فصل اول

«آنالیز ترکیبی»

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال ۱: در مجموعه‌ی $s=\{۱,۲,\cdots ۹۰۰\}$ چند عدد وجود دارد که بر اعداد ۴ یا ۵ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۳۰۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۰۵

پاسخ: گزینه «۳» در مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,...,n\}$ مجموعه اعدادی که بر k بخش‌پذیر باشند برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$ ([ ] علامت جزء صحیح است)

بنابراین اگر در اینجا A مجموعه‌ی اعدادی باشد که بر ۴ بخش‌پذیر و B مجموعه اعدادی باشد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$|A|=\left[\frac{۹۰۰}{۴}\right]=۲۲۵ \quad , \quad |B|=\left[\frac{۹۰۰}{۵}\right]=۱۸۰$$

اکنون برای آن‌که اعدادی را شمارش کنیم که هم بر ۴ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشند باید بین ۴ و ۵ ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) بگیریم و در این صورت خواهیم داشت:

$$|A\cap B|=\left[\frac{۹۰۰}{۲۰}\right]=۴۵$$

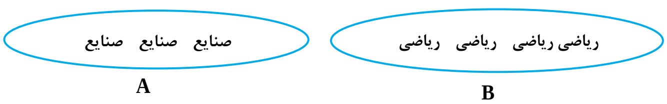
اکنون طبق اصل شمول و عدم شمول خواهیم داشت:

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)=۲۲۵+۱۸۰-۴۵=۳۶۰$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان ۳ دانشجوی رشته صنایع و ۴ دانشجوی رشته ریاضی را در کنار یکدیگر در یک صف مرتب کرد به طوری که دانشجویان هم رشته در کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۸۸

پاسخ: گزینه «۴» ۳ دانشجوی رشته صنایع را یک گروه (A) و ۴ دانشجوی رشته ریاضی را گروهی دیگر (B) فرض می‌کنیم. اکنون این دو گروه $!۲$ طریق جابجایی دارند، اما در بین گروه دانشجویان صنایع $!۳$ و گروه دانشجویان ریاضی $!۴$ جایگشت وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $۲!\times ۴!\times ۳!=۲۸۸$



مثال ۳: ۶ نفر برای نشستن دور یک میز گرد وارد اتاقی می‌شوند، به چند طریق ممکن است فرد خاصی در جای ثابتی بنشینند؟

۱) $۶\times ۵!$ ۲) $۶!$ ۳) $۵!$ ۴) $۴!$

پاسخ: گزینه «۳» هر گاه کلمه‌ی خاص گفته می‌شود به مفهوم آن است که عنصر یا فرد مورد نظر معلوم است و هیچ انتخابی برای او نداریم یعنی، در اینجا ابتدا فرد خاص باید در جای ثابت تعیین شده بنشیند (فقط یک حالت). اکنون ۵ نفر دیگر دور دایره می‌توانند به $!۵$ حالت جابه‌جا شوند در اینجا شاید این ایده **غلط** مطرح شود که ۵ نفر به $!۴$ حالت دور یک میز گرد مرتب می‌شوند ولی باید گفت که پس از نشستن فرد خاص در جایگاه، این شخص به عنوان مبدأ در نظر گرفته می‌شود و بقیه افراد نسبت به این فرد جابجا می‌شوند.

مثال ۴: به چند طریق می‌توان ۳ پسر بچه و ۲ دختر بچه را به صورت یک در میان در یک صف مرتب کرد؟

۱) $۲\times ۳!\times ۲!$ ۲) $۳!\times ۲!$ ۳) $۲\times (۳!)^۲$ ۴) $۲\times (۲!)^۲$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید از گروه پسر بچه‌ها شروع کنیم تا بتوانیم حالت یک در میان ایجاد کنیم. (پسر دختر پسر دختر پسر) در اینجا مانند قبل ۲ حالت وجود ندارد. اکنون پسرها به $!۳$ طریق و دخترها به $!۲$ طریق جایگشت دارند. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$۳!\times ۲!$

