فصل اول

«بردارها»

مثال۱: سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ که در یک صفحه واقع نشده‌اند و حجم غیر صفر $V = \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ را به وجود می‌آورند در نظر بگیرید. هر گاه بردار $\vec{D}$ ترکیب خطی با ضرایب عددی a و b و c از این سه بردار به صورت $\vec{D} = a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}$ باشد. ضرایب a و b و c به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

(سراسری ۹۰)

۱) $\frac{|\vec{D}|}{|\vec{C}|}, \frac{|\vec{D}|}{|\vec{B}|}, \frac{|\vec{D}|}{|\vec{A}|}$

۲) $\frac{\vec{D}.\vec{C}}{\vec{A}.\vec{B}}, \frac{\vec{D}.\vec{B}}{\vec{C}.\vec{A}}, \frac{\vec{D}.\vec{A}}{\vec{B}.\vec{C}}$

۳) $\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\vec{D}.\vec{C}}, \frac{\vec{C}.\vec{A}}{\vec{D}.\vec{B}}, \frac{\vec{B}.\vec{C}}{\vec{D}.\vec{A}}$

۴) $\frac{\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{B})}{V}, \frac{\vec{D}.(\vec{C}\times\vec{A})}{V}, \frac{\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})}{V}$

۱ـ گزینه «۴» با استفاده از روابط ضرب خارجی و دیورژانس هر تابع برداری داریم: $\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{B}) = a\underbrace{\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})}_{=0} + b\underbrace{\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{B})}_{=0} + C\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$

بقیه‌ی ضرایب نیز به صورت مشابه به دست می‌آیند. $C = \frac{\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{B})}{V}$

مثال۲: می‌دانیم یک بردار با محور x زاویه‌ی 60° و با محور y زاویه 45° را می‌سازد. این بردار با محور z چه زاویه‌ای می سازد؟

۱) 60° ۲) 30° ۳) 45° ۴) $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قانون کسینوس‌ها داریم:

$$\text{Cos}^2 60^\circ + \text{Cos}^2 45^\circ + \text{Cos}^2\gamma = 1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\text{Cos}^2\gamma \Rightarrow \text{Cos}^2\gamma = \frac{1}{4} \to \text{Cos}\gamma = \pm\frac{1}{2} \to \gamma = 60^\circ$$

با توجه به فرضیات مسأله، $\gamma < \frac{\pi}{2}$ است که تنها $\gamma = 60^\circ$ قابل قبول می‌باشد.

مثال۳: کدام یک مؤلفه‌ی یک بردار است؟

۱) (x,x) ۲) (y,y) ۳) (y,x) ۴) $(y,-x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌بایست رفتار تحت دوران را بررسی کنیم. برای گزینه‌ی ۴، $A_x = y$ و $A_y = -x$ است لذا داریم:

$$A'_x = y' = A_x\text{Cos}\varphi + A_y\text{Sin}\varphi = y\text{Cos}\varphi - x\text{Sin}\varphi = -x\text{Sin}\varphi + y\text{Cos}\varphi$$

$$A'_y = -x' = -A_x\text{Sin}\varphi + A_y\text{Cos}\varphi = -y\text{Sin}\varphi - x\text{Cos}\varphi \Rightarrow x' = x\text{Cos}\varphi + y\text{Sin}\varphi$$

بنابراین طبق تعریف بردارها و با توجه به اینکه $\vec{r} = (x,y)$ یک بردار است، مؤلفه‌های $(y,-x)$ نیز تشکیل بردار می‌دهند.

برای بررسی گزینه ۳ داریم:

$$A'_x = y' = y\text{Cos}\varphi + x\text{Sin}\varphi \Rightarrow y' = y\text{Cos}\varphi + x\text{Sin}\varphi$$

$$A'_y = x' = -y\text{Sin}\varphi + x\text{Cos}\varphi \Rightarrow x' = x\text{Cos}\varphi - y\text{Sin}\varphi$$

مثال۴: دستگاه مختصات را به چه اندازه‌ای حول محور z دوران دهیم تا بردار $(1,\sqrt{3})$ در راستای محور x قرار گیرد؟

۱) 30° ۲) 60° ۳) 45° ۴) 90°

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید در دستگاه جدید $y' = 0$ باشد، لذا خواهیم داشت:

$$y' = 0 = -x\text{Sin}\varphi + y\text{Cos}\varphi = -\text{Sin}\varphi + \sqrt{3}\text{Cos}\varphi \Rightarrow -\sin\varphi + \sqrt{3}\text{Cos}\varphi = 0 \to \tan\varphi = \sqrt{3} \to \varphi = 60^\circ$$

مثال۵: کدام یک از گزینه‌ها برای دوران یک بردار در صفحه‌ی xy ناوردا است؟

۱) زاویه‌ی بردار با محور x ۲) زاویه‌ی بردار با محور y ۳) طول بردار ۴) علامت مؤلفه‌ی x

پاسخ: گزینه «۳» با دوران محورهای مختصات، زاویه‌ی بردار با محور x جدید و y جدید عوض می‌شود و لذا ناوردا نیست. همچنین با یک دوران با زاویه‌ای بیش از 180°، علامت مؤلفه‌ی x نیز عوض می‌شود. لذا تنها طول بردار است که ناوردا باقی می‌ماند.

مثال۶: زاویه‌ی میان دو بردار $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ و $\vec{B} = 5\hat{i}$ برابر است با:

۱) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ ۲) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ ۳) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به رابطه‌ی $\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\mathrm{Cos}\theta$ داریم:

$$\mathrm{Cos}\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{15}{5 \times \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5 \times 5} = \frac{3}{5} \rightarrow \theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

مثال۷: مکان هندسی نقاطی که انتهای $\vec{r}$ جاروب می‌کند، اگر $\vec{r}$ در رابطه‌ی $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{a} = 0$ برای یک بردار دلخواه غیرصفر $\vec{a}$ صدق کند، کدام است؟

۱) خط ۲) یک قرص ۳) کره ۴) صفحه

پاسخ: گزینه «۴» ضرب داخلی در حالت کلی نسبت به دوران محورها ناورد است. بنابراین باید به درستی از این خاصیت استفاده کنیم. در دستگاهی قرار می‌گیریم که در آن $\vec{a}$ در راستای محور x است؛ یعنی $\vec{a} = a\hat{i}$ بنابراین: $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{a} = 0 = r_x a - a^2 \Rightarrow r_x = a$

اما این بدان معناست که مؤلفه‌ی x بردار $\vec{r}$، همواره یک مقدار دارد. لذا نوک بردار $\vec{r}$ صفحه‌ای به موازات صفحه‌ی $y - z$ و به فاصله‌ی a از آن را جاروب خواهد کرد.

مثال۸: حاصل $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B})$:

۱) 0 ۲) $2\vec{A} \times \vec{B}$ ۳) $2\vec{B} \times \vec{A}$ ۴) $\vec{B} \times \vec{A}$

پاسخ: گزینه «۲» از خاصیت پخشی ضرب خارجی خواهیم داشت:

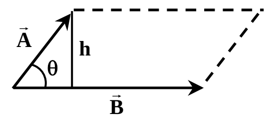
$$(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{A} + \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \cancel{\vec{A} \times \vec{A}} + \vec{A} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{A} - \cancel{\vec{B} \times \vec{B}} = 2\vec{A} \times \vec{B}$$

در آن از این خاصیت استفاده شده است که ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است، زیرا در این حالت زاویه‌ی $\theta = 0$ خواهد بود.

مثال۹: مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو بردار $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j}$ و $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j}$ می‌سازند، برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۶ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴»



برای دو بردار دلخواه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ داریم:

با توجه به هندسه‌ی شکل می‌توان نوشت: $h = A\mathrm{Sin}\theta$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع برابر خواهد بود با: $S = hB = A(\mathrm{Sin}\theta)B = |\vec{A} \times \vec{B}|$

و این نتیجه‌ای بسیار کلی است. بنابراین برای تست مذکور خواهیم داشت: $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{i} - \hat{j}) = -\hat{i} \times \hat{j} + \hat{j} \times \hat{i} = -2\hat{i} \times \hat{j} = -2\hat{k}$

در نتیجه: $S = |\vec{A} \times \vec{B}| = 2$

مثال۱۰: بردار داده شده در کدام گزینه بر دو بردار $\vec{A}=\hat{i}+\hat{k}$ ، $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}$ عمود است؟

۱) $\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$	۲) $\hat{i}$	۳) $\hat{j}$	۴) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم ضرب خارجی بر هر دو بردار تشکیل‌دهنده‌ی آن عمود است. پس داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ 1&0&1\\ 1&1&0\end{vmatrix}=\hat{i}(-1)+\hat{j}(1)+\hat{k}(1)=-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

اما اگر بردار $\vec{U}$ بر $\vec{V}$ عمود باشد، آنگاه $-\vec{U}$ نیز بر $\vec{V}$ عمود است (چرا؟).

مثال۱۱: حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $A=\hat{i}+\hat{j}$, $\vec{B}=\hat{i}-\hat{j}$, $\vec{C}=\hat{K}$ تشکیل می‌شود، برابر است با:

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

$$V=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\ B_x&B_y&B_z\\ C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}$$

پاسخ: گزینه «۲» خواهیم داشت.

با بسط نسبت به سطر آخر داریم:

$$V=\begin{vmatrix}1&+1&0\\ 1&-1&0\\ 0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\ 1&-1\end{vmatrix}=|-1-1|=|-2|=2$$

لذا حجم برابر با ۲ واحد حجم است.

مثال۱۲: شرط کافی برای اینکه سه بردار $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ هم‌صفحه باشند کدام است؟

۱) $\vec{A}\times\vec{B}=0$	۲) $\vec{A}.\vec{B}=0$, $\vec{B}.\vec{C}=0$, $\vec{A}.\vec{C}=0$	۳) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=0$	۴) $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=0$

پاسخ: گزینه «۴» اگر $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=0$ باشد، آنگاه این بدان معناست که حجم متوازی‌السطوح تشکیل شده از سه بردار $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ صفر است و یا اینکه $\vec{A}$ بر بردار عمود بر صفحه‌ی متشکل از $\vec{B}$ و $\vec{C}$ عمود است و یا در صفحه‌ی $\vec{B}$ و $\vec{C}$ قرار دارد، لذا با آنها هم‌صفحه است.

مثال۱۳: حاصل $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C})$ برابر است با:

۱) 0	۲) $\vec{A}[\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})]$	۳) $\vec{B}[\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})]$	۴) $\vec{C}[\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})]$

پاسخ: گزینه «۲» اگر $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{D}$ شود، آنگاه از قانون بک کب استفاده می‌کنیم:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C})=\vec{D}\times(\vec{A}\times\vec{C})=\vec{A}(\vec{D}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{D})=\vec{A}[(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}]-\underbrace{\cancel{\vec{C}[\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})]}}_{0}$$

اما جمله‌ی دوم برابر با صفر است لذا خواهیم داشت:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C})=\vec{A}[\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})]$$

مثال۱۴: بردار عمود بر رویه‌ی $x^2+\text{Sin}xy=4$ در $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

۱) $4\hat{i}-2\hat{j}$	۲) $\left(4-\frac{\pi}{2}\right)\hat{i}-2\hat{j}$	۳) $4\hat{i}$	۴) $(4+\pi)\hat{i}+2\hat{j}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا گرادیان را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}\left(x^2+\text{Sin}xy\right)=(2x+y\text{Cos}xy)\hat{i}+x\text{Cos}xy\hat{j}$$

بنابراین بردار عمود بر این رویه در $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ برابر است با: $\vec{\nabla}f\Big|_{\left(2,\frac{\pi}{2}\right)}=\left(4-\frac{\pi}{2}\right)\hat{i}-2\hat{j}$

نکته: خواص گرادیان به صورت روبرو است: $\vec{\nabla}\left(f+g\right)=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}g \qquad \vec{\nabla}(fg)=\left(\vec{\nabla}f\right)g+f\left(\vec{\nabla}g\right)$

مثال۱۵: معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه $x^2-y^2+z^2=1$ در $(1,1,1)$ برابر است با:

۱) $x+y+z=3$ ۲) $-x+y-z=3$ ۳) $x-y+z=1$ ۴) $x+y+z=-\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا بردار عمود بر رویه را در $(1,1,1)$ می‌یابیم، بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla}(x^2-y^2+z^2)\,|_{(1,1,1)}=2x\hat{i}-2y\hat{j}+2z\hat{k}\,|_{(1,1,1)}=2(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$$

لذا بردار یکه‌ی عمود بر رویه به صورت $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$ است. حال صفحه‌ی مماس بر رویه، صفحه‌ای است که بردار نرمال آن، بردار یکه‌ی عمود بر رویه است و از $(1,1,1)$ می‌گذرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{(x-1)}{\sqrt{3}}+\frac{-(y-1)}{\sqrt{3}}+\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}=0 \Rightarrow x-y+z=1$$

مثال۱۶: اگر معادله‌ی حرکت ذره‌ای به صورت $\vec{r}=\hat{i}aSin\omega t+\hat{j}bCos\omega t$ باشد، آنگاه حاصل $\left|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right|$ برابر است با:

۱) $\omega\left(a^2+b^2\right)$ ۲) ωab ۳) $\omega\sqrt{a^2+b^2}$ ۴) ωa^2b^2

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای $\dot{\vec{r}}$ خواهیم داشت:

$$\dot{\vec{r}}=\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}=\hat{i}a\omega Cos\omega t-\hat{j}b\omega Sin\omega t$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\left(\hat{i}aSin\omega t+\hat{j}bCos\omega t\right)\times\omega\left(\hat{i}aCos\omega t-\hat{j}bSin\omega t\right)=\omega\left(-\hat{k}abSin^2\omega t-\hat{k}abCos^2\omega t\right)=-\omega ab\hat{k}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right|=\omega ab$$

مثال۱۷: اگر بردار $\vec{A}$ یک میدان برداری سیم لوله‌ای باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $A_x=\vec{\nabla}.\left(x\vec{A}\right)$ ۲) $\vec{\nabla}.\left(x\vec{A}\right)=0$ ۳) $\vec{\nabla}A^2=0$ ۴) $\vec{\nabla}.\left(x\vec{A}\right)=\vec{\nabla}.\left(y\vec{A}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» داریم:

$$\vec{\nabla}.\left(x\vec{A}\right)=\left(\vec{\nabla}x\right).\vec{A}+x\underbrace{\vec{\nabla}.\cancel{\vec{A}}}_{0}=\hat{i}.\vec{A}=A_x$$

دقت شود، همانطور که در ادامه خواهیم دید $\vec{\nabla}A^2$ زمانی برابر صفر است که هم $\vec{A}.\vec{\nabla}\vec{A}$ و هم $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ برابر با صفر باشد.

مثال۱۸: در الکترواستاتیک داریم $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ بنابراین تابع اسکالر φ وجود دارد، به طوری که $\vec{E}$ میدان الکتریکی و φ اختلاف پتانسیل الکتریکی است. $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$

به دانشجو توصیه می‌شود، روابط زیر را به خاطر بسپارد:

$\vec{A}$ و $\vec{B}$ را دو میدان برداری دلخواه مشتق‌پذیر می‌گیریم:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{B}+\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}+\vec{A}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)+\vec{B}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}.\nabla)\vec{A}-(\vec{A}.\nabla)\vec{B}+\vec{A}(\nabla.\vec{B})-\vec{B}(\nabla.\vec{A})$$

اثبات: $\vec{\nabla}=\vec{\nabla}_A+\vec{\nabla}_B$

∇_A فقط روی بردار $\vec{A}$ اثر می‌کند و تأثیر آن بر $\vec{B}$ صفر است. ∇_B نیز فقط روی $\vec{B}$ اثر می‌کند.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= (\vec{\nabla}_A+\vec{\nabla}_B)\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{\nabla}_A\times(\vec{A}\times\vec{B})+\vec{\nabla}_B\times(\vec{A}\times\vec{B})\\ &=\vec{A}(\vec{\nabla}_A.\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}_A.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}_B.\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}_B.\vec{A})=(\vec{B}.\vec{\nabla}_A)\vec{A}-\vec{B}(\vec{\nabla}_A.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}_B.\vec{B})-(\vec{A}.\vec{\nabla}_B)\vec{B}\\ &=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}\end{aligned}$$

در مرحله‌ی آخر با جایگذاری درست عملگرها قبل از بردارهای مربوطه، زیرنویس $\vec{\nabla}$ را برداشته‌ایم.

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{B}+\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}+\vec{A}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)+\vec{B}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}-\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}-\vec{B}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)+\vec{A}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)$$

مثال۱۹: حاصل عبارت $\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{r}\right)$ اگر $\vec{r}$ بردار مکان باشد برابر است با: ($\vec{A}$ غیرچرخشی است):

۱) $\vec{A}$ ۲) $r\frac{\partial}{\partial r}\vec{A}$ ۳) $\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\vec{A}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته‌ی گفته شده داریم:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{r}\right)=\left(\vec{r}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{r}+\vec{r}\times\underbrace{\cancel{\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}}_{\text{غیرچرخشی}}^{0}+\vec{A}\times\cancel{\left(\vec{\nabla}\times\vec{r}\right)}_{0}=r\frac{\partial}{\partial r}\vec{A}+\vec{A}=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\vec{A}$$

مثال۲۰: برای دو میدان برداری ثابت $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و بردار مکان $\vec{r}$ حاصل $\vec{\nabla}[\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{r})]$ برابر است با:

۱) $\vec{A}\times\vec{B}$ ۲) صفر ۳) $\vec{A}.\vec{B}$ ۴) $\vec{A}\times\vec{r}$

پاسخ: گزینه «۱» در حاصل‌ضرب سه‌گانه می‌توانیم جای $\times$ و $\cdot$ را عوض کنیم. لذا داریم:

$$\vec{\nabla}[\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{r})]=\vec{\nabla}[(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{r}]=\underbrace{\cancel{(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{A}\times\vec{B}}}_{0}+[(\vec{A}\times\vec{B}).\nabla]\vec{r}+\vec{r}\times(\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})}}_{0})+(\vec{A}\times\vec{B})\times\underbrace{\cancel{\left(\vec{\nabla}\times\vec{r}\right)}}_{0}=(\vec{A}\times\vec{B}).\nabla)\vec{r}=\vec{A}\times\vec{B}$$

وقتی دو میدان برداری ثابت باشند ضرب برداری و نقطه‌ای آن‌ها نیز ثابت است. پس تأثیر عملگر برداری $\vec{\nabla}$ و $\times\vec{\nabla}$ و $.\vec{\nabla}$ بر ضرب آن‌ها نیز برابر صفر می‌شود.

مثال۲۱: برای میدان برداری غیرچرخشی $\vec{A}$، حاصل $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{A}}{r}\right)$ برابر است با $(r\neq 0)$:

۱) صفر ۲) $\vec{A}$ ۳) $\frac{\vec{r}\times\vec{A}}{r^3}$ ۴) $\frac{\vec{A}\times\vec{r}}{r^3}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق نکته‌ی ذکر شده خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{A}}{r}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\times\vec{A}+\frac{1}{r}\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{A}}}_{\text{غیرچرخشی}}^{0}=-\frac{\vec{r}}{r^3}\times\vec{A}=\frac{\vec{A}\times\vec{r}}{r^3}$$

مثال۲۲: حاصل $\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$ برای دو میدان برداری سیم‌لوله‌ای $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

۱) $\left(\vec{A}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{B}+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$ ۲) $\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$ ۳) $\left(\vec{A}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به سیم‌لوله‌ای بودن بردارها، از رابطه‌ای استفاده می‌کنیم که $\vec{\nabla}.\vec{A}$ و $\vec{\nabla}.\vec{B}$ داشته باشد، که می‌دانیم برابر با صفر است. لذا داریم:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{B}+\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}+\vec{A}\underbrace{\cancel{\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)}}_{0}+\vec{B}\underbrace{\cancel{\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)}}_{0}=\left(\vec{A}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{B}+\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}$$

مثال۲۳: برای دو تابع اسکالر f و g، کدام گزینه راجع به $\vec{\nabla}f \times \vec{\nabla}g$ درست است؟

۱) سیم لوله‌ای است. ۲) غیرچرخشی است. ۳) متحد با صفر است. ۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۱» زیرا داریم:

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}f \times \vec{\nabla}g\right) = \vec{\nabla}g.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f) - \vec{\nabla}f.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}g) = 0$$

کرل گرادیان برابر صفر است پس خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}g = 0$$

مثال۲۴: حاصل $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right)$ برابر است با:

۱) $-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}^2\vec{A}$ ۲) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}^2\vec{A}\right)$ ۳) صفر ۴) $\vec{\nabla}\times\vec{A}$

پاسخ: گزینه «۱» خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right) = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\times[\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})}}_{0}] \quad -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}^2\vec{A} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}^2\vec{A}$$

اما کرل گرادیان برابر با صفر است، اما الزاماً کرل لاپلاس یک بردار صفر نیست.

مثال۲۵: یک شاره با سرعت $\vec{V} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$، از یک قرص واحد در صفحه‌ی xy می‌گذرد. آهنگ شار عبوری از قرص:

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۱» آهنگ شارش برابر است با $\int \vec{V}.d\vec{\sigma}$ اما $\overrightarrow{d\sigma} = rdrd\theta\hat{k} = \hat{k}d\sigma$ است (در دستگاه قطبی مسطح).

Z روی قرص ثابت و برابر با صفر است.

$$\int \vec{V}.d\vec{\sigma} = \int (x\hat{i} + y\hat{i} + z\hat{k}).\hat{k}\,d\sigma = \int z\,d\sigma = z\int d\sigma = 0(\int d\sigma) = 0$$

مثال۲۶: حاصل $\oiint_S \vec{r}.\overrightarrow{d\sigma}$ روی هر سطح بسته برابر است با:

۱) حجم محصور ۲) دو برابر حجم محصور ۳) سه برابر حجم محصور ۴) چهار برابر حجم محصور

پاسخ: گزینه «۳» طبق قضیه‌ی گاوس داریم:

$$\oiint_S \vec{r}.\overrightarrow{d\sigma} = \int_V d\tau\vec{\nabla}.\vec{r} = 3\int_V d\tau = 3V$$

مثال۲۷: حاصل $\left|\oint_C \vec{r}\times\overrightarrow{dr}\right|$ برای هر خم محصورکننده‌ی یک سطح برابر است با:

۱) مساحت سطح ۲) دو برابر مساحت سطح ۳) سه برابر مساحت سطح ۴) چهار برابر مساحت سطح

پاسخ: گزینه «۲» اگر $\vec{a}$ یک بردار ثابت و دلخواه باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C \overrightarrow{dr}.(\vec{r}\times\vec{a}) = \left(\oint_C \overrightarrow{dr}\times\vec{r}\right).\vec{a}$$

از طرفی طبق قضیه‌ی استوکس می‌توان نوشت:

$$\int_S \overrightarrow{d\sigma}.\vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) = \int_S \overrightarrow{d\sigma}.\left(\overbrace{(\cancel{\vec{a}.\vec{\nabla}})\vec{r}}^{\vec{a}} - \overbrace{(\cancel{\vec{r}.\vec{\nabla}})\vec{a}}^{0} - \vec{a}\overbrace{\left(\cancel{\vec{\nabla}}.\vec{r}\right)}^{3\vec{a}} + \vec{r}\overbrace{\left(\cancel{\vec{\nabla}.\vec{a}}\right)}^{0}\right)$$

$$\int_S \overrightarrow{d\sigma}.(\vec{a} - 3\vec{a}) = -2\vec{a}.\int_S \overrightarrow{d\sigma} = -2\vec{a}.\vec{S}\ ,\ (\oint_C d\vec{r}\times\vec{r}).\vec{a} = \vec{a}.(-2\vec{S})$$

حال چون $\vec{a}$ ثابت و دلخواه است پس خواهیم داشت: $\oint_C \vec{r}\times d\vec{r} = 2\vec{S}$ و در نتیجه:

$$\left|\int \vec{r}\times\overrightarrow{dr}\right| = 2\vec{S}$$

$\vec{S}$ مساحت جهت دار است.

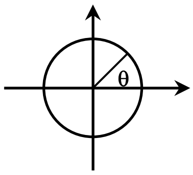
مثال۲۸: مقدار چرخش میدان برداری $\vec{A} = y\hat{i} - x\hat{j}$، روی سطح قرص واحد در صفحه‌ی xy برابر است با:

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) 2π ۴) -2π

پاسخ: گزینه «۴» می‌بایست $\int_S \vec{d\sigma}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ را محاسبه کنیم، اما به جای محاسبه‌ی این انتگرال از قضیه‌ی استوکس استفاده می‌کنیم.

$$\int_S \vec{d\sigma}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \oint_C \vec{dr}.\vec{A} = \int (ydx - xdy)$$

می‌بایست از آن روی دایره‌ی واحد انتگرال بگیریم. برای محاسبه‌ی انتگرال به دستگاه قطبی مسطح می‌رویم:



$$y = \sin\theta \rightarrow dy = \cos\theta d\theta$$
$$x = \cos\theta \rightarrow dx = -\sin\theta d\theta$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \int \vec{d\sigma}.\vec{\nabla}\times\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\theta\left(-\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi$$

مثال۲۹: حاصل انتگرال سطحی $\iint_S (x^3 e^y \hat{i} - 3x^2 e^y \hat{j}).\vec{d\sigma}$ کدام گزینه است؟ (S سطح بالایی نیم‌کره واحد به مرکز مبدأ مختصات است)

۱) $2\pi^2$ ۲) $4\pi^2$ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۴» با دیدن فرم انتگرال می‌توان حدس زد که دو جمله از یک عبارت مشتق شده‌اند. با توجه به قضیه استوکس بررسی می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = x^3 e^y & (1) \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = -3x^2 e^y & (2) \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \text{if} \quad F_y = F_x = 0 \Rightarrow \vec{F} = F_z\hat{k} \quad , \quad \nabla\times\vec{F} = x^3 e^y\hat{i} - 3x^2 e^y\hat{i}$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{(1)} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = x^3 e^y \Rightarrow F_z = x^3 e^y + g(x) \\ \xrightarrow{(2)} -\dfrac{\partial F_z}{\partial x} = -3x^2 e^y \Rightarrow F_z = x^3 e^y + h(y) \end{array}\right\} \text{با مقایسه جواب‌های به دست آمده برای } F_z \Rightarrow \vec{F} = x^3 e^y \hat{k}$$

$$g(x) = h(y) = 0$$

با استفاده از قضیه استوکس داریم:

$$\iint_s (x^3 e^y \hat{i} - 3x^2 e^y \hat{j}).d\sigma = \oint_c x^3 e^y \hat{k}.\vec{dr} = \oint_c x^3 e^y dz$$

خم بسته‌ی c دور تا دور نیم‌کره است. پس دایره‌ای است به شعاع ۱ به مرکز مبدأ روی صفحه xy. پس داریم:

$$\oint_C x^3 e^y dz = \int_0^0 x^3 e^y dz = x^3 e^y \int_0^0 dz = x^3 e^y (0) = 0$$

مثال۳۰: اگر مبدأ را در پتانسیل صفر فرض کنیم، آنگاه تابع پتانسیل میدان $\vec{F} = ar^2\hat{r}_0$ برابر است با:

۱) این میدان وجود ندارد. ۲) $-\frac{1}{3}ar^3$ ۳) $-\frac{1}{4}ar^4$ ۴) $-ar$

پاسخ: گزینه «۲» چون $\vec{F}$ در تمامی نواحی خوش تعریف است و $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ است (چرا؟) بنابراین از $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\int \vec{F}.\vec{dr} = -\int \vec{\nabla}\varphi.\vec{dr} = -\int d\varphi$$

حال اگر از ۰ تا r انتگرال بگیریم، به دست می‌آید:

$$\varphi(r) - \varphi(0) = -\int_0^r \vec{F}.dr = -\int_0^r ar^2\,\hat{r}.dr\,\hat{r} = -a\int_0^r r^2 dr = -\frac{1}{3}ar^3$$

از آنجا که $\varphi(0) = 0$ است خواهیم داشت:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{3}ar^3$$

مثال۳۱: برای میدان برداری $\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}V$ پتانسیل برداری برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}\left(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u\right)$ ۲) $\frac{1}{2}\left(v\vec{\nabla}u-u\vec{\nabla}v\right)$ ۳) $\frac{1}{2}\left(u\vec{\nabla}V+v\vec{\nabla}u\right)$ ۴) هر سه گزینه

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌توان با کرل‌گیری از گزینه‌ها پاسخ را یافت. اما سعی می‌کنیم جواب را بسازیم. با کرل‌گیری از $u\vec{\nabla}v$ و $v\vec{\nabla}u$ جمله‌ای به صورت $\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v$ ایجاد خواهد شد. داریم:

$$\vec{\nabla}\times\left(u\vec{\nabla}v\right)=\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v+\underbrace{\cancel{u[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}v)]}}_{0}=\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v\ ,\ \vec{\nabla}\times\left(v\vec{\nabla}u\right)=\vec{\nabla}v\times\vec{\nabla}u+\underbrace{\cancel{v[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u)]}}_{0}=\vec{\nabla}v\times\vec{\nabla}u$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\left(u\vec{\nabla}v\right)-\vec{\nabla}\times\left(v\vec{\nabla}u\right)=\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v-\vec{\nabla}v\times\vec{\nabla}u=2\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v\ \Rightarrow\ \vec{B}=\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v=\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{2}\left(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u\right)\right)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۲: اگر یک بردار به صورت $\vec{A}=\hat{k}f\left(\rho,\varphi\right)$ باشد آنگاه $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ عبارت است از:

۱) $\hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}-\hat{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$ ۲) $\frac{1}{\rho}\hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}-\hat{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\rho}$ ۳) $\frac{1}{\rho}\hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}-\hat{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$ ۴) $\frac{1}{\rho}\hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\hat{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\rho}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از رابطه‌ی کرل استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه تنها $h_2=\rho$ مقداری غیر از ۱ دارد:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & f\left(\rho,\varphi\right)\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}-\hat{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\rho}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۳: مؤلفه‌ی شتاب در جهت $\hat{\rho}$ یک ذره‌ی متحرک در فضا برابر است با:

۱) $\ddot{\rho}$ ۲) $\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2$ ۳) $\ddot{\rho}+\rho\dot{\varphi}^2$ ۴) $\rho\dot{\varphi}^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا مشتق‌گیری از بردارهای یکه را مورد توجه قرار می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}=\frac{d}{dt}\left(-\hat{i}\mathrm{Sin}\varphi+\hat{j}\mathrm{Cos}\varphi\right)=\dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\hat{i}\mathrm{Sin}\varphi+\hat{j}\mathrm{Cos}\varphi\right)=-\dot{\varphi}\left(\hat{i}\mathrm{Cos}\varphi+\hat{j}\mathrm{Sin}\varphi\right)=-\dot{\varphi}\hat{\rho}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}=\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Cos}\varphi\hat{i}+\mathrm{Sin}\varphi\hat{j}\right)=\dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{Cos}\varphi\hat{i}+\mathrm{Sin}\varphi\hat{j}\right)=\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\hat{z}\to\hat{k}$$

بنابراین اگر $\vec{r}=\rho\hat{\rho}+z\hat{z}$ باشد، مکان ذره را معلوم می‌کند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\hat{\rho}}+\dot{z}\hat{z}=\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}+\dot{z}\hat{z}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}+\dot{z}\hat{z})=\ddot{\rho}\hat{\rho}+\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}}+\dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\hat{\varphi}+\rho\dot{\varphi}\dot{\hat{\varphi}}+\ddot{z}\hat{z}$$

$$=\ddot{\rho}\hat{\rho}+\dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{\varphi}+\dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\hat{\varphi}-\rho\dot{\varphi}^2\hat{\rho}+\ddot{z}\hat{z}$$

$$=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho}+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi}+\ddot{z}\hat{z}$$

پس $a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2$ است.

مثال۳۴: پاسخ معادله‌ی لاپلاس که فقط تابعی از $\mathbf{r}$ است، برابر است با: ($\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو عدد ثابت هستند)

۱) $\frac{A}{r^۲}+\frac{B}{r}$ ۲) $Ar+B$ ۳) $\frac{A}{r^۲}+B$ ۴) $\frac{A}{r}+B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌بایست $\vec{\nabla}^۲\psi(r)=۰$ را حل کنیم. به نظر می‌رسد از اشکال مختلف موجود برای $\vec{\nabla}^۲\psi(r)$، شکل اول از همه مناسب‌تر است. $\nabla^۲\psi(r)$ را در مختصات کروی می‌نویسیم، داریم:

$$\nabla^۲\psi=\frac{۱}{r^۲}\frac{d}{dr}\left(r^۲\frac{d\psi}{dr}\right)=۰\Rightarrow\frac{d}{dr}\left(r^۲\frac{d\psi}{dr}\right)=۰\Rightarrow r^۲\frac{d\psi}{dr}=A\Rightarrow\frac{d\psi}{dr}=\frac{A}{r^۲}\Rightarrow\psi=\frac{A}{r}+B$$

مثال۳۵: بردار $\hat{\rho}$ در مختصات استوانه‌ای برحسب مختصات کروی برابر است با:

۱) $\hat{r}\sin\theta-\hat{\theta}\cos\theta$ ۲) $\hat{r}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta$ ۳) $\hat{r}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta$ ۴) $\hat{r}\cos\theta+\hat{\theta}\sin\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» $\hat{\rho}$ را می‌توان برحسب مختصات دکارتی به صورت روبرو نوشت: $\hat{\rho}=\hat{i}\cos\varphi+\hat{j}\sin\varphi$

مختصه‌ی φ بین مختصات‌های کروی و استوانه‌ای، یکسان است لذا از نکته قبل با جایگذاری به جای $\hat{i},\hat{j}$ برحسب مختصات کروی خواهیم داشت:

$$\hat{\rho}=\cos\varphi(\hat{r}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\theta}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\varphi}\sin\varphi)+\sin\varphi(\hat{r}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi)$$

با ساده‌سازی به دست می‌آید:

$$\hat{\rho}=\hat{r}\sin\theta(\sin^۲\varphi+\cos^۲\varphi)+\hat{\theta}\cos\theta(\sin^۲\varphi+\cos^۲\varphi)=\hat{r}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta$$

فصل دوم

«تانسور و ماتریس»

مثال۱: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ **برابر است با:**

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» بسط نسبت به سطر سوم مناسب است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$D = (1)(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

حال با بسط نسبت به سطر اول داریم:

$$D = -1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

مثال۲: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$ **برابر است با:**

۱) ۵۲- ۲) ۲۶- ۳) ۲۸- ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» می‌توان مقدار را با بسط همسازه یافت، اما در ابتدا نصف ستون سوم را به ستون اول اضافه می‌کنیم. تا در ستون اول دو عضو صفر داشته باشیم و سریع‌تر به جواب برسیم. به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{2}\times 2 & 4 & 2 \\ -1+\frac{1}{2}\times 2 & 5 & 2 \\ 2+\frac{1}{2}(-4) & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

حال می‌توانیم بر حسب ستون اول بسط دهیم که به دست می‌آید:

$$P = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-20+6) = -28$$

مثال۳: در دستگاه معادلات روبرو y چقدر است؟

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - z = 2 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$$

۱) $-\frac{3}{10}$ ۲) $+\frac{3}{10}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $-\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از دستور کرامر با خذف سطر و ستون دوم ماتریس ضرایب، می‌توان نوشت:

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{10}$$

مثال۴: حاصل‌ضرب AB اگر $A=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ **,** $B=(1\ \ -1)$ **باشد:**

۱) قابل انجام نیست.　۲) $\begin{pmatrix}2&-2\\0&0\end{pmatrix}$　۳) $\begin{pmatrix}2&0\\-2&0\end{pmatrix}$　۴) $\begin{pmatrix}-2&2\\0&0\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ماتریس A 2×1 است و B 1×2 لذا AB قابل انجام است. بنابراین داریم:

$$AB=\begin{pmatrix}2\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}_{2\times1}\begin{pmatrix}1 & \vdots & -1\end{pmatrix}_{1\times2}=\begin{pmatrix}2&-2\\0&0\end{pmatrix}_{2\times2}$$

مثال۵: اگر $AB=0$ **باشد کدام گزینه درست است؟**

۱) $\det B\det A=0$　۲) $A=0$　۳) $B=0$　۴) یا A یا B برابر با صفر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر $AB=0$ باشد لزوماً A و B صفر نیستند.

مثلاً برای $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

اما A و B صفر نیستند.

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

از طرفی داریم:

$$\det(AB)=\det(0)=0=\det A\times\det B$$

مثال۶: مولدهای گروه SU(2) در رابطه‌ی $[z^i,z^j]=iz^k$ **صدق می‌کنند که k و j و i ترتیب دوره‌ای را تشکیل می‌دهند. کدام گزینه درباره‌ی آنها درست است؟**

۱) همگی دترمینان صفر دارند.　۲) همگی رد صفر دارند.

۳) الزاماً ماتریس‌های 2×2 هستند.　۴) می‌توان هر سه را همزمان قطری کرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» زیرا $Tr[z^k]=-iTr([z^i,z^j])=-iTr(z^iz^j-z^jz^i)=-iTr(z^iz^j)+iTr(z^jz^i)=-iTr(z^iz^j)+iTr(z^iz^j)=0$

سایر گزینه‌ها غلط است. این مولدها نمایش ۳ بعدی هم دارند (نمایش‌های بالاتر). در ضمن اگر همگی قطری باشند در آن صورت همگی صفر می‌شوند، زیرا دو ماتریس قطری با هم جابه‌جا می‌شوند. از رابطه‌ی بنیادی داده شده در صورت سؤال، تمامی ماتریس‌ها صفر می‌شوند و این حالت متناظر با مولد گروه تک عضوی است و نه SU(2).

مثال۷: یک ماتریس $n\times n$ **متقارن، مفروض است که مجذور آن برابر ماتریس یکه است. حاصل جمع مجذور تمام درایه‌ها:**

۱) n^2　۲) n　۳) n^2-n　۴) n^2+n

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر ماتریس مدنظر را با A نمایش دهیم، $A^2=1$ است. لذا داریم:

$$Tr(A^2)=Tr(1)=n$$

حال می‌توان نوشت:

$$Tr(A^2)=\sum_{i,j}a_{ij}a_{ji}=\sum_{ij}(a_{ij})^2$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است که در قسمت آخر در رابطه‌ی فوق، از متقارن بودن استفاده شده است. یعنی $(a_{ij}=a_{ji})$

مثال۸: حاصل $Tr(A+\tilde{A})$**:**

۱) $Tr(A)$　۲) $2Tr(A)$　۳) $Tr(\tilde{A})$　۴) $\frac{1}{2}Tr(\tilde{A})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عناصر روی قطر اصلی A و $\tilde{A}$ برابر هستند. زیرا $\tilde{A}_{ii}=A_{ii}$ است و لذا $Tr(\tilde{A})=Tr(A)$ پس:

$$\mathrm{Tr}(A+\tilde{A})=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(\tilde{A})=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(A)=2\,\mathrm{Tr}(A)$$

مثال۹: تحت تبدیل یکانی:

۱) رد ناوردا باقی می‌ماند.   ۲) دترمینان ناوردا باقی نمی‌ماند.   ۳) رد صفر است.   ۴) دترمینان صفر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» زیرا داریم:

$$\mathrm{Tr}(UAU^\dagger)=\mathrm{Tr}(U^\dagger UA)=\mathrm{Tr}(A)$$

مثال۱۰: کدام گزینه درست است؟

۱) یک ماتریس هرمیتی، تحت تبدیل یکانی، هرمیتی می‌ماند.   ۲) اگر A و B هرمیتی باشند، AB هرمیتی است.

۳) اگر U هم یکانی و هم هرمیتی باشد، آنگاه $U=0$ است.   ۴) اگر U هم یکانی و هم هرمیتی باشد، آنگاه $U^2=0$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم. در گزینه‌ی (۱) اگر $A'=UAU^\dagger$ باشد:

$$A'^\dagger=(UAU^\dagger)^\dagger=(U^\dagger)^\dagger A^\dagger U^\dagger=UAU^\dagger=A'$$

در گزینه‌ی ۲ داریم:

$$(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger=BA$$

لذا تنها زمانی AB نیز هرمیتی است که $[A,B]=0$ باشد یا $AB=BA$. در گزینه (۳) مثال نقض ماتریس واحد است. در گزینه‌ی (۴) داریم از یکانی و هرمیتی بودن $U^2=1=UU^\dagger$ و لذا $U^2=0$ نیست و $U^2=1$ است. (راه دیگر مثال نقض به کمک ماتریس واحد است)

کروشه‌ی تعویض‌گر: کروشه‌ی تعویض‌گر دو ماتریس، به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$[A,B]=AB-BA$$

این کروشه در اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند:

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0$$

زیرا داریم:

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=[AB,C]-[BA,C]+[BC,A]-[CB,A]+[CA,B]-[AC,B]$$
$$=ABC-CAB-BAC+CBA+BCA-ABC-CBA+ACB+CAB-BCA-ACB+BAC=0$$

مثال۱۱: ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

با تشکیل $|A-\lambda I|=0$ که به **معادله‌ی سده‌ای** معروف است داریم:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-1)=0$$

با بسط نسبت به سطر آخر، به دست می‌آید: $\lambda=0,\pm1$

اینها ویژه مقادیر هستند. برای به دست آوردن فرم قطری ماتریس A بدون ادامه حل مسأله می‌توان یک ماتریس 3×3 را قطری شده A دانست که ویژه مقادیر عناصر روی قطر هستند. $A_D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ به این مسأله بازخواهیم گشت.

برای بدست آوردن ویژه بردارها از رابطه‌ی $(A-\lambda I)|r_i>=0$ داریم:

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}y-\lambda x\\ x-\lambda y\\ -\lambda z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

حال می‌توانیم به ازای مقادیر مختلف، λ، z,y,x را بیابیم و در نتیجه ویژه بردارها را معلوم کنیم.

$$\lambda=0\qquad A|r_i>0\ |r_i>\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=0(x)=0\\ x=0(y)=0\\ 0(z)=0(z)\end{cases}$$

$$<r_i|r_j>=0\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1\ \Rightarrow\ 0+0+z^2=1\Rightarrow z=\pm1$$

Z را برابر ۱+ انتخاب می‌کنیم، البته می‌توانستیم $z=-1$ را نیز جواب بگیریم. تفاوت بین ۱+ و ۱- در اختلاف فاز $e^{i\pi}$ است و در فیزیک اختلاف فاز هر چه باشد در نتیجه نهایی تأثیری ندارد.

به ازای $\lambda=0$، $z=1,x=0,y=0$ خواهد بود؛ لذا $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ ویژه بردار است. به همین ترتیب به ازای $\lambda=1$، $y-x=0\ ,\ z=0$ لذا $x=y$ است. برای به دست آوردن x و y می‌بایست، **شرط بهنجارش** را به کار ببریم. یعنی:

$$(x\quad x\quad 0)\begin{pmatrix}x\\ x\\ 0\end{pmatrix}=2x^2=1\ \to\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{لذا}\ <r|r>=1$$

بنابراین ویژه بردار متناظر با $\lambda=+1$، $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ است و به همین روش برای $\lambda=-1$ به دست می‌آید: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

مثال۱۲: برای یک ماتریس 2×2، دترمینان $\frac{1}{6}$ و رد $\frac{5}{6}$ است. مقادیر ممکن برای ویژه مقدارها:

۱) $-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$　　۳) $-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$　　۴) $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای یک ماتریس ۲×۲ داریم: شکل قطری به صورت زیر است $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ و لذا دترمینان $\lambda_1\lambda_2$ و رد $\lambda_1 + \lambda_2$ پس دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{6} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

با استفاده از $\lambda_2 = \frac{1}{6\lambda_1}$ برای λ_1 خواهیم داشت:

$$\lambda_1^2 - \frac{5}{6}\lambda_1 + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \frac{1}{2})(\lambda_1 - \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

البته بدون حل هم می‌توانستیم با جایگذاری گزینه‌ها، پاسخ را پیدا کنیم.

مثال۱۳: تانسور رتبه‌ی ۶ $T^{ijk\ell mn}$ در فضای ۷ بعدی، چند مؤلفه‌ی مستقل دارد به شرطی، که نسبت به هر زوج اندیس پادتقارنی باشد؟

۱) صفر   ۲) ۷   ۳) ۲۱   ۴) ۴۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» هیچ یک از دو اندیس T نمی‌توانند برابر باشند زیرا مثلاً، $T^{123456} = -T^{132456}$ است (به جهت پادتقارنی بودن). لذا تعداد مؤلفه‌ها برابر است با: $\binom{7}{6} = 7$

مثال۱۴: حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $(3i + j).(ij + 2ii - jj)$

۱) $6i - j$ ۲) 0 ۳) $ji - ii$ ۴) $6i + 2j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باید بردار $3i + j$ را از چپ ضرب داخلی کنیم.

$$(3i + j).(ij + 2ii - jj) = (3j + 6i) - j = 2j + 6i$$

مثال۱۵: تانسور مرتبه‌ی سوم $T_{\alpha\beta\gamma}$ که در رابطه‌ی $T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\beta\gamma\alpha} = T_{\gamma\alpha\beta}$ صدق می‌کند در ۵ بعد چند مؤلفه‌ی مستقل دارد؟

۱) ۳۵   ۲) ۴۵   ۳) ۵۵   ۴) ۶۵

☑ **پاسخ:** گزینه«۲» مسأله را در حالت کلی N بعد حل می‌کنیم. اگر هر سه اندیس متفاوت باشند، $\binom{N}{3}$ انتخاب اندیس رخ می‌دهد، اما هر یک از انتخاب‌ها به دو حالت مجزا منجر خواهد شد؛ مثلاً اگر ۱۲۳ انتخاب شود:

$$T_{123} = T_{312} = T_{231} \qquad T_{132} = T_{213} = T_{321}$$

و $T_{132} \neq T_{123}$ (در حالت کلی)، بنابراین $2\binom{N}{3}$ حالت از اینجا بدست می‌آید. حال اگر دو اندیس از ۳ اندیس یکسان باشند، آنگاه $\binom{N}{2}$ انتخاب داریم که هر یک به دو حالت مجزا منجر خواهند شد و در حقیقت ترتیب انتخاب مهم است؛ زیرا اگر به عنوان مثال ۲ و ۱ را انتخاب کنیم بدست می‌آید:

$$T_{112} = T_{121} = T_{211}$$

و اگر ۲ و ۱ را انتخاب کنیم بدست می‌آید:

$$T_{221} = T_{212} = T_{122}$$

در نهایت اگر سه اندیس یکسان باشند N حالت داریم؛ پس تعداد حالات کلی برابر است با:

$$2\binom{N}{3} + 2\binom{N}{2} + N = \frac{N(N-1)(N-2)}{3} + N(N-1) + N$$

که به ازای $N = 5$ داریم:

$$\frac{1}{3}(5)(4)(3) + (5 \times 4) + 5 = 45$$

مثال۱۶: کدام یک از گزینه‌های ذیل صحیح است؟

۱) $\det(-A)=\det A$

۲) برای هر سه ماتریس مفروض اگر جابجاگر اولی و سومی و جابجاگر اولی و دومی صفر باشد، آنگاه جابجاگر اول با حاصل جابجاگر دومی و سومی صفر است.

۳) $\det C=\det A+\det B$ اگر که $C=A+B$

۴) اگر $C=AB$، آنگاه $trC=trA+trB$

پاسخ: گزینه «۲» گزینه۱: غلط است؛ زیرا اگر تمامی درایه‌های ماتریس در ۱− ضرب شود، دترمینان در $(-1)^n$ ضرب خواهد شد که n تعداد سطر و یا ستون آن است.

گزینه ۲: اگر ماتریس اول را با A ، ماتریس دوم را B و ماتریس سوم را C نشان دهیم، آنگاه $[A,C]=0$ و $[A,B]=0$ است و از دستور ژاکوبی خواهیم داشت: $[A,[B,C]]=[B,[A,C]]-[C,[A,B]]=0-0=0$

گزینه ۳: این گزینه غلط است؛ به عنوان مثال نقض اگر $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ باشد، آنگاه $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ است و $\det A=0\ ,\ \det B=0$ است، ولی $\det C=1$ که اشتباه است.

گزینه ۴: این گزینه هم غلط است؛ اگر $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ باشد، آنگاه $C=AB=0$ ولی $tr(A)=1$ و $tr(B)=1$ اما $trC=0$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۷: کدام گزینه غلط است؟

۱) اگر جمع‌زنی دوگانه‌ی $K_{ij}A_iB_j$ برای هر دو بردار A_i و B_j ناوردا باشد، K_{ij} قطعاً تانسوری مرتبه‌ی دوم است.

۲) تانسور خمش مرتبه‌ی چهارم چهار بعدی ریمان ـ کریستوفل R_{iklm} دارای ۲۱ مؤلفه‌ی مستقل است.

۳) اگر مؤلفه‌های تانسوری از هر مرتبه در یک دستگاه مختصات صفر شوند، این مؤلفه‌ها در هر دستگاه دیگر صفر هستند.

۴) یک تانسور مرتبه‌ی دوم همسانگرد در فضای سه بعدی باید مضربی از δ_{ij} باشد.

پاسخ: گزینه «۲» به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه ۱: این گزینه طبق قاعده‌ی خارج قسمت صحیح است.

گزینه ۲: این تانسور در رابطه‌ی $-R_{kilm}=R_{iklm}=-R_{ikml}$ صدق می‌کند که تعداد مؤلفه‌ها را از ۲۵۶ به ۳۶ کاهش می‌دهد. همچنین شرط $R_{iklm}=R_{lmik}$، این تعداد را به ۲۱ کاهش می‌دهد و شرط $R_{iklm}+R_{ilmk}+R_{imkl}=0$ تعداد را به ۲۰ کاهش می‌دهد؛ لذا این تانسور ۲۰ مؤلفه‌ی مستقل دارد و گزینه‌ی ۲ غلط است.

گزینه ۳: اگر مؤلفه‌های تانسور در دستگاه اول صفر باشند در هر دستگاه دیگر پریم‌دار داریم:

$$A'^{ijkl\dots}=\frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\frac{\partial x'^k}{\partial x^p}\frac{\partial x'^l}{\partial x^q}\dots A^{mnpq\dots}$$

بنابراین به طور واضح در هر دستگاه دیگر نیز هر مؤلفه صفر است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۸: برای $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ حاصل LnA کدام است؟

۱) $Ln\sqrt{3}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ ۲) $Ln\sqrt{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ ۳) $Ln\sqrt{3}I_{2\times2}$ ۴) $Ln\sqrt{3}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

پاسخ: گزینه «۴» بهترین راه استفاده از قضیه کیلی ـ هامیلتون است. اگر A یک ماتریس دو در دو باشد، آنگاه برای هر $f(A)$ تحلیلی داریم:

$$f(A)=a+bA$$

که a و b در دستگاه ذیل برای ویژه مقادیر λ_1و λ_2 ماتریس A صدق می‌کنند:

$$f(\lambda_1)=a+b\lambda_1\ ,\ f(\lambda_2)=a+b\lambda_2$$

برای به دست آوردن ویژه مقادیر:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-2)^2-1=0\to\lambda=\begin{cases}3\\1\end{cases}$$

بنابراین اگر $\ln A = a + bA$ باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} a + 3b = \ln 3 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه $(\ln A = a + bA)$ داریم:

$$b = \ln\sqrt{3} \qquad a = -\ln\sqrt{3}$$

در نتیجه:

$$\ln A = -\ln\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ln\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \ln\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال۱۹: ماتریس‌های ۴×۴ دیراک به صورت γ^μ و $\mu = 0,1,2,3$ نشان داده می‌شوند که در رابطه‌ی $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}I_{4\times4}$ صدق می‌کنند که $I_{4\times4}$ ماتریس واحد ۴×۴ و $1 = +g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33}$ و باقی عناصر $g^{\mu\nu}$ صفر است. کدام یک از روابط ذیل غلط است؟

۱) $4g^{\mu\nu} = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$

۲) $(\det(\gamma^0)^2) = -(\det(\gamma^i)^2) = 1$

۳) $\{\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\sigma\} = 2g^{\rho\sigma}\gamma^\mu$

۴) $[\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\sigma] = 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I_{4\times4}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}\underbrace{\mathrm{Tr}(I_{4\times4})}_{4} \Rightarrow \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} \Rightarrow \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}8g^{\mu\nu} = 4g^{\mu\nu}$$

گزینه ۲:

$$\det(\gamma^\mu\gamma^\nu) + \det(\gamma^\nu y^\mu) = 2g^{\mu\nu}\det I_{4\times4}$$

با در نظر گرفتن $\mu = \nu$ خواهیم داشت:

$$2(\det\gamma^\mu)^2 = 2g^{\mu^2}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$(\det\gamma^0)^2 = 1\ ,\ (\det\gamma^1)^2 = (\det\gamma^2)^2 = (\det\gamma^3)^2 = -1$$

گزینه ۴:

$$[A, BC] = ABC - BCA = (AB + BA)C - B(CA + AC) = \{A, B\}C - B\{A, C\}$$

لذا با نتایج حاصل از بررسی گزینه ۲ داریم:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\sigma] = \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\sigma - \gamma^\rho\{\gamma^\mu, \gamma^\sigma\} = 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho$$

در نتیجه گزینه ۳ اشتباه است زیرا:

$$2g^{\rho\sigma}\gamma^\mu = \{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\}\gamma^\mu = \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu \neq \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\sigma\} = \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu$$

مثال۲۰: اگر $A = \begin{pmatrix} \pi & -i \\ \frac{\pi^2}{4}i & \pi \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه $\sin A$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2i}{\pi} \\ -\frac{\pi i}{2} & 0 \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{2i}{\pi} \\ -\frac{\pi i}{2} & -2 \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2i}{\pi} \\ \frac{\pi i}{2} & 0 \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2i}{\pi} \\ -\frac{\pi i}{2} & 2 \end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بهترین راه حل استفاده از نتیجه‌ی قضیه کیلی هامیلتون است. اگر A یک ماتریس $n \times n$، λ_i ، n مقادیر ویژه این ماتریس باشند، آنگاه اگر $f(A) = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i A^i$ باشد به ازای هر ویژه مقدار λ خواهیم داشت.

