مدرسان شریف

فصل سوم

«تابع»

درسنامه (۱): تعریف تابع، تعریف دامنه، برد تابع و معرفی انواع تابع

تعریف تابع

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. f زیر مجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ (یعنی یک رابطه از A به B) را یک تابع گویند. هرگاه هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند، اگر دو مؤلفه اول مساوی باشند، حتماً باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم مساوی باشند تا این رابطه یک تابع باشد.

مثال ۱: دو مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{-۱,۰,۳\}$ مفروض است. حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ عبارتست از:

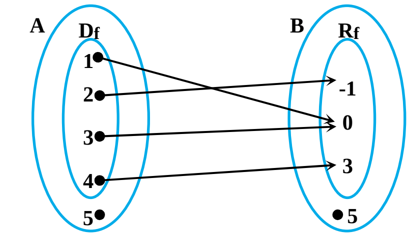
$$A\times B=\{(۱,-۱),(۲,-۱),(۳,-۱),(۴,-۱),(۱,۰),(۲,۰),(۳,۰),(۴,۰),(۱,۳),(۲,۳),(۳,۳),(۴,۳)\}$$

رابطه $f=\{(۲,-۱),(۳,۰),(۴,۳)\}$ یک تابع است ولی $g=\{(۲,۰),(۳,۳),(۲,۳)\}$ تابع نیست.

دامنه‌ی تعریف و برد تابع: مجموعه‌ی مؤلفه‌های اول اعضای تابع f را دامنه‌ی (دامنه‌ی تعریف) f و مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم اعضای f را برد f می‌خوانند و آنها را به ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهند.

مثال ۲: فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{-۱,۰,۳,۵\}$ و شکل زیر تابع f را مشخص کند. دامنه و برد f را مشخص کنید.

☑ پاسخ:



$D_f=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $R_f=\{-۱,۰,۳\}$

مقدار تابع

وقتی (x,y) عضو دلخواهی از f باشد y را مقدار تابع f در x می‌خوانند و معمولاً آن را به صورت $y=f(x)$ می‌نویسند، در این مقام مؤلفه اول، یعنی x را متغیر مستقل و مؤلفهٔ دوم، یعنی y را متغیر تابع می‌خوانند. توجه کنید که تابع f، که مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است، با مقدار آن در x، یعنی $f(x)$، فرق دارد.

هرگاه f یک تابع باشد، مؤلفه‌ی دوم هر زوج مرتب در f به طور یگانه‌ای از روی مؤلفه اول آن زوج مرتب مشخص می‌شود و بدین ترتیب از روی f قانون یا ضابطه‌ای به دست می‌آید که به کمک آن می‌توان به هر عضو x از D_f یک و تنها یک عضو y متعلق به R_f متناظر ساخت به قسمی که $(x,y)\in f$.

اگر دامنه تابع داده نشود باید آن را بزرگترین زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع (مورد بحث) اختیار کرد که آن قانون برای آن زیر مجموعه با معنی است. به عنوان مثال در تابع $f(x)=x^۲$ مقادیر f به ازای xهای دامنه‌ی تابع به صورت مربع x می‌باشند، یعنی داریم: $f=\{(۲,۴)(۳,۹)(۴,۱۶)\}$

مثال ۳: تابع f به شکل روبرو داده شده است: $f=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{N},x<۵,y=x^۲-۴x+۳\}$

تابع f را به شکل زوج‌های مرتب بنویسید ($\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی است)

☑ **پاسخ:** xهای کوچک‌تر از ۵ که عدد طبیعی می‌باشند را در تابع قرار می‌دهیم تا مقادیر y آن‌ها به دست بیاید.

$$f=\{(۱,۰),(۲,-۱),(۳,۰),(۴,۳)\}$$

تذکر۱: رابطه‌هایی که در آنها y، داخل قدر مطلق، براکت، دارای توان زوج و یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، معمولاً تابع نیستند.

مثال۴: اگر x متغیر مستقل باشد، کدامیک از روابط زیر تابع است؟

۱) $y^۲ = x+۱$ ۲) $y+x^۲-۱=۰$ ۳) $x^۲+y^۲-۱=۰$ ۴) $\sin y = x$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: به ازای $x=۰$، در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) بیش از یک مقدار برای y به دست می‌آید و فقط در گزینه (۲) تنها یک مقدار برای y حاصل می‌شود.

گزینه (۱) : $y^۲ = x+۱ \xrightarrow{x=۰} y^۲=۱ \Rightarrow y=\pm۱$

گزینه (۲) : $y+x^۲-۱=۰ \xrightarrow{x=۰} y-۱=۰ \Rightarrow y=۱$

گزینه (۳) : $x^۲+y^۲-۱=۰ \xrightarrow{x=۰} y^۲-۱=۰ \Rightarrow y=\pm۱$

گزینه (۴) : $\sin y = x \xrightarrow{x=۰} \sin y=۰ \Rightarrow y=۰\ ,\ \pm\pi\ ,\ \pm۲\pi\ ,\ \dots$

روش دوم: در یک رابطه، اگر y دارای توان زوج، قدر مطلق، جزء صحیح یا نسبت مثلثاتی باشد آن ضابطه معمولاً تابع نخواهد بود. بنابراین چون در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴)، y دارای توان زوج یا نسبت مثلثاتی می‌باشد، در نتیجه تابع نیستند. البته لازم به ذکر است که موارد استثنایی وجود دارند که در آنها تذکر بالا معتبر نمی‌باشد. به طور مثال رابطه‌ی $\mathbf{(x-۱)^۲+y^۲=۰}$ یک تابع می‌باشد با آن که توان y زوج است، زیرا فقط به ازای $x=۱$ و $y=۰$ برقرار می‌شود.

مثال۵: کدامیک از روابط زیر تابع نیستند؟

۱) $y=۱+\sqrt{x}$ ۲) $y^۲=x^۲$ ۳) $\sqrt[۳]{y}=۱+x$ ۴) $y=\frac{۱}{x^۲}$

پاسخ: گزینه «۲» در رابطه‌ی $y^۲=x^۲$ به ازای $x=۱$، دو مقدار $y=۱$ و $y=-۱$ به دست می‌آید که نشان می‌دهد این رابطه تابع نیست.

مثال۶: تابع $\mathbf{f=\{(x,y)|y=\frac{x+۴}{x}}$ و $\mathbf{x,y\in\mathbb{N}\}}$ چند عضو دارد؟

۱) ۳   ۲) ۶   ۳) N   ۴) نامحدود

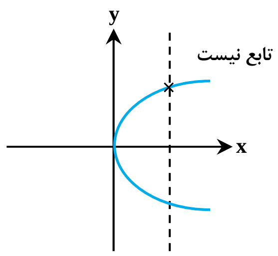
پاسخ: گزینه «۱» تابع f را به صورت مقابل می‌نویسیم.

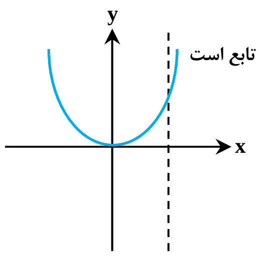
$$f=\{(x,y)\,|\,y=۱+\frac{۴}{x},x,y\in\mathbb{N}\}$$

باید مقادیری از $x\in\mathbb{N}$ انتخاب شوند که حاصل کسر $\frac{۴}{x}$ عددی طبیعی شود، با توجه به این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که فقط به ازای $x=۱,۲,۴$، حاصل تابع عدد طبیعی خواهد بود.

$$\left.\begin{array}{l} x=۱ \Rightarrow y=۱+\frac{۴}{۱}=۵\in\mathbb{N} \\ x=۲ \Rightarrow y=۱+\frac{۴}{۲}=۳\in\mathbb{N} \\ x=۴ \Rightarrow y=۱+\frac{۴}{۴}=۲\in\mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

نکته۱: در بررسی نمودار تابع هرگاه خطی موازی محور y ها رسم شود، نباید منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند، در غیر این صورت تابع نمی‌باشد.





محاسبه دامنه توابع

دامنه تابع: اگر رابطه f تابع باشد، به مختص‌های اول آن (اعضای مجموعه A) دامنه f می‌گویند و آن را معمولاً با نماد D_f نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر به مجموعه xهایی که برای آنها y وجود داشته باشد، دامنه تابع گوییم.

۱ـ توابع کثیرالجمله یا خطی: دامنه این‌گونه توابع اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است.

به عنوان مثال دامنه‌ی تابع $f(x)=۲x^۳+۴x^۲-۶x+۱$ برابر $\mathbb{R}$ یعنی $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد.

۲ـ توابع کسری $\mathbf{(y=\frac{f(x)}{g(x)})}$: دامنه این‌گونه توابع به شرط آنکه دامنه صورت کسر اعداد حقیقی باشد، اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به جز مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کنند، می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$D_y=\mathbb{R}-\{x\,|\,g(x)=۰\}$$

مثال ۷: دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{۳x}{x^۲-۵x+۶}$ را به دست آورید؟

پاسخ: باید مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم و ریشه‌های آن را به دست آوریم:

$$x^۲-۵x+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲,۳\}$$

تذکر ۲: به نقاطی که مخرج را صفر می‌کند، نقاط انفصال تابع نیز گفته می‌شود.

۳ـ توابع رادیکالی: در اینگونه توابع اگر فرجه رادیکال زوج باشد، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد و اگر فرجه رادیکال فرد باشد دامنه تابع، همان دامنه عبارت زیر رادیکال خواهد بود.

مثال ۸: دامنه تابع $z=\sqrt{\dfrac{x^۲}{\sqrt{x-۱}}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰ \text{ و } ۱\}$ ۳) $x>۱$ ۴) $x<۱$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه همواره $x^۲\geq ۰$ می‌باشد، لذا فقط کافی است $x-۱>۰$ و یا $x>۱$ باشد.

مثال ۹: دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+۱}}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $-۱\leq x\leq ۰$ ۲) $-۱<x\leq ۰$ ۳) $x\leq -۱$ یا $x\geq ۰$ ۴) $x<-۱$ یا $x\geq ۰$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی داریم:

$$\frac{x}{x+۱}\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x		-۱		۰	
x	$-$		$-$	۰	$+$
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{x}{x+۱}$	$+$	تعریف نشده	$-$	۰	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت در جاهایی که عبارت زیر رادیکال مثبت است، تابع تعریف شده است. توجه داشته باشید که بـه ازای $x=-۱$ مخـرج کسـر صفر می‌شود و کسر تعریف نشده است. $D_f=(-\infty,-۱)\cup[۰,+\infty)$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند هرگاه دو شرط زیر را داشته باشند:

۱) دامنه‌ی دو تابع برابر باشد، $D_f=D_g$، **۲)** به ازای هر x مشترک از دامنه‌ی دو تابع مقدار دو تابع با هم برابر باشد.

مثال ۱۰: **توابع $f(x)=x+۳$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ با هم مساوی نیستند. زیرا دامنه f(x) برابر $\mathbb{R}$ ولی دامنه g(x) برابر $\mathbb{R}-\{۳\}$ می‌باشد.**

مثال ۱۱: **دو تابع حقیقی $f(x)=\dfrac{x^۴-۱}{x^۲+۱}$ و $g(x)=x^۲-۱$ با هم برابرند، زیرا دامنه هر دو تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد و به ازای هر x دلخواه از دامنه‌ی تابع مقدار دو تابع نیز با هم برابر می‌باشد.**

مثال ۱۲: **دو تابع f و g، با کدام ضابطه‌ها با یکدیگر برابرند؟** (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) $f(x)=۱$ و $g(x)=\dfrac{x}{x}$ ۲) $f(x)=x$ و $g(x)=(\sqrt{x})^۲$

۳) $f(x)=\log x^۲$ و $g(x)=۲\log x$ ۴) $f(x)=x^۲$ و $g(x)=(\dfrac{x+|x|}{۲})^۲+(\dfrac{x-|x|}{۲})^۲$

پاسخ: گزینه «۴» در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» دامنه‌ی تابع‌های f و g با هم برابر نیست.

در گزینه «۱» دامنه تابع f، برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g، برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ می‌باشد.

در گزینه «۲» دامنه تابع f، برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g، برابر $[۰,+\infty)$ است.

در گزینه «۳» دامنه تابع f، $\mathbb{R}-\{۰\}$ و دامنه تابع g، برابر $(۰,+\infty)$ است.

اعمال جبری روی توابع

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ,\ D_{f-g}=D_f\cap D_g$

۳) $(fg)(x)=f(x)g(x)\ ,\ D_{fg}=D_f\cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}$

مثال ۱۳: توابع $f=\{(۲,۲)\,,(۳,۴)\,,(۴,۵)\}$ و $g=\{(۳,۴)\,,(۵,۶)\,,(۲,۳)\}$ مفروض‌اند، $f+g$ کدام است؟

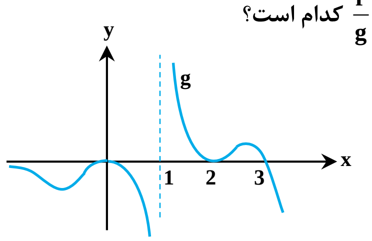
۱) $\{(۲,۳)\,,(۴,۶)\}$
۲) $\{(۲,۵)\,,(۳,۸)\}$
۳) $\{(۳,۵)\,,(۲,۴)\}$
۴) $\{(۵,۶)\,,(۸,۱۰)\,,(۶,۸)\}$

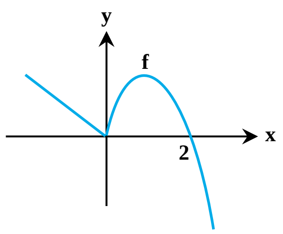
پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم دامنه‌ی تابع $f+g$، از اشتراک دامنه‌های f و g حاصل می‌گردد. پس داریم:

$$\begin{cases}D_f=\{۲,۳,۴\}\\ D_g=\{۳,۵,۲\}\end{cases}\Rightarrow D_{f+g}=\{۲,۳\}$$

$$\begin{cases}f(۲)+g(۲)=۲+۳=۵\ \Rightarrow (۲,۵)\in f+g\\ f(۳)+g(۳)=۴+۴=۸\ \Rightarrow (۳,۸)\in f+g\end{cases}\Rightarrow f+g=\{(۲,۵)\,,(۳,۸)\}$$

مثال ۱۴: نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت زیر است، دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟



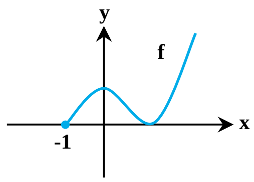


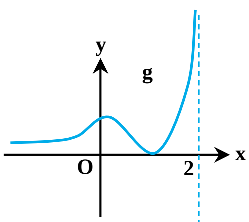
۱) $\mathbb{R}-\{۱\}$
۲) $\mathbb{R}-\{۰,۱,۲,۳\}$
۳) $\mathbb{R}-\{۱,۳\}$
۴) $\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید دامنه‌ی دو تابع را با توجه به نمودارهای داده شده به دست آوریم، با توجه به این که دامنه تابع همان مقادیر x می‌باشد، داریم:

$$\left.\begin{matrix}D_f:\mathbb{R}\\ D_g:\mathbb{R}-\{۱\}\\ g(x)=۰\ \Rightarrow\ x=۰,۱,۲,۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲,۳\}$$

مثال ۱۵: نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است. دامنه‌ی $f-g$ کدام است؟





۱) $[۱,+\infty)$
۲) $[۲,+\infty)$
۳) $[-۱,۲)$
۴) $[-۱,۲]$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نمودارها $D_g=(-\infty,۲)$ و $D_f=[-۱,+\infty)$. لذا داریم:

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=(-\infty,۲)\cap[-۱,+\infty)=[-۱,۲)$$

انواع تابع

۱ــ تابع چندضابطه‌ای: گاهی مقدار یک تابع در دامنه‌اش با بیش از یک ضابطه بیان می‌شود. مثال:

$$f(x)=\begin{cases}x & ;\ x\ge ۰\\ -x & ;\ x<۰\end{cases}$$

مثال ۱۶: اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & ;\ x\le ۱\\ ax+b & ;\ ۱\le x\le ۲\\ x^۳ & ;\ x\ge ۲\end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -۶۴
۲) -۴۸
۳) ۶۴
۴) ۴۸

پاسخ: گزینه «۱» برای تابع بودن لازم است ضابطه‌های تابع در $x=۱$ و $x=۲$ با هم برابر باشند. یعنی داریم:

$$\begin{cases}a+b=۰\\ ۲a+b=۸\end{cases}\Rightarrow a=۸,b=-۸\ \Rightarrow ab=-۶۴$$

مثال ۱۷: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-2 & ; x>0\\ x^2+1 & ; x\le 0\end{cases}$، در این صورت $f(f(-x^2))$ کدام است؟

۱) -4 ۲) x^2+1 ۳) -2 ۴) x^4+1

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که $-x^2$ یک مقدار منفی می‌باشد، (یعنی به ازای هر مقدار دلخواه x مقدار آن منفی می‌شود) پس باید آن را در ضابطه‌ی پایین قرار دهیم:

$$f(f(-x^2))=f((-x^2)^2+1)=f(x^4+1)=-2$$

مثال ۱۸: تابع $f(x)=\begin{cases}2x^3-1 & ; x\le 2\\ \dfrac{1}{x-2} & ; 2<x\le 3\\ 2x-5 & ; x>3\end{cases}$ مفروض است، مقدار $f(\sqrt{8})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۳) $4\sqrt{2}-5$ ۴) $3\sqrt{2}-1$

پاسخ: گزینه «۱» عدد $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳ می‌باشد؛ لذا باید از ضابطه دوم تابع مقدار $f(\sqrt{8})$ را محاسبه کنیم:

$$f(\sqrt{8})=\frac{1}{\sqrt{8}-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}-2}\times\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+2}=\frac{2\sqrt{2}+2}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

تذکر ۳: روابط چندضابطه‌ای در شرایطی می‌توانند تابع باشند، که اولاً تک تک ضابطه‌ها در دامنه تعریفشان تابع باشند، ثانیاً دامنه آنها نقطه مشترکی نداشته باشد و اگر دامنه ضابطه‌ها دارای ناحیه (یا نقطه)مشترک با یکدیگر بود به ازای xهای مشترک، yهای برابرحاصل شود.

برای مثال ضابطه $f(x)=\begin{cases}x-1 & ; x\ge 1\\ x^2-1 & ; x\le 1\end{cases}$ تابع می‌باشد.

۲ـ تابع ثابت: تابعی است که به ازای هر x متعلق به دامنه، تنها یک y ثابت مشخص شود. $f(x)=c$

بعنوان مثالی برای تابع ثابت می‌توان تابع مقابل را بیان نمود: $f(x)=\sqrt{x-|x|}\xrightarrow{x\in D_f}f(x)=0$

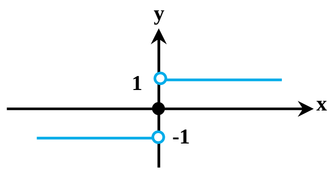
۳ـ تابع همانی: تابعی است که هر عضو دامنه را به خود آن عضو از دامنه نسبت دهد $(f(x)=x)$ این تابع را با $I(x)$ نمایش می‌دهیم. نمودار تابع همانی همان نیمساز ربع اول و سوم می‌باشد.

تذکر ۴: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر می‌باشد.

۴ـ تابع علامت: این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

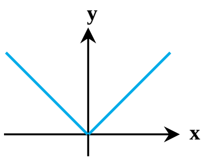
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & ; x>0\\ 0 & ; x=0\\ -1 & ; x<0\end{cases}$$

و



۵ـ تابع قدرمطلق: این تابع به صورت مقابل تعریف می‌شود: $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x & ; x\ge 0\\ -x & ; x<0\end{cases}$

به عبارت دیگر اگر عبارت داخل قدرمطلق مثبت بود، قدر مطلق را برمی‌داریم و اگر عبارت داخل قدرمطلق منفی بود، آن عبارت را در یک علامت منفی ضرب و سپس علامت قدرمطلق را برمی‌داریم، نمودار تابع $y=|x|$ به صورت مقابل می‌باشد:



خواص قدرمطلق

۱) $|x|\ge 0$

۲) $|-x|=|x|$

۳) $|x|=a\xrightarrow{a>0}x=\pm a$

۴) $x^2\le a^2\Rightarrow|x|\le a\xrightarrow{a>0}-a\le x\le a$

۵) $|x|\ge a\xrightarrow{a>0}x\ge a$ یا $x\le -a$

۶) $|x\,.\,y|=|x|\,.\,|y|$

۷) $\sqrt[2n]{x^{2n}}=|x|$

۸) $|x|-|y|\le|x\pm y|\le|x|+|y|$ (نامساوی مثلثی)

۹) $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$

۱۰) $-|x|\le x\le|x|$

مثال ۱۹: مجموعه جواب نامعادله $|2x-x|<10$ کدام است؟

۱) $x<9$ ۲) $-9<x<9$ ۳) $1<x<9$ ۴) $-1<x<9$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از خواص قدرمطلق داریم:
$$|2x-8|<10 \Rightarrow -10<2x-8<10 \Rightarrow -2<2x<18 \Rightarrow -1<x<9$$

مثال ۲۰: مجموعه جواب نامعادله $2x+|x-1|<8$ کدام است؟

۱) $x<3$ ۲) $3<x<7$ ۳) $x<1$ ۴) $1<x<3$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به وجود قدرمطلق باید نامعادله را در دو حالت زیر حل کنیم:
$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow 2x+x-1<8 \Rightarrow 3x<9 \Rightarrow x<3 \Rightarrow 1\le x<3 & (1)\\ 2)\ x-1<0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow 2x+1-x<8 \Rightarrow x<7 \Rightarrow x<1 & (2)\end{array}\right\} \xrightarrow{(2),(1)} x<3$$

مثال ۲۱: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2x+1}{|x|-1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

پاسخ: گزینه «۴» مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و داریم:
$$|x|-1=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \text{دامنه}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

مثال ۲۲: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{|x|-x^2}$ کدام فاصله است؟

۱) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $[-1,1]$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: باید زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و داریم:
$$|x|-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le |x| \Rightarrow -1\le x\le 1$$

روش دوم (عددگذاری): عدد ۱ در دامنه تابع صدق می‌کند، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح نیستند. از طرفی عدد ۲ در دامنه صدق نمی‌کند، بنابراین گزینه (۱) نیز صحیح نمی‌باشد. پس تنها گزینه (۴) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

مثال ۲۳: حاصل عبارت $A=(\frac{x-|x|}{2})^2+(\frac{x+|x|}{2})^2$ کدام است؟

۱) $2x^2$ ۲) $4x^2$ ۳) x^2 ۴) $x|x|$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول:
$$A=\frac{x^2+|x|^2-2x|x|}{4}+\frac{x^2+|x|^2+2x|x|}{4} \xrightarrow{x^2=|x|^2} A=\frac{x^2+x^2-2x|x|+x^2+x^2+2x|x|}{4}=\frac{4x^2}{4}=x^2$$

روش دوم: برای ساده شدن محاسبه عبارت فرض می‌کنیم $x=-1$، در این صورت داریم:
$$(\frac{x-|x|}{2})^2+(\frac{x+|x|}{2})^2=(\frac{-1-|-1|}{2})^2+(\frac{-1+|-1|}{2})^2=+1$$

تنها گزینه (۳) به ازای $x=-1$ برابر $+1$ می‌شود.

مثال ۲۴: مجموعه جواب معادله‌ی $|3x^2+2x|=x|3x+2|$ کدام است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $\{-\frac{2}{3}\}\cup[0,+\infty)$ ۴) $[2,5]$

پاسخ: گزینه «۳» در قدرمطلق سمت چپ ابتدا از x فاکتور می‌گیریم و داریم:
$$|x(3x+2)|=x|3x+2| \Rightarrow |x|=x$$

تساوی فوق به ازای $0\le x<\infty$ برقرار می‌شود و واضح است که $x=\frac{-2}{3}$ نیز جواب معادله است. چرا که در معادله داده شده صدق می‌کند.

مثال ۲۵: کدامیک از نامساوی‌های زیر برقرار است؟

۱) $||x|-|y||\ge|x-y|$ ۲) $|x|+|y|\le|x-y|$ ۳) $-x\le|x|\le x$ ۴) $|x|-|y|\le|x-y|$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به خواص قدرمطلق گزینه (۴) صحیح است.

تابع جزء صحیح (براکت)

هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت مجموع یک عدد صحیح (n) و یک عدد حقیقی نامنفی $(۰\le p<۱)$ نمایش داد، جزء صحیح x را به فرم $\lfloor x\rfloor$ نمایش می‌دهیم:
$\forall x\in\mathbb{R}\,,\exists n\in\mathbb{Z}\,,x=n+p\,,۰\le p<۱$

برای مثال جزء صحیح $x=۳/۷$ برابر ۳ می‌باشد چون $۳/۷=۳+۰/۷$ و جزء صحیح $x=-۱/۶$ برابر ۲- می‌باشد. (چون $-۱/۶=-۲+۰/۴$)

توجه: در سؤالات کنکور تابع جزء صحیح را به صورت [ ] یعنی به صورت کروشه نشان می‌دهند. ما در این کتاب به دلیل اشتباه نشدن با نماد کروشه آن را به صورت ⌊ ⌋ نشان می‌دهیم.

خواص تابع جزء صحیح

۱) $\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+۱$
۲) $x-۱<\lfloor x\rfloor\le x$
۳) $۰\le p=x-\lfloor x\rfloor<۱$
۴) $\lfloor x-\lfloor x\rfloor\rfloor=۰$
۵) $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n\,,(n\in\mathbb{Z})$
۶) $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}۰, x\in\mathbb{Z}\\-۱, x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$
۷) $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$ یا $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+۱$
۸) $\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor=۲\lfloor x\rfloor$

مثال ۲۶: مقدار $\lfloor ۲\sqrt{۲}-\pi\rfloor$ کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۲　　۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $-۱<۲\sqrt{۲}-\pi<۰$ پس $\lfloor ۲\sqrt{۲}-\pi\rfloor=-۱$ می‌باشد.

مثال ۲۷: اگر $f(x)=\dfrac{\lfloor ۲x-۱\rfloor+۲}{\lfloor ۵-۴x\rfloor-۴}$ باشد، $f\left(\dfrac{۱}{۳}\right)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱-　　۳) $\dfrac{۱}{۲}$　　۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فقط کافی است به جای x مقدار $\dfrac{۱}{۳}$ را قرار دهیم.

$$f(\frac{۱}{۳})=\frac{\left\lfloor \frac{۲}{۳}-۱\right\rfloor+۲}{\left\lfloor ۵-\frac{۴}{۳}\right\rfloor-۴}=\frac{\left\lfloor \frac{-۱}{۳}\right\rfloor+۲}{\left\lfloor \frac{۱۱}{۳}\right\rfloor-۴}=\frac{-۱+۲}{۳-۴}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

مثال ۲۸: اگر $f(x)=\dfrac{۱}{۲}x-\lfloor x\rfloor$ باشد، مقدار $f(f(۷))$ کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$　　۲) $-\dfrac{۱}{۴}$　　۳) $\dfrac{۱}{۴}$　　۴) $\dfrac{۹}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا $f(۷)$ را با جایگذاری ۷ به جای x در ضابطه‌ی $f(x)$ حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x-\lfloor x\rfloor\Rightarrow f(۷)=\frac{۱}{۲}\times ۷-\lfloor ۷\rfloor=\frac{۷}{۲}-۷=-\frac{۷}{۲}=-۳/۵$$

اما برای محاسبه‌ی $f(f(۷))$ باید در ضابطه‌ی $f(x)$ به جای تمام x، عدد $-\frac{۷}{۲}=۳/۵$ را قرار دهیم، حواستان باشد؛ جزء صحیح $-۳/۵$ برابر با -۴ است.

$$f(f(۷))=\frac{۱}{۲}(-۳/۵)-\lfloor -۳/۵\rfloor=\frac{۱}{۲}(-\frac{۷}{۲})-(-۴)=-\frac{۷}{۴}+۴=\frac{۹}{۴}$$

مثال ۲۹: در تابع $y=۳۰۰\left\lfloor\dfrac{x}{۲۰}\right\rfloor+۲۰(x+۲۰\left\lfloor\dfrac{-x}{۲۰}\right\rfloor)$ مقدار y به ازای $x=۷۰$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۸۰۰　　۲) ۹۰۰　　۳) ۱۱۰۰　　۴) ۷۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا x را جایگزین می‌کنیم و داریم:

$$x=۷۰\Rightarrow y=۳۰۰\left\lfloor\frac{۷۰}{۲۰}\right\rfloor+۲۰(۷۰+۲۰\left\lfloor-\frac{۷۰}{۲۰}\right\rfloor)\Rightarrow y=۳۰۰\lfloor ۳/۵\rfloor+۲۰(۷۰+۲۰\lfloor -۳/۵\rfloor)y$$

چون $۳/۵=۳+۰/۵$ و $-۳/۵=-۴+۰/۵$ یعنی $\lfloor ۳/۵\rfloor=۳$ و $\lfloor -۳/۵\rfloor=-۴$ می‌باشد و داریم:

$$y=۳۰۰\times(۳)+۲۰(۷۰+۲۰(-۴))\Rightarrow y=۹۰۰+۲۰(-۱۰)=۹۰۰-۲۰۰=۷۰۰$$

مثال۳۰: اگر $f(x)=\lfloor x+2\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ و $x\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم ۲ عددی صحیح است، بنابراین می‌توانیم آن را از جزء صحیح بیرون بیاوریم. با توجه به این که x متعلق به $\mathbb{Z}$ نیست در نتیجه $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=-1$

$$f(x)=\lfloor x+2\rfloor+\lfloor -x\rfloor=(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)+2=-1+2=1$$

مثال۳۱: دامنه تابع $y=\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor}$ عبارتست از:

۱) $\mathbb{R}-[0,1)$ ۲) $\mathbb{R}-(0,1]$ ۳) $\mathbb{R}-(0,1)$ ۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌های مخرج را به دست آوریم. آن‌گاه بازه به دست آمده را باید از مجموعه اعداد حقیقی حذف کنیم.

$$\lfloor x\rfloor=0\Rightarrow 0\le x<1\Rightarrow \text{دامنه}=\mathbb{R}-[0,1)$$

مثال۳۲: دامنه تابع $y=\frac{1}{\sqrt{\lfloor x\rfloor-1}}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $R-[-1,+1]$

پاسخ: گزینه «۱» عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج که در مخرج کسر قرار دارد باید بزرگتر از صفر باشد.

$$\lfloor x\rfloor-1>0\Rightarrow\lfloor x\rfloor>1\Rightarrow x\ge 2\Rightarrow \text{دامنه}=[2,+\infty)$$

مثال۳۳: مقدار تابع $f(x)=\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor$ در کدام بازه برابر صفر است؟ (مدیریت و حسابداری ـ سراسری ۹۵)

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-2)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $\mathbb{R}-[-2,2]$

پاسخ: گزینه «۱» باید ببینیم به ازای کدام مقادیر از بین گزینه‌های داده شده، حاصل عبارت برابر صفر می‌شود، پس ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم. و با توجه به این که از $\lfloor u\rfloor=0$ نتیجه می‌شود که $0\le u<1$ داریم.

$$\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor=0\Rightarrow 0\le\frac{2}{x}<1$$

بنابراین x مثبت است. با وارونه کردن طرفین داریم:

$$\infty>\frac{x}{2}>1\Rightarrow\infty>x>2$$

مثال۳۴: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\lfloor x\rfloor-1}$ باشد، D_f (دامنه f) چیست؟

۱) $\mathbb{R}^+-\{2\}$ ۲) $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ ۳) $(2,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}^+-[1,2)$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد و ریشه‌های مخرج کسر جزء دامنه تابع نیستند.

$$x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow x\ge 1 \text{ یا } x\le -1$$

$$\lfloor x\rfloor-1=0\Rightarrow\lfloor x\rfloor=1\Rightarrow 1\le x<2 \quad (\text{ریشه‌های مخرج کسر})$$

بنابراین دامنه تابع $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ خواهد بود.