مثال ۵: به چند طریق می‌توان از یک گروه ۱۲ نفره یک تیم حداقل ۱۰ نفره انتخاب کرد؟

۱) ۶۶ ۲) ۷۸ ۳) ۱۲ ۴) ۷۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به کلمه حداقل توجه شود. انتخاب حداقل ۱۰ نفر به مفهوم انتخاب ۱۰ نفر یا ۱۱ نفر یا ۱۲ نفر می‌باشد. بنابراین طبق اصل جمع و ترکیب، تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۱۲}{۱۰}+\binom{۱۲}{۱۱}+\binom{۱۲}{۱۲}=\frac{۱۲!}{۱۰!\times ۲!}+\frac{۱۲!}{۱۱!\times ۱!}+\frac{۱۲!}{۱۲!\times ۰!}=۶۶+۱۲+۱=۷۹$$

مثال ۶: می‌خواهیم m مهره سفید یکسان و n مهره سیاه یکسان را در یک ردیف مرتب کنیم به طوری که هیچ دو مهره‌ی مجاوری سفید نباشند به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ $(m\ge n)$

۱) $\binom{m}{n+1}$ ۲) $\binom{n+1}{m}$ ۳) $\binom{m}{n}$ ۴) $\binom{n-1}{m}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای آن‌که هیچ دو مهره مجاوری سفید نباشند کافی است ابتدا مهره‌های سیاه را کنار یکدیگر مرتب کنیم (توجه کنید مهره‌ها یکسان است و جایگشتی به وجود نمی‌آید) سپس از $n+1$ مکان بین و طرفین آنها m مکان را برای قرار دادن m مهره سفید انتخاب کنیم. با این روش هیچ دو مهره‌ی مجاوری سفید نیست.

توضیح: در قسمت قبل نیز (در قسمت ترتیب) این مسأله را حل کردیم. به تفاوت این دو مسأله توجه کنید.

مثال ۷: به چند طریق می‌توان ۴ مهره <u>متمایز</u> را در بین ۳ جعبه <u>متمایز</u> تقسیم کرد به طوری که در جعبه اول دو مهره و در جعبه دوم و سوم هر کدام یک مهره قرار گیرد؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که مهره‌ها و جعبه‌ها متمایزند و در صورت مسأله قید شده است که در کدام جعبه دقیقاً چند مهره قرار گیرد.

$$\binom{۴}{۲,۱,۱}=\frac{۴!}{۲!۱!۱!}=۱۲$$

مثال ۸: به چند طریق می‌توان ۴ مهره <u>مشابه</u> را در ۶ جعبه <u>متمایز</u> تقسیم کرد به طوری که در هر جعبه حداکثر ۱ مهره قرار گیرد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به حالت گفته شده داریم:

$$C_۶^۴=\frac{۶!}{۴!\times ۲!}=۱۵$$

مثال ۹: به چند طریق می‌توان ۵ مهره مشابه را بین ۳ جعبه متمایز تقسیم کرد؟

۱) $۵^۳$ ۲) $۳^۵$ ۳) $\binom{۷}{۵}$ ۴) $\binom{۷}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق حالت ۷ تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۵+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}$$

مثال ۱۰: معادله $x_۱+x_۲+...+x_k=n$ با فرض $x_i\in\mathbb{N}\cup\{۰\}$, $x_i\ge ۲$ چند جواب دارد؟

۱) $\binom{n-k}{k-۱}$ ۲) $\binom{n-k}{k}$ ۳) $\binom{n-k}{k+۱}$ ۴) $\binom{n+k-۱}{k-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که در اینجا x_iها حداقل ۲ می‌باشند و این به مفهوم آن است که در هر جعبه حداقل باید دو مهره قرار گیرد، پس کافی است در هر جعبه دو مهره قرار دهیم سپس مهره‌های باقیمانده را در جعبه‌ها تقسیم کنیم. بنابراین تعداد $۲k$ از مهره‌ها را ابتدا کم می‌کنیم سپس تعداد $n-۲k$ مهره باقیمانده را در k جعبه تقسیم می‌کنیم.