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n=1}\alpha_i\lambda^i$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را می‌یابیم:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \pi - \lambda & -i \\ \frac{\pi^2 i}{4} & \pi - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3\pi}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حال اگر $\sin A = a + bA$ باشد، با جایگذاری مقادیر ویژه، دستگاهی می‌یابیم که a و b را می‌توان از روی آن یافت.

$$\lambda_1 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -1 = a + \frac{3\pi}{2}b \quad , \quad \lambda_2 = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) + 1 = a + \frac{\pi}{2}b \Rightarrow a = 2 \quad b = -\frac{2}{\pi} \qquad (1)$$

حال با جایگزین کردن روابط (۱) در معادله $\sin A = a + bA$ داریم:

$$\sin A = a + bA = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\pi}\begin{pmatrix} \pi & -i \\ \frac{\pi^2 i}{4} & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2i}{\pi} \\ -\frac{\pi i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

مثال۲۱: یک ماتریس پادهرمیتی است. کدام گزینه اشتباه است؟

۱) حداقل یک ویژه مقدار این ماتریس صفر است.
۲) ویژه بردارهای مربوط به ویژه مقادیر متفاوت ممکن است متعامد نباشند.
۳) رد این ماتریس موهومی محض و یا صفر است.
۴) این ماتریس یک ماتریس نرمال است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یک ماتریس پاد هرمیتی ماتریسی است که $A^{\dagger}=-A$ می‌باشد. حال اگر این ماتریس با همیوغ هرمیتی خود جابجا شود $[A,A^{+}]=0$ است؛ لذا این ماتریس یک ماتریس نرمال است. ویژه مقادیر این ماتریس یا صفر و یا موهومی محض هستند و چون رد این ماتریس برابر با جمع ویژه مقادیر است پس رد نیز موهومی محض است و یا در حالتی ممکن است صفر هم باشد، ولی از این دو حال خارج نیست. گذشته از این دترمینان هم ضرب ویژه مقادیر است که چون آشکارا صفر است، پس یک ویژه مقدار حداقل صفر است. لذا گزینه‌ی ۲ نادرست است.

مثال۲۲: در نظریه‌ی نسبت عام نیاز به محاسبه‌ی عباراتی نظیر $\dfrac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}$ است که $g_{\mu\nu}$ متریک فضازمان (تانسور متقارن مرتبه‌ی دوم) و g دترمینان شکل ماتریس این متریک است. مقدار این عبارت برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}g\,g^{\mu\nu}$
۲) $-\frac{1}{2}g\,g^{\mu\nu}$
۳) $\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}$
۴) $-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای یک ماتریس نظیر M داریم:

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Ln}M)=\mathrm{Ln}(\det M)$$

با وردش‌گیری نسبت به M بدست می‌آید:

$$\mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)=\frac{1}{\det M}\delta\det M$$

حال اگر $\det M=g^{-1}$ و $M=g^{\mu\nu}$ باشد، با جایگذاری بدست می‌آید:

$$g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}=g\delta g^{-1}\ \Rightarrow\ \delta g^{-1}=\frac{1}{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\qquad(1)$$

با استفاده از روابط δ و ساده‌سازی داریم:

$$\delta\sqrt{-g}=\delta(-g^{-1})^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}(-g^{-1})^{-\frac{3}{2}}\delta(+g^{-1})\qquad(2)$$

با جایگزینی رابطه (۱) در رابطه (۲) می‌توان نوشت:

$$\delta(\sqrt{-g})=-\frac{1}{2}(-g)^{\frac{3}{2}}\delta g^{-1}=-\frac{1}{2}(-g)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

حال با ساده‌سازی و مرتب‌سازی داریم:

$$\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}$$

مثال۲۳: تعداد مؤلفه‌های مستقل تانسور $T_{\alpha\beta\delta\gamma}$ در ۱۱ بعد چقدر است اگر که عناصر این تانسور در رابطه‌ی $T_{\alpha\beta\delta\gamma}=-T_{\delta\gamma\alpha\beta}$ صدق نمایند؟

۱) ۰
۲) ۷۲۴۹
۳) ۷۲۶۰
۴) $(۱۲۱۰)^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این تانسور نسبت به جابجا ساختن ۲ اندیس اول با دو اندیس آخرش پاد متقارن است. تعداد اندیس‌های مستقل که به جای $\alpha\beta$ در $T_{\alpha\beta\delta\gamma}$ قرار می‌گیرند برابر با: $۱۲۱=۱۱^2$ است و همچنین ۱۲۱ حالت نیز برای $\delta\gamma$ ممکن است.

لذا می‌توان تعداد مؤلفه‌های این تانسور را با تعداد مؤلفه‌های تانسور کاملاً پاد متقارن G_{ab} برابر گرفت که هر یک از a و b می‌توانند ۱۲۱ حالت مختلف داشته باشند. تعداد این مؤلفه‌ها برابر است با: $(n=121)$:

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{121\times120}{2}=7260$$

مثال۲۴: کدام یک از ماتریس‌های R ذیل با ضرب $R^{\dagger}AR$ ماتریس $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ را قطری می‌کند؟

۱) $R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$
۲) $R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&\sqrt{2}&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
۳) $R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-1&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$
۴) $R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا معادله‌ی ویژه مقداری را حل و ویژه مقادیر را می‌یابیم:

$$|A-\lambda I|=0\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow -\lambda^3+\lambda=0\Rightarrow \lambda(1-\lambda^2)=0\Rightarrow \lambda_1=0\,,\ \lambda_2=1\,,\ \lambda_3=-1$$

حال به محاسبه بردار ویژه و رابطه‌های بین x، y و z می‌پردازیم:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\z=0\end{cases}$$

بنابراین برای $\lambda=-1$ می‌توانیم بردار ویژه بهنجار را محاسبه کنیم:

$$|r_1>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

حال برای $\lambda=0$ داریم:

$$y=0\quad,\quad x=0\Rightarrow |r_2>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

همچنین برای $\lambda=1$ با بهنجار کردن ویژه بردار داریم:

$$x=y\quad,\quad z=0\Rightarrow |r_3>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

بنابراین با توجه به اینکه ماتریس $R=(|r_1>\ \ |r_2>\ \ |r_3>)$ با ضرب $R^\dagger AR$، A را قطری می‌کند خواهیم داشت:

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

روش دوم: ماتریس قطری‌ساز نباید دارای دترمینان صفر و یا مثبت باشد، از این رو پاسخ گزینه ۴ است.

مثال۲۵: اگر $A_{ijk...}$ تانسوری از مرتبه n باشد، آنگاه $\sum\frac{\partial A_{ijk...}}{\partial x_k}$ ....

۱) در هر دستگاه مختصاتی، تانسوری از مرتبه $n-1$ است.
۲) در هر دستگاه مختصاتی، تانسوری از مرتبه $n+1$ است.
۳) در دستگاه مختصات دکارتی، تانسوری از مرتبه $n-1$ است.
۴) تانسوری از مرتبه n می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به‌طور کلی مشتق‌گیری از یک تانسور مرتبه n ام آن‌را به یک تانسور مرتبه $(n+1)$ام تبدیل می‌کند، چون در این صورت تحت تبدیل مختصات داریم:

$$\frac{\partial A'_{ijk...}}{\partial x'_m}=\overbrace{\frac{\partial x'_i}{\partial x_n}\frac{\partial x'_j}{\partial x_p}\frac{\partial x'_k}{\partial x_q}\cdots\frac{\partial x_r}{\partial x'_m}}^{n+1\ \text{مرتبه}}\frac{\partial A_{npq...}}{\partial x_r}$$

اگر $m=k$ قرار گیرد، آن‌گاه دو ضریب تبدیل مختصات از تعداد $(n+1)$ ضریب اولیه کاسته می‌شود و داریم:

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_q}\times\frac{\partial x_r}{\partial x'_k}=\frac{\partial x_r}{\partial x_q}=\delta^r_q$$

$$\frac{\partial A'_{ijk...}}{\partial x'_k}=\overbrace{\frac{\partial x'_i}{\partial x_n}\frac{\partial x'_j}{\partial x_p}\cdots}^{(n-1)\ \text{مرتبه}}\frac{\partial A_{npq...}}{\partial x_q}$$

پس تانسور حاصل، تانسوری از مرتبه $(n-1)$ است.

همچنین می‌توانستیم از ابتدا درنظر بگیریم که مشتق‌گیری، یک مرتبه به رتبه تانسور اضافه می‌کند؛ یعنی در ابتدا رتبه تانسور از n به $n+1$ افزایش می‌یابد؛ اما عمل ادغام که بواسطه آن، دو اندیس برابر هم قرار داده می‌شوند، موجب کاهش مرتبه تانسور به میزان ۲ رتبه می‌شود، یعنی از $n+1$ به $n-1$.

در اینجا لازم به یادآوری است که $\frac{\partial A^{ij...}_{k\ell...}}{\partial x_m}$ در دستگاه‌های مختصات غیر دکارتی، به‌صورت یک تانسور رفتار نمی‌کند، چون به عنوان نمونه داریم:

$$\frac{\partial A'^{ij...}_{k\ell...}}{\partial x'_m}=\frac{\partial}{\partial x'_m}\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\frac{\partial x'_j}{\partial x_n}\cdots\frac{\partial x_p}{\partial x'^k}\frac{\partial x_q}{\partial x'^\ell}\cdots A^{mn...}_{pq...}\right)$$

حاصل اثر $\frac{\partial}{\partial x'_m}$ بر مشتقات دیفرانسیلی $\frac{\partial x_p}{\partial x'_k}$ دیگر برخلاف دستگاه‌های دکارتی، غیر صفر است $\frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_k\partial x'_m}\neq 0$. پس تنها گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

مثال۲۶: حاصل کدامیک از دترمینان‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$　　۲) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$　　۳) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$　　۴) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **طبق تعریف دترمینان:**

الف) اگر دترمینانی دو سطر یا دو ستون مساوی داشته باشد حاصل آن صفر است.

ب) اگر همه عناصر یک سطر یا همه عناصر یک ستون در دترمینانی مساوی صفر باشد حاصل آن صفر است.

ج) اگر همه عناصر یک سطر یا همه عناصر یک ستون دترمینان را در یک مقدار ثابت ضرب کنیم خود دترمینان در آن مقدار ثابت ضرب می‌شود.

د) اگر به عناصر یک سطر مضربی از عناصر یک سطر دیگر (ستون به ستون) اضافه کنیم یا به عناصر یک ستون مضربی از عناصر ستون دیگری را (سطر به سطر) بیفزاییم، مقدار دترمینان تغییری نمی‌کند.

بهتر است این چهار قانون را در مورد دترمینان‌ها به‌خاطر بسپاریم.

گزینه (۴) به این دلیل نادرست است که سطر سوم، مضربی از سطر اول نیست.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۷: رابطه $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ تنها هنگامی برقرار است که برای ماتریس‌های A و B داشته باشیم:

۱) $[A,B]=0$　　۲) $\{A,B\}=0$　　۳) $A=\frac{B}{2}$　　۴) $B=\frac{A}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف قاعده ضرب ماتریسی، ضرب ماتریس‌ها ویژگی توزیع‌پذیری دارد، پس داریم:

$$(A+B)(A-B)=A(A-B)+B(A-B)=AA-AB+BA-BB=A^2-AB+BA-B^2$$

کروشه جابه‌جاگر ماتریس‌های A و B به‌صورت مقابل تعریف می‌شود: $[A,B]=AB-BA$

و داریم: $A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2-(AB-BA)=A^2-B^2-[A,B]$

که اگر $[A,B]=0$ باشد، رابطه مورد نظر برقرار خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۸: عملگر $A(t+\varepsilon,t)$ تغییرات تابع موج از t تا $t+\varepsilon$ را توصیف می‌کند. به ازای ε حقیقی و آنقدر کوچک که بشود از ε صرفنظر کرد داریم:

$$A(t+\varepsilon,t)=1-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)$$

شرط لازم و کافی برای اینکه A عملگری یکانی باشد آن است که:

۱) $H=H^{-1}$　　۲) $\det|H|=1$　　۳) $H=H^{\dagger}$　　۴) $\det|H|=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق تعریف عملگری یکانی است که ترانهاده آن عملگر با وارون آن برابر باشد، یعنی $A^{\dagger}=A^{-1}$ و $AA^{\dagger}=1$

پس برای اینکه عملگر A دارای این ویژگی باشد باید داشته باشیم:

$$A\times A^{\dagger}=(1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}H(t))(1+\frac{i\varepsilon}{\hbar}H^{\dagger}(t))=1+\frac{i\varepsilon}{\hbar}H^{\dagger}(t)-\frac{i\varepsilon}{\hbar}H(t)+\frac{1\varepsilon^2}{\hbar^2}HH^{\dagger}\simeq 1+\frac{i\varepsilon}{\hbar}H^{\dagger}(t)-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)$$

با چشم‌پوشی از جملات مرتبه ε^2 و بالاتر خواهیم داشت:

$$AA^{\dagger}=1+\frac{i\varepsilon}{\hbar}(H^{\dagger}(t)-H(t))$$

شرط لازم و کافی برای اینکه $AA^{\dagger}=1$ شود، این است که $\det H^{\dagger}=H$ و این به معنی آن است که عملگر H باید عملگری هرمیتی باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۹: ویژه مقدارهای ماتریس روبرو را بیابید: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

۱) $\frac{1/1\pm\sqrt{5}}{2}$　　۲) $+1,-1,-1$　　۳) $1,1$　　۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه«۱» برای به‌دست آوردن ویژه مقادیر یک ماتریس باید معادله مشخصه را تشکیل دهیم، یعنی: $\det|A-\lambda 1|=0$

ریشه‌های حاصل از این دترمینان همان ویژه مقادیر ماتریس A به‌شمار می‌روند. در مورد این ماتریس داریم:

$$|A-\lambda 1|=0 \Rightarrow A-\lambda 1=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)-1)=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda=1 \quad , \quad \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

مثال۳۰: یکی از ویژه بردارهای بهنجار ماتریس $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ را بیابید.

۱) $(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$ ۲) $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$ ۳) $(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},0)$ ۴) $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\sqrt{2})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف، ویژه مقادیر یک ماتریس از مساوی قرار دادن دترمینان سده‌ای حاصل می‌شود.

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)((1-\lambda)^2-1)$$

$$=(1-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-1)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda=0,1,2$$

اکنون معادله ویژه مقداری $(A-\lambda I)|r>=0$ به ازای $\lambda=0$ بدست می‌آید:

$$(1\lambda-A)v=0 \xrightarrow{\lambda=0} Av=0 \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0 \to \begin{cases}x=0\\ y+z=0\end{cases}$$

یکی از ویژه بردارهایی که بهنجار نیز می‌باشد عبارت است از: $(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

مثال۳۱: اگر $A_{ijk\ldots}$ تانسوری از مرتبه n باشد، آن‌گاه در دستگاه مختصات دکارتی $\frac{\partial^2 A_{ijk\ldots}}{\partial x_i \partial x_k}$ از مرتبه .... است.

۱) $n-2$ ۲) $n-1$ ۳) $n+1$ ۴) $n+2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در حساب تانسوری، اگر یکی از اندیس‌های پادوردایی یک تانسور برابر با اندیس هموردایی از همان تانسور قرار گیرد به علت قاعده ادغام، یک مرتبه از مرتبه تانسور کم می‌شود.

در مورد این تست اندیس‌های i و k در تانسور، مساوی اندیس‌های i و k در مشتق قرار داده شده‌اند موجب می‌شود مرتبه تانسور به اندازه دو مرتبه کاهش یابد.

مثال۳۲: اگر ماتریس A و B به‌صورت‌های زیر تعریف شده باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب‌های $\vec{A}\times\vec{B}$ و $\vec{B}\times\vec{A}$ به ترتیب کدامند؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

۱) $\begin{pmatrix}6 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}2 & 9\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}6 & 6\\ 9 & 9\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 4 & 10 & 6\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$ ۴) تعریف نشده و $\begin{pmatrix}6 & 6\\ 9 & 9\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از ضرب خارجی دو بردار داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6\\9&9\end{pmatrix}\quad,\quad B_{3\times2}\times A_{2\times3}=C_{3\times3}=\begin{pmatrix}2&5&3\\4&10&6\\2&5&3\end{pmatrix}$$

مثال۳۳: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}2&4&3\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}$ **را محاسبه کنید.**

۱) 0　　۲) $+5$　　۳) -4　　۴) -5

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به تعریف دترمینان عمل می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}2&4&3\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-2(2-1)+0+3(1-2)=-2-3=-5$$

قابل ذکر است که دترمینان دوم به دلیل مساوی شدن دو سطر از آن صفر می‌شود.

مثال۳۴: نسبت تعداد مؤلفه‌های مستقل یک تانسور مرتبه‌ی ۳ متقارن به یک تانسور مرتبه‌ی ۳ پادتقارن برابر با ۲ است. ابعاد فضا برابر است با:

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۴　　۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تعداد ابعاد فضا را N در نظر می‌گیریم. از این رو تعداد مؤلفه‌های یک تانسور مرتبه‌ی ۳ متقارن برابر است با:

$$\binom{N}{3}+N=\frac{N!}{(N-3)!3!}+N=\frac{N(N-1)(N-2)}{6}+N=\frac{N^3-3N^2+2N}{6}+N=\frac{N^3-3N^2+8N}{6}\qquad(1)$$

تعداد مؤلفه‌های مستقل یک تانسور مرتبه‌ی ۳ پادمتقارن برابر است با:

$$\binom{N}{3}=\frac{N^3-3N^2+2N}{6}\qquad(2)$$

بنابراین نسبت روابط (۱) و (۲) برابر با $\frac{N^3-3N^2+8N}{N^3-3N^2+2N}$ است که باید برابر با ۲ باشد پس:

$$N^3-3N^2+8N=2N^3-6N^2+4N\quad(3)$$

از این رو با ساده‌سازی رابطه (۳) بدست می‌آید:

$$N^3-3N^2-4N=N(N^2-3N-4)=N(N-4)(N+1)=0$$

مثال۳۵: هر تانسور مرتبه‌ی دوم کلی در سه بعد ....

۱) تحویل‌پذیر است و می‌توان آن را بر حسب یک اسکالر، یک شبه‌بردار و یک تانسور مرتبه‌ی ۲ متقارن با رد صفر نوشت.
۲) تحویل‌پذیر است و می‌توان آن را بر حسب دو اسکالر، یک شبه‌بردار و یک تانسور مرتبه‌ی ۲ متقارن نوشت.
۳) تحویل‌پذیر است و می‌توان آن را بر حسب یک اسکالر، یک بردار و یک تانسور مرتبه‌ی ۲ متقارن با رد صفر نوشت.
۴) تحویل‌ناپذیر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یک تانسور مرتبه‌ی ۲ به طور کلی تحویل‌ناپذیر است و می‌توان آن را بر حسب تانسورهای با مرتبه‌ی پایین‌تر بازنویسی کرد. اگر این تانسور را A_{ij} در نظر بگیریم، آن‌گاه A_{ii} رد آن کمیت اسکالر است که با A نمایش داده می‌شود. از طرفی می‌توان جزء پادمتقارن A را به صورت $c_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}-\bar{A}_{ji})$ تشکیل داد که می‌دانیم هر تانسور پادمتقارن در سه بعد متناظر با یک شبه بردار است؛ لذا این جزء معادل یک شبه بردار خواهد بود. آنچه باقی می‌ماند یک جزء متقارن است که رد تانسور از آن کاسته شده است یعنی:

$$D_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})-\frac{1}{3}A\delta_{ij}$$

این یک تانسور متقارن بدون رد است لذا دارای $\frac{3\times4}{2}-1$ مؤلفه است. بنابراین می‌توان A_{ij} را به صورت ذیل نوشت:

$$A_{ij}=\frac{1}{3}A\delta_{ij}+c_{ij}+D_{ij}$$

که A اسکالر است و c_{ij} معادل یک شبه بردار و D_{ij} یک تانسور متقارن بدون رد است.

مثال۳۶: یک ماتریس ۴×۴ به صورت $\begin{pmatrix} O_{2\times 2} & A \\ B & O_{2\times 2} \end{pmatrix}$ است که A و B دو ماتریس ۲×۲ هستند. دترمینان این ماتریس برابر است با:

۱) $+\det A \det B$ ۲) $-\det A \det B$ ۳) $+(\det A + \det B)$ ۴) $-(\det A + \det B)$

پاسخ: گزینه «۱» اگر $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ در نظر بگیریم آن‌گاه:

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با بسط نسبت به سطر اول بدست می‌آید:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{21} \\ b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \end{vmatrix}$$

دو دترمینان بدست آمده را نیز بر حسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

بنابراین حاصل دترمینان برابر است با:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A \det B$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۷: اگر A و B دو ماتریس هرمیتی و C یک ماتریس پادهرمیتی باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $[C,[A,B]]$ و $[B,[A,C]]$ هر دو هرمیتی هستند. ۲) $[C,[A,B]]$ و $[B,[A,C]]$ هر دو پادهرمیتی هستند.

۳) $[C,[A,B]]$ پادهرمیتی و $[B,[A,C]]$ هرمیتی است. ۴) $[C,[A,B]]$ هرمیتی و $[B,[A,C]]$ پادهرمیتی است.

پاسخ: گزینه «۲» اگر A و B هرمیتی و C پادهرمیتی باشد آن‌گاه:

$$[A,B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A,B]$$

بنابراین $[A,B]$ پادهرمیتی است و خواهیم داشت:

$$[C,[A,B]]^\dagger = (C[A,B] - [A,B]C)^\dagger = [A,B]^\dagger C^\dagger - C^\dagger [A,B]^\dagger$$

با استفاده از پادهرمیتی بودن $[A,B], C$ می‌توان نوشت:

$$[C,[A,B]]^\dagger = [A,B]C - C[A,B] = -[C,[A,B]]$$

لذا $[C,[A,B]]$ پادهرمیتی است و از طرفی برای $[A,C]$ داریم:

$$[A,C]^\dagger = (AC - CA)^\dagger = C^\dagger A^\dagger - A^\dagger C^\dagger = -CA + AC = [A,C]$$

پس $[A,C]$ هرمیتی است و داریم:

$$[B,[A,C]]^\dagger = (B[A,C] - [A,C]B)^\dagger = [A,C]^\dagger B^\dagger - B^\dagger [A,C]^\dagger$$

با استفاده از هرمیتی بودن B و $[A,C]$ خواهیم داشت:

$$[B,[A,C]]^\dagger = [A,C]B - B[A,C] = -[B,[A,C]]$$

در نتیجه $[B,[A,C]]$ پادهرمیتی است و گزینه ۲ درست است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۸: ماتریس A، ۱۳۹۱×۱۳۹۱ بعدی بوده و دارای درایه‌هایی به شکل $A_{ij} = \sqrt{i+j}$ است. حاصل $Tr(A\tilde{A})$ برابر است با؟

۱) 1392×1391^2 ۲) 696×1391^2 ۳) 1390×1391^2 ۴) 659×1391^2

پاسخ: گزینه«۱» ابتدا به رد داده شده توجه می‌کنیم. داریم:

$$Tr(A\tilde{A}) = \sum_i (A\tilde{A})_{ii} = \sum_{i,j} A_{ij}\tilde{A}_{ji} = \sum_{i,j} A_{ij}A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ij}^2$$

که در آن از خاصیت ترانهاده $\tilde{A}_{ij} = A_{ji}$ استفاده شده است. حال با توجه به درایه‌ی داده شده داریم:

$$Tr(A\tilde{A}) = \sum_i A_{ij}^2 = \sum_{i,j}(i+j)$$

بنابراین جمع‌بندی از ۱ تا $n=1391$ صورت می‌پذیرد. با استفاده از خواص مقدماتی سری می‌توان نوشت:

$$\mathrm{Tr}(A\tilde{A})=\sum_{i,j} i+\sum_{i,j} j=n\sum_{i=1}^{n} i+n\sum_{j=1}^{n} j=n\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{(n+1)n}{2}=n^2(n+1)$$

که در آن از رابطه جمع‌بندی مقابل استفاده شده است: $\sum_{m=1}^{n} m=\frac{n(n+1)}{2}$

لذا خواهیم داشت: $\mathrm{Tr}(A\tilde{A})=1391^2(1391+1)=1392\times 1391^2$

مثال۳۹: برای یک ماتریس ۳×۳ اگر ویژه مقادیر λ_1، λ_2 و λ_3 باشند و رد ماتریس برابر با ۲، رد وارون آن برابر با ۱ و دترمینان آن برابر با ۱ باشد، حاصل $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم. $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+2\lambda_1\lambda_3+2\lambda_2\lambda_3+2\lambda_1\lambda_2$

اما می‌دانیم $\mathrm{Tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ و $\det A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ است و اگر در حالت قطری A، $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ روی قطر اصلی باشند. وارون A (A^{-1}) دارای عناصر $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3}$ روی قطر اصلی خواهد بود لذا: $\mathrm{Tr}A^{-1}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}$

حال داریم: $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2=(\mathrm{Tr}A)^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3})$

با توجه به توضیحات داده شده می‌توان نوشت: $(\mathrm{Tr}A)^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+2\det A\,\mathrm{Tr}A^{-1}$

بنابراین خواهیم داشت: $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=(\mathrm{Tr}A)^2-2\det A\,\mathrm{Tr}A^{-1}=(2)^2-2\times1\times1=2$

مثال۴۰: تانسور $T_{\alpha\beta\delta\gamma}$ با شروط اینکه الف: نسبت به دو اندیس آخر پادتقارنی است. ب: غیرصفر است اگر $\alpha>\beta$ باشد در فضای ۴ بعدی چند مؤلفه‌ی مستقل غیرصفر دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۵۴ ۴) ۹۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه تانسور مذکور نسبت به دو اندیس آخر پادتقارنی است، لذا تعداد حالات برای این دو اندیس برابر با $\binom{4}{2}$ است:

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{(4-2)!2!}=\frac{4\times3}{2}=6$$

همچنین چون می‌بایست $\alpha>\beta$ باشد، بنابراین تنها حالات ذیل ممکن خواهد بود.

α	β	
۴	۱,۲,۳	$\Rightarrow$ ۳ حالت
۳	۱,۲	$\Rightarrow$ ۲ حالت
۲	۱	$\Rightarrow$ ۱ حالت

و لذا در مجموع $6=1+2+3$ حالت برای دو اندیس اول ممکن است و بنابراین تعداد کل حالات برای تانسور داده شده برابر است با: $6\times6=36$

مثال۴۱: اگر A_{ij} یک تانسور پادمتقارن باشد $V_k=\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}A_{ij}$ تعریف شود که ε_{ijk} نماد لوی ـ چی‌ویتا است آن‌گاه A_{ij} برابر است با:

۱) $\varepsilon_{jik}V_k$ ۲) $3\varepsilon_{jik}V_k$ ۳) $\varepsilon_{ijk}V_k$ ۴) $3\varepsilon_{ijk}V_k$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با ضرب طرفین رابطه $V_k=\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}A_{ij}$ در ε_{pqk} و جمع‌بندی روی k به دست می‌آید: $\varepsilon_{pqk}V_k=\frac{1}{3!}\varepsilon_{pqk}\varepsilon_{ijk}A_{ij}$

از طرفی می‌دانیم که: $\varepsilon_{pqk}\varepsilon_{ijk}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}$

بنابراین خواهیم داشت:
$$\varepsilon_{pqk}V_k=\frac{1}{3!}(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})A_{ij}=\frac{1}{3!}(A_{pq}-A_{qp})$$

اما از طرفی دیگر با توجه به پادتقارن بودن A_{ij}، می‌دانیم که $A_{pq}=-A_{qp}$ است لذا:
$$\varepsilon_{pqk}V_k=\frac{1}{3!}(A_{pq}+A_{pq})=\frac{2}{3!}A_{pq}=\frac{1}{3}A_{pq}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:
$$A_{ij}=3\varepsilon_{ijk}V_k$$

مثال۴۲: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&3&-1&0\\1&4&0&2\\5&-1&1&4\end{bmatrix}$ **برابر است با:**

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه دترمینان ماتریس A داریم:
$$\det A=1\times\begin{vmatrix}3&-1&0\\4&0&2\\-1&1&4\end{vmatrix}+0+0+0$$

حال به محاسبه ماتریس ۳×۳ که از حذف سطر و ستون اول ماتریس A حاصل شده می‌پردازیم:
$$\det A=\det\begin{bmatrix}3&-1&0\\4&0&2\\-1&1&4\end{bmatrix}=(0+2+0)-(0-16+16)=2+10=12$$

مثال۴۳: برای مختصات استوانه‌ای با متریک $ds^2=\lambda(\theta)d\rho^2+\rho^2d\phi^2+dz^2$**،** $T^{\rho}_{\theta\theta}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\lambda'}{\rho}$ ۲) $-\frac{\rho}{\lambda}$ ۳) $\frac{\rho}{\lambda}$ ۴) $\frac{\rho}{\lambda'}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»
$$T^{\rho}_{\theta\theta}=\frac{1}{2}g^{\rho m}(\partial_\theta g_{\theta m}+\partial_\theta g_{\theta m}-\partial_m g_{\theta\theta})$$

$m=\rho$ چون تنها $g^{\rho\rho}\neq 0$ $\quad g^{\rho\rho}=\frac{1}{g_{\rho\rho}}=\frac{1}{\lambda(\theta)}$

ابتدا با توجه به تعریف $\Gamma^{\rho}_{\theta\theta}$ آن را برحسب تانسور متریک می‌نویسیم:
$$T^{\rho}_{\theta\theta}=\frac{1}{2\lambda}(-\partial_\rho(\rho^2))=-\frac{\rho}{\lambda}$$

مثال۴۴: مطلوبست محاسبه‌ی $A\times(\nabla\times B)$.

۱) $B.(\nabla A)-(A.V)B$ ۲) $(A.\nabla)B-A.(\nabla B)$ ۳) $A.\nabla B-(A.\nabla)B$ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» سؤال را با استفاده از لوئی‌چی ویتا حل می‌کنیم:
$$\begin{aligned}(A\times(\nabla\times B))_p&=\varepsilon_{pql}A_q(\varepsilon_{ljk}\partial_jB_k)\\&=\varepsilon_{pql}\varepsilon_{ljk}A_q\partial_jB_k=\varepsilon_{pql}\varepsilon_{jkl}A_q\partial_jB_k=(\delta_{pj}\delta_{qk}-\delta_{pk}\delta_{qj})A_q\partial_jB_k=A_q\partial_pB_q-A_q\partial_qB_p\\&=A.(\partial_pB)-(A.\nabla)B_p\to A\times(\nabla\times B)=A.(\nabla B)-(A.\nabla)B\end{aligned}$$

دقت کنید $\nabla B=(\partial_1B,\partial_2B,\partial_3B)$ است.

فصل سوم

«دنباله و سری»

مثال۱: حاصل $\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -1

پاسخ: گزینه «۲» با جایگذاری به جای $\zeta(n)$ به دست می‌آید:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)-1=\sum_{n=2}^{\infty}((\sum_{k=1}^{\infty}k^{-n})-1)$$

اما با توجه به همگرایی مطلق سری زتا، می‌توان این سری را بازآرایی کرد؛ یعنی جای دو نماد جمع‌بندی را عوض کرد. در نتیجه به دست می‌آید:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)=\sum_{n=2}^{\infty}(1+\sum_{k=2}^{\infty}k^{-n}-1)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}k^{-n}=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}k^{-n}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{-2}}{1-k^{-1}}$$

که در آن از فرمول جمع‌بندی سری هندسی، استفاده شده است. دقت کنید که عامل -1 در $\sum(\zeta(n)-1)$ در حقیقت جمله‌ی اول در تابع زتا را که $k=1$ است، حذف می‌کند. لذا همگرایی سری هندسی تضمین می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

در رابطه بالا از تجزیه‌ی کسرها استفاده شده است. اما سری آخر برابر است با:

$$a_2=1-\frac{1}{2}\qquad a_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ ,\ \dots\qquad a_k=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

بنابراین داریم:

$$S_k=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{k}=1-\frac{1}{k}\quad \lim_{k\to\infty}S_k=1$$

$$S_k=\frac{k-1}{k}\to\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{k}=1$$

لذا خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)=1$$

مثال۲: کدام سری همگراست؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ ۲) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

پاسخ: گزینه «۳» سری گزینه‌ی ۱ مشابه سری همساز است و لذا واگراست. سری گزینه‌ی ۲ از نکته‌ی مربوط به $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}$ واگراست. سری گزینه‌ی ۴ نیز واگراست، زیرا تابع فاکتوریل در nهای بزرگ بسیار سریع‌تر از تابع نمایی رشد می‌کند. این مسأله از آزمون نسبت هم واضح است داریم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}}=\frac{n}{10}$$

که برای $n>10$ از یک بزرگ‌تر است و لذا سری واگراست. اما سری گزینه‌ی ۳ از آزمون مقایسه همگراست، زیرا:

$$n2^n>2^n\Rightarrow\frac{1}{2^n}>\frac{1}{n2^n}$$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ یک سری هندسی همگراست، پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ نیز همگراست.

مثال۳: بسط تابع $f(x)=\frac{1}{(2x+1)(x-1)}$ حول نقطه‌ی $x=0$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}(-1)^{n+1}(2x)^{n+1}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}x^{n+1}$

۲) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}(-1)^{n+1}(2x)^{n+1}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}x^{n+1}$

۳) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}(-1)^{n}(2x)^{n}-\frac{2}{3}\sum_{n=0}x^{n}$

۴) $-\frac{2}{3}\sum_{n=0}(-1)^{n}(2x)^{n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}x^{n}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم و سپس هر کدام از کسرها را به صورت سری مک لوران می‌نویسیم.

$$\frac{1}{(2x+1)(x-1)}=\left(\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow B=\frac{1}{3}\\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{-2}{3}\end{cases}$$

$$\frac{1}{(2x+1)(x-1)}=\frac{-2}{3}\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}(-1)^n(2x)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}x^n\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}(-2x)^{n+1}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}x^{n+1}$$

مثال۴: حاصل بسط $f(x)=\tan^{-1}x$:

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

پاسخ: گزینه «۱» برای به دست آوردن بسط مک لورن، مشتق‌گیری nام از $\tan^{-1}x$ بسیار دشوار است؛ اما می‌دانیم که $\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$. حال انتگرال را بسط می‌دهیم:

$$\tan^{-1}(x)=\int_0^x dt\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x dt\,t^{2n}$$

در رابطه جای سری و انتگرال را عوض کرده‌ایم (چرا؟). بنابراین خواهیم داشت:

$$\tan^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

مثال۵: بسط مک لورن تابع $f(x)=\cos^2 x$:

۱) $x^2-\frac{1}{3}x^4+\dots$

۲) $1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\dots$

۳) $\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{3}x^4+\dots$

۴) $1-x^2+\frac{1}{3}x^4+\dots$

پاسخ: گزینه «۴» برای بسط تابع، از رابطه‌ی $\cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$ داریم:

$$\cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}-\frac{64x^6}{6!}+\dots\right)$$

$$\cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\dots\right)=1-x^2+\frac{1}{3}x^4+\dots$$

مثال۶: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{nx}}{n}$ برابر است با:

۱) $\frac{x}{2}+\text{Ln}\sinh x$

۲) $\frac{x}{2}+\text{Ln}\cosh x$

۳) $\text{Ln}2+\frac{x}{2}+\text{Ln}\cosh\frac{x}{2}$

۴) $\text{Ln}2+\frac{x}{2}+\text{Ln}\sinh x$

پاسخ: گزینه «۳» این رابطه، طبق بسط $\text{Ln}(1+x)$ برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{nx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(e^x)^n}{n}=\text{Ln}(1+e^x)=\text{Ln}\left[(e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})\right]=\frac{x}{2}+\text{Ln}2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)=\text{Ln}2+\frac{x}{2}+\text{LnCosh}\frac{x}{2}$$

مثال۷: اگر $f(x)=e^{۳x^۳}$ باشد، آنگاه $f_{(۰)}^{(۲۱)}$ کدام است؟ ($f_{(۰)}^{(۲۱)}$ مشتق مرتبه بیست و یکم تابع در نقطه‌ی $x=۰$ است)

۱) $\frac{۷^۳\times ۲۱!}{۳!}$ ۲) $\frac{۳^۷\times ۲۱!}{۷!}$ ۳) $\frac{۳^۷\times ۲۱!}{۳!}$ ۴) $\frac{۳^۷\times ۷۱!}{۲۱!}$

پاسخ: گزینه «۲» به کمک بسط تیلور دو عبارت برای $f(x)$ می‌نویسیم، سپس جمله‌ی هم درجه با $f_{(۰)}^{(۲۱)}$ را به دست می‌آوریم و حاصل را می‌یابیم:

$$e^x=\sum_{n=۰}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow e^{۳x^۳}=\sum_{n=۰}\frac{(۳x^۳)^n}{n!}=\sum_{n=۰}\frac{۳^n x^{۳n}}{n!}\qquad (I)$$

$$f_{(۰)}^{(۲۱)}=?\Rightarrow P=۲۱\xrightarrow{(I),(II)}=\frac{f_{(۰)}^{(۲۱)}x^{۲۱}}{۲۱!}=\frac{۳^۷ x^{۳\times۷}}{۷!}\Rightarrow F_{(۰)}^{(۲۱)}=\frac{۳^۷\times ۲۱!}{۷!}$$

مثال۸: $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos x-۱+\frac{x^۲}{۲}}{x^۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲!}$ ۳) $\frac{۱}{۴!}$ ۴) $\frac{۱}{۸!}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\cos x=۱-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۴!}-\frac{x^۶}{۶!}+\cdots\Rightarrow \cos x-۱+\frac{x^۲}{۲}=\frac{x^۴}{۴!}-\frac{x^۶}{۶!}+\frac{x^۸}{۸!}-\cdots\Rightarrow \lim_{x\to۰}\frac{\frac{x^۴}{۴!}-\frac{x^۶}{۶!}+\frac{x^۸}{۸!}}{x^۴}=\lim_{x\to۰}(\frac{۱}{۴!}-\frac{x^۲}{۶!}+\frac{x^۴}{۸!})=\frac{۱}{۴!}$$

مثال۹: حاصل حد $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{۱}{۲}x\mathrm{Ln}\frac{x+۱}{x-۱}-۱)$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» جمله‌ی اول به $۰\times\infty$ منجر می‌شود که مبهم است و یک راه برای حل بسط تابع است. اما ابتدا یک تغییر متغیر می‌دهیم، زیرا باید بسط ما دارای شعاع همگرایی باشد، که شامل حد است. با $y=\frac{۱}{x}$ حد تبدیل می‌شود به $\lim\limits_{y\to۰}(\frac{۱}{۲y}\mathrm{Ln}\frac{۱+y}{۱-y}-۱)$. حالا می‌توانیم تابع لگاریتمی را بسط دهیم، زیرا بسط داده شده در مبدأ همگراست. بنابراین داریم:

$$\mathrm{Ln}(\frac{۱+y}{۱-y})=\mathrm{Ln}(۱+y)-\mathrm{Ln}(۱-y)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}y^n}{n}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}(-۱)^n y^n}{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}+۱}{n}y^n=۲\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{y^{۲n+۱}}{۲n+۱}$$

زیرا $(-۱)^{n-۱}+۱$ تنها به ازای nهای فرد است که پاسخ غیر صفر دارد، بنابراین:

$$\lim_{y\to۰}(\frac{۱}{۲y}\mathrm{Ln}(\frac{۱+y}{۱-y})-۱)=\lim_{y\to۰}\frac{۱}{۲y}(۲y+۲\frac{y^۳}{۳}+\ldots)-۱=\lim_{y\to۰}\frac{y^۲}{۳}+\ldots=۰$$

مثال۱۰: حاصل $\int_۰^x t^n\,dt\,e^{-t}$ برابر است با:

۱) $x^{n+۱}\sum\limits_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p x^p}{p!(n+p+۱)}$ ۲) $x^{n+۱}\sum\limits_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p x^p}{(n+p+۱)!}$ ۳) $x^{n+۱}\sum\limits_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p}{p!(n+p+۱)}$ ۴) $x^{n+۱}\sum\limits_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p}{(n+p+۱)!}$

پاسخ: گزینه «۱» با بسط تابع نمایی در انتگرال و با توجه به همگرایی مطلق این بسط خواهیم داشت:

$$\int_۰^x dt\,t^n\sum_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p t^p}{p!}=\sum_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p}{p!}\int_۰^x dt\,t^{n+p}=\sum_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p}{p!}\left.\frac{t^{n+p+۱}}{(n+p+۱)}\right|_۰^x=x^{n+۱}\sum_{p=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^p x^p}{p!(n+p+۱)}$$

مثال۱۱: حاصل $\lim\limits_{m\to 0}\frac{K-E}{m}$ **که** K **و** E **انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم هستند، برابر است با:**

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» برای $K-E$ داریم:

$$K-E=\frac{\pi}{2}(1-1+m(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+m^2(\frac{9}{64}+\frac{3}{64})+\ldots)$$

بنابراین:

$$\lim_{m\to 0}\frac{K-E}{m}=\frac{\pi}{2}\lim_{m\to 0}(\frac{1}{2}+m(\frac{12}{64}+\ldots))=\frac{\pi}{4}$$

مثال۱۲: حاصل‌ضرب نامتناهی $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+\frac{(-1)^n}{n})$ **برابر است با:**

۱) واگراست ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» دقت کنید که چون $\frac{(-1)^n}{n}$ همواره بزرگ‌تر از صفر نیست، نمی‌توان از آزمون همگرایی مذکور استفاده کرد. اما داریم:

$$\prod_{n=2}^{\infty}1+\frac{(-1)^n}{n}=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=\frac{2+1}{2}\times\frac{3-1}{3}\times\frac{4+1}{4}\times\frac{5-1}{5}\times\frac{6+1}{6}\times\frac{7-1}{7}\times\cdots$$

مشخص است که صورت هر کسر با مخرج کسر بعد یا قبل و مخرج کسر با صورت کسر بعد یا قبل ساده می‌شود و این برای دو جفت از کسرهای کنار هم برقرار است؛ البته اگر n زوج باشد.

$$\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1-1}{n+1}=1$$

اگر n فرد باشد $\frac{n-1+1}{n-1}\times\frac{n-1}{n}=1$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+\frac{(-1)^n}{n})=1$$

مثال۱۳: مقدار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ **کدام است؟ (از بسط فوریه تابع** $f(x)=t^2$ **در بازه‌ی** $-\pi<t<\pi$ **استفاده کنید)** (سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi^2}{90}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» مقدار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ خواسته شده است. با توجه به معرفی سری فوریه‌ی $f(x)=t^2$ در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ متوجه می‌شویم که احتمالاً سری فوق در بسط فوریه‌ی مزبور ظاهر خواهد شد و راهی برای به دست آوردن جواب پیش روی ما خواهد گذاشت. کافی است ضرایب a_0 و a_n و b_n را حساب کنیم:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(0)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{2\pi^2}{3}$$

t^2 یک تابع زوج است و چون بازه‌ی انتگرال‌گیری $\int_{-\pi}^{\pi}$ نیز متقارن است، می‌توان بازه را $\int_0^{\pi}$ در نظر گرفت و انتگرال را در ۲ ضرب کرد، بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T t^2\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}[\cancelto{0}{\frac{t^2}{n}\sin(nt)}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2t}{n}\sin(nt)dt]=\frac{2}{\pi}[\frac{2t}{n^2}\cos(nt)-\int_0^{\pi}\frac{2}{n^2}\cos(nt)dt]$$

$$=[\frac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{2}{n^3}\sin(nt)\Big|_0^{\pi}]\times(\frac{2}{\pi})=\frac{2}{\pi}\frac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi)=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

چنانکه واضح است در حل انتگرال $\int t^{2}\cos(nt)dt$ از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کرده‌ایم. مقدار $\cos(nt)$ را در پایان حل برابر $\cos(nt)=(-1)^{n}$ گذاشتیم، چون به ازای nهای زوج برابر۱+ و به ازای nهای فرد برابر ۱- می‌شود. حال باید b_n را حساب کنیم. چون t^{2} زوج است و $\sin(nt)$ فرد، بنابراین b_n ها صفر می‌شوند:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^{2}\sin(nt)dt=0$$

پس بسط فوریهٔ $f(x)=x^{2}$ را می‌شود به صورت روبه‌رو نوشت:

$$x^{2}=\frac{\pi^{2}}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}\cos(nx)$$

با قرار دادن $x=0$ مسأله بسیار ساده می‌شود، چون $\cos(0)=1$ است. پس خواهیم داشت:

$$0=\frac{\pi^{2}}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}\;\Rightarrow\;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}=-\frac{\pi^{2}}{12}$$

با ضرب (۱-) در طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۴: حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty}(\xi(2n)-1)$ که ξ تابع زتای ریمان است کدام گزینه می‌باشد؟

۱) ∞ ۲) $-\xi(2)+\frac{7}{4}$ ۳) $\xi(2)$ ۴) $\xi(2)+\frac{3}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از تعریف تابع زتا داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\xi(2n)-1)=\sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}-1)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}$$

جمله‌ی $p=1$ با ۱ موجود در سری اصلی ساده می‌شود. با فرض همگرایی، جای دو جمع‌بندی را عوض می‌کنیم و داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\xi(2n)-1)=\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}$$

این یک سری هندسی با قدر نسبت p^{2} است؛ لذا سری به صورت ذیل ساده می‌شود:

$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{p^{4}}}{(1-\frac{1}{p^{2}})}=\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^{4}-p^{2}}=\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{2p}(\frac{1}{p^{2}-p}-\frac{1}{p^{2}+p})=\sum_{p=2}^{\infty}(\frac{1}{2p(p-1)}+\frac{1}{2p(p+1)}-\frac{1}{p^{2}})\qquad(1)$$

اما از طرفی می‌دانیم که تابع زتای ریمان برابر است با:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2}}=\xi\qquad(2)$$

بنابراین با جایگزینی (۲) در (۱) داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\xi(2n)-1)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots)-\xi(2)+1=-\xi(2)+\frac{7}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۵: حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3}(n^{2}-1)}$ کدام است؟ ($\xi(p)$ تابع زتای ریمان مرتبه‌ی p است)

۱) $\frac{5}{4}-\xi(3)$ ۲) $-\frac{3}{4}-\xi(3)$ ۳) $\frac{1}{4}-\xi(3)$ ۴) $\frac{1}{4}+\xi(3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{n^{3}(n^{2}-1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n^{2}}+\frac{C}{n^{3}}+\frac{D}{n-1}+\frac{E}{n+1}$$

برای یافتن ضرایب، ابتدا طرفین را در n^{3} ضرب می‌کنیم و $n=0$ قرار می‌دهیم:

$$C=-1$$

سپس طرفین را در $n-1$ ضرب و سپس $n=1$ قرار می‌دهیم:

$$D=\frac{1}{2}$$

سپس طرفین را در $n+1$ ضرب و سپس $n=-1$ قرار می‌دهیم:

$$E=\frac{1}{2}$$

حال داریم:

$$\frac{1}{n^3(n^2-1)}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{2}\frac{2n}{n^2-1}=\frac{+1+n^2-1-n^4}{n^3(n^2-1)}=-\frac{1}{n}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}\Rightarrow A=-1\ ,\ B=0$$

بنابراین با جایگزینی ضرایب حاصله، دنباله برابر است با:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

با بازآرایی سری‌ها و مرتب‌سازی آنها به حالت استاندارد داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

حال با استفاده از تعریف تابع زتا و خواص سری‌های تو هم رو داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}=\xi(p)\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}=\xi(p)-1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)}=-\xi(3)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}-\xi(3)$$

که متأسفانه در هیچ گزینه‌ای وجود ندارد.

مثال۱۶: کدام گزینه برای بسط $f(x)=\sin^{-1}x$ در یک همسایگی به اندازه‌ی کافی کوچک $x=0$ صحیح است؟

۱) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{(2n)(2n)!}x^{2n+1}$

۲) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n)(2n)!}x^{2n+1}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!}{(2n)!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n)!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بسط $f(x)=\sin^{-1}x$ یکی از راه‌ها استفاده از انتگرال ذیل است:

$$\sin^{-1}x=\int_0^x dt(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

چون می‌دانیم بسط تیلور $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ برابر است با:

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2n)!}t^n$$

بنابراین با جایگزینی t^2 به جای t داریم:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2n)!}t^{2n}$$

با جایگذاری در انتگرال می‌توان جای انتگرال و سری را برای مقادیر کوچک x جابجا کرد (چرا؟) بنابراین:

$$\sin^{-1}x=\int_0^x dt(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2n)!}t^{2n})=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{(2n)!(2n+1)}x^{2n+1}$$

با ضرب صورت و مخرج سری در $(2n+1)$ و استفاده از $(2n+1)!=(2n-1)!(2n)(2n+1)$ می‌توان جمله‌ی اول را نیز در سری جذب کرده بدست می‌آید:

$$\sin^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!}{(2n)!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

مثال۱۷: حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}dx\frac{x^ne^x}{\sinh x}$ برحسب تابع زتای ریمان کدام است؟

۱) $\frac{n!}{2^n}\xi(n+1)$

۲) $\frac{n!}{2^{n-1}}\xi(n+1)$

۳) $\frac{n!}{2^{n+1}}\xi(n+1)$

۴) $\frac{(n-1)!}{2^{n-1}}\xi(n)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از رابطه بین توابع نمایی و تابع سینوسی هیپربولیک داریم:

$$2\int_0^{\infty}dx\frac{x^ne^x}{e^x-e^{-x}}=2\int_0^{\infty}dx\frac{x^n}{1-e^{-2x}}\quad,\quad\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

اما از طرفی $\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$ که $|t|<1$، لذا می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2nx}=\frac{1}{1-e^{-2x}}$$

در نتیجه برای انتگرال خواهیم داشت:

$$\int_{\circ}^{\infty} dx \frac{x^n e^x}{\sinh x} = ۲\int_{\circ}^{\infty} dx x^n \sum_{m=\circ}^{\infty} e^{-۲mx} = ۲\sum_{m=\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{\infty} dx x^n e^{-۲mx}$$

با تغییر متغیر $۲mx = u$ و با توجه به $\int_{\circ}^{\infty} dx x^n e^{-n} = n!$ داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty} dx \frac{x^n e^x}{\sinh x} = ۲\sum_{m=\circ}^{\infty}\frac{۱}{۲m}\int_{\circ}^{\infty} du (\frac{u}{۲m})^n e^{-u} = \sum_{m=\circ}^{\infty}\frac{۱}{(m^{n+۱})}\frac{۱}{۲^n}\int_{\circ}^{\infty} du u^n e^{-u} = \frac{n!}{۲^n}\sum_{m=\circ}^{\infty}\frac{۱}{m^{n+۱}}$$

با استفاده از تعریف تابع زمانی ریمان $\xi(p) = \sum_{n=\circ}^{\infty} n^{-p}$ می‌توان نوشت: $\int_{\circ}^{\infty} dx \frac{x^n e^x}{\sinh x} = \frac{n!}{۲^n}\zeta(n+۱)$

مثال۱۸: مجموع سری مثلثاتی $\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n!}\cos nx$ کدام است؟

۱) $e^{-\cos x}$ ۲) $e^{-\cos x}\cos(\cos x)$ ۳) $-e^{-\cos x}\sin(\sin x)$ ۴) $e^{-\cos x}\cos(\sin x)$

☑ **پاسخ:** گزینه«۴» برای محاسبه‌ی سری به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n!}\cos nx = \mathrm{Re}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n e^{inx}}{n!} = \mathrm{Re}\sum_{u=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n (e^{ix})^n}{n!}$$

از طرفی می‌دانیم $e^{-x} = \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^n}{n!}$ بنابراین:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n!}\cos nx = \mathrm{Re}(e^{-e^{ix}}) = \mathrm{Re}(e^{-\cos x - i\sin x}) = \mathrm{Re}(e^{-\cos x}.e^{-i\sin x})$$

$$= \mathrm{Re}((e^{-\cos x})(\cos(\sin x) - i\sin(\sin x))) = e^{-\cos x}\cos(\sin x)$$

مثال۱۹: کدام یک از سری‌ها واگراست؟

۱) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{nLn\, n}$ ۲) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n۲^n}$ ۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}[n(n+۱)]^{-۱}$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱\circ^n}{n!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه ۱: با استفاده از آزمون انتگرال و با تغییر متغیر $u = \ln x$ داریم:

$$\int_{۲}^{\infty}\frac{dx}{xLnx} = \int_{Ln۲}^{\infty}\frac{du}{u} = Lnu\Big|_{Ln۲}^{\infty} = \infty$$

لذا $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{nLn\, n}$ واگراست.