روش دوم: مقدارگذاری: به ازای $x=1$ مخرج کسر صفر می‌شود، بنابراین $x=1$ جزو دامنه تابع f نمی‌باشد پس گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند به ازای $x=2$ زیر رادیکال ۳ می‌شود و مخرج کسر هم مخالف صفر می‌باشد در نتیجه $x=2$ جزو دامنه تابع f می‌باشد، پس گزینه ۳ هم غلط است.

لگاریتم

فرض کنید N و a دو عدد حقیقی مثبت و $a\ne 1$ باشد، عدد حقیقی x را که در معادله‌ی $a^x=N$ صدق می‌کند، لگاریتم عدد N در مبنای a می‌گوییم و با نماد $\mathrm{Log}_a N=x$ نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\mathrm{Log}_a N=x\Rightarrow N=a^x$$

به طور مثال $\mathrm{Log}_2 8=3$، زیرا $8=2^3$ و یا $\mathrm{Log}_a\sqrt{a}=\frac{1}{2}$، زیرا $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$.

تذکر۵: اگر مبنا در لگاریتم ۱۰ باشد، آن را لگاریتم اعشاری می‌نامیم و معمولاً مبنا را نمی‌نویسیم.

خواص لگاریتم:

۱) $\log_a a = ۱ \qquad a > ۰ \quad , \quad a \neq ۱$

۲) $\text{Log}_a ۱ = ۰$

۳) $\log_a MN = \text{Log}_a |M| + \text{Log}_a |N|$

۴) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|$

۵) $\log_{a^m} N^n = \frac{n}{m} \text{Log}_a N$

۶) $\log_a N = \frac{۱}{\log_N a}$

۷) $a^{\log_b N} = N^{\log_b a}$

۸) $a^{\log_a N} = N$

۹) $\log_a N = \frac{\text{Log}_b N}{\text{Log}_b a}$

۱۰) $\log_a N . \log_b a = \log_b N$

مثال ۳۵: اگر $\log ۲ = a$، آنگاه $\log ۰/۲۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ‏ ۲) $\frac{۱}{a^۲}$ ‏ ۳) $-۲a$ ‏ ۴) $\sqrt[۴]{a}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از خواص لگاریتم داریم:

$$\log ۰/۲۵ = \log \frac{۱}{۴} = \log ۲^{-۲} = -۲ \log ۲ = -۲a$$

مثال ۳۶: اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x^۳ + ۱ \ ; \ x \leq ۲ \\ \frac{۱}{x-۲} \ ; \ ۲ < x < ۳ \\ ۲x - ۵ \ ; \ x \geq ۳ \end{cases}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{\log_۲ ۲۵۶})$ کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ‏ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}+۱}{۲}$ ‏ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ‏ ۴) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که تابع f چندضابطه‌ای می‌باشد، ابتدا لازم است مقدار $\sqrt{\log_۲ ۲۵۶}$ را به دست آوریم تا مشخص شود از کدام ضابطه‌ی تابع باید استفاده کنیم. می‌دانیم $۲۵۶ = ۲^۸$، بنابراین داریم:

$$\log_۲ ۲۵۶ = \log_۲ ۲^۸ = ۸ \log_۲ ۲ = ۸ \times ۱ = ۸$$

دقت کنید از رابطه $\log_b a^n = n \log_b n$ در محاسبه فوق استفاده کردیم، حالا مقدار خواسته شده را حساب می‌کنیم چون عبارت رادیکال دارد، داریم:

$$\sqrt{\log_۲ ۲۵۶} = \sqrt{۸} = \sqrt{۲^۳} = ۲\sqrt{۲}$$

مقدار $۲\sqrt{۲}$ حدوداً برابر $۲ \times ۱/۴۱ = ۲/۸۲$ می‌باشد (یعنی مقداری بزرگ‌تر از ۲ و کوچک‌تر از ۳) بنابراین باید از ضابطه‌ی دوم تابع استفاده کنیم:

$$f(\sqrt{\log_۲ ۲۵۶}) = f(۲\sqrt{۲}) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}-۲}$$

با توجه به گزینه‌ها لازم است عبارت گویا شود:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲}-۲} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}-۲} \times \frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۲\sqrt{۲}+۲} = \frac{۲\sqrt{۲}+۲}{(۲\sqrt{۲})^۲ - ۲^۲} = \frac{۲(\sqrt{۲}+۱)}{۴ \times ۲ - ۴} = \frac{۲(\sqrt{۲}+۱)}{۴} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$$

مثال ۳۷: اگر $\log_۲ ۳ = k$، آنگاه $\log_۳ ۲۴$ کدام است؟

۱) $\frac{k}{k+۳}$ ‏ ۲) $\frac{k+۳}{k}$ ‏ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}$ ‏ ۴) $\frac{۳}{k+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از قوانین لگاریتم داریم:

$$\log_۳ ۲۴ = \log_۳ ۳ \times ۸ = \log_۳ ۳ + \log_۳ ۸ = ۱ + \log_۳ ۲^۳ = ۱ + ۳ \log_۳ ۲$$

از طرفی از رابطه $\log_۲ ۳ = k$، نتیجه می‌شود $\log_۳ ۲ = \frac{۱}{k}$، بنابراین داریم:

$$\log_۳ ۲۴ = ۱ + ۳(\frac{۱}{k}) = ۱ + \frac{۳}{k} = \frac{k+۳}{k}$$

مثال ۳۸: اگر $f(x) = (\log_{۱۰} x)^{-۱}$ باشد، نمودار تابع $y = x^{f(x)}$ با منحنی $y = -x^۲ + ۲x$، کدام وضعیت را دارد؟ (مدیریت و حسابداری ـ سراسری ۹۳)

۱) غیرمتقاطع ‏ ۲) دو نقطه تلاقی ‏ ۳) یک نقطه تلاقی ‏ ۴) مماس

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا ضابطه‌ی $y = x^{f(x)}$ را ساده می‌کنیم، برای این منظور از دو رابطه‌ی $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$ و $x^{\log_x a} = a$ استفاده می‌کنیم.

$$y = x^{(\log_{۱۰} x)^{-۱}} = x^{\frac{۱}{\log_{۱۰} x}} = x^{\log_x ۱۰} = ۱۰$$

حالا منحنی $y = ۱۰$ و $y = -x^۲ + ۲x$ را با هم تلاقی می‌دهیم:

$$-x^۲ + ۲x = ۱۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱۰ = ۰$$

چون دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق کوچکتر از صفر است، پس این معادله ریشه ندارد و بنابراین دو منحنی با هم تلاقی ندارند.

تعریف کلگاریتم: کلگاریتم عدد مثبت x را با نماد $\text{co}\log x$ نشان می‌دهیم و برابر منفی لگاریتم x است.

$$\text{co}\log_a x = -\log_a x$$

به طور مثال $\text{co}\log_۶ ۳۶ = -\log_۶ ۳۶ = -۲$.

لگاریتم طبیعی یا نپرین

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر $(e \approx ۲/۷)$ باشد، آنرا با نماد Ln نشان می‌دهیم: $\log_e x = \mathrm{Ln}x$

با توجه به اهمیت بسیار زیاد Ln، خواص مهم Log را در مورد Ln دوباره بیان می‌کنیم.

۱) $\mathrm{Ln}x = A \Rightarrow x = e^A$ ۲) $\mathrm{Ln}e = ۱$ ۳) $\mathrm{Ln}۱ = ۰$ ۴) $\mathrm{Ln}e^A = A$

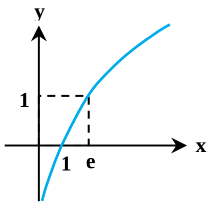
۵) $e^{\mathrm{Ln}A} = A$ ۶) $\mathrm{Ln}AB = \mathrm{Ln}|A| + \mathrm{Ln}|B|$ ۷) $\mathrm{Ln}\frac{A}{B} = \mathrm{Ln}|A| - \mathrm{Ln}|B|$ ۸) $\mathrm{Ln}A = \frac{۱}{\mathrm{Log}_A e}$

نمودار تابع $y = \mathrm{Ln}x$ به شکل زیر است:

از شکل روبرو نتایج زیر در مورد تابع Ln به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \mathrm{Ln}A < ۰ & A < ۱ \\ \mathrm{Ln}A = ۰ & A = ۱ \\ \mathrm{Ln}A > ۰ & A > ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ln}(+\infty) = +\infty \\ \mathrm{Ln}(۰^+) = -\infty \end{cases}$$



مثال ۳۹: جواب معادله‌ی $\mathrm{Ln}(۲ + \mathrm{Ln}x) = ۱$ کدام است؟

۱) $e^۲ - e$ ۲) $e^{۲-e}$ ۳) $e^{e^۲}$ ۴) $e^{e-۲}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به خاصیت (۱) چون پایه Ln برابر e می‌باشد، داریم:

$$۲ + \mathrm{Ln}x = e \Rightarrow \mathrm{Ln}x = e - ۲ \Rightarrow x = e^{e-۲}$$

مثال ۴۰: اگر $\mathrm{Ln}\frac{a+b}{۳} = \frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}a + \mathrm{Ln}b)$. آنگاه حاصل $a^۲ + b^۲$ کدام است؟

۱) $۵ab$ ۲) $۶ab$ ۳) $۷ab$ ۴) $۸ab$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از خواص لگاریتم داریم:

$$\mathrm{Ln}\frac{a+b}{۳} = \frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}ab \Rightarrow \mathrm{Ln}\frac{a+b}{۳} = \mathrm{Ln}\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{۳} = \sqrt{ab} \Rightarrow (\frac{a+b}{۳})^۲ = ab \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab = ۹ab \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۷ab$$

تذکر ۶: وقتی در حل مسائل ریاضی طرفین یک رابطه را به توان ۲ (زوج) می‌رسانیم، ممکن است در بین جواب‌های به دست آمده بعضی جواب‌ها قابل قبول نباشند.

مثال ۴۱: معادله‌ی $\mathrm{Ln}\sqrt{x} = \sqrt{\mathrm{Ln}x}$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا x جلوی Ln را از رادیکال خارج می‌کنیم و سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}x = \sqrt{\mathrm{Ln}x} \Rightarrow \frac{۱}{۴}(\mathrm{Ln}x)^۲ = \mathrm{Ln}x \Rightarrow (\mathrm{Ln}x)^۲ - ۴\mathrm{Ln}x = ۰$$

$$\mathrm{Ln}x(\mathrm{Ln}x - ۴) = ۰ \Rightarrow \mathrm{Ln}x = ۰ \,,\, \mathrm{Ln}x = ۴ \Rightarrow x = ۱ \,,\, x = e^۴$$

دامنه توابع لگاریتمی $y = \log_{k(x)}^{g(x)}$

در این‌گونه توابع عبارتی که از آن لگاریتم گرفته می‌شود، باید بزرگتر از صفر باشد، ضمناً شرایط مبنای لگاریتم نیز باید مشخص باشد.

$$D_f = \{x \mid g(x) > ۰ \,,\, k(x) > ۰ \,,\, k(x) \neq ۱\}$$

مثال ۴۲: دامنه (Domain) تابع $y = \frac{x}{\mathrm{Ln}x - ۱}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\mathbb{R}^+ - \{۱\}$ ۴) $\mathbb{R}^+ - \{e\}$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر باشد، یعنی $x > ۰$. از طرفی ریشه مخرج نیز جزء دامنه تابع نمی‌باشد.

$$\mathrm{Ln}x - ۱ = ۰ \Rightarrow \mathrm{Ln}x = ۱ \Rightarrow x = e \Rightarrow \text{دامنه} = \mathbb{R}^+ - \{e\}$$

مثال ۴۳: دامنه تابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $y = \frac{\mathrm{Ln}(x+۱)}{\sin x}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۹۰)

۱) $D_f = \mathbb{R} - \{x = ۲k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

۲) $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x > -۱, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$

۳) $D_f = \mathbb{R} - \{x < -۱, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

۴) $D_f = \{x \mid x > -۱, x \neq ۲k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$

پاسخ: گزینه «۳» باید جلوی Ln بزرگ‌تر از صفر باشد و همچنین مخرج کسر هم مخالف صفر شود.

$$x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱$$

$$\sin x \neq ۰ \Rightarrow x \neq k\pi$$

$$y \text{ دامنه‌ی} = (\text{دامنه صورت}) \cap (\text{دامنه مخرج}) \Rightarrow D_f = \{x \mid x > -۱, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$$

مدرسان شریف

فصل چهارم

« حد و پیوستگی »

درسنامه (۱): تعاریف حد، محاسبه‌ی مستقیم حد، حدود چپ و راست

وقتی x به سمت a میل می‌کند، حد تابع $f(x)$ برابر با L می‌شود و نمادگذاری زیر را داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

دقت کنید، در پیدا کردن حد $f(x)$ وقتی که x به سمت a میل می‌کند، هرگز حالتی را که $x=a$ است، در نظر نمی‌گیریم. در حقیقت حتی لازم نیست $f(x)$ در $x=a$ تعریف شده باشد، فقط مهم این است که در همسایگی محذوف a (یعنی در همسایگی و بسیار نزدیک a به جز خود a) تعریف شده باشد.

تعریف حدود چپ و راست

همان‌طور که در مفهوم حد گفتیم، در محاسبه‌ی حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a، متغیر x می‌تواند از سمت چپ و یا از سمت راست به a نزدیک شود. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ ، منظورمان آن است که حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به a میل می‌کند، برابر با L است و وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ یعنی حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می‌کند، برابر با L است. نمادگذاری $x\to a^-$ یعنی فقط x هایی را در نظر می‌گیریم که از a کوچکترند و نمادگذاری $x\to a^+$ یعنی فقط x هایی را در نظر می‌گیریم که از a بزرگترند. با توجه به توضیحات گفته شده می‌توان نتیجه زیر را گرفت:

شرط لازم و کافی برای آن‌که $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن است که $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ (یعنی شرط لازم و کافی برای وجود حد این است که حد چپ و حد راست، هر دو وجود داشته و با هم برابر باشند). گاهی اوقات حد راست و حد چپ را به‌صورت $f(a^+)$ و $f(a^-)$ می‌نویسیم.