$$\binom{n-۲k+k-۱}{k-۱}=\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

آزمون فصل اول

۱ـ تعداد جواب‌های صحیح و غیر منفی نامعادله $x_1 + x_2 + ...x_r \le n$ کدام است؟

۱) $\binom{r+n-1}{n}$ ۲) $\binom{r+n}{n}$ ۳) $\sum_{i=0}^{n}\binom{r+i-1}{i}$ ۴) ۲ و ۳

۲ـ به چند حالت امکان دارد چهار توپ به شماره‌های ۱و ۲ و ۳ و ۴ را در چهار جعبه به همین شماره‌ها قرار دهیم به طوری که اولاً هر جعبه دقیقاً یک توپ داشته باشد و ثانیاً هر توپ در جعبه‌ای قرار بگیرد که شماره جعبه هم شماره خودش نباشد؟

۱) ۲۴   ۲) ۲۰   ۳) ۹   ۴) ۱۲

۳ـ قصد داریم بتوانیم با استفاده از سیستم (۰و۱) حداقل ۱۶ پیام را مخابره کنیم، حال چند حالت ممکن برای این کار مورد نیاز است؟

۱) ۱۶   ۲) ۸   ۳) ۴   ۴) ۲

۴ـ چهار نفر قصد دارند برای تهیه بلیط به ۴ آژانس D,C,B,A مراجعه کنند، به چند حالت آژانس A دقیقاً یک نفر مراجعه کننده دارد؟

۱) ۱۸۰   ۲) ۱۸   ۳) ۱۰۸   ۴) ۱۹۲

۵ـ اگر بخواهیم ۶ توپ یکسان را در ۱۰ ظرف بریزیم به طوری که در هر ظرف حداکثر یک توپ باشد این کار به چند حالت امکان دارد؟

۱) $\binom{10}{6}$ ۲) $\binom{15}{10}$ ۳) $\binom{15}{4}$ ۴) $\binom{16}{10}$

۶ـ مقدار عبارت $\sum_{r=2}^{n}\binom{n}{r}$ برابر است با:

۱) $2^n - 2(1+n)$ ۲) $2^n - (n+1)$ ۳) $n^2 - 2^n$ ۴) $2^2 - 2n$

۷ـ قرار است که یک کمیته ۵ نفری از ۶ مرد و ۴ زن تشکیل شود تعداد حالاتی که تعداد مردان از تعداد زن‌ها در کمیته کم‌تر باشد چقدر است؟

۱) ۴۸   ۲) ۱۶   ۳) ۱۸۰   ۴) ۶۶

۸ـ در سؤال قبلی اگر مردی در صورتی که ریاست کمیته به او واگذار شود عضو کمیته شود، به چند حالت امکان دارد این کمیته تشکیل شود به طوری که ۳ مرد و ۲ زن در آن کمیته باشند؟

۱) ۶۰   ۲) ۱۲۰   ۳) ۱۸۰   ۴) ۳۲

۹ـ فرض کنید ۱۰ نفر به مهمانی دعوت شده‌اند که قرار است در یک ردیف بنشینند. حال اگر دو شخص A , B بخواهند کنار هم باشند و D,C نخواهند کنار هم باشند این ترتیب به چند حالت امکان پذیر است؟

۱) ۵۸۹۶۰۰   ۲) ۳۴۶۷۵۲۰   ۳) ۵۶۴۴۸۰   ۴) ۴۳۱۲۲۰

۱۰ـ عبارت $i\binom{n}{i}$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

۱) $n\binom{n}{n-1}$ ۲) $\binom{n}{i-1}$ ۳) $n\binom{n-1}{i-1}$ ۴) $n.2^{n-1}$

۱۱ـ می خواهیم برای یک ارتفاع ۵۰ سانتی‌متری دقیقاً ۵ پله بسازیم به طوری که ارتفاع هر پله مضربی از ۵ باشد حال تعداد حالاتی که می توان این پله‌ها را ساخت کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\binom{54}{4}$ ۳) $\binom{14}{4}$ ۴) $\binom{9}{4}$

