم مولکولی آن $6g$ است سرعت انتشار صوت در این گاز چند متر بر ثانیه است؟

$((R \simeq 8\frac{j}{moLk}),\ \gamma = 0/1\times 10^2)$

۱) ۵۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۳۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$T = \theta + 273 \to T = 27 + 273 = 300\ K \quad ; \quad v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{0/1\times 10^2 \times 8 \times 300}{6\times 10^{-3}}} = \sqrt{4\times 10^6} = 2000\frac{m}{s}$$

مثال ۲۹: دمای گازی را بر حسب درجه سانتی‌گراد ۴ برابر می‌کنیم، سرعت انتشار صوت در گاز نصف می‌شود دمای اولیه گاز چند درجه سانتی‌گراد بوده است:

۱) $-54/6$ ۲) ۴۴۲ ۳) ۴۵۱ ۴) ۶۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{(\theta_2 + 273)}{\theta_1 + 273}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{4\theta_1 + 273}{\theta_1 + 273}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{4\theta_1 + 273}{\theta_1 + 273} \Rightarrow 16\theta_1 + 4(273) = \theta_1 + 273 \Rightarrow \theta_1 = \frac{-3\times 273}{15} = -54/6^\circ C$$

مثال ۳۰: ضریب اتمیسیته گاز A دو برابر ضریب اتمیسیته گاز B و دمای مطلق گاز A، چهار برابر دمای مطلق گاز B است. اگر سرعت انتشار صوت در این دو گاز باهم برابر باشد نسبت جرم مولکولی گاز A به جرم مولکولی گاز B $(\frac{M_A}{M_B})$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{\gamma_A}{\gamma_B} \times \frac{T_A}{T_B} \times \frac{M_B}{M_A}} \to 1 = \sqrt{2\times 4\times \frac{M_B}{M_A}} \Rightarrow M_A = 8M_B$$

مثال ۳۱: لوله صوتی A به طول L و لوله صوتی B به طول $2L$، هر دو لوله‌های باز هستند. بسامد کدام هماهنگ لوله B با بسامد لوله A برابر است؟

۱) $n_B = n_A$ ۲) $n_B = 2n_A$ ۳) $n_B = 3n_A$ ۴) $n_B = 4n_A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» رابطه میان بسامد و طول لوله را در لوله‌های باز با طول‌های L و $2L$ با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم:

$$\nu_A = \nu_B \Rightarrow \frac{n_A v}{2L} = \frac{n_B v}{4L} \Rightarrow n_B = 2n_A$$

مثال ۳۲: طول لوله صوتی بسته‌ای $90cm$ است. اگر در طول لوله ۵ گره وجود داشته باشد، بسامد صوت حاصل چند هرتز است؟ (سرعت انتشار صوت درون لوله $330\frac{m}{s}$ منظور شود.)

۱) ۱۵۰۰ ۲) ۸۲۵ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۲۰۰

پاسخ: گزینه «۲»

$$n = 5 \Rightarrow 2n-1 = 2\times5-1 = 9 \;;\; \nu_{2n-1} = \frac{(2n-1)v}{4L} \Rightarrow \nu_9 = \frac{9v}{4L} \Rightarrow \nu_9 = \frac{9\times330}{4\times0/9} \Rightarrow \nu_9 = \frac{9\times330}{3/6} = \frac{3300}{4} = 825(Hz)$$

مثال ۳۳: در دو لوله صوتی بسته L_1 و L_2 به ترتیب ۵ گره و ۷ گره وجود دارد. اگر بسامد صوت حاصل در لوله اول $\frac{1}{4}$ بسامد صوت در لوله دوم باشد و هر دو لوله در یک محیط باشند نسبت $\frac{L_1}{L_2}$ برابر است با:

۱) ۳۶ ۲) ۱۳ ۳) $\frac{36}{13}$ ۴) $\frac{13}{36}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{\nu_{2n'-1}}{\nu_{2n-1}} = \frac{2n'-1}{2n-1}\times\frac{v'}{v}\times\frac{L}{L'} \quad \begin{matrix} 2n-1 = 2\times5-1 = 9 \\ 2n'-1 = 2\times7-1 = 13 \end{matrix} \;;\; \frac{\nu_9}{\nu_{13}} = \frac{9}{13}\times1\times\frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{9}{13}\,\frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{13}{36}$$