ویژگی جایگذاری مستقیم در ضابطه‌ی تابع

اگر تابع $f(x)$ از نوع چندجمله‌ای، کسر گویا، مثلثاتی، هیپربولیک، رادیکالی، لگاریتمی و نظایر این‌ها باشد و $f(a)$ تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

یعنی برای پیدا کردن حد تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ **از دامنه‌ی f**، می‌توانیم در ضابطه‌ی f به جای x، **مقدار a را قرار دهیم**. به دو موضوع دقت کنید که اولاً a در دامنه $f(x)$ باشد و ثانیاً در همه توابع نمی‌توان مقدار تابع را با حد آن یکسان دانست؛ مثلاً توابعی مانند **جزء صحیح، قدر مطلق یا توابع چندضابطه‌ای** از جمله توابعی هستند که لزوماً مقدار تابع با حد تابع در یک نقطه‌ی مشخص، یکسان نیست. در توابع **رادیکالی و لگاریتمی** نیز با توجه به دامنه‌ی تابع ممکن است مقدار حد فقط از **یک طرف** موجود باشد.

قواعد و قضایای حد

در این قسمت، ابتدا به تعدادی از قواعد و اعمال جبری بر روی حدود اشاره می‌کنیم و سپس به یکی از قضایای مهم حد می‌پردازیم. دقت کنید که همه‌ی این قضایا به شرطی برقرار هستند که $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ هر دو موجود باشند:

۱ـ حد مجموع (تفاضل)، برابر با مجموع (تفاضل) حدهاست:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=L_1\pm L_2$$

۲ـ ضریب ثابت C می‌تواند از حد خارج شود:

$$\lim_{x\to a}(Cf(x))=C\lim_{x\to a} f(x)=CL_1$$

۳ــ حد حاصل‌ضرب، برابر با حاصل‌ضرب حدهاست:
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x)=L_1L_2$$

۴ــ حد نسبت، برابر با نسبتِ حدهاست (به شرطی که حد مخرج صفر نباشد):
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\quad,\quad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0 \text{ باشرط})$$

۵ــ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ که n یک عددی طبیعی است.

۶ــ اگر حد $f(x)$ در $x=a$ موجود باشد، حد $|f(x)|$ نیز در این نقطه وجود دارد و خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to a} f(x)|$، اما عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً در تابع علامت $f(x)=\operatorname{sgn} x$ حد $|f(x)|$ در $x=0$ برابر با یک است، اما حد $f(x)$ وجود ندارد.

۷ــ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ که n یک عدد طبیعی است و اگر زوج باشد، باید مقدار $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نامنفی باشد.

۸ــ اگر به ازای هر x نزدیک a، نامساوی $f(x)\le g(x)$ برقرار باشد، آن‌گاه داریم:
$$\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال۱: به ازای کدام مقدار a حد تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1\ ;\ x\ge 2\\ \dfrac{ax+5}{bx-1}\quad ;\ x<2\end{cases}$ **در نقطه $x=2$، برابر ۹ است؟** (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» برای وجود حد باید حد چپ و راست تابع برابر ۹ باشد. دقت کنید $2^+>2$ در نتیجه $f(x)=ax^2+bx-1$ برای محاسبه حد راست مورد استفاده قرار می‌گیرد ولی $2^-<2$ لذا $f(x)=\dfrac{ax+5}{bx-1}$ برای محاسبه‌ی حد چپ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(ax^2+bx-1)=4a+2b-1=9\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{ax+5}{bx-1}=\dfrac{2a+5}{2b-1}=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2b=10\\2a+5=18b-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=5\\a-9b=-7\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $a=2$ و $b=1$ به دست می‌آید.

مثال۲: اگر $a-b=1$ و $b>0$ باشد، حد تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1\ ;\ x\ge 2\\ \dfrac{ax+5}{bx-1}\quad ;\ x<2\end{cases}$ **در نقطه $x=2$ در صورت وجود کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۴» از رابطه‌ی $a=b+1$، ضابطه تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}(b+1)x^2+bx-1\ ;\ x\ge 2\\ \dfrac{(b+1)x+5}{bx-1}\quad ;\ x<2\end{cases}$ در می‌آید. برای داشتن حد در نقطه $x=2$ لازم است حد چپ و راست با هم برابر باشند، بنابراین داریم:

چون $2^+>2$ در نتیجه ضابطه‌ی (۱) را در نظر گرفتیم.

چون $2^-<2$ در نتیجه ضابطه‌ی (۲) را در نظر گرفتیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}((b+1)x^2+bx-1)=(b+1)4+2b-1=6b+3\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(b+1)x+5}{bx-1}=\dfrac{2b+7}{2b-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2b+7}{2b-1}=6b+3\Rightarrow 2b+7=12b^2-3\Rightarrow 12b^2-2b-10=0\Rightarrow 6b^2-b-5=0$$

از حل معادله درجه دوم فوق b برابر $\frac{-5}{6}$ و ۱ به دست می‌آید که با توجه به فرض $b>0$، فقط $b=1$ قابل قبول است. به ازای $b=1$ حد تابع f در $x=2$ برابر است با:
$$\lim_{x\to 2} f(x)=6b+3=9$$

توجه: اگر $b=1$ را در کسر $\dfrac{2b+7}{2b-1}$ قرار دهیم باز هم حد تابع $f(x)$ برابر a می‌شود، بنابراین فرقی نمی‌کند که $b=1$ را در کدامیک از دو عبارت قرار دهیم.

صفر حدی (0^+ و 0^-)، $+\infty$، $-\infty$ و صفر مطلق

علامت 0^+ نشان‌دهنده‌ی نزدیک شدن به صفر از سمت راست آن است. به مفهوم حرکت که در ذات این علامت نهفته است، توجه کنید. اگر بگویید 0^+ همان $0/01$ است ما می‌گوییم نه! زیرا از این مقدار به صفر نزدیک‌تر است. اگر بگویید 0^+ یعنی $0/001$ باز همان جواب قبلی را می‌دهیم. خلاصه آن که 0^+ را نمی‌توان با یک عدد ثابت مقایسه کرد؛ اما در عمل و برای سادگی بیشتر، گاهی اوقات ما 0^+ را یک عدد مثبت بسیار کوچک تصور می‌کنیم. البته این کار را با آگاهی از مفهوم واقعی 0^+ انجام می‌دهیم. به طور مشابه، وقتی از علامت 0^- استفاده می‌کنیم، منظورمان کمیتی است که از سمت چپ صفر در حال نزدیک شدن به آن است. در این مورد هم با وجود آگاهی از این که 0^- یک عدد نیست و کمیتی در حال تغییر است، فقط برای سادگی بیشتر آن را یک عدد منفی نزدیک به صفر مثلاً $-0/010$ تصور می‌کنیم. در مورد $+\infty$ و $-\infty$ می‌توانید این‌طور تصور کنید؛ وقتی یک عدد مثبت بر یک عدد مثبت بسیار کوچک تقسیم می‌شود، واضح است که حاصل کسر بسیار بزرگ (مثبت) می‌شود. مثلاً $\frac{1}{10^{-100000}}$ برابر با 1×10^{100000} می‌شود که یک عدد مثبت بزرگ است.
به همین ترتیب تصور کنید وقتی یک عدد مثبت بر یک عدد منفی، (بسیار نزدیک به صفر) تقسیم می‌شود، واضح است که حاصل کسر یک عدد منفی می‌شود که این حاصل منفی را با $-\infty$ نمایش می‌دهیم. مثلاً $\frac{1}{-10^{-100000}}$ برابر با -1×10^{100000} است که آن را با $-\infty$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که این‌گونه تصور نشود این اعداد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ هستند! چون ما برای درک بهتر، این اعداد را انتخاب کردیم تا کمی ملموس‌تر با این مفاهیم آشنا شوید! وگرنه $+\infty$ یا $-\infty$ اعداد مشخصی نیستند. حالا که با این چهار مفهوم آشنا شدید، به مفهوم «صفر حدی» و «صفر مطلق» می‌پردازیم.
ما در فصل حد بیشتر با **صفر حدی** سروکار داریم. اما گاهی اوقات با سؤالاتی روبه‌رو می‌شویم که در آن‌ها صفر، حدی نیست و **صفر مطلق** (صفر واقعی) است. مثلاً تقسیم یک عدد بر «صفر حدی» برابر با ∞ می‌شود و تقسیم آن عدد بر «صفر مطلق» تعریف نشده است. اما صفر مطلق معمولاً چه زمانی پدید می‌آید؟! به مثال مقابل توجه کنید:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{[x-1]}=\frac{1}{[1^+-1]}=\frac{1}{[\text{عددی بسیار کوچک و البته مثبت}]}=\frac{1}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

در واقع، وقتی در محاسبات نهایی به جزء صحیح عددی کمی بزرگ‌تر از صفر می‌رسیم، قطعاً خروجی برابر با صفر مطلق (واقعی) می‌شود. اما به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1^+-1}=\dfrac{1}{1^+-1}=\dfrac{1}{\text{عدد مثبت و بسیار کوچک}}=\dfrac{1}{0^+}\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1^--1}=\dfrac{1}{\text{عدد منفی و بسیار نزدیک به صفر}}=\dfrac{1}{0^-}\end{cases}$$

در این‌جا صفر ما، حدی است و حاصل برابر با $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. در واقع در حالت حدی، صفر موجود در مخرج یا 0^- است یا 0^+ که اگر 0^- باشد، آن‌گاه $\frac{1}{0^-}=-\infty$ و اگر 0^+ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{0^+}=+\infty$ می‌شود. برای نمونه چند حالت مهم که ممکن است در سؤالات با آن‌ها روبه‌رو شویم، در زیر آورده شده است:

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty\quad,\quad\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=\text{صفر مطلق}\quad,\quad\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}\quad,\quad\frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

در واقع همان‌طور که می‌بینید؛ هرجا صفر مطلق در مخرج داریم، حاصل تعریف نشده است و مهم نیست در صورت کسر چه عددی باشد (حتی اگر ∞ هم باشد باز هم حاصل تعریف نشده است). در شرایط $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty$، علامت بی‌نهایت، بستگی به علامت صورت کسر و همچنین علامت صفر حدی مخرج کسر دارد:

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty\quad,\quad\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty\quad,\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty\quad,\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$$

توجه۱: گاهی اوقات 0^+ را با $+\varepsilon$ (اِپسیلُن) و 0^- را با $-\varepsilon$ نشان می‌دهیم. در اینجا «اِپسیلُن» به معنای یک عدد مثبت بسیار کوچک و در حال نزدیک شدن به صفر است.

توجه۲: برای درک بهتر مفاهیم حد باید دو نقطه‌ی فرضی $+\infty$ و $-\infty$ را به مجموعه $\mathbb{R}$ اضافه کنیم. این نقاط خواص زیر را دارند:

۱) $+\infty$ و $-\infty$ قرینه یکدیگر نیستند، یعنی $(+\infty)+(-\infty)$ لزوماً صفر نمی‌شود.

۲) به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{cases}a+(+\infty)=+\infty\quad,\quad a-(+\infty)=-\infty\quad,\quad \dfrac{a}{-\infty}=0\\ a+(-\infty)=-\infty\quad,\quad a-(-\infty)=+\infty\quad,\quad \dfrac{a}{+\infty}=0\\ +\infty+\infty=+\infty\ ,\ (+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty\ ,\ (+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty\end{cases}$$

۳) اگر $a>0$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=-\infty \quad , \quad a\times(+\infty)=+\infty$

۴) اگر $a<0$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=+\infty \quad , \quad a\times(+\infty)=(-\infty)$

۵) اگر $a>1$ باشد، آن‌گاه $a^{+\infty}=+\infty$ و $a^{-\infty}=0$ و اگر $0<a<1$، آن‌گاه $a^{+\infty}=0$ و $a^{-\infty}=+\infty$

مثال ۳: حد راست تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{4^{\frac{1}{x}}+2}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» چون حد راست تابع خواسته شده است در نتیجه مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ را بایـد حسـاب کنـیم وقتـی $x\to 0^+$ آن‌گـاه $\frac{1}{x}\to+\infty$ در نتیجه $4^{\frac{1}{x}}\to+\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{4^{\frac{1}{x}}+2}=\frac{0-1}{4^{+\infty}+2}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

مثال ۴: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5e^{\frac{1}{x}}-3e^{-\frac{1}{x}}}{2e^{\frac{1}{x}}+5e^{-\frac{1}{x}}}$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) 0 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳» وقتی $x\to 0^+$ آن‌گاه $\frac{1}{x}\to+\infty$ در نتیجه $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$ و وقتی $x\to 0^+$ آن‌گاه $-\frac{1}{x}\to+\infty$ در نتیجه $(\frac{1}{x})^{-1}\to 0^+$

با توجه به توضیحات داده شده حد تابع را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5e^{\frac{1}{x}}-3e^{-\frac{1}{x}}}{2e^{\frac{1}{x}}+5e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{5e^{\frac{1}{x}}}{2e^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{2}$$

در چه نوع حدودی حتماً لازم است هم حد چپ و هم حد راست را حساب کنیم؟

در این قسمت می‌خواهیم دسته‌بندی مشخصی از حدودی را ارائه کنیم که در آن‌ها باید هم حد چپ و هم حد راست را به طور جداگانه حساب کنیم.

۱) در توابع چندضابطه‌ای وقتی حد تابع در نقاط روی مرز، سؤال شده باشد. در این حالت‌ها ممکن است حد چپ و حد راست با هم یکسان نباشد.

۲) در توابع رادیکالی که فرجه رادیکال زوج است. وقتی فرجه رادیکال زوج است زیر رادیکال نمی‌تواند مقداری منفی باشد، بـه همـین دلیـل در ایـن توابع ممکن است یکی از حدود چپ و یا راست وجود نداشته باشد.

به مثال مقابل توجه کنید:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-4}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4^+-4}=\sqrt{0^+}=0\\[2mm] \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4^--4}=\sqrt{0^-}=\text{وجودندارد}\end{cases}\Rightarrow \text{حد در } x=2 \text{ وجود ندارد}$$

۳) در توابع کسری وقتی مخرج کسر به سمت صفر میل می‌کند. در این‌گونه سؤالات اگر مخرج ریشه مرتبه فرد داشته باشد، آن‌گاه هر یـک از حـدود چپ و راست مختلف‌العلامه می‌شوند. یعنی یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ خواهد شد و اگر مخرج کسر ریشه مرتبه زوج داشـته باشـد، هـر دو حـد چـپ و راسـت برابر $+\infty$ یا هر دو حد برابر با $-\infty$ خواهد شد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}(\frac{6x+2}{3x-1})=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}(\frac{6x+2}{3x-1})=\frac{4}{0^+}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-}(\frac{6x+2}{3x-1})=\frac{4}{0^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow \text{حد وجود ندارد}$$

و

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(tgx)=-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(tgx)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \text{حد وجود ندارد}$$

در محاسبه‌ی حد tgx توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^+$، آن‌گاه x در ربع دوم قرار دارد بنابراین علامت بی‌نهایت با توجه به علامت tgx در ربع دوم تعیین می‌شود که می‌دانیم منفی است. به همین ترتیب وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^-$ یعنی در ربع اول قرار داریم و می‌دانیم علامت tg در ربع اول مثبت است، بنابراین $+\infty$ قرار دادیم.

۴) در توابع شامل قدرمطلق وقتی حد تابع در نقاطی مد نظر باشد که این نقاط ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق هستند.

مثال ۵: مقدار حد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x-۲|}{x-۲}$ وقتی $x\to ۲$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۰   ۴) حد ندارد

پاسخ : گزینه «۴» چون $x=۲$ ریشه ساده داخل قدرمطلق است باید حد چپ و راست تابع را در $x=۲$ حساب کنیم. وقتی x از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود، $x-۲$، مقدارش مثبت می‌شود و با توجه به تعریف قدرمطلق نتیجه می‌گیریم $|x-۲|=x-۲$ و به همین ترتیب وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود «$x-۲$» مقدارش منفی می‌شود و با توجه به تعریف قدرمطلق خواهیم داشت $|x-۲|=-(x-۲)$ چون حد راست و چپ با هم برابر نیستند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{حد راست} \neq \text{حد چپ}} \text{تابع در نقطه } x=۲ \text{ حد ندارد.}$$

۵) در توابع شامل جزء صحیح، وقتی حد تابع در نقاطی مدنظر باشد که عبارت داخل جزء صحیح، مقدار صحیح پیدا می‌کند.