گزینه ۲: با استفاده از آزمون نسبت داریم:

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{n}{۲(n+۱)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{۲(n+۱)} = \frac{۱}{۲} < ۱$$

بنابراین این گزینه همگراست.

گزینه ۴: با استفاده از آزمون نسبت داریم:

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{۱\circ^{n+۱} n!}{(n+۱)!۱\circ^n} = \frac{۱\circ}{n+۱} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \circ$$

در نتیجه سری فوق نیز همگراست. سری گزینه ۳ نیز آشکارا همگراست، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۱)} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱} = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = ۱$$

مثال۲۰: حاصل انتگرال $\int_0^1 dx\frac{[Ln(1-x)]^n}{x}$ **کدام است؟**

۱) ∞ ۲) $(-1)^n n!\xi(n)$ ۳) $(-1)^n n!\xi(n+1)$ ۴) $n!\xi(n+1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال با تغییر متغیر $1-x=e^{-t}$ خواهیم داشت:

$$\int_0^1 dx\frac{[Ln(1-x)]^n}{x}=\int_0^\infty dt\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}(-t)^n$$

حال با توجه به اینکه $\frac{1}{1-e^{-t}}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{-mt}$ است داریم:

$$\int_0^1 dx\frac{[Ln(1-x)]^n}{x}=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^\infty dt\, e^{-(m+1)t}\times(-t)^n=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^\infty dt\ \ e^{-(m+1)}\ \ t^n$$

با تغییر متغیر $u=(m+1)t$ خواهیم داشت:

$$\int_0^1 dx\frac{[Ln(1-x)]^n}{x}=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^{n+1}}\int_0^\infty du e^{-u}u^n$$

چون $\int_0^\infty dx x^n e^{-x}=n!$ و $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^{n+1}}=\varepsilon(n+1)$ داریم:

$$\int_0^1 dx\frac{[(Ln(1-x)]^n}{x}=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}=(-1)^n n!\xi(n+1)$$

◆◆◆◆

مثال۲۱: ضابطه تعریف تابع F به‌صورت مقابل است: $F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}(1+n)^{-(p+1)}$

شرایط همگرایی تابع F عبارتند از:

۱) اگر $p\le 1$ واگرا و اگر $p>1$ همگراست.

۲) اگر $p=0$ همگرا خواهد بود.

۳) اگر $p\le 0$ واگرا و اگر $p>0$ همگراست.

۴) اگر $\sum_{n=2}^{\infty}(1+n)^{-(p+1)}$ آن‌گاه همگرا می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بررسی این سری، از آزمون انتگرال مک لوران استفاده می‌کنیم؛ به این معنی که انتگرال جمله مولد سری را از ۱ تا ∞ حساب می‌کنیم. اگر حاصل انتگرال واگرا شد، تابع F به دلیل واگرا شدن مجموع جزئی F آن غیر قابل تعریف خواهد شد و اگر حاصل انتگرال عددی مشخص شد، آنگاه سری نیز همگراست، بنابراین داریم:

$$\int_1^\infty\frac{dx}{(1+x)^{p+1}}=\begin{cases}\left.\frac{(1+x)^{-p}}{-p}\right|_1^\infty & p\neq 0\\ \left.Ln(1+x)\right|_1^\infty & p=0\end{cases}$$

پس اگر $p\le 0$ باشد حاصل انتگرال واگراست و اگر $p>0$ باشد حاصل متناهی است.

همچنین اگر $p=0$ باشد، داریم $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ که سری همساز می‌شود و می‌دانیم که واگراست.

◆◆◆◆

مثال۲۲: حاصل مجموع سری هندسی مقابل، عبارت است از:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

۱) ∞ ۲) ۶ ۳) ۰ ۴) مبهم

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل سری می‌بینیم که این سری از نوع سری هندسی است: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

برای یافتن حاصل مجموع این سری، مجموع جزئی $\sum\limits_{m=0}^{n-1} ar^m$ را در $(1-r)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(1-r)(\sum\limits_{m=0}^{n-1} ar^m)}{(1-r)} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}(ar^m - ar^{m+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r}[(1-r)+(r-r^2)+(r^2-r^3)+\dots+(r^{n-1}-r^n)] = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

اگر $n\to\infty$ با شرط اینکه $r<1$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

در مورد این سری $a=3$ و $r=\frac{1}{2}$ است، در نتیجه داریم:

$$\frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$$

مثال ۲۳: در نظریه پلانک برای انرژی نوسانگرهای کوانتیده داریم:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\varepsilon_0 \exp(\frac{-n\varepsilon_0}{kT})}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp(\frac{-n\varepsilon_0}{kT})}$$

که در آن ε_0 یک انرژی ثابت است. صورت و مخرج این رابطه به ترتیب بسط‌های دوجمله‌ای کدام دو تابع هستند؟

۱) $\frac{\varepsilon_0 x}{(1-x)^2}, \frac{x}{(x-1)}$ ۲) $\frac{x}{(x-1)}, \frac{\varepsilon_0 x}{(1-x)^2}$ ۳) $\frac{x}{(1-x)^2}, \frac{\varepsilon_0 x}{(x-1)}$ ۴) $\frac{\varepsilon_0 x}{(x-1)}, \frac{x}{(1-x)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر عبارت را شرط دهیم داریم:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\varepsilon_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} + 2\varepsilon_0 e^{-2\frac{\varepsilon_0}{kT}} + 3\varepsilon_0 e^{-3\frac{\varepsilon_0}{kT}} + \dots}{1 + e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} + e^{-2\frac{\varepsilon_0}{kT}} + e^{-3\frac{\varepsilon_0}{kT}} + \dots} \qquad (1)$$

با استفاده از بسط تیلور تابع $\frac{1}{x^n}$ به صورت زیر می‌توانیم مخرج کسر (۱) را به صورت بسط تیلور هم‌ارز نماییم بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} = 1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots = \frac{x}{x-1}$$

$$\varepsilon_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} + 2\varepsilon_0 e^{-2\frac{\varepsilon_0}{kT}} + \dots + \varepsilon_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} = (\frac{\varepsilon_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}\partial}{\partial e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}})\{\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}})^n\}$$

پس با استفاده از معادل‌سازی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_0 x \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \varepsilon_0 x \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{1-x}) = \frac{\varepsilon_0 x}{(1-x)^2}$$

همچنین برای اطمینان از صحت این نتیجه داریم:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\frac{\varepsilon_0 x}{(1-x)^2}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{\varepsilon_0 (x-1)x}{(1-x)^2 x} = \frac{\varepsilon_0}{x-1} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{-\varepsilon_0}{KT}} - 1}$$

مثال۲۴: در مورد همگرایی سری معرف زتای ریمان $\zeta(P)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-P}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) به ازای $P \geq 1$ همگراست. ۲) به ازای $P > 1$ همگراست. ۳) به ازای $P \leq 1$ همگراست. ۴) به ازای $P < 1$ همگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به آزمون انتگرال کوشی، سری نامتناهی با همگرا شدن یا واگرا شدن انتگرال متناظر با آن، همگرا یا واگرا می‌شود.

انتگرال متناظر با جمله مولد این سری عبارتست از:

$$\int_{1}^{\infty} x^{-p}dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_{1}^{\infty} & p \neq 1 \\ \left. \operatorname{Ln} x \right|_{1}^{\infty} & p = 1 \end{cases}$$

پس اگر $p=1$ باشد، آن‌گاه $\ln\infty = \infty$ و اگر $P<1$ باشد، آن‌گاه $\infty^{p+1} \to \infty$ که سری واگرا می‌شود. فقط اگر $P>1$ باشد، سری همگرا می‌شود.

مثال۲۵: کدام‌یک از سری‌های زیر را می‌توان به‌عنوان نمایشی برای عدد ln۲ به شمار آورد؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این‌که بسط تیلور تابع $\operatorname{Ln}(1+x)$ به صورت $\operatorname{Ln}(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ می‌باشد و چون این سری به ازای $-1<x<1$ همگرا است، با انتخاب $x=1$ بدست می‌آوریم:

$$\operatorname{Ln}(1+1)=\operatorname{Ln}2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

در این‌جا همگرایی این سری توسط محک لایب‌نیتس حاصل می‌شود که بر اساس آن در سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ اگر $a_n>0$ و a_n برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ، n به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد به گونه‌ای که $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. آن‌گاه سری همگرا است. در این‌جا $a_n=\frac{1}{n}$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. پس این سری همگرا است.

مثال۲۶: اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=k$ مقداری ثابت باشد و $0<k<\infty$ آن‌گاه راجع به همگرایی و واگرایی $\sum b_n$ و $\sum a_n$ چه می‌توان گفت؟

۱) هر دو واگرا هستند. ۲) هردو همگرا هستند.

۳) یا هردو واگرا و یا هر دو همگرا هستند. ۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، در حد $n\to\infty$ $a_n=\frac{b_n}{k}$ قرار می‌دهیم $b'_n=\frac{1}{2k}b_n$ و چون در $\sum b'_n$ هر جمله آن از هر جمله $\sum a_n$ به ترتیب n کوچک‌تر است، پس $\sum_n \frac{b_n}{2k}=\frac{1}{2k}\sum_n b_n$ نیز همگرا است، در نتیجه $\sum_n b_n$ نیز همگراست.

اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، در حد $n\to\infty$ $a_n=\frac{b_n}{k}$ قرار می‌دهیم $b''_n=\frac{2}{k}b_n$ و چون هر جمله در $\sum b''_n$ از هر جمله $\sum a_n$ بزرگتر است و از آن جا که $\sum a_n$ واگرا است، پس $\sum b_n$ نیز واگرا است.

مثال۲۷: حد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos^2 x}{x^2}$ را محاسبه کنید.

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۱» چون $x\to 0$ می‌توان از بسط مکلورن استفاده کرد. بنابراین داریم:

$$\frac{1-\cos x-\cos^2 x}{x^2}=\frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots)+(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots)^2}{x^2}=\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\dots+(1-x^2+\frac{x^4}{2})}{x^2}$$

در خط دوم از بسط دو جمله نیوتون استفاده کرده‌ایم.

اگر از جملات مراتب بالاتر صرف‌نظر کنیم می‌رسیم به: $\simeq\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{1}{2}$

مثال۲۸: در مورد همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$ چه می‌توان گفت؟

۱) واگراست. ۲) همگراست. ۳) به‌طور مشروط همگراست. ۴) نامشخص است.

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از آزمون نسبت دالامبر برای $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}}=\frac{n}{(n+1)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

پس چون حاصل کوچک‌تر از یک است، پس سری همگراست.

مثال۲۹: در مورد همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ چه می‌توان گفت؟

۱) واگراست. ۲) همگراست. ۳) به‌صورت مشروط همگراست. ۴) نامشخص است.

پاسخ: گزینه «۲» همگرایی این سری نامتناهی را با استفاده از آزمون نسبت دالامبر بررسی می‌کنیم. برحسب این آزمون:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\begin{cases}<1 & \text{سری همگراست}\\ >1 & \text{سری واگراست}\\ =1 & \text{نامشخص}\end{cases}$$

پس حد $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}$$

و چون $1>\dfrac{1}{3}$ می‌باشد، پس این سری همگراست.

مثال۳۰: حاصل انتگرال مقابل کدام است؟ $\displaystyle\int_{0^+}^{\infty}dx\frac{\cos^2 x\,\delta(\sin x)}{x^2}$

۱) $\dfrac{1}{\pi^2}\xi(2)$ ۲) $\xi(2)$ ۳) ∞ ۴) $\dfrac{1}{\pi}\xi(2)$

پاسخ: گزینه «۱» برای تابع دلتا داریم:

$$\delta(f(x))=\sum_{x_0}\frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$$

که جمع‌بندی روی صفرهای تابع صورت می‌پذیرد. از طرفی چون $\sin x=0\Rightarrow x=n\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}$

و $\cos n\pi = (-1)^n$، می‌توان نوشت:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\pi)$$

با جایگذاری در انتگرال داریم:

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos^2 x}{x^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\pi)$$

اما فقط صفرهای $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ در بازه‌ی انتگرال‌گیری هستند، بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^+}^{\infty} dx \frac{\cos^2 x}{x^2} \delta(x - n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi^2} \xi(2)$$

مثال۳۱: مقدار بسط تابع $\mathrm{Ln}\,|(x+iy)!|$ کدام است؟ (γ ثابت اویلر ماشرونی و $\xi(n)$ تابع زتای ریمان است)

۱) $-\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x^2 + y^2)^n \xi(n)$

۲) $-i\gamma y + i\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sin(n\,tg^{-1}(\frac{y}{x}))\xi(n)$

۳) $-\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \xi(n)$

۴) $-\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cos(n\,tg^{-1}(\frac{y}{x}))\xi(n)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم که برای تابع $\mathrm{Ln}(z!)$ و تابع زتای ریمان داریم:

$$\mathrm{Ln}(z!) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \xi(n) \qquad (1)$$

لذا با جایگزینی $z = x + iy$ داریم:

$$\mathrm{Ln}\,|(x+iy)!| = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|(x+iy)!|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x+iy)!(x-iy)!) = \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(x+iy)! + \mathrm{Ln}(x-iy)!) \qquad (2)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\mathrm{Ln}\,|(x+iy)!| = \frac{1}{2}(-\gamma x - i\gamma y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+iy)^n}{n} \xi(n) - \gamma x + i\gamma y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-iy)^n \xi(n))$$

حال می‌بایست جمع $(x+iy)^n + (x-iy)^n$ را حساب کنیم. اگر $x + iy = re^{i\theta}$ و $x - iy = re^{-i\theta}$ باشد، آنگاه:

$$(x+iy)^n + (x-iy)^n = r^n(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = 2r^n \cos n\theta = 2r^n \cos(n\,tg^{-1}(\frac{y}{x}))$$

و چون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ است، بدست می‌آید:

$$\mathrm{Ln}\,|(x+iy)!| = -\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cos(n\,tg^{-1}(\frac{y}{x}))\xi(n)$$

مثال۳۲: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$:

۱) $\ln 2$ ۲) 0 ۳) سری واگراست ۴) $\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» این سری طبق محک لایب‌نیتس همگراست زیرا به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ است که $a_n = \frac{1}{n}$ می‌باشد و a_n به صورت یکنوا کاهش می‌یابد و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ است. حال از بسط تیلور تابع $f(x) = \ln(1+x)$ داریم:

$$f(0) = \ln 1 = 0 \quad , \quad f'(0) = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1 \quad , \quad f''(0) = -\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x=0} = -1$$

$$f'''(0) = +\frac{2}{(1+x)^3}\Big|_{x=0} = 2 \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad n > 1$$

بنابراین با جایگزینی مشتق n ام تابع f داریم:

$$\ln(1+x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

حال با جایگزینی $x = 1$ خواهیم داشت:

$$\ln(1+1) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

مثال۳۳: کدام‌یک می‌تواند بسط مک‌لوران تابع $\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد؟

۱) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{12}+\cdots$　　۲) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{12}+\cdots$　　۳) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{7}{15}x^5+\cdots$　　۴) $x-\frac{2x^3}{3}+\frac{7}{15}x^5+\cdots$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بسط تابع $\sin x$ به صورت روبرو است:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots$$

از طرفی برای بسط $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ تابع $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f(0)=1 \quad , \quad f'(0)=-\frac{1}{2} \quad , \quad f''(0)=+\frac{3}{4}$$

همچنین بسط تابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ برابر است با:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$$

بنابراین با جایگزینی x^2 به جای x داریم:

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots$$

توجه داشته باشید که به مراتب بالاتر نیاز نداریم؛ زیرا گزینه‌ها تا مرتبه‌ی x^5 است، هر چند محاسبه‌ی آن‌ها ساده است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots)(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots)$$

با نگهداری جملات تا مرتبه x^5 و حذف مابقی جملات می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{8}x^5-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}+\cdots$$

در نتیجه با ساده‌سازی داریم:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{2x^3}{3}+\frac{7}{15}x^5+\cdots$$

مثال۳۴: حاصل e^{e^x} برابر است با:

۱) $e(1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\ldots)$　　۲) $e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\ldots)$

۳) $e(1+x^2+\frac{2}{3}x^3+\ldots)$　　۴) $e(1+x^2+\frac{5}{6}x^3+\ldots)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم که بسط تیلور e^x به صورت روبرو است:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$$

حال با توجه به اینکه در گزینه‌ها فقط تا جمله‌ی x^3 نگه داشته شده است پس:

$$e^{e^x}=e^{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots}=e\,e^x e^{\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^3}{6}}\ldots$$

که در آن از خاصیت $e^{x+y}=e^xe^y$ استفاده شده است. حال با توجه به رابطه‌ی بسط e^x می‌توان نوشت: (تا مرتبه‌ی x^3)

$$e^{e^x}=e(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots)(1+\frac{x^2}{2}+\ldots)(1+\frac{x^3}{6}+\ldots)$$

با ضرب و ساده‌سازی و نگهداری جملات تا مرتبه‌ی x^3 داریم:

$$e^{e^x}=e(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots)(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots)$$

$$=e(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots)=e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\ldots)$$

مثال۳۵: حاصل انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ برابر است با: ($\xi(n)$ تابع زتای ریمان مرتبه‌ی n ام است و می‌دانیم: $\xi(n)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}$)

۱) $\frac{1}{2}\xi(2)$ ۲) $2\xi(2)$ ۳) $\frac{7}{4}\xi(2)$ ۴) $\frac{3}{2}\xi(2)$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم بسط $\ln(1+x)$ به صورت زیر است:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots\Rightarrow\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\dots$$

از این رو با تقسیم کردن ln به صورت دو ln جدا و استفاده از بسط تابع لگاریتم داریم:

$$\ln(\frac{1+x}{1-x})=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots)=2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)}$$

حال با جایگزینی بسط تابع حاصله در عبارت انتگرال و ساده‌سازی داریم:

$$I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}\ln(\frac{1+x}{1-x})==\int_{0}^{1}dx\frac{2}{x}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2}{2p-1}\int_{0}^{1}dxx^{2p-2}$$

با محاسبه‌ی انتگرال خواهیم داشت:

$$I=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2}{(2p-1)^2}=2(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots)$$

با کاستن و افزودن $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots$ بدست می‌آید:

$$I=2(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots)-2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots)$$

از طرفی $\xi(n)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}$ است پس:

$$I=2\xi(2)-\frac{2}{2^2}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots)=2\xi(2)-\frac{1}{2}\xi(2)=\frac{3}{2}\xi(2)$$

مثال۳۶: حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n-1)}$ برابر است با:

۱) $\ln 4-1$ ۲) $\ln 2$ ۳) $\ln 2-1$ ۴) $\ln 4$

پاسخ: گزینه «۱» از بسط تابع $\ln(1+x)$ استفاده می‌کنیم چون:

$$f(x)=\ln(1+x)$$

از این رو می‌توان مشتق مرتبه nام تابع لگاریتم را به صورت روبرو محاسبه کرد:

$$f(0)=0\ ,\ f'(0)=1\ ,\ f''(0)=-1\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$$

بنابراین با جایگزینی روابط حاصل در بسط تابع لگاریتم و مرتب‌سازی داریم:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n$$

حال با ضرب این رابطه در $(1+x)$ بدست می‌آید:

$$(1+x)\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

در سری دوم با جابجایی کران سری از $n=1$ به $n=2$ و کاستن از n در جمله‌ی سری داریم:

$$(1+x)\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n-1}=x+\sum_{n=2}^{\infty}((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n}\frac{x^n}{n-1})$$

حال با جمع بستن دو جمله می‌توان نوشت:

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(n-1)}$$

به ازای $x=1$ خواهیم داشت:

$$2\ln 2=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n-1)}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n-1)}=\ln 2^2-1=\ln 4-1$$

مثال ۳۷: برای پراکندگی ذره‌ای بنیادی رابطه‌ی $R = \dfrac{\sqrt{2mc^2(E+2mc^2)} - 2mc^2 - \dfrac{E}{2} + \dfrac{1}{16}\dfrac{E^2}{mc^2}}{E}$ **بدست آمده است. در حد غیرنسبیتی** $(E \simeq 2mc^2)$، **R تقریباً برابر است با:**

۱) $(\dfrac{E}{4mc^2})^2$ ۲) $(\dfrac{E}{8mc^2})^2$ ۳) $-(\dfrac{E}{4mc^2})$ ۴) $-\dfrac{E}{16mc^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا می‌بایست بسط تیلور $\sqrt{1+x}$ را بدست آوریم. بنابراین داریم: $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f(0) = 1 \ ،\ f'(0) = \frac{1}{2} \ ،\ f''(0) = -\frac{1}{4} \ ،\ f'''(0) = \frac{3}{8}, \cdots$$

با جایگزینی مشتق تابع $\sqrt{1+x}$ در $x=0$ داریم:

$$\sqrt{1+x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{6} + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$

حال برای R خواهیم داشت:

$$R = \frac{\sqrt{2mc^2(E+2mc^2)} - 2mc^2 - \frac{E}{2} + \frac{1}{16}\frac{E^2}{mc^2}}{E} = \frac{2mc^2\sqrt{1+\frac{E}{2mc^2}} - 2mc^2 - \frac{E}{2} + \frac{1}{16}\frac{E^2}{mc^2}}{E}$$

با استفاده از رابطه‌ی بدست آمده برای $\sqrt{1+x}$ و با توجه به اینکه $E \simeq 2mc^2$ است داریم:

$$R = \frac{1}{E}(2mc^2(1 + \frac{E}{4mc^2} - \frac{1}{8}(\frac{E}{2mc^2})^2 + \frac{1}{16}(\frac{E}{2mc^2})^3 + \cdots) - 2mc^2 - \frac{E}{2} + \frac{1}{16}\frac{E^2}{mc^2})$$

با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$R = \frac{1}{E}(2mc^2 + \frac{E}{2} - \frac{E^2}{16mc^2} + \frac{1}{64}\frac{E^3}{mc^2} - 2mc^2 - \frac{E}{2} + \frac{E^2}{16mc^2} + \cdots)$$

$$R \simeq (\frac{E}{8mc^2})^2 + \cdots$$

مثال ۳۸: حاصل سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)(4n+5)}$ **برابر است با:**

۱) $\dfrac{1}{40}$ ۲) $\dfrac{3}{80}$ ۳) $\dfrac{5}{144}$ ۴) $\dfrac{1}{36}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از روش تجزیه‌ی کسرها و از روشی موسوم به پوشانیدن هوی ساید، استفاده می‌کنیم. بدین شکل که ابتدا ریشه‌ی هر عبارت در مخرج را می‌یابیم و در باقی کسر قرار می‌دهیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)(4n+5)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1} + \frac{C}{4n+5} \qquad (1)$$

برای A ریشه‌ی $4n-3$ را یافته و سپس با صرف نظر از $4n-3$ حاصل را در ما بقی کسر قرار می‌دهیم:

$$A: 4n-3 = 0 \Rightarrow n = \frac{3}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{(4\times\frac{3}{4}+1)(4\times\frac{3}{4}+5)} = \frac{1}{32}$$

با اعمال همین روش، ضرایب B و C محاسبه شده و برابر است با: $B = -\dfrac{1}{16}$ و $C = \dfrac{1}{32}$

بنابراین با جایگزینی ضرایب در کسر (۱) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)(4n+5)} = \frac{1}{32}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}) + (\frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+1})$$

حال از روش سری‌های تو هم‌رو استفاده می‌شود:

$$a_1=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{5}\right)\quad,\quad a_2=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{9}\right)$$

$$a_3=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{13}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{13}\right),\cdots,a_n=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4n+5}-\frac{1}{4n+11}\right)$$

لذا با ساده‌سازی و حذف جملات قرینه داریم:

$$S_n=\frac{1}{32}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4n+5}-\frac{1}{5}\right)$$

بنابراین مجموع سری با میل کردن $n\to\infty$ برابر است با:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{32}-\frac{1}{5}\frac{1}{32}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{32}=\frac{1}{40}$$

مثال۳۹: حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+2\frac{n+1}{n^2+n-2}\right)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با ساده‌سازی کسر داده شده خواهیم داشت:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{2n+2}{n^2+n-2}\right)=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n-2+2n+2}{n^2+n-2}=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+n-2}$$

حال با استفاده از تجزیه صورت و مخرج و قراردادن مقدار به جای n داریم:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+3)}{(n-1)(n+2)}=\frac{2\times5}{1\times4}\times\frac{3\times6}{2\times5}\times\frac{4\times7}{3\times6}\times\frac{5\times8}{4\times7}\times\cdots=\frac{1}{1\times4}=\frac{1}{4}$$

مثال۴۰: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\sin(\frac{nx}{a})}{n}$ برابر است با:

۱) $\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\frac{x}{a}}{1-a\cos\frac{x}{a}}\right)$ ۲) $-\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\frac{x}{a}}{1-a\cos\frac{x}{a}}\right)$ ۳) $\ln\left(\frac{a\sin\frac{x}{a}}{1-a\cos\frac{x}{a}}\right)$ ۴) $\ln\left(\frac{1-a\cos\frac{x}{a}}{a\sin\frac{x}{a}}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای جمع‌بندی سری، آن را منفی قسمت موهومی سری زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^ne^{-\frac{inx}{a}}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(ae^{-\frac{ix}{a}}\right)^n=-\ln\left(1-ae^{-\frac{ix}{a}}\right)$$

که در آن از بسط تابع نمایی استفاده شده است. حال داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a^n\sin\left(\frac{nx}{a}\right)=-\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a^ne^{-\frac{inx}{a}}=\operatorname{Im}\left[\ln\left(1-ae^{-\frac{ix}{a}}\right)\right]$$

با فرض $1-ae^{-\frac{ix}{a}}=re^{i\theta}$ حاصل سری θ خواهد بود، بنابراین داریم:

$$1-a\cos\frac{x}{a}=r\cos\theta\quad,\quad a\sin\frac{x}{a}=r\sin\theta$$

در نتیجه با تصحیح $r\sin\theta$ بر $r\cos\theta$ داریم:

$$\tan\theta=\frac{a\sin\frac{x}{a}}{1-a\cos\frac{x}{a}}$$

از این رو با معکوس مثلثاتی گرفتن، مقدار θ برابر است با:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\frac{x}{a}}{1-a\cos\frac{x}{a}}\right)$$

مثال۴۱: سری مقابل در $x=\pm 1$ چه رفتاری از خود نشان می‌دهد؟

$$1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots$$

۱) به ازای $\gamma>\alpha+\beta$ همگراست.　　۲) به ازای $\gamma\ge\alpha+\beta$ همگراست.

۳) به ازای $\gamma<\alpha+\beta$ همگراست.　　۴) به ازای $\gamma\le\alpha+\beta$ همگراست.

پاسخ: گزینه «۱» از آزمون گاوس استفاده می‌کنیم.

$$\frac{U_n}{U_{n+1}}=\frac{\dfrac{x^n}{n!}\times\dfrac{\alpha\dots(\alpha+n-1)\ \beta\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}}{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{\alpha\dots(\alpha+n)\beta\dots(\beta+n)}{\gamma\dots(\gamma+n)}}=\frac{n+1}{x}\frac{\gamma+n}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{1}{x}\frac{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$$

$$=\frac{n^2+[(\gamma+1)-(\alpha+\beta)]n+(\gamma-\alpha\beta)+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$$

$$x=1\ \text{برای}\ =1+\frac{\gamma+1-(\alpha+\beta)}{n}+\frac{\gamma-\alpha\beta}{n^2}\begin{cases}\gamma+1-(\alpha+\beta)>1\rightarrow\gamma>\alpha+\beta & \text{همگرا}\\ \gamma+1-(\alpha+\beta)<1\rightarrow\gamma<\alpha+\beta & \text{واگرا}\end{cases}$$

در $x=\pm 1$ طبق آزمون گاوس، اگر $\gamma>\alpha+\beta$ سری همگراست و اگر $\gamma\le\alpha+\beta$ سری واگرا است.

مثال۴۲: رفتار سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-\ln n}{\cosh(n)}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3e^n}{n!}$ به ترتیب کدام است؟

۱) همگرا ـ همگرا　　۲) واگرا ـ واگرا　　۳) همگرا ـ واگرا　　۴) واگرا ـ همگرا

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه قدرت رشد $\ln n<2^n$ در $n\to\infty$ است، همچنین با توجه به اینکه در $n\to\infty$ $\cosh(n)\simeq\frac{e^n}{2}$ است، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-\ln n}{\cosh(n)}\simeq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\frac{e^n}{2}}\simeq\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{e})^n$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{e})^n$ همگر است (زیرا $\frac{2}{e}<1$ است)، پس اولین سری همگر است. برای بررسی همگرایی سری دوم با استفاده از آزمون ریشه می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3e^n}{n!}}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{e\sqrt[n]{n^3}}{\frac{n}{e}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n}\simeq 0$$

بنابراین سری دوم نیز همگر است و پاسخ گزینه ۱ است.

مثال۴۳: ضریب x^3 در بسط مک‌لوران تابع $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $-\frac{1}{3}$　　۴) $-\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از بسط مک لوران $\sqrt{1+x^2}$ داریم:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\simeq 1+\frac{1}{2}x^2$$

حال می‌توان نوشت:

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln(x+1+\frac{1}{2}x^2)\simeq(x+\frac{x^2}{2})-\frac{(x+\frac{x^2}{2})^2}{2}+\frac{(x+\frac{x^2}{2})^3}{3}$$

با توجه به این که ضریب x^3 در جمله دوم $-\frac{1}{2}$ و در جمله سوم $\frac{1}{3}$ است، خواهیم داشت:

$$x^3\ \text{ضریب}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-3+2}{6}=-\frac{1}{6}$$

در نتیجه گزینه «۴» صحیح می‌باشد.

فصل چهارم

«فضاهای برداری»

مثال۱: فضای اعداد مختلط، یک فضای برداری:

۱) یک بعدی است. ۲) دو بعدی است. ۳) سه بعدی است. ۴) نامتناهی بعد است.

پاسخ: گزینه «۲» درست است. پایه‌ی این فضا همان $\{1,i\}$ است و می‌توان هر بردار را در فضای برداری $\mathbb{C}$ بر حسب این پایه بسط داد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: برای تابع وزن $\rho(t)=t^{2}$ و بازه‌ی $[1,2]$ برای P^{n} بردار $|e_{0}>$ برابر است با:

۱) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ۲) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ ۳) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ ۴) $\sqrt{\frac{3}{8}}$

پاسخ: گزینه «۱» برای $|a_{0}>=1$ داریم:

$$<a_{0}|a_{0}>=\int_{1}^{2}t^{2}\,dt=\frac{t^{3}}{3}\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{3}(8-1)=\frac{7}{3}$$

$$|e_{0}>=\frac{1}{\sqrt{<a_{0}|a_{0}>}}|a_{0}>=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: حاصل عمل پاریته (معکوس کردن نسبت به مبدأ) روی نقطه (ρ,ϕ,z) نسبت به محورهای ثابت x ، y و z شامل کدامیک از تبدیلات زیر است؟

۱) $\rho\to\rho$ ، $\phi\to\phi+\pi$ ، $z\to -z$ ۲) $\rho\to\rho$ ، $\phi\to\phi-\pi$ ، $z\to -z$

۳) $\rho\to\rho$ ، $\phi\to\phi\pm\pi$ ، $z\to -z$ ۴) $\rho\to\rho$ ، $\phi\to\phi$ ، $z\to -z$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم عمل پاریته، مختصات دکارتی را به صورت $\begin{cases}x\to -x\\ y\to -y\\ z\to -z\end{cases}$ تبدیل می‌کند. اکنون با در نظر گرفتن بیان مختصات استوانه‌ای برحسب مختصات دکارتی، می‌دانیم که ρ بدون تغییر می‌ماند. همچنین $z\to -z$ و $\phi\to\phi\pm\pi$ تبدیل می‌شود از این‌رو داریم:

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\\ z=z\\ \phi=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

تنها تفاوت گزینه‌ها تبدیل ϕ تحت پاریته است. دو حالت داریم یا ϕ در ناحیه یک و دو مختصات است که در x' زاویه $\phi+\pi$ است. یا در ناحیه ۳ و ۴ هستیم که $\phi'=\phi-\pi$ پس دو حالت $\phi\pm\pi$ را داریم.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: کدام یک از گزینه‌های ذیل نادرست است؟

۱) شمار اعضای موجود در یک رده از یک گروه متناهی یکی از مقسوم علیه‌های مرتبه‌ی آن گروه است.

۲) هر عضو گروه اصلی می‌تواند به بیش از یک رده متعلق باشد.

۳) همه‌ی نمایش‌های با ابعاد بزرگ‌تر از یک گروه آبلی تحویل پذیرند.

۴) اگر برای یک گروه یک نمایش ماتریسی داشته باشیم می‌توانیم با محاسبه‌ی دترمینان‌ها یک نمایش یک‌بعدی از گروه بسازیم.

پاسخ: گزینه«۲» گزینه ۲: فرض کنید x به دو رده‌ی مختلف متعلق باشد. با فرض اینکه y_1 و y_2 هم‌رده نیستند داریم:

$$g_i x g_i^{-1}=y_1$$

$$g_j x g_j^{-1}=y_2$$

حال با معکوس‌گیری می‌توانیم مقدار x را بدست آوریم:

$$x=g_i^{-1}y_1 g_i\quad,\quad x=g_j^{-1}y_2 g_j\ \Rightarrow\ g_i^{-1}y_1 g_i=g_j^{-1}y_2 g_j$$

بنابراین با محاسبه y_1 برحسب y_2 داریم:

$$y_1=g_i g_j^{-1}y_2 g_j g_i^{-1}=g_i g_j^{-1}y_2(g_i g_j^{-1})^{-1}$$

یعنی y_1, y_2 هم‌رده هستند. پس فرض اول غلط است و x تنها به یک رده تعلق دارد.

مثال۵: در دستگاه مختصات دکارتی، شرط تعامد با کدامیک از روابط زیر داده می‌شود؟

۱) $\sum\limits_i a_{ij}a_{jk}=\delta_{ik}$ ۲) $\sum\limits_i a_{ji}a_{ki}=\delta_{jk}$ ۳) $\sum\limits_i a_{ii}a_{jk}=\delta_{jk}$ ۴) $\sum\limits_i a_{kk}a_{ij}=\delta_{jk}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق تعریف، اگر برداری را در دستگاه مختصات دکارتی چرخیده پریم‌دار برحسب مولفه‌هایش در دستگاه سون پریم بنویسیم، داریم:

$$V_i'=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}V_j$$

که در آن $a_{ij}=\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ همان کسینوس زاویه میان جهت مثبت با محور x_i' و جهت مثبت محور x_j است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_i a_{ij}a_{ik}=\sum_i\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}$$

با توجه به ویژگی دستگاه مختصات دکارتی که در آن $a_{ij}=a_{ji}$ می‌باشد به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\sum_i\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}=\sum_i\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}=\frac{\partial x_k}{\partial x_j}=\delta_{ij}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: کدامیک از روابط زیر در مورد کسینوس‌های هادی میان دو دستگاه مختصات دکارتی صحیح نیست؟

۱) $\sum\limits_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk}$ ۲) $\sum\limits_i a_{ji}a_{ki}=\delta_{jk}$ ۳) $\sum\limits_i a_{ij}a_{kj}=\delta_{jk}$ ۴) $\sum\limits_i (2a_{ij})(\frac{a_{ik}}{2})=\delta_{jk}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که کسینوس‌های هادی a_{ij} در شرط تعامد روبرو صدق می‌کنند. $\sum\limits_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk}$

از این‌رو با در نظر گرفتن این مطلب که $a_{ij}=\dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j}=\dfrac{\partial x_j}{\partial x_i'}$ که در آن x و x' دو دستگاه مختصات دکارتی هستند، خواهیم داشت:

$$\Sigma a_{ij}a_{kj}=\Sigma(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\frac{\partial x_k'}{\partial x_j})$$

در این‌صورت حتی در صورتی که $j=k$ شود، ضرب دو کسر نمی‌توانند همدیگر را ساده کنند و حاصل هیچگاه به صورت δ_{jk} درنخواهد آمد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: طول ناوردا در یک مدل فریدمانی تخت از جهان در کیهان‌شناسی بر حسب زمان همواره به صورت $ds^2=a^2[d\tau^2-\delta_{ij}dx^idx^j]$ است که $i,j=1,2,3$ است. Γ_{ij}^{τ} , $\Gamma_{\tau\tau}^{\tau}$ به ترتیب برابرند با: (a' مشتق زمانی a است)

۱) $-\frac{a'}{a}\delta_{ij}$ و $-\frac{a'}{a}$ ۲) $-\frac{a'}{a}\delta_{ij}$ و $\frac{a'}{a}$ ۳) $+\frac{a'}{a}\delta_{ij}$ و $-\frac{a'}{a}$ ۴) $\frac{a'}{a}\delta_{ij}$ و $\frac{a'}{a}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به طول ناوردای داده شده $g_{\tau\tau}=a^2$ و $g_{ij}=-a^2\delta_{ij}$ است باقی عناصر صفرند.

با توجه به تعریف نماد کریستوفل داریم:

$$\Gamma_{ij}^{\tau}=\frac{1}{2}g^{\tau\alpha}(\partial_i g_{\alpha j}+\partial_j g_{i\alpha}-\partial_\alpha g_{ij})$$

در α جمع‌بندی وجود دارد، اما فقط عنصر غیرصفر با توجه به $g^{\tau\alpha}$ ، $\alpha_{\tau\tau}$ است لذا:

$$\Gamma_{ij}^{\tau}=\frac{1}{2}g^{\tau\tau}(\partial_i g_{\tau i}+\partial_j g_{i\tau}-\partial_\tau g_{ij})=-\frac{1}{2}g^{\tau\tau}\partial_\tau g_{ij})$$

اما $g^{\tau\tau}$ عکس $g_{\tau\tau}$ است، زیرا متریک قطری است پس می‌توان نوشت:

$$\Gamma_{ij}^{\tau}=-\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\tau}(-a^2\delta_{ij})=\frac{a'}{a}\delta_{ij}$$

به طور مشابه داریم:

$$\Gamma_{\tau\tau}^{\tau}=\frac{1}{2}g^{\tau\alpha}(\partial_\tau g_{\alpha\tau}+\partial_\tau g_{\tau\alpha}-\partial_\alpha g_{\tau\tau})$$

اما باز هم فقط حالت غیرصفر به ازای $\alpha=\tau$ بدست می‌آید، پس داریم:

$$\Gamma_{\tau\tau}^{\tau}=\frac{1}{2}g^{\tau\tau}(\partial_\tau g_{\tau\tau})=\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\tau}a^2=\frac{a'}{a}$$

مثال۸: می‌خواهیم از چند جمله‌ای‌های $U_n(x)=x^n$ ... $n=0,1,2,$ در بازه‌ی $[0,1]$ مجموعه‌ی توابع متعامد بهنجاری را بسازیم. تابع دوم بهنجار برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{24}x-\frac{1}{48}$ ۲) $\frac{1}{12}x-\frac{1}{24}$ ۳) $\sqrt{6}(2x-1)$ ۴) $\sqrt{3}(2x-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از روش متعامدسازی گرام اشمیت استفاده می‌کنیم با $u_0(x)=1$ بنابراین داریم:

$$\psi_0(x)=1 \Longrightarrow \int_0^1 dx\,\psi_0^2(x)=\int_0^1 dx=1$$

در نتیجه اولین چندجمله‌ای به صورت مقابل است: $\psi_0(x)=1$

برای $u_1(x)=x$ باید ترکیب خطی بسازیم که بر $\psi_0(x)$ عمود باشد: $\varphi_1(x)=x+a\psi_0=x+a \quad (1)$

لذا با ترکیب خطی ψ_0 و φ_1 و شرط تعامد داریم:

$$<\psi_0|\varphi_1>=\int_0^1 dx\,x+a\int_0^1 dx=\frac{1}{2}+a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

با $u=x-\frac{1}{2}$ به دست می‌آید:

$$\int_0^1 dx\,\varphi_1^2(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du\,u^2=2\int_0^{\frac{1}{2}} du\,u^2=2\times\frac{1}{3}u^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{12} \qquad (2)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\psi_1=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{12}}}\varphi_1=\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2x-1)$$

مثال۹: می‌خواهیم از روی چند جمله‌ای‌های $U_n(x)=x^n$ در بازه‌ی $[0,1]$ مجموعه‌ی توابع متعامد با بهنجارش $\psi_n(0)=1$ بسازیم. تابع $\psi_2(x)$ برابر است با:

۱) $3x^2-3x+1$ ۲) $6x^2-6x+1$ ۳) $-\frac{6}{5}x^2-\frac{6}{5}x+1$ ۴) $-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{5}x+1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» جمله‌ی اول $U_0(x)=1$، $\varphi_0(x)=1$ و $\varphi_0(0)=1$ است لذا $\psi_0(x)=1$ می‌باشد. برای ψ_0 $\varphi_1(x)=x+a\psi_0$ خواهد بود.

لذا از تعامد خواهیم داشت:

$$<\psi_0|\varphi_1)=0=\int_0^1 dx\,x+a\int_1^1 dx=\frac{1}{2}+a \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

با توجه به این که $\varphi_1(x)=x-\frac{1}{2}$ است و $\varphi_1(0)=-\frac{1}{2}$ می‌توان نوشت: $\psi_1(x)=-2x+1$

برای $\varphi_2(x)$ نیز داریم:

$$\varphi_2(x)=x^2+a\psi_1+b\psi_0=x^2+a(-2x+1)+b=x^2-2ax+a+b$$

از تعامد ψ_0 و $\varphi_2(x)$ داریم:

$$<\psi_0|\varphi_2>=\int_0^1 dx\,x^2-2a\int_0^1 dx\,x+(a+b)\int_0^1 dx=\frac{1}{3}-a+a+b=b+\frac{1}{3}=0$$

با توجه به این که $b=-\frac{1}{3}$ است و از تعامد ψ_1 با $\varphi_2(x)$ داریم:

$$<\psi_1|\varphi_2>=\int_0^1 dx\,x^2-2a\int_0^1 dx\,x+(a+b)+\int_0^1 dx\left(-2x^3+(4a+1)x^2+x\left(-4a+\frac{2}{3}\right)+a-\frac{1}{3}\right)$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$<\psi_1|\varphi_2>=0=-\frac{1}{2}+\frac{4a}{3}+\frac{1}{3}-a=-\frac{1}{6}+\frac{a}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

بنابراین $\varphi_2=x^2-x\frac{1}{6}$ است و $\varphi_2(0)=\frac{1}{6}$. در نتیجه داریم: $\psi_2(x)=6x^2-6x+1$

مثال۱۰: کدام گزینه یک فضای برداری است؟

۱) مجموعه‌ی اعداد حقیقی روی میدان مختلط

۲) مجموعه‌ی تمامی چند جمله‌ای‌ها از مرتبه‌ی n و پایین‌تر روی میدان حقیقی با ضرایب حقیقی

۳) مجموعه‌ی تمامی چند جمله‌ای‌ها از مرتبه‌ی n و پایین‌تر روی میدان مختلط با ضرایب حقیقی

۴) مجموعه‌ی اعداد گویا روی میدان اعداد حقیقی

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مجموعه‌ی اعداد حقیقی روی میدان مختلط یک فضای برداری نیست؛ زیرا ضرب یک اسکالر در یک بردار، یعنی ضرب عدد مختلط در یک عدد حقیقی یک عدد مختلط است و به اعداد حقیقی متعلق نیست. همین مسئله نشان می‌دهد مجموعه‌ی اعداد گویا روی میدان اعداد حقیقی نیز یک فضای برداری نیست. از طرفی گزینه‌ی ۳ نیز یک فضای برداری نیست؛ زیرا به عنوان مثال $2t^n$ یک عضو مجموعه و i یک اسکالر است، امّا $2it^n$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی نیست. گزینه‌ی ۲ تمامی شرایط فضای برداری را داراست، پس یک فضای برداری است.

مثال۱۱: اگر در یک فضای خمیده $ds^2 = e^{\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$ باشد که $\lambda(r,\theta)$ است، آن‌گاه حاصل $\Gamma^r_{\theta\theta}$ و $\Gamma^r_{\theta r}$ که نمادهای کریستوفل هستند به ترتیب برابر است با:

۱) $-re^{-\lambda}\ ,\ \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}e^{-\lambda}$ ۲) $-re^{-\lambda}\ ,\ \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}$ ۳) $re^{-\lambda}\ ,\ \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}e^{-\lambda}$ ۴) $re^{-\lambda}\ ,\ \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای یک نماد کریستوفل داریم:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{i\ell}}{2}(\partial_j g_{\ell k} + \partial_k g_{j\ell} - \partial_\ell g_{jk})$$

متریک داده شده قطری است و این محاسبه را به شدت ساده می‌سازد، از این رو داریم:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{r\alpha}(\partial_\theta g_{\alpha\theta} + \partial_\theta g_{\alpha\theta} - \partial_\alpha g_{\theta\theta})$$

که جمع روی $\alpha = r,\theta,\varphi$ است، اما به علت قطری بودن تنها $\alpha = r$ سهم می‌دهد.

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{r\alpha}(2\partial_\theta g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-\partial_r g_{\theta\theta})$$

از طرفی واضح است که $g_{rr} = e^{\lambda}$ و $g_{\theta\theta} = r^2$ و $g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$ است و از وارون ماتریس g، $g^{rr} = e^{-\lambda}$ است پس:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\partial_r r^2 = -re^{-\lambda}$$

حال برای $\Gamma^r_{\theta r}$ از رابطه‌ی ذکر شده داریم:

$$\Gamma^r_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{r\alpha}(-\partial_\alpha g_{\theta r} + \partial_r g_{\alpha\theta} + \partial_\theta g_{\alpha r})$$

اما به علت قطری بودن از $g^{r\alpha}$، تنها $\alpha = r$ سهم می‌دهد، پس خواهیم داشت:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}(+\partial_\theta g_{rr}) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\partial_\theta e^{\lambda} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}e^{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}$$

مثال۱۲: عمل حاصله از پارتیه (معکوس) کردن نسبت به مبدأ روی نقطه (x,y,z) نسبت به محورهای استوانه‌ای (p,φ,z) به کدام یک از تبدیلات زیر می‌انجامد؟

۱) $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \\ z \to -z \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x \to x \\ y \to -y \\ z \to -z \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \\ z \to -z \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x \to x \\ y \to y \\ z \to -z \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم که در عمل معکوس کردن در مختصات استوانه‌ای $\begin{cases} P \to +P \\ \theta_{new} \to \theta \pm \pi \\ z \to -z \end{cases}$ تبدیل می‌گردد از این رو با توجه به اینکه $x = p\cos\theta$ و $y = p\sin\theta$ و $z = z$ است از خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = p\cos(\theta_{new}) = -p\cos\theta \\ y = p\sin(\theta_{new}) = -p\sin\theta \\ z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{new} = -x \\ y_{new} = -y \\ z_{new} - z \end{cases}$$

بنابراین گزینه «۱» صحیح است.

فصل پنجم

«اعداد و توابع مختلط و نگاشت»

مثال۱: حاصل $A=(1+2i)(i+2)$ برابر است با:

۱) $5i$ ۲) $-5i$ ۳) 5 ۴) 5

پاسخ : گزینه «۱»

$$A=(1+2i)(2+i)=2+i+4i+2i^2=2+5i-2=5i$$

مثال۲: حاصل $A=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ کدام است؟

۱) i ۲) $-i$ ۳) 4 ۴) -4

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}i^2}{3+1}=\frac{4i}{4}=i$$

مثال۳: حاصل $A=\dfrac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{i}{10}$ ۲) $-\dfrac{i}{10}$ ۳) $\dfrac{1}{10}$ ۴) $-\dfrac{1}{10}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}=\frac{1}{(2+i+2i+i^2)(3+i)}=\frac{1}{(1+3i)(3+i)}\Rightarrow A=\frac{1}{3+i+9i+3i^2}=\frac{1}{10i}=\frac{1}{10i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{10i^2}=-\frac{i}{10}$$

مثال۴: در معادله مختلط $3x+2iy-ix+5y=7+5i$، مقادیر اعداد حقیقی x و y کدام است؟

۱) $x=-1\,,\,y=2$ ۲) $x=1\,,\,y=-2$ ۳) $x=0\,,\,y=-2$ ۴) $x=1\,,\,y=0$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا طرف چپ تساوی را مرتب می‌کنیم:

$$(3x+5y)+(2y-x)i=7+5i$$

برای آنکه تساوی فوق برقرار باشد، لازم است مقادیر حقیقی و موهومی در طرفین تساوی با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases}3x+5y=7\\2y-x=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+5y=7\\6y-3x=15\end{cases}\Rightarrow 11y=22\Rightarrow y=2\,,\,x=-1$$

مثال۵: مقدار $\dfrac{i^{36}-i^{27}}{i^{124}-i^{12}+i^{5}}$ برابر کدام است؟

۱) $1-i$ ۲) $1+i$ ۳) $i-1$ ۴) $-i-1$

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم $i^2=-1$، بنابراین:

$$\frac{i^{36}-i^{27}}{i^{124}-i^{12}+i^{5}}=\frac{(i^2)^{18}-(i^2)^{13}i}{(i^2)^{62}-(i^2)^{6}+(i^2)^{2}i}=\frac{(-1)^{18}-(-1)^{13}i}{(-1)^{62}-(-1)^{6}+(-1)^{2}i}=\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i-1}{-1}=1-i$$

مثال۶: فرض کنید $z\in C$ و $|z+ai|=|z+bi|$ (a و b اعداد حقیقی و $a\neq b$) در این صورت مقدار $z-\bar{z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-(a+b)i$ ۲) $-(a-b)i$ ۳) $(a-b)i$ ۴) $(a+b)i$

پاسخ : گزینه «۱» با فرض $z=x+iy$ داریم:

$$|x+iy+ai|=|x+iy+bi|\Rightarrow x^2+(y+a)^2=x^2+(y+b)^2\Rightarrow y+a=\pm(y+b)\Rightarrow y=-(\frac{a+b}{2})\quad(1)$$

$$z-\bar{z}=(x+iy)-(x-iy)=2yi\xrightarrow{(1)}z-\bar{z}=2[-(\frac{a+b}{2})]i=-(a+b)i$$

مثال۷: فرض کنیم z_1 و z_2 دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمی که $\dfrac{|z_1-\bar{z}_2|}{|z_1+\bar{z}_2|}=1$ ، در این صورت:

۱) $Re(z_1z_2)=0$　۲) $Re(z_1z_2)<0$　۳) $Im(z_1z_2)=0$　۴) $Re(z_1z_2)>0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» این سؤال را به روش تشریحی و روش تستی پاسخ می‌دهیم:

$$\begin{cases} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{|x_1+iy_1-(x_2-iy_2)|}{|x_1+iy_1+x_2-iy_2|}=1 \Rightarrow \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}{(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=1$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2$$

$$\Rightarrow 4x_1x_2-4y_1y_2=0 \Rightarrow x_1x_2-y_1y_2=0 \qquad (1)$$

$$z_1.z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \Rightarrow x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)i-y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\Rightarrow Re(z_1z_2)=x_1x_2-y_1y_2 \xrightarrow{(1)} Re(z_1.z_2)=0$$

روش تستی: اگر فرض کنیم $z_1=i$ و $z_2=1$، آنگاه شرایط صورت سؤال برقرار است و برای این دو عدد داریم:

$$\begin{cases} Re(z_1z_2)=Re(i\times 1)=Re(i)=0 \\ Im(z_1z_2)=Im(i\times 1)=Im(i)=1 \end{cases}$$

واضح است فقط گزینه (۱) صحیح است.