مثال ۳۴: طول دو لوله صوتی باز و بسته با هم برابر و تعداد گره‌ها در این دو لوله به‌ترتیب ۶ و۴ می‌باشد. طول موج حاصل در لوله بسته چند برابر طول موج حاصل در لوله باز خواهد بود؟

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) $\frac{12}{7}$ ۴) $\frac{7}{12}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{\lambda_{2(4)-1}}{\lambda_6} = \frac{2(6)}{2\times(4)-1}\times1 \Rightarrow \frac{\lambda_7}{\lambda_6} = \frac{12}{7}$$

مثال ۳۵: طول لوله صوتی بازی، نصف طول لوله صوتی بسته است. اگر سرعت انتشار صوت در این دو لوله با هم برابر باشد و در لوله باز ۴ گره و در لوله بسته ۵ گره داشته باشیم، نسبت بسامد در لوله باز به بسامد در لوله بسته برابر است با:

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) ۱۶ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{\nu_{n_1}}{\nu_{2n_2-1}} = \frac{2n_1}{2n_2-1}\times\frac{v_1}{v_2}\times\frac{L_2}{L_1} \Rightarrow \frac{\nu_4}{\nu_9} = \frac{2\times4}{9}\times1\times2 = \frac{\nu_4}{\nu_9} = \frac{16}{9}$$

مثال ۳۶: کدام مطلب در مورد پدیده دوپلر کامل‌تر است؟

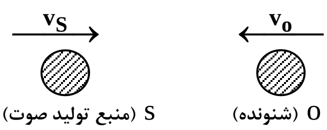
۱) در اثر حرکت نسبی منبع صوت و شنونده، ارتفاع صوت کم می‌شود.

۲) وقتی منبع صوت و شنونده به هم نزدیک می‌شوند ارتفاع صوت افزایش می‌یابد.

۳) در اثر حرکت نسبی منبع صوت و شنونده ارتفاع صوت زیاد می‌شود.

۴) وقتی که منبع صوت و شنونده به هم نزدیک شوند، ارتفاع صوت کم می‌شود.

پاسخ: گزینه «۳» اگر فرض کنیم $v_O = v_S$ می‌توان نوشت:



$$\rightarrow \frac{v+v_S}{v-v_o} > 1$$

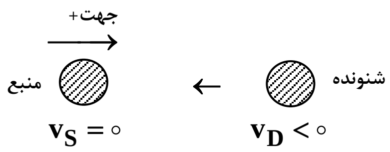
و رابطه بالا یعنی ارتفاع صوت زیاد می‌شود.

مثال ۳۷: شنونده‌ای با سرعتی برابر نصف سرعت صوت به یک چشمه صوتی ساکن نزدیک می‌شود. نسبت بسامد صوتی که شنونده دریافت می‌کند به بسامد چشمه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون شنونده به منبع نزدیک می‌شود پس علامت v_D منفی است.

$$\nu_D = \nu_S \frac{v + v_D}{v} = \nu_S \frac{v + \frac{v}{۲}}{v} = \frac{۳}{۲}\nu_S \Rightarrow \nu_D = \frac{۳}{۲}\nu_S$$

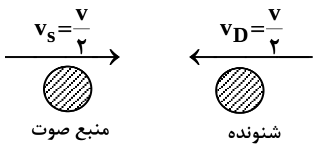


مثال۳۸: یک چشمه صوتی و یک شنونده، هر کدام با سرعتی برابر با نصف سرعت صوت به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. اگر فرکانس صوتی که شنونده دریافت می‌کند ۴۸۰ Hz باشد، فرکانس صوت چشمه چند هرتز است؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۷۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\nu_D = \nu_S \frac{v + v_D}{v - v_S} \Rightarrow ۴۸۰ = \nu_S \frac{v + \frac{v}{۲}}{v - \frac{v}{۲}} \Rightarrow ۳\nu_S = ۴۸۰ \Rightarrow \nu_S = ۱۶۰\,\text{Hz}$$



