سؤالات آزمون گروه فنی و مهندسی دکتری ۹۸

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

■ **راهنمایی:** در این بخش، دو متن به‌طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیر آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

متن (۱)

او در نظریه خود که بعدها با مشاهدات تجربی هم تأیید شد، نشان داد که زمان و فضا عناصر جدای از هم نیستند، بلکه ما در حالِ زندگی در جهانی به‌هم پیوسته و درهم‌تنیده هستیم که از چهار بُعد تشکیل شده است. چهار بُعدی که سه‌تای آن را ابعاد مکانی و یک مورد آن را بُعد زمان تشکیل می‌دهد، اما در کل، یک ساختار واحد به نام فضا ــ زمان می‌سازند. او همچنین ثابت کرد که همه این پارامترها، بسته به شرایط تغییر می‌کنند. برای مثال، اگر شما با سرعتی بسیار بالا (یعنی سرعتی قابل مقایسه با سرعت نور) حرکت کنید، ساعت شما آهسته‌تر گذر زمان را نشان می‌دهد؛ به این معنی که زمان برای شما کندتر از کسی می‌گذرد که با آن سرعت حرکت نمی‌کند. آزمایش معروف و ذهنی اینشتین این موضوع را به‌خوبی تأیید می‌کند. طبق این آزمایش، اگر سرعت شما به عدد ممنوعه سرعت نور برسد (از مشکلات فنی و نتایج آن بر بدنتان صرف‌نظر کنید)، زمان برای شما متوقف خواهد شد و هیچ زمانی برای شما نخواهد گذشت.

بسیار اغواکننده است که یک گام این موضوع را جلوتر ببریم و بگوییم که اگر با سرعت بیش از نور حرکت کنیم، بدین ترتیب می‌توانیم زمان را دور بزنیم. متأسفانه اینشتین و طبیعت مانع شما می‌شوند و آنها سرعت بیش از نور را برای جهان ما ممنوع کرده‌اند. اما تا همین جا هم امکان دستکاری در زمان به‌وجود آمده است. اما آیا علم می‌تواند راه‌هایی برای سفر زمان پیشنهاد کند؟

به نظر می‌رسد دانشمندان سعی می‌کنند راه‌هایی، حداقل به شکل نظری، برای این مشکل پیدا کنند. با استفاده از نظریه اینشتین و توجه به پیوستگی فضا ــ زمان، شاید هندسه جهان به کمک ما بیاید. اگر فضا ــ زمان، موجودی پیوسته باشد که امروزه می‌دانیم این‌گونه است و اگر بتوانیم به گونه‌ای بر هندسه فضا ــ زمان تأثیر بگذاریم، شاید بتوانیم منحنی‌هایی در فضا ــ زمان پیدا کنیم که ما را به گذشته یا آینده ببرد. به عنوان مثال، می‌دانیم که جرم بر شکل فضا ــ زمان تأثیر می‌گذارد و درواقع، این یکی از پیش‌بینی‌های نسبیت اینشتین بود که نخستین‌بار در حینِ یک خورشیدگرفتگی توسط فیزیکدان آمریکایی، ادینگتون، تأیید شد. ادینگتون برای تأیید این نظر، هنگام یک خورشیدگرفتگی کامل، تصویری از خورشید تیره‌شده و ستاره‌های اطراف خورشید تهیه کرد. اگر اینشتین درست می‌گفت وجود خورشید به‌عنوان یک جرم بزرگ باید موجب ایجاد خمیدگی اندکی در فضا ــ زمان می‌شد. برای اینکه این موضوع را درک کنید، یک لحظه تصور کنید فضا ــ زمان مانند یک ورقه پلاستیکی بزرگ است که آن را محکم در دست گرفته‌اید. حال اگر یک توپ فلزی سنگین روی این ورقه پلاستیکی بگذارید، درجایی‌که این توپ قرار گرفته است، این ورقه پلاستیکی شما اندکی خمیده می‌شود. خورشید در این آزمایش، نقش همان توپ فلزی را بازی می‌کرد. اگر خورشید این انحنا را ایجاد می‌کرد، آن‌وقت نور ستاره‌هایی که از نزدیکی خورشید می‌گذشتند، اندکی منحرف می‌شد و در مکانی اندکی متفاوت با جایی که باید باشند، دیده می‌شدند. ادینگتون برای اینکه این مسئله را آزمایش کند، شش‌ماه پیش از کسوف که خورشید در نیمه دیگر آسمان بود، از همان منطقه که قرار بود خورشیدگرفتگی رخ دهد، تصویربرداری کرد و موقعیت دقیق ستاره‌ها نسبت به یکدیگر را ثبت کرد و این حالتی است که هنوز گلوله فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید، سپس این تصویر را با تصویر هنگام کسوف مقایسه کرد و متوجه شد ستاره‌هایی که در اطراف خورشید وجود داشتند، هنگام گرفت، در مختصات اندکی متفاوت با جای پیشین خود دیده می‌شدند: یعنی خورشید توانسته است انحنای کوچکی در فضا ــ زمان خود ایجاد کند. حال اگر این گلوله شما بسیار سنگین‌تر شود، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ این انحنا بیشتر و بیشتر می‌شود و ممکن است در نهایت، بینِ دو ناحیه فضا ــ زمان پل بزند. چنین اجرامی در عالم وجود دارند.

۱ــ مقصود اصلی متن، کدام است؟

۱) ارزیابی نقش ادینگتون در بسط نظریه اینشتین
۲) بررسی تحول نظریه ساختار واحد فضا ـ زمان
۳) نقد و بررسی نظریه اینشتین درباره زمان
۴) بررسی امکان سفر در زمان

۲ــ کدام مورد، به‌درستی، نقش پاراگراف ۲ را در متن توصیف می‌کند؟

۱) پیش‌زمینه برای بحث مطرح در پاراگراف بعدی خود را فراهم می‌آورد.
۲) با نادیده انگاشتن محدودیت‌های مطرح در پاراگراف ۱، موضوع را به مطلبی کاملاً نظری تبدیل می‌کند.
۳) با ذکر دو معضل مهم، دلیل آنکه پاراگراف ۱، عدد ممنوعه برای رسیدن به سرعت نور مطرح می‌سازد را کمی توضیح می‌دهد.
۴) نشان می‌دهد که نظریه اینشتین که در پاراگراف ۱ آمده است، وقتی هیجان‌انگیز است که برخی پیش‌شرط‌های آن را حذف کنیم.

۳ـ طبق متن، کدام مورد درست به حساب می‌آید؟

۱) موجودیت پیوسته فضا ـ زمان
۲) تغییرناپذیری پارامترهای فضا ـ زمان
۳) مستقل بودن شکل فضا ـ زمان از جرم
۴) مشاهده دو ناحیه مختلف فضا ـ زمان به‌طور همزمان

۴ـ طبق پاراگراف ۳، عبارت زیر که در متن، زیرِ آن خط کشیده شده است، به کدام پدیده اشاره دارد؟

«این حالتی است که هنوز گلوله فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید.»

۱) زمانی که ادینگتون، فرضیه خود را به بوته آزمایش واقعی گذاشت.
۲) زمانی که نور ستاره‌هایی که در اطراف خورشید بودند، شروع به انحراف کردند.
۳) زمانی که خورشید هنوز تأثیر خود را برجا نگذاشته بود.
۴) زمانی که موقعیت ستاره‌ها نسبت به خود و نسبت به خورشید تثبیت شده بود.

متن (۲)

توربین‌های بادی قادر به تبدیل انرژی باد به انرژی الکتریکی بوده و عموماً در دو نوع عمودی و افقی ساخته می‌شوند. در مدل‌های توربین بادی محور افقی، ژنراتور و تبدیل‌کننده نیروی باد به انرژی الکتریکی در بالای محور مرتفعی قرار دارد که پروانه‌های توربین در بالای آن واقع شده‌اند. طول و تعداد پره‌های توربین‌های بادی، براساس شرایط محیطی، متنوع و مختلف است، اما در بیشتر مناطق دنیا، از توربین‌های سه‌پره استفاده شده و طول پره‌ها نیز بستگی مستقیم به نوع بادخیز بودن منطقه دارد. به طور میانگین، طول پره‌های توربین‌های بادی بینِ ۲۰ تا ۴۰ متر بوده و ارتفاع میله‌های محور اصلی آن نیز می‌تواند بینِ ۶۰ تا ۹۰ متر باشد. البته در این موارد، استاندارد مشخصی وجود نداشته و طراحان و مهندسان، با توجه به شرایط بومی هر منطقه، نسبت به طراحی و مشخص کردن ابعاد توربین‌ها اقدام می‌کنند.

در نوع دیگر توربین‌های بادی موجود در دنیا که به توربین‌های محور عمودی شهرت دارند، سیستم تبدیل‌کننده انرژی به‌صورت عمودی قرار گرفته و این موضوع سبب می‌شود که توربین نیازی به چرخش به سمت باد را نداشته باشد. البته استفاده از این مدل توربین‌ها، به نسبت توربین‌های محور افقی، چندان رایج نبوده و بیشتر مختص موارد ویژه‌ای است که در آن، امکان نصب توربین‌های افقی وجود نداشته یا جهت وزش باد، دائماً در حالِ تغییر است. در کل، باید در نظر داشت که توربین‌های گروه اول یا همان توربین‌های بادی محور افقی، دارای کاربری بیشتری بوده و از نظر اقتصادی نیز مقرون به‌صرفه‌تر هستند.

اتفاقاتی که در داخل یک توربین بادی محور افقی در هنگام وزش باد می‌افتد، از این قرار است: وزش باد سبب چرخش پره‌های توربین می‌شود که به قسمت گرداننده متصل است. [۱] محور توربین شروع به چرخیدن به حول خود کرده و انرژی جنبشی را از باد دریافت می‌کند. این نیرو توسط محور مرکزی پشتیبانی و تبدیل می‌شود. در بخش داخلی ناسل (nacelle) که اصلی‌ترین بخش توربین محسوب شده و در بالای محور میله و انتهای قاعده پره‌ها قرار دارد، یک جعبه‌دنده یا گیربکس ویژه‌ای وجود دارد که نیروی ایجادشده ناشی از چرخش آرام پره‌های توربین را که به‌طور متوسط در حدود شانزده دور در دقیقه است، به سرعت زیادی، برابر با هزاروششصد دور در دقیقه تبدیل می‌کند که این میزان سرعت، برای تأمین انرژی ژنراتور توربین کفایت می‌کند. [۲] ژنراتور دقیقاً در پشت جعبه‌دنده توربین‌ها قرار گرفته و انرژی چرخشی تقویت‌شده را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند. بادسنج‌ها که نوع و چگونگی وزش باد را تحت کنترل دارند، در بخش تحتانی ناسل قرار گرفته و می‌توانند سرعت و جهت باد را تشخیص دهند. براساس اطلاعات دریافت‌شده از بادسنج‌ها، جهت و سرعت وزش باد شناسایی شده و موتورهای ویژه‌ای، پروانه‌های توربین را به سمت موافق باد تغییر می‌دهند تا حداکثر انرژی توسط توربین از وزش باد به‌دست آید. [۳] امروزه بیشتر این بادسنج‌ها به شبکه اینترنت متصل بوده و علاوه‌بر رصد شرایط محلی، از وضعیت آب‌وهوا و پیش‌بینی وزش باد مطلع هستند. درصورتی‌که سرعت باد، بسیار بیشتر از حدّ عادی باشد، در داخل توربین‌ها، سیستم ترمز اتوماتیکی قرار دارد که اجازه چرخش با سرعت بیشتر از حدّ استاندارد که می‌تواند سبب آسیب رساندن به توربین شود، را نداده و سرعت چرخش پره‌ها را کم می‌کند. سرعت بالای باد، سبب سریع‌تر چرخیدن پره‌ها شده و به تبع آن، جعبه‌دنده با سرعت بسیار سرسام‌آوری خواهد چرخید که این موضوع سبب آسیب دیدن سیستم توربین می‌شود. انرژی الکتریکی تهیه‌شده توسط ژنراتور، به کمک یک رشته کابل که از داخل محور عمودی توربین عبور می‌کند، به سطح زمین منتقل می‌شود. [۴] انرژی تولیدشده، جهت مصارف مختلف وارد شبکه برق شهری می‌شود.

۵ـ کدام مورد را می‌توان از اطلاعات مندرج در پاراگراف‌های ۱ و ۲ استنباط کرد؟

۱) در توربین‌های افقی و عمودی، مکانیزم تبدیل انرژی، با یکدیگر متفاوت است.
۲) برخی طراحان ممکن است توربین‌هایی طراحی کنند که طول پره‌های آنها در دامنه حدّ متوسط نباشد.
۳) بینِ ارتفاع میله‌های محور اصلی توربین‌های بادی و نوع بادخیز بودن منطقه، همبستگی مستقیم وجود دارد.
۴) عدم نیاز توربین‌های عمودی به تطبیق با جهت وزش باد، باعث مقرون به‌صرفه بودن آنها نسبت به نوع دیگر توربین‌ها می‌شود.

۶ـ طبق متن، کدام مورد درخصوص بادسنج‌ها، صحیح است؟

۱) نوع و جهت باد را تعیین و با توجه به این اطلاعات، مستقیماً عملکرد توربین را تغییر می‌دهند.
۲) زمانی فعال بوده و کار خود را انجام می‌دهند که ارتباطشان با شبکه اینترنت برقرار است.
۳) در زیرِ ناسل قرار داشته و برای حفظ تعادل و کارکرد دقیق توربین لازم هستند.
۴) آنها سمت چرخش پروانه‌های توربین را مشخص می‌کنند.

۷ـ در متن فوق، از کدام روش استدلالی استفاده نشده است؟

۱) قیاس ۲) توصیف فرایند ۳) توصیف عملکرد ۴) توصیف شباهت و اختلاف

۸ـ کدام قسمت در متن که با شماره‌های [۱]، [۲]، [۳] و [۴] مشخص شده‌اند، بهترین قسمت برای قرار گرفتن جمله زیر است؟
«یک دستگاه ترانسفورماتور، ولتاژ برق تولیدشده را هماهنگ کرده و آن را به نیروگاه مجاور توربین‌ها منتقل می‌کند.»

۱) [۱] ۲) [۲] ۳) [۳] ۴) [۴]

بخش دوم: حل مسئله

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمّی، شامل مقایسه‌های کمّی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و ... ، تشکیل شده است.

• توجه داشته باشید به خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

راهنمایی: هرکدام از سؤال‌های ۹ تا ۱۳ را به‌دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۹ـ در شکل زیر، بینِ چهار عدد هر دسته، ارتباط خاص و یکسانی برقرار است. به‌جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار بگیرد؟

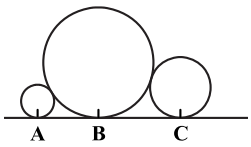
۳	?	۵	۲	۴
۱۰	۱۱	۹	۱۸	۲
۷	۶		۵	۳
۸	۴	۶	۲	۴
۲	۸	۱۰	۳	۵

۱) ۱۰
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۷

۱۰ـ در یک ساعت شنی، وقتی که نسبت مقدار شن قسمت بالایی به قسمت پایینی، ۴ به ۱ است، ۸ دقیقه طول می‌کشد تا مقدار شن قسمت بالایی آن، ۴۰ درصد کاهش یابد. کدام‌یک از زمان‌های زیر را به‌طور دقیق می‌توان با این ساعت تعیین کرد؟

۱) یک ساعت و نیم ۲) یک ساعت و ربع ۳) ۵۵ دقیقه ۴) ۴۰ دقیقه

۱۱ـ در شکل زیر، شعاع دایره بزرگ ۹ برابر شعاع دایره کوچک و ۴ برابر شعاع دایره متوسط است. فاصله نقاط B و C، چند برابر فاصله نقاط A و B است؟

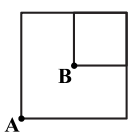


۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۲۵
۴) ۳

۱۲ـ سه ظرف x ، y و z که z خالی و دوتای دیگر، دارای مقادیری آب هستند، در اختیار داریم. پس از آنکه از ظروف x و y، مقادیری آب درون z می‌ریزیم، هر سه ظرف به یک میزان آب خواهند داشت. اگر ۳۲ درصد از آبی که در ظرف z است، از ظرف x درون آن ریخته شده باشد، نسبت مقدار آب موجود در دو ظرف x و y، در ابتدا کدام بوده است؟

۱) ۹ به ۱۴ ۲) ۱۰ به ۱۶ ۳) ۱۱ به ۱۴ ۴) ۱۲ به ۱۶

۱۳ـ شکل زیر، دو مربع را نشان می‌دهد که نقطه B مرکز مربع بزرگ است و توسط ۳ هزار دومینو که روی اضلاع شکل قرار گرفته‌اند، ساخته شده است. قطعات این دومینو، که فاصله آن‌ها از یکدیگر کاملاً یکسان است، طوری چیده شده‌اند که هر کدام بیفتد، قطعات هر دو طرف خود را می‌اندازد. اگر سرعت خراب شدن دومینوها ۲۰ عدد در ثانیه باشد و از دو نقطه مشخص‌شده در شکل، آنها را به‌طور همزمان خراب کنیم، چند ثانیه طول می‌کشد تا کل الگو خراب شود؟



۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

پاسخنامه آزمون گروه فنی و مهندسی دکتری ۹۸

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

پاسخ سؤالات متن (۱)

۱ـ گزینه «۴» نویسنده به‌دنبال بررسی امکان سفر در زمان در چهارچوب نظریات علمی است و این موضوع از جملات انتهایی هر سه پاراگراف و محتوای پارگراف دوم نیز مشخص می‌گردد.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): نویسنده از آزمایش ادینگتون به عنوان وسیله‌ای در جهت تقویت نظریه‌ی نسبیت اینشتین استفاده می‌کند که حامی مقصود اصلی‌اش می‌باشد که بررسی امکان سفر در زمان است.