مثال۸: حاصل عبارت $k=\dfrac{\sqrt{1+z^2}+iz}{z-i\sqrt{1+z^2}}$ کدام است؟

۱) 1　۲) $-i$　۳) -1　۴) $+i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

روش اول: با ضرب کردن مزدوج عبارت مخرج، در صورت و مخرج کسر داریم:

$$k=\frac{(\sqrt{1+z^2}+iz)(z+i\sqrt{1+z^2})}{(z-i\sqrt{1+z^2})(z+i\sqrt{1+z^2})}=\frac{z\sqrt{1+z^2}+i(1+z^2)+iz^2+i^2z\sqrt{1+z^2}}{z^2-i^2(1+z^2)}=\frac{i(2z^2+1)}{2z^2+1}=i$$

روش دوم: راه حل ساده‌تر این است که با توجه به عبارت‌های صورت و مخرج، کسر را در عبارت $\frac{i}{i}$ ضرب کنیم و i را در صورت، پشت پرانتز، نگه داشته و i در مخرج کسر را در پرانتز ضرب می‌کنیم:

$$\frac{(\sqrt{1+z^2}+iz)}{(z-i\sqrt{1+z^2})}\times\frac{i}{i}=\frac{i(\sqrt{1+z^2}+iz)}{(iz+\sqrt{1+z^2})}=i$$

مثال۹: اگر $z_1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$ و $z_2=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$، مقدار $\dfrac{z_1^4}{z_2}$ کدام است؟

۱) $-i$　۲) -1　۳) 1　۴) i

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا اعداد داده شده را به فرم نمایی می‌نویسیم. $z_1=e^{\frac{\pi}{5}i}$, $z_2=e^{-\frac{\pi}{5}i}$ داریم:

$$\frac{z_1^4}{z_2}=\frac{(e^{\frac{\pi}{5}i})^4}{e^{-\frac{\pi}{5}i}}=e^{\frac{4\pi}{5}i}.e^{\frac{\pi}{5}i}=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

مثال۱۰: i^{-i} برابر چیست؟

۱) $e^{-\frac{\pi}{2}}$　۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$　۳) 1　۴) -1

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$، لذا داریم:

$$i^{-i}=(e^{\frac{\pi}{2}i})^{-i}=e^{\frac{\pi}{2}}$$

مثال۱۱: حاصل $(2+2\sqrt{3}i)^5$ کدام است؟

۱) $1024\angle 60^\circ$ ۲) $1024\angle 300^\circ$ ۳) $256\sqrt{2}\angle 30^\circ$ ۴) $256\sqrt{2}\angle 60^\circ$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» می‌دانیم $2+2\sqrt{3}i=4e^{\frac{\pi}{3}i}$، بنابراین:

$$(2+2\sqrt{3}i)^5=(4e^{\frac{\pi}{3}i})^5=4^5(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=1024\angle 300^\circ$$

مثال۱۲: حاصل عبارت $\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ -1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\Rightarrow\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}=\frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^8}{2^7\times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{8\pi}{3}i}}{e^{\frac{2\pi}{3}i}}=e^{\frac{6\pi}{3}i}=1$$

مثال۱۳: حاصل $z=(1+i)^{200}$ کدام است؟

۱) 2^{200} ۲) 2^{100} ۳) 2^{50} ۴) $2^{50}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به نکته فوق $n=200$ و لذا $z=(2i)^{\frac{200}{2}}=(2i)^{100}=2^{100}$ می‌باشد.

مثال۱۴: حاصل $z=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i$ ۴) $\sqrt{\sqrt{3}+i}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» می‌دانیم $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$، بنابراین:

$$z=\sqrt{2e^{\frac{\pi}{3}i}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})}=\sqrt{2}[\cos(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})+i\sin(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})]$$

$$k=0\Rightarrow z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$$

مثال۱۵: یکی از ریشه‌های معادله $z^2+(2i-3)z+5-i=0$ کدام است؟

۱) $1-i$ ۲) $2+3i$ ۳) $2-3i$ ۴) $-1-i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا باید دلتای معادله را تشکیل دهیم:

$$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(2i-3)^2-4(1)(5-i)}=\sqrt{4i^2+9-12i-20+4i}=\sqrt{-15-8i}=\sqrt{(1-4i)^2}=1-4i$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2i-3)\pm(1-4i)}{2\times 1}\Rightarrow\begin{cases}z_1=\frac{-2i+3+1-4i}{2}=\frac{4-6i}{2}=2-3i\\ z_2=\frac{-2i+3-1+4i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i\end{cases}$$

مثال۱۶: مجموع قدر مطلق ریشه‌های معادله $z^4+z^2+1=0$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۴　　۳) $4\sqrt{2}$　　۴) $\sqrt{8}$

پاسخ : گزینه «۲» با فرض $z^2=A$ داریم:

$$A^2+A+1=0 \Rightarrow A=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2\times 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

با توجه به اینکه $A=z^2$ لذا داریم:

$$z^2=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i \Rightarrow z_{1,2}=\sqrt{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

با توجه به تساوی به دست آمده لازم است ریشه‌های دوم عبارت $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ حساب شود، برای به دست آوردن ریشه دوم $\mathbf{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ داریم:

$$r=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1 \quad , \quad \theta=\mathrm{Arctg}(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}})=\mathrm{Arctg}(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$$

$$z_1=\cos\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{2}=\cos(k\pi+\frac{2\pi}{6})+i\sin(k\pi+\frac{2\pi}{6})=\cos(k\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(k\pi+\frac{\pi}{3})$$

$$k=0 \Rightarrow z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ k=1 \Rightarrow z_1=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

برای به دست آوردن ریشه دوم $\mathbf{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ داریم:

$$r=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1 \quad , \quad \theta=\mathrm{Arctg}(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}})=\mathrm{Arctg}\sqrt{3}=\frac{4\pi}{3} \ \text{یا} \ \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{نقطه در ربع سوم است}} \theta=\frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z_2=\cos(\frac{2k\pi+\frac{4\pi}{3}}{2})+i\sin(\frac{2k\pi+\frac{4\pi}{3}}{2})=\cos(k\pi+\frac{4\pi}{6})+i\sin(k\pi+\frac{4\pi}{6})$$

$$k=0 \Rightarrow z_2=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad k=1 \Rightarrow z_2=\cos(\pi+\frac{2\pi}{3})+i\sin(\pi+\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

قدر مطلق هر ریشه برابر با عدد یک است، لذا مجموع قدر مطلق ریشه‌ها برابر عدد چهار است.

مثال۱۷: یکی از جوابهای معادله $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ کدام است؟

۱) $\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}$　　۲) $\cos\frac{4k\pi}{5}-i\sin\frac{4k\pi}{5}$　　۳) $\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}$　　۴) $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

پاسخ : گزینه «۴» طبق نکته گفته شده باید طرفین معادله را در $1-z$ ضرب کنیم و خواهیم داشت:

$$(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4)=0 \Rightarrow 1-z^5=0 \Rightarrow z^5=1$$

باید ریشه‌های پنجم عدد یک را به دست بیاوریم:

$$z=e^{\frac{2k\pi i}{n}} \xrightarrow{n=5} z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$$

به ازای $k=1$ یکی از جوابها به صورت مقابل است:

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

مثال۱۸: یکی از جواب‌های معادله $1-iz-z^2+iz^3+z^4=0$ به صورت $\cos\alpha+i\sin\alpha$ است، کمترین مقدار α در بازه $[0,2\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{10}$ ۳) $\frac{2\pi}{5}$ ۴) $\frac{3\pi}{10}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا طرفین معادله را در $(1+iz)$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(1+iz)(1-iz-z^2+iz^3+z^4)=0 \Rightarrow 1+(iz)^5=0 \Rightarrow 1+iz^5=0 \Rightarrow z^5=\frac{-1}{i}=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$$

یادآوری: اگر n فرد باشد آنگاه داریم: $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+\cdots+b^{n-1})$.

مثال۱۹: اگر z یکی از ریشه‌های موهومی nام عدد یک باشد، آنگاه حاصل عبارت $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $n(n-1)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون z یکی از ریشه‌های nام موهومی عدد یک است، لذا $z^n=1$ و $z\neq 1$ است، چون گفته شده z یکی از ریشه‌های موهومی عدد یک است. پس $z^n-1=0$ می‌باشد، لذا داریم:

$$z^n-1=0 \Rightarrow (z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=0$$

با توجه به معادله به دست آمده باید یکی از پرانتزها برابر عدد صفر شود.

$$z-1=0 \Rightarrow z=1 \quad \text{یا} \quad 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$$

از طرفی گفتیم $z=1$ قابل قبول نیست، پس حتماً تساوی $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$ برقرار می‌باشد.

مثال۲۰: هرگاه $f(z)=\frac{xy}{x^2-y^2}+i(2xy)$ آنگاه $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) i ۴) حد موجود نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2-y^2}$ موجود نیست، چون اگر روی خط $y=mx$ به نقطه $(0,0)$ نزدیک شویم، داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2-y^2}\overset{y=mx}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x(mx)}{x^2-(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1-m^2)}=\frac{m}{1-m^2}$$

چون جواب به m بستگی دارد (یعنی به ازای مقادیر مختلف m، حاصل حد مقادیر مختلفی پیدا می‌کند و این با تعریف منحصر به فرد بودن حد تابع در تناقض است) پس حد موجود نیست. دقت کنید دیگر لازم نیست مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2xy$ را بررسی کنیم، چون برای وجود حد باید حد هر دو قسمت وجود داشته باشد.

مثال۲۱: اگر $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$ و $f(z)=z\bar{z}$ ، کدام عبارت صحیح است؟

۱) $f(z)$ در صفحه z تحلیلی نیست.
۲) $f(z)$ فقط در $z=0$ مشتق‌پذیر نیست.
۳) $f(z)$ در همهٔ نقاط صفحهٔ z تحلیلی است.
۴) $f(z)$ در همهٔ نقاط صفحهٔ z دارای مشتق نسبت به z است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به علت وجود $\bar{z}$ در ترکیب تابع $f(z)$، تابع f نمی‌تواند تحلیلی باشد.

مثال۲۲: تابع $f(z)=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$:

۱) همه جا مشتق‌پذیر است. ۲) تنها در مبدأ مختصات تحلیلی نیست. ۳) دارای خط شاخه‌ای است. ۴) هیچ‌جا تحلیلی نیست.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ممکن است در نگاه اول با توجه به وجود $\bar{z}$ درضابطه تابع گزینه (۴) انتخاب شود، اما با کمی دقت ملاحظه می‌گردد با توجه به رابطه $|z|^2=z.\bar{z}$ عامل $\bar{z}$ از ضابطه تابع حذف خواهد شد.

$$f(z)=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}=\frac{1}{z}$$

و تابع در تمام نقاط غیر از نقطه $z=0$ تحلیلی است.

مثال ۲۳: اگر $|e^{-iz}| \le ۱$، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $y \le ۰$ ۲) $y = ۰$ ۳) $x \ge ۰$ ۴) $x = ۰$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به اینکه اندازه عدد مختلط e^{-iz} باید کوچکتر یا مساوی یک باشد، داریم: $e^{-iz} = e^{-i(x+iy)} = e^{y-ix} \Rightarrow |e^{y-ix}| < ۱$

اندازه e^{y-ix} باید کوچکتر یا مساوی یک باشد و می‌دانیم اندازه این عدد مختلط برابر e^y می‌باشد و این عبارت زمانی کوچکتر یا مساوی یک می‌شود که $y \le ۰$ باشد.

مثال ۲۴: معادله $\cos z = ۲$ وقتی که z عدد موهومی محض می‌باشد:

۱) دارای بی‌نهایت جواب حقیقی است.
۲) دارای هیچ جوابی نیست چون $-۱ < \cos z < ۱$ است.
۳) دارای بی‌نهایت جواب مختلط است.
۴) دارای تعداد محدودی جواب مختلط است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\cos z = \cos x . \cosh y - i \sin x . \sinh y = ۲ \xrightarrow{\text{باید مقدار قسمت موهومی صفر باشد}} \sin x . \sinh y = ۰$$

اگر $\sin x = ۰$ باشد، آنگاه $x = k\pi$ خواهد بود و می‌دانیم وقتی $x = k\pi$ باشد، آنگاه $\cos x = (-۱)^k$ خواهد بود، لذا داریم:

$$(-۱)^k \cosh y = ۲ \Rightarrow \cosh y = \pm ۲ \xrightarrow{\cosh y > ۰} \cosh y = ۲$$

از معادله‌ی فوق، مقادیری برای y بدست می‌آید. که چون این دو مقدار y به ازای x های مختلف، $(x = k\pi)$ حاصل می‌شوند، z دارای بیشمار جواب مختلط است.

هر چند نیازی به بررسی نیست، اما حالت دیگر معادله (۱) را نیز بررسی می‌کنیم اگر $\sinh y = ۰$ آنگاه بر طبق اتحاد $\cosh^۲ y - \sinh^۲ y = ۱$ مقدار $\cosh y = ۱$ می‌شود و آنگاه داریم: $\cos x \times ۱ = ۲ \Rightarrow \cos x = ۲ \Rightarrow$ امکان ندارد

مثال ۲۵: تصویر ناحیه $۰ < y < \frac{۱}{۴}$ به وسیله تبدیل $w = \frac{۱}{z}$ کدام ناحیه است؟

(۴) (۳) (۲) (۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$۰ < y < \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۰ < \frac{-v}{u^۲ + v^۲} < \frac{۱}{۴} \Rightarrow u^۲ + v^۲ + ۴v > ۰ \Rightarrow u^۲ + (v+۲)^۲ > ۴$$

با توجه به نکات فوق، چون خط از مبدأ عبور نمی‌کند معادله بالا به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند. ناحیه مزبور خارج دایره‌ای به مرکز $(۰, -۲)$ و شعاع ۲ می‌باشد. از طرفی چون $y = -\frac{v}{u^۲ + v^۲}$ و $y > ۰$ می‌باشد پس $v < ۰$ لذا گزینه (۳) جواب است.

مثال ۲۶: جواب‌های معادله $\sin z = ۲$ کدام است؟

۱) $z = (۲n + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲} + Ln(۲ + \sqrt{۳})$
۲) $z = (۲n + \frac{۱}{۲})\pi - Ln(۲ + \sqrt{۳})$
۳) $z = ۲n\pi + iLn(۲ \pm \sqrt{۳})$
۴) $z = (۲n + \frac{۱}{۲})\pi - iLn(۲ \pm \sqrt{۳})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\sin z = ۲ \Rightarrow z = \text{Arc}\sin ۲$$

$$z = -iLn[i(۲) + \sqrt{۱ - (۲)^۲}] = -iLn(۲i + \sqrt{-۳}) = -iLn(۲i \pm \sqrt{۳}i) = -iLni(۲ \pm \sqrt{۳}) = -i[Lni + Ln(۲ \pm \sqrt{۳})] + ۲n\pi$$

$$= -i \times i\frac{\pi}{۲} - iLn(۲ \pm \sqrt{۳}) + ۲n\pi = (۲n + \frac{۱}{۲})\pi - iLn(۲ \pm \sqrt{۳})$$

مثال۲۷: از معادله $\cosh z = -1$، مقدار z کدام است؟

۱) $z = n\pi$ ۲) $z = (2n+1)\pi$ ۳) $z = i(2n+1)\pi$ ۴) $z = in\pi$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$، بنابراین داریم:

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = -1 \Rightarrow e^z + \frac{1}{e^z} = -2 \Rightarrow \frac{(e^z)^2 + 1}{e^z} = -2$$

$$\Rightarrow (e^z)^2 + 2e^z + 1 = 0 \Rightarrow (e^z + 1)^2 = 0 \Rightarrow e^z = -1 \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} z = \mathrm{Ln}(-1)$$

می‌دانیم $e^{i\pi} = -1$ لذا داریم:

$$\mathrm{Ln}(-1) = \mathrm{Ln}1 + i(\pi + 2n\pi) = i(2n+1)\pi \Rightarrow z = \mathrm{Ln}(-1) = i(2n+1)\pi$$

مثال۲۸: تصویر خط $x = \dfrac{-\pi}{4}$ در صفحه z، تحت نگاشت $w = u + iv = \sin z$ کدام است؟

۱) قسمتی از هذلولی $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2}$ که در ربع دوم قرار دارد.

۲) شاخه سمت راست هذلولی $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2}$

۳) قسمتی از هذلولی $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2}$ که در ربع چهارم قرار دارد.

۴) شاخه سمت چپ هذلولی $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» تصویر خط $x = c$ تحت نگاشت $w = \sin z$ به صورت هذلولی مقابل می‌باشد:

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

چون $c = -\dfrac{\pi}{4}$، داریم:

$$\frac{u^2}{\sin^2(-\frac{\pi}{4})} - \frac{v^2}{\cos^2(-\frac{\pi}{4})} = 1 \Rightarrow +2u^2 - 2v^2 = 1 \Rightarrow u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$$

خط عمودی $x = k$ $\quad (0 < k < \dfrac{\pi}{2})$ تحت نگاشت $w = \sin z$ به شاخه سمت راست هذلولی $\dfrac{u^2}{\sin^2 k} - \dfrac{v^2}{\cos^2 k} = 1$ تبدیل می‌گردد. همچنین خط عمودی $x = k$ $\quad (-\dfrac{\pi}{2} < k < 0)$ تحت نگاشت $w = \sin z$ به شاخه سمت چپ هذلولی فوق تبدیل می‌گردد. بنابراین تصویر خط $x = -\dfrac{\pi}{4}$ شاخه سمت چپ هذلولی تبدیل می‌شود.

مثال۲۹: تابع $\mathrm{Ln}z$ با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

۱) $\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2 + y^2) + i\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x}$ ۲) $\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2 + y^2) - i\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x}$ ۳) $\mathrm{Ln}(x^2 + y^2) + i\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x}$ ۴) $\mathrm{Ln}(x^2 + y^2) - i\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\mathrm{Ln}z = \mathrm{Ln}|z| + i\theta = \mathrm{Ln}\sqrt{x^2 + y^2} + i\mathrm{Arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2 + y^2) + i\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$$

مثال۳۰: مقدار اصلی $(1+i)^{2-i}$ کدام است؟

۱) $e^2 \cos\sqrt{2} + ie^{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}$

۲) $\sin(\dfrac{\pi}{2} + 1) + i\cos(\dfrac{\pi}{2} + 1)$

۳) $2e^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2}) + i\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2})]$

۴) $\dfrac{\pi}{4}e^2[\cos(\mathrm{Ln}\cos\sqrt{2}) + i\sin(\mathrm{Ln}\cos\sqrt{2})]$

پاسخ: گزینه «۳» با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$z = (1+i)^{2-i} \Rightarrow \mathrm{Ln}z = (2-i)\mathrm{Ln}(1+i) = (2-i)\mathrm{Ln}(1+i) = (2\mathrm{Ln}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}) - i(\mathrm{Ln}\sqrt{2} - \frac{\pi}{2})$$

$$z = e^{(2\mathrm{Ln}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4})}.e^{-i(\mathrm{Ln}\sqrt{2} - \frac{\pi}{2})}$$

با توجه به تساوی $\mathrm{Ln}2 = \mathrm{Ln}(\sqrt{2})^2 = 2\mathrm{Ln}\sqrt{2}$ و همچنین رابطه $e^{\mathrm{Ln}a} = a$ داریم:

$$z = (e^{\mathrm{Ln}2}.e^{\frac{\pi}{4}})(e^{-i\mathrm{Ln}\sqrt{2}}.e^{+i\frac{\pi}{2}}) = 2e^{\frac{\pi}{4}}\{[\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2}) - i\sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2})].i\} = 2e^{\frac{\pi}{4}}[i\cos(\mathrm{Ln}\sqrt{2}) + \sin(\mathrm{Ln}\sqrt{2})]$$

مثال۳۱: تابع $f(z)=|z|^2$:

۱) در هیچجا تحلیلی نیست. ۲) در همه جا مشتق‌پذیر است. ۳) در $x=0$ مشتق‌پذیر است. ۴) در $y=0$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ : گزینه «۱»

$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2 \Rightarrow u=x^2+y^2 \ , \ v=0$$
$$u_x=2x \ , \ v_y=0 \ , \ u_y=2y \ , \ -v_x=0$$

شرایط کوشی ریمان فقط در $2y=0$ و $2x=0$ یا همان نقطه $x=0$ و $y=0$ برقرار است، پس تابع در هیچجا تحلیلی نیست.

مثال۳۲: برای تابع $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ **روابط کوشی ــ ریمان:**

۱) صادق بوده و مشتق نیز دارد. ۲) صادق نبوده و مشتق ندارد. ۳) صادق بوده اما مشتق ندارد. ۴) صادق نبوده ولی مشتق دارد.

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا مشتق‌پذیری تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(z)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+\dfrac{i(x^3+y^3)}{x^2+y^2}}{x+iy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{(x+iy)(x^2+y^2)}$$

مقدار حد تابع بر روی مسیر $x=0$ و یا $y=0$ برابر $1+i$ می‌باشد اما بر روی مسیر $y=x$ مقدار حد فوق برابر $\frac{i+1}{2}$ است، لذا $f'(0)$ موجود نیست. حال شرایط معادلات کوشی ریمان را بررسی می‌کنیم.

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=1 \ , \ v_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=1$$
$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=-1 \ , \ v_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=1$$

با توجه به اینکه $u_y=-v_x$ ، $u_x=v_y$ می‌باشد، لذا معادلات کوشی ریمان برقرارند. شاید در ذهن شما این سئوال پیش بیاید که چرا از تعریف مشتق مقادیر فوق را محاسبه کردیم، پاسخ این است که استفاده از فرمول مشتق‌گیری کمی مشکل‌تر از این حالت است. (خواستید امتحان کنید!)

مثال۳۳: تابع f با ضابطه $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z} & ; \ z\neq 0\\ 0 & ; \ z=0\end{cases}$ **مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟**

۱) f در $z=0$ پیوسته نیست.

۲) در $z=0$ روابط کوشی ریمان برقرار نیستند، ولی تابع مشتق دارد.

۳) در $z=0$ تابع f پیوسته است و روابط کوشی ریمان نیز برقرار است.

۴) در $z=0$ تابع f مشتق ندارد و روابط کوشی ریمان نیز برقرار نیستند.

پاسخ : گزینه «۳» اگر تابع را در مختصات قطبی بررسی کنیم، داریم:

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\frac{r^2e^{-2i\theta}}{re^{i\theta}}=0=f(0)\Rightarrow$$ پس در $z=0$ تابع f پیوسته است.

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1 \qquad u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^3}=0$$
$$v_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0 \qquad v_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^3}=1$$

ملاحظه می‌گردد $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ لذا روابط کوشی ریمان در نقطه $z=0$ برقرار هستند.

مثال۳۴: هرگاه $f(z)=u(x,y)+iv(x)$ تابعی تحلیلی باشد، $f(z)$ کدام است؟ (C عددی مختلط و K عددی حقیقی است)

۱) $Ki\bar{z}+C$ ۲) $K\bar{z}+C$ ۳) $-Kiz+C$ ۴) $Kz+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون تابع تحلیلی است، پس $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$، اما دقت کنید با توجه به این‌که v تابعی فقط بر حسب x است، لذا $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ و نتیجتاً $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ می‌شود و این یعنی تابع u فقط بر حسب y است، از طرفی چون $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ پس داریم:

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x)}{\partial x}$$

دو تابع که مشتق آن‌ها بر حسب دو متغیر برابر با هم شده و این فقط در یک حالت اتفاق می‌افتد که این دو عبارت مساوی عدد ثابتی مثل K باشد:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial y}=K\ \Rightarrow u=Ky+C_1\\&\frac{\partial v}{\partial x}=-K\ \Rightarrow v=-Kx+C_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(z)=(Ky+C_1)+i(-Kx+C_2)\ \Rightarrow f(z)=-Ki(\underbrace{x+iy}_{z})+\underbrace{C_1+iC_2}_{C}\ \Rightarrow f(z)=-Kiz+C$$

مثال۳۵: جریان سیال غیر چرخشی دو بعدی را با استفاده از پتانسیل مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، توصیف می‌کنند. $u(x,y)$ را پتانسیل سرعت و $v(x,y)$ را تابع جریان می‌گویند، اگر سرعت سیال از رابطه $\vec{V}=\vec{\nabla}u$ حساب شود، با شرط اینکه $f(z)$ تحلیلی باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\frac{df}{dz}=V_x-iV_y$ ۲) $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$ ۳) $\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$ ۴) هر سه مورد صحیح است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» روابط داده شده در هر سه گزینه را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱) ابتدا مشتق تابع f نسبت به z را حساب می‌کنیم:

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\qquad(*)$$

از طرفی چون سرعت سیال $\vec{V}$ از رابطه $\vec{V}=\vec{\nabla}u$ حساب می‌شود، لذا داریم:

$$\vec{V}=\vec{\nabla}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}\qquad(1)$$

اگر بردار سرعت را در دو بعد تجزیه کنیم، رابطه مقابل داریم:

$$\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}\qquad(2)$$

از مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) به نتیجه مقابل می‌رسیم:

$$\xrightarrow{(2),(1)}\frac{\partial u}{\partial x}=V_x\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=V_y\qquad(3)$$

اگر این دو مقدار را در رابطه (*) قرار دهیم، به این نتیجه می‌رسیم رابطه داده شده در گزینه (۱) صحیح است:

$$\frac{df}{dz}=V_x-iV_y$$

بررسی گزینه (۲): با استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\overset{(3)}{=\!=}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})\ \Rightarrow\nabla.\vec{V}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

چون تابع $f(z)$ تحلیلی است، لذا در معادله لاپلاس صدق می‌کند پس $\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ در فیزیک این رابطه به این معنی است که چشمه یا چاهکی وجود ندارد.

بررسی گزینه (۳): به راحتی با استفاده از ضرب خارجی داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&0\end{vmatrix}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{V}=(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})\vec{k}=0$$

رابطه فوق در فیزیک به این معنی است که جریان غیر چرخشی است.

مثال۳۶: اگر تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد و $v=r^۲\cos۲\theta+r\sin\theta$ ، آنگاه $u(r,\theta)$ کدام است؟

۱) $u(r,\theta)=-r^۲\sin\theta+r\cos۲\theta+c$

۲) $u(r,\theta)=r^۲\cos\theta+r\sin۲\theta+c$

۳) $u(r,\theta)=r^۲\sin۲\theta+r\cos\theta+c$

۴) $u(r,\theta)=-r^۲\sin۲\theta+r\cos\theta+c$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا $\frac{\partial v}{\partial\theta}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=-۲r^۲\sin۲\theta+r\cos\theta$$

چون تابع تحلیلی است باید $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{۱}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$ برقرار باشد.

$$\frac{۱}{r}(-۲r^۲\sin۲\theta+r\cos\theta)=\frac{\partial u}{\partial r}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial r}=-۲r\sin۲\theta+\cos\theta$$

حال از طرفین تساوی فوق نسبت به r انتگرال می‌گیریم:

$$u=\int(-۲r\sin۲\theta+\cos\theta)dr+f(\theta)\Rightarrow \mathbf{u=-r^۲\sin۲\theta+r\cos\theta+f(\theta)}$$

مجدداً از طرفین این رابطه نسبت به θ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی $-r(\frac{\partial v}{\partial r})$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-۲r^۲\cos۲\theta-r\sin\theta+f'(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=۲r\cos۲\theta+\sin\theta\Rightarrow -r\frac{\partial v}{\partial r}=-۲r^۲\cos۲\theta-r\sin\theta$$

$$-r\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial\theta}\Rightarrow -۲r^۲\cos۲\theta-r\sin\theta=-۲r^۲\cos۲\theta-r\sin\theta+f'(\theta)$$

$$\Rightarrow f'(\theta)=۰\Rightarrow f(\theta)=c\Rightarrow u(r,\theta)=-r^۲\sin۲\theta+r\cos\theta+c$$

مثال۳۶: کدامیک از توابع زیر تحلیلی است؟

۱) برای $|z|<۳$ $\quad f(z)=\begin{cases}\frac{۱-\cos z}{\sin^۲ z} & , z\neq ۰\\ \frac{۱}{۲} & , z=۰\end{cases}$

۲) $f(z)=Lnz$ (برای $z\neq۰$)

۳) $f(z)=x^۲+iy^۲\ ,\ (x=y)$

۴) $f(z)=\frac{۱}{\sin\frac{۱}{z}}\ ,\ z\neq\frac{۱}{k\pi}$

پاسخ : گزینه «۱» تابع Lnz در نقاط مربوط به بریدگی شاخه‌هایش تحلیلی نیست، تابع گزینه (۴) در $z=۰$ تحلیلی نیست، همچنین بـرای گزینـه (۳) قسمت حقیقی تابع یعنی $u=x^۲$ در معادله پتانسیل (لاپلاس) صدق نمی‌کند:

$$u_{xx}+u_{yy}=۰\Rightarrow ۲+۰\neq۰$$

لذا تابع گزینه (۱) باید تابعی تحلیلی باشد.

مثال۳۷: تابع $f(r,\theta)=r^۲\cos^۲\theta-r^۲\sin^۲\theta$ کدام شرایط را دارد؟

۱) هارمونیک (همساز) نیست.

۲) فقط در ناحیه $۱>r>۰$ هارمونیک است.

۳) فقط در ناحیه $\pi>\theta>۰$ هارمونیک است.

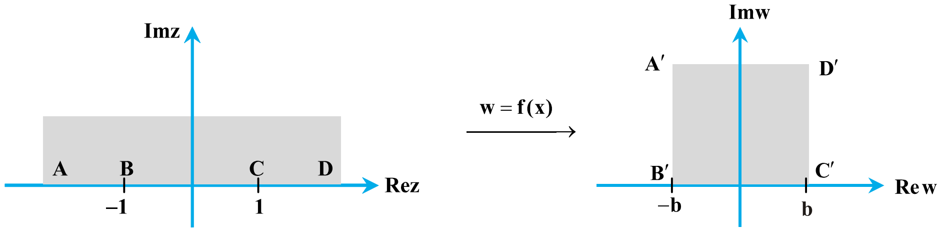
۴) هارمونیک است.

پاسخ : گزینه «۴» می‌توانیم معادله را در مختصات دکارتی نوشته و مشتق بگیریم.

$$f(x,y)=x^۲-y^۲\Rightarrow f_x=۲x\ ,\ f_{xx}=۲\ ,\ f_y=-۲y\ ,\ f_{yy}=-۲$$

$f_{xx}+f_{yy}=۰\Rightarrow$ f هارمونیک (همساز) است.

مثال۳۸: تبدیل خطی بیابید که نگاشت زیر را اعمال کند.



پاسخ: داریم $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ و $x_1=-1$ و $x_2=1$، لذا با جایگذاری در نگاشت کریستوفل داریم:

$$f(z)=A\left(\int (z+1)^{\frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi}}.(z-1)^{\frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi}}dz+B\right)\Rightarrow f(z)=A\arcsin z+B$$

با توجه به اینکه $z=0$ به $\omega=0$ نگاشت می‌شود داریم:

$$f(0)=0\Rightarrow B=0$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$f(-1)=-b\Rightarrow A=\frac{2b}{\pi}$$

بنابراین داریم:

$$f(z)=\frac{2b}{\pi}\arcsin z$$

مثال۳۹: هرگاه $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد، آنگاه مقدار A از تساوی $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|\mathrm{Re}(f(z))|^2=A|f'(z)|^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» اگر فرض کنیم $f(z)=u+iv$، آنگاه $\mathrm{Re}f(z)=u$ بنابراین $|\mathrm{Re}f(z)|^2=u^2$، پس عبارت سمت چپ تساوی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u^2=\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2}$$

طبق قاعده مشتق‌گیری نسبی داریم:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x}=2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u.\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overset{*}{=}2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2u\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

دقت کنید در مشتق‌گیری نهایی (قسمت *) وقتی می‌خواهیم مشتق عبارت $2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$ را نسبت به x حساب کنیم، چون با ضرب دو عبارت روبه‌رو هستیم. لذا از قاعده مشتق حاصل‌ضرب استفاده کردیم. یعنی وقتی می‌خواهیم از $2u$ نسبت به x مشتق بگیریم، چون خود u تابعی از x می‌باشد، لذا مشتق آن برابر $2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ می‌شود. که با ضرب آن در $\frac{\partial u}{\partial x}$ برابر $2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ شده است و همچنین مشتق عبارت دوم (یعنی $\frac{\partial u}{\partial x}$) برابر $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ می‌شود که با ضرب آن در $2u$ حاصل برابر $2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ شده است.

به همین ترتیب اگر نسبت به y مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2}=2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

پس مقدار سمت چپ تساوی برابر است با:

$$\text{مقدار سمت چپ}=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

از طرفی در صورت سئوال گفته شده تابع f تابعی تحلیلی می‌باشد و این یعنی $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ می‌باشد، پس عبارت فوق برابر $2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]$ می‌شود. از طرفی چون $f(z)$ تابعی تحلیلی می‌باشد، پس $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ لذا $|f'(z)|^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$ خواهد بود. پس داریم:

$$2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]=A[(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2] \Rightarrow A=2$$

مثال۴۰: اگر تابع $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x,y)=(x^2-y^2+1)^2-4x^2y^2$ باشد آنگاه با شرط $v(0,0)=0$ مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۱　　۳) ۲-　　۴) ۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=4x(x^2-y^2+1)-8xy^2 \xrightarrow[\text{از طرفین نسبت به y انتگرال می‌گیریم}]{} v=\int[4x(x^2-y^2+1)-8xy^2]dy+h(x)$$

$$=4x^3y-4xy^3+4xy+h(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=12x^2y-4y^3+4y+h'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow 12x^2y-4y^3+4y+h'(x)=12x^2y-4y^3+4y$$

$$\Rightarrow h'(x)=0 \Rightarrow h(x)=k \Rightarrow v(x,y)=4x^3y-4xy^3+4xy+k \xrightarrow{v(0,0)=0} k=0 \Rightarrow v(1,1)=4$$

مثال۴۱: اگر قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی در صفحه مختلط z به صورت $u(x,y)=y^3+Ay-Bx^2y$ و B,A مقادیر ثابت باشند آنگاه:

۱) A دلخواه و $B=3$　　۲) $A=B=3$　　۳) B دلخواه و $A=3$　　۴) B,A هر دو دلخواه

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» هرگاه $f(z)=u+vi$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه v,u توابع همساز یکدیگرند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow -2By+6y=0 \Rightarrow B=3$$

$$u=y^3+Ay-Bx^2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2Bxy=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v=-Bxy^2+h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-By^2+h'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2+A-Bx^2)$$

$$\Rightarrow -By^2+h'(x)=-3y^2-A+Bx^2 \Rightarrow h'(x)=-A+3x^2 \Rightarrow h(x)=-Ax+x^3+c \Rightarrow V=-3xy^2-Ax+x^3+c$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \Rightarrow +6x-6x=0 \Rightarrow$ به A وابسته نمی‌باشد.

مثال۴۲: در صورتی که تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $v=-\sin x.\sinh y$ آنگاه:

۱) $u=-\cos x.\cosh y+c$　　۲) $u=\cos x.\cos y+c$　　۳) $u=\cos x.\cosh y+c$　　۴) مقدار تابع u مشخص نیست.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون تابع تحلیلی است، لذا باید معادلات کوشی ریمان برقرار باشد.

$$u_x=v_y=-\sin x\cosh y \Rightarrow u=\cos x.\cosh y+h(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\cos x.\sinh y+h'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \cos x.\sinh y+h'(y)=\cos x.\sinh y \Rightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c \Rightarrow u=\cos x.\cosh y+c$$

مثال۴۳: اگر تابع $f(z)$ همساز باشد و $Re[f'(z)] = ۳x^۲ - ۴y - ۳y^۲$ با شرط $f(۱+i) = ۰$ و $f'(۰) = ۰$، مقدار $f(i)$ کدام است؟

۱) $۶ - i$ ۲) $۶ + i$ ۳) $۶ - ۵i$ ۴) $۶ - ۲i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای تابع $f(z) = u + iv$، می‌دانیم $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$، یعنی قسمت حقیقی $f'(z)$ که در صورت سؤال داده شده برابر $\frac{\partial u}{\partial x}$ است:

$$Re[f'(z)] = \frac{\partial u}{\partial x} = ۳x^۲ - ۴y - ۳y^۲$$

حالا به جای x، z و به جای y، عدد صفر را قرار می‌دهیم: $\frac{\partial u}{\partial x}(z,۰) = ۳z^۲$

$$u = \int(۳x^۲ - ۴y - ۳y^۲)dx = x^۳ - ۴xy - ۳xy^۲ + f(y)$$

از طرفی با مشتق‌گیری از تابع u نسبت به y داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -۴x - ۶xy + f'(y)$$

دوباره اگر به جای x، z و به جای y عدد صفر را قرار دهیم؛ $\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با: $\frac{\partial u}{\partial y} = -۴z$

بنابراین $f'(z)$ برابر است با:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = ۳z^۲ - i[(-۴z)] = ۳z^۲ + i۴z$$

$$\xrightarrow{\text{با انتگرال‌گیری نسبت به } z} f(z) = z^۳ + ۲iz^۲ + C$$

با استفاده از شرط داده شده برای مسئله $(f(۱+i) = ۰)$ مقدار C را حساب می‌کنیم:

$$f(۱+i) = (۱+i)^۳ + ۲i(۱+i)^۲ + C = ۰$$

$$\Rightarrow ۱ + i^۳ + ۳i^۲ + ۳i + ۲i(\underbrace{۱+i^۲}_{۰} + ۲i) + C = ۰ \Rightarrow ۱ - i - ۳ + ۳i + ۴i^۲ + C = ۰ \Rightarrow C = ۶ - ۲i$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = z^۳ + ۲iz^۲ + ۶ - ۲i}$$

حالا به راحتی $f(i)$ به دست می‌آید: $f(i) = i^۳ + ۲i(i)^۲ + ۶ - ۲i = -i - ۲i + ۶ - ۲i = ۶ - ۵i$

مثال۴۴: اگر قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ به صورت $u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y)$ تعریف شده باشد، مقدار $f'(i)$ کدام است؟

۱) ie^{-i} ۲) $e^{-i}(۱-i)$ ۳) $e^{-i}(i-۱)$ ۴) $-ie^{-i}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به مقدار u، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x\cos y) + e^{-x}\cos y - e^{-x}y\sin y \xrightarrow[y=۰]{x=z} \frac{\partial u}{\partial x}(z,۰) = -ze^{-z}\cos(۰) + e^{-z}\cos(۰) - ۰ = -ze^{-z} + e^{-z}$$

از طرفی با محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial y}$ و قرار دادن صفر به جای y داریم: $\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + e^{-x}y\cos y = ۰$

با توجه به فرمول $f'(z)$ بر حسب مشتقات جزئی u، داریم: $\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -ze^{-z} + e^{-z}$

بنابراین مقدار $f'(i)$ برابر است با: $f'(i) = -ie^{-i} + e^{-i} = e^{-i}(۱-i)$

مثال۴۵: اگر $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد، و $u(x,y)=۲e^{x}\cos y$، آن‌گاه ضابطه $f(z)$ با فرض $f(\circ)=۲$ کدام است؟

۱) $f(z)=۲e^{z}$
۲) $f(z)=۲e^{z^{۲}}$
۳) $f(z)=۲e^{۲z}$
۴) $f(z)=۲e^{\frac{z}{۲}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

اگر $z_\circ=\circ$ در نظر گرفته شود، آنگاه $\bar{z}_\circ=\circ$

$$f(\circ)=۲\ ,\ f(z)=۲u(\frac{z}{۲},\frac{z}{۲i})=۲\times ۲e^{\frac{z}{۲}}\cos(\frac{z}{۲i})-۲$$

از طرفی می‌دانیم $\cosh iz=\cos z$، لذا داریم:

$$\cos(\frac{z}{۲i})=\cos(\frac{-iz}{۲})=\cosh(\frac{z}{۲})$$

و چون $\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{۲}$، لذا خواهیم داشت:

$$f(z)=۴e^{\frac{z}{۲}}[\frac{e^{\frac{z}{۲}}+e^{\frac{-z}{۲}}}{۲}]-۲=۲e^{z}+۲-۲=۲e^{z}$$

مثال۴۶: مکان هندسی نقاط $z=x+iy$ واقع در صفحه مختلط که در تساوی $|\frac{z+۱}{z-۱}|=۴$ صدق کنند، کدام است؟

۱) $(x-\frac{۱۷}{۱۵})^{۲}+y^{۲}=(\frac{۸}{۱۵})^{۲}$
۲) $(x-\frac{۱}{۱۵})^{۲}+y^{۲}=(\frac{۸}{۱۵})^{۲}$
۳) $x+۲y=\frac{۸}{۱۵}$
۴) $۲x-y=\frac{۸}{۱۵}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$|\frac{z+۱}{z-۱}|=۴\Rightarrow\frac{|(x+۱)+iy|}{|(x-۱)+iy|}=۴\Rightarrow|(x+۱)+iy|=۴|(x-۱)+iy|\Rightarrow$$

$$(x+۱)^{۲}+y^{۲}=۱۶[(x-۱)^{۲}+y^{۲}]\Rightarrow ۱۵x^{۲}+۱۵y^{۲}-۳۴x+۱۵=\circ\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-\frac{۳۴}{۱۵}x+۱=\circ\Rightarrow(x-\frac{۱۷}{۱۵})^{۲}+y^{۲}=(\frac{۸}{۱۵})^{۲}$$

مثال۴۷: مکان عدد مختلط $z=x+iy$ که در تساوی $z.\bar{z}+(۱+i)z+\overline{(۱+i)z}+۱=\circ$ صدق کند، کدام است؟

۱) محیط دایره‌ای به مرکز (۱ و ۱) شعاع یک
۲) محیط دایره‌ای به مرکز (۱ و ۱-) و شعاع یک
۳) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز (۱ و ۱) و شعاع یک
۴) محیط دایره‌ای به مرکز (۱- و ۱) و شعاع یک

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$x^{۲}+y^{۲}+(۱+i)(x+iy)+(۱-i)(x-iy)+۱=\circ\Rightarrow$$

$$x^{۲}+y^{۲}+x+iy+ix-y+x-iy-ix-y+۱=\circ\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y+۱=\circ\Rightarrow(x+۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱$$

مثال۴۸: مکان هندسی نقطه M متناظر با عدد مختلط z که در رابطه $z^{۳}+۲z^{۲}-۳z=(\bar{z})^{۳}+۲(\bar{z})^{۲}-۳(\bar{z})$ صدق کند، کدام است؟

۱) سهمی
۲) بیضی
۳) هذلولی
۴) هذلولی متساوی‌الساقین

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$z^{۳}-(\bar{z})^{۳}+۲[z^{۲}-(\bar{z})^{۲}]-۳(z-\bar{z})=\circ\Rightarrow(z-\bar{z})[z^{۲}+z\bar{z}+(\bar{z})^{۲}+۲(z+\bar{z})-۳]=\circ$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=\bar{z}\Rightarrow y=\circ\\ x^{۲}-y^{۲}+۲ixy+x^{۲}+y^{۲}+x^{۲}-y^{۲}-۲ixy+۴x-۳=\circ\end{cases}\Rightarrow ۳x^{۲}-y^{۲}+۴x-۳=\circ\Rightarrow$$ معادله یک هذلولی است

مثال۴۹: اگر z_1، z_2 و z_3 رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=2(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)$

۲) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3$

۳) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=3(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)$

۴) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به این که زوایای مثلث $\frac{\pi}{3}$ است، لذا عبارت $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ را می‌توانیم به شکل زیر نمایش دهیم:

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|e^{\frac{\pi}{3}i} \qquad (1)$$

همین‌طور $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ برحسب اندازه و زاویه آن به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|e^{\frac{\pi}{3}i} \qquad (2)$$

چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، لذا روابط مقابل برقرار است: $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{(2),(1)} \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=e^{\frac{\pi}{3}i}\ ,\ \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} z_2^2-z_1z_2-z_2z_3+z_1z_3=z_1z_3-z_1^2-z_3^2+z_1z_3 \Rightarrow \mathbf{z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵۰: اگر $i^{a+ib}=a+ib$، مقدار a^2+b^2 برابر کدام گزینه است؟

۱) $e^{-b(4k+1)\frac{\pi}{2}}$

۲) $e^{-b(4k+1)\pi}$

۳) $e^{b(4k+1)\frac{\pi}{2}}$

۴) $e^{b(4k+1)\frac{\pi}{2}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به فرض داده شده با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$i^{a+ib}=a+ib \Rightarrow (a+ib)\mathrm{Ln}i=\mathrm{Ln}(a+ib) \Rightarrow (a+ib)[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}1+i(2k\pi+\frac{\pi}{2})]=\mathrm{Ln}\sqrt{a^2+b^2}+i(2k\pi+tg^{-1}\frac{b}{a})$$

در سمت راست تساوی $\mathrm{Ln}\sqrt{a^2+b^2}$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(a^2+b^2)$ نوشت. اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی را در طرفین تساوی تفکیک کنیم، داریم:

$$\Rightarrow ai(2k\pi+\frac{\pi}{2})-b(2k\pi+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(a^2+b^2)+i(2k\pi+tg^{-1}\frac{b}{a})$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی، داریم:

$$-b(\frac{4k\pi+\pi}{2})=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(a^2+b^2) \Rightarrow -b(4k+1)\pi=\mathrm{Ln}(a^2+b^2) \Rightarrow \mathbf{a^2+b^2=e^{-b(4k+1)\pi}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵۱: قسمت حقیقی، عدد مختلط $z=(1+i\sqrt{3})^{(1+i\sqrt{3})}$ باشد، برابر کدام گزینه است؟ (مقدار اصلی موردنظر است)

۱) $e^{\mathrm{Ln}2+\frac{\pi}{3}}\cos(\sqrt{3}\mathrm{Ln}2+\frac{\pi}{\sqrt{3}})$

۲) $e^{\mathrm{Ln}2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\cos(\sqrt{3}\mathrm{Ln}2+\frac{\pi}{3})$

۳) $e^{(\mathrm{Ln}2-\frac{\pi}{3})}\cos(\sqrt{3}\mathrm{Ln}2+\frac{\pi}{\sqrt{3}})$

۴) $e^{(\mathrm{Ln}2-\frac{\pi}{\sqrt{3}})}\cos(\sqrt{3}\mathrm{Ln}2+\frac{\pi}{3})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به تساوی $a^b=e^{\mathrm{Ln}a^b}$ و یا $a^b=e^{b\mathrm{Ln}a}$ به تست پاسخ می‌دهیم: $z=e^{(1+i\sqrt{3})\mathrm{Ln}(1+i\sqrt{3})}$

مقدار اصلی $Ln(1+i\sqrt{3})$ برابر با: $Ln\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}+itg^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}$ و به عبارت دیگر برابر $Ln2+i\frac{\pi}{3}$ می‌باشد، لذا z برابر است با:

$$z=e^{(1+i\sqrt{3})(Ln2+i\frac{\pi}{3})}=e^{[Ln2+i\frac{\pi}{3}+i\sqrt{3}Ln2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi]}=e^{[Ln2-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+i(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{3})]}$$

با توجه به رابطه $e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y$، قسمت حقیقی به شکل زیر است:

$$\boxed{z\ \text{قسمت حقیقی}=e^{Ln2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}\cos(\sqrt{3}Ln2+\frac{\pi}{3})}$$

دقت کنید $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ برابر $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ است و مقدار فوق برابر گزینه (۴) است.

مثال۵۲: حاصل $\sin[iLn(\frac{1+ie^{-i\frac{\pi}{8}}}{1-ie^{i\frac{\pi}{8}}})]$ برابر کدام گزینه است؟ (مقدار اصلی Ln موردنظر می‌باشد.)

۱) $-\cos\frac{\pi}{8}$　　۲) $\cos\frac{\pi}{8}$　　۳) $-\sin\frac{\pi}{8}$　　۴) $\sin\frac{\pi}{8}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا عبارت جلوی Ln را با توجه به فرمول $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$، به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$A=\frac{1+ie^{-i\frac{\pi}{8}}}{1-ie^{i\frac{\pi}{8}}}=\frac{1+i(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8})}{1-i(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}$$

با ضرب عبارت در مزدوج مخرج داریم:

$$A=\frac{(1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8})(1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8})}{(1+\sin\frac{\pi}{8})^2+\cos^2\frac{\pi}{8}}=\frac{(1+\sin\frac{\pi}{8})^2+2i\cos\frac{\pi}{8}(1+\sin\frac{\pi}{8})-\cos^2\frac{\pi}{8}}{(1+\sin\frac{\pi}{8})^2+\cos^2\frac{\pi}{8}}$$

با استفاده از فرمول می‌دانیم: $\cos^2\frac{\pi}{8}=1-\sin^2\frac{\pi}{8}$ و یا $\cos^2\frac{\pi}{8}=(1-\sin\frac{\pi}{8})(1+\sin\frac{\pi}{8})$، با فاکتورگیری از $1+\sin\frac{\pi}{8}$ در صورت و مخرج داریم:

$$A=\frac{(1+\sin\frac{\pi}{8})[(1+\sin\frac{\pi}{8})+2i\cos\frac{\pi}{8}-(1-\sin\frac{\pi}{8})]}{(1+\sin\frac{\pi}{8})(1+\sin\frac{\pi}{8}+1-\sin\frac{\pi}{8})}$$

با ساده کردن $1+\sin\frac{\pi}{8}$ از صورت و مخرج داریم:

$$A=\frac{2(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8})}{2}=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}=i(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8})=ie^{-i\frac{\pi}{8}}$$

بنابراین LnA برابر است با: $\mathbf{Lnie^{-i\frac{\pi}{8}}}$ و به عبارت ساده‌تر برابر است با:

$$LnA=Lni.e^{-i\frac{\pi}{8}}=Lni+Lne^{-i\frac{\pi}{8}}=i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{8}=i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})$$

و چون در سؤال مقدار عبارت $\sin i[LnA]$ خواسته شده، لذا داریم:

$$\sin i[i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})]=\sin(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8})=-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})=\mathbf{-\cos\frac{\pi}{8}}$$

مثال۵۳: مشتق تابع $f(x+iy)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^6(x+iy)}{x^4+y^{12}} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$**، در نقطه صفر کدام است؟**

۱) 0　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) $-\frac{1}{2}$　　۴) در $z=0$ مشتق وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\xrightarrow{f(0)=0} f'(0)=\frac{f(z)}{z}\Rightarrow f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{x^2y^6(x+iy)}{x^4+y^{12}}}{(x+iy)}=\lim_{z\to 0}\frac{x^2y^6}{x^4+y^{12}}$$

خب حالا اگر z در راستای خط $y=x$ به سمت صفر میل کند، داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{x^4+x^{12}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{x^4(1+x^8)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{1+x^8}=0$$

اما اگر z بر روی مسیر $x^2=y^2$ به سمت صفر میل کند، داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\times x^2}{x^4+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}$$

چون بر روی مسیرهای مختلف به دو جواب غیر برابر رسیدیم، تابع $f(z)$ در $z=0$ مشتق ندارد.