مثال۳۹: یک منبع صوتی با نصف سرعت صوت به ناظر ساکنی نزدیک می‌شود. بسامدی که ناظر دریافت می‌کند چند برابر بسامد واقعی منبع صوت است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\frac{\nu_O}{v - v_O} = \frac{\nu_S}{v - v_S} \Rightarrow \frac{\nu_O}{v - ۰} = \frac{\nu_S}{v - \frac{۱}{۲}v} \Rightarrow \frac{\nu_O}{v} = \frac{\nu_S}{\frac{v}{۲}} \Rightarrow \nu_O = ۲\nu_S$$

فصل پانزدهم

«نور»

تست‌های تألیفی فصل پانزدهم

مثال۱: پرتو نوری در هوا با زاویه 30° (نسبت به قائم) به سطح صاف یک قطعه کوارتز می‌تابد. این باریکه شامل دو طول موج ۴۰۰ و ۵۰۰ نانومتر است. ضریب شکست کوارتز نسبت به هوا (n_{qa}) برای این طول موج‌ها به ترتیب ۱/۴۷۰۲ و ۱/۴۶۲۴ است. زاویه میان دو باریکه شکسته شده چقدر است؟

۱) $0/22^\circ$ ۲) $19/99^\circ$ ۳) $0/11^\circ$ ۴) $29/87^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قانون اسنل ـ دکارت می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=n_{qa}\begin{cases}\sin 30^\circ=(1/4702)\sin\theta_2 \rightarrow \theta_2=19/88\\ \sin 30^\circ=(1/4624)\sin\theta_2' \rightarrow \theta_2'=19/99\end{cases}$$

زاویه میان این دو باریکه $\Delta\theta=0/11^\circ$ است. مؤلفه‌ای که طول موجش کوچک‌تر است بیشتر منحرف می‌شود یعنی زاویه شکست آن بزرگ‌تر است.

مثال۲: اگر پرتو نوری از منشوری با ضریب شکست $(n_1=1/5)$ تحت زاویه $\theta=45^\circ$ وارد آب $(n_2=1/33)$ شود چه اتفاقی خواهد افتاد؟

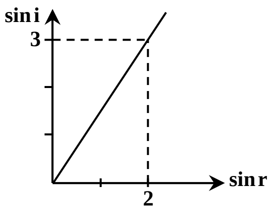
۱) پرتو نور وارد آب می‌شود و از خط عمود دور می‌شود.
۲) پرتو نور مماس بر منشور خارج می‌شود.
۳) پرتو نور وارد آب می‌شود و به خط عمود نزدیک می‌شود.
۴) اصلاً پرتو نور به آب وارد نمی‌شود.

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این‌گونه مسائل ابتدا باید زاویه حد را حساب کنیم.

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1/33}{1/5}=0/878 \rightarrow \theta_c=62/5^\circ$$

چون $\theta_i<\theta_c$ است پس شرط ورود نور به محیط دوم برقرار می‌باشد اما چون محیط دوم رقیق‌تر است $(n_2<n_1)$ پس پرتو شکسته شده از خط عمود دور می‌شود.

مثال۳: نوری از هوا، به محیط شفافی می‌تابد، اگر منحنی تغییرات $\sin i$ بر حسب $\sin r$ مطابق شکل زیر باشد. سرعت سیر نور در این محیط چند متر بر ثانیه است؟ (سرعت نور در هوا $=3\times10^8\frac{m}{s}$)



۱) $2/8\times10^8\frac{m}{s}$ ۲) $2\times10^8\frac{m}{s}$
۳) $1/8\times10^8\frac{m}{s}$ ۴) $2/2\times10^8\frac{m}{s}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به رابطه مقابل می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{3\times10^8}{v_2}\Rightarrow v_2=2\times10^8\frac{m}{s}$$