مثال ۶: حاصل $A=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) ۱-   ۳) ۱   ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴» علامت منفی صورت کسر را در علامت مخرج کسر که منفی می‌باشد ضرب می‌کنیم.

$$A=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\lfloor \text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر}\rfloor}{\text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر}}=\frac{-۱}{-\varepsilon}=\frac{۱}{\varepsilon}=\frac{۱}{\text{عددی مثبت و بسیار کوچک}}=+\infty$$

مثال ۷: مقدار حد عبارت $\lim\limits_{x\to ۶^+}\frac{\lfloor x\rfloor-۶}{x^۲-۳۶}$، برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر   ۲) ∞ ۳) $-\infty$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینه «۱» هرگاه در تابعی جزء صحیح وجود داشته باشد و بخواهیم حد تابع را در نقطه‌ای بگیریم بهتر است قبل از گرفتن حد، با دانستن اینکه x به سمت چه عددی و از چه طرفی (چپ یا راست) میل می‌کند، تکلیف جزء صحیح را مشخص کنیم و سپس اقدام به گرفتن حد کنیم.

با توجه به این که ۶^+ یعنی از ۶ کمی بیشتر $\lfloor ۶^+\rfloor=۶$ می‌باشد، داریم:

$$\lim\limits_{x\to ۶^+}\frac{\lfloor x\rfloor-۶}{x^۲-۳۶}=\lim\limits_{x\to ۶^+}\frac{\lfloor ۶^+\rfloor-۶}{x^۲-۳۶}=\lim\limits_{x\to ۶^+}\frac{۰}{x^۲-۳۶}=\frac{۰}{۰^+}=۰$$

دقت کنید وقتی $x\to ۶^+$ آن‌گاه $x^۲\to ۳۶^+$ در نتیجه $۳۶^+-۳۶=۰^+$

مثال ۸: مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}}\lfloor ۳x\rfloor+\lfloor -۳x\rfloor$ برابر است با:

۱) ۰   ۲) ۱-   ۳) وجود ندارد   ۴) $-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: باید حاصل حد تابع را به ازای $(\frac{۱}{۳})^+$ و $(\frac{۱}{۳})^-$ جداگانه محاسبه کنیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}^+}\lfloor ۳x\rfloor+\lfloor -۳x\rfloor=\left\lfloor ۳\times\frac{۱^+}{۳}\right\rfloor+\left\lfloor -۳\times\frac{۱^+}{۳}\right\rfloor=\left\lfloor ۳(\frac{۱}{۳}+\varepsilon)\right\rfloor+\left\lfloor -۳(\frac{۱}{۳}+\varepsilon)\right\rfloor=\lfloor ۱+۳\varepsilon\rfloor+\lfloor -۱-۳\varepsilon\rfloor=\lfloor ۱^+\rfloor+\lfloor -۱^-\rfloor=۱-۲=-۱\\ \lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}^-}\lfloor ۳x\rfloor+\lfloor -۳x\rfloor=\left\lfloor ۳(\frac{۱}{۳}-\varepsilon)\right\rfloor+\left\lfloor -۳(\frac{۱}{۳}-\varepsilon)\right\rfloor=\lfloor ۱-۳\varepsilon\rfloor+\lfloor -۱+۳\varepsilon\rfloor=\lfloor ۱^-\rfloor+\lfloor -۱^+\rfloor=۰-۱=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}^-}f(x)=-۱$$

روش دوم: وقتی x به سمت $(\frac{1}{3})^+$ یا $(\frac{1}{3})^-$ میل می‌کند آن‌گاه مقدار داخل جزء صحیح که همان ۳x و ۳x− می‌باشد متعلق به مجموعه $\mathbb{Z}$ نمی‌باشد در نتیجه مقدار حد داده شده همواره برابر (۱−) است.

توجه: $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & ; \ x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; \ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثال ۹: حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \frac{|x - \lfloor x \rfloor|}{x}$ در نقطه‌ی صفر کدامند؟

۱) ۱ و ۰ ۲) ۱− و ۰ ۳) $-\infty$ و ۱ ۴) $+\infty$ و ۱

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که گفته شد، هرگاه در تابعی جزء صحیح وجود داشته باشد و بخواهیم حد تابع را در نقطه‌ای بگیریم بهتر است قبل از گرفتن حد، با دانستن اینکه x به سمت چه عددی و از چه طرفی (چپ یا راست) میل می‌کند، تکلیف جزء صحیح را مشخص کنیم و سپس اقدام به گرفتن حد کنیم:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x - \lfloor x \rfloor|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x - \lfloor 0^- \rfloor|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x - (-1)|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x+1|}{x} = \frac{1}{0^-} = \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty \qquad (*)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x - \lfloor x \rfloor|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x - \lfloor 0^+ \rfloor|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x - 0|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

دقت کنید در (*) علامت صورت کسر را که مثبت است در علامت مخرج کسر که منفی می‌باشد ضرب می‌کنیم.

مثال ۱۰: به ازای چه مقداری از $\underline{a}$ تابع $f(x) = a\lfloor x \rfloor + \lfloor x+1 \rfloor$ در نقطه $x = 1$ دارای حد است؟

۱) ۱− ۲) ۲− ۳) ۰ ۴) ۲+

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a\lfloor 1^- \rfloor + \lfloor 1+1-\varepsilon \rfloor = a \times 0 + \lfloor 2-\varepsilon \rfloor = \lfloor 2^- \rfloor = 1 & \text{حد راست} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = a\lfloor 1^+ \rfloor + \lfloor 1+1+\varepsilon \rfloor = a \times 1 + \lfloor 2+\varepsilon \rfloor = a+2 & \text{حد چپ} \end{cases} \xrightarrow{\text{باید حد راست و چپ تابع در x=1 برابر باشند}} a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

مثال ۱۱: حاصل $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{\lfloor x \rfloor - x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید تکلیف جزء صحیح را مشخص کنیم، سپس به سراغ حدگیری برویم، با توجه به این که $\lfloor 2^- \rfloor = 1$ می‌باشد، داریم:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{\lfloor x \rfloor - x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\lfloor 2^- \rfloor - 1}{\lfloor 2^- \rfloor - x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1-1}{1-x} = \frac{1-1}{1-2^-} = \frac{0}{(-1)^+} = 0$$

مثال ۱۲: حد عبارت $\frac{2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor}{x-6}$ وقتی $x \to 6^+$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) صفر ۴) ۲−

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا تکلیف جزء صحیح را وقتی $x \to 6^+$ میل می‌کند مشخص می‌کنیم، سپس اقدام به گرفتن حد می‌کنیم.

$$\lim_{x \to 6^+} \frac{2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor}{x-6} = \lim_{x \to 6^+} \frac{2\left\lfloor \frac{6^+}{2} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{6^+}{3} \right\rfloor}{x-6} = \lim_{x \to 6^+} \frac{2\lfloor 3^+ \rfloor - 3\lfloor 2^+ \rfloor}{x-6} = \lim_{x \to 6^+} \frac{2\times 3 - 3 \times 2}{x-6} = \frac{0}{6^+ - 6} = \frac{0}{0^+} = 0$$

توجه: چون $6^+ > 6$ در نتیجه $\frac{6^+}{2} = 3^+$ ولی $6^- < 6$ در نتیجه $\frac{6^-}{2} = 3^-$.

مثال ۱۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\lfloor \sin x\rfloor}{x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) 0 ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود که (0^-) زاویه‌ای در ربع چهارم است، یعنی $-1<\sin(0^-)<0$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\lfloor \sin x\rfloor}{x}=\frac{\lfloor \sin(0^-)\rfloor}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

توجه: نتیجه علامت منفی در صورت کسر با علامت منفی در مخرج کسر ضرب می‌شود در نتیجه مقدار $\frac{-1}{0^-}$ برابر $(+\infty)$ می‌شود.

مثال ۱۴: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\lfloor x\rfloor+\lfloor x^2\rfloor+\lfloor x^3\rfloor+\lfloor x^4\rfloor+\lfloor x^5\rfloor+\lfloor x^6\rfloor\right)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که حد جملات دارای توان زوج داخل جزء صحیح را عددی بین صفر و یک می‌کند حاصل جزء صحیح آن صفر است و حد جملات دارای توان فرد داخل جز صحیح را عددی بین صفر و منفی یک می‌کند حاصل جزء صحیح آن برابر (-1)است. یعنی اگر $x\to 0^-$ آنگاه x^2 به سمت 0^+ میل می‌کند و جزء صحیح آن برابر صفر است و x^3 به سمت 0^- میل می‌کند و جزء صحیح آن برابر ۱- است. پس به همین دلیل داریم:

$$\lfloor x\rfloor=\lfloor x^3\rfloor=\lfloor x^5\rfloor=-1 \text{ و } \lfloor x^2\rfloor\lfloor x^4\rfloor=\lfloor x^6\rfloor=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\lfloor x\rfloor+\lfloor x^2\rfloor+\lfloor x^3\rfloor+\lfloor x^4\rfloor+\lfloor x^5\rfloor+\lfloor x^6\rfloor\right)=-3$$

مثال ۱۵: در تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor-2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor$ اختلاف حد چپ و راست در $x_0=2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به صورت سؤال حد چپ و راست را در $x_0=2$ باید حساب کنیم:

$$\text{حد راست}\quad \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\lfloor x\rfloor-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right)=\lfloor 2^+\rfloor-2\left\lfloor\frac{2^+}{2}\right\rfloor\xrightarrow{2^+>2\ \Rightarrow\ \frac{2^+}{2}=1^+}2-2\lfloor 1^+\rfloor=2-2=0$$

$$\text{حد چپ}\quad \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim\left(\lfloor x\rfloor-2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right)=\lfloor 2^-\rfloor-2\left\lfloor\frac{2^-}{2}\right\rfloor\xrightarrow{2^-<2\ \Rightarrow\ \frac{2^-}{2}=1^-}1-2\lfloor 1^-\rfloor=1-2\times 0=1$$

$$\text{حد چپ}-\text{حد راست}=1-0=1$$

مثال ۱۶: کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}=1$ ۳) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{|x|}=1$ ۴) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x^2}=1$

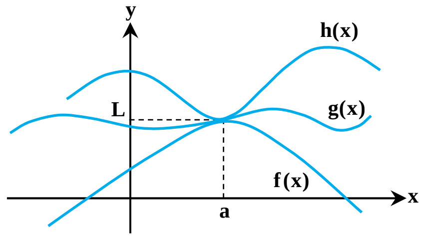
پاسخ: گزینه «۲» حد داده شده در گزینه (۱) خیلی بدیهی مشخص است و x های صورت و مخرج با هم ساده می‌شوند و اصلاً لازم نیست حد گرفته شود، در واقع حاصل این حد بدون توجه به اینکه x به چه سمتی میل می‌کند، همواره برابر یک است. از طرفی حاصل حدود داده شده در گزینه‌های (۳) و (۴)، نیز با جایگذاری عدد برابر یک می‌شود. اما برای تابع داده شده در گزینه (۲) با توجه به وجود جزء صحیح داریم:

$$\text{حد چپ}\ \lim_{x\to 1^-}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\lfloor 1^-\rfloor}{x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{0}{x}=\frac{0}{1^-}=0\quad,\quad \text{حد راست}\ \lim_{x\to 1^+}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=1=\lim_{x\to 1^+}\frac{\lfloor 1^+\rfloor}{x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$$

چون حاصل حد چپ و راست با هم برابر نیست، لذا تابع حد ندارد.

■ **قضیه فشردگی (ساندویچ):** اگر بگوییم x بیشتر **یا** مساوی عدد ۱ است و همچنین کمتر **یا** مساوی عدد ۱ است، آن‌وقت به نظر شما x چند است؟! چون حرف «یا» در متن هر دو جمله وجود دارد و این دو جمله با حرف «و» با هم ارتباط دارند، یعنی x باید رضایت هر دو جمله را کسب کند! پس یک انتخاب بیشتر نداریم و آن این است که $x=1$ باشد. قضیه فشردگی یا ساندویچ، همین مطلب را می‌گوید.

به شکل مقابل دقت کنید، در واقع قضیه فشردگی به تابعی مانند g اشاره دارد که بیچاره بین دو تابع f و h گیر افتاده است! حالا که مطلب را خوب فهمیدید، بهتر است صورت دقیق و رسمی قضیه را بیان کنیم:



قضیه: فرض کنیم نامساوی $f(x)\le g(x)\le h(x)$ به ازای هر x در یک فاصله باز شامل a (به جز احتمالاً در خودِ $x=a$) برقرار باشد، همچنین $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$، در این صورت حتماً $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ است.

برای مثال اگر به ازای هر $x\neq 0$ نامساوی $3-x^2\le g(x)\le 3+x^2$ برقرار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ برابر با ۳ است، چون داریم:

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}(3+x^2)=3\ ,\ \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(3-x^2)=3\ \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)=3$$

نتیجه قضیه فشردگی: یکی از نتایج مهم قضیه فشردگی که در حل سؤالات کاربرد زیادی دارد، به‌صورت زیر است:

«هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد (بی‌نهایت نشود)، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$ خواهد بود.»

برای مثال حاصل حد $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$ برابر با صفر است. چون در اینجا $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ و از طرفی تابع $\sin\frac{1}{x}$ به این دلیل که $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$، تابعی کران‌دار است و بنا بر نتیجه قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=\text{صفر}\times(\text{۱ و ۱− است بین } \sin\frac{1}{x}\ \text{منظور})=\text{صفر}\times(\text{است } \sin\frac{1}{x}\ \text{منظور})=0$$

مثال ۱۷: اگر $\frac{2x^2}{x^2+1}<f(x)<\frac{x^2}{x^2+1}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) نامعلوم

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{0}{0+1}=0\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

طبق قضیه ساندویچ حد تابع وسط نیز برابر صفر می‌شود، یعنی: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

نکته ۱: توابع $\sin x$ و $\cos x$ وقتی $x\to\infty$ حد ندارند، چون $\sin\infty$ و $\cos\infty$ اعداد مشخص نیستند و در واقع عددی نامشخص بین ۱− و ۱ می‌باشند.

نکته ۲: توابع $\sin\frac{1}{x}$ و $\cos\frac{1}{x}$ وقتی $x\to 0$ حد ندارند، چون وقتی $x\to 0$، آنگاه $\frac{1}{x}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

درسنامه (۲): حالت مبهم $\frac{0}{0}$

حدودی که در درسنامه‌ی (۱) بررسی کردیم، هیچکدام مبهم نبودند. در واقع در آن حدود می‌توانستیم پس از جایگذاری بگوییم حاصل حد چقدر می‌شود. (در موارد اندکی هم حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شد که بالاخره باز هم حداقل می‌توانستیم بگوییم حاصل حد بی‌نهایت می‌شود!)