مثال۵۴: تابع $f(z)=x+i\sin y$ **در کدام نقاط تحلیلی است؟**

۱) $y=2k\pi$　　۲) تابع هیچ‌جا تحلیلی نیست　　۳) $y=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$　　۴) تابع همه‌جا تحلیلی است

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به شرط کوشی ـ ریمان داریم:

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ v=\sin y\Rightarrow\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos y\ ,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\quad ,\quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 1=\cos y\Rightarrow y=2k\pi\end{cases}$$

تابع $f(z)$ به ازای $y=2k\pi$ یک تابع حقیقی می‌باشد و در نتیجه نمی‌تواند تحلیلی باشد.

مثال۵۵: اگر تابع $f(z)=u+iv$**، تحلیلی باشد و قسمت حقیقی آن** $u=\dfrac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$**، آنگاه ضابطه‌ی** $f(z)$ **برابر کدام گزینه است؟**

۱) $f(z)=\cot gz+C$　　۲) $f(z)=2\cot gz+C$　　۳) $f(z)=tgz+C$　　۴) $f(z)=2tgz+C$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$$u=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{[4\cos 2x(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)]-[(4\sin 2x)(2\sin 2x)]}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}$$

با توجه به عبارت به دست آمده برای $\frac{\partial u}{\partial x}$، واضح است که استفاده از روش اصلی، اوضاع را خیلی وخیم! خواهد کرد و باید از روش دیگری که گفتیم استفاده شود؛ پس لازم است به جای x، z و به جای y عدد صفر را قرار دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=\frac{[4\cos 2z(e^0+e^0-2\cos 2z)]-[(4\sin 2z)(2\sin 2z)]}{(e^0+e^0-2\cos 2z)^2}=\frac{8\cos 2z-8\cos^2 2z-8\sin^2 2z}{(2-2\cos 2z)^2}$$

$$=\frac{8\cos 2z-8(\cos^2 2z+\sin^2 2z)}{(2-2\cos 2z)^2}=\frac{8\cos 2z-8}{4(1-\cos 2z)^2}=\frac{8(\cos 2z-1)}{4(1-\cos 2z)^2}=-\frac{2}{1-\cos 2z}$$

از طرفی با محاسبه $\frac{\partial u}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-(2e^{2y}-2e^{-2y})2\sin 2x}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}$$

با قرار دادن $y=0$ مقدار $\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر صفر می‌شود، اما می‌دانیم $\mathbf{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial x}}$ و چون $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ پس $\mathbf{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}}$ و با توجه به مقدار به دست آمده برای $\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم:

$$f'(z)=-\frac{2}{1-\cos 2z}\xrightarrow{2\sin^2 z=1-\cos 2z} f'(z)=-\frac{2}{2\sin^2 z}=-\frac{1}{\sin^2 z}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق به راحتی ضابطه‌ی $f(z)$ به دست می‌آید:

$$\mathbf{f(z)=\int -(\frac{dz}{\sin^2 z})=\cot gz+C}$$

مثال۵۶: اگر تابع $\mathbf{f(z)=u+iv}$ تحلیلی باشد و $\mathbf{u+v=\frac{\sinh 2x+\sin 2y}{\cosh 2x+\cos 2y}}$، ضابطه‌ی تابع $\mathbf{f(z)}$ کدام گزینه است؟

۱) $\tanh 2z+C$ ۲) $(1+i)\tanh z$ ۳) $\tanh z+C$ ۴) $(1+i)\tanh 2z+C$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» این تست بسیار جالب و البته کمی هم سخت می‌باشد و راه‌حل ابتکاری دارد. دقت کنید با توجه به این که سؤال بـه مـا $\mathbf{u+v}$ را داده، لازم است «$u+v$» را به عنوان قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع جدید تعریف کنیم:

$$\begin{cases}f(z)=u+iv\\ if(z)=iu-v\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} if(z)+f(z)=u-v+i(u+v)\Rightarrow (1+i)f(z)=u-v+i(u+v)$$

با فرض $\mathbf{F(z)=(1+i)f(z)}$ و $U=u-v$ و $V=u+v$، تابع تحلیلی $\mathbf{F(z)=U+iV}$ را داریم که قسمت موهومی آن (یعنی $V=u+v$) داده شده است. حالا مانند بقیه مثال‌های حل شده به تست پاسخ می‌دهیم.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2\cosh 2x(\cosh 2x+\cos 2y)-2\sinh 2x(\sinh 2x+\sin 2y)]}{(\cosh 2x+\cos 2y)^2}$$

با قرار دادن z به جای x و عدد صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(z,0)=\frac{2\cosh 2z(\cosh 2z+1)+2\sinh^2 2z}{(\cosh 2z+1)^2}=\frac{2(\cosh^2 2z-\sinh^2 2z+\cosh 2z)}{(\cosh 2z+1)^2}=\frac{2}{1+\cosh 2z}$$

از طرفی با محاسبه $\frac{\partial V}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{[2\cos 2y(\cosh 2x+\cos 2y)]-[-2\sin 2y(\sinh 2x+\sin 2y)]}{(\cosh 2x+\cos 2y)^2}$$

مجدداً با قرار دادن z به جای x و صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{2}{\cosh 2z+1}$$

با توجه به این که $F'(z)=\frac{\partial V}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial x}$، لذا داریم:

$$F'(z)=\frac{2}{\cosh 2z+1}+i(\frac{2}{\cosh 2z+1})=\frac{2(1+i)}{\cosh 2z+1}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم:

$$F(z)=2(1+i)\int\frac{dz}{1+\cosh 2z}=2(1+i)\int\frac{dz}{2\cosh^2 z}=(1+i)\tanh z+C_1$$

اما در ابتدا $F(z)=(1+i)f(z)$ و لذا ضابطه‌ی $f(z)$ برابر است با:

$$f(z)=\frac{F(z)}{1+i}=\mathbf{\tanh z+C}$$

مثال ۵۷: در تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$، اگر قسمت حقیقی برابر $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ باشد، ضابطه‌ی $f(z)$ کدام است؟

۱) $f(z) = 1/6z^4 + C$ ۲) $f(z) = z^4 + C$ ۳) $f(z) = 0/5z^4 + C$ ۴) $f(z) = 4z^4 + C$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به فرمول $f(z) = 2u(\frac{z}{2}, \frac{-iz}{2}) + C$، با قرار دادن $\frac{z}{2}$ به جای x و $-\frac{iz}{2}$ به جای y در ضابطه u داریم:

$$f(z) = 2[(\frac{z}{2})^4 - 6(\frac{z}{2})^2(\frac{-iz}{2})^2 + (\frac{-iz}{2})^4 + C] = 2[\frac{z^4}{16} + \frac{6z^4}{16} + \frac{z^4}{16}] + C = \mathbf{z^4 + C}$$

مثال ۵۸: حاصل $\lim\limits_{z\to i}\frac{|\sqrt{5}+2z|-3i\bar{z}}{1+z^2}$، وقتی z روی مسیر $\operatorname{Arg}(z-i) = \frac{\pi}{2}$ به سمت i میل می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به توضیحات صورت سؤال لازم است روی مسیر داده شده حد را حساب کنیم، در واقع در این مسیر اندازه تغییر کرده ولی آرگومان ثابت و برابر $\frac{\pi}{2}$ است، با فرض $z - i = re^{i\theta}$ داریم:

$$z - i = re^{i\frac{\pi}{2}} \xrightarrow{e^{i\frac{\pi}{2}} = i} z - i = r(i) \Rightarrow z = (r+1)i$$

حالا باید تابع داده شده را بر حسب r بنویسیم:

$$\frac{|\sqrt{5}+2z|-3i\bar{z}}{1+z^2} = \frac{|\sqrt{5}+2(r+1)i|-3i(r+1)(-i)}{1+[(r+1)i]^2} = \frac{\sqrt{5+4(r+1)^2}-3(r+1)}{1-(r+1)^2}$$

حالا باید حد این تابع را وقتی $r \to 0$ حساب کنیم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{5+4(r+1)^2}-3(r+1)}{1-(r+1)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{r\to 0}\frac{\frac{8(r+1)}{\sqrt{5+4(r+1)^2}}-3}{-2(r+1)} = \frac{\frac{8}{3}-3}{-2} = \frac{-\frac{1}{3}}{-2} = \frac{1}{6}$$

مثال ۵۹: نگاشت $w = iz + i$ نیم‌صفحه $x > 0$ را بر روی کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) $u > 1$ ۲) $v > 1$ ۳) $v > \frac{1}{2}$ ۴) $u > \frac{1}{2}$ و $v < 1$

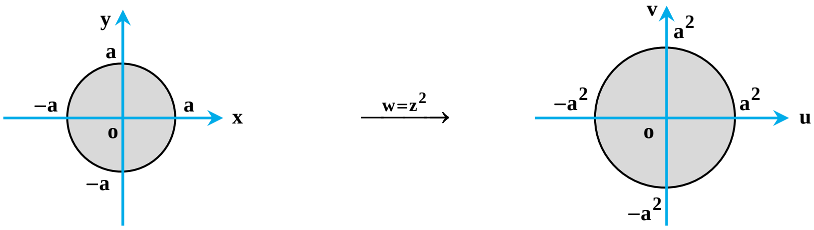
☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$w = iz + i = i(x+iy) + i = -y + i(x+1) = u + iv$$

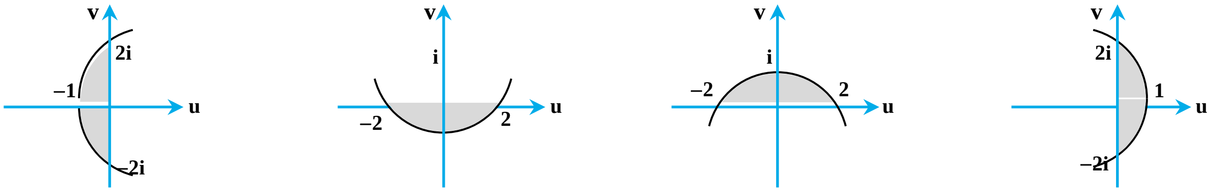
$$v = x + 1 \Rightarrow x = v - 1 \xrightarrow{x>0} v - 1 > 0 \Rightarrow v > 1$$

مثال ۶۰: تصویر دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ تحت نگاشت $w = z^2$ را بیابید.

☑ **پاسخ :** معادله دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ در مختصات قطبی به صورت $z = ae^{i\theta}$ می‌باشد و چون نگاشت $w = z^2$، زاویه را دو برابر و همچنین اندازه را به توان ۲ می‌رساند، لذا $w = a^2e^{i2\theta}$ خواهد بود، یعنی معادله دایره‌ای به صورت $u^2 + v^2 = a^4$، به عبارت دیگر تحت این نگاشت دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a در صفحه $(x-y)$ به دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a^2 در صفحه $(u-v)$ تبدیل می‌شود.



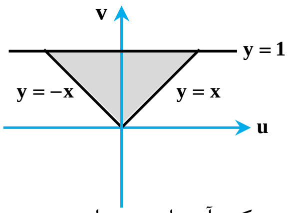
مثال۶۱: تابع $w = z^2$ ناحیه مثلثی بین خطوط $y = \pm x$ و $y = 1$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟



(۱)		(۲)		(۳)		(۴)

پاسخ : گزینه «۴»

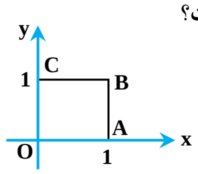
با توجه به نگاشت $w = z^2$ داریم:



$$w = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

تصویر خط $y = 1$ تحت نگاشت w با توجه به روابط به دست آمده برای u و v به صورت $\mathbf{u = x^2 - 1}$ و $\mathbf{v = 2x}$ است که آن را می‌توان به صورت $\mathbf{v^2 = 4(u+1)}$ نوشت که یک سهمی افقی با رأس $(-1,0)$ است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. همین‌جا پاسخ به تست تمام است ولی برای تمرین بیشتر بررسی‌های بیشتر را نیز انجام می‌دهیم: برای خط $y = x$، $u = 0$ و $\mathbf{v = 2x^2}$ و برای خط $y = -x$، به صورت $\mathbf{v = -2x^2}$ و در نتیجه تصویر خط $y = \pm x$ به صورت پاره‌خط $\mathbf{u = 0}$ و $\mathbf{-2 \le v \le 2}$ است. (دقت کنید $-2x^2 \le v \le 2x^2$ و چون $0 < x < 1$، لذا $-2 \le v \le 2$ به دست آمد.)

مثال۶۲: ناحیه‌ی نشان داده شده در شکل زیر تحت نگاشت $w = z^2$ به ناحیه‌ی D' تبدیل می‌شود، مساحت D' چقدر است؟



۱) $\frac{11}{6}$		۲) $\frac{8}{3}$

۳) $\frac{11}{12}$		۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا نگاشت $w = z^2$ را به شکل مقابل می‌نویسیم:

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u = x^2 - y^2} \\ \mathbf{v = 2xy} \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم هر چهار خط به چه ناحیه‌هائی تبدیل خواهند شد.

ابتدا OA را بررسی می‌کنیم که $y = 0$ و $0 \le x \le 1$، را می‌توان برای آن نوشت، لذا داریم:

$$\mathbf{0 \le u \le 1 \;\; , \;\; v = 0}$$

تبدیل AB تحت این نگاشت، با توجه به $x = 1$، لذا داریم:

$$\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u = 1 - \frac{v^2}{4}}$$

تبدیل BC تحت این نگاشت، با توجه به $y = 1$ برابر است با:

$$\begin{cases} v = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u = \frac{v^2}{4} - 1}$$

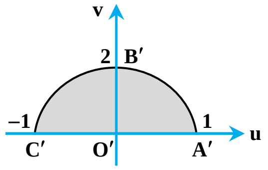
تبدیل CO، با توجه به $x = 0$ برابر است با:

$$\begin{cases} u = -y^2 \\ v = 0 \end{cases} \xrightarrow{0 \le y \le 1} -1 \le -y^2 \le 0 \Rightarrow \mathbf{-1 \le u \le 0}$$

از چهار رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم: $\mathbf{-1 \le u \le 1}$ و دو منحنی قرینه‌ی یکدیگر (نسبت به محور v) به شکل زیر داریم:

$$\mathbf{u = \frac{v^2}{4} - 1 \;\; , \;\; u = 1 - \frac{v^2}{4}}$$

و با رسم خطوط و منحنی‌ها شکل مقابل را داریم:



با توجه به شکل مساحت را با استفاده از انتگرال حساب می‌کنیم.

$$S=2\int_0^2\left(1-\frac{v^2}{4}\right)dv=2\left[v-\frac{v^3}{12}\right]_0^2=2\left(2-\frac{8}{12}\right)=2\times\frac{16}{12}=\frac{8}{3}$$

دقت کنید نقطه‌ی برخورد منحنی $u=\frac{v^2}{4}-1$ یا $u=1-\frac{v^2}{4}$ با محور v به ازای $u=0$، برابر $v=2$ به دست می‌آید که در بازه‌ی انتگرال‌گیری لحاظ شد.

مثال ۶۳: تصویر خط $y=x+\frac{1}{2}$ به وسیله نگاشت $w=\frac{1}{z}$ کدام است؟

۱) خطی که از مبدأ می‌گذرد. ۲) خطی که از مبدأ نمی‌گذرد. ۳) دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد. ۴) دایره‌ای که از مبدأ نمی‌گذرد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{2u+u^2+v^2}{2(u^2+v^2)}\Rightarrow u^2+v^2+2u+2v=0$$

معادله فوق دایره‌ای است که از مبدأ عبور می‌کند. البته با توجه به نکات فوق چون خط از مبدأ عبور نمی‌کند به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند.

مثال ۶۴: نقش ناحیه زاویه‌ای $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ با تبدیل $w=-\frac{i}{z^2}$ عبارتست از:

۱) $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ ۲) $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ ۳) $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ناحیه $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ تحت نگاشت $w_1=z^2$ به ناحیه $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ تبدیل می‌شود و نگاشت $w_2=\frac{1}{z^2}$ این ناحیه را به ربع چهارم می‌نگارد و در نهایت $w_3=-iw_2$ ناحیه را -90° دوران می‌دهد. پس ناحیه $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ جواب است.

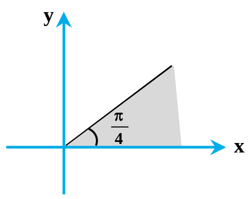
مثال ۶۵: هرگاه $z=x+iy$ و $w=u+iv$، آنگاه تحت نگاشت $w=\sin z$ خط $x=\frac{\pi}{4}$ به کدامیک از منحنی‌های زیر تبدیل خواهد شد؟

۱) $u^2+v^2=\frac{1}{2}$ ۲) $u^2+v^2=\frac{1}{4}$ ۳) $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ ۴) $u^2-v^2=\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\frac{u^2}{\sin^2(\frac{\pi}{4})}-\frac{v^2}{\cos^2(\frac{\pi}{4})}=1\Rightarrow 2u^2-2v^2=1\Rightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}$$

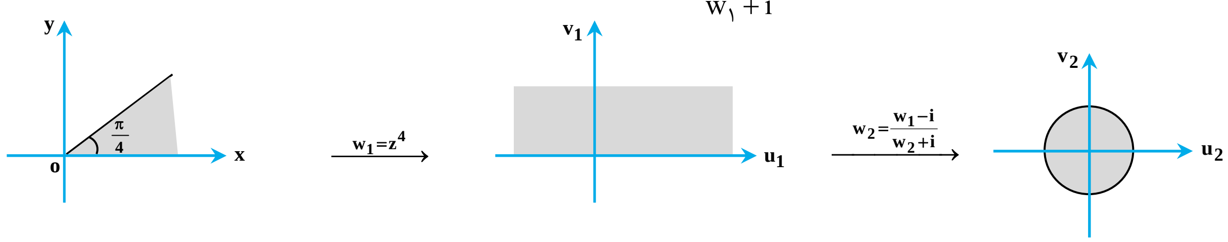
مثال ۶۶: نگاشتی که ناحیه نشان داده شده را به داخل دایره واحد می‌نگارد، کدام است؟



۱) $w=\frac{2z^4+i}{z^4-i}$ ۲) $w=\frac{z^4+i}{z^4-i}$

۳) $w=\frac{2z^4-i}{z^4+i}$ ۴) $w=\frac{z^4-i}{z^4+i}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به این‌که ناحیه‌ی نهایی دایره واحد است؛ لذا نمی‌توان با یک تبدیل خطی به آن رسید. ابتدا با تبدیل $w_1=z^4$ ناحیه فوق را به نیم صفحه‌ی بالائی تبدیل کرده و سپس با تبدیل $w_2=\frac{w_1-i}{w_1+i}$، نیم صفحه‌ی فوقانی به داخل دایره واحد نگاشته می‌شود:



مثال۶۷: تصویر ناحیه $\{z: |z-1|<1 \ , \ \text{Im}(z)>0\}$ تحت تبدیل $w=\frac{z}{z-2}$ کدامیک از نواحی زیر است؟

۱) ربع اول		۲) ربع دوم		۳) ربع سوم		۴) ربع چهارم

پاسخ : گزینه «۳» **روش اول:**

$$w=\frac{z}{z-2} \Rightarrow zw-2w-z=0 \Rightarrow z(w-1)=2w \Rightarrow z=\frac{2w}{w-1} \Rightarrow z-1=\frac{w+1}{w-1} \xrightarrow{|z-1|<1} \left|\frac{w+1}{w-1}\right|<1 \Rightarrow |w+1|<|w-1|$$

با توجه به نامساوی فوق ملاحظه می‌گردد نقاطی مدنظر هستند که فاصله آنها تا نقطه $u=-1$ کوچکتر از فاصله این نقاط تا نقطه $u=1$ باشد، پس ربع سوم و یا چهارم می‌تواند جواب باشد، از طرفی داریم: $\text{Im}(z)>0 \Rightarrow \text{Im}(\frac{2w}{w-1})>0 \Rightarrow \text{Im}[\frac{w(\bar{w}-1)}{|w-1|^2}]>0 \Rightarrow \text{Im}[|w|^2-w]>0 \Rightarrow \text{Im}(w)<0$

و لذا در ناحیه سوم جواب است.

روش دوم: نقطه $z=1+\frac{i}{2}$ در ناحیه موردنظر قرار دارد، لذا داریم:

$$w=\frac{1+\frac{i}{2}}{1+\frac{i}{2}-2}=\frac{\frac{i}{2}+1}{\frac{i}{2}-1}\times\frac{\frac{i}{2}+1}{\frac{i}{2}+1}=\frac{-\frac{1}{4}+1+i}{-\frac{1}{4}-1}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

که نقطه‌ای واقع در ربع سوم است.

مثال۶۸: ناحیه $\text{Im}(z)\le 1$ از صفحه z، تحت نگاشت وارون $(w=\frac{1}{z})$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟

۱) $|w-\frac{1}{2}|\ge\frac{1}{2}$		۲) $|w-\frac{i}{2}|\ge\frac{1}{2}$		۳) $|w+\frac{1}{2}|\ge\frac{1}{2}$		۴) $|w+\frac{i}{2}|\ge\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» با جایگذاری $z=\frac{1}{w}$ در معادله $\text{Im}(z)\le 1$ خواهیم داشت:

$$\text{Im}(\frac{1}{w})\le 1 \Rightarrow \text{Im}(\frac{1}{u+iv})\le 1 \Rightarrow \text{Im}(\frac{u-iv}{u^2+v^2})\le 1 \Rightarrow \frac{-v}{u^2+v^2}\le 1$$

$$u^2+v^2+v\ge 0 \Rightarrow (u)^2+(v+\frac{1}{2})^2\ge\frac{1}{4}$$

رابطه فوق نشان دهنده نقاط خارج دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{i}{2})$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$ می‌باشد که می‌توان آنرا به صورت روبرو نوشت: $|w+\frac{i}{2}|\ge\frac{1}{2}$

مثال۶۹: تبدیلی که یک قطاع 60° از دایره واحد در صفحه z را به روی نیمه بالایی صفحه w می‌نگارد کدام است؟

۱) $w=-(\frac{z^3+1}{z^3-1})^2$		۲) $w=(\frac{z^3-1}{z^3+1})^3$		۳) $w=(\frac{z^3+1}{z^3-1})^3$		۴) $w=-(\frac{z^3-1}{z^3+1})^2$

پاسخ : گزینه «۴» این قطاع به وسیله تبدیل $w_1=z^3$ به روی نیم‌دایره نگاشته می‌شود و توسط تبدیل $w_2=-i\frac{w_1-1}{w_1+1}$ این ناحیه به روی ربع اول و چهارم و در نهایت توسط تبدیل $w_3=(w_2)^2$ ناحیه به نیم‌صفحه بالایی صفحه w نگاشته می‌شود.

مثال۷۰: تبدیل یافته‌ی دایره $z=\cos t+i\sin t$، $(0\le t<2\pi)$ تحت نگاشت $w=\frac{z}{\bar{z}}$ کدام است؟

۱) دایره به شعاع ۲ و مرکز $(0,-1)$		۲) دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز مبدأ

۳) دایره به شعاع یک و مرکز مبدأ		۴) دایره به شعاع یک و مرکز $(0,-1)$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا نگاشت $w=u+iv$ را با تفکیک قسمت‌های موهومی و حقیقی می‌نویسیم:

$$w=\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{\bar{z}z}=\frac{z^2}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \quad u=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,\ v=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

از طرفی با توجه به صورت سؤال داریم:

$$z=\cos t+i\sin t \Rightarrow \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر x و y در ضابطه‌های u و v داریم:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t \\ v&=\frac{2(\cos t)(\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}=2\cos t\sin t=\sin 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow u^2+v^2=\cos^2 2t+\sin^2 2t \Rightarrow u^2+v^2=1$$

مثال۷۱: تابع $\mathrm{Arc}\tan Z$ را به کدام شکل دیگر می‌توانیم بنویسیم؟ Z یک متغیر مختلط است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $\frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+Z}{i-Z}\right)$　　۲) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$　　۳) $\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$　　۴) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{i+Z}{i-Z}\right)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$w=\mathrm{Arc}\tan z \Rightarrow \tan w=z$$

$$z=\frac{\sin w}{\cos w}=\frac{\frac{1}{2i}\left[e^{iw}-e^{-iw}\right]}{\frac{1}{2}\left[e^{iw}+e^{-iw}\right]}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{i2w}-1}{e^{i2w}+1}$$

فرض می‌کنیم $e^{iw}=x$ بنابراین :

$$iz=\frac{x^2-1}{x^2+1}\Rightarrow x^2-1=izx^2+iz\Rightarrow (1-iz)x^2=1+iz$$

$$x^2=\frac{1+iz}{1-iz}=e^{i2w}\Rightarrow \ln\frac{1+iz}{1-iz}=\ln\frac{i-z}{i+z}=i2w$$

$$w=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{i+z}=-\frac{i}{2}\ln\frac{i-z}{iz}=\frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}$$

فصل ششم

«سری‌ها، بسط تیلور و لوران و محاسبه مانده و انتگرال‌گیری از توابع مختلط»

مثال۱: شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$ برابر کدام است؟

۱) e^{-1}　　۲) e^{-2}　　۳) $2e^{-1}$　　۴) e

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جمله عمومی به صورت $a_n=\cos in$ می‌باشد. می‌دانیم $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$، لذا $a_n=\cos in=\frac{e^{-n}+e^{n}}{2}$ پس داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{-(n+1)}+e^{(n+1)}}{2}}{\frac{e^{-n}+e^{n}}{2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-(n+1)}+e^{(n+1)}}{e^{-n}+e^{n}}\right)$$

با توجه به اینکه $n\to+\infty$، لذا جمله‌هایی با بزرگترین توان حاکم هستند:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{n+1}}{e^{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{n}.e^{1}}{e^{n}}\right)=e\Rightarrow R=e^{-1}$$

مثال۲: شعاع همگرایی تابع $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$، حول نقطه $z=4i$ کدام است؟

۱) $\pi-4$　　۲) $2\pi-4$　　۳) 4　　۴) $4\pi-4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نوشتن بسط تیلور تابع حول $z=4i$ مشکل به نظر می‌رسد، نقاط غیر تحلیلی تابع $z=0$ و همچنین $z=2n\pi i$ می‌باشد که به ازای آنها مخرج صفر می‌شود، حالا باید ببینیم فاصله کدام‌یک از این نقاط از $z=4i$ کوچکتر از بقیه است. به راحتی مشخص است به ازای $n=1$، نقطه $z=2\pi i$ کمترین فاصله را از $z=4i$ دارد.

$$|2\pi i-4i|=|(2\pi-4)i|=2\pi-4$$

برای مثال نقاط دیگر مثل $z=0$ یا $z=4\pi i$، فاصله‌شان بیشتر است:

(از $2\pi-4$ بزرگتر است.)　$|0-4i|=|-4i|=4$

(از $2\pi-4$ بزرگتر است.)　$|4\pi i-4i|=|(4\pi-4)i|=4\pi-4$

بقیه نقاط نیز به همین ترتیب فاصله‌شان از $4i$ بیشتر از فاصله نقطه $2\pi i$ از $4i$ می‌باشد.

مثال۳: ناحیه‌ی همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}(z+1-i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}$ کدام است؟

۱) $|z+1-i|>1$　　۲) $|z+1-i|<1$　　۳) $0<|z+1-i|\le 1$　　۴) سری واگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به وجود دو سری لازم است ناحیه همگرایی هر کدام از سری‌ها جداگانه حساب شود، با توجه به سری اول که عبارت شامل z در مخرج کسر است (توان n منفی است)، از روش سری تابعی (روش کلی) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(z+1-i)^{n+1}}}{\frac{n}{(z+1-i)^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|.\left|\frac{1}{z+1-i}\right|=\frac{1}{|z+1-i|}$$

عبارت فوق باید کوچکتر از $\underline{1}$ باشد:

$$\frac{1}{|z+1-i|}<1\Rightarrow |z+1-i|>1$$

حالا سراغ پیدا کردن ناحیه همگرایی سری دوم می‌رویم، چون سری توانی است و $C_n=1$، لذا شعاع همگرایی برابر **۱** است و طبق صحبت‌های انجام شده راجع به ناحیه همگرایی سری‌های توانی داریم: $|z+1-i|<1$

اشتراک ناحیه همگرایی دو سری، تهی می‌باشد، لذا سری (منظور مجموع دو سری) همه‌جا واگراست.

مثال۴: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz^2}$ کدام است؟

۱) $x^2 - y^2 > 1$ ۲) $|x|>|y|$ ۳) تمام صفحه مختلط ۴) $|x|<|y|$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» حاصل حد برابر یک می‌باشد، لذا داریم: $\lim_{n\to\infty} |\frac{n+1}{n}| = 1$

$$|e^{-z^2}|<1 \Rightarrow |e^{y^2-x^2}.e^{-i2xy}|<1 \Rightarrow e^{y^2-x^2}<1 \Rightarrow y^2-x^2<0 \Rightarrow y^2<x^2 \Rightarrow |y|<|x|$$

برای روشن شدن روش حل فوق لازم به توضیح است، چون باید ضرب دو عدد $|e^{-i2xy}|.|e^{y^2-x^2}|$ کوچکتر از یک باشد و همواره $|e^{-i2xy}|=1$، لذا $|e^{y^2-x^2}|<1$ و برای این منظور باید $y^2-x^2<0$ باشد

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵: شعاع همگرایی کدام جفت سری زیر با هم یکسان است؟

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}z^n \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2}z^{n+1}$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{n+1} \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n}z^{n-1}$$

۱) فقط شعاع همگرایی سری a با سری b یکسان است.

۲) شعاع همگرایی سری a با سری c و شعاع همگرایی سری b با d یکسان است.

۳) شعاع همگرایی سری a با b و شعاع همگرایی سری c با d یکسان است.

۴) فقط شعاع همگرایی سری c و d با هم یکسان است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شاید لازم به توضیح نباشد که محاسبه شعاع همگرایی هر یک از سری‌ها و مقایسه آن‌ها با یکدیگر کار وقت‌گیری است. اما با کمی دقت مشخص است، سری a، مشتق سری c و همچنین سری d مشتق دوم سری b می‌باشد و لذا شعاع همگرایی a با c و همچنین d با b یکی است.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{n+1} \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(n+1)z^n$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2}z^{n+1} \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}z^n \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n^2-1)}{n^2}z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2-1}{n^2})z^{n-1}$$

نکته۶: اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$، دارای شعاع همگرایی R باشد، سری توانی $\sum a_n(z-z_0)^{nk}$ دارای شعاع همگرایی $\sqrt[k]{R}$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty}(ie^z)^n$، همگرا به عدد ۴ شود، z برابر کدام گزینه است؟

۱) $-Ln(\frac{4}{3})-i\frac{\pi}{2}$ ۲) $-Ln(\frac{4}{3})+i\frac{\pi}{2}$ ۳) $Ln(\frac{4}{3})-i\frac{\pi}{2}$ ۴) $Ln(\frac{4}{3})+i\frac{\pi}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی سری مشخص است با یک سری هندسی با قدر نسبت ie^z روبه‌رو هستیم که جمله اول آن برابر یک است، لذا داریم:

$$\text{مقدار سری هندسی با جملات نامحدود} = \frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}} = \frac{1}{1-ie^z}$$

گفته شده مقدار سری باید برابر ۴ شود، لذا داریم:

$$\frac{1}{1-ie^z}=4 \Rightarrow 1=4-4ie^z \Rightarrow 4ie^z=3 \Rightarrow e^z=\frac{3}{4i} \Rightarrow e^z=-\frac{3}{4}i \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} z=Ln(-\frac{3}{4}i)$$

اما از فصل اول کتاب می‌دانیم: $Ln(x+iy)=Ln\sqrt{x^2+y^2}+itg^{-1}\frac{y}{x}$، پس مقدار z برابر با مقدار زیر است:

$$z=Ln\sqrt{0+(-\frac{3}{4})^2}+itg^{-1}\frac{-\frac{3}{4}}{0} \Rightarrow z=Ln(+\frac{3}{4})+itg^{-1}(-\infty)=Ln(\frac{3}{4})-i\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{z=-Ln(\frac{4}{3})-i\frac{\pi}{2}}$$

مثال۷: بسط مک‌لورن تابع $f(z)=\frac{z}{z^4+9}$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+2}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+1}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{3^{2n+2}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{3^{2n+1}}\ ,\ |z|<\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این مثال باید شکل تابع را به صورت $\frac{1}{1+u}$ در آوریم تا بتوانیم از فرمول این بسط استفاده کنیم:

$$f(z)=\frac{z}{z^4+9}=\frac{z}{9(1+\frac{z^4}{9})}=\frac{z}{9}(\frac{1}{1+\frac{z^4}{9}})$$

می‌دانیم با شرط $|z|<1$ بسط مقابل را داریم: $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$، حالا اگر فرض کنیم، $|\frac{z^4}{9}|<1$ و یا به عبارت دیگر $|z|<\sqrt{3}$، می‌توانیم از فرمول این بسط برای $f(z)$ استفاده کنیم.

$$\frac{1}{1+\frac{z^4}{9}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z^4}{9})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z^4}{3^2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{3^{2n}}$$

پس $f(z)$ به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=\frac{z}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+2}}$$

مثال۸: سری لوران تابع $f(z)=\frac{3}{z^2-z-2}$ در ناحیه $|z|>2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^n}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^n}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^{n+1}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» $f(z)$ را با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان به صورت $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}$ نوشت، از طرفی در ناحیه $|z|>2$ داریم:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}.(\frac{1}{1-\frac{2}{z}})=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

وقتی $|z|>2$، پس حتماً $|z|>1$ و به راحتی نتیجه می‌گیریم: $\frac{1}{|z|}<1$، پس بسط $-\frac{1}{z+1}$ در ناحیه موردنظر به صورت زیر است:

$$\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{z}\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{z}})=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\times(-1)^n}{z\times z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

لذا داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

مثال۹: بسط تابع $f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}$، $0<|z|<1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{z}+1-z+z^2-\cdots$

۲) $1-z+z^2-z^3+\cdots$

۳) $1+z-z^2+\cdots$

۴) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» جمله $\frac{1}{z}$ خود به خود وجود دارد و بسط جمله دوم را می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}+1-z+z^2-z^3+\cdots$$

مثال۱۰: چند جمله اول سری لوران $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ به مرکز صفر کدام است؟

۱) $z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots$ ۲) $z+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots$ ۳) $z^2+z+\frac{1}{2}+\cdots$ ۴) $z^2+z+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این نوع تست‌ها چون از نوع چند جمله‌ای و کسری نیستند با نوشتن بسط توابع به صورت مستقیم به جواب می‌رسند، با نوشتن بسط e^z و تبدیل z به $\frac{1}{z}$ در طرفین تساوی داریم:

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\ \Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z^2})$$

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z^2})+\cdots]=z^2+z+\frac{1}{2}+\cdots$$

مثال۱۱: سه جمله اول سری لوران تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$ حول مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}$ ۲) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{z^2}{120}$ ۳) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{z^2}{120}$ ۴) $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{z^2}{120}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}-\cdots$$

مثال۱۲: بسط لوران $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ در $z=1$ کدام یک از عبارات زیر است؟

۱) $\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots$

۲) $e^2\{\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}+\frac{2e^2}{3}+\frac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

۳) $\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{3e^2}{z-1}+\frac{3e^2}{4}+4e^2(z-1)+\cdots$

۴) $e^2\{\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{3}{z-1}+\frac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا بسط مک‌لوران e^z را می‌نویسیم:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

با تغییر متغیر $z=u+1$ داریم:

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2(u+1)}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}.e^{2u}=\frac{e^2}{u^3}[1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\frac{(2u)^4}{4!}+\cdots]$$

$$=\frac{e^2}{u^3}+\frac{2e^2}{u^2}+\frac{2e^2}{u}+\frac{8e^2}{6}+\frac{4ue^2}{6}+\cdots=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+\frac{4}{3}e^2+\frac{2}{3}(z-1)e^2+\cdots$$

مثال۱۳: در سری لوران تابع $f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ روی ناحیه‌ی $0<|z|<1$، ضریب $\frac{1}{z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2!}$ ۳) 1 ۴) $+\frac{1}{2!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بهتر است با توجه به وجود $1+2z^2$ در صورت کسر و $1+z^2$ در مخرج آن، از یک روش ابتکاری بهره ببریم:

$$f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3(1+z^2)}=\frac{1}{z^3}(\frac{1+z^2+z^2}{1+z^2})=\frac{1}{z^3}(1+\frac{z^2}{z^2+1})=\frac{1}{z^3}[1+z^2(\frac{1}{z^2+1})]$$

با استفاده از بسط $\frac{1}{1+u}$ داریم:

$$=\frac{1}{z^3}[1+z^2(1-z^2+\frac{z^4}{2!}-\frac{z^6}{3!}+-\cdots)]=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}-z+\frac{z^3}{2!}-+\cdots$$

همان‌طور که مشخص است، ضریب $\frac{1}{z}$، برابر **یک** است.

مثال۱۴: برای تابع $f(z)=z^4+4z^2$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z=0$ صفر مرتبه دوم و $z=\pm 2i$ صفرهای ساده تابع هستند.

۲) $z=0$ صفر مرتبه سوم و $z=\pm 2i$ صفرهای مرتبه دوم تابع هستند.

۳) $z=0$ صفر مرتبه دوم و $z=\pm 2i$ صفرهای مرتبه دوم تابع هستند.

۴) $z=0$ صفر مرتبه سوم و $z=\pm 2i$ صفرهای ساده تابع هستند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f(z)=z^2(z^2+4)=0 \Rightarrow z=0\ ,\ z=\pm 2i$$

$$f'(z)=4z^3+8z \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2i)=4(2i)^3+8(2i)=-16i \end{cases}$$

دقت کنید $z=2i$ و به همین ترتیب $z=-2i$ چون اولین مشتق آنها مخالف صفر شده لذا صفر مرتبه اول (ساده) هستند، اما برای تعیین مرتبه صفر برای $z=0$ باید دوباره مشتق بگیریم: $f''(z)=12z^2+8 \Rightarrow f''(0)=8\neq 0$

مثال۱۵: مانده تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)^3}$ در نقطه $z=-2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ملاحظه می‌گردد $z=-2$ قطب مرتبه سوم تابع است، لذا داریم:

$$\underset{z=-2}{\text{Res}}f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}[(z+2)^3\times\frac{1}{z(z+2)^3}]=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}[\frac{1}{z}]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{2}{z^3}=-\frac{1}{8}$$

مثال۱۶: مانده تابع $f(z)=z^7\cos\dfrac{1}{z^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{12}i$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{8}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم نقطه $z=0$، تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌باشد، تنها راه، نوشتن بسط لوران $\cos(\frac{1}{z^2})$ می‌باشد:

$$\cos(\frac{1}{z^2})=1-\frac{(\frac{1}{z^2})^2}{2!}+\frac{(\frac{1}{z^2})^4}{4!}-\frac{(\frac{1}{z^2})^6}{6!}+\cdots \Rightarrow f(z)=z^7\cos(\frac{1}{z^2})=z^7-\frac{z^7}{2!z^4}+\frac{z^7}{4!z^8}-\frac{z^7}{6!z^{12}}+\cdots$$

ضریب $\frac{1}{z}$ در بسط فوق برابر $\frac{1}{4!}$ می‌باشد، پس مانده برابر $\frac{1}{24}$ است.

مثال۱۷: مانده تابع $f(z)=(z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$ در نقطه تکین $z=-2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵- ۳) ۱ ۴) ۵+

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تقریباً شبیه تست بالایی می‌باشد:

$$\sin\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3!(z+2)^3}+\cdots$$

$$f(z)=(z-3)\sin(\frac{1}{z+2})=[(z+2)-5]\sin(\frac{1}{z+2})=\frac{(z+2)}{z+2}-\frac{(z+2)}{3!(z+2)^3}+\cdots-\frac{5}{z+2}+\frac{5}{3!(z+2)^2}$$

ملاحظه می‌گردد مانده یا همان ضریب $\frac{1}{z+2}$ برابر ۵- است.

مثال۱۸: مانده تابع $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ در نقطه $z=-1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» $z=-1$ قطب مرتبه دوم است:

$$\underset{z=-1}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]=\lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^2}=-\frac{1}{4}$$

مثال۱۹: تابع $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^4}$ در $z=1$:

۱) دارای بسط تیلور است.

۲) بسط لوران ندارد.

۳) دارای بسط لوران با مانده $\frac{e^2}{4}$ است.

۴) دارای بسط لوران با مانده $\frac{4e^2}{3}$ است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» $z=1$ قطب مرتبه چهارم تابع است:

$$\underset{z=1}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 1}(e^{2z})'''=\frac{8e^2}{3!}=\frac{4e^2}{3}$$

مثال۲۰: مانده تابع $f(z)=\dfrac{z^2+1}{4z^4+3z^3+z}$ در $z=-1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2\pi i}{3}$ ۴) $-\frac{\pi i}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با در نظر گرفتن $g(z)=z^2+1$ و $h(z)=4z^4+3z^3+z$ داریم:

$$\underset{z=-1}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{g(-1)}{h'(-1)}=\frac{(-1)^2+1}{16(-1)^3+9(-1)^2+1}=-\frac{1}{3}$$

مثال۲۱: حاصل انتگرال $\int_{i+1}^{4i+2} z^2dz$ در طول بیضی $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}, 0\le t\le 2$ برابر است با:

۱) $-21+3i$ ۲) $-32+9i$ ۳) $-\frac{73}{5}+4i$ ۴) $-\frac{86}{3}-6i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تابع $f(z)=z^2$ تحلیلی است. بنابراین از فرمول عادی انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\int_{i+1}^{4i+2} z^2dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_{i+1}^{4i+2}=\frac{(4i+2)^3}{3}-\frac{(i+1)^3}{3}=\frac{64i^3+96i^2+48i+8}{3}-\frac{i^3+3i^2+3i+1}{3}=\frac{-64i-96+48i+8+i+3-3i-1}{3}=-6i-\frac{86}{3}$$

مثال۲۲: در صورتی که z یک متغیر باشد، مطلوب است مقدار $\int_C f(z)dz$ وقتی که $f(z)=x+1+iy^2$. در این انتگرال، منحنی C، مسیر انتخاب شده روی خط $y=x$ می‌باشد که از مبدأ مختصات تا نقطه $(1,1)$ امتداد می‌یابد.

۱) $2i$ ۲) $\frac{8}{3}+\frac{12}{7}i$ ۳) $-2i$ ۴) $\frac{7}{6}+\frac{11}{6}i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$f(z)=x+1+iy^2 \xrightarrow{y=x} f(z)=x+1+ix^2$$

$$z=x+iy \xrightarrow{y=x} z=(1+i)x \Rightarrow dz=(1+i)dx$$

$$\int_C f(z)dz=\int_0^1 (x+1+ix^2)(1+i)dx=(1+i)\left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{ix^3}{3}\right]_0^1=(1+i)\left(\frac{1}{2}+1+\frac{i}{3}\right)=(1+i)\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{3}\right)=\frac{7}{6}+\frac{11}{6}i$$

مثال ۲۳: حاصل انتگرال $I=\oint_{|z|=1}\bar{z}dz$ کدام است؟

۱) πi ۲) $2\pi i$ ۳) $\frac{\pi i}{2}$ ۴) $\frac{2\pi i}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» چون مسیر انتگرال‌گیری به صورت دایره واحد داده شده لذا بهتر است، انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم:

$$z=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}\Rightarrow\bar{z}=e^{-i\theta}\ ,\ dz=ie^{i\theta}d\theta\ ،\ \ I=\oint_{|z|=1}\bar{z}dz=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}i.e^{i\theta}d\theta=2\pi i$$

مثال ۲۴: حاصل $I=\oint_{|z|=1}|z||dz|$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

پاسخ : گزینه «۲» بهتر است انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم:

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow|dz|=|ie^{i\theta}|d\theta$$

$$|ie^{i\theta}|=|i(\cos\theta+i\sin\theta)|=|i\cos\theta-\sin\theta|=\sqrt{(-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}=1$$

پس $|dz|=d\theta$ از طرفی $|z|=|e^{i\theta}|=1$ و لذا داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}|z|dz=\int_0^{2\pi}1\times d\theta=[\theta]_0^{2\pi}=2\pi$$

مثال ۲۵: حاصل $I=\int_0^{i}z\cos zdz$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1-e}{e}$ ۳) $\frac{1+e}{e}$ ۴) $\sinh 1+\cosh 1$

پاسخ : گزینه «۲» تابع $f(z)=z\cos z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است لذا از فرمول‌های عادی انتگرال‌گیری که برای این انتگرال روش جزء به جزء است، استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{i}z\cos zdz=[z\sin z]_0^{i}-\int_0^{i}\sin zdz=i\sin i+[\cos z]_0^{i}=i(i\sinh 1)+\cosh 1-1=-\sinh 1+\cosh 1-1=\frac{1-e}{e}$$

مثال ۲۶: حاصل $I=\oint_C\frac{dz}{z}$ روی منحنی بسته C که شامل مبدأ مختصات است، کدام است؟

۱) صفر ۲) $2\pi i$ ۳) $3\pi i$ ۴) πi

پاسخ : گزینه «۲» منحنی بسته را دایره $|z|=1$ انتخاب می‌کنیم و بر طبق فرمول انتگرال کوشی با توجه به اینکه $f(z)=1$ است، داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi if(0)\xrightarrow{f(z)=1}I=2\pi i$$

مثال ۲۷: حاصل $\oint_C\frac{e^z}{z^4}dz$ در صورتی که C مربعی با رئوس $\pm 4i$ و ± 4 باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi i}{3}$ ۲) $\frac{\pi i}{3}$ ۳) $\frac{4\pi i}{3!}$ ۴) $-\frac{4\pi i}{3!}$

پاسخ : گزینه «۲» تابع $f(z)=e^z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است و واضح است که $z_0=0$ داخل مربع فوق می‌باشد، پس داریم:

$$\oint_C\frac{e^z}{z^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\times f^{(3)}(0)=\frac{2\pi i}{3!}\times e^0=\frac{\pi i}{3}$$

مثال۲۸: اگر f تابعی تام باشد و برای هر z، عددی مثبت مانند k وجود داشته باشد که $|f(z)| \le k|z|$، در این صورت f:

۱) تابعی ثابت است.
۲) f به ازای اعداد حقیقی، مقداری حقیقی دارد.
۳) f به ازای اعداد موهومی، مقداری موهومی دارد.
۴) f تابعی است به صورت $f = az$، $(a \in R)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون $|f(z)| \le k|z|$، پس به ازای $z = 0$ رابطه $|f(0)| \le 0$ برقرار است و چون اندازه نمی‌تواند منفی شود، پس $f(0) = 0$.

از طرفی اگر فرض کنیم C دایره $|z| \le R$ باشد در این صورت به ازای هر z در C داریم: $|f(z)| \le M|z| \le MR$

با توجه به نامساوی کوشی برای $n = 2$ داریم: $|f''(z_0)| \le \frac{2!MR}{R^2} = \frac{2M}{R}$

به دلیل اینکه f تابعی تام است، پس در کل صفحه مختلط تحلیلی است و می‌توانیم فرض کنیم $R \to +\infty$ در این صورت $f''(z) = 0$، پس به ازای هر z، $f(z) = az + b$ و با توجه به اینکه $f(0) = 0$ لذا $b = 0$ و در نتیجه $f(z) = az$ خواهد بود.

مثال۲۹: اگر تابع $f(z) = e^{Az}$ در کل صفحه مختلط کراندار باشد، آنگاه مقدار A کدام است؟

۱) 0
۲) 1
۳) $\frac{1}{z^2}$
۴) A هر مقدار می‌تواند داشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم تابع $f(z) = e^{Az}$ در تمام صفحه تحلیلی است و چون در صورت سئوال گفته شده کراندار نیز می‌باشد، پس طبق قضیه لیوویل باید تابعی ثابت باشد و این یعنی مشتق آن صفر باشد: $f'(z) = Ae^{Az} = 0 \Rightarrow A = 0$

مثال۳۰: انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2(1 + x^2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}(1 + e^{-2})$
۲) $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-2})$
۳) $\frac{\pi}{4}(1 + e^2)$
۴) $\frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{e})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» انتگرال را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{(1 + x^2)}$$

انتگرال اول:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}[\mathrm{Arctg}\, x]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\mathrm{Arctg}(\infty) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

اما برای حل انتگرال دوم، باید مانده‌های تابع $f(z) = \frac{e^{i2z}}{1 + z^2}$ را در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند، حساب کنیم، قطب‌های تابع $f(z)$ برابر $z = \pm i$ می‌باشند که فقط $z = i$ بالای محور حقیقی قرار دارد و لذا داریم:

$$\text{مانده در } z = i = \lim_{z \to i}[(z - i)\frac{e^{i2z}}{(z - i)(z + i)}] = \lim_{z \to i}\frac{e^{i2z}}{z + i} = \frac{e^{i2(i)}}{i + i} = \frac{e^{-2}}{2i}$$

پس حاصل انتگرال با توجه به اینکه بازه‌ی انتگرال از 0 تا ∞ داده شده لذا باید ضریب $\frac{1}{2}$ در $2\pi i$ ضرب شود. برابر $2\pi i \times (\frac{1}{2} \times \frac{e^{-2}}{2i}) = \frac{\pi e^{-2}}{2}$، می‌شود و چون خود صورت سئوال ضریب $\frac{1}{2}$ پشت انتگرال قرار داده، پس $I_2 = \frac{\pi e^{-2}}{4}$ خواهد بود، پس داریم: $I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}e^{-2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2})$

مثال۳۱: مقدار انتگرال $I = \oint_C \frac{3z}{3z - 1}dz$ به کمک قضیه مانده‌ها در حالتی که C دایره یکه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}\pi i$
۲) $\frac{4}{3}\pi i$
۳) πi
۴) $2\pi i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ریشهٔ مخرج $z = \frac{1}{3}$ است و واضح است این نقطه داخل دایره یکه قرار دارد:

$$\underset{z = \frac{1}{3}}{\mathrm{Res}}(\frac{3z}{3z - 1}) = \lim_{z \to \frac{1}{3}}(z - \frac{1}{3})\frac{3z}{3(z - \frac{1}{3})} = \lim_{z \to \frac{1}{3}} z = \frac{1}{3} \Rightarrow I = 2\pi i \times \frac{1}{3} = \frac{2\pi i}{3}$$

مثال۳۲: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ که C دایره‌ای به معادله $|z-2-i|=2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3\pi i}{2}$ ۳) $-\frac{3\pi}{2}i$ ۴) $\frac{2}{3}\pi i$

پاسخ : گزینه «۲» تابع دارای قطب مرتبه دوم $z=0$ و قطب ساده $z=2$ می‌باشد که فقط $z=2$ داخل دایره C قرار دارد:

$$\underset{z=2}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{2+1}{3(2)^2-4(2)}=\frac{3}{4}\Rightarrow I=2\pi i\times\frac{3}{4}=\frac{3\pi i}{2}$$

توضیح: همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد با قرار دادن $z=0$ و $z=2$ در معادله $|z-2-i|=2$ می‌توانیم بودن یا نبودن نقاط را درون ناحیه بررسی کنیم، چون $|0-2-i|=\sqrt{5}>2$ می‌باشد، پس $z=0$ داخل ناحیه قرار ندارد.