۱۲ـ در جامعه‌ای به حجم ۱۰ همه نمونه‌های تصادفی بدون جایگذاری به حجم ۴ را در نظر بگیرید. در این نمونه‌های ممکن هر واحد جامعه چند بار تکرار می‌شود؟

۱) ۲۴۰   ۲) ۲۱۰   ۳) ۱۲۶   ۴) ۸۴

۱۳ـ فرض کنید در شهری ۴ آژانس وجود دارد اگر طی یک روز قرار باشد ۵ مسافر برای تهیه بلیط به این آژانس‌ها مراجعه کنند به چند حالت امکان دارد دقیقاً ۲ آژانس برای تهیه بلیط توسط این مسافرین انتخاب شود؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۹۲ ۳) ۳۶ ۴) ۹۶

۱۴ـ فرض کنید ۵ جعبه به رنگهای سفید، زرد، سیاه و سبز و آبی داریم. همچنین ۵ توپ نیز به همین رنگ‌ها موجود می‌باشد اگر توپ‌ها به صورت تصادفی داخل جعبه‌ها قرار داده شوند به چند حالت ۳ توپ در جعبه‌هایی با رنگ‌های مخالف خود قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۴۵

۱۵ـ اگر ۵ نفر بخواهند در یک ردیف بنشینند و قرار باشد که دو نفر A و B دقیقاً با یک نفر فاصله کنار هم باشند تعداد حالات مختلف چقدر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۱۶ـ K جعبه داریم که هر یک محتوی n مهره شماره‌های ۱ تا n است. از هر جعبه یک مهره برمی‌داریم. مطلوب است تعداد حالت‌هایی که ۳ کوچک‌ترین عدد انتخاب شده در این K عدد باشد؟

۱) $\sum_{X=1}^{K}\binom{K}{X}$ ۲) $\sum_{x=1}^{K}\binom{K}{X}(n-3)^{K-X}$ ۳) $\sum_{X=1}^{K}\binom{K}{3}(n-K)^{X-3}$ ۴) $\sum_{X=3}^{K}\binom{K}{X}(n-3)^{K-X}$

۱۷ـ فرض کنید k مهره نامتمایز داریم که می‌خواهیم آن‌ها را در r جعبه تقسیم کنیم، چند حالت امکان دارد که در یک جعبه دقیقاً m مهره قرار بگیرد؟

۱) $r\binom{k-m+r-2}{k-m}$ ۲) $r\binom{k-m+r-1}{k-m}$ ۳) $r\binom{k}{m}\binom{k+m-r-1}{k-m}$ ۴) $k\binom{k-m+r-1}{k-m}$

۱۸ـ از بین ۱۰ نفر اعضای یک کمیته، ۷ نفر آن‌ها حداقل یک فرزند دارند که بین آن‌ها ۴ نفر هیچ فرزند دختری ندارند. حال چند نفر آن‌ها فاقد فرزند هستند یا حداقل یک دختر دارند؟

۱) ۱۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۹ـ از گروهی متشکل از ۸ زن و ۶ مرد شورایی مرکب از ۳ زن و ۳ مرد بایستی تشکیل شود. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است هرگاه ۲ نفر از مردها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۸۹۶ ۳) ۷۹۲ ۴) ۸۴۲

۲۰ـ ۴ پسر و ۳ دختر چگونه می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند به طوری که هیچ دو دختری یا دو پسری کنار هم قرار نگیرند؟

۱) !۱۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۵۰۴۰ ۴) ۱۰۲

۲۱ـ در بسط $(x+y)^5$ ضریب جمله x^2y^3 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۲۲ـ به چند طریق ۴ دانش‌آموز می‌توانند در ۴ دبیرستان متفاوت ثبت نام داشته باشند؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۶۴

۲۳ـ یک سکه را ۵ بار پرتاب می‌کنیم چند حالت امکان دارد اختلاف بین تعداد شیرها و خط‌های ظاهر شده دقیقاً برابر ۱ باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۲۴ـ از بین ۵ مهندس صنایع، ۶ نفر مهندس مکانیک، ۷ نفر مهندس مواد، قصد داریم سه نفر برای پست مدیریت، معاونت و سرپرست تولید انتخاب کنیم. به چند حالت امکان دارد این انتخاب صورت گیرد؟(توجه از هر گروه دقیقاً یک نفر انتخاب شود)