مثال۴: از یک نقطه نورانی، پرتوها بر یک وجه منشور با ضریب شکست $(n=2)$ و نزدیک به خط عمود می‌تابند. زاویه انحراف پرتوها در کدام گزینه زیر صدق می‌کند؟ (منشور نازک و α کوچک است)

۱) α ۲) 2α ۳) $\frac{3\alpha}{2}$ ۴) $\frac{\alpha}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته (۵) داریم:

$$\text{زاویه انحراف}=(n-1)\varphi \rightarrow \text{زاویه انحراف}=(2-1)\alpha=\alpha$$

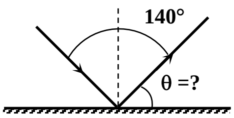
مثال۵: مجموع زوایای تابش و بازتابش از آینه تختی ۱۴۰° است. زاویه‌ای که پرتو بازتابش با سطح آینه می‌سازد چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۷۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

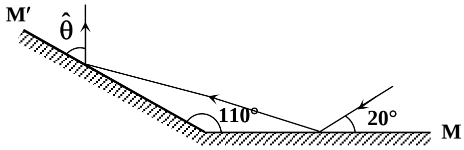
پاسخ : گزینه «۱»

$$\hat{i} = \hat{r} = \frac{۱۴۰}{۲} = ۷۰^\circ$$

$$\hat{\theta} = ۹۰ - ۷۰ = ۲۰^\circ$$

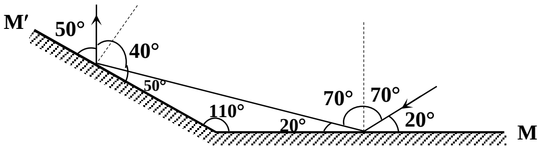


مثال۶: در شکل داده شده، زاویه $\hat{\theta}$ چند درجه است؟



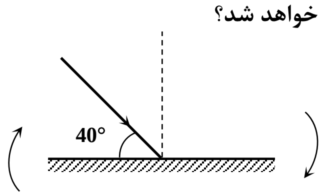
۱) ۲۰
۲) ۷۰
۳) ۴۰
۴) ۵۰

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به شکل و استفاده از قوانین ساده هندسی موجود بین زوایا به راحتی می‌توان به دست آورد:



$$\hat{\theta} = ۵۰^\circ$$

مثال۷: مطابق شکل اگر آینه تخت را ۲۰° دوران دهیم مجموع زوایای تابش و بازتابش بعد از دوران چند درجه خواهد شد؟



۱) ۷۰
۲) ۱۰۰
۳) ۵۰
۴) ۱۴۰

پاسخ : گزینه «۴» چون دوران آینه ساعتگرد است از علامت مثبت استفاده می‌کنیم:

$i = ۵۰^\circ \quad ; \quad \hat{\alpha} = ۲۰^\circ$

$$\hat{i} + \hat{r}' = ۲(\hat{i} + \hat{\alpha}) = ۲(۵۰ + ۲۰) \Rightarrow \hat{i}' + \hat{r}' = ۱۴۰^\circ$$

مثال۸: اگر یک شیء را ۳ متر از آینه تخت دور کنیم، آن شیء چند متر از تصویرش دور می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه «۲»

$$p_۲ = ۳ + p_۱ \Rightarrow \Delta_۲ - \Delta_۱ = ۲(p_۲ - p_۱) = ۲(۳ + \cancel{p_۱} - \cancel{p_۱}) = ۶m$$

مثال۹: اگر از شیئی که ما بین دو آینه متقاطع قرار گرفته است بتوان ۸ تصویر را مشاهده کرد، زاویه بین دو آینه چقدر است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۶۰°

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به رابطه $n = \frac{۳۶۰}{\alpha} - ۱$ خواهیم داشت:

$$n = \frac{۳۶۰}{\alpha} - ۱ \Rightarrow ۸ = \frac{۳۶۰}{\alpha} - ۱ \Rightarrow \frac{۳۶۰}{\alpha} = ۹ \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