مثال۳۳: حاصل انتگرال $I=\oint_{|z|=1}\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$ کدام است؟

۱) $2\pi i$ ۲) $4\pi i$ ۳) $8\pi i$ ۴) $10\pi i$

پاسخ : گزینه «۴» تابع دارای قطب مرتبه سوم $z=1$ است:

$$\underset{z=1}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}[(z-1)^3.\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}(5z^2-3z+2)''=\frac{10}{2!}=5\Rightarrow I=5\times2\pi i=10\pi i$$

مثال۳۴: فرض کنید C معرف دایره $|z|=2$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال $\oint_C\frac{(z^2+1)}{z^6-6z^4+5z^2}dz$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\pi i}{4}$ ۲) $\frac{\pi i}{4}$ ۳) 0 ۴) $\frac{\pi i}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» واضح است ابتدا باید نقاط تکین تابع تحت انتگرال را حساب کنیم، برای این منظور مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$z^6-6z^4+5z^2=0\Rightarrow z^2(z^4-6z^2+5)=0\Rightarrow z^2(z^2-5)(z^2-1)=0\Rightarrow z=0\,,\ z=\pm\sqrt{5},z=\pm1$$

از بین نقاط فوق، فقط نقاط $z=\pm1$ و $z=0$، داخل دایره $|z|=2$، قرار دارند و لذا مانده در این نقاط را حساب می‌کنیم:

$$z=0\text{ مانده در }=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^2+1}{z^4-6z^2+5}\right)'=\lim_{z\to0}\frac{2z(z^4-6z^2+5)-(4z^3-12z)(z^2+1)}{(z^4-6z^2-5)^2}=0$$

$$z=1\text{ مانده در }=\left.\frac{z^2+1}{(z^6-6z^4+5z^2)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{z^2+1}{6z^5-24z^3+10z}\right|_{z=1}=\frac{2}{6-24+10}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

به همین طریق مانده در $z=-1$ برابر $+\frac{1}{4}$ به دست می‌آید و لذا حاصل انتگرال برابر است با:

$$\mathbf{I=2\pi i(0-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=0}$$

مثال۳۵: حاصل انتگرال $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cot g\pi z}{z^{2k+1}}dz$ که C عبارتست از بیضی $x^2+4y^2=1$ کدام است؟ (k عدد طبیعی)

۱) -۱ ۲) 0 ۳) ۱ ۴) π

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cot g\pi z}{z^{2k+1}}dz=\text{مجموع مانده‌ها}\Rightarrow z=0\text{ نقطه تکین }\Rightarrow z=0\text{ مانده در }=\frac{1}{z}\text{ ضریب}$$

اما تابع $\frac{\cot g\pi z}{z^{2k+1}}$ یک تابع زوج است و لذا برحسب توان‌های زوج z بسط می‌یابد. بنابراین ضریب $\frac{1}{z}$ در بسط این تابع صفر خواهد بود.

مثال۳۶: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{e^z}{z^3(z^2+1)}dz$ وقتی C مرز ساده و بسته $|z|=\frac{1}{2}$ در جهت مثبت باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi i$ ۳) $2\pi i$ ۴) $-2\pi i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» قطبهای تابع $z=\pm i$ و $z=0$ هستند که فقط نقطـه $z=0$ که یک قطـب مرتبـه سوم است درون دایره $|z|=\frac{1}{2}$ قررا دارد، لذا داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[z^3.\frac{e^z}{z^3(z^2+1)}]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}[\frac{e^z}{z^2+1}]''$$

پـس از دو بـار مشتـق‌گیـری از عبــارات داخــل پرانتــز و محــاسبه حــد عبــارت در نقطـه $z=0$ باقیمانـده برابـر $-\frac{1}{2}$ بـه دسـت خواهـد آمـد پـس $I=2\pi i\times(-\frac{1}{2})=-\pi i$ خواهد شد.

مثال۳۷: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{2e^z}{z-\sin z}dz$ کدام است؟

۱) $6\pi i$ ۲) $12\pi i$ ۳) $\frac{66\pi i}{5}$ ۴) $\frac{33\pi i}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» واضح است $z=0$ قطب تابع می‌باشد، اما چون قطب مرتبه سوم می‌باشد، استفاده از فرمـول‌هـای مانـده نمـی‌توانـد جالـب باشـد، نوشتن بسط دو تابع e^z و $\sin z$ و تقسیم صورت بر مخرج و تعیین ضریب $\frac{1}{z}$ بهترین راه است.

$$f(z)=\frac{2e^z}{z-\sin z}=\frac{2(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)}{z-(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots)}=\frac{2+2z+z^2+\frac{2}{3!}z^3+\cdots}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots}=\frac{2+2z+z^2+\frac{2}{3!}z^3}{\frac{z^3}{3!}(1-\frac{3!}{5!}z^2+\cdots)}$$

$$\frac{6}{z^3}(2+2z+z^3+\cdots)(\frac{1}{1-\frac{6z^2}{120}+\cdots})=\frac{6}{z^3}(2+2z+z^2)(1+\frac{6z^2}{120}+\cdots)=\frac{6}{z^3}(2+2z+\underbrace{z^2+\frac{12z^2}{120}}_{(1+\frac{1}{10})z^2}+\cdots)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}\text{ ضریب }=6(1+\frac{1}{10})=\frac{66}{10}=\frac{33}{5}$$

لذا حاصل انتگرال برابر $I=2\pi i\times\frac{33}{5}=\frac{66\pi i}{5}$ خواهد بود.

مثال۳۸: حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 2π ۳) $2\pi i$ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با جایگزینی $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}=\oint\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2\sqrt{2}z-(z^2+1)}{2z}}=\frac{1}{i}\oint\frac{2dz}{2\sqrt{2}z-z^2-1}=\frac{1}{i}\oint\frac{-2dz}{z^2-2\sqrt{2}z+1}$$

با صفر قرار دادن مخرج کسر، قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^2-2\sqrt{2}z+1=0\Rightarrow z=\sqrt{2}+1\ ,\ z=\sqrt{2}-1$$

که از بین دو قطب فوق فقط $z=\sqrt{2}-1$ درون دایره $|z|=1$ واقع است، لذا داریم:

$$I=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1}f(z)=2\pi i\operatorname*{Rez}_{z=\sqrt{2}-1}[\frac{-2}{z^2-2\sqrt{2}z+1}]=-4\pi i\times\frac{1}{2z-2\sqrt{2}}\bigg|_{z=\sqrt{2}-1}=-4\pi i(\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)-2\sqrt{2}})=2\pi i$$

دقت کنید پشت انتگرال ضریب $\frac{1}{i}$ داشتیم، پس $I=\frac{1}{i}(2\pi i)=2\pi$.

مثال۳۹: حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» قطبهای تابع $z=\pm i$ و $z=\pm 3i$ می‌باشند، که فقط $z=i$ و $z=3i$ بالای محور حقیقی هستند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to i}\frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)(z^2+9)}=\frac{1}{16i}\\ \lim\limits_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim\limits_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+1)(z-3i)(z+3i)}=-\frac{1}{48i}\end{cases}\Rightarrow I=2\pi i(\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i})=2\pi i(\frac{3-1}{48i})=\frac{\pi}{12}$$

مثال۴۰: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{3e^3}$ ۲) $\frac{\pi}{3e^6}$ ۳) $\frac{\pi}{9e^3}$ ۴) $\frac{\pi}{9e^6}$

پاسخ : گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال فوق کافی است مانده تابع $\frac{e^{2iz}}{z^2+9}$ را در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند، حساب کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx=\mathrm{Re}[2\pi i\Sigma \mathrm{Res}\frac{e^{2iz}}{z^2+9}]=\mathrm{Re}[2\pi i\mathop{\mathrm{Res}}_{z=3i}\frac{e^{2iz}}{z^2+9}]=\mathrm{Re}\Big[[2\pi i\frac{e^{2iz}}{z+3i}]_{z=3i}\Big]=\pi i.\frac{e^{-6}}{3i}=\frac{\pi}{3e^6}$$

مثال۴۱: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{x^4+5x^2+4}dx$ **برابر کدام گزینه است؟** $(\omega>0)$

۱) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$ ۲) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$ ۳) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega}+e^{-2\omega})$ ۴) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}+e^{-2\omega})$

پاسخ: گزینه «۲» برای تابع فوق $f(z)=\frac{1}{z^4+5z^2+4}$ در نظر می‌گیریم. ابتدا قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^4+5z^2+4=0\quad\Rightarrow(z^2+1)(z^2+4)=0\quad\Rightarrow z=\pm i\ ,z=\pm 2i$$

حالا کافیست مانده $\frac{e^{i\omega z}}{z^4+5z^2+4}$، در قطب‌های بالای محور حقیقی حساب شود:

$$\left.\begin{array}{l}\text{مانده در } z=i=\left.\frac{e^{i\omega z}}{4z^3+10z}\right|_{z=i}=\frac{e^{i\omega(i)}}{4(i)^3+10(i)}=\frac{e^{-\omega}}{6i}\\ \text{مانده در } z=2i=\left.\frac{e^{i\omega z}}{4z^3+10z}\right|_{z=2i}=\frac{e^{i\omega(2i)}}{4(2i)^3+10(2i)}=-\frac{e^{-2\omega}}{12i}\end{array}\right\}\Rightarrow I=\mathrm{Re}[2\pi i(\frac{e^{-\omega}}{6i}-\frac{e^{-2\omega}}{12i})]=\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$$

مثال۴۲: حاصل $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$ **برابر کدام گزینه است؟**

۱) $\frac{3\pi e^{-2}}{16}$ ۲) $\frac{3\pi e^{-2}}{32}$ ۳) $\frac{-3\pi e^{-2}}{16}$ ۴) $\frac{-3\pi e^{-2}}{32}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به کران انتگرال که از صفر تا بی‌نهایت است. ابتدا باید بازه انتگرال را به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}$ تبدیل کنیم، چون تابع زیر انتگرال زوج است این موضوع امکان‌پذیر است و لذا داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$$

برای محاسبه این انتگرال باید مانده $\dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$ را در قطب‌های بالای محور حقیقی حساب کنیم. تنها قطب تابع که بالای محور حقیقی قرار دارد $z=2i$ می‌باشد و لذا داریم:

$$\text{مانده در } z=2i = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\Big[\frac{e^{iz}(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\Big]' = \lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)^2-2(z+2i)e^{iz}}{(z+2i)^4} = \frac{ie^{i(2i)}(2i+2i)^2-2(2i+2i)e^{i(2i)}}{(2i+2i)^4}$$

$$=\frac{e^{-2}(-16i)-2(4i)e^{-2}}{4^4}=\frac{(-24i)e^{-2}}{16\times 16}=-\frac{3ie^{-2}}{32}$$

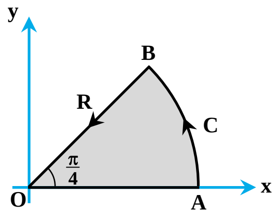
$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big[2\pi i\Big(\frac{-3ie^{-2}}{32}\Big)\Big] \Rightarrow I=\frac{1}{2}\Big(\frac{3\pi e^{-2}}{16}\Big) \Rightarrow I=\frac{3\pi e^{-2}}{32}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۴۳: حاصل $I=\int_0^\infty \sin x^2 dx$ کدام است؟ (در حل سؤال از تساوی $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$، استفاده کنید)

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$　　۲) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$　　۳) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$　　۴) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

پاسخ: گزینه «۱» مسیر انتگرال‌گیری را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



برای حل این سؤال باید حاصل انتگرال $\oint_C e^{iz^2}dz$ را حساب کنیم. یک حدس برای انتخاب این انتگرال به دلیل تساوی مقابل است: $e^{ix^2}=\cos x^2+i\sin x^2$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع زیر انتگرال هیچ نقطه‌ی تیکنی در مرز داده شده ندارد، لذا $\oint_C e^{iz^2}dz=0$، حالا با تفکیک این انتگرال داریم:

$$\int_{OA}e^{iz^2}dz+\int_{AB}e^{iz^2}dz+\int_{BO}e^{iz^2}dz=0$$

اما روی OA داریم $z=x$ (از $x=0$ تا $x=R$) روی AB داریم $z=Re^{i\theta}$ (از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{4}$) و بالاخره روی BO داریم $z=xe^{\frac{\pi}{4}i}$ (از $x=R$ تا $x=0$) بنابراین انتگرال‌ها را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{iR^2(e^{2i\theta})}(iRe^{i\theta}d\theta)+\int_R^0 e^{ix^2(e^{\frac{\pi}{2}i})}.e^{\frac{\pi}{4}i}dx=0$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}.iRe^{i\theta}d\theta+\int_R^0 e^{i(x^2)(i)}.e^{\frac{\pi}{4}i}dx=0 \qquad (*)$$

خب حالا حد عبارات فوق را وقتی $R\to\infty$ را حساب می‌کنیم. قدر مطلق انتگرال دوم از سمت راست به شکل زیر حساب می‌شود:

$$\Big|\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}.iRe^{i\theta}d\theta\Big|\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2\sin 2\theta}Rd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{R}{e^{R^2\sin 2\theta}}d\theta$$

در عبارات فوق $0\le 2\theta\le\frac{\pi}{2}$، بنابراین $\sin 2\theta\ge 0$ و بنابراین وقتی $R\to\infty$ مقدار این انتگرال صفر است.

پس معادله (*) در $R\to\infty$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx+\int_\infty^0 e^{-x^2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)dx=0 \Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

بر طبق صورت سؤال انتگرال سمت راست برابر $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ است و لذا داریم:

$$\int_0^{+\infty}(\cos x^2+i\sin x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی را برابر قرار دهیم، داریم:

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big) \quad,\quad \int_0^\infty \cos x^2 dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big)$$

توضیح: انتگرال‌های فوق به انتگرال‌های «فرنل» معروف هستند. که در بحث تفرق امواج ظاهر می‌شوند.

مثال۴۴: با استفاده از نتیجه‌ی مثال قبل، حاصل انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\pi\ln 2$ ۲) $-\frac{1}{2}\pi\ln 2$ ۳) $\pi\ln 2$ ۴) $-\pi\ln 2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر در سؤال قبل از تغییر متغیر $x=tg\theta$، استفاده کنیم آنگاه $dx=(1+tg^2\theta)d\theta$ و لذا داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(tg^2\theta+1)}{tg^2\theta+1}(1+tg^2\theta)d\theta=\pi\ln 2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{\cos^2\theta})d\theta=\pi\ln 2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln 1-\ln\cos^2\theta)d\theta=\pi\ln 2$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}-2\ln(\cos\theta)d\theta=\pi\ln 2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{2}\pi\ln 2$$

مثال۴۵: اگر $f(z)=z^5-3iz^2+2z-1+i$، آنگاه حاصل $\oint_C\frac{f'(z)dz}{f(z)}$، در صورتی که منحنی C شامل تمام صفرهای $f(z)$ باشد، کدام است؟

۱) صفر   ۲) $4\pi i$ ۳) $10\pi i$ ۴) $8\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این تست از قضیه اساسی جبر و همچنین قضیه شناسه برای پاسخ دادن استفاده می‌کنیم. اولاً چون ضریب z^5 مخالف صفر است و معادله از درجه ۵ است، لذا $f(z)$ درست ۵ ریشه (۵ صفر) دارد و طبق صورت تست همه آن‌ها داخل C قرار دارند، از طرفی واضح است $f(z)$ هیچ قطبی ندارد، لذا طبق قضیه شناسه داریم:

$$\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(N-P)=2\pi i(5-0)=10\pi i$$

مثال۴۶: فرض کنید f یک تابع تحلیلی بر $|z|\le R$ باشد. در این صورت مقدار انتگرال $\oint_{|z|=R}f(z)\overline{dz}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $-2\pi iR^2f'(0)$ ۳) $\pi iR^2f'(0)$ ۴) $2\pi iR^2f'(0)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$z=Re^{i\theta}\Rightarrow dz=iRe^{i\theta}d\theta\Rightarrow\overline{dz}=-iRe^{-i\theta}d\theta=\frac{-iR^2e^{i\theta}d\theta}{R^2e^{i2\theta}}=\frac{-R^2dz}{z^2}$$

$$\oint_{|z|=R}f(z)\overline{dz}=\oint\frac{f(z)(-R^2dz)}{z^2}=-R^2\oint\frac{f(z)}{z^2}dz=-R^2[2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f(z)}{z^2}]=-2\pi iR^2f'(0)$$

مثال۴۷: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(3x)}{(x^2+3)(x^2+1)}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{4}(e^{-3}+e^{-3\sqrt{3}})$ ۲) $\frac{\pi}{2}(e^{-3}+e^{-3\sqrt{3}})$ ۳) $\frac{\pi}{4}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$ ۴) $\frac{\pi}{2}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به تابع زیر انتگرال باید مانده تابع $\frac{ze^{i3z}}{(z^2+3)(z^2+1)}$ را در قطب‌های آن (قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند) حساب کنیم، قطب‌های بالای محور حقیقی فقط $z=\sqrt{3}i$ و $z=i$ هستند، لذا داریم:

$$z=i\text{ مانده در }=\frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)}\Big|_{z=i}=\frac{ie^{i3(i)}}{2i(i^2+1)+2i(i^2+3)}=\frac{ie^{-3}}{4i}=\frac{e^{-3}}{4}$$

$$z=\sqrt{3}i\text{ مانده در }=\frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)}\Big|_{z=\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}ie^{i3(i\sqrt{3})}}{2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+1]+2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+3]}=\frac{\sqrt{3}ie^{-3\sqrt{3}}}{2i\sqrt{3}(-2)}=\frac{e^{-3\sqrt{3}}}{-4}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر مقدار زیر است:

$$I=\mathrm{Im}[2\pi i(\frac{e^{-3}}{4}-\frac{e^{-3\sqrt{3}}}{4})]=\frac{\pi}{2}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$$

مثال۴۸: اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi(2n!)}{2^{2n}(n!)}$ ۲) $\frac{\pi(2n!)}{2^{2n+1}(n!)^2}$ ۳) $\frac{\pi(n!)}{2^{2n}(2n!)}$ ۴) $\frac{\pi(n!)}{2^{2n+1}(2n!)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به بازه‌ی انتگرال امکان استفاده از فرمول وجود ندارد، اما با تغییر بازه‌ی آن (با توجه به زوج بودن تابع زیر انتگرال) می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم، بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

کافی است مانده تابع $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ در قطب‌های بالای محور حقیقی تعیین شوند، تنها قطب تابع که بالای محور حقیقی قرار دارد، $z=i$ می‌باشد، لذا با توجه به این که $z=i$ قطب مرتبه‌ی **$(n+1)$ام** است، داریم:

$$\text{مانده در } z=i=\frac{1}{(n+1-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{(n+1)-1}}{dz^{(n+1)-1}}[(z-i)^{n+1}(\frac{1}{(z-i)^{n+1}(z+i)^{n+1}})]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}[\frac{1}{(z+i)^{n+1}}]$$

چند بار دیگر مشتق می‌گیریم تا بتوانیم به یک ضابطه‌ی کلی در مورد حاصل مشتق nام برسیم:

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[\frac{-(n+1)}{(z+i)^{n+2}}]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}[\frac{(n+1)(n+2)}{(z+i)^{n+3}}]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}[\frac{-(n+1)(n+2)(n+3)}{(z+i)^{n+4}}]$$

به نظر می‌رسد فرمول کلی مشتق به صورت زیر باشد:

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}[\frac{(-1)^n(n+1)(n+3)\cdots(n+n)}{(z+i)^{n+n+1}}]=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}{(2i)^{2n+1}}]$$

$$=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}{(2i)^{2n+1}}]$$

برای این که بتوانیم عبارت صورت کسر بالا را به صورت $(2n)!$ بنویسیم، لازم است جملات قبل از $(n+1)$ نیز اضافه شود، بنابراین در صورت و مخرج کسر عبارت $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ را ضرب می‌کنیم.

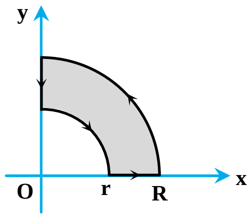
$$\text{حاصل عبارت}=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n\overbrace{1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n)}^{(2n)!}}{[1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n](2i)^{2n+1}}]$$

عبارتی که ضرب کردیم، همان $n!$ بود و لذا در مخرج $n!$ داریم بنابراین عبارت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n(2n)!}{(2i)^{2n+1}n!}]=\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2(2i)^{2n+1}}$$

$$I=\frac{1}{2}[2\pi i(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(i)^{2n+1}})]=\frac{1}{2}[2\pi i(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(i^2)^n i})]=\frac{1}{2}[2\pi i(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(-1)^n i})]=\frac{\pi(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

مثال ۴۹: حاصل انتگرال حقیقی $\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ با توجه به مسیر داده شده کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

۳) $\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{\pi}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» برای این انتگرال با در نظر گرفتن $J=\oint\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz$، واضح است $z=۰$ نقطه‌ی شاخه‌ای تابع تحت انتگرال است که درون و روی مسیر قرار ندارد. بنابراین $\oint_C\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz=۰$، حالا می‌رویم سراغ نوشتن انتگرال‌های جدید بر روی مسیرهای متفاوت، که شامل ۴ مسیر مختلف است:

$$\int_r^R\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx+\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^{iRe^{i\theta}}.Rie^{i\theta}}{\sqrt{Re^{i\theta}}}d\theta+\int_R^r\frac{e^{-y}}{\sqrt{iy}}i\,dy+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}\frac{e^{ire^{i\theta}}(re^{i\theta}d\theta)}{\sqrt{re^{i\theta}}}=۰ \qquad (*)$$

انتگرال‌های دوم و چهارم وقتی $R\to\infty$ و $r\to۰$ به صفر نزدیک می‌شوند، زیرا داریم:

$$\lim_{R\to\infty}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^{i(R\cos\theta+iR\sin\theta)}}{\sqrt{R}.\sqrt{e^{i\theta}}}Rie^{i\theta}d\theta=\lim_{R\to\infty}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^{iR\cos\theta-R\sin\theta}\times R\times i\sqrt{e^{i\theta}}}{\sqrt{R}}d\theta=\lim_{R\to\infty}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^{iR\cos\theta}\times\sqrt{R}}{e^{R\sin\theta}}(i\sqrt{e^{i\theta}})d\theta=۰$$

توضیح: دقت کنید $|e^{iR\cos\theta}|=۱$ و لذا وقتی $R\to\infty$، آنگاه مخرج عبارت تحت انتگرال به سمت بی‌نهایت و در نتیجه کل کسر به سمت صفر میل می‌کند.

$$\lim_{r\to۰}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^{i(r\cos\theta+ir\sin\theta)}\times r\times ie^{i\theta}}{\sqrt{r}.\sqrt{e^{i\theta}}}d\theta=\lim_{r\to۰}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}e^{ir\cos\theta-r\sin\theta}\times\sqrt{r}\times i\sqrt{e^{i\theta}}d\theta=۰$$

بنابراین تساوی (*) به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$\int_۰^\infty\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx+\int_\infty^۰\frac{e^{-y}}{\sqrt{iy}}idy=۰$$

با تغییر متغیر $y=u^۲$، داریم $dy=۲udu$ و لذا خواهیم داشت:

$$\Rightarrow\int_\infty^۰\frac{e^{-y}}{\sqrt{iy}}(idy)=\int_\infty^۰\frac{e^{-u^۲}}{\sqrt{i}\times u}(i۲udu)=-۲\sqrt{i}\int_۰^\infty e^{-u^۲}du=-۲\sqrt{i}\times\frac{\sqrt{\pi}}{۲}=-\sqrt{i}\times\sqrt{\pi}$$

$$\int_۰^\infty\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx=\int_۰^\infty\frac{\cos x+i\sin x}{\sqrt{x}}dx=\int_۰^\infty\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx+i\int_۰^\infty\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{i}\times\sqrt{\pi}=(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow\int_۰^\infty\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt{\pi}\Rightarrow\int_۰^\infty\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$$

مثال ۵۰: تعداد ریشه‌های $۲z^۵+z^۴-۶z^۲+z+۱=۰$ با احتساب مرتبه‌ی چندگانگی آنها در ناحیه‌ی $۱\le|z|<۲$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از قضیه روشه تعداد ریشه‌های داخل دایره $|z|\le۱$ را می‌یابیم:

$$۲z^۵+z^۴-۶z^۲+z+۱=۰$$

برای محاسبه اندازه $f(z)$ و $g(z)$ از دو نامساوی مقابل استفاده می‌کنیم:

$$|z_۱+z_۲|\le|z_۱|+|z_۲|\Rightarrow|f(z)|\le۲|z|^۵+|z|^۴=۲+۱=۳$$

$$|z_۱+z_۲+z_۳|\ge|z_۱|-|z_۲|-|z_۳|\Rightarrow|g(z)|\ge۶|z|^۲-|z|-۱=۶-۱-۱=۴$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|f(z)|\le۳\\|g(z)|\ge۴\end{array}\right\}\Rightarrow|f(z)|\le|g(z)|$$

پس تعداد ریشه‌های $f(z)+g(z)$ برابر با تعداد ریشه‌های $g(z)$ درون دایره $|z|=1$ می‌باشد. $g(z)=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{3}\ ,\ z=\frac{1}{2}$

تعداد ریشه‌های معادله $2z^5+z^4-6z^2+z+1$ درون دایره $|z|\le 2$ را هم به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} &f(z)=2z^5+z^4 \Rightarrow |f(z)|\ge 2|z|^5-|z|^4=2\times 32-16=48 \\ &g(z)=-6z^2+z+1 \Rightarrow |g(z)|\le 6|z|^2+|z|+1=6\times 4+2+1=27 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |g(z)|<|f(z)|$$

پس تعداد ریشه‌های $f(z)+g(z)$ برابر با تعداد ریشه‌های $f(z)$ درون دایره $|z|=2$ می‌باشد.

$$f(z)=2z^5+z^4=z^4(2z+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 & \text{از مرتبه ۴} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

با احتساب چندگانگی ۵ ریشه دارد.

پس در ناحیه $1\le|z|<2$ معادله $5-2=3$ ریشه دارد.

مثال۵۱: مقدار انتگرال $\int_0^\infty e^{-x^4}dx$ کدام است؟ ($\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\Gamma(z)$) (سراسری ۸۹)

۱) $(\frac{1}{2})!$ ۲) $(\frac{1}{4})!$ ۳) $\frac{1}{4!}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تعریف $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ را داریم. انتگرال مورد نظر $\int_0^\infty e^{-x^n}dx$ را به صورت تابع گاما در بیاوریم. با تغییر متغیر $x^n=t$ خواهیم داشت:

$$x^4=t \rightarrow x=t^{\frac{1}{4}} \rightarrow dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$$

این مقادیر را در انتگرال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$I=\int_0^\infty e^{-t}(\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}})dt=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

و داریم:

$-1=-\frac{3}{4} \Rightarrow z=\frac{1}{4}$. در نتیجه $\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})=I$

و نیز تعریف تابع گاما و ارتباط آن با تابع فاکتوریل بدین گونه است:

$$\Gamma(z)=(z-1)!\ \Rightarrow\ I=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)!=(\frac{1}{4})!$$

فصل هفتم

«سری فوریه، انتگرال و تبدیل فوریه»

مثال۱: دوره تناوب $f(x)=|\cos x|$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۳π

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» می‌دانیم دوره تناوب $f(x)=\cos x$ برابر $T_۱=۲\pi$ می‌باشد ، اما باتوجه به نکته فوق با قرار دادن نصف دوره تناوب فوق خواهیم دید تابع $f(x)=|\cos x|$ متناوب است.

مثال۲: کدامیک از توابع زیر زوج است؟

۱) $y=x\sin x$ ۲) $y=x\cos x$ ۳) $y=x^{۳}$ ۴) $y=x^{۷}+\sin x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$۱)f(x)=x\rightarrow f(-x)=-x=-f(x)\quad\Rightarrow$ تابع فرد است

$۲)f(x)=\cos x\rightarrow f(-x)=\cos(x)=f(x)\quad\Rightarrow$ تابع زوج است

$۳)f(x)=\sin x\rightarrow f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)\quad\Rightarrow$ تابع فرد است

با توجه به نکات فوق تابع $y=x\sin x$ حاصلضرب دو تابع فرد است، پس تابعی زوج است و تابع $y=x\cos x$ تابعی فرد است و همچنین $y=x^{۷}+\sin x$ مجموع دو تابع فرد است و لذا خود تابعی فرد است.

مثال۳: کدامیک از توابع زیر فرد، زوج یا نه فرد و نه زوج هستند؟

۱) $x|x|$: فرد
۲) $\sin x+\cos x$: نه فرد و نه زوج
۳) $\sinh x$: فرد
۴) $\cosh x$: زوج
۵) $x^{۲}\cos nx$: زوج
۶) $x\cos x$: فرد
۷) $e^{-|x|}$: زوج
۸) $\text{Ln}x$: نه فرد و نه زوج
۹) $x\sin nx$: زوج
۱۰) e^{x} : نه فرد و نه زوج
۱۱) $x+x^{۲}$: نه فرد و نه زوج
۱۲) $|x^{۳}|$: زوج

مثال۴: حاصل انتگرال $I=\int\sin^{۴}x\,dx$ کدام است ؟

۱) $\frac{۳x}{۸}+\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$

۲) $\frac{۳x}{۸}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$

۳) $\frac{۳x}{۸}-\frac{۱}{۸}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$

۴) $\frac{۳x}{۸}+\frac{۱}{۸}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$I=\int\sin^{۴}x\,dx=\int\left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right)^{۲}dx=\frac{۱}{۴}\int(۱-۲\cos ۲x+\cos^{۲}۲x)\,dx\ \Rightarrow$$

$$I=\frac{۱}{۴}\int\left[۱-۲\cos ۲x+\left(\frac{۱+\cos ۴x}{۲}\right)\right]dx=\frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۸}x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c=\frac{۳x}{۸}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$$

مثال۵: حاصل انتگرال $I=\int x\cos ۳x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{x\sin ۳x}{۳}+\frac{\cos ۳x}{۹}+c$ ۲) $\frac{x\cos ۳x}{۳}+\frac{\sin ۳x}{۹}+c$ ۳) $\frac{x\sin ۳x}{۳}-\frac{\cos ۳x}{۹}+c$ ۴) $\frac{x\cos ۳x}{۳}-\frac{\sin ۳x}{۹}+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با استفاده از روش جدول داریم :

x	$\cos ۳x$
	$+\ \frac{۱}{۳}\sin ۳x$
۱	
	$-\ -\frac{۱}{۹}\cos ۳x$
۰	

$$\Rightarrow I=\frac{x\sin ۳x}{۳}+\frac{\cos ۳x}{۹}+c$$

مثال۶: حاصل انتگرال $I=\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx$ به ازای nهای زوج کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{n}$ ۲) $\frac{\pi}{n}$ ۳) $\frac{2\pi}{n}$ ۴) $-\frac{2\pi}{n}$

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از روش جزء به جزء (روش جدول) داریم:

x	sin nx
	$\oplus$
۱	$\frac{-1}{n}\cos nx$
	$\ominus$
۰	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$I=[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow$$

$$I=-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\cancel{\sin n\pi}_{0}-\frac{\pi}{n}\cos(-\pi n)-\cancel{\frac{\sin(-\pi n)}{n^2}}_{0}=\frac{-2\pi}{n}\cos n\pi$$

از طرفی $\cos n\pi=(-1)^n$ تعریف می‌شود و به ازای nهای زوج برابر «۱+» می‌باشد لذا $I=-\frac{2\pi}{n}$ است.

مثال۷: فرض کنیم $f(x)=x^2, -\pi<x<\pi$ و $f(x)=f(x+2\pi)$ باشد، مقدار ثابت این تابع در بسط سری مثلثاتی (فوریه) کدام است؟

۱) $a_0=\frac{3\pi}{2}$ ۲) $a_0=\frac{\pi^2}{3}$ ۳) $a_0=\frac{2\pi^2}{3}$ ۴) $a_0=3\pi^3$

پاسخ : گزینه «۲» دوره تناوب تابع $T=2\pi$ می‌باشد، لذا داریم:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}[\frac{x^3}{3}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)^3}{3})=\frac{1}{2\pi}(\frac{2\pi^3}{3})=\frac{\pi^2}{3}$$

توضیح: اگر در این سؤال مقادیر b_n سؤال شود چون تابع زوج می‌باشد، واضح است $b_n=0$ خواهد بود.

مثال۸: تابع $f(x)=\begin{cases}-k & ; -\pi<x<0\\ k & ; 0<x<\pi\end{cases}$ مفروض است. ضریب جملات سینوسی این تابع در بسط مثلثاتی سری فوریه کدام است؟

۱) $b_n=0$ ۲) $b_n=\frac{2k}{n\pi}(1+\cos n\pi)$ ۳) $b_n=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$ ۴) $b_n=\frac{2k}{n\pi}(1-\sin n\pi)$

پاسخ : گزینه «۳» دوره تناوب تابع $T=2\pi$ می‌باشد و این یعنی $L=\pi$ است:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-k\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}k\sin nx dx\right]=\frac{k}{n\pi}[\cos nx]_{-\pi}^{0}-[\frac{k}{n\pi}\cos nx]_{0}^{\pi}=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

مثال۹: سری فوریه تابع $f(x)=x$ در صورتی که $-1\le x\le 1$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos n\pi x$ ۲) $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$

۳) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x}{n^2}$ ۴) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$

پاسخ : گزینه «۴» تابع فرد و دارای دوره تناوب $T=2$ می‌باشد، لذا $a_n=0$ و $a_0=0$ خواهد بود، اما برای محاسبه b_n داریم:

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x dx=2\int_{0}^{1}x\sin n\pi x dx\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری جزء به جزء}}b_n=2[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{2\cos n\pi}{n\pi}\xrightarrow{-\cos n\pi=(-1)^{n+1}}b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$$

مثال۱۰: سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}1 & , \frac{L}{2}\le x\le \frac{3L}{2}\\ 0 & , 0\le x<\frac{L}{2}\ ,\ \frac{3L}{2}<x<2L\end{cases}$ **و $T=2L$ کدام است؟**

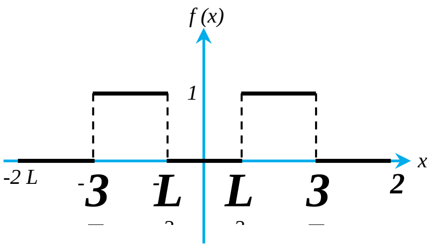
۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)}{L}x$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)}{L}\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)}{L}\pi x$

پاسخ : گزینه «۴»



ملاحظه می‌گردد تابع زوج است لذا گزینه‌های ۲ و ۳ که شامل جملات سینوسی می‌باشند نادرست هستند، از طرفی از بین گزینه‌های ۱ و ۴ می‌دانیم سری فوریه به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$ بیان می‌گردد که در گزینه ۱ از π خبری نیست لذا گزینه (۴) صحیح است.

مثال۱۱: هرگاه $f(x)=x+\sin x$ و $-\pi<x<\pi$، در بسط فوریه مثلثاتی f ، ضریب جمله sinx برابر است با :

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم سری فوریه تابع $\sin x$ برابر خود $\sin x$ است، لذا کافی است سری فوریه تابع فرد $g(x)=x$ را به دست آوریم. چون ضریب $\sin x$ خواسته شده لذا b_1 را حساب می‌کنیم:

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری جزء به جزء}}b_1=\frac{2}{\pi}[-x\cos x+\sin x]_0^{\pi}=2$$

ضریب $\sin x$ در بسط تابع $g(x)=x$ برابر ۲ به دست آمد و چون $f(x)=x+\sin x$ تعریف شده است، لذا ضریب $\sin x$ برابر۳=۲+۱ می‌باشد.

مثال۱۲: مقدارسری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & , 0<x<\frac{L}{2}\\ 1 & , \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$ **در نقطه $x=\frac{L}{2}$ کدام است؟**

۱) ۱   ۲) صفر   ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ : گزینه «۳» تابع در نقطه $x=\frac{L}{2}$ انفصال دارد و مقدار تابع برابر است با:

$$f(\frac{L}{2})=\frac{f(\frac{L}{2}^-)+f(\frac{L}{2}^+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال۱۳: در بسط تابع پریودیک $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب a_n و b_n با روابط زیر به دست آمده است:

$$a_n=\frac{2(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2}\ ,\ b_n=\frac{4\pi n(1-e^{-1})}{1+4\pi n^2}\quad (n\neq 0)$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) تابع $f(x)$ و مشتقات مرتبه اول و دوم آن پیوسته بوده ولی مشتقات مرتبه‌های بالاتر ناپیوسته است.

۲) عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای یک تابع پریودیک باشد.

۳) تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریود اصلی خود می‌باشد.

۴) ضرایب فوریه به تنهایی نمی‌توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن تابع پریودیک را مشخص نمایند.

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به اینکه یکی از ضرایب فوریه (یعنی b_n) با سرعتی مانند $\frac{c}{n}$ صفر می‌شود، لذا طبق مطالب بیان شده تابع باید دارای حداقل یک نقطه ناپیوستگی باشد. لازم به ذکر است تست فوق از تست‌های آزمون سال ۷۴ رشته برق دانشگاه سراسری بوده است.

مثال۱۴: اگر بسط فوریه تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-1 & , -\pi<x<0\\ 1 & , 0<x<\pi\end{cases}$ **به صورت** $f(x)=\frac{4}{\pi}[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots]$ **باشد، آنگاه بسط فوریه** $g(x)=|x|$ **و** $-\pi<x<\pi$ **کدام است؟**

۱) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos(2k+1)}{2k+1}dx+c$

۲) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}dx+c$

۳) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{x}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}dx+c$

۴) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{x}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}dx+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» تابع g در واقع انتگرال تابع f می‌باشد، لذا با انتگرال‌گیری داریم:

$$g(x)=\int f(x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^x(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots)dx=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}dx+c$$

مثال۱۵: اگر تابع $f(x)$ **در بازه‌ی** $-\pi\le x\le\pi$ **به صورت** $f(x)=\begin{cases}\pi+x & ; -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{2} & ; x=-\pi,0\\ x & ; 0<x<\pi\end{cases}$**، تعریف شود و سری فوریه آن به صورت** $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$ **باشد، عبارت** $x(x-\pi)$ **در بازه‌ی** $0<x<\pi$ **برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

۱) $-\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$

۲) $-\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^2}$

۳) $-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$

۴) $-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به سری فوریه $f(x)$ و گزینه‌ها به نظر می‌رسد، انتگرال‌گیری از طرفین رابطه ضروری باشد:

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{\pi}{2}dx-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin 2nx}{n}dx\Rightarrow\int_0^x f(x)dx=\frac{\pi}{2}x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}[-\cos 2nx]_0^x$$

با توجه به این که صورت سؤال شرط کرده $0<x<\pi$، لذا $f(x)=x$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}(\cos 2nx-1)\xrightarrow{\text{ضرب در ۲}}x^2=\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow x(x-\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad(*)$$

تا اینجا معلوم شد که گزینه‌های (۲) و (۴) جواب نیستند، برای انتخاب گزینه‌ی صحیح لازم است مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، معلوم شود، برای به دست آوردن مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، با توجه به رابطه (*) باید بگوییم سری $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ مقدار ثابت بسط فوریه تابع $x(x-\pi)$ است:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x(x-\pi)dx=\frac{1}{\pi}[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2\pi}{2}]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}[\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi^3}{2}]=\frac{\pi^2}{6}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مثال۱۶: اگر سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}x & -1<x\le 0\\ x+2 & 0<x\le 1\end{cases}$ **به صورت** $f(x)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin n\pi x$ **بیان گردد آنگاه مقدار** $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$ **برابر کدام است؟**

۱) $\frac{3\pi}{4}$

۲) $\frac{3\pi}{2}$

۳) $\frac{\pi}{4}$

۴) $\frac{2\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$f(x)=1+\frac{2}{\pi}[3\sin\pi x-\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\times 3\times\sin 3\pi x-\frac{1}{4}\times\sin 4\pi x+\frac{1}{5}\times 3\times\sin 5\pi x-\cdots]$$

با قرار دادن $x=\frac{1}{2}$ در طرفین تساوی فوق، مقدار $f(x)$ در سمت چپ، که از ضابطه دوم تابع f به دست می‌آید برابر $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ خواهد بود و داریم:

$$\frac{5}{2}=1+\frac{2}{\pi}[3\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\sin\pi}}_{0}+\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\underbrace{\cancel{\sin 2\pi}}_{0}+\frac{3}{5}\sin\frac{5\pi}{2}-\cdots]\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{2}{\pi}[3-1+\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\cdots]$$

$$\frac{3\pi}{4}=3-1+\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\cdots\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۳}}\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

مثال ۱۷: اگر سری فوریه تابع $f(x)=x\sin x$ به صورت زیر تعریف شود:

$$x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos 2x-2(\frac{\cos 2x}{1\times 3}-\frac{\cos 3x}{2\times 4}+-\cdots)$$

آنگاه حاصل سری عددی زیر برابر کدام گزینه است:

$$S=\frac{1}{1^2\times 2^2\times 3^2}+\frac{1}{2^2\times 3^2\times 4^2}+\cdots$$

۱) $\frac{4\pi^2-39}{16}$ ۲) $\frac{\pi^2-32}{4}$ ۳) $\frac{4\pi^2-39}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2-32}{16}$

پاسخ: گزینه «۱» از تابع $x\sin x$ در فاصله $[0,x]$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int_0^x x\sin x dx=\int_0^x[1-\frac{1}{2}\cos x-2(\frac{\cos 2x}{1\times 3}-\frac{\cos 3x}{2\times 4}+-\cdots)]$$

$$\Rightarrow -x\cos x+\sin x=x-\frac{1}{2}\sin x-2(\frac{\sin 2x}{1\times 2\times 3}-\frac{\sin 3x}{2\times 3\times 4}+-\cdots)$$

$$\Rightarrow x\cos x+x=\frac{3}{2}\sin x+2(\frac{\sin 2x}{1\times 2\times 3}-\frac{\sin 3x}{2\times 3\times 4}+-\cdots)$$

تابع $x+x\cos x$ تابعی فرد است و در نتیجه طبق قضیه انتگرال‌گیری از سری فوریه، عبارت سمت راست سری فوریه این تابع است. بنابراین طبق قضیه پارسوال داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=2a_0^2+\sum(a_n^2+b_n^2)=b_1^2+\sum_{n=2}^{\infty}b_n^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x\cos x)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\cos^2 x+x^2+2x^2\cos x)dx=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2}{2}-\frac{15}{4}\pi)=\pi^2-\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow\pi^2-\frac{15}{2}=\frac{9}{4}+4(\frac{1}{1^2\times 2^2\times 3^2}+\frac{1}{2^2\times 3^2\times 4^2}+\cdots)=\frac{9}{4}+4S\Rightarrow\pi^2-(\frac{15}{2}+\frac{9}{4})=4S\Rightarrow S=\frac{4\pi^2-39}{16}$$

مثال ۱۸: سری فوریه مختلط تابع $f(x)=x^2$ در بازه $0\le x\le 2\pi$ اگر $f(x+2\pi)=f(x)$ باشد، کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}e^{-inx}$

۲) $f(x)=\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}.e^{inx}$

۳) $f(x)=\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}e^{-inx}$

۴) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2+2n\pi i}{n^2}.e^{inx}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}[\frac{x^3}{3}]_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2}{3}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2e^{-inx}dx\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری جزء به جزء}}C_n=\frac{1}{2\pi}[-\frac{x^2e^{-inx}}{in}-\frac{2xe^{-inx}}{-n^2}-\frac{2e^{-inx}}{-in^3}]_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}[\frac{4i\pi^2}{n}+\frac{4\pi}{n^2}]=\frac{2+2in\pi}{n^2}$$

مثال۱۹: با نوشتن انتگرال فوریه برای تابع $f(x)=e^{-x}$ مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$ برای $x>\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) πe^{-x} ۴) $\frac{\pi}{2}e^{-x}$

پاسخ : گزینه «۳» با فرض $f(x)=e^{-x}$ داریم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}e^{-x}\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}f(x).\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}e^{-x}\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\omega^2}.\cos\omega x+\frac{\omega}{1+\omega^2}.\sin\omega x\right]d\omega\xrightarrow{f(x)=e^{-x}}\int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\pi e^{-x}$$

مثال۲۰: با نوشتن انتگرال فوریه برای تابع $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x}$، $x>\circ$ با فرض اینکه $f(x)=-f(-x)$ مقدار انتگرال $I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{x\sin kx}{1+x^2}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2}e^{-k}$ ۲) $\frac{\pi}{2}e^{k}$ ۳) πe^{-k} ۴) πe^{k}

پاسخ : گزینه «۱»

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{\pi}{2}e^{-x}.\sin\omega x dx=\frac{\omega}{1+\omega^2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}e^{-x}=\int_{\circ}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

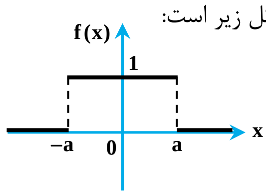
اگر در طرفین تساوی فوق ω به x و x به k تبدیل شود داریم:

$$\frac{\pi}{2}e^{-k}=\int_{\circ}^{\infty}\frac{x\sin kx}{1+x^2}dx$$

مثال۲۱: با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; |x|<a\\ \circ & ; |x|>a\end{cases}$، حاصل انتگرال $\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin\omega^3}{\omega}d\omega$ برابر کدام گزینه می‌شود؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به ضابطه‌ی تابع، نمودار آن شکل زیر است:



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع f زوج است و لذا داریم:

$$f(x)=\int_{\circ}^{\infty}A(\omega)\cos(\omega x)d\omega\Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}f(x)\cos(\omega x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{a}\cos(\omega x)dx=\frac{2}{\pi\omega}\sin(\omega a)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_{\circ}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\right]\cos(\omega x)d\omega$$

واضح است $f(\circ)=1$، بنابراین داریم:

$$f(\circ)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\cos(\circ)d\omega\Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}d\omega$$

با تغییر متغیر $a\omega=u$، آنگاه $d\omega=\frac{du}{a}$، لذا داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

اگر مجدداً از تغییر متغیر $u=t^3$ استفاده کنیم، $du=3t^2dt$ و لذا داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty}\left(\frac{\sin t^3}{t^3}\right)3t^2dt=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_{\circ}^{\infty}\left(\frac{\sin t^3}{t}\right)dt=\frac{\pi}{6}$$

مثال۲۲: تبدیل فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}0 & , -\infty<t\le -1\\ 1+t & , -1\le t\le 0\\ 1-t & , 0<t<1\\ 0 & , 1\le t<+\infty\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{1-\cos\omega}{2\omega^2}$ ۲) $\dfrac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$ ۳) $\dfrac{1-2\cos\omega}{\omega^2}$ ۴) $\dfrac{2-\cos\omega-1}{\omega^2}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها رابطه تبدیل فوریه، به شکل زیر است:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt$$

با رسم شکل تابع $f(t)$، می‌توان مشاهده کرد تابع زوج است، لذا حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt$ با توجه به اینکه تابع زیر انتگرال تـابعی فـرد اسـت، برابر صفر است. لذا داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt=2\int_{0}^{1}(1-t)\cos\omega t dt$$

با حل انتگرال به روش جزء به جزء داریم:

$$F(\omega)=2\left[\frac{1-t}{\omega}\sin\omega t-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega t\right]_0^1=-\frac{2}{\omega^2}\cos\omega+\frac{2}{\omega^2}\Rightarrow F(\omega)=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

توضیح: در این تست نیز رادیکال پشت انتگرال استفاده نشد، در آزمون‌ها با توجه به گزینه‌ها معلوم می‌شود آقای طراح کدام فرمول را بیشتر دوست داشته بارادیکال‌یا بی‌رادیکال؟!

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۳ : تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & , 0\le x\le 1\\ 0 & , x>1\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{1+\cos\omega}{\omega}$ ۲) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.\dfrac{1+\cos\omega}{\omega}$ ۳) $\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}$ ۴) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$F_s\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1\sin\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲۴: با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-a^2x^2}$ که به صورت $F_c[f(x)]=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ تعریف می‌شود. تبدیل فوریه سینوسی تابع $xf(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^2}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ ۲) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{2a^2}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ ۳) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ ۴) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{2a^3}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر از $F_c\{f(x)\}$ نسبت به ω مشتق بگیریم، داریم:

$$F_c\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(\omega x)dx\Rightarrow\frac{dF_c\{f(x)\}}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left[\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(\omega x)dx\right]=-\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin(\omega x)dx$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود؛ انتگرال سمت راست در واقع تبدیل فوریه سینوسی تابع $xe^{-a^2x^2}$ یا همان $xf(x)$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\frac{d}{d\omega}[F_c\{f(x)\}]=-[\text{تبدیل فوریه سینوسی تابع } xf(x)]$$

$$\Rightarrow \text{تبدیل فوریه سینوسی تابع } xf(x)=-\frac{d}{d\omega}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}\right]=-\left(\frac{-2\omega}{4a^2}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{\pi}\omega}{4a^3}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

مثال۲۵: معادله دیفرانسیل $y''+4y=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-2x} & x>0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. چنانچه تبدیل فوریه $y(x)$ را $Y(\omega)$ بنامیم، $Y(\omega)$ را بدست آورید.