بررسی گزینه (۲): سیر تحول نظریه فضا ـ زمان در متن بررسی نشده و فقط نظریه‌ی نهایی آن مطرح گردیده است.

بررسی گزینه (۳): نقدی بر نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی زمان در متن صورت نگرفته است. آزمایش ادینگتون نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی تأثیر جرم بر فضا ـ زمان را بررسی می‌کند.

۲ـ گزینه «۱» پاراگراف سوم دقیقاً جوابی است که برای سؤال انتهایی مطرح‌شده در انتهای پاراگراف دوم، آورده شده است. در نتیجه، پاراگراف دوم حکم پیش‌زمینه را برای پاراگراف بعدی خود دارد.

۳ـ گزینه «۱» در جملات ابتدایی پاراگراف اول آشکارا درهم تنیده و پیوسته بودن ابعاد فضا و زمان مطرح شد.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۲): هدف متن بررسی امکان‌پذیری تغییر دادن پارامتر زمان بود و در انتها هم به نتیجه‌ای دال بر غیرممکن‌بودن آن نرسید.

بررسی گزینه (۳): در جملات ابتدایی پاراگراف اول آشکارا از مستقل نبودن مفاهیم فضا و زمان از یکدیگر صحبت شد.

بررسی گزینه (۴): در مورد این موضوع در متن چیزی نیامده است.

۴ـ گزینه «۳» در پاراگراف سوم از تمثیل «گلوله‌ی فلزی روی یک صفحه» برای نشان‌دادن تأثیر جرم (خورشید) بر فضا ـ زمان استفاده شد. پس منظور عبارت «هنوز گلوله‌ی فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید» این است که هنوز خورشید، فضا ـ زمان را خمیده نکرده و تأثیر خود را نگذاشته است.

پاسخ سؤالات متن (۲)

۵ـ گزینه «۲» در جمله‌ی انتهایی پاراگراف اول آورده شده است که ابعاد توربین اندازه‌های استاندارد ندارد و مهندسان بر اساس شرایط هر منطقه آن‌ها را طراحی می‌کنند. پس گزینه (۲) صحیح است.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): در مورد مکانیزم تبدیل انرژی در توربین‌ها در این دو پاراگراف مطلبی نیامده است.

بررسی گزینه (۳): در پاراگراف اول به ارتباط طول پره با بادخیز بودن منطقه اشاره شده است نه ارتفاع میله. همچنین به معکوس یا مستقیم بودن این وابستگی نیز اشاره‌ای نشده است.

بررسی گزینه (۴): در انتهای پاراگراف دوم به وضوح از مقرون به‌صرفه‌تر بودن توربین‌های افقی صحبت شده است.

۶ـ گزینه «۴» در پاراگراف سوم آمده است که بسته به اطلاعات دریافتی توسط بادسنج‌ها، پروانه‌ها به سمت موافق باد تغییر جهت می‌دهند.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): عملکرد توربین‌ها تغییر نمی‌کند.

بررسی گزینه (۲): قابلیت اتصال به اینترنت یک قابلیت جانبی برای بادسنج است نه حیاتی.

بررسی گزینه (۳): در متن اشاره‌ای به نقش حفظ تعادل برای بادسنج‌ها نشده است.

۷ـ گزینه «۱»

بررسی گزینه (۲): فرآیند تبدیل انرژی در توربین‌ها در متن بیان شده است.

بررسی گزینه (۳): عملکرد بادسنج‌ها در پاراگراف سوم توصیف شده است.

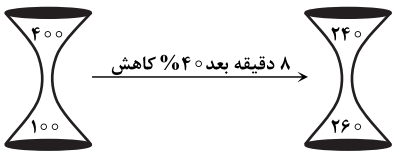
بررسی گزینه (۴): در پاراگراف دوم درباره‌ی شباهت‌ها و اختلافات توربین‌های بادی افقی و عمودی صحبت شده است.

۸ـ گزینه «۴» از آن جایی که جمله‌ی مطرح‌شده در سؤال مربوط به قسمت بعد از تبدیل انرژی جنبشی به الکتریکی در توربین است، پس جای درست آن [۴] می‌باشد. در قسمت‌های سایر گزینه‌ها هنوز صحبتی از تولید برق نشده است.

بخش دوم: حل مسئله

۹ـ گزینه «۴» سؤال نسبتاً راحتی است! در هر دسته، ضرب دو عدد باید برابر با مجموع دو عدد دیگر شود. مثلاً در دسته سمت چپ از بالا $۳\times۷=۱۰+۱۱$ و یا در دسته سمت راست از بالا $۵\times۴=۱۸+۲$ است. بنابراین به جای علامت سؤال باید عدد ۷ قرار گیرد تا تساوی $۷\times۲=۹+۵$ برقرار شود.

۱۰ـ گزینه «۲»



روش اول: با یک سؤال نسبت و تناسب ساده روبه‌رو هستیم. برای درک بهتر فرض می‌کنیم که داخل ساعت شنی ۵۰۰ عدد شن باشد! فراموش نکنیم که در ساعت شنی، به شرطی می‌توان به طور دقیق زمان را مشخص کرد که همه‌ی شن‌ها در یک قسمت آمده باشد. اگر فرض کنیم نسبت تعداد شن‌های بالا به پایین ۴ به ۱ است، مطابق شکل مقابل داریم:

پس از ۸ دقیقه، ۴۰% از شن‌های بالا به پایین می‌ریزد، یعنی ۱۶۰ شن. پس می‌توان گفت در هر ۸ دقیقه ۱۶۰ شن از بالا به پایین می‌ریزد.

شن	دقیقه
۱۶۰	۸
۵۰۰	t

$$\Rightarrow t=\frac{۵۰۰\times۸}{۱۶۰}=۲۵$$

پس کلاً ۲۵ دقیقه را می‌توان با این ساعت شنی مشخص کرد. از بین گزینه‌ها تنها می‌توان گزینه‌ای به طور قطع با این ساعت شنی مشخص کرد که مضرب ۲۵ باشد.

گزینه ۱) یک ساعت و نیم = ۹۰ دقیقه
گزینه ۲) یک ساعت و ربع = ۷۵ دقیقه ✓
گزینه ۳) ۵۵ دقیقه
گزینه ۴) ۴۰ دقیقه

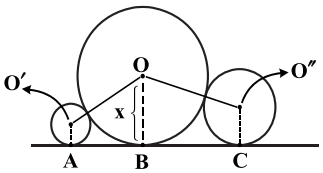
روش دوم: اگر کل شن‌های موجود در ساعت را w فرض کنیم، ۸ دقیقه طول می‌کشد تا ۴۰% از $\frac{۴}{۵}w$ انجام شود (اگر کل کار را w در نظر بگیریم، ۴ واحد آن در قسمت بالا و یک واحد آن در قسمت پایین است. یعنی $\frac{۴}{۵}w$ در قسمت بالاست و $\frac{۱}{۵}w$ در قسمت پایین ساعت است). می‌توانیم تناسب زیر را در نظر بگیریم:

حجم‌کار	مدت زمان لازم (دقیقه)
$\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴}{۵}w$	۸
w	t

$$\Rightarrow t=\frac{۸\times w}{\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴}{۵}w}=\frac{۵۰۰\times۸}{۴\times۴۰}=۲۵$$

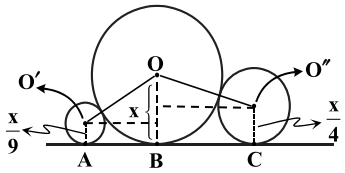
یعنی کل کار در ۲۵ دقیقه انجام می‌شود. ما همه‌ی شن‌های ساعت را w فرض کردیم. پس ۲۵ دقیقه را می‌توان با این ساعت شنی دقیق تعیین کرد. پس گزینه‌ای صحیح است که مضرب ۲۵ دقیقه باشد و گزینه (۲) صحیح است.

۱۱ـ گزینه «۱» در این‌گونه سؤالات، معمولاً به‌طور خودکار باید نقاط مهم را به هم اتصال داد! نقاط مهم یعنی مراکز دایره‌ها به یکدیگر و همین‌طور مرکز هر دایره به خط مماس بر آن، بعد از آن باید دنبال راه‌حل باشیم. فرض کنیم شعاع دایره بزرگ x باشد، طبق صورت سؤال شعاع دایره کوچک $\frac{x}{۹}$ و شعاع دایره متوسط هم برابر $\frac{x}{۴}$ می‌شود.



با رسم کردن مراکز متوجه می‌شویم که OO' برابر با $x+\frac{x}{۹}=\frac{۱۰}{۹}x$ و $OO''=x+\frac{x}{۴}=\frac{۵}{۴}x$ است.

خُب دیگر چیزی از صورت سؤال نداریم و این یعنی باید با همین اطلاعات به مسئله جواب دهیم! اما خواسته‌ی سؤال چیست؟ طراح سؤال، نسبت BC به AB را خواسته است یعنی مقدار $\frac{BC}{AB}$ مدنظر است. حالا خوب به شکل دقت کنید؛ آیا می‌توان BC و AB را هر کدام جداگانه حساب کرد و سپس مقدار عددی $\frac{BC}{AB}$ را معلوم کرد؟ به نظر نمی‌رسد بتوان چنین کاری کرد؛ اما اگر BC و AB را برحسب x به‌دست بیاوریم، آن‌گاه می‌توان نسبت خواسته شده را به راحتی معلوم کرد، اما چگونه!؟



اگر در هر دو ذوزنقه راست و چپ دو خط موازی BC و AB از محل مرکز دایره‌های راست و چپ رسم کنیم، شکل مقابل را داریم:

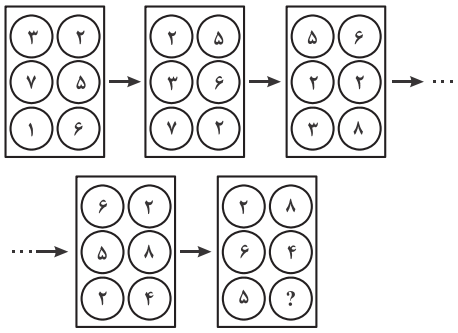
بخش دوم: حل مسئله

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمّی، شامل مقایسه‌های کمّی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و ... تشکیل شده است.

• توجه داشته باشید به‌خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

راهنمایی: هرکدام از سؤال‌های ۹ تا ۱۳ را به‌دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۹ـ در پنج شکل متوالی و پشت‌سرهم زیر، ارتباط خاص و یکسانی بینِ اعداد برقرار است. به‌جای علامت سؤال، کدام عدد زیر باید قرار بگیرد؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۰ـ سعید مسافتی را که با برداشتن ۱۶ قدم به‌صورت دویدن طی می‌کند، همان مسافت را به‌صورت پیاده‌روی، با ۲۶ قدم می‌پیماید. اگر او مسیر خانه به پارک محله‌شان را به‌صورت دویدن طی کند، ۴۰ قدم برمی‌دارد. حال اگر سعید می‌خواست قسمتی از همین مسیر را به‌جای دویدن، پیاده طی کند، تعداد قدم‌هایش در مجموع، ۱/۵ برابر می‌شد. در این حالت، وی چند درصد از این مسیر را باید می‌دوید؟

۱) ۱۳/۳ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۱ـ مقوایی مستطیل‌شکل که مربع نیست، در اختیار داریم. مطابق شکل زیر، با دو برش از روی نقطه‌چین‌ها، دو مستطیل یکسان جدا می‌کنیم، به‌طوری‌که از کنارِ هم قرار گرفتن سه قطعه A، B و C، یک مربع حاصل شود. مساحت مستطیل A، چند برابر مساحت مستطیل B است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲ـ تعدادی دانش‌آموز، روی محیط دایره‌ای بزرگ، وسط حیاط مدرسه‌شان ایستاده و دست‌های یکدیگر را گرفته‌اند. با خروج ۲ نفر غیرمجاور از آنها، دانش‌آموزان به دو دسته به نسبت ۲ به ۵ تقسیم می‌شوند. سپس، اگر یک دانش‌آموزِ دیگر از دسته بزرگ‌تر خارج شود، همین دسته نیز، به دو دسته به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌شود. حداقل تعداد دانش‌آموزان در ابتدا، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۳ ۲) ۳۷ ۳) ۵۱ ۴) ۹۳

۱۳ـ هرکدام از حروف A، B، C، D، E و F، به‌طور متمایز، معادل یکی از اعداد ۱ تا ۶ (نه لزوماً به‌ترتیب) است، به‌طوری‌که روابط زیر برقرار باشند. میانگین A و E کدام است؟

$$A+B=7$$
$$B\times D=A+F$$
$$C-F=E+F$$

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

راهنمایی: هرکدام از سؤال‌های ۱۴ و ۱۵، شامل دو مقدار یا کمیت هستند، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورالعمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

- اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۱ را علامت بزنید.
- اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۲ را علامت بزنید.
- اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه گزینه ۳ را علامت بزنید.
- اگر براساس اطلاعات داده‌شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بینِ مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه گزینه ۴ را علامت بزنید.

۱۴ـ سه پروژه برای آسفالت کردن سه جاده A، B و C، همزمان با هم کلید می‌خورند. مجموع طول جاده‌های B و C به اندازه طول جاده A است و کار در هر سه پروژه به‌طور یکنواخت پیش می‌رود.

الف	ب
مدت‌زمانی که باید از شروع پروژه‌ها بگذرد تا مسافت آسفالت‌نشده جاده B، نصف مسافت آسفالت‌نشده جاده A باشد.	چهار برابر مدت‌زمانی که باید از شروع پروژه‌ها بگذرد تا کار آسفالت کردن جاده C تمام شود.

۱۵ـ رضا از هرکدام از اسکناس‌های ۲، ۵ و ۱۰ هزارتومانی، ۳ عدد (مجموعاً ۹ اسکناس) دارد.

الف	ب
حداقل مبلغی که می‌توان از رضا طلب کرد که وی برای پرداخت آن مجبور باشد از هر نوع اسکناس، حداقل یک عدد بدهد.	حداقل مبلغی که رضا می‌تواند توسط ۶ اسکناس که حداقل یکی از آنها ۱۰ هزارتومانی باشد، بپردازد.

بخش سوم: سؤالات تحلیلی

■ **راهنمایی:** در این بخش، توانایی تحلیلی شما مورد سنجش قرار می‌گیرد. سؤال‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.

راهنمایی: با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۱۶ تا ۱۹ پاسخ دهید.

چهار مریض به نام‌های A، B، C و D، به‌ترتیب، به‌صورت تلفنی، یکی از نوبت‌های ۱ تا ۴ را برای بعدازظهر یک روز مشخص در یک مطب دندانپزشکی رزرو کرده‌اند. در روز موردنظر، افراد با ترتیبی (که لزوماً ترتیب نوبت رزروشان نیست)، وارد مطب می‌شوند و تا زمانی‌که نوبتشان برسد، در سالن انتظار مطب می‌نشینند. اطلاعات زیر موجود است:

- دومین نوبت رزروشده، مربوط به B نیست.
- کسی که دقیقاً بعد از A وارد مطب شده، نوبتش زودتر از A است.
- آخرین نفری که وارد مطب شده، B را می‌بیند که به تنهایی در مطب نشسته است.
- D، آخرین نفر واردشده به مطب نیست.

۱۶ـ A، بعد از چه کسی می‌تواند وارد مطب شده باشد؟

۱) D ۲) C
۳) B ۴) A، همواره اولین کسی است که وارد مطب شده است.

۱۷ـ اگر سومین نفر واردشده به مطب، آخرین نوبت را داشته باشد، کدام مورد زیر، صحیح است؟

۱) سومین نفر واردشده به مطب، D بوده است. ۲) اولین نفر واردشده به مطب، دومین نوبت را داشته است.
۳) دومین نفر واردشده به مطب، سومین نوبت را داشته است. ۴) چهارمین نفر واردشده به مطب، چهارمین نوبت را داشته است.