برای حل تمامی مسائل مربوط به آینه‌های کروی می‌توان از قراردادهای زیر استفاده کرد:

۱ـ در همه آینه‌ها، فاصله جسم تا آینه با p، فاصله تصویر تا آینه با q، فاصله کانونی آینه با f و شعاع آینه با r نشان داده می‌شوند.۲ـ فاصله کانونی آینه نصف شعاع آینه است یعنی: $f = \frac{r}{۲}$ ۳ـ رابطه اصلی بین فاصله کانونی، فاصله جسم از آینه و فاصله تصویر از آینه برابر است با:

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f}$$

۴ـ بزرگنمایی آینه‌ها که نسبت طول تصویر به طول شیء را به دست می‌دهد برابر است با:

$$m = \frac{A'B'}{AB} = \left|\frac{q}{p}\right|$$

که در آن $A'B'$ طول تصویر و AB طول شیء است.

مثال۱۰: اگر روی محور اصلی یک آینه مقعر، شیء کوچکی را از مرکز آینه تا کانون جابجا کنیم تصویر ...... آن از .... جابجا می‌شود.

۱) حقیقی ـ کانون تا مرکز ۲) حقیقی ـ مرکز تا بی‌نهایت ۳) مجازی ـ مرکز تا بی‌نهایت ۴) مجازی ـ کانون تا مرکز

پاسخ : گزینه «۲» در حقیقت باید بین حالت‌های چهارم تا دوم جابجایی تصویر در نظر گرفته شود.

مثال۱۱: آینه مقعری (کاو) به شعاع ۴۰ سانتی‌متر از یک شیء که در فاصله ۳۰ سانتی‌متری آن است تصویر تشکیل می‌دهد، در این حالت بزرگنمایی خطی آینه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

پاسخ : گزینه «۲» $r = ۴۰cm \qquad p = ۳۰cm \qquad m = ?$

روش اول: $f = \frac{r}{۲} = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰ \quad ; \quad \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۱}{q} = \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow q = ۶۰cm \quad ; \quad m = \frac{q}{p} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲$

روش دوم: $f = \frac{mp}{m+۱} \Rightarrow ۲۰ = \frac{۳۰m}{m+۱} \Rightarrow ۲۰m + ۲۰ = ۳۰m \Rightarrow ۱۰m = ۲۰ \Rightarrow m = ۲$

مثال۱۲: شیء را در فاصله چند سانتی‌متری از یک آینه محدب به شعاع ۲۸ سانتی‌متر قرار دهیم تا طول تصویر حاصل از آن نصف طول شیء باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۸ ۳) ۱۴ ۴) ۷

پاسخ : گزینه «۳» **روش اول:**

$p = ? \quad m = \frac{۱}{۲} \quad r = ۲۸cm \;\Big|\; f = -\frac{r}{۲} = -\frac{۲۸}{۲} = -۱۴cm$

$m = |\frac{q}{p}| \Rightarrow \frac{۱}{۲} = |\frac{q}{p}| \Rightarrow q = -\frac{p}{۲}$ علامت منفی در نظر گرفته می‌شود چون در آینه‌های محدب تصویر همواره مجازی و $q < ۰$ است.

$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۱}{p} - \frac{۲}{p} = -\frac{۱}{۱۴} \Rightarrow \frac{۱-۲}{p} = -\frac{۱}{۱۴} \Rightarrow p = ۱۴cm$

روش دوم: $f = \frac{mp}{m-۱} \Rightarrow -۱۴ = \frac{\frac{۱}{۲}p}{\frac{۱}{۲}-۱} \Rightarrow -۱۴ = \frac{\frac{۱}{۲}p}{-\frac{۱}{۲}} = -p \Rightarrow p = ۱۴cm$

مثال۱۳: شیء را در جلوی آینه کوژی قرار داده‌ایم. فاصله کانونی آینه ۲۰cm و بزرگنمایی آن $\frac{۲}{۵}$ است. فاصله شیء تا رأس آینه چند سانتی‌متر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۵

پاسخ : گزینه «۱» **روش اول:** چون آینه محدب است علامت منفی در نظر گرفته می‌شود.