در این درسنامه و درسنامه‌های بعدی با حدودی روبه‌رو می‌شویم که تعیین حاصل دقیق آن‌ها پس از جایگذاری مستقیم امکان ندارد. در واقع نمی‌توانیم بلافاصله پس از جایگذاری بگوییم حاصل حد برابر با چه عددی است. حتی نمی‌توانیم بگوییم حاصل‌شان $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$, ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$, ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0$

در هر سه مثال فوق، پس از جایگذاری $x=0$، به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. اما همان‌طور که می‌بینید حاصل این حدود با هم فرق می‌کند. این‌که چطور حاصل این حدود محاسبه شده، فعلاً مهم نیست! بحث ما فهمیدن این موضوع است که چرا می‌گوییم حاصل حد مبهم است. در واقع ما نمی‌دانیم وقتی «صفر حدی» بر «صفر حدی» تقسیم می‌شود، حاصل چه می‌شود. البته حالت $\frac{0}{0}$ تنها حالت مبهم در حدود نیست. به طور کلی هفت حالت مختلف داریم که به آن‌ها «صور مبهم» گفته می‌شود که به‌صورت مقابل است: 1^{∞}، ∞^0، 0^0، $0\times\infty$، $\infty-\infty$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\frac{0}{0}$.

اکنون به بررسی جداگانه هر یک از این حالات هفت‌گانه می‌پردازیم.

رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{0}{0}$

این حالت یکی از پرتکرارترین صورت‌های مبهم می‌باشد که در حدود با آن برخورد می‌کنیم. در حالت کلی اگر حدی به شکل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ داشته باشیم که وقتی $x\to a$، آن‌گاه $f(x)\to 0$ و $g(x)\to 0$ در این صورت با حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روبه‌رو هستیم و برای رفع ابهام در این حالـت، روش‌هـای مختلفـی وجـود دارد که به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱) حذف عامل مزاحم یکی از روش‌هایی که کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، حذف عامل مبهم‌کننده (مثلاً حذف عامل صفرشونده) با استفاده از تجزیه و اتحادهای جبری است. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۸: حد تابع $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ را حساب کنید.

پاسخ: به ازای $x=1$ کسر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. در نتیجه عامل مبهم‌کننده $x-1$ است برای رفع ابهام باید عامل مبهم‌کننده را در صورت و مخرج کسر پدید بیاوریم و با حذفشان در مرحله بعد عمل حدگیری را انجام می‌دهیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1+1+1=3$$

۲) استفاده از قاعده هوپیتال همیشه شناسایی عامل مزاحم کار راحتی نیست و یا حداقل پس از شناسایی به راحتی نمی‌توان آن را حذف کرد. در این قسمت به یکی از پرکاربردترین روش‌ها در محاسبه‌ی حد توابع $\frac{0}{0}$ اشاره می‌کنیم که نیاز به دانستن قوانین مشتق‌گیری دارد، اگر مشتق از دبیرستان یادتان نیست می‌توانید هر جا لازم شد از فصل مشتق همین کتاب کمک بگیرید.

قاعده هوپیتال: فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی محذوف a مشتق‌پـذیر باشـند و $g'(x)\neq 0$ و همچنـین $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ باشـد.
به عبارت دیگر برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ حالت ابهام $\frac{0}{0}$ داشته باشیم، در این صورت تساوی زیر را داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}$$

تساوی بالا به این شرط برقرار است که حد سمت راست وجود داشته باشد (یا حداقل $+\infty$ یا $-\infty$ باشد).

توجه ۱: قاعده هوپیتال یعنی این‌که حد نسبت تابع‌ها برابر با حدِ نسبت مشتق‌هایشان است (البته با توجه به تمام شرایط این قاعده که در بالا گفتـه شـد). گاهی دانشجویان فکر می‌کنند باید مشتق کسر $\frac{f}{g}$ را حساب کرده و از آن حد بگیرند!! که اشتباه است.

توجه ۲: قاعده هوپیتال همچنین در مورد حدود یک‌طرفه (حد چپ یا حد راست) نیز برقرار است؛ یعنی « $x \to a$ » را می‌توان با نمادهای $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ جایگزین کرد، در ضمن a می‌تواند $+\infty$ یا $-\infty$ هم باشد.

توجه ۳: اگر بعد از استفاده از قاعده هوپیتال دوباره با حالت $\frac{0}{0}$ مواجه شدیم، با برقراری شروط این قاعده برای $f'(x)$ و $g'(x)$، می‌توانیم دوباره از قضیه استفاده کنیم. در واقع با برقراری شرایط قضیه هوپیتال می‌توان به طور متوالی و چندین مرتبه از قاعده هوپیتال کمک گرفت؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots$$

دوباره تأکید می‌کنیم که در هر مرحله باید شرایط قضیه برقرار باشد.

مثال ۱۹: حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x-\sqrt{3x}}{27-x^3}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{54}$ ۲) $-\frac{1}{54}$ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $-\frac{1}{18}$

پاسخ: گزینه «۲» به ازای $x=3$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$A=\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{3x}}{27-x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{x\to 3}\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3x}}}{-3x^2}=\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3\times 3}}}{-3\times 9}=-\frac{1}{54}$$

توجه: برای مشتق گرفتن از $\sqrt{3x}$ از رابطه $(\sqrt{ax})'=\frac{a}{2\sqrt{ax}}$ استفاده کردیم. دقت کنید $u=3x$ در نتیجه $u'=3$، برای مشتق گرفتن از x^3 از رابطه $n\in\mathbb{Z}$ $(x^n)'=nx^{n-1}$ استفاده می‌کنیم.

برای مشتق گرفتن از x از رابطه $(ax)'=a$ استفاده کردیم، چون ضریب x یک است در نتیجه $a=1$ می‌باشد، پس مشتق x برابر یک است.

مثال ۲۰: حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{1+2x}}{x+\sqrt{2+x}}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» به ازای $x=-1$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{1+2x}}{x+\sqrt{2+x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -1}\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{1+\frac{1}{2\sqrt{2+x}}}=\frac{\frac{+2}{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{9}$$

برای مشتق گرفتن از $\sqrt[3]{1+2x}$ از رابطه $(\sqrt[n]{u})'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ استفاده کردیم. دقت کنید که $u=1+2x$ و $u'=2$ و $n=3$ می‌باشد. در مخرج کسر هم از این فرمول استفاده کرده‌ایم.

مثال ۲۱: حاصل $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+\sqrt{2-x}}{x^2+2x}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» به ازای $x=-2$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+\sqrt{2-x}}{x^2+2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -2}\frac{1+\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{2x+2}=\frac{1+\frac{-1}{2\sqrt{2-(-2)}}}{2(-2)+2}=\frac{-3}{8}$$

مثال ۲۲: حد عبارت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}$ کدام است؟

۱) $5x^4$ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱» به ازای $h=0$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم و با استفاده از هوپیتال و مشتق گرفتن نسبت به متغیر h داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^4}{1}=5x^4$$

برای مشتق گرفتن از $(x+h)^5$ از رابطه $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ استفاده کردیم با مقایسه با فرمول اصلی نتیجه می‌گیریم. $n=5\ ,\ u'=1\ ,\ u=x+h$

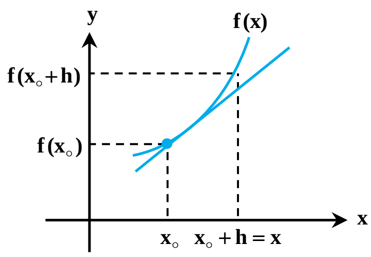
مدرسان شریف

فصل پنجم

«مشتق»

درسنامه (۱): مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

تعریف مشتق در یک نقطه



فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ روی فاصله (a,b) معین و در نقطه $x_\circ \in (a,b)$ پیوسته باشد، تـابع f در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد، این حد را که با $f'(x_\circ)$ نمایش مـی‌دهـیم، مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x_\circ$ است.

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} \qquad (۱)$$

مثال ۱: مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ را حساب کنید.

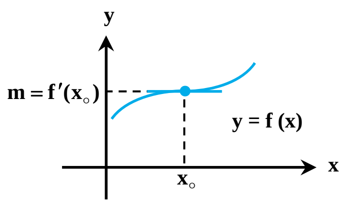
پاسخ: با توجه به رابطه $f'(x_\circ)=\lim\limits_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ نتیجه می‌گیریم که مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ برابر $f'(۱)$ است (برای حساب کردن $f'(۱)$ کافی است ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق بگیریم و در مشتق تابع به جای هر x عدد یک را قرار می‌دهیم).

عبارت بالا را به صورت زیر نیز نشان می‌دهند:

$$f'(x_\circ)=\lim_{h\to \circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \qquad (۲)$$

مثال ۲: مقدار $\lim\limits_{h\to \circ}\frac{f(\frac{\pi}{۴}+h)-f(\frac{\pi}{۴})}{h}$ را حساب کنید.

پاسخ: با توجه به رابطه $f'(x_\circ)=\lim\limits_{h\to \circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ نتیجه می‌گیریم که مقدار $\lim\limits_{h\to \circ}\frac{f(\frac{\pi}{۴}+h)-f(\frac{\pi}{۴})}{h}$ برابر $f'(\frac{\pi}{۴})$ است (برای حساب کردن $f'(\frac{\pi}{۴})$ کافی است ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق بگیریم و در مشتق تابع به جای هر x، $\frac{\pi}{۴}$ را قرار می‌دهیم).



تعبیر هندسی مشتق: اگر $M(x_\circ, f(x_\circ))$ یک نقطه روی منحنی $y=f(x)$ باشد، در این صورت $m=f'(x_\circ)$ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ می‌باشد و معادله خط مماس به صورت $y-y_\circ=m(x-x_\circ)$ است.

تذکر ۱: در محاسبه بعضی حدود می‌توان با استفاده از تعریف مشتق حد را محاسبه کرد و معمولاً در این‌گونـه مسـائل و یـا در مـواقعی کـه محاسـبه مشتق از روی فرمول‌ها ساده نباشد از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

مثال ۳: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{6})-\cos(\frac{\pi}{6})}{x}$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{x^2+1}$ ۲) $\frac{1}{x^2+1}$ ۳) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با مقایسه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{6})-\cos(\frac{\pi}{6})}{x}$ با فرمول $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نتیجه می‌گیریم که $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{6})$ و $x_0=0$ برای محاسبه $f'(x_0)$ که همان $f'(0)$ است باید از تابع $f(x)$ مشتق بگیریم. برای این کار از فرمول $(\cos u)'=-u'\sin u$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=x+\frac{\pi}{6}$ در نتیجه $u'=1$ می‌باشد.

$$f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{6})\Rightarrow f'(x)=-(x+\frac{\pi}{6})'\sin(x+\frac{\pi}{6})\Rightarrow f'(x)=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$$

$$\xrightarrow{\text{باید به جای هر } x \text{ عدد صفر را قرار بدهیم}} f'(0)=-\sin(0+\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

نکته ۱: اگر f در x مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+mh)-f(x-nh)}{h}=(m+n)f'(x)$$

با فرض $m=n=1$ خواهیم داشت:

الف) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2f'(x)$ ب) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$

مثال ۴: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، آنگاه مقدار $A=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: با توجه به نکته بالا $n=+1$ و $m=3$ در نتیجه داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}=(3+1)f'(2)=4f'(2) \qquad (1)$$

برای مشخص کردن مقدار (۱) ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم و در مشتق تابع به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\xrightarrow{\times 4}4f'(2)=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}}\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

روش دوم: به ازای $h=0$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{3f'(2+3h)-(-f'(2-h))}{1}=\lim_{h\to 0}(3f'(2+3h)+f'(2-h))=3f'(2+0)+f'(2-0)=4f'(2)$$

با توجه به این که حد تابع داده شده برابر $4f'(2)$ است برای محاسبه $f'(2)$ باید از تابع $f(x)$ مشتق بگیریم و در مشتق تابع به جای هر x، عدد ۲ را قرار بدهیم.

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{\text{به جای } x\text{، ۲ را قرار می‌دهیم}}f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\xrightarrow{\times 4}4f'(2)=4\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

توجه: برای مشتق گرفتن از $f(2+3h)$ باید از مشتق تابع مرکب استفاده کنیم که در آن مشتق $f(u)$ برابر $u'f'(u)$ می‌باشد و در نتیجه داریم:

$$(f(2+3h))'=(2+3h)'f'(2+3h)=3f'(2+3h)$$

مشتق چپ و راست

الف) تابع f در $x=x_0$ مشتق راست دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

$$f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ب) تابع f در $x=x_0$ مشتق چپ دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

$$f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر تابعی در یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق راست و چپ بوده و مقدار این دو مشتق با هم مساوی باشند، گوییم تابع در نقطه x_0 دارای مشتق است $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$ (عکس قضیه فوق نیز صادق است.)

رابطه بین مشتق و پیوستگی

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ دارای مشتق متناهی باشد، آنگاه $f(x)$ در x_0 پیوسته است. البته پیوستگی در یک نقطه شرط **لازم** برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است ولی شرط کافی نمی‌باشد، به عبارت دیگر عکس قضیه فوق صادق نمی‌باشد، یعنی اگر تابعی در نقطه x_0 پیوسته باشد، دلیل بر مشتق‌پذیری تابع در نقطه x_0 **نخواهد بود**. برای مثال تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۵: برای تابع f به معادله $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x<0\\ 1 & ; x=0\\ 2x-1 & ; x>0\end{cases}$، در نقطه $x=0$ کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۹۳)

۱) مشتق آن صفر است. ۲) حد چپ برابر ۱ ۳) حد راست برابر ۱- ۴) گسسته است.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی تابع داده شده با محاسبه حد چپ و راست و مقدار f در $x=0$ داریم:

$$f(0)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1 \quad , \quad \text{حد راست} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x-1)=-1$$

چون تابع در $x=0$ پیوسته نیست در نتیجه مشتق‌پذیر نمی‌باشد، پس گزینه (۱) نادرست است و بقیه گزینه‌ها درست هستند.

مثال ۶: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی چپ دارد. ۲) $f(x)$ در $x=0$، پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) $f(x)$ در $x=0$، مشتق‌پذیر است. ۴) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی راست دارد.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا شرایط پیوستگی تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0 \quad \text{حد راست}\\ &\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1 \quad \text{حد چپ}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$$

بنابراین تابع موردنظر در نقطه‌ی $x=0$ فقط از راست پیوسته است، در نتیجه مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۷: در تابع $f(x)=\begin{cases}ae^{-x} & ; x\geq 0\\ x+\frac{b}{1-x} & ; x<0\end{cases}$، مقدار $f'(0)$ موجود است. $a.b$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $f'(0)$ موجود است، پس تابع باید در $x=0$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و مشتق راست تابع در $x=0$ با هم برابر است. ابتدا شرط پیوستگی تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases}\text{حد راست:} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} ae^{-x}=ae^{0}=a\\ \text{حد چپ:} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+\frac{b}{1-x})=0+\frac{b}{1-0}=b\end{cases} \Rightarrow a=b$$

اکنون شرط مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x)$ را در $x=0$ بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}ae^{-x} & ; x\geq 0\\ x+\frac{b}{1-x} & ; x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-ae^{-x} & ; x>0 \Rightarrow f'(0^+)=-ae^{0}=-a \quad \text{مشتق راست:}\\ 1+\frac{b}{(1-x)^2} & ; x<0 \Rightarrow f'(0^-)=1+\frac{b}{(1-0)^2}=1+b \quad \text{مشتق چپ:}\end{cases} \Rightarrow -a=1+b$$

$$\begin{cases}a=b\\ -a=1+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=b\\ a+b=-1\end{cases} \Rightarrow a=b=\frac{-1}{2} \Rightarrow ab=\frac{1}{4}$$

نکته ۲: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^n \sin^m \frac{1}{x} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ در نظر بگیرید. به ازای هر عدد طبیعی m و n شرایط زیر را خواهیم داشت:

۱ـ تابع به ازای تمام مقادیر m و n در تمام نقاط پیوسته است.

۲ـ به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n\geq 2$ تابع در کلیه نقاط مشتق داشته و مشتق آن در نقطه $x=0$ برابر صفر است.