۱۸ـ اگر اولین نفر واردشده، آخرین نوبت را داشته باشد، دومین نفر واردشده به مطب، چه کسی است؟

۱) D ۲) C ۳) B ۴) A

۱۹ـ کدام فرد، به‌طور قطع، مشخص است که چندمین نفرِ واردشده به مطب است؟

۱) C ۲) A ۳) B ۴) D

۱۰ـ گزینه «۳» مسلماً زمانی که سعید پیاده‌روی می‌کند نسبت به زمانی که می‌دود، طول قدم‌های او کوتاه‌تر و تعداد قدم‌ها بیشتر می‌شود. با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال داریم:

$$\begin{matrix} x & ۱۶ \text{ دویدن} \\ ؟ & ۲۶ \text{ پیاده‌روی} \end{matrix} \Rightarrow ؟ = \frac{۲۶}{۱۶}x$$

اگر قسمتی از مسیر را که به جای دویدن، پیاده طی می‌کند x بنامیم، خواهیم داشت:

$$\text{۴۰ قدم دویدن حالت اول} \begin{cases} ۴۰-x & \text{قدم دویدن} \\ x & \text{قدم پیاده‌روی به جای دویدن} \end{cases} = \frac{۲۶}{۱۶}x \quad \text{قدم پیاده‌روی}$$

در نهایت تعداد قدم‌های طی‌شده که ۱/۵ برابر حالت قبل می‌شود برابر است با:

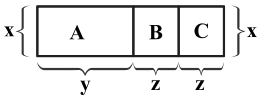
$$(۴۰-x)+\frac{۲۶}{۱۶}x = ۱/۵\times ۴۰ \Rightarrow x = ۳۲$$

در نتیجه این مسیر را $۴۰-x = ۸$ قدم دویدن و $\frac{۲۶}{۱۶}x = ۵۲$ قدم پیاده‌روی طی می‌کند $(۸+۵۲=۶۰)$.

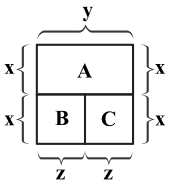
بنابراین مقدار درصد دویدن در حالت دوم برابر است با:

$$\frac{۸}{۴۰}\times ۱۰۰ = \%۲۰$$

۱۱ـ گزینه «۲» با توجه به اطلاعات داده‌شده، مساحت B و C برابر است. در نتیجه با توجه به شکل می‌توان گفت:

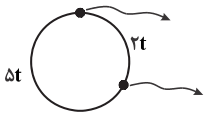


اکنون A و B و C یک مربع تشکیل می‌دهند که می‌توانند به شکل زیر قرار گیرند:



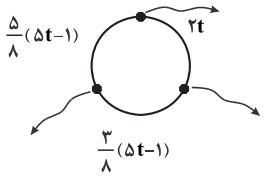
$$y = ۲z \quad \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \frac{xy}{xz} = \frac{y}{z} = ۲$$

۱۲ـ گزینه «۲» اگر دو دانش‌آموز غیرمجاور از صف خارج شوند، نسبت دانش‌آموزان باقی‌مانده ۲ به ۵ می‌شود. پس می‌توان گفت:



دایره به دو قسمت که یک طرف تعداد افراد ۲t است و در طرف دیگر ۵t تقسیم می‌شود.

و اگر از دسته بزرگ‌تر یک نفر خارج شود، نسبت دانش‌آموزان باقی‌مانده این دسته ۳ به ۵ می‌شود.



از ۵t ابتدا یک نفر خارج می‌شود پس $۵t-۱$ نفر باقی می‌ماند و سپس $(۵t-۱)$ به نسبت ۳ و ۵ تقسیم می‌شوند.

بر این اساس می‌توان گفت:

$$\text{تعداد کل دانش‌آموزان} = ۲t+۵t+۲ = ۷t+۲$$

همچنین $۵t-۱$ باید مضرب ۸ باشد

$$۸ \mid ۵t-۱ = ۸,۱۶,۲۴,۳۲,\ldots$$

برای به‌دست آوردن تعداد حداقل دانش‌آموزان باید از رابطه دوم، حداقل مقدار t را به‌دست آورد.

بر این اساس حداقل t به‌ازای ۲۴ به‌دست می‌آید.

$$۸ \mid ۵t-۱ = ۲۴ \Rightarrow t = ۵$$

در نتیجه داریم:

$$\text{تعداد کل دانش‌آموزان} = ۷t+۲ \xrightarrow{t=۵} ۳۷$$

۱۳ـ گزینه «۳» با توجه به اطلاعات داده‌شده می‌توان گفت:

$$A+B = ۷ \Rightarrow \{A,B\} = \{۱,۶\} \text{ یا } \{۲,۵\} \text{ یا } \{۳,۴\}$$

$$C-F = E+F \Rightarrow C = E+۲F \xrightarrow{\text{C از ۶ نمی‌تواند بیشتر باشد}} F = ۱ \text{ یا } ۲$$

اکنون به‌ازای $F = ۱$ داریم:

$$F = ۱ \Rightarrow C = E+۲ \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} F & E & C & A,B & D \\ ۱ & ۲ & ۴ & \text{غ ق ق} & - \\ ۱ & ۳ & ۵ & \text{غ ق ق} & - \\ ۱ & ۴ & ۶ & \{۲,۵\} & ۳ \end{array} \xrightarrow{\text{از رابطه دوم}} B = ۲, A = ۵$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{A+E}{۲} = \frac{۵+۴}{۲} = ۴/۵$$

۱۴ـ گزینه «۴» طول جاده‌ها را با L و مدت زمان انجام پروژه‌ها را با t نمایش می‌دهیم، در نتیجه داریم: $L_A = L_B + L_C$

چون پروژه‌ها یکنواخت انجام می‌شود، داریم: $t_A = t_B + t_C$

الف) اگر این مدت زمان را برابر t در نظر بگیریم:

$$t_B \quad L_B$$

$$t \quad ? \Rightarrow ? = L_B \frac{t}{t_B} \Rightarrow \text{طول جاده آسفالت‌نشده } B = L_B(1-\frac{t}{t_B})$$

$$\text{به‌طور مشابه} \Rightarrow \text{طول جاده آسفالت‌نشده } A = L_A(1-\frac{t}{t_A})$$

$$L_B(1-\frac{t}{t_B}) = \frac{1}{2}L_A(1-\frac{t}{t_A})$$

$$t = \left|\frac{(L_A - 2L_B)\,t_B t_A}{2L_B t_A - t_B L_A}\right| \xrightarrow{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } t_B} t = \frac{|(L_A - 2L_B)|}{|2L_B\frac{t_A}{t_B} - L_A|} \times t_A \Rightarrow t = \frac{|(2L_B - L_A)|}{|2L_B\frac{t_A}{t_B} - L_A|} \times t_A$$

$$\xrightarrow[\frac{t_A}{t_B}>1]{t_A > t_B} t = k \times t_A \qquad k < 1 \Rightarrow t < t_A$$

$$(\frac{t_A}{t_B} > 1 \rightarrow |2L_B\frac{t_A}{t_B} - L_A| > |2L_B - L_A| \Rightarrow k < 1)$$

ب) این مدت زمان برابر $4t_C$ است.

مقدار الف کمتر از t_A است و مقدار ب هم مشخص نیست که از t_A، کمتر و یا بیشتر و یا حتی مساوی است. مبنایی برای مقایسه الف و ب نداریم.

۱۵ـ گزینه «۱»

الف) با اسکناس‌های داده‌شده می‌توان مبلغی از ۶ تا حداکثر ۵۱ تومان را پر کرد. از مبالغ ۶ تا ۲۱ را می‌توان بدون استفاده از اسکناس ۱۰ تومانی پر کرد. به استثنای ۸ و ۱۳ و ۱۸ که با اسکناس‌های ذکرشده نمی‌توان پر کرد.

		مبلغ
غ ق ق	۲ تا ۱۰، یکی ۲ ×	۲۲ →
	با این اسکناس‌ها نمی‌توان پر کرد.	۲۳ →
غ ق ق	۲ تا ۱۰ تومانی، ۲ تا ۲ تومانی	۲۴ →
غ ق ق	یکی ۱۰ تومانی، ۳ تا ۵ تومانی ۲ تا ۱۰ تومانی، یکی ۵ تومانی	۲۵ →
غ ق ق	۲ تا ۱۰ تومانی، ۳ تا ۲ تومانی یکی ۱۰ تومانی، ۲ تا ۵ تومانی، ۳ تا ۲ تومانی	۲۶ →
ق ق	۲ تا ۱۰ تومانی، یکی ۵ و یکی ۲ تومانی یکی ۱۰ تومانی، ۳ تا ۵ تومانی، یکی ۲ تومانی	۲۷ →

حداقل مبلغ = ۲۷ تومان

ب) برای حداقل کردن مبلغ، سعی می‌کنیم تا آنجا که ممکن است تعداد اسکناس‌های ۱۰ تومانی را با همان یک عدد نگه داریم، ۵ اسکناس باقی‌مانده را باید به اسکناس‌های ۲ تومانی و ۵ تومانی اختصاص دهیم، در ۳ اسکناس اول منطقی است با اسکناس ۲ تومانی پر شود. برای اسکناس چهارم ۵ تومانی را در نظر می‌گیریم، برای اسکناس پنجم هم منطقی است که اسکناس ۵ تومانی را در نظر بگیریم تا ۱۰ تومانی را!

۱۰ ۵ ۲
۵ ۲
۲

۶ + ۱۰ + ۱۰ = ۲۶

همان‌طور که دیدیم مقدار ستون الف بیشتر از ب است. در نتیجه گزینه (۱) درست است.

بخش سوم: سؤالات تحلیلی

– اطلاعات مسئله: چهار مریض به نام‌های A، B، C و D، یکی از نوبت‌های ۱ تا ۴ مطبی را رزرو کرده و از اولین تا چهارمین نفر وارد مطب می‌شوند.

– قیدهای مسئله: ۱) دومین نوبت رزروشده مربوط به B نیست.

۲) کسی‌که بعد از A وارد مطب شده نوبتش زودتر از A است ← A آخرین نفر نیست.

۳) آخرین فردی که وارد مطب شده B را می‌بیند که به تنهایی نشسته ← B آخرین نفر نیست.

۴) D آخرین نفر واردشده به مطب نیست.

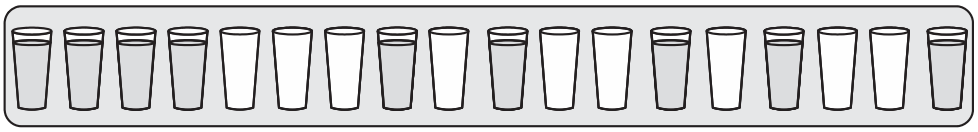
نتیجه‌گیری: آخرین نفر واردشده به مطب C است و جایگاه او به‌طور قطع مشخص است.

بخش چهارم: تجسمی

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، سؤال‌هایی از نوع تجسمی را شامل می‌شود. هریک از سؤال‌های ۲۴ تا ۳۰ را به‌دقت بررسی نموده و جواب صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.

راهنمایی: در سؤال ۲۴، ۱۸ عدد لیوان که برخی خالی (لیوان‌های سفید) و برخی پر (لیوان‌های تیره) هستند، مطابق شکل زیر، داده شده است. اگر خالی کردن تمام محتویات یک لیوان پر در هرکدام از لیوان‌های خالی، یک حرکت محسوب شود، با حداقل چند حرکت می‌توان کاری کرد که لیوان‌ها، یک‌درمیان، خالی و پر باشند؟

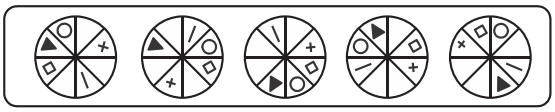
۲۴ـ

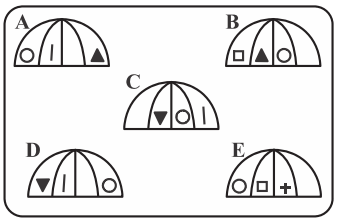


۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

در سؤال ۲۵، شکل بالایی، نمای از بالای ۵ چترِ باز و شکل پایینی، نمای از کنارِ ۵ چترِ باز را نشان می‌دهد. در شکل پایین، تنها سه چتر می‌توانند نمای از کنارِ یکی از چترهای بالا باشند. این سه شکل، کدام‌اند؟

۲۵ـ

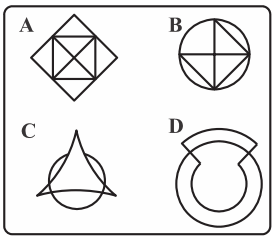




۱) A، C و E ۲) A، B و E ۳) A، C و D ۴) B، D و E

راهنمایی: در سؤال ۲۶، ۴ الگو نمایش داده شده است. کدام‌یک از این ۴ الگو را نمی‌توان بدون برداشته شدن خودکار از روی کاغذ رسم کرد، طوری‌که از روی هر قسمت (مگر نقاط)، فقط یک بار عبور کند؟

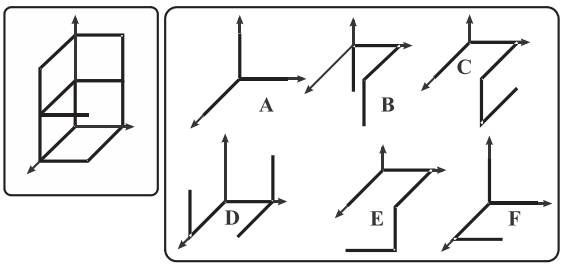
۲۶ـ



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

راهنمایی: در سؤال ۲۷، در سمت چپ، یک الگوی سه‌بُعدی و در سمت راست، ۶ سازه که با میله‌های مشابه ساخته شده‌اند را مشاهده می‌کنید. شکل سه‌بُعدی سمت چپ، از کنار هم قرار گرفتن کدام‌یک از سازه‌های سمت راست، قابل ساخت است؟

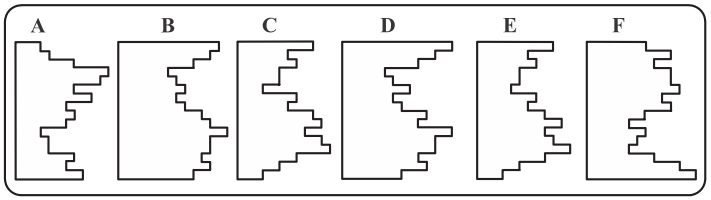
۲۷ـ



۱) D و C، A
۲) F و E، B
۳) F و B، A
۴) E و D، B

راهنمایی: در سؤال ۲۸، از کنار هم قرار گرفتن کدام دو قطعه زیر، یک مربع کامل تشکیل می‌شود؟

۲۸ـ



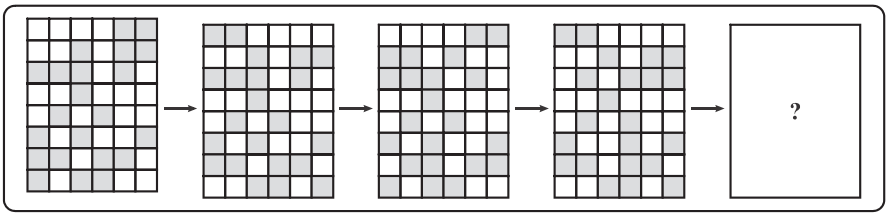
۱) E و B
۲) F و C
۳) F و A
۴) D و C

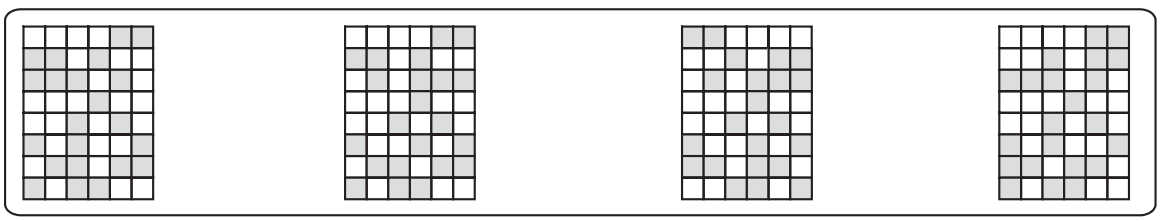
۲۹ـ در یک مکعب‌مستطیل به ابعاد ۶ در ۵ در ۴ سانتی‌متر، حداکثر چند مکعب‌مربع ۱ در ۱ در ۱ سانتی‌متر جا می‌شود، به‌شرطی که مکعب‌های کوچک، هیچ تماسی با هم نداشته باشند، مگر از رئوس؟

۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۳۶

راهنمایی: در سؤال ۳۰، در ردیف بالا، از چپ به راست، الگوها با روندی خاص تغییر می‌کنند. کدام الگو (موارد ۱ تا ۴)، به‌جای علامت سؤال قرار گیرد تا این روند، همچنان ادامه یابد؟

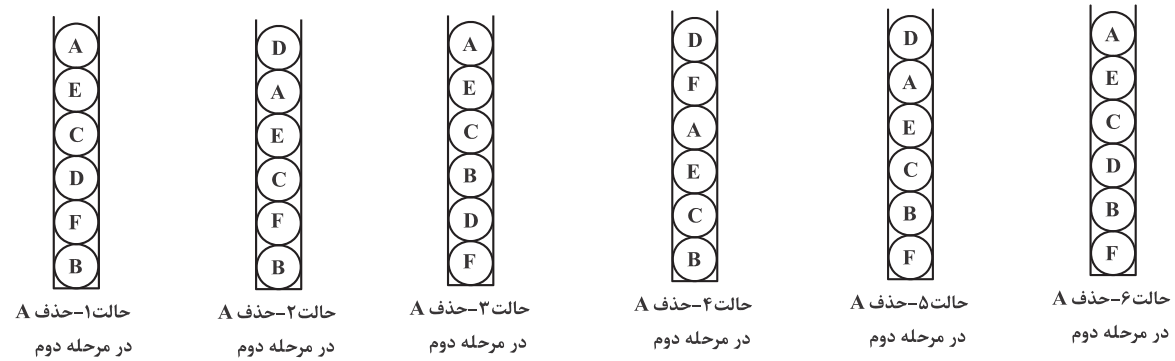
۳۰ـ





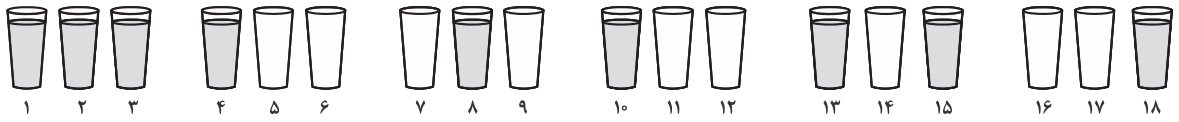
(۱) (۲) (۳) (۴)

توضیح حالت ۶: در این حالت نسبت به حالت ۳ و ۱ بین C و F و B جابه‌جایی صورت داده‌ایم که C در مرحله ۱ تکان نمی‌خورد و B در هر دو مرحله بدون تکان باقی می‌ماند و در آخر D و F جزو سه توپ آخر باقی می‌مانند.