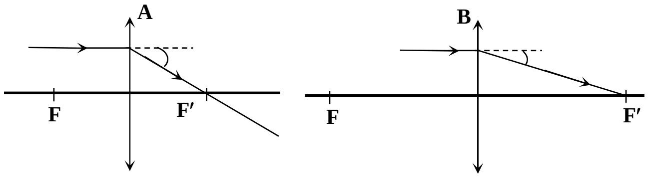
$f = -۲۰cm \quad m = \frac{۲}{۵} \;\Big|\; m = |\frac{q}{p}| \Rightarrow \frac{۲}{۵} = |\frac{q}{p}| \Rightarrow q = -\frac{۲}{۵}p$

$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۱}{p} - \frac{۵}{۲p} = -\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{+۲-۵}{۲p} = -\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{-۳}{۲p} = -\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow ۲p = ۶۰ \Rightarrow p = ۳۰$

روش دوم:

$f = \frac{mp}{m-۱} \Rightarrow -۲۰ = \frac{\frac{۲}{۵}p}{\frac{۲}{۵}-۱} = \frac{\frac{۲}{\cancel{۵}}p}{-\frac{۳}{\cancel{۵}}} = -\frac{۲p}{۳} \Rightarrow ۶۰ = ۲p \Rightarrow p = ۳۰$

مثال۱۴: در دو شکل داده شده توان کدام عدسی بیشتر است؟

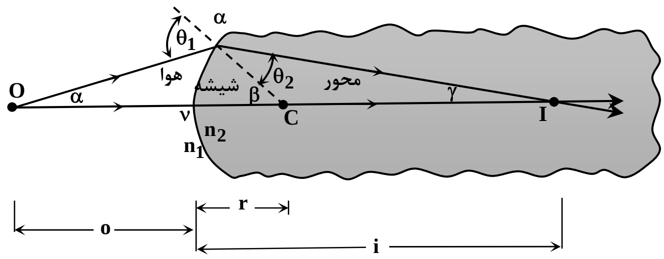


☑ **پاسخ :**

$$f_A < f_B \Rightarrow D_A > D_B$$

عدسی A زیرا پرتو نور را بیشتر منحرف کرده است.

مثال۱۵: با توجه به شکل زیر، محل تصویر کدام است؟ با فرض اینکه شعاع انحنا ۱۰ سانتی‌متر است و $n_1 = 1$ و $n_2 = 2$ و شیء در ۲۰ سانتیمتری طرف چپ (محیط O) قرار دارد.



۱) $+40\,Cm$
۲) $-40\,Cm$
۳) $20\,Cm$
۴) $-20\,Cm$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به رابطه روبرو داریم:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad ; \quad \frac{1}{+20\,cm} + \frac{2}{i} = \frac{2-1}{+10\,cm} \Rightarrow i = +40\,cm$$

توجه کنید r مثبت است چون مرکز انحنا در طرف حقیقی واقع شده است. پس $i = +40\,cm$.

مثال۱۶: جسمی در محیطی با ضریب شکست $n_1 = 2$ قرار دارد و فاصله‌اش تا سطح کروی 15cm است. شعاع انحنای سطح −10cm است. محل تصویر در کدام فاصله است؟

۱) $i = -40\,cm$
۲) $i = -30\,cm$
۳) $i = 40\,cm$
۴) $i = 30\,cm$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \Rightarrow \frac{2}{+15} + \frac{1}{i} = \frac{1-2}{-10} \Rightarrow i = -30\,cm$$

مثال۱۷: در یک عدسی کاو شعاع انحنای عدسی ۴۰ سانتی‌متر است. این عدسی از شیشه‌ای با ضریب شکست $n = 1/65$ ساخته شده است. فاصله کانونی عدسی چقدر است؟