۱) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(i\omega+2)(4+\omega^2)}$ ۲) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(i\omega+2)(4-\omega^2)}$ ۳) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(2-i\omega)(4+\omega^2)}$ ۴) $Y(\omega)=\dfrac{1}{(2-i\omega)(4-\omega^2)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» از طرفین معادله داده شده تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$(i\omega)^2Y(\omega)+4Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega}f(x)dx \Rightarrow (4-\omega^2)Y(\omega)=\int_0^{\infty}e^{-i\omega x}.e^{-2x}dx$$

$$\Rightarrow (4-\omega^2)Y(\omega)=\frac{1}{s+2}\Bigg|_{s=i\omega} \Rightarrow \mathbf{Y(\omega)=\frac{1}{(i\omega+2)(4-\omega^2)}}$$

مثال۲۶: جمله‌ی دوم سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=e^x$، $0<x<\pi$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $[\dfrac{4(-e^{\pi}+1)}{5\pi}]\sin 2x$ ۲) $\dfrac{2(e^{\pi}-1)}{5\pi}\sin 2x$ ۳) $[\dfrac{2(-e^{\pi}+1)}{5\pi}]\sin 2x$ ۴) $\dfrac{4(e^{\pi}-1)}{5\pi}\sin 2x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که سری فوریه سینوسی است، لذا داریم:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin(nx)dx \xrightarrow{\text{انتگرال } e^{ax}\sin bx}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}[\frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx-n\cos nx)]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi(1+n^2)}[e^{\pi}(\sin n\pi-n\cos n\pi)-e^0(\sin(0)-n\cos(0))]$$

$$\xrightarrow{\cos(n\pi)=(-1)^n} b_n=\frac{2}{\pi(1+n^2)}[-e^{\pi}n(-1)^n+n]$$

جمله‌ی دوم به ازای $n=2$، حاصل می‌شود:

$$\frac{2}{\pi}(\frac{1}{1+2^2})(-2e^{\pi}+2)\sin 2x=\mathbf{\frac{4(-e^{\pi}+1)}{5\pi}\sin 2x}$$

مثال۲۷: انتگرال فوریه تابع زوج $f(x)=\begin{cases}\cos x & , |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & , |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2})\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$ ۲) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi\omega)\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$

۳) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\pi\omega)\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$ ۴) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi\omega}{2})\cos(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x).\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}+\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega\pi}{2})}{1+\omega}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{2})}{1-\omega}]=\frac{1}{\pi}[\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1+\omega}+\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega}]=\frac{1}{\pi}[\frac{2\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega^2}]$$

مثال ۲۸: اگر سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{x}{2}) & ; \quad 0\le x<\pi\\ -\sin(\frac{x}{2}) & ; \quad \pi<x\le 2\pi\end{cases}$ به ازای هر $x\neq\pi$ به صورت زیر تعریف شود:

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$$

آنگاه حاصل $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-\frac{1}{2})}{k^2-k+\frac{3}{16}}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$　　۲) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$　　۳) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$　　۴) $\sqrt{2}\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر در ضابطه‌ی اصلی $f(x)$، $x=\frac{\pi}{2}$ را قرار دهیم، داریم: $f(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

این مقدار برابر با مقدار سری فوریه تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ است:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{4n^2-1}\Rightarrow\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{4n^2-1}$$

خب به ازای nهای زوج حاصل سری سمت راست صفر است، پس $n=2k-1$ در نظر گرفته و تست را حل می‌کنیم:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}(2k-1)\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{4(2k-1)^2-1}\xrightarrow{(-1)^{2k}=1}\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2k-1)\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{4(2k-1)^2-1}$$

عبارت $\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}$ را می‌توانیم بنویسیم $(-1)^{k-1}$، لذا داریم:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-1)}{4(4k^2-4k+1)-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-1)}{16k^2-16k+3}$$

با توجه به عبارت مخرج کسر و وجود عبارت $k-\frac{1}{2}$ در صورت کسرِ سری S، لازم است، فاکتورگیری‌هایی انجام شود، لذا داریم:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2(k-\frac{1}{2})}{16(k^2-k+\frac{3}{16})}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k-\frac{1}{2}}{8(k^2-k+\frac{3}{16})}\Rightarrow\frac{\pi\sqrt{2}}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-\frac{1}{2})}{k^2-k+\frac{3}{16}}$$

مثال ۲۹: اگر تبدیل فوریه e^{-9t^2} برابر $\frac{1}{\sqrt{18}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$ باشد آنگاه تبدیل فوریه تابع $f(t)=3te^{-9t^2}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{i\omega}{18\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$　　۲) $-\frac{i\omega}{18\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$　　۳) $\frac{i\omega}{9\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$　　۴) $-\frac{i\omega}{9\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با فرض $g(t)=e^{-9t^2}$، واضح است $g'(t)=-18te^{-9t^2}$، لذا از این خاصیت استفاده می‌کنیم:

$$F\{3te^{-9t^2}\}=\frac{1}{6}F\{18te^{-9t^3}\}=-\frac{1}{6}F\{g'(t)\}=-\frac{1}{6}(i\omega)F\{e^{-9t^2}\}=-\frac{i\omega}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}=-\frac{i\omega}{18\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{36}}$$

فصل هشتم

«تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن»

مثال۱: مقدار $\int_0^\infty t^2 e^{-3t}\,dt$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{27}$　۲) $\frac{2}{27}$　۳) $\frac{3}{27}$　۴) $\frac{4}{27}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حاصل انتگرال مفروض برابر است با مقدار تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t^2$ به ازای $s=3$.

$$I=\int_0^\infty t^2e^{-3t}dt \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}fdt=L[f]|_{s=s}} I=L[t^2]|_{s=3} \xrightarrow{t^n \xrightarrow{L} \frac{n!}{s^{n+1}}} I=(\frac{2!}{s^3})|_{s=3}=\frac{2}{27}$$

مثال۲: تبدیل لاپلاس $L[5\sin 2t-3\cos 2t]$ عبارت است از:

۱) $\frac{10+3s}{s^2+4}$　۲) $\frac{10-3s}{s^2+4}$　۳) $\frac{5-3s}{s^2+4}$　۴) $\frac{5+3s}{s^2+4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به خطی بودن عملگر تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s)=L[5\sin 2t-3\cos 2t]=5L[\sin 2t]-3L[\cos 2t]$$

$$\xrightarrow{(\sin at \xrightarrow{L} \frac{a}{s^2+a^2})\ \&\ (\cos at \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+a^2})} F(s)=5(\frac{2}{s^2+4})-3(\frac{s}{s^2+4})=\frac{10-3s}{s^2+4}$$

مثال۳: تبدیل لاپلاس معکوس $\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$　۲) $\sin t-t\cos t$　۳) $\frac{1}{2}(\sin t+t\cos t)$　۴) $\sin t+t\cos t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تبدیل معکوس لاپلاس تابع داده شده به صورت تبدیل معکوس لاپلاس حاصل‌ضرب دو تابع زیر می‌باشد:

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}.\frac{s}{s^2+1}\right]$$

با استفاده از بیان تبدیل معکوس لاپلاس حاصل‌ضرب دو تابع برحسب پیچش آن‌ها داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[FG]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} f(t)=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]*L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \Rightarrow f(t)=\cos t*\cos t$$

برای محاسبه تابع $f(t)$، عبارت سمت راست را با استفاده از تعریف پیچش توابع محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx} f(t)=\int_0^t \cos(t-x)\cos x\,dx$$

عبارت زیر انتگرال را با استفاده از روابط مثلثاتی به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))} f(t)=\frac{1}{2}\int_0^t (\cos t+\cos(t-2x))dx \Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{2}(\cos t.(x)-\frac{1}{2}\sin(t-2x))\Big|_0^t \Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)$$

مثال۴: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases} t; & t\le ۲ \\ t+۱; & ۲<t<۳ \\ t-۱; & ۳\le t \end{cases}$ عبارت است از:

۱) $\dfrac{۱+se^{-۲s}-۲se^{-۳s}}{s^۲}$ ۲) $\dfrac{۱-se^{-۲s}-۲se^{-۳s}}{s^۲}$ ۳) $\dfrac{۱-se^{-۲s}+۲se^{-۳s}}{s^۲}$ ۴) $\dfrac{۱+se^{-۲s}+۲se^{-۳s}}{s^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا تابع چندضابطه‌ای داده شده را برحسب تابع پله $u_a(t)$ بازنویسی می‌کنیم:

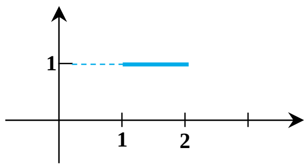
$$f(t)=t+u_۲(t)((t+۱)-t)+u_۳(t)((t-۱)-(t+۱)) \Rightarrow$$

با لاپلاس گرفتن از هر یک از جملات عبارت فوق داریم:

$$f(t)=t+u_۲(t)-۲u_۳(t) \Rightarrow L[f(t)]=\frac{۱}{s^۲}+\frac{۱}{s}e^{-۲s}-\frac{۲}{s}e^{-۳s} \Rightarrow L[f(t)]=\frac{۱+se^{-۲s}-۲se^{-۳s}}{s^۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵: **تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که نمودار آن در شکل نشان داده شده است، کدام‌یک از مقادیر زیر است؟**



۱) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s}(۱-e^{-s})$ ۲) $F(s)=\dfrac{۱}{s+۱}-\dfrac{۱}{s-۲}$

۳) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s+۱}-\dfrac{e^{-۲s}}{s+۲}$ ۴) $F(s)=\dfrac{u(s-۱)}{s+۱}-\dfrac{u(s-۲)}{s+۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از نمودار داده شده، ضابطه تابع $f(t)$ برابر است با:

$$f(t)=\begin{cases} ۱ & ۱\le t\le ۲ \\ ۰ & t<۱,\ t>۲ \end{cases}$$

تابع چندضابطه‌ای حاصل را برحسب توابع پله‌ای $u_a(t)$ بازنویسی می‌کنیم:

$$f(t)=u_۱(t)-u_۲(t) \Rightarrow L[f(t)]=L[u_۱(t)]-L[u_۲(t)]$$

با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس توابع پله‌ای داریم:

$$\xrightarrow{u_a(t)\xrightarrow{L}\frac{۱}{s}e^{-as}} F(s)=\frac{۱}{s}e^{-s}-\frac{۱}{s}e^{-۲s} \Rightarrow F(s)=\frac{۱}{s}e^{-s}(۱-e^{-s})$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: اگر $\delta(t)=\begin{cases} \infty & t=۰ \\ ۰ & t>۰ \end{cases}$ و $g(t)$ **یک تابع پیوسته باشد، کدام رابطه صحیح نمی‌باشد؟**

۱) $\int_۰^\infty \delta(t)dt=۱$ ۲) $\int_۰^\infty \delta(t)g(t)dt=g(۰)$ ۳) $\int_۰^\infty \delta(t-a)g(t)dt=g(a)$ ۴) $\int_۰^\infty \delta(t-a)g(t)dt=g(۰)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به خواص تابع دلتای دیراک این رابطه صحیح نیست.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: **مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^t\,dt$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) e

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به روابط بیان شده برای تابع دلتای دیراک داریم:

$$\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)g(t)dt=g(۰)} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^t\,dt=e^۰=۱$$

مثال ۸: حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\frac{\pi}{4})\sin t\, dt$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از رابطه مربوط به تابع دلتای دیراک، حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)g(t)dt=g(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\frac{\pi}{4})\sin t\, dt = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۹: انتگرال $\int_{0}^{2\pi} x^2 \sin 2x\, e^{ix}\, \delta(x-\pi)\, dx$ برابر است با:

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» عبارت زیر انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$I = \int_{0}^{2\pi} x^2 \sin 2x\, e^{ix}\delta(x-\pi)\, dx = \int_{0}^{2\pi} \delta(x-\pi)(x^2 \sin 2x\, e^{ix})\, dx$$

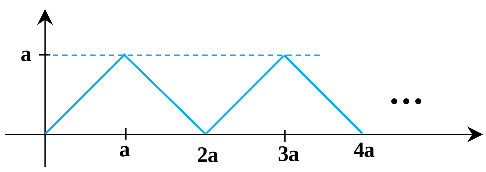
با توجه به تعریف $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty; & t=a \\ 0; & t\neq a \end{cases}$ داریم:

$$(x\neq\pi \Rightarrow \delta(x-\pi)=0) \Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\pi)(x^2 \sin 2x\, e^{ix})dx$$

با توجه به روابط بیان شده برای تابع دلتای دیراک داریم:

$$\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)g(t)\,dt=g(a)} I = (x^2 \sin 2x e^{ix})\big|_{x=\pi} \xrightarrow{\sin 2\pi = 0} I = 0$$

مثال ۱۰: موج مثلثی متناوب، دارای نمودار زیر است. تبدیل لاپلاس آن کدام است؟



۱) $\frac{1+e^{-as}}{s^2(1+e^{-as})}$ ۲) $\frac{1-e^{-as}}{s^2(1+e^{as})}$

۳) $\frac{1-e^{-as}}{s^2(1+e^{-as})}$ ۴) $\frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}$

پاسخ: گزینه «۳» تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=2a$ است، که در یک دوره تناوب $[0,2a]$ از دو خط زیر تشکیل شده است:

$$f(t) = \begin{cases} t; & 0\leq t<a \\ 2a-t; & a\leq t<2a \end{cases}$$

در نتیجه تبدیل لاپلاس این تابع متناوب با استفاده از تعریف برابر است با:

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-s\times 2a}}\int_{0}^{2a} e^{-st}f(t)d\,; \qquad (1)$$

بنابراین ابتدا به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J = \int_{0}^{2a} e^{-st}f(t)dt = \int_{0}^{a} e^{-st}f(t)dt + \int_{a}^{2a} e^{-st}f(t)dt$$

با جایگذاری تابع $f(t)$ در تساوی حاصل داریم:

$$J = \int_{0}^{a} e^{-st}\times(t)dt + \int_{a}^{2a} e^{-st}\times(2a-t)dt = \int_{0}^{a} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{-st}dt}_{dv} + \int_{a}^{2a} \underbrace{(2a-t)}_{u}\,\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}$$

برای حل هر یک از انتگرال‌های فوق از روش جزء‌به‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = ۲a - t \Rightarrow du = -dt \\ dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{۱}{s}e^{-st} \end{cases} \qquad \& \qquad \begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{۱}{s}e^{-st} \end{cases}$$

با جایگذاری عبارات فوق در قاعده حل انتگرال به روش جزء‌به‌جزء داریم:

$$\xrightarrow{\int udv = uv - \int vdu} J = \left(\left(\frac{-t}{s}e^{-st}\right)\Big|_{۰}^{a} + \frac{۱}{s}\int_{۰}^{a} e^{-st}dt\right) + \left(\left(\frac{-(۲a-t)}{s}e^{-st}\right)\Big|_{a}^{۲a} e^{-st}dt\right) \Rightarrow$$

$$J = -\frac{a}{s}e^{-as} - \frac{۱}{s^۲}e^{-st}\Big|_{۰}^{a} + \frac{a}{s}e^{-as} + \frac{۱}{s^۲}e^{-st}\Big|_{a}^{۲a} \Rightarrow J = \frac{۱}{s^۲}(۱ - e^{-as} + e^{-۲as} - e^{-as}) \Rightarrow J = \frac{(۱-e^{-as})^۲}{s^۲}$$

با جایگذاری عبارت فوق در تساوی (۱) داریم:

$$L[f(t)] = \frac{۱}{۱-e^{-۲as}} \cdot \frac{(۱-e^{-as})^۲}{s^۲} = \frac{۱}{(۱-e^{-as})(۱+e^{-as})} \cdot \frac{(۱-e^{-as})^۲}{s^۲} \Rightarrow L[f(t)] = \frac{۱-e^{-as}}{s^۲(۱+e^{-as})}$$

مثال۱۱: تبدیل لاپلاس تابع $n = ۰,۱,۲,...$; $f(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ ۱ & ۲n \le t < ۲n+۱ \\ -۱ & ۲n+۱ \le t \le ۲n+۲ \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $L[f(t)] = \frac{۱}{s} \cdot \cot g \frac{s}{۲}$ ۲) $L[f(t)] = \frac{۱}{s} \cdot \frac{۱-e^{-s}}{۱+e^{-s}}$ ۳) $L[f(t)] = \frac{۱}{s} \cdot \frac{۱+e^{-s}}{۱-e^{-s}}$ ۴) $L[f(t)] = \frac{۱-e^{-\frac{s}{۲}}}{۱+e^{-\frac{s}{۲}}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T = ۲$ است، که با جایگذاری $n = ۰$، در یک دوره تناوب $[۰,۲]$ ضابطه تابع مفروض عبارت است از:

$$f(t) = \begin{cases} ۱; & ۰ \le t < ۱ \\ -۱; & ۱ \le t < ۲ \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس تابع متناوب فوق با دوره تناوب $T = ۲$ برابر است با:

$$L[f(t)] = \frac{۱}{۱-e^{-۲s}}\int_{۰}^{۲} e^{-st}f(t)dt; \qquad (۱)$$

در این صورت ابتدا به محاسبه انتگرال موجود می‌پردازیم:

$$J = \int_{۰}^{۲} e^{-st}f(t)dt = \int_{۰}^{۱} e^{-st}f(t)dt + \int_{۱}^{۲} e^{-st}f(t)dt$$

اکنون مقادیر مربوطه تابع $f(t)$ را در هر یک از انتگرال‌های فوق جایگذاری کنیم:

$$J = \int_{۰}^{۱} e^{-st} \times (۱)dt + \int_{۱}^{۲} e^{-st} \times (-۱)dt = \int_{۰}^{۱} e^{-st}dt - \int_{۱}^{۲} e^{-st}dt \Rightarrow$$

پس از محاسبه انتگرال‌های معین فوق داریم:

$$J = \frac{-۱}{s}e^{-st}\Big|_{۰}^{۱} + \frac{۱}{s}e^{-st}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۱}{s}(-e^{-s} + ۱ + e^{-۲s} - e^{-s}) = \frac{۱-۲e^{-s}+e^{-۲s}}{s} \Rightarrow J = \frac{(۱-e^{-s})^۲}{s}$$

با جایگذاری عبارت فوق در تساوی (۱) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر است با:

$$L[f(t)] = \frac{۱}{۱-e^{-۲s}} \cdot \frac{(۱-e^{-s})^۲}{s} = \frac{۱}{(۱-e^{-s})(۱+e^{-s})} \cdot \frac{(۱-e^{-s})^۲}{s} \Rightarrow L[f(t)] = \frac{۱}{s} \cdot \frac{۱-e^{-s}}{۱+e^{-s}}$$

مثال۱۲: اگر تبدیل لاپلاس توابع $\sin\alpha t$ و $\cos\alpha t$ (α پارامتر حقیقی ثابت) به ترتیب برابر $\frac{\alpha}{s^۲+\alpha^۲}$ و $\frac{s}{s^۲+\alpha^۲}$ باشند، تبدیل لاپلاس تابع $t\sin\alpha t+e^{\beta t}\cos t$ (α و β پارامترهای حقیقی ثابت) برابر است با:

۱) $\frac{-۲s\alpha}{(\alpha^۲+s^۲)^۲}+\frac{s-\beta}{(s-\beta)^۲+۱}$

۲) $\frac{۲s\alpha}{(\alpha^۲+s^۲)^۲}+\frac{s-\beta}{(s-\beta)^۲+۱}$

۳) $\int_۰^s\frac{\alpha d\sigma}{\alpha^۲+\sigma^۲}+\frac{s-\beta}{(s-\beta)^۲+۱}$

۴) $\frac{\alpha s}{s^۲\alpha^۲}+\frac{s-\beta}{(s-\beta)^۲+۱}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از قضیهٔ مشتق و تبدیل لاپلاس و قاعدهٔ اول انتقال در تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s)=L[t\sin\alpha t+e^{\beta t}\cos t]=L[t\sin\alpha t]+L[e^{\beta t}\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'\ \ \&\ \ L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s)=-(L[\sin\alpha t])'+L[\cos t]|_{s\mapsto s-\beta}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرمول‌های ارائه شده در مسأله مفروض}} F(s)=-(\frac{\alpha}{s^۲+\alpha^۲})'+(\frac{s}{s^۲+۱})|_{s\mapsto s-\beta}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{۲\alpha s}{(s^۲+\alpha^۲)^۲}+\frac{s-\beta}{(s-\beta)^۲+۱}$$

مثال۱۳: تبدیل لاپلاس $t\delta(t-۳)$ عبارت است از:

۱) $۳e^{-۳s}$

۲) $\frac{e^{-۳s}}{s}$

۳) $۳e^{۳s}$

۴) $\frac{e^{۳s}}{s}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از قاعدهٔ سوم انتقال در تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s)=L[t\delta(t-۳)]=L[\delta(t-۳)t]\xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)} F(s)=e^{-۳s}(t)|_{t=۳}\ \Rightarrow\ F(s)=۳e^{-۳s}$$

مثال۱۴: تبدیل لاپلاس تابع $e^t\delta(t)\sin t$ برابر است با:

۱) e

۲) ۱-

۳) ۱

۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از قاعدهٔ سوم انتقال داریم:

$$F(s)=L[e^t\delta(t)\sin t]=L[\delta(t)(e^t\sin t)]\xrightarrow{L[\delta(t)f(t)]=f(۰)} F(s)=(e^t\sin t)|_{t=۰}\ \Rightarrow\ F(s)=۰$$

مثال۱۵: مبدل لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{۲e^{-۲s}}{s^۲-۴}$ کدام‌یک از توابع زیر می‌باشد؟

۱) $u_۲(t)\sinh(t-۴)$

۲) $u_۲(t)\sinh(۲t-۲)$

۳) $u_۲(t)\sinh(t-۲)$

۴) $u_۲(t)\sin h(۲t-۴)$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از قاعدهٔ دوم انتقال در تبدیل لاپلاس داریم:

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۲e^{-۲s}}{s^۲-۴}\right]=۲L^{-۱}\left[e^{-۲s}\frac{۱}{s^۲-۴}\right]\xrightarrow{L^{-۱}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-۱}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t)=۲u_۲(t)L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲-۴}\right]\Bigg|_{t\mapsto t-۲}\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[\frac{۱}{s^۲-a^۲}]=\frac{۱}{a}\sin hat} f(t)=۲u_۲(t)(\frac{۱}{۲}\sin h۲t)\Big|_{t\mapsto t-۲}\ \Rightarrow\ f(t)=u_۲(t)\sinh ۲(t-۲)$$

مثال۱۶: تبدیل لاپلاس تابع $e^{-t}\cos ۲t$ کدام است؟

۱) $\frac{s}{s^{۲}+۱}$ ۲) $\frac{s-۱}{s^{۲}+۲s+۵}$ ۳) $\frac{s}{s^{۲}-۱}$ ۴) $\frac{s+۱}{s^{۲}+۲s+۵}$

پاسخ: گزینه «۴» در صورت استفاده از قاعده اول انتقال لاپلاس عبارت داده شده به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$F(s)=L[e^{-t}\cos ۲t]\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=L[\cos ۲t]\Big|_{s\mapsto s+۱}\Rightarrow F(s)=\left(\frac{s}{s^{۲}+۴}\right)\Big|_{s\mapsto s+۱}=\frac{s+۱}{(s+۱)^{۲}+۴}$$

مثال۱۷: تبدیل لاپلاس معکوس $\frac{s-۱}{s^{۲}-۲s+۵}$ کدام است؟

۱) $e^{t}\cos ۲t+e^{t}\sin ۲t$ ۲) $e^{t}\sin ۲t$ ۳) $e^{t}\cos ۲t$ ۴) $e^{-t}(\cos ۲t+\sin ۲t)$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا تابع مفروض را به صورت زیر ساده‌سازی می‌کنیم:

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{s-۱}{s^{۲}-۲s+۵}\right]=L^{-۱}\left[\frac{s-۱}{s^{۲}-۲s+۱+۴}\right]=L^{-۱}\left[\frac{(s-۱)}{(s-۱)^{۲}+۴}\right]$$

با استفاده از قاعدهٔ اول انتقال در تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]}f(t)=e^{t}L^{-۱}\left[\frac{s}{s^{۲}+۲^{۲}}\right]=e^{t}\cos ۲t$$

مثال۱۸: اگـــر $f(t)=\frac{g(t)}{t}$، $t>۰$ و اگـر تـوابـع f دارای تبـــدیـل لاپـلاس $F(s)$ باشنـد، آنـگاه فـرض می‌کـــنیم $F(s)=Ln\frac{(s^{۲}+۴\alpha^{۲})^{\frac{۱}{۴}}}{s^{\frac{۱}{۲}}}$ ، α عددی است حقیقی و ثابت، در این صورت:

۱) $f(t)=۱-\cos ۲\alpha t$ ۲) $g(t)=\frac{۱-\cos ۲\alpha t}{۲}$ ۳) $g(t)=۱+\cos ۲\alpha t$ ۴) $g(t)=\frac{۱+\cos ۲\alpha t}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» از یک طرف، با استفاده از خاصیت حاکم بر توابع لگاریتمی می‌توان نوشت:

$$F(s)=Ln\frac{(s^{۲}+۴\alpha^{۲})^{\frac{۱}{۴}}}{s^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{۴}Ln(s^{۲}+۴\alpha^{۲})-\frac{۱}{۲}Lns$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین عبارت حاصل نسبت به s داریم:

$$\xrightarrow{Lnu\to\frac{u'}{u}}F'(s)=\frac{۱}{۴}\cdot\frac{۲s}{s^{۲}+۴\alpha^{۲}}-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{s}\Rightarrow F'(s)=\frac{s}{۲(s^{۲}+۴\alpha^{۲})}-\frac{۱}{۲s};\qquad(۱)$$

در این صورت با توجه به تساوی $f(t)=\frac{g(t)}{t}$ و استفاده از قاعدهٔ مشتق و تبدیل لاپلاس داریم:

$$g(t)=tf(t)\Rightarrow L[g(t)]=L[tf(t)]\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}L[g(t)]=-F'(s)\Rightarrow g(t)=-L^{-۱}[F'(s)]$$

با جایگذاری تساوی (۱) در عبارت حاصل داریم:

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری تساوی (۱)}}g(t)=-L^{-۱}\left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{s}{s^{۲}+۴\alpha^{۲}}-\frac{۱}{s}\right)\right]=-\frac{۱}{۲}\left(L^{-۱}\left[\frac{s}{s^{۲}+(۲\alpha)^{۲}}\right]-L^{-۱}\left[\frac{۱}{s}\right]\right)$$

با محاسبه لاپلاس معکوس عبارات فوق به صورت جداگانه داریم:

$$\xrightarrow{\left(\frac{s}{s^{۲}+\alpha^{۲}}\xrightarrow{L^{-۱}}\cos\alpha t\right)\&\left(\frac{۱}{s}\xrightarrow{L^{-۱}}۱\right)}g(t)=-\frac{۱}{۲}(\cos ۲\alpha t-۱)=\frac{۱-\cos ۲\alpha t}{۲}$$

مثال۲۰: تبدیل لاپلاس $f(t) = t\sinh(2t)$ برابر است با:

۱) $\frac{4s}{(s^2-4)^2}$ ۲) $\frac{-4s}{(s^2-4)^2}$ ۳) $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$ ۴) $\frac{-4s}{(s^2+4)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از قاعدهٔ مشتق و تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} L[f(t)] = L[t\sinh 2t] = -\left(L[\sinh 2t]\right)' = -\left(\frac{2}{s^2-4}\right)' = \frac{4s}{(s^2-4)^2}$$

مثال۲۱: اگر $L[\cos at] = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \frac{s}{s^2+a^2}$ آنگاه $L[t\cos at]$ برابر است با:

۱) $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ ۲) $\frac{s^2+a^2}{(s^2+a^2)^2}$ ۳) $\frac{s-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ ۴) $\frac{-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از قاعدهٔ مشتق و تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s) = L[t\cos at] \xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s) = -(L[\cos at])' \xrightarrow{\cos at \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+a^2}} F(s) = -\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

مثال۲۲: تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{-t}t\cos 2t$ عبارت است از:

۱) $\frac{s^2+4}{(s^2-4)^2}$ ۲) $\frac{(s+1)^2-4}{((s+1)^2+4)^2}$ ۳) $\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$ ۴) $\frac{(s+1)^2+4}{((s+1)^2-4)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا از قاعدهٔ اول انتقال در تبدیل لاپلاس به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$F(s) = L[e^{-t}(t\cos 2t)] \xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s) = L[t\cos 2t]|_{s\mapsto s+1}$$

حال با استفاده از قاعدهٔ مشتق و تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s) = -(L[\cos 2t])'|_{s\mapsto s+1} = -\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'|_{s\mapsto s+1} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}|_{s\mapsto s+1} \Rightarrow F(s) = \frac{(s+1)^2-4}{((s+1)^2+4)^2}$$

مثال۲۳: تبدیل لاپلاس $\int_0^t \sinh 2x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{s^2-4}$ ۲) $\frac{2}{s(s^2+4)}$ ۳) $\frac{2}{s^2+4}$ ۴) $\frac{2}{s(s^2-4)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از قاعدهٔ «تبدیل لاپلاس و انتگرال» داریم:

$$I = \int_0^t \sinh 2x\,dx \xrightarrow{L[\int_0^t f dx]=\frac{1}{s}L[f]} I = \frac{1}{s}L[\sinh 2t] = \frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2-4}$$

مثال۲۴: معکوس تبدیل لاپلاس $\frac{1}{s(s^2+1)}$ برابر است با :

۱) $1+\sin t$ ۲) $1-\cos t$ ۳) $-1-\sin t$ ۴) $-1+\cos t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از قاعدهٔ «انتگرال و تبدیل لاپلاس» لاپلاس معکوس عبارت داده شده را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{s}F]=\int_0^t L^{-1}[F]dt} f(t) = \int_0^t L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]dt = \int_0^t \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^t \Rightarrow f(t) = 1-\cos t$$

مثال۲۵: تبدیل لاپلاس تابع $\int_{0}^{t} f(x)\delta(x-a)\,dx$ عبارت است از:

۱) $\frac{2}{s}e^{-as}f(a)$ ۲) $\frac{1}{s}e^{as}f(a)$ ۳) $\frac{1}{s}e^{-as}f(a)$ ۴) $\frac{2}{s}e^{as}f(a)$

پاسخ: گزینه «۳» طبق قاعدۀ تبدیل لاپلاس و انتگرال داریم:

$$F(s)=L[\int_{0}^{t} f(x)\delta(x-a)dx] \xrightarrow{L[\int_0^t f\,dx]=\frac{1}{s}L[f]} F(s)=\frac{1}{s}L[f(t)\delta(t-a)]=\frac{1}{s}L[\delta(t-a)f(t)]$$

اکنون با توجه به قضیه سوم انتقال در تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f(t)]=e^{-as}f(a)} F(s)=\frac{1}{s}\cdot e^{-as}f(a)$$

مثال۲۶: تبدیل لاپلاس $f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$ با شرط $a,b>0$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Ln}\frac{s-b}{s-a}$ ۲) $\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b}$ ۳) $\operatorname{Ln}\frac{s+b}{s+a}$ ۴) $\operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از قاعدۀ «انتگرال و تبدیل لاپلاس» داریم:

$$F(s)=L[f(t)]=L[\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}] \xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds} F(s)=\int_{s}^{\infty} L[e^{at}-e^{bt}]ds$$

اکنون با محاسبۀ لاپلاس توابع زیر انتگرال داریم:

$$F(s)=\int_{s}^{\infty}(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b})ds=\lim_{T\to\infty}\int_{s}^{T}(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b})ds=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}(s-a)-\operatorname{Ln}(s-b))\Big|_{s}^{T}\Rightarrow$$

با استفاده از خواص توابع لگاریتمی و جایگذاری کران‌های انتگرال داریم:

$$F(s)=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b})\Big|_{s}^{T}=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}\frac{T-a}{T-b}-\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b})=-\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b}\quad\Rightarrow\quad F(s)=\operatorname{Ln}\frac{s-b}{s-a}$$

مثال۲۷: اگر $f(t)=\begin{cases}\frac{\sin(\alpha t)}{t} & t\neq 0\\ \alpha & t=0\end{cases}$ ، آنگاه تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر است با:

۱) $\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}-\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}+\frac{\pi}{2}$ ۳) $\sin^{-1}\frac{s}{\alpha}$ ۴) $\cot^{-1}\frac{s}{\alpha}$

پاسخ: گزینه «۲» از آنجایی که $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\alpha t}{t}=\alpha$ است، لذا با توجه به قاعده انتگرال و تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds} L[f(t)]=L\left[\frac{\sin\alpha t}{t}\right]=\int_{s}^{\infty}L[\sin\alpha t]ds=\int_{s}^{\infty}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}ds=\lim_{T\to\infty}\int_{s}^{T}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}ds\Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\lim_{T\to\infty}(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\frac{s}{\alpha})\Big|_{s}^{T}=\lim_{T\to\infty}(\tan^{-1}\frac{T}{\alpha}-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha})\ \Rightarrow\ L[f(t)]=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}$$

مثال۲۸: با فرض $a>0$ ، مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) 0 ۳) π ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» طبق قاعدهٔ «انتگرال و تبدیل لاپلاس» داریم:

$$I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx \xrightarrow{\int_{\circ}^{\infty}\frac{f}{t}dt=\int_{\circ}^{\infty}L[f]ds} I=\int_{\circ}^{\infty}L[\sin ax]ds=\int_{\circ}^{\infty}\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}ds \Rightarrow$$

با محاسبهٔ انتگرال و اعمال کران‌های انتگرال داریم:

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_{\circ}^{T}\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}ds=\lim_{T\to\infty}\operatorname{tag}^{-۱}\frac{s}{a}\Big|_{\circ}^{T} \Rightarrow I=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{tag}^{-۱}\frac{T}{a}-\operatorname{tag}^{-۱}(\circ)) \Rightarrow I=\frac{\pi}{۲}$$

مثال۲۹: مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-۳x}}{x}dx$ برابر است با:

۱) $Ln\frac{۱}{۳}$ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) $Ln۳$

پاسخ: گزینه «۴» با اعمال قاعدهٔ « انتگرال و تبدیل لاپلاس» می‌توان نوشت:

$$I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-۳x}}{x}dx \xrightarrow{\int_{\circ}^{\infty}\frac{f}{t}dt=\int_{\circ}^{\infty}L[f]ds} I=\int_{\circ}^{\infty}L[e^{-x}-e^{-۳x}]ds=\int_{\circ}^{\infty}(\frac{۱}{s+۱}-\frac{۱}{s+۳})ds$$

با محاسبهٔ انتگرال حاصل و استفاده از خواص توابع لگاریتمی داریم:

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_{\circ}^{T}(\frac{۱}{s+۱}-\frac{۱}{s+۳})ds=\lim_{T\to\infty}\left(Ln(s+۱)-Ln(s+۳)\right)\Big|_{\circ}^{T} \Rightarrow I=\lim_{T\to\infty}Ln(\frac{s+۱}{s+۳})\Big|_{\circ}^{T} \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}(Ln\frac{T+۱}{T+۳}-Ln\frac{۱}{۳})=-Ln\frac{۱}{۳} \Rightarrow I=Ln۳$$

مثال۳۰: با فرض $L[\frac{۱-e^{t}}{t}]=Ln(۱-\frac{۱}{s})$ ، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{۱-e^{۳t}}{t}$ کدام است؟

۱) $Ln(۱-\frac{۳}{s})$ ۲) $\frac{۱}{۳}Ln(۱-\frac{۳}{s})$ ۳) $Ln(۱-\frac{۱}{۳s})$ ۴) $۳Ln(۱-\frac{۱}{۳s})$

پاسخ: گزینه «۱» عبارت مفروض را به صورت روبرو می‌نویسیم: $f(t)=\frac{۱-e^{۳t}}{t}=۳(\frac{۱-e^{۳t}}{۳t})$

از یک طرف، با فرض $\bar{f}(t)=\frac{۱-e^{t}}{t}$ داریم:

$$f(t)=۳\bar{f}(۳t) \Rightarrow L[f(t)]=۳L[\bar{f}(۳t)]; \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه تبدیل لاپلاس و تغییر مقیاس داریم:

$$\xrightarrow{L[f(kt)]=\frac{۱}{k}L[f(t)]|_{s\mapsto\frac{s}{k}}} L[\bar{f}(۳t)]=\frac{۱}{۳}L[\bar{f}(t)]|_{s\mapsto\frac{s}{۳}}=\frac{۱}{۳}L[\bar{f}(t)]|_{s\mapsto\frac{s}{۳}}; \qquad (۲)$$

با جایگذاری تساوی (۲) در تساوی (۱)داریم:

$$L[f(t)]=۳L[\bar{f}(۳t)]=۳\times\frac{۱}{۳}L[\bar{f}(t)]=L[\bar{f}(t)] \xrightarrow{L[\bar{f}(t)]=Ln(۱-\frac{۱}{s})} L[f(t)]=Ln(۱-\frac{۱}{s})|_{s\mapsto\frac{s}{۳}}=Ln(۱-\frac{۳}{s})$$

مثال۳۱: اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع $tf(at)$ با فرض $a \neq 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{a^2}F'(\frac{s}{a})$ ۲) $\frac{1}{a}F'(\frac{s}{a})$ ۳) $-\frac{1}{a}F'(\frac{s}{a})$ ۴) $-\frac{1}{a^2}F'(\frac{s}{a})$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به قاعده «مشتق و تبدیل لاپلاس» داریم:

$$\bar{F}(s) = L[tf(at)] \xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} \bar{F}(s) = -(L[f(at)])'$$

اکنون با استفاده از قضیه تبدیل لاپلاس و تغییر مقیاس حاصل مطلوب به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{L[f(kt)]=\frac{1}{k}F(s)|_{s\mapsto \frac{s}{k}}} \bar{F}(s) = -(\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}))' = -\frac{1}{a}(F(\frac{s}{a}))' \xrightarrow{\text{قاعده زنجیره‌ای}} \bar{F}(s) = -\frac{1}{a^2}F'(\frac{s}{a})$$

مثال۳۲: هرگاه $y'(0) = 0$ و $y(0) = 0$ و $y'' - y' + y = t$ آنگاه $L[y]$ برابر است با:

۱) $\frac{s-1}{s^2(s^2-s+1)}$ ۲) $\frac{s+1}{s^2(s^2-s+1)}$ ۳) $\frac{1}{s^2(s-1)}$ ۴) $\frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$

پاسخ: گزینه «۴» از طرفین معادله داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$y'' - y' + y = t \Rightarrow L[y''] - L[y'] + L[y] = L[t]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2L[y] - sy(0) - y'(0)) - (sL[y] - y(0)) + L[y] = \frac{1}{s^2}$$

با جایگذاری شرایط اولیه داده شده عبارت لاپلاس تابع y برابر است با:

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0} s^2L[y] - sL[y] + L[y] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow (s^2 - s + 1)L[y] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L[y] = \frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$$

مثال۳۳: جواب معادله دیفرانسیل همگن $f''(t) + 8f'(t) + 16f(t) = 0$ با شرایط اولیه $f(0) = 2$ و $f'(0) = 1$ برابر است با:

۱) $f(t) = (2+5t)e^{-4t}$ ۲) $f(t) = \frac{1}{8}(7e^{-4t} + 9e^{4t})$ ۳) $f(t) = \frac{1}{4}(3e^{-2t} + 5e^{2t})$ ۴) $f(t) = (2+9t)e^{-4t}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$f''(t) + 8f'(t) + 16f(t) = 0 \Rightarrow L[f''(t)] + 8L[f'(t)] + 16L[f(t)] = 0$$

لاپلاس مشتق را در تساوی حاصل جایگزین می‌کنیم:

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2L[f] - sf(0) - f'(0)) + 8(sL[f] - f(0)) + 16L[f] = 0$$

با اعمال شرایط اولیه داده شده داریم:

$$\xrightarrow{f(0)=2\ \&\ f'(0)=1} (s^2L[f] - 2s - 1) + 8(sL[f] - 2) + 16L[f] = 0 \Rightarrow (s^2 + 8s + 16)L[f] = 2s + 17 \Rightarrow$$

$$L[f] = \frac{2s+17}{(s+4)^2} \Rightarrow f(t) = L^{-1}\left[\frac{2s+17}{(s+4)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2}\right]$$

اکنون معکوس لاپلاس عبارت فوق با استفاده از تعریف برابر است با:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t) = e^{-4t}L^{-1}\left[\frac{2s+9}{s^2}\right] = e^{-4t}L^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{9}{s^2}\right] \Rightarrow f(t) = e^{-4t}(2+9t)$$

مثال۳۴: جواب مسأله با مقدار اولیه $\begin{cases} y''+y=f(x) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ **عبارت است از:**

۱) $y=\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt$　۲) $y=\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$　۳) $y=\int_0^x (x-t)f(t)dt$　۴) $y=\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با لاپلاس‌گیری از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده داریم:
$$y''+y=f(x) \Rightarrow L[y'']+L[y]=L[f(x)]$$

فرمول لاپلاس مشتق را در عبارت حاصل قرار می‌دهیم:
$$\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)} (s^2L[y]-sy(0)-y'(0))+L[y]=L[f(x)]$$

پس از جایگذاری شرایط اولیه داده شده داریم:
$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0} s^2L[y]+L[y]=L[f(x)] \Rightarrow (s^2+1)L[y]=L[f(x)] \Rightarrow L[y]=\frac{1}{s^2+1}:L[f(x)]$$

برای یافتن تابع y کافیست از تساوی حاصل معکوس لاپلاس بگیریم:
$$y=L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}\cdot L[f(x)]] \xrightarrow[\text{قضیه پیچش لاپلاس}]{L^{-1}[F\cdot G]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} y=L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]*L^{-1}[L[f(x)]] \Rightarrow y=\sin x*f(x)$$

اکنون با استفاده از تعریف پیچش دو تابع داریم:
$$\xrightarrow{f*g=\int_0^x f(x-t)g(t)dt} y=\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$$

مثال۳۵: تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر کدام است؟

$$xy''+(1+x)y'+y=0\ ;\qquad y(0)=1\ ,\ y'(0)=-1$$

۱) $\frac{s-1}{s(s+1)}$　۲) $\frac{1}{s+1}$　۳) $\frac{s+1}{s^2}$　۴) $\frac{s-1}{s^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا از عبارت x در معادله دیفرانسیل فوق فاکتور می‌گیریم و سپس از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:
$$xy''+(1+x)y'+y=0 \Rightarrow x(y''+y')+y'+y=0 \Rightarrow L[x(y''+y')]+L[y']+L[y]=0$$

با توجه به تعریف $L[tf]=-(L[f])'$ عبارت فوق برابر است با:
$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} -(L[y''+y'])'+L[y']+L[y]=0$$

با جایگذاری لاپلاس مشتق در عبارت حاصل داریم:
$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} -(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0))'+(sY(s)-y(0))+Y(s)=0$$

اکنون شرایط اولیه داده شده را در عبارت فوق جایگذاری می‌کنیم:
$$\xrightarrow{y(0)=1\ \&\ y'(0)=-1} -(s^2Y(s)-s+1+sY(s)-1)'+sY(s)-1+Y(s)=0$$

با مشتق‌گیری از عبارت اول داریم:
$$-(2s\times Y+s^2\times Y'-1+Y+s\times Y')+sY-1+Y=0 \Rightarrow$$
$$-(s^2+s)Y'-sY=0 \Rightarrow (s^2+s)\frac{dY}{ds}=-sY \Rightarrow \frac{dY}{Y}=\frac{-s}{s^2+s}ds=\frac{-1}{s+1}ds$$

معادله مرتبه اول حاصل از نوع جداشونده است، که با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی حاصل داریم:
$$\mathrm{Ln}Y=-\mathrm{Ln}\,c(s+1) \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{c(s+1)}$$

با فرض $c=1$ تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

مثال۳۶: هرگاه $f(t)=L^{-1}\left(\dfrac{2s+1}{(s-2)(s-1)}\right)$ باشد آنگاه $f(0)$ برابر است با :

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه $f(0)$ کافیست از قضیه مقدار آغازی استفاده کنیم، لذا:

$$f(0)=\lim_{s\to+\infty} sF(s)=\lim_{s\to+\infty}\frac{s(2s+1)}{(s-2)(s-1)}=2$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۷: تبدیل لاپلاس جواب مسأله $y(0)=1\ ,\ y'(0)=-1$; $xy''+(1-x)y'+y=0$ کدام است؟

۱) $\frac{s-1}{s^2}$ ۲) $\frac{s(s-1)}{s^2+1}$ ۳) $\frac{1}{s(s-1)}$ ۴) $\frac{s}{s^2+1}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از قضیه مقدار آغازی داریم:

$$y(0)=\lim_{s\to+\infty} sL[y]\xrightarrow{y(0)=1}\lim_{s\to+\infty} sL[y]=1$$

در نتیجه، گزینه‌های ۲ و ۳ نمی‌توانند صحیح باشند، زیرا حد حاصل فوق به ازای این گزینه‌ها به ترتیب برابر با بی‌نهایت و صفر می‌باشد.

اکنون با استفاده از قضیه مقدار آغازی مشتق داریم:

$$y'(0)=\lim_{s\to+\infty}(s^2L[y]-s\,y(0))\xrightarrow{y(0)=1\ \&\ y'(0)=-1}\lim_{s\to+\infty}(s^2L[y]-s)=-1;\qquad (1)$$

در این صورت، اگر لاپلاس جواب برابر گزینه (۴) باشد، داریم:

$$L[y]=\frac{s}{s^2+1}\ \Rightarrow\ \lim_{s\to+\infty}(s^2L[y]-s)=\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s^3}{s^2+1}-s\right)=\lim_{s\to+\infty}\frac{-s}{s^2+1}=0$$

در نتیجه با توجه به تساوی (۱) گزینه (۴) نیز نمی‌تواند صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۸: تبدیل لاپلاس جواب معادله $y(0)=1\ ,\ y'(0)=-1$; $xy''+(1+x)y'+y=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{s+1}+1$ ۲) $\frac{1}{s+1}$ ۳) $\frac{1}{s+1}-1$ ۴) $\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به قضیه مقدار آغازی داریم:

$$y(0)=\lim_{s\to+\infty} sF(s)\xrightarrow{y(0)=1}\lim_{s\to+\infty} sF(s)=1$$

که با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳۹: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\int_0^t (t-\lambda)^3\sin\lambda\, d\lambda$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{s^4(s^2+1)}$ ۲) $\frac{3!}{s^4(s^2+1)}$ ۳) $\frac{3}{s^4(s^2-1)}$ ۴) $\frac{3!}{s^4(s^2-1)}$

پاسخ: گزینه «۲» با لاپلاس‌گیری از طرفین عبارت مفروض داریم:

$$f(t)=\int_0^t (t-\lambda)^3\sin\lambda\, d\lambda\ \Rightarrow\ F(s)=L[f(t)]=L\left[\int_0^t (t-\lambda)^3\sin\lambda\, d\lambda\right]$$

با استفاده از تعریف پیچش داریم:

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} F(s)=L[t^3*\sin t]\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=L[t^3].L[\sin t]=\frac{3!}{s^4}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

مثال۴۰: جواب معادله انتگرالی $\phi(x) = t^{2} + \int_{0}^{t} e^{-x}\phi(t-x)\,dx$ کدام گزینه است؟

۱) $t^{2} + \frac{t^{3}}{6}$ ۲) $\frac{t^{2}}{2} + \frac{t^{3}}{6}$ ۳) $t^{2} + \frac{t^{3}}{3}$ ۴) $\frac{t^{2}}{2} + \frac{t^{3}}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» معادله انتگرالی داده شده را با استفاده از تعریف پیچش دو تابع به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\phi(t) = t^{2} + \int_{0}^{t} e^{-x}\phi(t-x)\,dx \xrightarrow{\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)dx = f*g} \phi(t) = t^{2} + e^{-t} * \phi(t)$$

از طرفین عبارت حاصل، لاپلاس می‌گیریم:

$$L[\phi(t)] = L[t^{2}] + L[e^{-t} * \phi(t)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[\phi(t)] = L[t^{2}] + L[e^{-t}]L[\phi(t)]$$

$$L[\phi(t)] = \frac{2}{s^{3}} + \frac{1}{s+1}L[\phi(t)] \Rightarrow (1 - \frac{1}{s+1})L[\phi(t)] = \frac{2}{s^{3}} \Rightarrow \frac{s}{s+1}L[\phi(t)] = \frac{2}{s^{3}} \Rightarrow L[\phi(t)] = 2\frac{s+1}{s^{4}} = 2(\frac{1}{s^{3}} + \frac{1}{s^{4}})$$

$$\phi(t) = 2L^{-1}[\frac{1}{s^{3}} + \frac{1}{s^{4}}] = 2(\frac{t^{2}}{2} + \frac{t^{3}}{6}) \Rightarrow \phi(t) = t^{2} + \frac{t^{3}}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۱: پاسخ معادله انتگرال $\sin x = \lambda \int_{0}^{x} e^{x-t} f(t)\,dt$ برای $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\lambda}(\cos x + \sin x)$ ۲) $\frac{1}{\lambda}(\cos x - \sin x)$ ۳) $\lambda(\sin x + \cos x)$ ۴) $\lambda(\cos x - \sin x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از تعریف پیچش، معادله انتگرال داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin x = \lambda \int_{0}^{x} e^{x-t} f(t)\,dt \xrightarrow{\int_{0}^{t} f(t-x)g(x)\,dx = (f*g)(t)} \sin x = \lambda(e^{x} * f(x))$$

حال از طرفین معادله به دست آمده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[\sin x] = \lambda L[e^{x} * f(x)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[\sin x] = \lambda L[e^{x}]L[f(x)] \Rightarrow \frac{1}{s^{2}+1} = \lambda \cdot \frac{1}{s-1} \cdot L[f(x)] \Rightarrow$$

$$L[f(x)] = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{s-1}{s^{2}+1} = \frac{1}{\lambda}(\frac{s}{s^{2}+1} - \frac{1}{s^{2}+1})$$

با گرفتن معکوس لاپلاس از طرفین تساوی حاصل داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}L^{-1}[\frac{s}{s^{2}+1} - \frac{1}{s^{2}+1}] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda}(\cos x - \sin x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۲: جواب معادله انتگرالی $y' + 2y + \int_{0}^{t} y(\tau)\,d\tau = 0$ و $y(0) = 1$ برابر است با:

۱) $y(t) = e^{-t}(1+t)$ ۲) $y(t) = e^{-t}(1-t)$ ۳) $y(t) = e^{t}(1+t)$ ۴) $y(t) = e^{t}(1-t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا از طرفین معادله انتگرالی داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$y' + 2y + \int_{0}^{t} y(\tau)\,d\tau = 0 \Rightarrow L[y'] + 2L[y] + L[\int_{0}^{t} y(\tau)\,d\tau] = 0$$

با استفاده از فرمول لاپلاس مشتق و لاپلاس انتگرال داریم:

$$\xrightarrow{L[f'] = sL[f] - f(0) \ \& \ L[\int_{0}^{t} f\,dt] = \frac{1}{s}L[f]} (sL[y] - y(0)) + 2L[y] + \frac{1}{s}L[y] = 0$$

با جایگذاری مقدار اولیه داده شده، تبدیل لاپلاس پاسخ معادله انتگرالی مفروض به صورت زیر می‌باشد:

$$\xrightarrow{y(0)=1} sL[y] - 1 + 2L[y] + \frac{1}{s}[y] = 0 \Rightarrow (s + 2 + \frac{1}{s})L[y] = 1 \Rightarrow L[y] = \frac{s}{(s+1)^{2}}$$

حال از عبارت به دست آمده معکوس تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$y = L^{-1}[\frac{s}{(s+1)^2}] = L^{-1}[\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2}]$$

برای تعیین جواب معادله مفروض کافیست از قاعده اول انتقال استفاده کنیم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} y = e^{-t}L^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}] \Rightarrow y = e^{-t}(1-t)$$

مثال۴۳: جواب معادله انتگرالی $t \geq 0$; $y(t) = 1 - 2\int_0^t (t-u)y(u)du$ عبارت است از:

۱) $\cos\sqrt{2}t$ ۲) $\sin\sqrt{2}t$ ۳) $t\cos 2t$ ۴) $t\sin 2t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا از طرفین معادله انتگرالی داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$y(t) = 1 - 2\int_0^t (t-u)y(u)du \Rightarrow Y(s) = L[y(t)] = L[1 - 2\int_0^t (t-u)y(u)du]$$

حال با استفاده از تعریف پیچش دو تابع داریم:

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx = f*g} Y(s) = L[1] - 2L[t*y(t)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} Y(s) = \frac{1}{s} - 2L[t]L[y(t)] \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}Y(s) \Rightarrow (1 + \frac{2}{s^2})Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2+2}$$

با گرفتن لاپلاس معکوس از عبارت حاصل، جواب معادله انتگرالی مفروض برابر است با:

$$y(t) = L^{-1}[\frac{s}{s^2 + (\sqrt{2})^2}] \Rightarrow y(t) = \cos\sqrt{2}t$$

مثال۴۴: جواب $f(t)$ در معادله انتگرالی $f(t) = te^{-t} + \int_0^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}d\alpha$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}(1-2e^{2t})$; $t \geq 0$ ۲) $\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$; $t \geq 0$ ۳) $\frac{1}{2}(1+2e^{2t})$; $t \geq 0$ ۴) $\frac{1}{2}(1+2e^{-2t})$; $t \geq 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با لاپلاس‌گیری از طرفین معادله انتگرالی داده شده داریم:

$$f(t) = te^{-t} + \int_0^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}d\alpha \Rightarrow F(s) = L[f(t)] = L[te^{-t} + \int_0^t f(t-\alpha)(\alpha e^{-\alpha})d\alpha]$$

تساوی حاصل را به صورت پیچش دو تابع بازنویسی می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx = f*g} F(s) = L[te^{-t}] + L[f(t)*te^{-t}] \Rightarrow \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s) = L[te^{-t}] + L[f(t)]L[te^{-t}]$$

اکنون با استفاده از قضیه انتقال در تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s) = (L[t]|_{s\mapsto s+1}) + F(s)L[t]|_{s\mapsto s+1} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + F(s)\frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

$$(1 - \frac{1}{(s+1)^2})F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow \frac{(s+1)^2 - 1}{(s+1)^2}F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2 - 1}$$

برای یافتن جواب مطلوب از عبارت فوق معکوس لاپلاس می‌گیریم. برای این منظور از تفکیک کسرها استفاده می‌کنیم:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 - 1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right] = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right) \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}e^{-2t} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

فصل نهم

« آشنایی با مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی»

مثال۱: چنانچه $y=(x^2-1)^n$ باشد، داریم:

۱) $(x^2-1)y'=2n^2xy$ ۲) $(x^2-1)^n y'=2nxy$ ۳) $(x^2-1)y'=2nxy$ ۴) $(x^2-1)y'=2nx^2y$

پاسخ: گزینه «۳» از آنجایی که در تمامی گزینه‌ها مشتقِ اولِ y موجود است، از طرفین عبارت داده شده در صورت سؤال مشتق مرتبه اول می‌گیریم و با عملیات جبری جواب از بین گزینه‌ها استخراج می‌شود.

$$y=(x^2-1)^n \Rightarrow y'=n(2x)(x^2-1)^{n-1} \Rightarrow y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{(x^2-1)\times(\text{طرفین})} (x^2-1)y'=2nx(x^2-1)^n \xrightarrow{(x^2-1)^n=y} (x^2-1)y'=2nxy$$

مثال۲: به ازای چه مقدار m یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''-y=0$ برابر $y=x^m$، است؟

۱) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» برای یافتن مقدار m باید از عبارت y دوبار مشتق بگیریم و در معادله دیفرانسیل داده شده قرار دهیم:

$$(y=x^m \Rightarrow y'=mx^{m-1} \quad \& \quad y''=m(m-1)x^{m-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} x^2y''-y=x^2\times m(m-1)x^{m-2}-x^m=0 \Rightarrow m(m-1)x^m-x^m=0 \Rightarrow (m^2-m-1)x^m=0$$

حالا با حل معادله درجه دوم برحسب m مقادیر مختلف m قابل محاسبه است:

$$(m^2-m-1)x^m=0 \Rightarrow m^2-m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

مثال۳: معادله دیفرانسیل سهمی‌های به معادله $y=cx^2+d$، کدام است؟

۱) $x^2y''-2xy'+y=0$ ۲) $y''+(x^2-2x)y'-y=0$ ۳) $xy''-y'=0$ ۴) $2xy''-x^2y'+y=0$

پاسخ: گزینه «۳» چون دسته منحنی داده شده دارای دو ثابت است، ابتدا دوبار از آن مشتق می‌گیریم:

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت‌ها به کمک مشتق‌گیری}} (y=cx^2+d \Rightarrow y'=2cx \quad (1) \quad \& \quad y''=2c) \quad (2)$$

با محاسبه c از معادله (۲) برحسب y و جایگذاری در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$y'=2\times\frac{y''}{2}x \Rightarrow xy''-y'=0$$

مثال۴: معادله دیفرانسیلی که جواب آن $y=c\sin x+x$ باشد، کدام است؟

۱) $y=x-(y'-1)\text{tag}x$ ۲) $y=(y'-1)\text{tag}x+x$ ۳) $y=(y'+1)\text{tag}x+x$ ۴) $y'=(y-1)\text{tag}x+x$

پاسخ: گزینه «۲» برای یافتن معادله دیفرانسیل کافیست معادله مفروض را نسبت به c حل کرده و از طرفین آن مشتق‌گیری کنیم:

$$y=c\sin x+x \Rightarrow c=\frac{y-x}{\sin x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}(\text{طرفین})} 0=\frac{(y'-1)\sin x-\cos x(y-x)}{\sin^2 x} \Rightarrow$$

$$(y'-1)\sin x=(y-x)\cos x \Rightarrow y-x=(y'-1)\text{tag}x \Rightarrow y=x+(y'-1)\text{tag}x$$

مثال۵: معادله دیفرانسیل سهمی‌ها به معادله $x = c_1y^2 + c_2$ عبارت است از:

۱) $y'^2 + yy'' = 0$ ۲) $yy'' - y'^2 = 0$ ۳) $y'^2 - yy'' = 0$ ۴) $y'^2 - y^2y'' = 0$

پاسخ: گزینه «۱» کافیست ثابت‌ها به کمک مشتق‌گیری حذف شوند:

$$x = c_1y^2 + c_2 \xrightarrow[\text{dx}]{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} 1 = 2c_1yy' \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2yy'} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} 0 = \frac{-2(y'^2 + yy'')}{(2yy')^2} \Rightarrow y'^2 + yy'' = 0$$

مثال۶: مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ که در آن b یک پارامتر ثابت حقیقی است، عبارت است از:

۱) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 = x + c$ ۲) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 = x + c$ ۳) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \text{Ln}x + \text{Ln}c$ ۴) $x^2 + y^2 = \text{Ln}(cx)^2$

پاسخ: گزینه «۴»

ابتدا b^2 را از معادله داده شده جداسازی می‌کنیم تا با مشتق‌گیری از طرفین معادله به راحتی معادله دیفرانسیل حاکم بر این معادله جبری مفروض به دست آید:

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - x^2 \Rightarrow b^2 = \frac{y^2}{1 - x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت به کمک مشتق‌گیری : گام اول}} 0 = \frac{2yy'(1 - x^2) + 2xy^2}{(1 - x^2)^2} \Rightarrow y'(1 - x^2) + xy = 0 \Rightarrow y' = -\frac{xy}{1 - x^2}$$

حال برای یافتن مسیر قائم، به جای y' از عبارت $\frac{-1}{y'}$ را جایگزین کرده و معادله دیفرانسیل حاصله را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{y' \mapsto -\frac{1}{y'} \text{ : گام دوم}} -\frac{1}{y'} = -\frac{xy}{1 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{1 - x^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{xy} \Rightarrow ydy = \frac{1 - x^2}{x}dx$$

$$\xrightarrow{\int\text{(طرفین)} \text{ : گام سوم}} \int ydy = \int \frac{1}{x}dx - \int xdx \Rightarrow y^2 = 2\text{Ln}x - x^2 + k \xrightarrow{k = 2\text{Ln}c} y^2 = \text{Ln}(cx)^2 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = \text{Ln}(cx)^2$$

مثال۷: ابع بسل $J_n(x)$ توسط رابطه $e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$ تعریف می‌شود. کدام گزینه در مورد این تابع صحیح است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$ ۲) $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J'_n(x)$

۳) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$ ۴) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{n}{x}J'_n(x)$

پاسخ: گزینه «۱» تابع مولد به صورت $e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n$ تعریف شده است. از طرفین رابطه نسبت به x مشتق جزئی می‌گیریم.

$$\frac{\partial}{\partial x}[e^{-\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})}] = \frac{\partial}{\partial x}[\sum_n J_n(x)t^n]$$

$$\text{طرف چپ} = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})e^{-\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})\sum_n J_n(x)t^n = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_n J_n t^{n+1}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_n J_n t^{n-1}}$$

$$\text{طرف راست} = \sum_n J'_n(x)t^n$$

دو طرف را مساوی هم قرار می‌دهیم. برای اینکه بتوان t^nها را حذف کرد و به عبارت دیگر اثر وجود سری را نادیده گرفت باید n در سری اول سمت چپ $\sum_n J_n t^{n+1}$ را به $(n-1)$ تبدیل کنیم یعنی $\sum_n J_{n-1}t^n$ و n در سری دوم سمت چپ را به $(n+1)$ تبدیل کنیم یعنی $\sum_n J_n t^{n-1}$ به $\sum_n J_{n+1}t^n$ تبدیل می‌شود. با برابر قرار دادن دو طرف تساوی داریم:

$$\frac{1}{2}\sum_n J_{n-1}(x)t^n - \frac{1}{2}\sum_n J_{n+1}(x)t^n = \sum_n J'_n(x)t^n$$

با حذف سری و برابر قرار دادن ضریب t^n در دو طرف خواهیم داشت:

$$J_{n-1} - J_{n+1} = 2J'_n$$

مثال۸: به ازای کدام تابع $y(x)$، مقدار تابعی $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1+y^2}{y'^2}dx$ اکسترمال (فرین) است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\cosh(x)$ ۴) $\sinh(x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از حساب وردش می‌دانیم که باید f در معادله مقابل صدق می‌کند:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

که در آن f تابع زیر انتگرال است. یعنی داریم:

$$f = \frac{1+y^2}{(y')^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{d}\frac{\partial f}{\partial y'} \Rightarrow \frac{y}{(y')^2} = -\frac{2y}{(y')^2} + \frac{3y''(1+y^2)}{(y')^4}$$

حال باید این معادله دیفرانسیل را حل کنیم. در ادامه داریم:

$$\frac{y}{1+y^2} = \frac{y''}{(y')^2}$$

حل این انتگرال سر راست نیست اما ما چهار گزینه برای y داریم، و تنها گزینه که این شرط را احراز می‌کند تابع $y = \sinh(x)$ است چون:

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x) \quad ; \quad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \quad ; \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

مثال۹: اگر یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' - y = 0$ ، $y_1(x) = x$ باشد جواب دوم این معادله کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) x^2 ۲) $-x^2$ ۳) $-2x$ ۴) $-\frac{1}{2x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم در معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$ ، اگر جواب اول $y_1(x)$ باشد جواب دوم از این رابطه به دست می‌آید:

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{y_1}^{x} \frac{1}{2}\left\{\exp\left[-\int^x p(t)dt\right]\right\}$$

در این صورت داریم:

$$y_2 = x\int_{\frac{1}{x^2}}^{x} \left\{\exp\left[-\int^x \frac{1}{t}dt\right]\right\} = x\int \frac{1}{x^2}e^{-\ln x}dx = x\int \frac{dx}{x^3}$$

$$= x\frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2x}$$

مثال۱۰: معادله دیفرانسیل «بسل» (Bessel's equation) از مرتبهٔ m به صورت زیر است: (سراسری ۹۰)

$$\left[x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + (x^2 - m^2)\right]J_m(x) =$$

رانسکین (Wronskian) دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

رانسکین دو حل $J_m(x)$ و $J_{-m}(x)$ معادلهٔ «بسل» بالا بصورت چه نوع تابعی از x می‌باشد (C_0 ثابت عددی)؟ (x متغیر حقیقی است.)