بخش چهارم: تجسمی

۲۴ـ گزینه «۴» اگر لیوان‌ها را از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۱۸ شماره‌گذاری کنیم داریم:



قرار است با انتقال آب بین لیوان‌ها، لیوان‌های پر و خالی یکی در میان کنار هم قرار گیرند. بنابراین یا لیوان‌های زوج پر هستند و لیوان‌های فرد خالی یا لیوان‌های زوج خالی‌اند و لیوان‌های فرد پر.

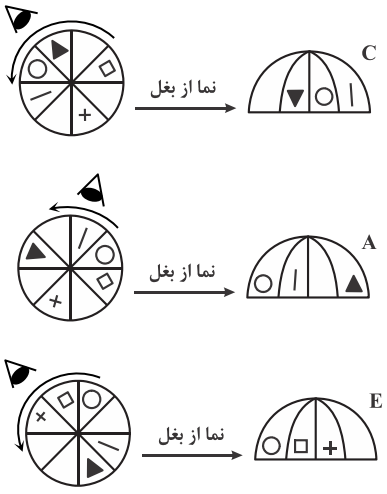
۲,۴,۸,۱۰,۱۸: لیوان‌های با شماره زوج و پر

۱,۳,۱۳,۱۵: لیوان‌های با شماره فرد و پر

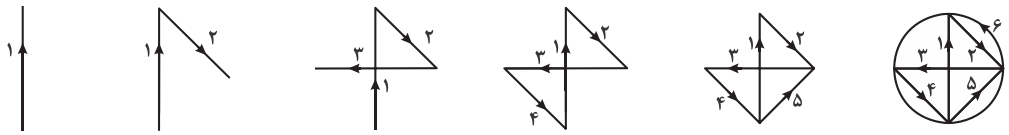
تعداد لیوان‌های پر و زوج از لیوان‌های فرد و پر بیشتر است، بنابراین به صرفه‌تر است لیوان‌های زوج پر و لیوان‌های فرد خالی باشند، پس با خالی کردن محتویات لیوان‌های ۱ و ۳ و ۱۳ و ۱۵ در لیوان‌های زوج و خالی ۶ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و جمعاً ۴ حرکت لیوان‌های زوج و فرد یکی در میان قرار می‌گیرند.

در صورتی که می‌خواستیم لیوان‌های زوج خالی و فرد پر باشند، نیاز بود محتویات لیوان‌های ۲، ۴، ۸، ۱۰ و ۱۸ را در لیوان‌های ۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۱۷ بریزیم که ۵ حرکت می‌شد.

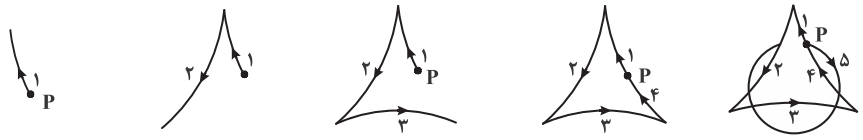
۲۵ـ گزینه «۱» با کمی دقت به سؤال می‌توان دریافت که درواقع اگر نمای از کنار (که در شکل مقابل نمونه‌هایی از آن آمده) را از چپ به راست ببینیم، معادل آن است که نمای از بالا را به صورت پادساعتگرد ببینیم. با توجه به این موضوع اشکال A، C و E قابل مشاهده هستند و پاسخ گزینه (۱) می‌باشد.



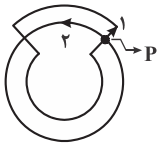
۲۶ـ گزینه «۱» شکل B را ۶ مرحله می‌توان کشید.



شکل C را با شروع از نقطه P می‌توان در ۵ مرحله کشید.



شکل D را می‌توان در ۲ مرحله کشید (با شروع از نقطه P) (مرحله ۱ شروع از شکل رویی و مرحله ۲ کشیدن دایره).



روش دیگر: در هر شکل هندسی محل تقاطع خطوط را گره می‌نامیم و تعداد خطوط متصل به هر گره را درجه. به عنوان مثال در شکل با گره‌ای با درجه ۵ روبرو هستیم. اگر درجه هر گره زوج باشد به ازای هر بار ورود می‌توانیم خروج هم داشته باشیم. پس در گره‌های با درجه زوج نیازی به برداشتن قلم از روی کاغذ نیست. می‌توان نشان داد که به ازای هر دو گره با درجه فرد باید یکبار قلم از کاغذ جدا شود. آخرین نقطه‌ای که قلم از کاغذ جدا می‌شود (پس از اتمام رسم شکل) نیز در محاسبات لحاظ نمی‌شود.

$$\text{تعداد کمترین دفعاتی که کاغذ باید از قلم جدا شود} = \left[\frac{\text{۱− تعداد گوی‌های درجه فرد}}{۲}\right]$$

$$\text{شکل A : تعداد رئوس درجه فرد} = ۴ \Rightarrow \left[\frac{۴-۱}{۲}\right] = ۱$$

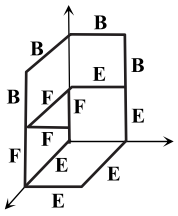
$$\text{شکل B : تعداد رئوس درجه فرد} = ۲ \Rightarrow \left[\frac{۲-۱}{۲}\right] = ۰$$

$$\text{شکل C : تعداد رئوس درجه فرد} = ۰$$

$$\text{شکل D : تعداد رئوس درجه فرد} = ۰$$

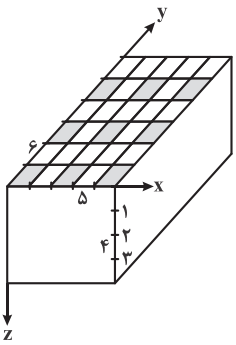
پس جواب گزینه (۱) است.

این تست مشابه تست۳۲ سراسری ۹۵ رشته MBA است.

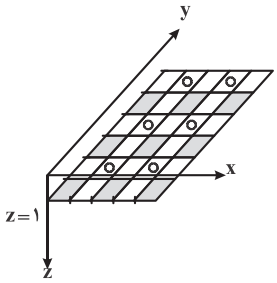


۲۷ـ گزینه «۲» شکل نهایی از ۱۳ میله ساخته شده است که با توجه به این مطلب گزینه (۳) با داشتن ۱۱ میله و گزینه (۴) با داشتن ۱۴ میله حذف می‌شود. تنها گزینه (۱) و (۲) دارای ۱۳ میله هستند. در گزینه(۱)، A و D بخشی از شکل را می‌سازند؛ اما C با شکل مطلوب مطابقت ندارد و حالت خواسته شده را نمی‌سازد. این شکل را با B، E و F می‌توان به صورت مقابل ساخت: (توجه شود که طول میله‌ها طبق گفته‌ی صورت سؤال برابر است).

۲۸ـ گزینه «۴» اگر شکل D را ۹۰° در جهت پادساعتگرد بچرخانیم برجستگی‌ها و فرورفتگی‌های شکل D و C درهم قرار می‌گیرند. اگر فرض کنیم تنها با چرخش قطعات باید یک مربع ساخته شود، پس در واقع کم یا زیاد شدن طول یک قطعه از بالا باید کاملاً در تناسب با زیاد یا کم شدن طول قطعه‌ی دیگر از پایین باشد تا یک مربع ساخته شود. بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد.



۲۹ـ گزینه «۳» وجه بالایی مکعب مستطیل را به مربع‌های ۱×۱ تقسیم کردیم. مکعب مربع‌هایی را در نظر بگیرید که وجه بالایی آن‌ها روی وجه بالایی مکعب مستطیل قرار دارد و وجه پایینی آن‌ها در $z=1$. این مکعب‌ها نباید با هم تماس داشته باشند، بنابراین برای حداکثر کردن تعداد مکعب‌ها باید وجوه بالایی آن‌ها به صورتی باشد که با هاشور نشان داده شده است. یعنی جمعاً ۹ مکعب.



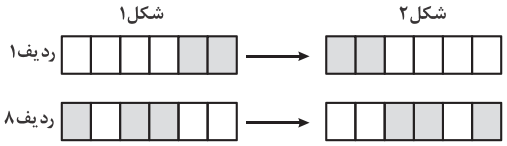
حال مکعب‌هایی را در نظر بگیرید که وجه بالایی آن‌ها روی $z=1$ و وجه پایینی آن‌ها روی $z=2$ قرار دارد و با مکعب‌های بالایی تنها در رئوس مشترک است، بنابراین وجه بالایی آنها در $z=1$ باید به صورت زیر باشد، یعنی جمعاً ۶ مکعب (وجه پایینی مکعب‌های مرحله پیش با هاشور و وجه بالایی مکعب‌های این مرحله با دایره مشخص شده‌اند).

برای مکعب‌هایی که وجه بالایی آن‌ها روی $z=2$ و وجه پایینی آنها روی $z=3$ قرار دارد، وضعیت مشابه مکعب‌هایی است که وجه بالای آنها روی $z=0$ قرار دارد یعنی جمعاً ۹ مکعب و در نهایت برای مکعب‌هایی که وجه بالایی آن‌ها روی $z=3$ و وجه پایینی آن‌ها روی $z=4$ قرار دارد وضعیت مشابه مکعب‌هایی است بین $z=1$ و $z=2$ قرار دارند یعنی تعداد آنها ۶ عدد است.

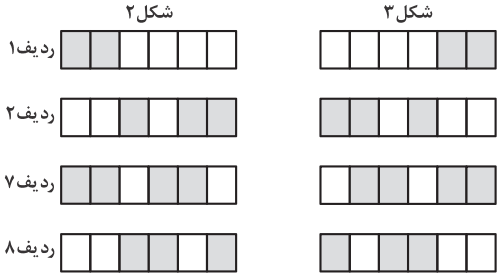
کل مکعب‌ها $= ۹+۶+۹+۶=۳۰$

۳۰ـ گزینه «۴» شکل‌ها را از چپ به راست با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نشان می‌دهیم.

در روند تغییر شکل ۱به ۲، همه ردیف‌ها ثابت و فقط ردیف ۱ و ردیف ۸ تصویر آینه‌ای شده است.



در روند تغییر شکل ۲ به شکل ۳، ردیف ۱ و ۲ و ۷ و ۸ تصویر آینه‌ای شده‌اند.



و در روند تغییر شکل ۳ به شکل ۴، ردیف‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۸ از شکل ۳ آینه‌ای شده‌اند، بنابراین انتظار می‌رود در شکل ۴ تمام ردیف‌ها تصویر آینه‌ای شوند که این تنها در گزینه (۴) آمده است.

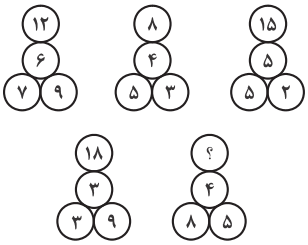
بخش دوم: حل مسئله

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمّی، شامل مقایسه‌های کمّی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حلّ‌مسئله و...، تشکیل شده است.

• توجه داشته باشید به‌خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

راهنمایی: هرکدام از سؤال‌های ۹ تا ۱۳ را به دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۹ـ در هرکدام از اشکال زیر، بینِ اعداد ارتباط خاص و یکسانی برقرار است. به‌جای علامت سؤال، کدام عدد زیر باید قرار بگیرد؟



۱) ۱۶
۲) ۱۵
۳) ۱۲
۴) ۹

۱۰ـ دو مقوای مستطیل‌شکل با مساحت یکسان، یکی با نسبت اضلاع ۲ به ۳ و دیگری با نسبت اضلاع ۳ به ۵ در اختیار داریم. از هرکدام از مستطیل‌ها، بزرگ‌ترین مربع ممکن را جدا کرده و تکه‌های باقی‌مانده را نگه می‌داریم. نسبت مساحت تکه‌های باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۵ به ۶
۲) ۴ به ۵
۳) ۳ به ۴
۴) به‌طور قطع نمی‌توان تعیین کرد.

۱۱ـ یک ساعت عقربه‌ای، کدام‌یک از چهار زمان زیر را باید نشان دهد، تا زاویه کوچک‌تر بینِ دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار این ساعت، بیشتر از ۸۰ درجه باشد؟

۱) $3:30'$
۲) $7:25'$
۳) $9:35'$
۴) $11:10'$

۱۲ـ در یک مغازه لوازم‌التحریر فروشی، به ازای هر ۷ خودکار آبی، ۲ خودکار قرمز و به ازای مجموعاً هر ۱۲ خودکار، ۵ مداد فروخته می‌شود. با فروش چند خودکار قرمز، تعداد مدادهای فروخته‌شده ۲۶ عدد از تعداد خودکارهای آبی فروخته‌شده، کمتر است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۴

۱۳ـ پس از بررسی مشخص شده است که ۶۰ درصد دانش‌آموزان یک مدرسه، دارای پدر کارمند، ۸۰ درصد آنها دارای مادر کارمند و ۷۵ درصد آنها در خانواده خود، تک‌فرزند هستند. اگر این مدرسه، ۲۰۰ دانش‌آموز داشته باشد، حداقل چند دانش‌آموز به‌طور قطع، پدر و مادر کارمند دارند و تک‌فرزند هستند؟

۱) ۸۰
۲) ۴۰
۳) ۳۰
۴) صفر

راهنمایی: هرکدام از سؤال‌های ۱۴ و ۱۵، شامل دو مقدار یا کمیّت هستند، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورالعمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه (۱) را علامت بزنید.

اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه (۲) را علامت بزنید.

اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه گزینه (۳) را علامت بزنید.

اگر براساس اطلاعات داده شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بینِ مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه گزینه (۴) را علامت بزنید.

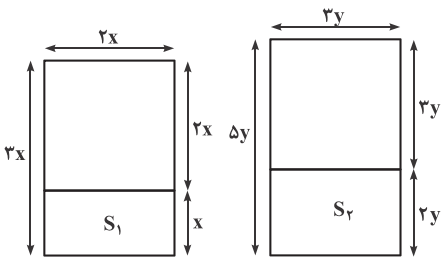
۱۴ـ پدر و پسری روی یک خط راست، به فاصله نامعلوم از یکدیگر ایستاده‌اند. می‌دانیم که مسافت هر ۵ قدم پدر معادل مسافت ۸ قدم پسر است. با شروع حرکت این دو نفر، پدر ۳۲ قدم به سمت پسر برمی‌دارد و پسر ۵۰ قدم به سمت پدر برمی‌دارد و بالاخره، بدون اینکه هیچ‌کدام به نقطه وسط مسیری که در آن در حرکت بوده‌اند رسیده باشند، می‌ایستند.

(الف)	(ب)
فاصله پسر تا نقطه‌ای که پدرش در ابتدا ایستاده بوده است.	فاصله پدر تا نقطه‌ای که پسرش در ابتدا ایستاده بوده است.

۱۵ـ تعداد n نفر که به شماره‌های ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند، پشتِ‌سرهم در یک صف ایستاده‌اند. در مرحله اول، همه افراد می‌نشینند. در مرحله دوم، افراد دارای شماره‌ای با مضرب ۲ می‌ایستند. در مرحله سوم، همه افراد دارای شماره‌ای با مضرب ۳، در هر وضعیتی هستند، حالت خود را تغییر می‌دهند (یعنی، اگر ایستاده‌اند می‌نشینند و اگر نشسته‌اند، می‌ایستند)، در مرحله چهارم، افراد دارای شماره با مضرب ۴ حالت خود را تغییر می‌دهند و این منوال ادامه پیدا می‌کند تا در مرحله نهم، افراد دارای شماره با مضرب ۹، حالت خود را تغییر می‌دهند. n، عددی بینِ ۲۵ تا ۳۰ است.

(الف)	(ب)
تعداد افرادی که نهایتاً ایستاده‌اند.	تعداد افرادی که نهایتاً نشسته‌اند.