۱) +۳۱
۲) -۳۱
۳) +۲۹
۴) -۲۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون شعاع انحنای عدسی داده شده است فقط باید به این توجه کنیم که علامت r' و r'' چگونه است. در عدسی کاو C' در طرف مجازی عدسی است بنابراین r' منفی می‌شود و r'' مثبت است. پس داریم:

$$\frac{1}{f} = (1/65 - 1)\left(\frac{1}{-40} - \frac{1}{40}\right) \Rightarrow f \simeq -31$$

مثال۱۸: اگر آزمایش یانگ با موجی با طول موج سبز $\lambda = 5460\,\mathring{A}$ انجام شود در حالی که شکاف‌ها 0/1mm فاصله دارند و فاصله شکاف‌ها تا پرده 20Cm است فاصله دو ماکزیمم متوالی از یکدیگر چقدر خواهد بود؟

۱) $1/09\,mm$
۲) $1/09\,\mathring{A}$
۳) $1/9\,mm$
۴) $1/09\,cm$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d} = \frac{546 \times 10^{-9} \times 20 \times 10^{-2}}{0/1 \times 10^{-3}} = 1/09\,mm$$

مثال۱۹: ضخامت یک فیلم آب $(n = 1/33)$ در هوا $320nm$ است. اگر این فیلم را در معرض تابش عمودی نور سفید قرار دهیم، نور بازتابیده از آن را به چه رنگی می‌بینیم؟

☑ **پاسخ:**

$$\lambda_{max} = \frac{2dn}{m+\frac{1}{2}} = \frac{2\times 320\times 1/33}{m+\frac{1}{2}} = \frac{850}{m+\frac{1}{2}} \quad ; \quad \lambda_{min} = \frac{850}{m}$$

اگر $m = 1$ قرار داده شود $\lambda_{min} = 850nm$ و $\lambda_{max} \simeq 570nm$ می‌شود که در ناحیه مرئی قرار دارد و قابل‌رؤیت می‌باشد. نور بازتابیده عمدتاً به رنگ سبز مایل به زرد دیده می‌شود.

مثال۲۰: حداقل ضخامت لایه شفافی به ضریب شکست $n = 1/4$ چند نانومتر باشد تا اگر روی شیشه با ضریب شکست $n = 1/5$ قرار گیرد برای پرتو بنفش با طول موج ۴۰۰ نانومتر بازتابیده از روی تیغه، تداخل ویرانگر صورت پذیرد؟

۱) ۷۱/۵ ۲) ۲/۷۹ ۳) ۳/۵ ۴) ۵/۵۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون مسئله حداقل ضخامت را خواسته است، $m = 0$ در نظر گرفته می‌شود:

$$2dn = (m+\frac{1}{2})\lambda \quad ; \quad d = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{400nm}{4\times 1/4} = \frac{100}{1/4} = 71/4nm$$

مثال۲۱: حلقه‌های نیوتن با نوری به طول موج ۴۰۰ نانومتر تشکیل می‌شوند. تغییر ضخامت لایه هوا در میان سومین و ششمین نوار روشن چند نانومتر است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۴۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$2d = (m+\frac{1}{2})\lambda \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2}(m+\frac{1}{2})$$

$$\Delta d = d_6 - d_3 = \frac{\lambda}{2}(6+\frac{1}{2}) - \frac{\lambda}{2}(3+\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2}\times 3 = \frac{400}{2}\times 3 = 600nm$$

مثال۲۲: فیلمی از یک ماده شفاف به ضریب شکست $n = 1/3$ را در هوا قرار داده‌ایم. ضخامت این فیلم ۰/۱۲۵ میکرومتر است. این فیلم برای کدام یک از طول موج‌های زیر کدر به نظر می‌رسد؟

۱) $120nm$ ۲) $163nm$ ۳) $325nm$ ۴) $650nm$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$2dn = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2dn}{m} = \frac{2\times 0/125\times 10^{-6}\times 1/3}{m} \xrightarrow{m=1} \lambda = 325nm$$

مثال۲۳: به شکافی به پهنای a نور سفید می‌تابانیم. اگر بخواهیم اولین مینیمم مربوط به نور قرمز $(\lambda = 650nm)$ در $\theta = 30^\circ$ بیفتد، a باید چقدر انتخاب شود؟

☑ **پاسخ:** از آنجایی که اولین مینیمم مد نظر است $(m = 1)$ در نظر گرفته می‌شود.