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۲۶۰ ۳) ۶۳۰ ۴) ۷۴۰

۲۵ـ در سؤال قبل اگر برای پست مدیریت فقط از گروه مهندسی صنایع حق انتخاب داشته باشیم، آنگاه تعداد حالات کل این انتخاب کدام است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۲۶۰ ۴) ۶۳۰

۲۶ـ فرض کنید قصد داریم ۱۵ سیب را بین ۵ بچه تقسیم کنیم، به طوری‌که به هر بچه حداقل یک سیب برسد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۰۰۱　　۲) ۳۸۷۶　　۳) ۲۰۰۲　　۴) ۱۱۶۲۸

۲۷ـ به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در ۴ اتاق ۲ نفره تقسیم کرد؟

۱) ۴۰۳۲۰　　۲) ۲۵۲۰　　۳) ۵۲۱۰　　۴) ۲۵۶

۲۸ـ از گروهی متشکل از ۵ زن و ۷ مرد می‌خواهیم شورایی مرکب از ۲ مرد و ۲ زن را تشکیل دهیم. حال اگر ۲ مرد نخواهند با هم انتخاب شوند به چند طریق می‌توان این شورا را تشکیل داد؟

۱) ۱۰۰　　۲) ۱۵۰　　۳) ۲۰۰　　۴) ۱۰۰۰

۲۹ـ در یک سطح ۱۵ نقطه وجود دارد به چند حالت می‌توان در این سطح مثلث رسم نمود به طوری که هر رأس آن یک نقطه از نقاط موجود باشد؟

۱) ۴۵　　۲) ۴۵۵　　۳) ۵۱۰　　۴) ۴۳۵

۳۰ـ فرض کنید ۵ متغیر داریم که می‌خواهیم حاصل جمع آنها برابر ۳۰ باشد و از طرفی می‌خواهیم این متغیرها عدد صحیح مثبت و مضربی از ۲ باشند، به چند حالت این امر امکان پذیر است؟

۱) ۳۸۷۶　　۲) ۸۲۱۳　　۳) ۲۰۰۲　　۴) ۱۰۰۱

۳۱ـ مقدار عبارت $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(a-1)^i$ برابر کدام است؟

۱) a^n　　۲) $(a-1)^n$　　۳) a^n-1　　۴) $(a+1)^n$

۳۲ـ در ظرفی n توپ شماره‌دار سیاه و سفید موجود است، به چند طریق آن‌ها را می‌توان دور یک دایره قرار داد؟

۱) $(n-2)!$　　۲) $(n-2)!$　　۳) $(n-2)!(n-3)$　　۴) $(n-2)!(n-1)$

۳۳ـ تعداد n ظرف متفاوت و n توپ متفاوت مفروض است. به چند طریق مختلف می‌توان k توپ از n توپ انتخاب کرد و در k ظرف قرار داد به طوری که در هر ظرف یک توپ قرار بگیرد؟

۱) $\binom{n+k-1}{k-1}$　　۲) $\binom{n}{k}\binom{n}{k}$　　۳) $K!\binom{n}{k}\binom{n}{k}$　　۴) $\binom{2k-1}{k-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k}$

۳۴ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(k+1)!-k!=kk!$　　۲) $1.1!+2.2!+\dots+n.n!=(n+1)!-1$

۳) $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}=\frac{k-1}{k!}$　　۴) هر سه گزینه

۳۵ـ ظرفی حاوی n توپ سفید و n توپ قرمز است. تعداد حالاتی که می‌توان از این ظرف، n توپ انتخاب کرد، برابر است با:

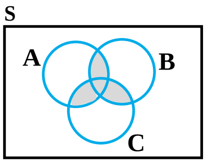
۱) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$　　۲) $\frac{(2n)!}{n!}$　　۳) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2$　　۴) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{k}$

فصل دوم

«اصول احتمال و احتمال‌های شرطی»

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال ۱: اگر A و B و C سه پیشامد دلخواه باشند آنگاه پیشامد $(A\cap B\cap C')\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ کدام گزینه است؟



۱) دو پیشامد رخ دهد.