۱۰ـ گزینه «۱» دو مستطیل را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



مربع‌ها به شکل مقابل جدا شده‌اند.

$$S_۱ = x \times x = x^۲ \quad , \quad S_۲ = ۳y \times ۲y = ۶y^۲$$

سؤال نسبت $S_۱$ به $S_۲$ را خواسته است:

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۱}{۶}(\frac{x^۲}{y^۲}) = \frac{۱}{۶}(\frac{x^۲}{y^۲})$$

اما برای تعیین نسبت $\frac{x^۲}{y^۲}$ به جمله‌ی اول سؤال توجه می‌کنیم که گفته؛ مساحت هر دو مستطیل یکسان است، پس رابطه زیر را نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$(x)(۳x) = (۳y)(۵y) \Rightarrow ۳x^۲ = ۱۵y^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

بنابراین داریم:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۱}{۶}(۵) = \frac{۵}{۶}$$

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به فرمول زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار زاویه بین هر چهار گزینه را حساب می‌کنیم:

$$\alpha = |۳۰\underset{\downarrow}{h} - ۵/۵\underset{\downarrow}{m}|$$
زاویه ساعت دقیقه

گزینه (۱): $\alpha = |۳۰\times۳ - ۵/۵\times۳۰| = |۹۰ - ۱۶۵| = ۷۵$

گزینه (۲): $\alpha = |۳۰\times۷ - ۵/۵\times۲۵| = |۲۱۰ - ۱۳۷/۵| = ۷۲/۵$

گزینه (۳): $\alpha = |۳۰\times۹ - ۵/۵\times۳۵| = ۷۷/۵$

گزینه (۴): $\alpha = |۳۰\times۱۱ - ۵/۵\times۱۰| = |۳۳۰ - ۵۵| = ۲۷۵$

گزینه‌های (۱) تا (۳) همگی از ۸۰ درجه کوچک‌تر می‌باشند و گزینه‌ی (۴) زاویه‌اش از ۸۰ بیشتر است، البته ۲۷۵درجه زاویه بزرگ‌تر بین عقربه‌ها در ساعت $۱۱:۱۰'$ می‌باشد ولی مشکلی نیست و زاویه کوچک‌تر هم با کم کردن این عدد از عدد ۳۶۰، برابر با $۳۶۰ - ۲۷۵ = ۸۵$ به دست می‌آید که باز هم از ۸۰ درجه بیشتر است.

۱۲ـ گزینه «۲» مرحله به مرحله اطلاعات صورت سؤال را خلاصه می‌کنیم: $۲x$ = تعداد خودکارهای قرمز، $۷x$ = تعداد خودکارهای آبی

تعداد مدادها را هم z در نظر می‌گیریم و با توجه به جمله‌ی دوم داریم: (۱)

$$\frac{۷x + ۲x}{z} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \frac{۹x}{z} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \frac{۳x}{z} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow ۱۵x = ۴z \Rightarrow z = \frac{۱۵}{۴}x$$

و بالاخره به شکل رابطه زیر هم می‌توان آن را نوشت:

$$۷x - z = ۲۶ \xrightarrow{(۱)} ۷x - \frac{۱۵}{۴}x = ۲۶ \Rightarrow \frac{۲۸x - ۱۵x}{۴} = ۲۶ \Rightarrow \frac{۱۳}{۴}x = ۲۶ \Rightarrow \frac{x}{۴} = ۲ \Rightarrow x = ۸$$

پس تعداد خودکارهای قرمز برابر با $۲x = ۲\times۸ = ۱۶$ خواهد بود.

۱۳ـ گزینه «۳» تعداد کسانی که دارای پدر کارمند هستند ۶۰درصد افراد است یعنی $n(A) = ۰/۶۰\times۲۰۰ = ۱۲۰$ و تعداد افرادی که دارای مادر کارمند هستند ۸۰ درصد افراد است یعنی $n(B) = ۰/۸۰\times۲۰۰ = ۱۶۰$. از طرفی می‌دانیم: $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که حداقل یکی از پدر یا مادرهای آنها کارمند هستند، کمتر یا مساوی تعداد کل افراد است. بنابراین داریم:

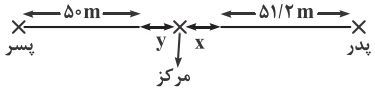
$$n(A\cup B) \le ۲۰۰$$

با توجه به دو عبارت بالا داریم:

$$\Rightarrow (n(A) + n(B) - n(A\cap B) \le ۲۰۰ \Rightarrow ۱۲۰ + ۱۶۰ - n(A\cap B) \le ۲۰۰ \Rightarrow ۸۰ \le n(A\cap B)$$

بنابراین معلوم می‌شود از بین همه دانش آموزان **حداقل** ۸۰ نفر هستند که هم پدر آنها و هم مادر آنها کارمند هستند. حال با توجه به صورت سؤال ۷۵ درصد افراد یعنی ۱۵۰ نفر تک فرزند هستند یعنی ۵۰نفر تک فرزند نیستند. بنابراین در بدترین حالت اگر همه این ۵۰ نفر بین افرادی باشند که هم پدر کارمند و هم مادر کارمند دارند، حداقل ۳۰نفر از بین آنها می‌مانند که تک فرزند هستند. پس پاسخ سؤال حداقل ۳۰است.

۱۴ـ گزینه «۱» اگر طول هر قدم پسر x باشد، طول هر قدم پدر $\frac{8}{5} = 1/6x$ خواهد بود. حالا اگر پدر ۳۲ قدم بردارد، یعنی $1/6x \times 32 = 51/2x$ طی کرده است. و پسر $50 \times x = 50x$ را طی کرده است.



حالا سراغ محاسبه مقدار ستون‌ها می‌رویم:

$$\begin{cases} \text{مقدار ستون الف} = x + y + 51/2x \\ \text{مقدار ستون ب} = y + x + 50x \end{cases} \Rightarrow \text{مقدار ستون الف بیشتر است}$$

۱۵ـ گزینه «۲» در مرحله اول از نفر ۱ تا n می‌نشینند.
در مرحله دوم افراد با شماره مضرب ۲ تغییر وضعیت می‌دهند.
در مرحله سوم افراد با شماره مضرب ۳ تغییر وضعیت می‌دهند.
در مرحله چهارم افراد با شماره مضرب ۴ تغییر وضعیت می‌دهند.
در مرحله پنجم افراد با شماره مضرب ۵ تغییر وضعیت می‌دهند.
در مرحله ششم افراد با شماره مضرب ۶ تغییر وضعیت می‌دهند.
در مرحله هفتم افراد با شماره مضرب ۷ تغییر وضعیت می‌دهند.
در مرحله هشتم افراد با شماره مضرب ۸ تغییر وضعیت می‌دهند.
در مرحله نهم افراد با شماره مضرب ۹ تغییر وضعیت می‌دهند.
و در نهایت برای n یعنی ۲۵ تا ۳۰ تعداد افراد نشسته و ایستاده را مقایسه می‌کنیم.

چون به ازای هر بخش‌پذیری ۲ تا ۹ افراد یکبار تغییر وضعیت می‌دهند، پس تعداد مقسوم‌علیه‌های کمتر مساوی آن عدد را به دست می‌آوریم. اگر تعداد مقسوم علیه ها فرد باشد افراد ایستاده و اگر زوج باشد افراد نشسته خواهند بود. مقسوم علیه های مورد نظر از ۲ تا ۹ می‌توانند باشند (عدد یک مقسوم علیه همه اعداد هست و ما نمی‌نویسیم)

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
	۲	۳	۲	۵	۲	۷	۲	۳	۲		۲		۲	۳	۲		۲		۲	۳	۲		۲
			۴		۳		۴	۹	۵		۳		۷	۵	۴		۳		۴	۷			۳
					۶		۸				۴				۸		۶		۵				۴
											۶						۹						۶
																							۸
ن	ا	ا	ن	ا	ا	ا	ا	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ا	ن	ن	ن	ا	ا	ن	ا	ن	ا

۱:۱۰	۱۴:ن	۲۴
۱۱	۱۴	۲۵
۱۲	۱۴	۲۶
۱۲	۱۵	۲۷
۱۳	۱۵	۲۸
۱۳	۱۶	۲۹
۱۳	۱۷	۳۰

نشسته: ۱۴
ایستاده : ۱۰

تا نفر ۲۴ ام تعداد افراد نشسته ۱۴ و تعداد افراد ایستاده ۱۰ نفر هستند. حال تعداد افراد نشسته و ایستاده برای ۲۵ تا ۳۰ را می‌نویسیم.

۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۵	۲	۳	۲		۲
		۹	۴		۳
			۷		۵
					۶
ا	ا	ن	ا	ن	ن

چون تعداد افراد نشسته بین $n = 25$ تا $n = 30$ همیشه از افراد ایستاده بیشتر است پس گزینه (۲) صحیح است.

زبان عمومی

PART A: Grammar

Directions: Select the answer choice (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

31- Nonverbal thinking, …… in engineering design, involves perceptions, the stock-in-trade of the artist, not the scientist.

1) being central mechanism
2) a central mechanism
3) that is central mechanism
4) is mechanism central

32- When the work was completed, many moved to other construction jobs or to factory work in cities and towns, …… they became part of an expanding working class.

1) where
2) thereby
3) thus
4) there

33- …… , why did people in the thirteenth century move into these closely packed quarters?

1) By giving all the disadvantages of living in aggregated towns
2) All the disadvantages of living in aggregated towns given
3) Given all the disadvantages of living in aggregated towns
4) Living in aggregated towns given all the disadvantages

34- Autism is considered a neurological and genetic life-long disorder that causes discrepancies in the way ……

1) is processed information
2) of information processed
3) processed information
4) information is processed

35- Not until the eighteenth century, however, …… the Bank of Amsterdam and the Bank of England begin to provide capital for business investment.

1) such banks as did
2) banks such as did
3) did such banks as
4) banks did such as

36- …… around 8000 B.C.E., the most extensive exploitation of agriculture occurred in river valleys, where there were both good soil and a dependable water supply regardless of the amount of rainfall.

1) Starting
2) To be started
3) Started
4) To started

37- A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, …… steam power to spin and weave cotton.

1) and resulted in mills they used
2) by mills resulting in using
3) that resulted in mills to use
4) resulting in mills using

38- This simple memorizing of individual items and procedures—known as rote learning—is relatively easy to implement on a computer. …… implementing what is called generalization.

1) The problem is more challenging than is
2) More challenging is the problem of
3) The problem more challenging than
4) The more challenging problem of

زبان عمومی

بخش اول: دستور زبان

در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۱ـ گزینه «۲» تفکر غیرکلامی، **که** یک مکانیزم مرکزی در طراحی مهندسی **است**، شامل ادراک می‌شود، {یا به عبارتی} فوت و فن هنرمند، نه دانشمند.

توضیح گرامری: گزینهٔ (۳) کنار می‌رود چون کاربرد that بعد از کاما ممنوع است. گزینهٔ (۱) رد می‌شود چون being اضافه و حشو است. گزینهٔ (۴) کنار می‌رود چون فاقد ضمیر موصولی است. ضمناً آن دو تا کامای بعد و قبل از جای خالی به وضوح نشان می‌دهند که ما به یک جمله‌وارهٔ وصفی نیاز داریم. پس این شما و این هم گزینهٔ (۲) که در ابتدا به این صورت بوده:

Nonverbal thinking, **which is** a central mechanism in engineering design, involves ….

می‌توانیم which is را حذف کنیم و یک بدل یا عبارت وصفی بسازیم:

Nonverbal thinking, a central mechanism in engineering design, involves ….

۳۲ـ گزینه «۱» وقتی کار کامل شد، بسیاری به شغل‌های عمرانی دیگر یا کار در کارخانه‌ها در شهرها و شهرستان‌ها نقل‌مکان کردند، **که در آنجا (جایی که)** آنها بخشی از قشرِ در حال گسترش کارگرها شدند.

توضیح گرامری: با توجه به مفهوم جمله و اینکه قبل از جای خالی مرجع مکانی cities and towns را داریم، به ضمیر موصولی where برای جای خالی نیاز داریم.

۳۳ـ گزینه «۳» **با توجه به تمامی معایب زندگی در شهرهای پُرجمعیت**، چرا مردم در قرن سیزدهم به این محله‌های بسیار متراکم نقل‌مکان کردند؟

توضیح گرامری: given همیشه شکل سوم فعل give نیست. در اینجا یک حرف‌اضافه است به معنی «با توجه به، با در نظر گرفتنِ» و مترادف با considering است. چون حرف اضافه است، بعدش باید اسم یا عبارت اسمی بیاید. همچنین به مثال زیر دقت کنید:

Given [= considering] the circumstances, you've done really well.

ترجمه: با توجه به شرایط، عملکرد واقعاً خوبی داشته‌ای.

Given all the disadvantages of living in aggregated towns, why did people in the thirteenth ….

۳۴ـ گزینه «۴» اوتیسم، یک اختلال عصبی و ژنتیکی مادام‌العمر محسوب می‌شود که باعث تفاوت‌هایی می‌گردد در نحوه‌ای **که اطلاعات پردازش می‌شود**.

توضیح گرامری: جمله در اصل به شکل زیر بوده:

…causes discrepancies in the way **that** information is processed.

می‌توانیم that موصولی را حذف کنیم که در این صورت به گزینه (۴) می‌رسیم. باقی گزینه‌ها به وضوح نادرست‌اند.

۳۵ـ گزینه «۳» با این وجود، تا {آغاز} قرن هجدهم، بانک‌هایی از قبیل بانک آمستردام و بانک انگلستان شروع به تأمین سرمایه برای سرمایه‌گذاری کسب‌وکار نکرده بودند.

توضیح گرامری: چون جمله با عبارت منفی‌ساز not until شروع شده، باید وارونگی صورت بگیرد که فقط در گزینه (۳) شاهد وارونگی هستیم:

Not until the eighteenth century, however, **did** such **banks** as …

نکته: همانطور که می‌دانید از such as برای ارائه مثال استفاده می‌شود. مثال:

Painters **such as** Picasso are rare.

می‌توانیم such را ببریم قبل از painters که در این صورت داریم:

Such painters **as** Picasso are rare.

همین اتفاق در این سؤال هم افتاده:

Not until the eighteenth century, however, **did** such **banks** as the Bank of Amsterdam …

۳۶ـ گزینه «۱» گسترده‌ترین بهره‌برداری از کشاورزی، **که** حدوداً در سال ۸۰۰۰ قبل از میلاد مسیح **شروع شد**، در دره‌های رودخانه‌ها رخ داد، که در آنجا صرف‌نظر از میزان بارندگی، هم خاک باکیفیت وجود داشت و هم منبع آب قابل‌اتکا.

توضیح گرامری: جمله در اصل به این صورت بوده:

The most extensive exploitation of agriculture, **which started around 8000 B.C.E.**, occurred in river valleys,…

می‌توانیم با حذف which و تبدیل started به starting یک عبارت وصفی (بدل) غیرضروری بسازیم:

The most extensive exploitation of agriculture, **starting around 8000 B.C.E.**, occurred in river valleys,…

می‌توانیم بدل را ببریم به قبل از مرجع (در اینجا The most extensive exploitation of agriculture) که داریم:

Starting around 8000 B.C.E., the most extensive exploitation of agriculture occurred in river valleys,…

پس این شما و این هم گزینه (۱) و حذف سایر گزینه‌ها.

۳۷ـ گزینه «۴» یک موتور دورانی که به موتور بخار متصل بود، باعث می‌شد شفت‌ها بچرخند و دستگاه‌ها به حرکت دربیایند، **که {این امر} باعث می‌شد آسیاب‌ها** از نیروی بخار برای چرخیدن و بافتن پنبه **استفاده کنند**.

توضیح گرامری: اگر خاطرتان باشد، گفتیم مرجع ضمیر موصولی which می‌تواند نه یک کلمه (یا عبارت) بلکه کل جملهٔ قبل از کاما باشد. مثال:

My friend eventually decided to get divorced, **which** upset me a lot.

ترجمه: دوستم نهایتاً تصمیم گرفت که طلاق بگیرد، {که این موضوع} مرا زیاد ناراحت کرد.

در این سؤال هم همین موضوع صدق می‌کند؛ یعنی ابتدا داشتیم:

A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, **which resulted in** mills ….

می‌توانیم which را حذف و resulted را به resulting تبدیل کنیم:

A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, **resulting in** mills ….

همچنین این کاربرد result in را حتماً حفظ کنید:

Result in + sb/ sth + doing sth: Icy conditions resulted in two roads **being** closed.

در واقع در اینجا، being جراند است. پس این شما و این هم گزینه (۴):

A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, **resulting in** mills **using** steam power ….

بررسی سایر گزینه‌ها: گزینهٔ (۳) به خاطر کاربرد that بعد از کاما کنار می‌رود. گزینهٔ (۲) به لحاظ معنایی ایراد دارد و در گزینهٔ (۱) کاربرد they used نامناسب است.

۳۸ـ گزینه «۲» اجرای این نوع یادگیری و به حافظه سپردن اقلام و رویه‌ها – که {با لفظ} یادگیری طوطی‌وار شناخته می‌شود –روی کامپیوتر نسبتاً ساده است. **چالش برانگیزتر {از آن} مشکلِ** اجرای چیزی **است** که تعمیم نامیده می‌شود.

توضیح گرامری: گفتیم یکی از کاربردهای وارونگی زمانی است که یک جمله با صفت آغاز شود؛ این هم مثال خودِ کتاب:

Central to all legal systems **is** the belief that a person is innocent unless proved otherwise.