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{1\times 650}{\sin 30^\circ} = 1300nm$$

پس کافی است پهنای شکاف دو برابر طول موج باشد.

مثال۲۴: قطر عدسی همگرایی ۳ سانتی‌متر و فاصله کانونی آن ۲۰ سانتی‌متر است. زاویه جدایی دو شیء نقطه‌ای دور دست، باید چقدر باشد تا بتوانیم تصاویر آن‌ها را در این عدسی با معیار ریلی تفکیک کنیم؟

☑ **پاسخ:** برای زاویه‌های بسیار کوچک $\sin\theta \simeq \theta$ است.

$$\theta_R = 1/22\frac{\lambda}{d} = \frac{1/22\times 5/5\times 10^{-7}}{3\times 10^{-2}} = 2/2\times 10^{-5}\,rad$$

مثال۲۵: به یک توری که در هر اینچ ۸۰۰۰ شیار دارد، نور سفید به طور عمود می‌تابد، ماکزیمم مرتبه اول در چه زاویه‌ای اتفاق می‌افتد؟ (گستره طول موج سفید بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است)

☑ **پاسخ:** ابتدا فاصله توری (d) را محاسبه می‌کنیم:

$$d = \frac{2/54Cm}{8000} = 317nm$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1}\frac{1\times 400nm}{317nm} = \sin^{-1}0/126 = 7/3^\circ$$

مثال۲۶: توری پراش باید چند شیار داشته باشد تا طیف نور سدیم (دو تایی سدیم) به طول موج‌های $5890\,A^\circ$ و $5895/9\,A^\circ$ را در مرتبه سوم تفکیک کند؟

پاسخ:

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=\frac{589}{(589/59-589)\,nm}=1000 \quad ; \quad N=\frac{R}{m}\underset{(m=3)}{=}\frac{1000}{3}=333$$

مثال۲۷: پرتوهای x تکفام به بلوری از NaCl که فاصله شبکه‌ای آن $0/3\,nm$ است، می‌تابند، وقتی باریکه را 60° نسبت به قائم بچرخانیم بازتابش براگ مرتبه اول مشاهده می‌شود. طول موج پرتوها چقدر است؟

پاسخ:

$$2d\sin\theta=m\lambda \xrightarrow{m=1} \lambda=2d\sin\theta=2\times\frac{a_0}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0/3\,nm$$

توجه کنید که $d=\frac{a_0}{\sqrt{3}}$ و $\theta=60^\circ$ است.

مثال۲۸: می‌خواهیم از یک تیغه شیشه‌ای $(n=1/5)$ به عنوان قطبش گر استفاده کنیم زاویه قطبندگی چقدر است؟

پاسخ: طبق قانون بروستر داریم:

$$\theta_p=\tan^{-1}\frac{n_2}{n_1}=\tan^{-1}\frac{1/5}{1}=56/3^\circ$$

مثال۲۹: تیغه ربع موج کوارتزی برای نور سدیم $(\lambda=589\,nm)$ باید چه ضخامتی داشته باشد؟ (دو موج با سرعت‌های متناظر با دو ضریب شکست $n_e=1/553$ و $n_o=1/541$ در تیغه حرکت می‌کند.)

پاسخ: پس برای ضخامت x از بلور تعداد طول موج‌های λ_e و λ_o که از موج‌های اول و دوم در آن می‌گنجد، برابرند با:

$$N_e=\frac{x}{\lambda_e}=\frac{xn_e}{\lambda} \quad , \quad N_o=\frac{x}{\lambda_o}=\frac{xn_o}{\lambda}$$

چون تیغه ربع موج است پس اختلاف این عددها، یعنی N_e-N_o باید برابر $\frac{1}{4}$ باشد.

$$\frac{1}{4}=\frac{x}{\lambda}(n_e-n_o) \Rightarrow x=\frac{589\,nm}{4(1/553-1/541)}=0/012\,mm$$