۳ـ به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n<2$ باشد تابع در کلیه نقاط به جز نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر می‌باشد و تابع مشتق آن در صفر ناپیوسته است.

۴ـ به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n\geq 3$ باشد تابع در کلیه نقاط مشتق‌پذیر بوده و همچنین تابع مشتق نیز پیوسته می‌باشد.

مثال ۸: در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 \sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ ، f ....

۱) در همه جا مشتق‌پذیر است. ۲) در صفر پیوسته نیست.

۳) در همه جا پیوسته است، ولی در صفر مشتق‌پذیر نیست. ۴) در صفر مشتق‌پذیر و $f'(0)=1$ است.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به بند ۲ نکته فوق $(n=2)$ تابع در کلیه نقاط مشتق‌پذیر می‌باشد.

خلاصه قواعد مشتق‌گیری: (در توابع زیر u , v توابعی مشتق‌پذیر برحسب x است.)

استفاده از تعریف مشتق برای محاسبه مشتق توابع بیشتر اوقات کار سختی است بنابراین باید از فرمول‌های ساده‌تر برای این کار استفاده کرد. مثلاً مشتق $y = x$ برابر **یک** است و یا مثلاً وقتی می‌خواهیم مشتق $y = x^2$ را حساب کنیم سریع می‌گوییم $y' = 2x$ و این بر اساس فرمول زیر است:

$y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-1}$

در مثال $y = x^2$ در واقع ما $u = x$ و $x = 2$ در نظر گرفتیم و چون $u' = 1$ لذا $y' = 2\times 1\times x^{2-1} = 2x$ به دست آمد. جدول زیر خلاصه فرمول‌های مهم است که باید آن‌ها را حفظ باشید.

تابع در حالت کلی	مشتق تابع در حالت کلی	مثال مربوطه	مشتق مثال مربوطه
$f(x) = \underset{c\in\mathbb{R}}{c}$	$f'(x) = 0$	$f(x) = (\sqrt{2}+1)^3$	$f'(x) = 0$
$\underset{a\in\mathbb{R}}{f(x) = ax}$	$f'(x) = a$	$f(x) = \frac{3x}{2}$	$f'(x) = \frac{3}{2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu^{n-1}.u'$	$f(x) = (5x^2+3x+1)^4$	$f'(x) = 4(5x^2+3x+1)^3(10x+3)$
$f(x) = \sqrt[n]{u^m}$	$f'(x) = \frac{mu'}{n.\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$f(x) = x^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$	$f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6.\sqrt[6]{x}}$
$f(x) = \sin u$	$f'(x) = u'\cos u$	$f(x) = \sin x^2$	$f'(x) = 2x\cos x^2$
$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -u'\sin u$	$f(x) = \cos 2x$	$f'(x) = -2\sin 2x$
$f(x) = tgu$	$f'(x) = u'(1+tg^2u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$f(x) = tgx^2$	$f'(x) = (2x)(1+tg^2x^2)$
$f(x) = \cot gu$	$f'(x) = -u'(1+\cot g^2u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$f(x) = \cot g3x$	$f'(x) = -3(1+\cot g^2 3x)$
$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'.e^u$	$f(x) = -2e^{x^2-1}$	$f'(x) = -2(2x)e^{x^2-1} = -4xe^{x^2-1}$
$f(x) = a^u$	$f'(x) = u'.a^u.Lna$ $(\mathbf{a} > 0)$	$f(x) = 3^{tgx}$	$f'(x) = (1+tg^2x)(3^{tgx})Ln3$
$f(x) = \log_a^u$	$f'(x) = \frac{u'}{u}\log_a^e$ $(u > 0)$	$f(x) = \log_3^x$	$f'(x) = \frac{1}{x}\log_3^e$
$f(x) = Lnu$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$	$f(x) = Ln\cos x$	$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx$
$f(x) = Arc\sin u$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\|u\|<1$	$f(x) = Arcsinx$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = Arc\cos u$	$f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = Arc\cos x^2$	$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$f(x) = Arctgu$	$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$	$f(x) = Arctg(x^2-1)$	$f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$f(x) = Arc\cot gu$	$f'(x) = \frac{-u'}{1+u^2}$	$f(x) = Arc\cot g\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
$f(x) = \sinh u$	$f'(x) = u'\cosh u$	$f(x) = \sinh 5x$	$f'(x) = 5\cosh 5x$
$f(x) = \cosh u$	$f'(x) = u'\sinh u$	$f(x) = \cosh\frac{x^3}{3}$	$f'(x) = x^2.\sinh\frac{x^3}{3}$
$f(x) = tghu$	$f'(x) = u'(1-tgh^2u)$	$f(x) = tgh3x$	$f'(x) = 3(1-tgh^2 3x)$
$f(x) = \cot ghu$	$f'(x) = u'(1-\cot gh^2u)$	$f(x) = \cot ghx^2$	$f'(x) = 2x(1-\cot gh^2x^2)$
$f'(x) = Arc\sinh u$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$f(x) = Arc\sinh x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$f(x) = Arc\cos hx$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = Arc\cos hx^2$	$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$
$f(x) = Arc\,tg\,hu$ $(\|u\|>1)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = Arc\,tgh3x$	$f'(x) = \frac{3}{1-9x^2}$
$f(x) = Arc\cot g\,hu$ $(\|u\|<1)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = Arc\cot ghx^3$	$f'(x) = \frac{3x^2}{1-x^6}$

به مثال‌های زیر با توجه به جدول مشتق فوق برای تمرین بیشتر توجه کنید:

۱) $\mathbf{f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})'}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}=\dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}=\dfrac{1}{(3\sqrt[3]{x^2})(3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2})}=\dfrac{1}{9\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از مشتق $(\sqrt[m]{u^n})'=\dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ استفاده می‌کنیم دقت کنید $u=1+\sqrt[3]{x}$ در نتیجه $u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ می‌باشد چون توان زیر رادیکال یک است و فرجه رادیکال بزرگ‌تر ۳ می‌باشد. در نتیجه در تابع $f'(x)$ توان عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر برابر $3-1=2$ می‌باشد.

---

۲) $\mathbf{f(x)=tg^3x} \Rightarrow f'(x)=3\times(tgx)'tg^{3-1}x=3(1+tg^2x)tg^2x$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از مشتق $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=tgx$ و $n=3$ در نتیجه $u'=(1+tg^2x)$ می‌باشد.

---

۳) $\mathbf{f(x)=\sin^3 x} \Rightarrow f'(x)=3\times(\sin x)'\sin^{3-1}x=3\cos x\sin^2 x$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=\sin x$ و $n=3$ در نتیجه $u'=\cos x$ می‌باشد.

---

۴) $\mathbf{f(x)=arc\cos(\sqrt[3]{x})} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-(\sqrt[3]{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=\dfrac{\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-x}}$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$، از فرمول $(\text{arc}\cos u)'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=\sqrt[3]{x}$ در نتیجه $u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ می‌باشد.

---

۵) $\mathbf{f(x)=(\ln x)^2} \Rightarrow f'(x)=2(Lnx)'(Lnx)^{2-1}=2\times\dfrac{1}{x}Lnx=\dfrac{2}{x}Lnx$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=Lnx$ در نتیجه $u'=\dfrac{1}{Lnx}$ می‌باشد.

---

۶) $\mathbf{f(x)=Ln(\sin x)} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot gx$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=\sin x$ در نتیجه $u'=\cos x$ می‌باشد.

---

۷) $\mathbf{f(x)=e^{3x^2}} \Rightarrow f'(x)=(3x^2)'e^{3x^2}=3\times 2xe^{3x^2}=6xe^{3x^2}$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(e^u)'=u'e^u$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=3x^2$ در نتیجه $u'=6x$ می‌باشد.

---

۸) $\mathbf{f(x)=\sin(e^x)} \Rightarrow f'(x)=(e^x)'\cos(e^x) \Rightarrow f'(x)=e^x\cos(e^x)$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(\sin u)'=u'\cos u$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=e^x$ در نتیجه $u'=e^x$ می‌باشد.

مثال ۹: مشتق تابع $\mathbf{f(x)=e^{Arctgx}}$ برابر است با:

۱) $f'(x)=f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}e^{Arctgx}$ ۲) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}e^{Arctgx}$ ۳) $f'(x)=Arctgxe^{Arctgx}$ ۴) $f'(x)=e^{Arctgx}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(e^u)'=u'e^u$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=Arctgx$ در نتیجه $u'=\dfrac{1}{1+x^2}$ بنابراین داریم:

$$f(x)=e^{Arctgx} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}e^{Arctgx}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع $\mathbf{f(x)=Ln(Arc\sin x)}$ عبارت است از:

۱) $\dfrac{Arc\cos x}{Arc\sin x}$ ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,Arc\sin x}$ ۳) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{1}{Arc\sin x}$ ۴) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}Arc\sin x$

مدرسان شریف

فصل هفتم

«انتگرال و کاربرد انتگرال»

درسنامه (۱): فرمول‌های انتگرال‌گیری و استفاده از تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

انتگرال نامعین

در فصل مشتق با مسأله زیر روبرو بودیم:

تابعی مانند $F(x)$ مفروض است، مشتق این تابع یعنی $f(x)=F'(x)$ را بیابید. در این فصل با عکس این مسأله روبرو هستیم، یعنی مشتق (به عبارت دقیق‌تر دیفرانسیل) یک تابع را می‌دهند و خود تابع را از ما می‌خواهند.

تعریف تابع اولیه: تابع $F(x)$ را تابع اولیه تابع $f(x)$ می‌گویند هرگاه $F'(x)=f(x)$ باشد (یعنی اگر از تابع اولیه مشتق بگیریم به تابع $f(x)$ می‌رسیم).

مثال ۱: تابع $F(x)=x^3$، **تابع اولیه** $f(x)=3x^2$ **است، زیرا** وقتی از x^3 مشتق می‌گیریم به $3x^2$ می‌رسیم. $\quad \frac{d(x^3)}{dx}=3x^2$

مثال ۲: تابع $F(x)=\sin x$، **تابع اولیه** $f(x)=\cos x$ **است، زیرا** وقتی از $\sin x$ مشتق می‌گیریم به $\cos x$ می‌رسیم. $\quad \frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$

واضح است که اگر $f(x)$ یک تابع اولیه داشته باشد، آنگاه بیشمار تابع اولیه دارد. به طور مثال در مثال ۱ توابع $F(x)=x^3+1$، $F(x)=x^3-2$ و به طور کلی $F(x)=x^3+C$ همگی تابع اولیه‌های $f(x)=3x^2$ می‌باشند (چون مشتق تمام آنها یکسان است) و اختلاف آنها عددی ثابت است.

مسأله یافتن تابعی که مشتق آن $f(x)$ باشد و مسأله یافتن تابعی که دیفرانسیل آن $f(x)dx$ باشد هر دو یکی است و جواب آنها هم مانند هم است. لذا می‌توان عمل تابع اولیه گرفتن را عکس عمل دیفرانسیل‌گیری نیز دانست. عمل تابع اولیه گرفتن را با نماد $\int f(x)dx$ نشان می‌دهند و به طور خلاصه آن را «انتگرال f» می‌خوانند. این نماد انتگرال نامعین نیز نامیده می‌شود.

طبق تعریف نماد $\int f(x)dx$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \int dy=\int f'(x)dx \Rightarrow y=f(x)+c$$

هدف ما در این فصل روش‌های محاسبه انتگرال توابع و همچنین کاربردهای انتگرال می‌باشد.

فرمول‌های مهم انتگرال

تذکر ۱: در فرمول‌های زیر u تابعی از x می‌باشد، (c و a اعداد ثابت هستند).

۱) $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c \qquad (n\neq -1)$

۲) $\int \frac{du}{u}=Ln|u|+c$

۳) $\int a^u du=\frac{a^u}{Lna}+c \qquad (a>0, a\neq 1)$

۴) $\int e^u du=e^u+c$

۵) $\int \sin u du=-\cos u+c$

۶) $\int \cos u du=\sin u+c$

۷) $\int (1+tg^2u)du=\int \frac{du}{\cos^2 u}=tgu+c$

۸) $\int (1+\cot g^2u)du=\int \frac{du}{\sin^2 u}=-\cot gu+c$

۹) $\int tgu.du=-Ln|\cos u|+c$

۱۰) $\int \cot gu.du=Ln|\sin u|+c$

۱۱) $\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}Arctg\frac{u}{a}+c$

۱۲) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=Arcsin(\frac{u}{a})+c$

۱۳) $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$

۱۴) $\int \frac{du}{(u+a)(u+b)}=\frac{1}{b-a}Ln\left|\frac{u+a}{u+b}\right|+c$

توجه۱: $\int [f(u)+g(u)]du = \int f(u)\,du + \int g(u)du$

توجه۲: k عددی حقیقی می‌باشد. $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$

توجه۳: $\int f(u).g(u)du \neq \int f(u)\,du \times \int g(u)du$ و $\int \frac{f(u)}{g(u)}du \neq \frac{\int f(u)du}{\int g(u)du}$

به مثال‌های زیر که تمام آنها با استفاده از فرمول‌های فوق به راحتی محاسبه می‌شود، توجه کنید.

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$: فرمول (۱)

۲) $\int \frac{dx}{x+2} = \text{Ln}\,|x+2| + c$: (فرمول ۲)

۳) $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\text{Ln}3} + c$: (فرمول ۳)

۴) $\int 5e^x dx = 5e^x + c$: (فرمول ۴ و توجه ۲)

۵) $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int (\sin 3x)3dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (فرمول ۵)

۶) $\int \cos 7x dx = \frac{1}{7}\int (\cos 7x)\,7dx = \frac{1}{7}\sin 7x + c$ (فرمول ۶)

۷) $\int (2+tg^2x)dx = \int [1+(1+tg^2x)]dx = \int dx + \int (1+tg^2x)dx = x + tgx + c$ (فرمول ۷ و توجه ۱)

۸) $\int \pi(1+\cot g^2x)dx = -\pi \cot gx + c$ (فرمول ۸)

۹) $\int (4+tgx)dx = (\int 4dx + \int tgxdx) = 4x - \text{Ln}\,|\cos x| + c$ (فرمول ۹ و توجه ۱)

۱۰) $\int (\frac{\sin x + \cos x}{\sin x})dx = \int \frac{\sin x}{\sin x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = x + \text{Ln}\,|\sin x| + c$ (فرمول ۱۰)

۱۱) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\text{Arctg}(\frac{x}{3}) + c$ (فرمول ۱۱)

۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \text{Arc}\sin(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c$ (فرمول ۱۲)

۱۳) $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\text{Ln}\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ (فرمول ۱۳)

۱۴) $\int \frac{dx}{x^2+8x+15} = \int \frac{dx}{(x+3)(x+5)} = \frac{1}{5-3}\text{Ln}\left|\frac{x+3}{x+5}\right| + c = \frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{x+3}{x+5}\right| + c$ (فرمول ۱۴)

تذکر۲: در فرمول‌های ذکر شده توجه داریم که وقتی عبارت برحسب u است، du نیز کنار آن موجود است. در بعضی از مثال‌های فوق مانند مثال شماره ۵ عبارت $\sin 3x$ داخل انتگرال موجود ولی $3dx$ کنار آن وجود ندارد، لذا با تغییری که مشاهده کردید $3dx$ را ایجاد کردیم تا بتوانیم از فرمول‌های ذکر شده استفاده کنیم. این تغییر در مثال (۶) نیز انجام شده است. تغییرات انجام شده ساده‌ترین نوع **تغییر متغیر** می‌باشد که با توجه به مثال‌های زیر می‌توان درک بهتری از مفهوم تغییر متغیر داشت.