۱) $\frac{C_0}{x}$ ۲) C_0 ۳) $C_0 x$ ۴) $C_0 \ln x$

☑ **پاسخ**: گزینه «۱» می‌دانیم در معادلهٔ دیفرانسیل $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$ ، اگر جـواب‌هـای معادلـه y_1 , y_2 باشـد، ایـن رابطـه بـرای رنسـکین جواب‌ها برقرار است. $\frac{dw}{w}=-p\,dx$

پس: $w=w(a)\exp\left[-\int_a^x p(t)dt\right] \ , \ p=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$

در نتیجه داریم: $w=w(a)\exp\left[-\int_a^x \frac{dt}{t}\right]=w(a)\exp\left[-\ln\frac{x}{a}\right]=w(a)\frac{a}{x}=\frac{20}{x}$

مثال۱۱: جواب معادله $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$ برحسب سری فروبینوس کدام است؟ A و B اعداد ثابتی هستند. (سراسری ۹۱)

۱) $y=A(1+x+^2+x^3+\ldots)+B\ln x(1+x+x^2+\ldots)$

۲) $y=A(1+x+x^2+x^3+\ldots)+B\ln x$

۳) $y=A(1-x+x^2-x^3+\ldots)+B\ln x(1+x+x^2+\ldots)$

۴) $y=A(1-x+x^2-x^3+\ldots)+B\ln x(1-x+x^2-x^3+\ldots)$

☑ **پاسخ**: گزینه «۱» با جایگذاری $y(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}$ در معادله بدست می‌آوریم:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}(1+\lambda+r)^2-\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}(\lambda+r)^2=0$$

معادله‌ی اندیس از کمترین توان x بدست می‌آید. $(r)^2=0\rightarrow r=0$

که این معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، یک جواب از رابطه‌ی بازگشتی ذیل بدست می‌آید:

$$-a_{\lambda+1}(\lambda+1)^2+a_\lambda(\lambda+1)^2=0\Rightarrow a_{\lambda+1}=a_\lambda$$

لذا پاسخ اول: $y(x)=A(1+x+x^2+\ldots)$

بنابراین با توجه به مضاعف بودن ریشه جواب دوم برابر است با Lnx× جواب اول پس:

$$y(x)=A(1+x+x^2+x^3+\ldots)+BLnx(1+x+x^2+\ldots)$$

فصل دهم

«معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی»

مثال۱: درمورد معادله با مشتق جزئی $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) در ناحیه $xy>0$ بیضی‌گون و در ناحیه $xy=0$ سهمی‌گون است.

۲) در ناحیه $xy>0$ هذلولی‌گون و در ناحیه $xy<0$ بیضی‌گون است.

۳) در ناحیه $xy>0$ بیضی‌گون و در ناحیه $xy<0$ هذلولی‌گون است.

۴) در ناحیه $xy<0$ هذلولی‌گون و در ناحیه $xy=0$ سهمی‌گون است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در این تست $A=x$ ، $B=0$ و $C=y$ می‌باشد لذا $B^2-4AC=-4xy$ خواهد بود که در ناحیه $xy>0$ معادله بیضی‌گون، در ناحیه $xy<0$ هذلولی‌گون و به ازای $xy=0$ معادله سهموی است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: با کدام تغییر متغیر معادله $xu_{xx}-yu_{xy}=0$ به فرم کانونی (نرمال) تبدیل می‌شود؟

۱) $v=x, z=x-y$ ۲) $v=x, z=x+y$ ۳) $v=y, z=xy$ ۴) $v=xy, z=\frac{x}{y}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به معادله مقادیر A و B و C را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow xu_{xx}-yu_{xy}=0 \Rightarrow A=x, B=-y, C=0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)\left[x\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow y=c_1 \Rightarrow \boxed{v=y} \\ x\frac{dy}{dx}+y=0 \Rightarrow xdy+ydx=0 \Rightarrow xdy=-ydx \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Lny=-Lnx+c_2=-Lnx+Lnc_3=Ln\frac{c_3}{x} \Rightarrow y=\frac{c_3}{x} \Rightarrow c_3=xy \Rightarrow \boxed{z=xy}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: فرض کنید $z=z(x,y)$ در معادله‌ی $\phi(\frac{z}{x^3},\frac{y}{x})=0$ صدق نماید، z در کدام معادله دیفرانسیل صدق می‌کند؟

۱) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z$ ۲) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۳) $x^2\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial x}=3z$ ۴) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با فرض $u=\frac{z}{x^3}$ و $v=\frac{y}{x}$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-3z}{x^4} & \frac{-y}{x^2} \\ \frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-3z}{x^5}+\frac{y}{x^5}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}-3z+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: جواب‌های معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $u_{xy}=-u_x$ کدام است؟

۱) $f(x)e^{y}+g(x)$ ۲) $f(x)e^{-y}+g(y)$ ۳) $f(y)e^{x}+g(x)$ ۴) $f(y)e^{-x}+g(x)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با فرض $u_x=P$ معادله به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P_y=-P \Rightarrow \frac{P_y}{P}=-1 \Rightarrow \int\frac{P_y}{P}dy=\int(-1)dy \Rightarrow LnP=-y+Ln[k(x)] \Rightarrow P=k(x)e^{-y}$$

$$\Rightarrow \int Pdx=\int k(x)e^{-y}dx \Rightarrow u=f(x)e^{-y}+g(y)$$

که در این رابطه $f(x)=\int k(x)dx$ است.

مثال۵: جواب معادله $x=\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $u=e^{y-2x}-\frac{x^2+1}{2}$ ۲) $u=f(y-2x)+\frac{x^2}{2}$ ۳) $u=\sin(y-2x)-\frac{x^2}{2}+1$ ۴) $u=\sin(y-2x)+x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» جواب عمومی معادله $u_x+2u_y=0$ با توجه به اینکه در این تست $a=1$، $b=2$ و $c=0$ می‌باشد، به صورت $u=f(y-2x)$ است، اما چون این معادله همگن نیست باید جواب خصوصی را نیز به دست آورده و به جواب عمومی اضافه کنیم، با توجه به طرف دوم و گزینه‌ها اگر جواب خصوصی را به صورت kx^2 در نظر بگیریم، با قرار دادن آن در معادله $k=\frac{1}{2}$ به دست خواهد آمد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ کدام است؟

۱) $f(x+y)+xg(x+y)$ ۲) $xf(x+y)+yg(x+y)$ ۳) $f(x+y)+xyg(x+y)$ ۴) $f(x+y)+f(x+y)^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$$

لذا جواب عمومی به صورت مقابل است:

$$u(x,y)=f(y+\lambda x)+xg(y+\lambda x)\xrightarrow{\lambda=1}\mathbf{u(x,y)=f(x+y)+xg(y+x)}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ کدامیک از توابع زیر است؟

۱) $z=f(\frac{x}{y})$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر) ۲) $z=f(x^2-y^2)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)

۳) $z=f(xy)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر) ۴) $z=f(x-y)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}\Rightarrow xdx=ydy\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=c_1\Rightarrow x^2-y^2=2c_1\Rightarrow x^2-y^2=c\Rightarrow u(x,y)=c\Rightarrow v=h(u)\ \text{یا}\ \mathbf{z=f(x^2-y^2)}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۸: کدامیک از موارد زیر حل معادله $u_x=4u_y$ با شرط $u(0,y)=8e^{-3y}$ می‌باشد؟

۱) $u(x,y)=8e^{-12x-3y}$ ۲) $u(x,y)=8e^{-12x+3y}$ ۳) $u(x,y)=8e^{4x-3y}$ ۴) $u(x,y)=8e^{12x-3y}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با استفاده از دستگاه لاگرانژ داریم:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-4}=\frac{du}{0}\Rightarrow\begin{cases}du=0\\-4dx=dy\end{cases}\Rightarrow u=c_1\ ,\ 4x+y=c_2$$

$$u(x,y)=f(y+4x)\xrightarrow[u(0,y)=f(y)]{u(0,y)=8e^{-3y}}f(y)=8e^{-3y}\Rightarrow f(y+4x)=8e^{-3(y+4x)}=\mathbf{8e^{-12x-3y}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۹: کدامیک از معادلات زیر را می‌توان با روش جدا کردن متغیرها حل کرد؟

۱) $a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+bu=0$ ۲) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ۳) هیچکدام ۴) گزینه‌های ۱و۲ صحیح هستند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با فرض $u(x,y)=F(x).G(y)$ داریم:

۱) $aF'(x)G'(y)+bF(x)G(y)=0\Rightarrow a\frac{F'(x)}{F(x)}=-\frac{bG(y)}{G'(y)}=k$

۲) $x^2F''(x).G(y)+yF(x).G''(y)=0\Rightarrow\frac{x^2F''(x)}{F(x)}=-y\frac{G''(y)}{G(y)}=k$

مثال۱۰: جواب معادله $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3y^2u=0$ کدام است؟

۱) $u=ce^{-(\frac{1}{kx}+ky^3)}$ ۲) $u=ce^{-(\frac{1}{ky}+kx^3)}$ ۳) $u=ce^{(\frac{1}{kx}-ky^3)}$ ۴) $u=ce^{-k(x+y^3)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با فرض $u(x,y)=F(x).G(y)$ داریم:

$$x^2.F'.G'+3y^2.F.G=0\Rightarrow x^2.\frac{F'}{F}=-3y^2\frac{G}{G'}=k_1$$

$$\begin{cases} x^2\dfrac{F'(x)}{F(x)}=k_1\Rightarrow Ln\dfrac{F}{c_1}=-\dfrac{k_1}{x}\Rightarrow F(x)=c_1e^{-\frac{k_1}{x}} \\ -3y^2.\dfrac{G(y)}{G'(y)}=k_1\Rightarrow Ln\dfrac{G}{c_2}=-\dfrac{y^3}{k_1}\Rightarrow G(y)=c_2e^{-\frac{y^3}{k_1}} \end{cases}\Rightarrow u(x,y)=c_1.c_2e^{-\frac{k_1}{x}-\frac{y^3}{k_1}}=ce^{-(\frac{k_1}{x}+\frac{y^3}{k_1})}$$

با فرض $k_1=\frac{1}{k}$ جواب به صورت $u=ce^{-(\frac{1}{kx}+ky^3)}$ نوشته می‌شود.

مثال۱۱: مسأله با مقدار مرزی $[x^2e^x\phi'(x)]'-x\phi(x)+\lambda\cos x.\phi(x)=0\ ,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ با شرایط مرزی $\phi(\frac{\pi}{2})=2\phi'(\frac{\pi}{2})$ ، $\phi(-\frac{\pi}{2})=\phi'(-\frac{\pi}{2})$ مفروض است، اگر ϕ_m و ϕ_n دو تابع ویژه مختلف برای این مسأله باشند، در این صورت کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\phi_n(x).\phi_m(x)\cos xdx=2\pi$ ۲) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\phi_n(x)\phi_m(x)-1]\cos xdx=-2$

۳) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\phi_n(x)\phi_m(x)\cos xdx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\phi_n(x)dx$ ۴) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\phi_n(x).\phi_m(x)-n]\cos xdx=0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تابع وزنی $h(x)=\cos x$ است، و برای انتگرال گزینه‌ی (۲) داریم:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\phi_n(x)\phi_m(x)\cos xdx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=0-2=-2$$

مثال۱۲: جواب مسأله با مقادیر مرزی $y''+\lambda y=0\ ,\ y(0)=y(1)=0$ کدام است؟

۱) $c\sin\sqrt{n\pi}x$ ۲) $c\sin(n\pi)x$ ۳) $ctg(n\pi)x$ ۴) $ctg(\sqrt{n\pi})x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» یک مسأله اشتورم لیوویل با مقدار ویژه $\lambda_n=(n\pi)^2$ و تابع ویژه $y_n=c\sin n\pi x$ است.

مثال۱۳: جواب مسأله موج $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1,u_t(x,0)=0\ ,\ 0\le x\le\pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\ ,\ t\ge 0 \end{cases}$ است؟

۱) $u(x,t)=1+\sin t\cos x$

۲) $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\sin(2n-1)t$

۳) $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$

۴) $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به شرایط مرزی تابع ویژه به صورت $F_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$ و $\lambda_n=(\frac{n\pi}{\pi})^2=n^2$ می‌باشد، لذا مانند مثال قبل جواب به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin nx$$

که $G_n(t)=a_n\cos nt+b_n\sin nt$ می‌باشد و لذا داریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\sin nx$$

با توجه به شرط $u_t(x,0)=0$، به راحتی $b_n=0$ و کافیست مقدار a_n حساب شود:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\times\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\frac{4}{n\pi}\ , & n \text{ فرد}\\ 0\ , & n \text{ زوج}\end{cases}\Rightarrow u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$$

روش تستی: لازم است داوطلب این موضوع را در نظر بگیرد در روز آزمون می‌توان به طریقی راحت‌تر به سؤال جواب داد. دقت کنید؛ با توجه به شرط مرزی $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ متوجه می‌شویم که گزینه‌ی ۳ یا ۴ درست است! حال با توجه به $u(x,0)=1$، کافی است در سری فوریه‌ی تابع $f(x)=1$ فقط b_1 حساب کنیم:

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}\Rightarrow$$ گزینه (۳) صحیح است

مثال ۱۴: از حل معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$ تحت شرایط مرزی ـ اولیه؛ $\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}(L,t)+\beta\theta(L,t)=0$ و $\theta(0,t)=0$ ، $\theta(x,0)=g(x)$ در بازه $0<x<L$، کدام فرم از جواب‌های ذیل به دست می‌آید؟

۱) $\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)e^{-\alpha\lambda_n t}$

۲) $\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x)e^{-\alpha\lambda_n t}$

۳) $\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n[\cos(\lambda_n x)+\sin(\sqrt{\lambda_n}x)]e^{-\alpha\lambda_n t}$

۴) $\theta(x,t)=g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)e^{-\alpha\lambda_n t}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به این که شرط مرزی به شکل $\theta(0,t)=0$ می‌باشد لذا تابع $F_n(x)$ به صورت سینوسی است.

با دقت در گزینه‌ها می‌بینیم لازم نیست λ_n معلوم شود، لذا داریم:

$$G_n'(t)+\alpha\lambda_nG(t)=0\Rightarrow\frac{G_n'(t)}{G(t)}+\alpha\lambda_n=0\Rightarrow\int\frac{G_n'(t)}{G_n(t)}dt=-\alpha\lambda_n$$

$$\Rightarrow \text{Ln}[G_n(t)]=-\alpha\lambda_n t\Rightarrow G_n(t)=D_ne^{-\alpha\lambda_n t}$$

مثال ۱۵: جواب حالت پایدار مسأله $\begin{cases}u_t=2u_{xx}\\ u(0,t)=10\ ,\ u(3,t)=40\ ,\ u(x,0)=25\end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲۵ ۳) $10x+10$ ۴) $x^2+7x+10$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون دمای میله در دو طرف آن ثابت است، لذا با توجه به نکات فوق داریم:

$$u(x,t)=u_1+(u_2-u_1)\frac{x}{L}\Rightarrow u(x,t)=10+(40-10)\frac{x}{3}=10+10x$$

مثال ۱۶: مقدار $u(\frac{1}{2},2)$ برای معادله‌ی موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\ ;\ 0<x<1\ ,\ t>0\\ u(x,0)=1\ ,\ u_t(x,0)=\sin^3\pi x\ ;\ 0\le x\le 1\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0\ ;\ t\ge 0\end{cases}$$

۱) $\frac{8}{3\pi}$ ۲) $1+\frac{8}{3\pi}$ ۳) 0 ۴) 1

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با روش دالامبر به این سؤال جواب می‌دهیم. در این سؤال با توجه به شرایط مرزی که هر دو برای مشتقات u داده شده است، دوره تناوب $T = ۲L$، یعنی $T = ۲\times۱ = ۲$ می‌باشد.

$$u(\frac{۱}{۲},۲) = \frac{۱}{۲}[f^*(+\frac{۱}{۲}+۱\times۲) + f^*(\frac{۱}{۲}-۱\times۲)] + \frac{۱}{۲}[G^*(\frac{۱}{۲}+۱\times۲) - G^*(\frac{۱}{۲}-۱\times۲)]$$

نکته مهم: دقت کنید x در بازه‌ی $(۰,۱)$ تعریف شده اما ما مقادیر توابع f^* و G^* را در $x = \frac{۵}{۲}$ و $x = -\frac{۳}{۲}$ می‌خواهیم، برای این که x در بازه‌ی $(۰,۱)$ قرار گیرد باید با توجه به دوره تناوب تابع و همچنین توجه به گسترش زوج یا فرد توابع f و G این شرایط را به وجود بیاوریم.

با توجه به این که دوره تناوب تابع $T = ۲$ می‌باشد، پس $f^*(x\pm۲) = f^*(x)$, $G^*(x\pm۲) = G^*(x)$ لذا داریم: $u(\frac{۱}{۲},۲) = \frac{۱}{۲}[۲f^*(\frac{۱}{۲})] = f^*(\frac{۱}{۲})$

بنابراین کافی است مقدار $f(\frac{۱}{۲})$ را حساب کنیم، با توجه به این که $f(x) = u(x,۰) = ۱$ داده شده است، پس به ازای تمام xها، مقدار f برابر عدد ۱ است، پس $f(\frac{۱}{۲}) = ۱$ و در نتیجه $u(\frac{۱}{۲},۲) = ۱$. $\frac{۱}{۲}[f^*(\frac{۱}{۲}) + f(\frac{۱}{۲})] + \frac{۱}{۲}[G^*(\frac{۱}{۲}) - G^*(\frac{۱}{۲})]$

مثال۱۷: برای مسأله مقدار اولیه ـ کرانه‌ای زیر، مقدار $u(\frac{L}{۳}, \frac{۱۱L}{۴})$ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = ۰ \ , \ ۰ < x < L \ , \ t > ۰ \\ u(x,۰) = x(L-x) \ , \ ۰ \le x \le L \ , \ u_t(x,۰) = ۰ \\ u(۰,t) = ۰ = u(L,t) \ , \ t > ۰ \end{cases}$$

۱) $-\frac{۲۳L^۲}{۱۴۴}$ ۲) $-\frac{۲۳L^۲}{۷۲}$ ۳) $\frac{۲۳L^۲}{۷۲}$ ۴) $\frac{۲۳L^۲}{۱۴۴}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» $f(x) = x(L-x)$, $g(x) = ۰$

با توجه به حل دالامبر موج داریم:

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[f(x-ct) + f(x+ct)] = \frac{۱}{۲}[f(\frac{L}{۳} - \frac{۱۱L}{۴}) + f(\frac{L}{۳} + \frac{۱۱L}{۴})] = \frac{۱}{۲}[f(\frac{-۲۹}{۱۲}L) + f(\frac{۳۷L}{۱۲})]$$

از طرفی $u(x,۰)$ فقط در بازه $۰ \le x \le L$ داده شده است. در صورتی که $\frac{-۲۹L}{۱۲} < ۰$ و $\frac{۳۷L}{۱۲} > L$

با توجه به اینکه شرایط مکانی مسأله از نوع دیریکله است لذا باید تابع $f(x) = x(L-x)$ را که فقط در بازه $۰ \le x \le L$ تعریف شده گسترش فرد بدهیم:

$$f(\frac{-۲۹L}{۱۲}) = -f(\frac{۲۹L}{۱۲}) = -f(\underbrace{۲L}_{\text{طول دوره تناوب}} + \frac{۵L}{۱۲}) = -f(\frac{۵L}{۱۲}) = \frac{-۳۵L^۲}{۱۴۴}$$

همچنین داریم:

$$f(\frac{۳۷L}{۱۲}) = f(\frac{۳۷L}{۱۲} - \underbrace{۴L}_{\text{مضربی از طول دوره تناوب}}) = f(\frac{-۱۱L}{۱۲}) = -f(\frac{۱۱L}{۱۲}) = \frac{-۱۱L^۲}{۱۴۴} \Rightarrow u(\frac{L}{۳},\frac{۱۱L}{۴}) = \frac{۱}{۲}[\frac{-۳۵L^۲}{۱۴۴} - \frac{۱۱L^۲}{۱۴۴}] = \frac{-۲۳L^۲}{۱۴۴}$$

مثال۱۸: در مسأله لاپلاس زیر:

$$\begin{cases} \nabla^۲ u = u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r + \frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta} = ۰ \ , \ ۱ < r < ۲ \\ u_r(۱,\theta) = \sin\theta \ , \ u_r(۲,\theta) = ۰ \end{cases}$$

جواب نهایی $u(r,\theta)$ به کدام شکل است؟

۱) $a_۰ - \frac{۱}{۲}(r - \frac{۴}{r})\sin\theta$ ۲) $a_۰ - \frac{۱}{۲}(r + \frac{۴}{r})\sin\theta$ ۳) $a_۰ - \frac{۱}{۳}(r + \frac{۴}{r})\sin\theta$ ۴) $a_۰ + \frac{۱}{۳}(r - \frac{۴}{r})\sin\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که گفتیم جواب کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$u(r,\theta) = a_۰ + b_۰ Lnr + \sum_{n=۱}^{\infty}[(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin n\theta]$$

با اعمال شرط مرزی $u_r(۱,\theta)=۲\sin\theta$ داریم:

$$\sin\theta = b_\circ + \sum_{n=۱}^{\infty}[n(a_n-b_n)\cos n\theta + n(c_n-d_n)\sin n\theta]$$

از تساوی بالا روابط زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} b_\circ = \circ \\ a_n - b_n = \circ \quad ; \quad n=۱,۲,۳,\ldots \\ c_۱ - d_۱ = ۱ \\ c_n - d_n = \circ \quad ; \quad n = ۲,۳,\ldots \end{cases} \qquad (۱)$$

با اعمال شرط مرزی $u_r(۲,\theta)=\circ$ داریم:

$$\circ = \sum_{n=۱}^{\infty} n(۲^{n-۱}a_n - ۲^{-n-۱}b_n)\cos n\theta + n(۲^{n-۱}c_n - d_n ۲^{-n-۱})\sin n\theta$$

از تساوی بالا روابط زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n ۲^{n-۱} - ۲^{-n-۱}b_n = \circ \quad , \quad n=۱,۲,۳,\ldots \\ c_۱ - \dfrac{d_۱}{۴} = \circ \\ c_n ۲^{n-۱} - d_n ۲^{-n-۱} = \circ \quad , \quad n=۲,۳,\ldots \end{cases} \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_n - b_n = \circ \\ ۲^{n-۱}a_n - ۲^{-n-۱}b_n = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \circ \\ b_n = \circ \end{cases} ; \ n=۱,۲,۳,\ldots \quad , \quad \begin{cases} c_n - d_n = \circ \\ c_n ۲^{n-۱} - d_n ۲^{-n-۱} = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = \circ \\ d_n = \circ \end{cases} ; \ n=۲,۳,\ldots$$

$$\begin{cases} c_۱ - d_۱ = ۱ \\ c_۱ - \dfrac{d_۱}{۴} = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_۱ = -\dfrac{۴}{۳} \\ c_۱ = -\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

حال با جایگذاری مقدار ضریب‌ها در رابطه $u(r,\theta)$ داریم:

$$\mathbf{u(r,\theta) = a_\circ - \frac{۱}{۳}(r + \frac{۴}{r})\sin\theta}$$

مثال۱۹: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x \ ; \ -۱\le x<\circ \\ ۲x \ ; \ \circ\le x<۱ \end{cases}$، را بر حسب توابع لژاندر بسط دهیم. ضریب جمله‌ی سوم کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\circ$

پاسخ: گزینه «۲» ضریب جمله‌ی سوم یعنی $c_۲$، لذا داریم:

$$c_۲ = \frac{۲\times۲+۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} f(x)P_۲(x) = \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{\circ} f(x)P_۲(x)dx + \frac{۵}{۲}\int_{\circ}^{۱} f(x)P_۲(x)dx$$

$$\Rightarrow c_۲ = \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{\circ}(x)\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۱)dx + \frac{۵}{۲}\int_{\circ}^{۱}(۲x)\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۱)dx = \frac{۵}{۴}\int_{-۱}^{\circ}(۳x^۳-x)dx + \frac{۵}{۲}\int_{\circ}^{۱}(۳x^۳-x)dx$$

$$= \frac{۵}{۴}[\frac{۳x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲}]_{-۱}^{\circ} + \frac{۵}{۲}[\frac{۳x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲}]_{\circ}^{۱} = \frac{۵}{۴}[\circ - (\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲})] + \frac{۵}{۲}[(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲}) - \circ] = -\frac{۵}{۴}(\frac{۱}{۴}) + \frac{۵}{۲}(\frac{۱}{۴}) = -\frac{۵}{۱۶} + \frac{۵}{۸} = \frac{۵}{۱۶}$$

مثال۲۰: جواب مسئله لاپلاس زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \; ; \; 0<x<a \;,\; 0<y<b \\ u(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,b)=0 \\ u(a,y)=f(y) \end{cases}$$

۱) $A_0x+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\sqrt{\lambda_n}x\cosh\sqrt{\lambda_n}y$

۲) $A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}y$

۳) $A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\sqrt{\lambda_n}x\cosh\sqrt{\lambda_n}y$

۴) $A_0x+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با نگاهی به شرطها، واضح است مسئله برای متغیر y دارای شرط نیومن است $(u_y(x,0)=u_y(x,b)=0)$ بنابراین تابع ویژه برای y به صورت $G_n(y)=\cos\sqrt{\lambda_n}y$ می‌باشد، با توجه به شرط $u(0,y)=0$ واضح است فقط گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

تذکر مهم: دقت کنید با توجه به جدول ما عادت کرده‌ایم، همیشه شرایط مرزی و توابع ویژه بر حسب x داده شوند، اما در برخی مسائل ممکن است، نقش x و y عوض شود و این موضوع نباید شما را گمراه کند.

حل با استفاده از نکته گفته شده در مورد معادله لاپلاس: با توجه به شرط $u(a,y)=f(y)$، واضح است، جواب بر حسب y مثلثاتی است و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلط هستند و با توجه به شرط $u(0,y)=0$ واضح است گزینه (۲) نیز غلط است.

مثال۲۱: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \; 0<x<\pi \;,\; t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \;,\; u(x,0)=4\sin 2x \; ; \; 0\le x\le\pi \;,\; t\ge 0 \end{cases}$$

۱) $4e^{-6t}\sin 2x$

۲) $4e^{-3t}\sin 3x$

۳) $4e^{-12t}\sin 2x+t\cos x$

۴) $4e^{-12t}\sin 2x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شرایط مرزی، $\lambda^2=(\frac{n\pi}{L})^2$ و با توجه به این که $L=\pi$، لذا $\lambda_n=n^2$، بنابراین با توجه به جدول و مطالب گفته شده، جواب کلی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-c^2\lambda_nt}\sin nx$$

برای مشخص شدن مقدار a_n، از شرط مکانی داده شده استفاده می‌کنیم:

$$u(x,0)=4\sin 2x \Rightarrow 4\sin 2x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

با نگاهی به تساوی فوق، واضح است a_n ضریب سری فوریه تابع $4\sin 2x$ است و لذا داریم:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}4\sin(2x)\sin(nx)dx=\frac{1}{2}[\frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\sin(nx)dx]=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\times\pi=4 \; ; \; n=2 \\ 0 \qquad ; \; n\ne 2\end{cases}$$

پس a_n فقط برای $n=2$ وجود دارد و مقدارش برابر ۴ می‌شود و لذا داریم:

$$u(x,t)=a_2e^{-3\times 4t}\sin 2x=\mathbf{4e^{-12t}\sin 2x}$$

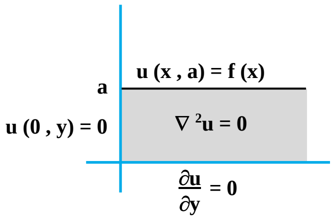
توضیح: در قسمت حل انتگرال، برای راحتی در حل، از نتایج توابع متعامد که در فصل سری فوریه گفتیم، استفاده شد و انتگرال را به جای $\int_0^{\pi}$، نوشتیم $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}$، تا بتوانیم از فرمول مقابل استفاده کنیم:

$$\int_{-L}^{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx=\begin{cases}L \;,\; m=n \\ 0 \;,\; m\ne n\end{cases}$$

که در این سؤال $L=\pi$ و $m=2$ است.

البته دقت کنید، اصلاً لازم نبود این محاسبات انجام شود، چون سری فوریه $4\sin 2x$ خودش می‌شود. محاسبات برای تمرین ارایه شدند.

مثال ۲۲: عبارت پتانسیل الکتریکی $u(x,y)$ در ناحیه نیم نوار داده شده و با شرایط مرزی نشان داده شده به چه شکل خواهد بود؟



۱) $u(x,y)=\int_{\circ}^{\infty} D(p)\cosh(py)e^{-px}dp$

۲) $u(x,y)=\int_{\circ}^{\infty} D(p)\sinh(px)\cos(py)dp$

۳) $u(x,y)=\int_{\circ}^{\infty} D(p)\sin(px)\cosh(py)dp$

۴) $u(x,y)=\int_{\circ}^{\infty} D(p)\cos(py)e^{-px}dp$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» توجه شود فاصله برای x نامتناهی است و یک شرط دیریکه و یک شرط کران‌داری برای مسأله وجود دارد، پس $\lambda_\omega=\omega^۲$، $F_\omega(x)=\sin\omega x$ (همین‌جا معلوم می‌شود که گزینه (۳) درست است.)، و چون لازم است $G_\omega(y)$ در شرط $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\circ)=\circ$ صدق کند، بنابراین $G_n(y)=\cosh\omega y$است، پس جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,y)=\int_{\circ}^{\infty} c(\omega)\sin\omega x.\cosh\omega y d\omega$$

که اگر به جای ω در رابطه p قرار دهیم ملاحظه می‌گردد، گزینه ۳ جواب است.

روش ساده‌تر: از همان ابتدا معلوم بود تابع $F_n(x)$، مثلثاتی است، چون $u(x,a)=f(x)$ و فقط گزینه (۳) این شرایط را دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۲۳: اگر تبدیل لاپلاس تابع $u(x,t)$ جواب مسأله $\begin{cases}u_x+xu_t=\circ\\ u(x,\circ)=\circ\ ,\ u(\circ,t)=t\end{cases}$ را با $u(x,s)$ نمایش دهیم، آنگاه u در کدام معادله زیر صدق می‌کند؟

۱) $u_x-x^۲su=\circ$ ۲) $u_x+xsu=\circ$ ۳) $u_x+x^۲su=\circ$ ۴) $u_x-sxu=\circ$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$u_x+x[su-u(x,\circ)]=\circ\xrightarrow{u(x,\circ)=\circ}u_x+xsu=\circ$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۲۴: تبدیل لاپلاس جواب مسأله $\begin{cases}u_x+xu_t=\circ\ ,\ \circ<x<\infty\\ u(x,\circ)=\circ\ ,\ \circ\le x<\infty\ ,\ u(\circ,t)=t\ ,\ t>\circ\end{cases}$ کدام است؟

۱) $u(x,s)=\frac{۱}{s^۲}e^{-\frac{sx^۲}{۲}}$ ۲) $u(x,s)=\frac{۱}{s}e^{-\frac{sx^۲}{۲}}$ ۳) $u(x,s)=\frac{۱}{s^۲}e^{-\frac{sx}{۲}}$ ۴) $u(x,s)=\frac{۱}{s}e^{-\frac{sx}{۲}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله داریم:

$$u_x+x[su-u(x,\circ)]=\circ\ \Rightarrow u_x+xsu=\circ$$

معادله به دست آمده یک معادله دیفرانسیل معمولی با متغیر مستقل x است و جواب عمومی آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}u(x,s)=k(s)e^{-\frac{sx^۲}{۲}}\Rightarrow u(\circ,s)=k(s)\\ u(\circ,t)=t\xrightarrow{\text{از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم}}u(\circ,s)=\frac{۱}{s^۲}\end{array}\right\}\Rightarrow k(s)=\frac{۱}{s^۲}\Rightarrow u(x,s)=\frac{۱}{s^۲}e^{-\frac{sx^۲}{۲}}$$

مثال۲۵: اگر معادله‌ی موج ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ به معادله‌ای با شرایط مکانی همگن بر حسب $v(x,t)$ تبدیل شود. آنگاه $v_t(x,0)$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+h(x,t) \\ u(0,t)=a(t) \\ u(L,t)=b(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

۱) $g(x)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

۲) $g(x)+a'(0)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

۳) $f(x)+\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

۴) $g(x)-a'(0)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t) \Rightarrow v_t(x,t)=u_t(x,t)-w_t(x,t)$$

$$\Rightarrow v_t(x,0)=u_t(x,0)-w_t(x,0) \Rightarrow w_t(x,0)=g(x)-w_t(x,t)$$

همان‌طور که عنوان شد، تغییر متغیر مناسب به صورت مقابل است:

$$w(x,t)=\frac{x}{L}[b(t)-a(t)]+a(t)$$

بنابراین $w_t(x,t)$ برابر با مقدار زیر است:

$$w_t(x,t)=\frac{x}{L}[b'(t)-a'(t)]+a'(t) \Rightarrow w_t(x,0)=\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]+a'(0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v_t(x,0)=g(x)-a'(0)-\frac{x}{L}[b'(0)-a'(0)]}$$

مثال۲۶: اگر معادله‌ی موج غیر همگن زیر که بر حسب u است با تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+\varphi(x)$، به معادله‌ای همگن با شرایط مکانی همگن بر حسب w تبدیل شود، ضابطه‌ی تابع $\varphi(x)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+\sin x \quad , \quad 0<x<\frac{\pi}{2} \quad , \quad t>0 \\ u(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

۱) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\frac{6x}{\pi}-3\sin x)$

۲) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\frac{2x}{\pi}-\sin x)$

۳) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(\sin x-\frac{2x}{\pi})$

۴) $\varphi(x)=\frac{1}{c^2}(3\sin x-\frac{6x}{\pi})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به تغییر متغیر داده شده داریم:

$$u(x,t)=w(x,t)+\varphi(x)$$

با دو بار مشتق‌گیری بر حسب t و x، داریم:

$$u_{tt}=w_{tt}+0 \quad , \quad u_{xx}=w_{xx}+\varphi''(x)$$

با قرار دادن تساوی‌های فوق در معادله‌ی اصلی داریم:

$$w_{tt}=c^2[w_{xx}+\varphi''(x)]+\sin x \Rightarrow w_{tt}=c^2w_{xx}+c^2\varphi''(x)+\sin x$$

از طرفی با توجه به شرایط اولیه، داریم:

$$u(0,t)=w(0,t)+\varphi(0) \Rightarrow \mathbf{w(0,t)+\varphi(0)=0}$$

$$u(\frac{\pi}{2},t)=w(\frac{\pi}{2},t)+\varphi(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \mathbf{w(\frac{\pi}{2},t)+\varphi(\frac{\pi}{2})=0}$$

برای این که معادله بر حسب w همگن شود، باید مقدار $\mathbf{c^2\varphi''(x)+\sin x}$ برابر صفر شود و برای این که شرایط مرزی صفر شود، باید داشته باشیم:

$$\varphi(0)=0 \quad , \quad \varphi(\frac{\pi}{2})=0$$

پس $\varphi(x)$، جواب مسأله مقابل است:

$$\begin{cases} c^2\varphi''(x)+\sin x=0 \\ \varphi(0)=\varphi(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

برای حل معادله فوق با دو بار انتگرال‌گیری از طرفین معادله، داریم:

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{c^2}\sin x \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{1}{c^2}\int \sin x dx \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{c^2}(\cos x + k_1)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{c^2}\int(\cos x + k_1)dx \Rightarrow \boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{c^2}(\sin x + k_1 x) + k_2}$$

برای به دست آوردن مقدار k_1 و k_2 از شرایط اولیه به دست آمده برای φ، استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{c^2}[(\sin(0) - k_1 \times (0)] + k_2 \Rightarrow k_2 = 0$$

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{c^2}[\sin\frac{\pi}{2} + k(\frac{\pi}{2})] \Rightarrow 0 = \frac{1}{c^2}(1 + \frac{k\pi}{2}) \Rightarrow k = -\frac{2}{\pi}$$

بنابراین معادله $\varphi(x)$ به صورت زیر است:

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{c^2}(\sin x - \frac{2x}{\pi})}}$$

مثال۲۷: در مسأله مقدار مرزی زیر، مقدار $u(0,1)$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_{xx} = u_{tt} \;,\; 0 \le x \le 4 \;,\; t > 0} \\ \boldsymbol{u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0} \\ \boldsymbol{u(x,0) = 2\cos(\pi x) + 5 \;,\; u_t(x,0) = 1 - \cos(2\pi x)} \end{cases}$$

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۷　　۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,t) = F(x).G(t) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \\ \dfrac{G''(t)}{G(t)} = \lambda \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی، مقادیر ویژه به صورت $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{4})^2$ و $\lambda = 0$ است، برای $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{4})^2$ داریم:

$$F_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{4}) \;,\; \frac{G''(t)}{G(t)} = -(\frac{n\pi}{4})^2 \Rightarrow G_n(t) = A_n\sin(\frac{n\pi}{4}t) + B_n\cos(\frac{n\pi}{4}t)$$

اما برای $\lambda = 0$ داریم:

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = 0 \Rightarrow G''(t) = 0 \Rightarrow G(t) = at + b$$

بنابراین جواب کلی به صورت مقابل است:

$$u(x,t) = at + b + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi x}{4})[A_n\sin(\frac{n\pi t}{4}) + B_n\cos(\frac{n\pi t}{4})] \quad (*)$$

حالا شرایط اولیه را لحاظ می‌کنیم، با توجه به شرط $u(x,0)$، لازم است در رابطه‌ی $(*)$ به جای تمام tها صفر قرار دهیم:

$$u(x,0) = 2\cos(\pi x) + 5 \xrightarrow{t=0} 2\cos(\pi x) + 5 = b + \sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(\frac{n\pi x}{4}) \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ B_n = 0 \;,\; n \ne 4 \\ B_n = 2 \;,\; n = 4 \end{cases}$$

با توجه به شرط $u_t(x,0)$، ابتدا از رابطه $(*)$ نسبت به t مشتق می‌گیریم، بعد به جای تمام tها صفر قرار می‌دهیم:

$$u_t(x,0) = 1 - \cos(2\pi x) \xrightarrow{t=0} 1 - \cos 2\pi x = a + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n\pi}{4})A_n\cos(\frac{n\pi}{4}x) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ A_n = 0 \;,\; n \ne 8 \\ A_n = -\dfrac{1}{2\pi} \;,\; n = 8 \end{cases}$$

بنابراین جواب نهایی به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\boldsymbol{u(x,t) = 5 + t + 2\cos(\pi x)\cos(\pi t) - \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\sin(2\pi t)}$$

با توجه به مقدار خواسته شده داریم:

$$u(0,1)=5+1+2\cos(0)\cos\pi-\frac{1}{2\pi}[\cos(0)\sin 2\pi]=5+1-2=4$$

روش دوم: با استفاده از روش دالامبر داریم:

$$u(0,1)=\frac{1}{2}[f^*(0+1)+f^*(0-1)]+\frac{1}{2}[G^*(0+1)-G^*(0-1)]=\frac{1}{2}[f^*(1)+f^*(-1)]+\frac{1}{2}[G^*(1)-G^*(-1)]$$

با توجه به شرایط مرزی، باید f نسبت به $x=0$ گسترش زوج یابد، بنابراین $f^*(1)=f^*(-1)$ و همچنین g، نسبت به $x=0$، گسترش زوج و در نتیجه G باید نسبت به $x=0$ گسترش فرد یابد، لذا $G^*(1)=-G^*(-1)$، پس جواب به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$u(0,1)=\frac{1}{2}[2f(1)]+\frac{1}{2}[2G(1)]=f(1)+G(1)$$

اما $G(x)$ از رابطه‌ی مقابل حساب می‌شود:

$$G(x)=\int g(x)dx=\int(1-\cos 2\pi x)dx=x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x$$

بنابراین $G(1)=1$ و لذا داریم:

$$u(0,1)=2\cos(\pi\times 1)+5+1-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\times 1)=2\times(-1)+5+1+0=4$$

مثال ۲۸: پتانسیل الکتریکی در داخل دایره یکه با شرایط مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{u(1,\theta)}=\begin{cases}1 \;;\; -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\\ 0 \;;\; \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\end{cases}\quad,\quad -\pi<\theta<\pi$$

مقدار پتانسیل در مرکز این دیسک چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۲» **روش اول:** مقدار پتانسیل در مرکز دیسک، میانگین مقدار پتانسیل روی مرزهای دیسک می‌باشد. بنابراین داریم:

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(1,\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta\right]=\frac{1}{2}$$

روش دوم: پاسخ معادله لاپلاس در داخل دایره به صورت مقابل می‌باشند:

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos n\theta+B_n\sin\theta]r^n$$

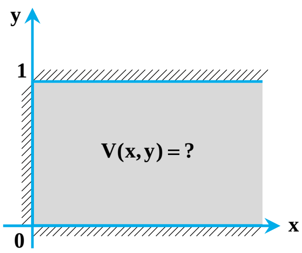
بدیهی است که در مرکز دایره مقدار r برابر صفر می‌باشد. بنابراین:

$$u(0,0)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta](0)^n=A_0$$

با توجه به فرمول محاسبه ضرایب سری فوریه، می‌توان چنین نوشت:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(1,\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1d\theta=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۹: پتانسیل در ناحیه نیمه محدود شکل زیر با شرایط مرزی ذکر شده، کدام است؟



$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial x}(0,y)=0\;,\;0<y<1\\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,0)=0\;,\;x>0\\ V(x,1)=e^{-x}\quad x>0\end{cases}$$

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cosh(kx)\sin(ky)}{(1+k^2)\cosh k}dk$ ۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cosh(kx)\cos(ky)}{(1+k^2)\cosh k}dk$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)\cos(hky)}{(1+k^2)\sinh k}dk$ ۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)\cosh(ky)}{(1+k^2)\cosh k}dk$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به توضیحات مندرج در کتاب جواب در داخل ناحیه داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$V(x,y)=\int_0^{\infty} A(k)\cosh ky\cos kx\,dk \xrightarrow{V(x,1)=e^{-x}} e^{-x}=\int_0^{\infty} A(k)\cosh k\cos kx\,dk$$

برای راحتی در محاسبات از تغییر متغیر $A(k)\cosh k=B(k)$ استفاده می‌کنیم:

$$e^{-x}=\int_0^{\infty} B(k)\cos kx\,dk$$

باتوجه به فرمول انتگرال فوریه می‌توان چنین نوشت:

$$B(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}L[\cos kx]|_{s=1}\Rightarrow B(k)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k^2+1}\right)$$

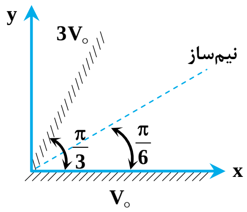
بنابراین ضریب $A(k)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A(k)=\frac{B(k)}{\cosh k}=\frac{2}{\pi(1+k^2)\cosh k}$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر است:

$$\mathbf{V(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos kx\cosh ky}{(1+k^2)\cosh k}dk}$$

مثال ۳۰: پاسخ معادله؛ $\nabla^2 V=0$ در بین دو صفحه در شکل زیر که با هم زاویه $\frac{\pi}{3}$ می‌سازند، موردنظر است. با توجه به شرایط مـرزی نشـان داده شده، اختلاف پتانسیل بین صفحه بالایی و یک نقطه روی نیم‌ساز زاویه دو صفحه کدام است؟



۱) V_0

۲) $2V_0$

۳) $\frac{V_0}{2}$

۴) $\frac{3}{2}V_0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از معادله لاپلاس در مختصات قطبی ضابطه V به صورت زیر است:

$$\nabla^2 V=0\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0\Rightarrow V=k_1\varphi+k_2$$

$$\begin{cases}\varphi=0\Rightarrow V=V_0\\ \varphi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow V=3V_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=0\Rightarrow V_0=k_2\\ \varphi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow 3V_0=k_1\frac{\pi}{3}+V_0\Rightarrow k_1=\frac{6V_0}{\pi}\Rightarrow V=\frac{6V_0}{\pi}\varphi+V_0\end{cases}$$

پتانسیل بروی نیم‌ساز دو صفحه برابر است با:

$$\varphi=\frac{\pi}{6}\Rightarrow V_1=2V_0$$

اختلاف پتانسیل بین صفحه بالایی و نیم‌ساز زاویه داده شده $(\varphi=\frac{\pi}{6})$ برابر است با:

$$\Delta V=3V_0-V_1=3V_0-2V_0=V_0$$