More challenging **is** the problem of implementing what is called generalization.

بررسی سایر گزینه‌ها: گزینه‌های (۳) و (۴) به وضوح کنار می‌روند. گزینهٔ (۱) رد می‌شود چون معلوم نیست the problem دقیقاً به چه مشکلی اشاره دارد.

بخش دوم: واژگان

دستورالعمل: در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۹ـ گزینه «۱» گذشته **برگشت‌ناپذیر** است. {گذشته} طی‌شده (رفته) و دیگر هرگز باز نخواهد گشت، مهم نیست چه کاری انجام دهید و هر قدر هم که گریه کنید.

سبقت ناپذیر، چیره ناشدنی	۲	unsurpassable	غیرقابل‌برگشت، لغونشدنی	۱	irrevocable
غیرقابل اعتماد	۴	unreliable	اجتناب ناپذیر، حتمی	۳	inevitable

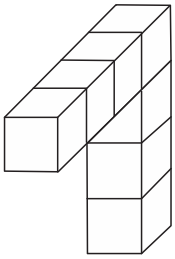
۴۰ـ گزینه «۲» کمپین بازاریابی آن پاتوق چنان گسترده بود که نه تنها افراد ثروتمند، بلکه افرادی با **مال و منال** محدود را هم جذب کرد.

مال و منال، دارایی	۲	means	اشتیاق، شوق	۱	zeal
فرجام‌خواهی، جاذبه	۴	appeal	علوم مقدماتی، چیز بدوی	۳	rudiments

بخش چهارم: تجسمی

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، سؤال‌هایی از نوع تجسمی را شامل می‌شود. هریک از سؤال‌های ۲۱ تا ۲۵ را به دقت بررسی نموده و جواب صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.

۲۱ـ در یک مکعب به ابعاد ۴ در ۴ در ۴، چند قطعه به شکل زیر را می‌توان جانمایی کرد؟



۱) ۸

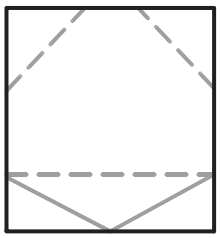
۲) ۷

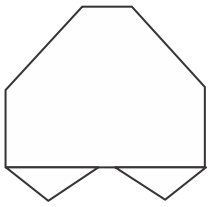
۳) ۶

۴) ۴

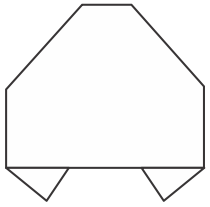
راهنمایی: در سؤال ۲۲ یک کاغذ مربع‌شکل در تصویر سمت چپ مشاهده می‌شود. اگر این کاغذ را از روی خط‌چین‌ها، رو به عقب و از روی خط‌ها، رو به جلو تا کنیم، کدام شکل حاصل می‌شود؟

۲۲ـ

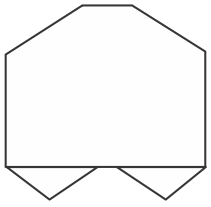




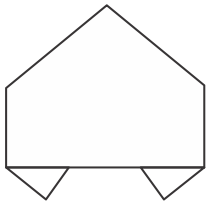
(۲)



(۱)

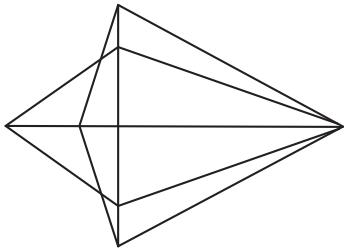


(۴)



(۳)

۲۳ـ در شکل زیر، مجموعاً چند مثلث دیده می‌شود؟



۱) ۲۲

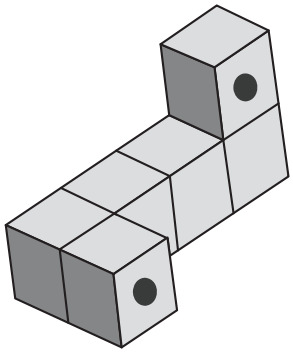
۲) ۲۴

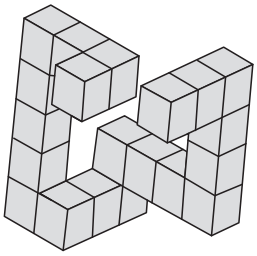
۳) ۲۶

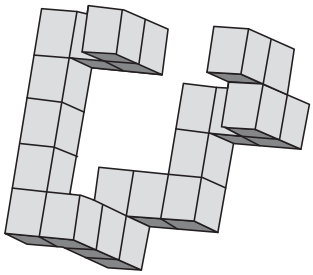
۴) ۲۸

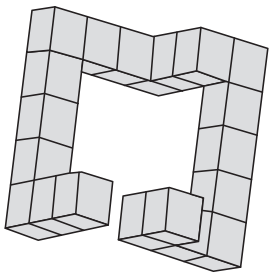
راهنمایی: در سؤال ۲۴، در سمت چپ، قطعه‌ای سه‌بعدی مشاهده می‌شود. کدام قطعه (موارد ۱ تا ۴) می‌تواند کنار قطعه سمت چپ قرار گیرد، به نحوی که نقاط سیاه دو قطعه، روی هم قرار گیرند؟

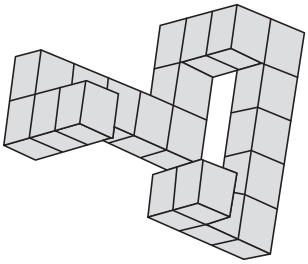
۲۴ـ



۱)


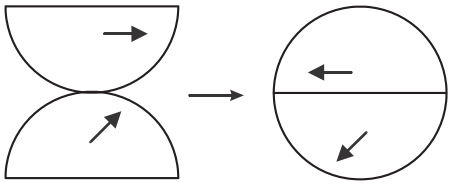
۲)


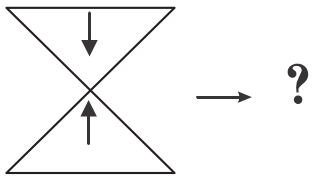
۳)


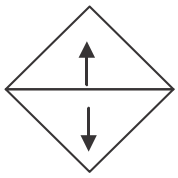
۴)


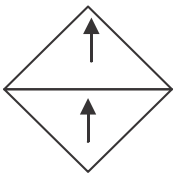
راهنمایی: در سؤال ۲۵، هر دو الگوی سمت چپ، قرار است با روالی مشابه و یکسان به الگوی سمت راست خود تبدیل شوند. به جای علامت سؤال، کدام الگو (موارد ۱ تا ۴) باید قرار بگیرد؟

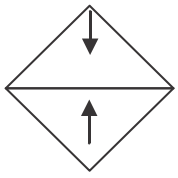
۲۵ـ

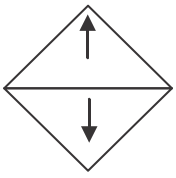




۱)


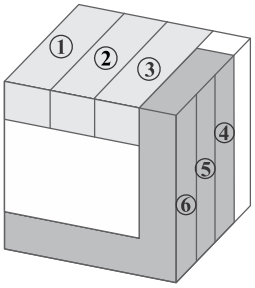
۲)


۳)


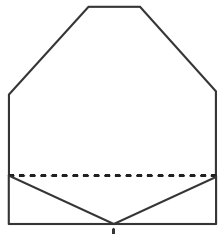
۴)


بخش چهارم: تجسمی

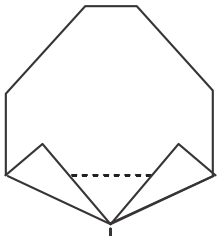
۲۱ـ گزینه «۳» با توجه به شکل ۶ شکل را می‌توان از مکعب استخراج کرد که ضلع دوم شکل‌های ۱ و ۲ و ۳ در پشت مکعب قرار دارند و در شکل مشخص نیستند.



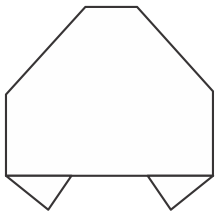
۲۲ـ گزینه «۱» ابتدا خط‌چین‌های بالای تصویر را اعمال می‌کنیم و به شکل روبه‌رو می‌رسیم:



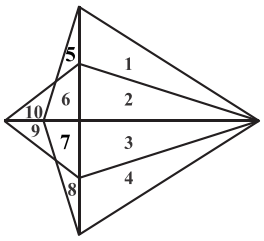
حال از روی خط‌های پایین شکل، به تصویرِ بعدی می‌رسیم:



و در نهایت با تا کردنِ تصویر از روی خط‌چین‌ها به عقب، شکلِ نهایی را خواهیم داشت:



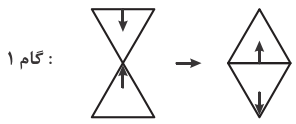
۲۳ـ گزینه «۲» ترکیب اشکال زیر، مثلث‌های شکل زیر را تشکیل می‌دهند.

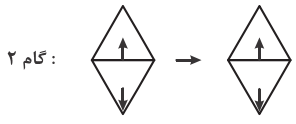


۱) ۱	۹) ۲ و۱	۱۷) ۸ و ۷ و ۴ و ۳
۲) ۲	۱۰) ۳ و۲ و ۱	۱۸) ۹ و ۷ و ۳
۳) ۳	۱۱) ۴ و ۳ و ۲و ۱	۱۹) ۶ و ۵
۴) ۴	۱۲) ۶ و ۵ و ۲ و ۱	۲۰) ۸ و ۷ و ۶ و ۵
۵) ۵	۱۳) ۳ و ۲	۲۱) ۱۰ و ۶
۶) ۸	۱۴) ۴ و ۳ و ۲	۲۲) ۸ و ۷
۷) ۹	۱۵) ۱۰و ۶ و ۲	۲۳) ۹ و ۷
۸) ۱۰	۱۶) ۴ و ۳	۲۴) ۱۰و ۹ و ۷ و ۶

۲۴ـ گزینه «۴» دو نقطه‌ی سیاهِ موجود در شکل سمت چپ، از یک جهت به اندازه‌ی یک مکعب و از جهت دیگر به اندازه‌ی سه مکعب با یکدیگر فاصله دارند و باید به دنبال همین مشخصات در گزینه‌ها باشیم، که به گزینه (۴) می‌رسیم.

۲۵ـ گزینه «۱» طبق الگو، ابتدا یک دوران حول محور افقی خواهیم داشت بعد، یک دوران حول محور عمودی، در نتیجه خواهیم داشت:





سؤالات مهندسی مکانیک ــ تبدیل انرژی

مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مکانیک سیالات پیشرفته، ترمودینامیک پیشرفته)

۱ــ اگر $u(x,t)$ جواب مسئله موج زیر باشد، مقدار تقریبی $u(\circ/۴,۱/۳)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} - ۹u_{xx} = \circ\ ,\ \circ < x < ۲\ ,t > \circ \\ u(x,\circ) = ۲x + ۱ \\ u_t(x,\circ) = x\quad ,\ \circ \le x \le ۲ \\ u(\circ,t) = u(۲,t) = \circ\ ,\ t \ge \circ \end{cases}$$

۱) ۱/۲۴
۲) ۱/۷۹
۳) ۱/۹۶
۴) ۲/۱۵

۲ــ فرض کنید $z = x + iy$ باشد. مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ در دامنه مربعی شکل $D = \{(x,y), \circ \le x,y \le ۲\pi\}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $e^{۲\pi}$
۳) $\sinh ۲\pi$
۴) $\cosh ۲\pi$

۳ــ جواب مسئله پواسن زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^۲\omega}{\partial r^۲} + \dfrac{۱}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r} + \dfrac{۱}{r^۲}\dfrac{\partial^۲\omega}{\partial\theta^۲} = \dfrac{\sin\theta}{r^۲}\ ,\ \circ < r < ۲\ ,\ \circ < \theta < ۲\pi \\ \omega(r,\circ) = \circ \\ \omega(۲,\theta) = \sin ۳\theta \end{cases}$$

۱) $\omega(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} r^n \sin ۳n\theta$
۲) $\omega(r,\theta) = \frac{۱}{۲} r\sin\theta + \frac{۱}{۸} r^۳ \sin\theta$
۳) $\omega(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} (r^n + r^{-n}) \sin ۳n\theta$
۴) $\omega(r,\theta) = (\frac{۱}{۲} r - ۱)\sin\theta + \frac{۱}{۸} r^۳ \sin ۳\theta$

۴ــ انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \le \pi \\ \circ, & |x| > \pi \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\cos(\omega x)d\omega$
۲) $\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\omega\cos(\omega x)d\omega$
۳) $\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\cos(\omega x)d\omega$
۴) $\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\omega\cos(\omega x)d\omega$

۵ــ اگر C مرز نیم‌دایره فوقانی $|z| = r$ در جهت مثبت و $I(r) = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ باشد، $\lim_{r\to\infty} I(r)$ کدام است؟

۱) $\circ$
۲) ۱
۳) π
۴) ∞

۶ــ مسئله گرمای زیر را در نظر بگیرید، اگر $v(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $v(x,s)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ۴u_{xx}(x,t) = ۳u(x,t)\ ,\ x > \circ, t > \circ \\ u(x,\circ) = -e^{-x}\quad ,\ x > \circ \\ u(\circ,t) = \circ\qquad ,\ t \ge \circ \end{cases}$$

۱) $۴v''(x,s) + (۳-s)v(x,s) = e^{-x}$
۲) $v''(x,s) + (۴s-۳)v(x,s) = e^{-x}$
۳) $۴v''(x,s) + (s-۳)v(x,s) = se^{-x}$
۴) $v''(x,s) + (۳-۴s)v(x,s) = se^{-x}$

۷ــ معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شود. $v(x,\circ)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x - ۱\ ,\ \circ < x < ۲\ ,\ t > \circ \\ u(\circ,t) = ۳\qquad ,u(۲,t) = -۱\ ,t > \circ \\ u(x,\circ) = ۱ - x^۳\quad ,\ \circ < x < ۲ \end{cases}$$

۱) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۵}{۳}x - ۲$
۲) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۳}x - ۲$
۳) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۳}x + ۳$
۴) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۵}{۳}x + ۳$

۸ــ اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u(x,y) = (x^۲ - y^۲ + ۱)^۲ - ۴x^۲y^۲$ با شرط $v(\circ,\circ) = \circ$ باشد، مقدار $v(۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۴
۴) -۴

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه مهندسی مکانیک ــ تبدیل انرژی

مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مکانیک سیالات پیشرفته، ترمودینامیک پیشرفته)

۱ــ گزینه «۲» از سؤالات بسیار پرتکرار در آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری که هم در کتاب و هم در آزمون‌های آزمایشی بر روی آن تمرکز ویژه‌ای داشته‌ایم. از روش جبری کمک می‌گیریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2c}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

که در این سؤال $c=3$، $x=0/4$ و $t=1/3$ است. چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس دوره تناوب $2\times 2=4$ است. با این توضیحات سراغ محاسبه می‌رویم:

$$u(0/4,1/3)=\frac{1}{2}[f^*(0/4+3\times 1/3)+f^*(0/4-3\times 1/3)]+\frac{1}{2\times 3}[G^*(0/4+3\times 1/3)-G^*(0/4-3\times 1/3)]$$

$$=\frac{1}{2}[f^*(4/3)+f^*(-3/5)]+\frac{1}{2}[G^*(4/3)-G^*(-3/5)]$$

دقت کنید مقادیر داخل پرانتزها یعنی دو عدد $4/3$ و $-3/5$ خارج از بازه‌ی $[0,2]$ هستند، پس باید با استفاده از دوره تناوب آن‌ها را درون بازه بیاوریم! اگر به اندازه‌ی یک دوره تناوب از $4/3$ کم کنیم، به عدد $1/3$ و اگر به اندازه یک دوره تناوب به $-3/5$ اضافه کنیم، به عدد $0/5$ می‌رسیم، پس داریم:

$$u(0/4,1/3)=\frac{1}{2}[f^*(0/3)+f^*(0/5)]+\frac{1}{6}[G^*(0/3)-G^*(0/5)]$$

ضابطه‌ی f که معلوم است، $f=2x+1$. ضابطه‌ی G هم با انتگرال‌گیری از $g(x)=x$ به‌دست می‌آید:

$$G(x)=\int_0^x g(x)\,dx=\frac{x^2}{2}$$

پس داریم:

$$u(0/4,1/3)=\frac{1}{2}[2\times 0/3+1+2\times 0/5+1]+\frac{1}{6}[\frac{(\frac{3}{10})^2}{2}-\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}]=\frac{1}{2}[1/6+2]+\frac{1}{6}[\frac{\frac{9}{100}-\frac{1}{4}}{2}]=1/8+\frac{1}{12}[\frac{9-25}{100}]$$

$$=1/8+\frac{1}{12}[-\frac{16}{100}]=1/8-\frac{1}{75}$$

که تقریباً برابر با ۱/۷۹ می‌شود.

توضیح: سؤال فی‌نفسه سؤال راحتی از این نوع طیف سؤالات بود، چون به روش جبری حتی نیاز به استفاده از گسترش توابع f^* و G^* هم نداشتیم. اما محاسبات اعشاری آن کمی جالب نبود!