تغییر متغیر

این روش زمانی به کار می‌آید که انتگرال را نتوانیم از فرمول‌های مستقیم محاسبه کنیم و سعی می‌کنیم با ایجاد تغییرات انتگرال را به شکل انتگرال‌هایی تبدیل کنیم که به راحتی بتوان آن را محاسبه کرد. برای مثال به انتگرال مقابل توجه کنید: $I = \int (2x-1)^2 dx$

اما دقت کنید به ازای u، در فرمول (۱)، du باید وجود داشته باشد و لذا داریم: $2x-1 = u \Rightarrow 2dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

پس انتگرال به شکل مقابل تغییر می‌کند: $I = \int u^2 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}(\frac{u^3}{3}) + c = \frac{1}{6}u^3 + c = \frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

مثال ۳: حاصل انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر بیابید.

$$۱) \mathbf{I=\int (۳x+۵)^{۱۷}dx} \Rightarrow u=۳x+۵ \to du=۳dx \Rightarrow dx=\frac{du}{۳} \Rightarrow I=\int u^{۱۷}.\frac{du}{۳}=\frac{۱}{۳}\int u^{۱۷}du=\frac{۱}{۳}(\frac{u^{۱۸}}{۱۸})+c=\frac{(۳x+۵)^{۱۸}}{۵۴}+c$$

$$۲) \mathbf{I=\int \cos(۱+\pi x)dx} \Rightarrow u=\pi x+۱ \Rightarrow du=\pi dx \Rightarrow dx=\frac{du}{\pi} \Rightarrow I=\int(\cos u)\frac{du}{\pi}=\frac{۱}{\pi}\int \cos u\, du=\frac{۱}{\pi}\sin u+c=\frac{۱}{\pi}\sin(۱+\pi x)+c$$

$$۳) \mathbf{I=\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx} \Rightarrow \sqrt{x}=u \Rightarrow \frac{dx}{۲\sqrt{x}}=du \Rightarrow dx=۲\sqrt{x}\,du=۲u\,du \Rightarrow I=\int ۲\sin u\,du=-۲\cos u+c=-۲\cos\sqrt{x}+c$$

$$۴) \mathbf{I=\int \frac{Ln\sqrt{x}}{x}dx=} \int \frac{Ln\, x^{\frac{۱}{۲}}}{x}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{Lnx}{x}dx \Rightarrow Lnx=u \Rightarrow \frac{dx}{x}=du \Rightarrow I=\frac{۱}{۲}\int u\,du=\frac{۱}{۲}(\frac{u^۲}{۲})+c=\frac{۱}{۴}(Lnx)^۲+c$$

$$۵) \mathbf{I=\int \frac{dx}{۱+\cos^۲ x}=} \int \frac{dx}{۱+\frac{۱}{۱+tg^۲x}}=\int\frac{(۱+tg^۲x)}{۲+tg^۲x}dx \Rightarrow tgx=u \Rightarrow (۱+tg^۲x)dx=du$$

توجه داشته باشید که $۱+tg^۲x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ می‌باشد پس $\cos^۲ x=\frac{۱}{۱+tg^۲x}$ است.

$$I=\int\frac{du}{۲+u^۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}Arctg(\frac{u}{\sqrt{۲}})+c=\frac{۱}{\sqrt{۲}}Arc\,tg(\frac{tgx}{\sqrt{۲}})+c$$

$$۶) \mathbf{I=\int x^۲\cos(x^۳+۳)dx} \Rightarrow x^۳+۳=u \Rightarrow ۳x^۲dx=du \Rightarrow x^۲dx=\frac{du}{۳} \Rightarrow I=\frac{۱}{۳}\int\cos u\,du=\frac{\sin u}{۳}+c=\frac{\sin(x^۳+۳)}{۳}+c$$

$$۷) \mathbf{I=\int x(۲x+۵)^{۱۰}dx} \Rightarrow ۲x+۵=u \Rightarrow ۲x=u-۵ \Rightarrow x=\frac{u-۵}{۲} \Rightarrow dx=\frac{du}{۲}$$

$$I=\int(\frac{u-۵}{۲})(u)^{۱۰}(\frac{du}{۲})=\frac{۱}{۴}\int(u-۵)u^{۱۰}du=\frac{۱}{۴}\int(u^{۱۱}-۵u^{۱۰})du=\frac{۱}{۴}[\frac{u^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵}{۱۱}u^{۱۱}]+c=\frac{۱}{۴}[\frac{(۲x+۵)^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵(۲x+۵)^{۱۱}}{۱۱}]+c$$

$$۸) \mathbf{I=\int\frac{e^x}{e^x-۱}dx} \Rightarrow e^x-۱=u \Rightarrow e^x dx=du \Rightarrow I=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=Ln|e^x-۱|+c$$

$$۹) \mathbf{I=\int\frac{a^x dx}{۱+a^{۲x}}} \Rightarrow a^x=u \Rightarrow a^x Lna\,dx=du \Rightarrow a^x dx=\frac{du}{Lna} \Rightarrow I=\int\frac{a^x dx}{۱+(a^x)^۲}=\frac{۱}{Lna}\int\frac{du}{۱+u^۲}=\frac{۱}{Lna}[arc\,tgu]+c=\frac{arctg(a^x)}{Lna}+c$$

$$۱۰) \mathbf{I=\int\frac{dx}{(arc\cos x)^۵\sqrt{۱-x^۲}}} \Rightarrow u=arc\cos x \Rightarrow du=-\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} \Rightarrow I=\int\frac{-du}{u^۵}=-\int u^{-۵}du=\frac{۱}{۴}u^{-۴}+c=\frac{۱}{۴(arc\cos x)^۴}+c$$

مثال ۴: اگر $\mathbf{I(x)=\int\frac{x+۱}{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}dx}$ فرض شود، به ازای $\mathbf{c=۰}$، مقدار $\mathbf{I(-۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u=x^۲+۲x$، $du=۲(x+۱)dx$ و یا $\frac{du}{۲}=(x+۱)dx$ خواهیم داشت:

$$I(x)=\int\frac{du}{۲\sqrt[۳]{u}}=\frac{۱}{۲}\int u^{\frac{-۱}{۳}}du=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}u^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۴}(x^۲+۲x)^{\frac{۲}{۳}}+c \xrightarrow{c=۰} I(-۱)=\frac{۳}{۴}(۱-۲)^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۴}(-۱)^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۵: اگر $\mathbf{I(x)=\int\frac{۲}{x^۲-x}dx}$ باشد با فرض $\mathbf{c=۰}$ مقدار $\mathbf{I(۲)}$ کدام است؟

۱) $۲Ln۲$ ۲) $-Ln۴$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا در مخرج کسر از x فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$I(x)=\int\frac{۲}{x^۲-x}dx=۲\int\frac{dx}{x(x-۱)}=۲\times\frac{۱}{-۱-۰}Ln\left|\frac{x}{x-۱}\right|=-۲Ln\left|\frac{x}{x-۱}\right| \Rightarrow I(۲)=-۲Ln\frac{۲}{۲-۱}=-۲Ln۲=-Ln۴$$

یادآوری: در بالا از فرمول $\int\frac{du}{(u+a)(u+b)}=\frac{۱}{b-a}Ln\left|\frac{u+a}{u+b}\right|+c$ استفاده کرده‌ایم.

مثال ۶: اگر $f(x)=\int \frac{۲dx}{x^{۲}+۳}$ و ثابت انتگرال‌گیری صفر باشد، مقدار $f(\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{\pi}{۸\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ثابت انتگرال‌گیری صفر است، یعنی پس از محاسبه انتگرال مقدار $c=۰$ قرار داده می‌شود:

$$f(x)=\int\frac{۲dx}{x^{۲}+۳}=۲\int\frac{dx}{x^{۲}+۳}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\text{Arctg}\frac{x}{\sqrt{۳}}+c\xrightarrow{c=۰}f(\sqrt{۳})=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\text{Arctg}\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}+۰=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\text{Arctg}۱=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$$

توجه: $\text{Arctg}۱=\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد.

مثال ۷: حاصل $I=\int\frac{dx}{\cos^{۲}x\sqrt{۱+\text{tg}x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cos x}+\text{tg}x+c$ ۲) $\frac{۱}{\cos x}+\cot gx+c$ ۳) $۲\sqrt{۱+\text{tg}x}+c$ ۴) $۲(۱+\text{tg}x)+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این که مشتق $\text{tg}x$ برابر $۱+\text{tg}^{۲}x$ می‌باشد، و همچنین $۱+\text{tg}^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ می‌باشد و داریم:

$$۱+\text{tg}x=u\Rightarrow(۱+\text{tg}^{۲}x)dx=du\Rightarrow\frac{dx}{\cos^{۲}x}=du\Rightarrow I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-\frac{۱}{۲}}du=\frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}=۲u^{\frac{۱}{۲}}+c=۲\sqrt{۱+\text{tg}x}+c$$

در مورد تغییر متغیر به نتایج غیررسمی زیر می‌توان رسید:

۱) در تغییر متغیرها باید کاری کنیم تا فقط نماد تغییر یافته (u در مثال‌های بالا) زیر انتگرال وجود داشته باشد و اثری از x نباشد.

۲) باید مشتق عبارت کنار آن ایجاد شود.

۳) معمولاً در توابعی که به صورت رادیکالی هستند عبارت داخل رادیکال را u در نظر می‌گیریم.

۴) در توابع کسری که توابع نمایی در ترکیب مخرج وجود دارد بهتر است کل مخرج کسر و یا خود تابع نمایی را برابر u در نظر بگیریم.

۵) در نهایت وقتی جواب انتگرال بر حسب u بدست آمد آنگاه به جای u همان عبارت برحسب x را که از ابتدا برابر u فرض شده بود قرار می‌دهیم.

مثال ۸: حاصل $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{\text{Ln}x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{\text{Ln}x}}+c$ ۲) $\frac{\sqrt{\text{Ln}x}}{x}+c$ ۳) $۲\sqrt{\text{Ln}x}+c$ ۴) $\text{Ln}(\text{Ln}\sqrt{x})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این که مشتق $\text{Ln}x$ برابر $\frac{۱}{x}$ می‌باشد با فرض $u=\text{Ln}x$ داریم، $du=\frac{dx}{x}$ پس داریم:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{\text{Ln}x}}=\int(\underbrace{\text{Ln}x}_{u})^{-\frac{۱}{۲}}(\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du})=\frac{u^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}+c=۲u^{\frac{۱}{۲}}+c\Rightarrow۲\sqrt{u}+c=۲\sqrt{\text{Ln}x}+c$$

مثال ۹: اگر $F(x)=\int f(x)dx$ آنگاه $I=\int f(ax+b)dx$ کدام است؟

۱) $aF(ax+b)$ ۲) $\frac{۱}{a}F(x)$ ۳) $aF(x)$ ۴) $\frac{۱}{a}F(ax+b)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از روش تغییر متغیر داریم:

$$ax+b=u\Rightarrow adx=du\Rightarrow dx=\frac{du}{a}\Rightarrow I=\frac{۱}{a}\int f(u)du\xrightarrow{\text{با توجه به فرض}}I=\frac{F(u)}{a}=\frac{۱}{a}F(ax+b)$$

مثال ۱۰: مقدار انتگرال $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{x+۱}}$ به ازای $x=۸$ و $c=۲$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیر $u=x+۱$، نتیجه می‌شود: $du=dx$

$$I=\int\frac{u-۱}{\sqrt{u}}du=\int\frac{u-۱}{u^{\frac{۱}{۲}}}du=\int(u-۱)u^{-\frac{۱}{۲}}du=\int(u^{\frac{۱}{۲}}-u^{\frac{-۱}{۲}})du=\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}-۲u^{\frac{۱}{۲}}+c=\frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}+c$$

$$I(x)=\frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}+c\xrightarrow{x=۸,c=۲}I=\frac{۲}{۳}\times۹^{\frac{۳}{۲}}-۲\times۹^{\frac{۱}{۲}}+۲=۱۸-۶+۲=۱۴$$

مثال ۱۱: مقدار انتگرال $\int \frac{x}{3-2x^2}dx$ به‌ازای $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $c=0$ برابر کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}Ln2$ ۳) $-\frac{1}{2}Ln2$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه می‌توانیم مشتق عامل مخرج را در صورت کسر ایجاد کنیم عامل مخرج را u فرض می‌کنیم:

$$I=\int \frac{x}{3-2x^2}dx = \xrightarrow[-4xdx=du]{3-2x^2=u} I=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}$$

اکنون با توجه به اینکه $\int\frac{du}{u}=Ln|u|$ می‌باشد، داریم:

$$I=-\frac{1}{4}Lnu=-\frac{1}{4}Ln(3-2x^2)+c \xrightarrow[c=0]{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{4}Ln(3-2(\frac{1}{2}))=-\frac{1}{4}Ln2$$

مثال ۱۲: حاصل $I=\int\frac{e^{Arctgx}}{1+x^2}dx$ کدام است؟

۱) $e^{Arctgx}+c$ ۲) $2e^{Arctgx}+c$ ۳) $\frac{1}{2}e^{Arctgx}+c$ ۴) $Arctg(e^x+1)+c$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که مشتق Arctgx برابر $\frac{1}{1+x^2}$ می‌باشد، داریم:

$$Arctgx=u \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2}=du \Rightarrow I=\int e^u du=e^u+c=e^{Arctgx}+c$$

مثال ۱۳: حاصل $\int\frac{\sin(Lnx)}{x}dx$ کدام است؟

۱) $-\cos(Lnx)+c$ ۲) $\sin(Lnx)+c$ ۳) $\frac{1}{x}\cos(Lnx)+c$ ۴) $-\frac{1}{x}\sin(Lnx)+c$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که مشتق Lnx برابر $\frac{1}{x}$ می‌باشد، با فرض $u=Lnx$ داریم: $du=\frac{1}{x}dx$. پس داریم:

$$I=\int\sin u\,du=-\cos u+c=-\cos(Lnx)+c$$

مثال ۱۴: حاصل $\int\frac{\cos(Lnx)}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\sin(Lnx)+c$ ۲) $-\sin(Lnx)+c$ ۳) $\frac{1}{x}\sin(Lnx)+c$ ۴) $-\frac{1}{x}\sin(Lnx)+c$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که مشتق Lnx برابر $\frac{1}{x}$ می‌باشد، داریم:

$$Lnx=u \Rightarrow \frac{dx}{x}=du \;,\; I=\int\cos u.du=\sin u+c=\sin(Lnx)+c$$

مثال ۱۵: جواب انتگرال $\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}dx$ به ازای $c=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $1+\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» انتگرال را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$I=\int\cos x(1+2\sin x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

با تغییر متغیر $u=1+2\sin x$ داریم $du=2\cos xdx$ در نتیجه داریم:

$$I=\int u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}(2u^{\frac{1}{2}})+c=(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}+c$$

طبق صورت سؤال $c=0$ را انتخاب می‌کنیم:

$$I=(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+2\sin x}\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} I=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$$

مثال ۱۶: اگر $f(x)=\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$ و ثابت انتگرال‌گیری صفر باشد، در این صورت $f(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{16}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که مخرج کسر ریشه ندارد $(\Delta=16-32<0)$ باید مخرج کسر را به صورت مربع دو جمله بنویسیم تا انتگرال به فرم $\int\frac{du}{u^2+a^2}$ تبدیل شود و سپس از آن انتگرال می‌گیریم:

$$f(x)=\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x^2+4x+4)+4}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+2^2}=\frac{1}{2}Arctg\frac{x+2}{2}+c\xrightarrow{c=0} f(0)=\frac{1}{2}Arctg\frac{2}{2}=\frac{1}{2}Arctg1=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$