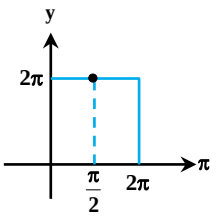
۲ــ گزینه «۴» در مثال متن کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف، بخش توابع هذلولی مختلط ثابت کردیم که $|\sin z|$ برابر با $\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$ است. می‌توانید اندازه $\sin z$ را از رابطه‌ی زیر حساب کنید:

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\cosh y$$

پس $|\sin z|$ قطعاً بزرگ‌تر یا مساوی $\sinh y$ است؛ چون حداقلِ $\sin^2 x$ صفر است، از طرفی می‌توان نوشت:

$$|\sin z|=\sqrt{1-\cos^2 x+\cosh^2 y-1}=\sqrt{\cosh^2 y-\cos^2 x}$$

چون حداقلِ $\cos^2 x$ صفر است، پس حداکثر $\sin z$ هم برابر با $\cosh y$ است. ماکزیمم $\cosh z$ در ناحیه مشخص شده برابر با $\cosh 2\pi$ است. در واقع ماکزیمم روی مرز و در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{2},2\pi)$ اتفاق می‌افتد. البته در صورت تسلط بر روی اصل ماکزیمم و کمی تجربه به راحتی می‌شود با توجه به شکل مقابل گفت؛ ماکزیمم در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{2},2\pi)$ رخ می‌دهد و با توجه به رابطه‌ی $\sin z$ به وضوح $\text{Max}\,|\sin z|=\cosh 2\pi$ است.



---

www.modaresanesharif.ac.ir

۳ـ گزینه «۴» از سؤالاتی است که سابقه طرح در آزمون‌های تستی را ندارد! البته همه می‌دانیم روش رد گزینه اکثر اوقات یاریگر ما در روبه‌رو شدن با سؤالات این‌چنینی است. ابتدا روش تشریحی سؤال را ارائه می‌دهیم. با توجه به این که عامل ناهمگنی برابر با $\frac{\sin\theta}{r^۲}$ می‌باشد، بنابراین معادله پواسون که همان معادله لاپلاس ناهمگن است به فرم زیر تبدیل می‌گردد:

$$\omega(r,\theta)=u(r,\theta)-\sin\theta$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta}=۰ \\ u(r,۰)=۰ \\ u(۲,\theta)=\sin\theta+\sin ۳\theta \end{cases}$$

می‌دانیم که معادله لاپلاس روی یک دیسک مثلاً در این سؤال $۰<\theta<۲\pi$ با $۰<r<۲$ دارای جوابی به صورت زیر می‌باشد: (در متن کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف مطرح شده است)

$$u(r,\theta)=A_۰+\sum_{n=۱}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

حال با در نظر گرفتن شرط $u(r,۰)=۰$ خواهیم داشت $A_n=۰$ (برای $n=۰,۱,۲,۳$). همچنین مطابق با شرط $u(۲,\theta)=\sin\theta+\sin ۳\theta$ ضرایب $B_۱=\frac{۱}{۲}$ و $B_۳=\frac{۱}{۸}$ به دست می‌آیند. در نتیجه داریم:

$$u(r,\theta)=\frac{۱}{۲}r\sin\theta+\frac{۱}{۸}r^۳\sin ۳\theta$$

در نهایت با جایگزینی به دست می‌آوریم:

$$\omega(r,\theta)=u(r,\theta)-\sin\theta=\frac{۱}{۲}r\sin\theta+\frac{۱}{۸}r^۳\sin ۳\theta-\sin\theta=(\frac{۱}{۲}r-۱)\sin\theta+\frac{۱}{۸}r^۳\sin ۳\theta$$

روش رد گزینه : با توجه به شرایط مرزی اگه به جای r عدد ۲ رو قرار بدیم باید به $\sin ۳\theta$ برسیم، به وضوح گزینه (۴) تو این شرایط صدق می‌کنه!!

۴ـ گزینه «۳» سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده است. با توجه به این که تابع زوج است، پس تبدیل فوریه کسینوسی باید مورد استفاده قرار بگیرد:

$$I=F_c(\omega)=\int_۰^{\infty}|\sin x|\cos\omega x dx=\int_۰^{\pi}\sin x\cos\omega x dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء داریم:

	مشتق	انتگرال
⊕	$\cos\omega x$	$\sin x$
⊖	$-\omega\sin\omega x$	$-\cos x$
⊕	$-\omega^۲\cos\omega x$	$-\sin x$

→ انتگرال می‌گیریم

چون مشتق صفر نمی‌شود، لذا در مرحله‌ی سوم انتگرال می‌گیریم:

$$I=-[\cos x\cos\omega x]_۰^{\pi}-[\omega\sin x\sin\omega x]_۰^{\pi}+\omega^۲I\Rightarrow(۱-\omega^۲)I=۱+\cos\pi\omega\Rightarrow I=F_c(\omega)=\frac{۱+\cos\pi\omega}{۱-\omega^۲}\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{۱+\cos\pi x}{۱-\omega^۲}\cos\omega x d\omega$$

۵ـ گزینه «۱» سؤال را می‌توان به دو روش حل کرد:

روش اول: از قضیه مانده‌ها کمک می‌گیریم، دقت کنید طبق توضیحات صفحه‌ی ۲۸۲ کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف، چون حولِ مانده یک گردش کامل نداریم، به جای $۲\pi i$ باید حاصل انتگرال در πi ضرب شود.

$$I(r)=\pi i\operatorname*{Res}_{z=۰}\frac{e^{iz}}{z}=\pi i[\frac{e^{iz}}{۱}]_{z=۰}=\pi i$$

که $|I(r)|=\pi$ می‌شود. اما عجله نکنید! برای انتخاب گزینه (۳)، چون $r\to\infty$ داده شده و منحنی C به صورت $|z|=\infty$ است، یعنی مانده در بی‌نهایت هم باید حساب شود. می‌دانیم مقدار مانده در بی‌نهایت قرینه‌ی مجموع مانده‌ها در نقاط تکین است، یعنی مانده در بی‌نهایت برابر با ۱- است و لذا حاصل انتگرال صفر است.

روش دوم: طبق لم جردن داریم:

$$|\int_C\frac{e^{iz}}{z}dz|\le\int_{z=re^{i\theta}}\frac{|e^{iz}|}{|z|}|dz|=\int_۰^{\pi}\frac{e^{-r\sin\theta}}{r}rd\theta$$

برای $r\to\infty$ حد بالا صفر است.

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ــ گزینه «۱» سؤال ساده‌ای است! طراح خودش به وضوح استفاده از تبدیل لاپلاس را پیشنهاد داده است. ابتدا دقت کنید که داریم:

$$L[u_t(x,t)] = su(x,s) - u(x,\circ)$$

در این سؤال طراح به جای $u(x,s)$ خواسته است که $v(x,s)$ بنویسیم! اشکال ندارد فقط یک نماد است و برای ما هم فرقی ندارد. در ادامه داریم:

$$sv(x,s) - u(x,\circ) - ۴v''(x,s) = ۳v(x,s) \Rightarrow ۴v''(x,s) + (۳-s)v(x,s) = e^{-x}$$

۷ــ گزینه «۲» ابتدا از طرفین رابطه‌ی $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ دو بار نسبت به x و در یک مرحله‌ی دیگر یک‌بار نسبت به t مشتق می‌گیریم و داریم:

$$u_{xx} = v_{xx} + r_{xx} \quad , \quad u_t(x,t) = v_t(x,t) + \circ$$

حالا در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$v_{xx} + r_{xx} = v_t(x,t) + x - ۱$$

بر اساس دو شرط اولیه صورت سؤال داریم: $u(\circ,t) = v(\circ,t) + r(\circ) \Rightarrow ۳ = v(\circ,t) + r(\circ)$, $u(۲,t) = v(۲,t) + r(۲) \Rightarrow -۱ = v(۲,t) + r(۲)$

برای این که شرایط مرزی برحسب v همگن شود باید $r(\circ) = ۳$ و $r(۲) = -۱$ شود، بنابراین با دستگاه معادلات زیر برای همگن شدن معادله و شرایط مرزی آن روبه‌رو هستیم:

$$\begin{cases} r_{xx} = x - ۱ \Rightarrow r_x = \frac{x^۲}{۲} - x + c_۱ \Rightarrow r(x) = \frac{x^۳}{۶} - \frac{x^۲}{۲} + c_۱x + c_۲ \\ r(\circ) = ۳ , r(۲) = -۱ \end{cases}$$

حالا از شرط $r(\circ) = ۳$ به راحتی $c_۲$ برابر با ۳ به‌دست می‌آید و از شرط $r(۲) = -۱$ داریم:

$$-۱ = \frac{۲^۳}{۶} - \frac{۲^۲}{۲} + c_۱(۲) + ۳ \Rightarrow -۴ = \frac{۴}{۳} - ۲ + ۲c_۱ \Rightarrow ۲c_۱ = -۲ - \frac{۴}{۳} \Rightarrow c_۱ = -\frac{۵}{۳}$$

بنابراین داریم: $r(x) = \frac{x^۳}{۶} - \frac{x^۲}{۲} - \frac{۵}{۳}x + ۳$.

ما دنبال $v(x,\circ)$ هستیم. اگر دوباره به تغییر متغیر صورت سؤال برگردیم، رابطه‌ی مقابل را داریم: $v(x,\circ) = v(x,\circ) + r(x)$

$$\Rightarrow ۱ - x^۳ = v(x,\circ) + \frac{x^۳}{۶} - \frac{x^۲}{۲} - \frac{۵}{۳}x + ۳ \Rightarrow v(x,\circ) = -\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۳}x - ۲$$

روش تستی: خُب از شرط صورت سؤال داریم: $u(x,t) = v(x,t) + r(x) \qquad (*)$

با توجه به داده‌های دیگه دو شرط $u(\circ,t) = ۳$ و $u(۲,t) = -۱$ داریم، پس فعلاً از این دو شرط کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} u(\circ,t) = v(\circ,t) + r(\circ) \Rightarrow ۳ = v(\circ,t) + r(\circ) \\ u(۲,t) = v(۲,t) + r(۲) \Rightarrow -۱ = v(۲,t) + r(۲) \end{cases}$$

چون قراره معادله برحسب v یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن باشه، پس باید $v(\circ,t) = v(۲,t) = \circ$ باشه، بنابراین $r(\circ) = ۳$ و $r(۲) = -۱$ نتیجه‌ای که تا اینجا داریم. دنبال $v(x,\circ)$ هستیم؛ در رابطه‌ی $(*)$ به جای t ها صفر قرار می‌دیم:

$$u(x,\circ) = v(x,\circ) + r(x) \Rightarrow v(x,\circ) = u(x,\circ) - r(x) \Rightarrow \boxed{v(x,\circ) = ۱ - x^۳ - r(x)}$$

اگه در طرفین رابطه‌ی فوق به جای x ها عدد صفر رو قرار بدیم، داریم: $v(\circ,\circ) = ۱ - \circ - r(\circ) \xrightarrow{r(\circ)=۳} v(\circ,\circ) = -۲$

تو گزینه‌ها فقط گزینه‌های (۱) و (۲) هستن که اگه به جای x های اونا صفر قرار بدیم، مقدارشون برابر منفی (۲) میشه، پس تا اینجا گزینه‌های (۳) و (۴) میپرن!

حالا برای انتخاب از بین گزینه‌های (۱) و (۲) از شرط $r(۲) = -۱$ کمک می‌گیریم: $v(۲,\circ) = ۱ - ۲^۳ - r(۲) \Rightarrow v(۲,\circ) = ۱ - ۸ - (-۱) = -۶$

کافیه از بین گزینه‌های (۱) و (۲) تو یکی به جای x عدد ۲ قرار بدیم، مثلاً تو گزینه (۲) داریم:

$$v(۲,\circ) = -\frac{۷}{۶}(۲^۳) + \frac{۱}{۲}(۲)^۲ + \frac{۵}{۳} \times ۲ - ۲ = -\frac{۷ \times ۴}{۳} + ۲ + \frac{۱\circ}{۳} - ۲ = \frac{-۲۸ + ۶ + ۱\circ - ۶}{۳} = -\frac{۱۸}{۳} = -۶$$

پس همین گزینه جوابه. میتونین تو گزینه (۱) به جای x، عدد ۲ رو قرار بدین و ببینین که برابر با ۶- نمیشه! (اگه این کارو هم میکردین باز هم می‌تونستین بدون محاسبه‌ی گزینه (۲)، به جواب برسین فرقی نداره!)

---

www.modaresanesharif.ac.ir

سؤالات مهندسی مکانیک (۲) ــ تبدیل انرژی

ریاضیات مهندسی

۱ــ با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=x(\pi^2-x^2)$ در بازه $[-\pi\ ,\ \pi]$، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^6}$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{315}$ ۲) $\frac{8}{945}$ ۳) $\frac{1}{315}$ ۴) $\frac{1}{945}$

۲ــ فرض کنید تابع فرد f جواب معادله $\int_0^{\infty}(x\cos(\omega x)+2\sin(\omega x))f(x)dx=0$ باشد. اگر $f(1)=1$، آنگاه مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۳ــ فرض کنید $F(\omega)$ تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ باشد. اگر مساحت سطح زیر منحنی تابع $F^2(x)$ در $\mathbb{R}$ برابر 16π باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟ $\left(F\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right)$

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

۴ــ فرض کنید $u(x\ ,\ y)$ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_x+(1-y^2)u_y=(1-y^2)(u+1)$ باشد. اگر $u(x\ ,\ 0)=x-1$ باشد، آنگاه مقدار $u(1\ ,\ \frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $1-e^{\frac{1}{2}}(1-\ln\sqrt{3})$ ۲) $1-e^{\frac{1}{2}}(1-\ln 3)$ ۳) $-1+e^{\frac{1}{2}}(1-\ln\sqrt{3})$ ۴) $-1+e^{\frac{1}{2}}(1-\ln 3)$

۵ــ مقدار $u(7\ ,\ 4)$ از جواب مسئله ارتعاش زیر، کدام است؟

$$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}\ ;\ x>0\ ,\ t>0\\ u(x\ ,\ 0)=\begin{cases}3x-4 & 0\le x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}\\ u_t(x\ ,0)=\begin{cases}-5x+7 & 0\le x<1\\ 2 & x\ge 1\end{cases}\\ u(0\ ,\ t)=2t, \qquad t\ge 0\end{cases}$$

۱) $\frac{15}{2}$
۲) $\frac{17}{2}$
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۶ــ فرض کنید $v(x\ ,\ y\ ,\ s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_ne^{\beta_n(s)y}+b_ne^{-\beta_n(s)y}+\gamma_n(s)\right)\sin(nx)$ تبدیل لاپلاس جواب $u(x\ ,\ y\ ,\ t)$ از مسئله زیر باشد. $\beta_n(s)$ کدام است؟

$$\begin{cases}u_t-4(u_{xx}+u_{yy})=t\ ;\ (x\ ,\ y)\in D=(0\ ,\ \pi)\times(0\ ,\ \pi)\ ,\ t>0\\ u(x\ ,\ y\ ,\ 0)=0\qquad ;\ (x\ ,\ y)\in \bar{D}\\ u(x\ ,\ y\ ,\ t)=0\qquad ;\ (x\ ,\ y)\in \partial D\ ,\ t\ge 0\end{cases}$$

۱) $\pm\frac{1}{2}\sqrt{4n^2+s}$ ۲) $\pm\frac{1}{2}\sqrt{n^2+\frac{s}{4}}$
۳) $\pm\sqrt{2n+s}$ ۴) $\pm\sqrt{n+\frac{s}{2}}$

۷ــ مسئله زیر دارای جواب کران‌دار است. مقدار $A+B$ کدام است؟

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=\begin{cases}x-2y & 0<x\le 1\\ & 0<y<\pi\\ Ax & x>1\end{cases}\\ u(x\ ,\ 0)=\begin{cases}2x-4 & 0<x<\pi\\ B & x>\pi\end{cases}\\ u(x\ ,\ \pi)=0\\ u_x(0\ ,\ y)=6y(\pi-y)\end{cases}$$

۱) ۱۲
۲) ۶
۳) صفر
۴) -12

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه مهندسی مکانیک (۲) ــ تبدیل انرژی

ریاضیات مهندسی

۱ــ گزینه «۴»

$$f(x)=x(\pi^2-x^2)\ ,\ x\in[-\pi,\pi]\Rightarrow 2p=\pi-(-\pi)=2\pi$$
$$f(-x)=-x(\pi^2-(-x)^2)=-(\pi^2-x^2)=x=-f(x)$$

پس تابع $f(x)$ تابعی است فرد و در نتیجه داریم:

$$a_0=a_n=0$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi^2-x^2)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2x-x^3)\sin nxdx$$
$$=\frac{2}{\pi}[x(\pi^2-x^2)(-\frac{1}{n}\cos nx)-(\pi^2-3x^2)(-\frac{1}{n^2}\sin nx)+(-6x)(\frac{1}{n^3}\cos nx)-(-6)(\frac{1}{n^4}\sin nx)]_0^{\pi}=\frac{12}{n^3}\cos n\pi$$

چون در صورت سؤال توان ۶ سری عددی مورد سوال است، پس توان دوم b_n ها را باید به دست آوریم. از رابطه معروف پارسوال استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P}f^2(x)dx\Rightarrow\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}_{(I)}=\underbrace{\frac{1}{P}\int_{-P}^{P}f^2(x)dx}_{(II)}$$

محاسبه (II): $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2(\pi^2-x^2)^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(\pi^4-2\pi^2x^2+x^4)dx=\frac{2}{\pi}\times\frac{8}{105}\pi^7=\frac{16}{105}\pi^6$

محاسبه (I): $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{144}{\pi^6}\cos^6 n\pi=144\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

$$\xrightarrow{(I)=(II)}\frac{16}{105}\pi^6=144\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^6.n^6}=\frac{16}{105\times144}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^6}=\frac{1}{945}$$

روش تستی: چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$S=\frac{1}{\pi^6}+\frac{1}{2^6\times\pi^6}$$

با فرض $\pi^2=10$ آن‌گاه $(\pi^2)^3=1000$ پس طبق نکته تستی کتاب مقدار سری از $\frac{1}{1000}$ بیشتر و از $\frac{1}{1000}+2\times\frac{1}{1000}$ قطعاً کمتره، یعنی از $\frac{3}{1000}$ کمتره که به صورت حدودی از $\frac{1}{333}$ مقدار باید کمتر باشه، تمام گزینه‌ها غیر از گزینه (۴) مقدار ستون از $\frac{1}{333}$ بیشتره، پس گزینه (۴) جوابه؟!

۲ــ گزینه «۲» $f(x)$ تابعی فرد است، بنابراین سراغ $B(\omega)$ باید برویم:

$$B(\omega)=\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega xdx\qquad(I)$$

از طرفی داریم:

$$\int_0^{\infty}(x\cos\omega x+2\sin\omega x)f(x)dx=0\Rightarrow\int_0^{\infty}xf(x)\cos\omega xdx+2\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega xdx=0\qquad(II)$$

از رابطه (I) داریم:

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega}=\int_0^{\infty}xf(x)\cos\omega xdx$$

در رابطه (II) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega}+2B(\omega)=0$$
$$\frac{dB(\omega)}{B\omega}=-2d\omega\Rightarrow LnB(\omega)=-2\omega+LnC\Rightarrow B(\omega)=ce^{-2\omega}$$

از طرفی انتگرال فوریه‌ای فرد تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega xd\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}Ce^{-2\omega}.\sin\omega xd\omega=\frac{2C}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-2\omega}\sin\omega xd\omega\xrightarrow{\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bxdx=\frac{b}{a^2+b^2}}\frac{2C}{\pi}.\frac{x}{x^2+4}=f(x)$$
$$f(1)=1\Rightarrow\frac{2C}{\pi}.\frac{1}{1+4}=1\Rightarrow C=\frac{5\pi}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{5x}{x^2+4}\Rightarrow f(2)=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

۳ــ گزینه «۳» به ازای هر مقدار a، تابع $f(x)$، یک تابع زوج خواهد بود لذا داریم:

$$A(\omega)=\int_{0}^{\infty} f(x).\cos\omega x dx \;;\; f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\infty}\cancel{f(x)}^{1}\cos\omega x dx+\int_{0}^{\infty}\cancel{f(\omega)}^{0}\cos\omega x dx=\int_{0}^{\infty}\cos\omega x dx=\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_{0}^{a}=\frac{\sin a\omega}{\omega}\Rightarrow A(\omega)=F(\omega)=\frac{\sin a\omega}{\omega}$$

از طرفی طبق رابطه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^{2}(\omega)d\omega$$

$$\underbrace{2\int_{0}^{\infty} f^{2}(x)dx}_{(I)}=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2} a\omega}{\omega^{2}}d\omega}_{(II)}$$

$$2\int_{0}^{a}\cancel{f^{2}(x)}^{1}dx+2\int_{a}^{\infty}\cancel{f^{2}(x)}^{0}dx=2\int_{0}^{a}dx=2a$$

از رابطه پارسوال داریم:

همانطور که می‌دانیم، سطح زیر منحنی تابع $f(x)$ در بازه (a,b) برابر است با:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$2a=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2} a\omega}{\omega^{2}}d\omega \qquad (1)$$

پس مساحت ناحیه $F^{2}(x)$ در $\mathbb{R}$ برابر است با $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2} ax}{x^{2}}dx$ که این با $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2} a\omega}{\omega^{2}}$ فرقی ندارد، لذا داریم:

$$S_{F^{2}(\omega)}=16\pi \qquad (2)$$

از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2} ax}{x^{2}}dx=4\pi a\\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2} ax}{x^{2}}dx=16\pi\end{cases}\Rightarrow 16\pi=4\pi a\Rightarrow a=4$$

۴ــ گزینه «۳»

$$u_x+(1-y^{2})u_y=(1-y^{2})(u+1)$$

معادله دارای جواب خصوصی u_p و جواب عمومی u_g می‌باشد، ابتدا جواب خصوصی را پیدا می‌کنیم:

$$u_x+(1-y^{2})u_y=(1-y^{2})u+\underbrace{(1-y^{2})}$$

مربوط به جواب خصوصی

$$u_p(x,y)=Ay^{2}+By+C\Rightarrow u_{x_p}=0\;,\;u_{y_p}=2Ay+B$$

$$0+\cancel{(1-y^{2})}(2Ay+B)=\cancel{(1-y^{2})}(Ay^{2}+By+C)+\cancel{1-y^{2}}$$

$$2Ay+B=Ay^{2}+By+C+1\Rightarrow\begin{cases}y^{0}: B=C+1\Rightarrow C=-1\\ y^{1}: 2A=B\Rightarrow B=0\\ y^{2}: A=0\end{cases}\Rightarrow u_p(x,y)=-1$$

www.modaresanesharif.ac.ir

برای به دست آوردن جواب عمومی از دستور لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dx}{۱}=\frac{dy}{۱-y^۲}=\frac{du}{u(۱-y^۲)}$$

$$\begin{cases}\frac{dx}{۱}=\frac{dy}{۱-y^۲} & \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱+y}{۱-y})-Lnc_۱ \Rightarrow \sqrt{\frac{۱+y}{۱-y}}=c_۱e^x\\ \frac{dy}{\cancel{۱-y^۲}}=\frac{du}{\cancel{(۱-y^۲)}u} & \Rightarrow y=Lnu-Lnc_۲ \Rightarrow Ln\frac{u}{c_۲}=y \Rightarrow u=c_۲e^y\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_۱=\sqrt{\frac{۱+y}{۱-y}}e^{-x}\\ c_۲=u.e^{-y}\end{cases} \Rightarrow c_۲=F(c_۱) \Rightarrow u(x,y).e^{-y}=F(\sqrt{\frac{۱+y}{۱-y}}e^{-x}) \qquad (I)$$

$$u(x,۰)=x-۱ \Rightarrow \cancel{u(x,۰)}^{x-۱}\times e^{۰}=F(\sqrt{\frac{۱+۰}{۱-۰}}\times e^{-x})$$

$$x-۱=F(e^{-x})\ ;\ e^{-x}=t \Rightarrow -x=Lnt \Rightarrow x=-Lnt \Rightarrow F(t)=-Lnt-۱$$

از رابطه (I) داریم:

$$u_g(x,y).e^{-y}=-۱-Ln(\sqrt{\frac{۱+y}{۱-y}}.e^{-x}) \Rightarrow u_g(x,y)=\left[-۱-Ln(\sqrt{\frac{۱+y}{۱-y}}.e^{-x})\right].e^y$$

جواب کلی معادله:

$$u(x,y)=u_g(x,y)+u_p(x,y)$$

$$u(x,y)=-۱-[۱+Ln\sqrt{\frac{۱+y}{۱-y}}.e^{-x}].e^y$$

$$u(۱,\frac{۱}{۲})=-۱-[۱+Ln\sqrt{\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}}.e^{-۱}]e^{\frac{۱}{۲}}=-۱+[۱-Ln\sqrt{۳}]e^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow u(۱,\frac{۱}{۲})=-۱+e^{\frac{۱}{۲}}(۱-Ln\sqrt{۳})$$

۵ــ گزینه «۲» چون مسئله یک معادله موج نیمه متناهی می‌باشد و مقدار ارتعاش را در نقطه $x=۷$ و $t=۴$ می‌خواهد لذا از جواب دالامبر موج نیمه متناهی استفاده می‌شود.

$$u_{tt}=a^۲u_{xx}\ ;\ u(x,۰)=f(x)\ ,\ u_t(x,۰)=g(x)\ ,\ u(۰,t)=p(t)$$

$$\begin{cases}u(x,t)=\frac{۱}{۲}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{۱}{۲a}\int_{x-at}^{x+at}g(\theta)d\theta & ;if: x>at\\ u(x,t)=\frac{۱}{۲}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{۱}{۲a}\int_{x-at}^{x+at}g(\theta)d\theta+p(t-\frac{x}{a}) & ;if: x<at\end{cases}$$

$$x=۷\ ,\ t=۴\ ,\ a=۲$$

$$x-at=-۱\ ,\ x+at=۱۵\ ,\ t-\frac{x}{a}=\frac{۱}{۲} \qquad x<at(ok)$$

$$u(۷,۴)=\frac{۱}{۲}[f(۱۵)+f(-۱)]+\frac{۱}{۴}\int_{-۱}^{۱۵}g(\theta)d\theta+p(\frac{۱}{۲})$$

چون شرایط هندسی در u داده شده (شرط هندسی دیریکله) لذا گسترش فرد توابع y و g مدنظر است.

$$f(۱۵)=۰\ ,\ f(-۱)=-f(۱)=۱\ ,\ p(\frac{۱}{۲})=۱$$

$$u(۷,۴)=\frac{۱}{۲}[۰+۱]+\frac{۱}{۴}\int_{-۱}^{۱}\cancel{g(\theta)d\theta}^{۰}+\frac{۱}{۴}\int_{۱}^{۱۵}\cancel{g(\theta)d\theta}^{۲}+۱=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}(۲\theta)_{۱}^{۱۵}+۱=\frac{۱۷}{۲} \Rightarrow u(۷,۴)=\frac{۱۷}{۲}$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ــ گزینه «۱»

$$u_t - ۴(u_{xx} + u_{yy}) = t$$

$$Lu_t - ۴L(u_{xx} + u_{yy}) = Lt \Rightarrow ۵Lu(x,y,t) - \cancel{u(x,y,۰)}^{۰} - ۴\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}Lu(x,y,t) - ۴\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}Lu(x,y,t) = \frac{۱}{s^۲}$$

$$SV(x,y,s) - ۴(\frac{\partial^۲V}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲V}{\partial y^۲}) = \frac{۱}{s^۲}$$

اکنون تابع جواب $V(x,y,s) = \sum_{n=۱}^{\infty}[(a_n e^{\beta ny} + b_n e^{-\beta ny}) + \gamma_n]\sin nx$ را در معادله فوق قرار می‌دهیم:

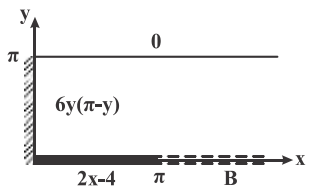
$$\sum_{n=۱}^{\infty}\Big[sa_n e^{\beta_n y} + sb_n e^{-\beta_n y} + \gamma_n s + ۴n^۲ a_n e^{\beta_n y} + ۴n^۲ b_n e^{-\beta_n y} + ۴\gamma_n - ۴a_n\beta_n^۲ e^{\beta_n y} + ۴b_n\beta_n^۲ e^{-\beta_n y}\Big]\sin nx = \frac{۱}{s^۲}$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\Big[(sa_n + ۴n^۲ a_n - ۴a_n\beta_n^۲)e^{\beta_n y} + (sb_n + ۴n^۲ b_n - ۴b_n\beta_n^۲)e^{-\beta_n y} + s\gamma_n + ۴\gamma_n\Big]\sin nx = \frac{۱}{s^۲}$$

برای داشتن جواب کران‌دار می‌بایست ضریب $e^{\beta_n y}$ صفر باشد.

$$sa_n + ۴n^۲ a_n - ۴a_n\beta_n^۲ = ۰ \Rightarrow s + ۴n^۲ - ۴\beta_n^۲ = ۰ \Rightarrow ۴\beta_n^۲ = ۴n^۲ + s \Rightarrow \beta_n^۲ = \frac{۱}{۴}(۴n^۲ + s) \Rightarrow \beta_n = \pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۴n^۲ + s}$$

۷ــ گزینه «۴»



$$u(x,y) = v(x,y) + Q(y) \ , \ Q(y) = ay + b$$

$$\begin{cases} u(x,۰) = \underbrace{v(x,۰)}_{\text{بایدصفرشود}} + Q(۰) \Rightarrow u(x,۰) = Q(۰) \\ u(x,\pi) = \underbrace{v(x,\pi)}_{\text{بایدصفرشود}} + Q(\pi) \Rightarrow u(x,\pi) = Q(\pi) \end{cases}$$

$$Q(۰) = \begin{cases} ۲x - ۴ & ۰ < x < \pi \\ B & x > \pi \end{cases} \Rightarrow a \times ۰ + b = \begin{cases} ۲x - ۴ & ۰ < x < \pi \\ B & x > \pi \end{cases} \Rightarrow b = \begin{cases} ۲x - ۴ & ۰ < x < \pi \\ B & x > \pi \end{cases}$$

$$Q(\pi) = ۰ \Rightarrow a \times \pi + b = ۰ \Rightarrow a = -\frac{b}{\pi}$$

$$Q(y) = b(۱ - \frac{y}{\pi}) = \begin{cases} (۲x - ۴)(۱ - \frac{y}{\pi}) & ۰ < x < \pi \\ B(۱ - \frac{y}{\pi}) & x > \pi \end{cases}$$

اکنون مسئله مقابل را حل می‌کنیم:

$$V_{xx} + V_{yy} = \begin{cases} x - ۲y & ۰ < x < ۱ \\ & ۰ < y < \pi \\ Ax & x > ۱ \end{cases}$$

$$V(x,۰) = ۰ \ , \ V(x,\pi) = ۰$$

$$V_x(۰,y) = u_x(۰,y) = ۶y(\pi - y)$$

$$V(x,y) = F(x)G(y) \ , \ \begin{cases} G(۰) = ۰ \\ G(\pi) = ۰ \end{cases} \ , \ G(y) = A\sin\lambda y + B\cos\lambda y$$

شرط مرزی B با اعمال : $G_k(y) = A\sin ky$

www.modaresanesharif.ac.ir

در معادله قرار می‌دهیم:

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(x).\sin ky$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(F_k''(x)-k^2F_k(x))\sin ky=\begin{cases}x-2y & 0<x<1\\ & 0<y<\pi\\ Ax & x>1\end{cases}$$

سری فوریه سینوسی را می‌نویسیم:

$$F_k''(x)-k^2F_k(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[(x-2y)+Ax]\sin kydy$$

$$F_k''(x)-k^2F_k(x)=2(A+1)x\left[\frac{(-1)^{k+1}+1}{k\pi}\right]+\frac{4(-1)^{k+1}}{k}$$

$$F_k(x)=C_ke^{kx}+d_ke^{-kx}+2(A+1)x\left[\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi}\right]+\frac{4(-1)^k}{k^3}$$

$$v(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(C_ke^{kx}+d_xe^{-kx}+2(Ax)x\frac{(-1)^x-1}{k^3\pi}+\frac{4(-1)^k}{k^3})\sin ky$$

برای جواب کراندار می‌بایست: $C_k=0$ لذا داریم:

$$v(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(d_ke^{-kx}+2(A+1)x.\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi}+\frac{4(-1)^k}{k^3})\sin ky$$

$$v_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(-kd_ke^{-kx}+2(A+1)\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi}+0)\sin ky$$

$$v_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}[-kd_k+(2A+2)\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi}]\sin ky=6y(\pi-y)$$

$$[-kd_k+2(A+1)\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi}]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}6y(\pi-y)\sin kydy-k.d_k=2\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi}(A+2+10)$$

برای همگرا بودن جواب معادله می‌بایست:

$$u.(x,y)=v(x,y)+Q(y)$$

برای این‌که در بازه $0<x<\pi$ جواب داشته باشیم، پس ضریب $e^{-u}o^x$ را صفر قرار داده و جواب معادله با ساده‌سازی برابر است با:

$$8(A+2+10)+B=0A+B+12=0\Rightarrow A+B=-12$$

۸ــ گزینه «۱»

$$f(\tau)=u(x,y)+iv(x,y)\xrightarrow{\text{روابط کوشی‌ریمان}}\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} & (1)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} & (2)\end{cases}$$

$$g(\tau)=v(x,y)+iu(x,y)\xrightarrow{\text{روابط کوشی‌ریمان}}\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y} & (3)\\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x} & (4)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(4)}\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=0\Rightarrow u=u(y) & (*)\\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\Rightarrow v=v(x) & (**)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2),(3)}\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow\xrightarrow{u=u(y)\ (*)}u(x,y)=\cos st.\\ \frac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow\xrightarrow{v=v(x)\ (**)}v(x,y)=\cos st.\end{cases}$$

پس تابع مختلط $f(z)$ یک تابع ثابت است.

---

www.modaresanesharif.ac.ir