۲) دو پیشامد یا سه پیشامدهای رخ دهد.

۳) حداقل یک پیشامد رخ دهد.

۴) حداقل دو پیشامد رخ دهد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با کمی دقت متوجه می‌شویم که گزینه «۲» زمانی درست است که بدین صورت بیان شود دقیقاً دو پیشامد یا "دقیقاً دو پیشامد یا دقیقاً سه پیشامد رخ دهد."

مثال ۲: سه تیرانداز به سمت هدفی با احتمال برخورد $\frac{3}{4}$ تیراندازی می‌کنند. اگر پرتاب‌ها مستقل از یکدیگر می‌باشد، احتمال دو اصابت کدام است؟

۱) $(\frac{1}{4})^3$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $(\frac{3}{4})^3$ ۴) $\frac{3}{16}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» احتمال دو اصابت به مفهوم اصابت دو تیر و عدم اصابت تیر دیگر می‌باشد که به سه حالت رخ می‌دهد. توجه کنید که تیراندازی‌ها از یکدیگر مستقل است:

$$P\,(\text{دو اصابت})=P(A_1\cap A_2\cap A'_3)+P(A_1\cap A'_2\cap A_3)+P(A'_1\cap A_2\cap A_3)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=(\frac{3}{4})^3$$

مثال ۳: یک جفت تاس را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد روی دو تاس ۵ و ۱۰ شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) $\frac{1}{32}$ ۳) $\frac{1}{54}$ ۴) $\frac{1}{100}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا پیشامدهای A, B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A_i :پیشامد این‌که در پرتاب iام مجموع ۵ شود

B_i :پیشامد این‌که در پرتاب iام مجموع ۱۰ شود

(به دلیل ناسازگاری $(A_1\cap B_2)$ و $(B_1\cap A_2)$ خواهیم داشت:

$$P\left[\left(\begin{array}{c}\text{در پرتاب اول مجموع}\\ \text{۵ باشد}\end{array}\text{ و }\begin{array}{c}\text{در پرتاب دوم مجموع}\\ \text{۱۰ باشد}\end{array}\right)\text{ یا }\left(\begin{array}{c}\text{در پرتاب اول مجموع}\\ \text{۱۰ باشد}\end{array}\text{ و }\begin{array}{c}\text{در پرتاب دوم}\\ \text{مجموع ۵ باشد}\end{array}\right)\right]$$

$$=P\big((A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap A_2)\big)=P(A_1\cap B_2)+P(B_1\cap A_2)$$

اکنون A_1 و B_2 و همچنین B_1 و A_2 مستقلند. بنابراین:

$$=P(A_1).P(B_2)+P(B_1).P(A_2)=\frac{4}{36}\times\frac{3}{36}+\frac{3}{36}\times\frac{4}{36}=\frac{1}{54}$$

مثال ۴: یک تاس به شکلی ساخته شده است که احتمال آمدن عدد زوج در آن دو برابر آمدن عدد فرد است. اگر این تاس را یک‌بار پرتاب کنیم احتمال آمدن حداقل ۵ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه «۱» اگر به اعداد فرد شانس K داده شود برای اعداد زوج شانس $۲K$ نسبت داده می‌شود.

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P	K	۲K	K	۲K	K	۲K

از طرفی طبق اصل اول احتمال:

$$P(S)=۱\Rightarrow K+۲K+K+۲K+K+۲K=۱\Rightarrow ۹K=۱\Rightarrow K=\frac{۱}{۹}$$

حال اگر A پیشامد مشاهده عدد حداقل ۵ باشد آنگاه $A=\{۵,۶\}$ و در نتیجه:

$$P(A)=P(۵)+P(۶)=\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۹}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

مثال۵: **تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که اعداد رو شده یکسان نباشند، چقدر است؟**

۱) $\frac{۱۲۰}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۶}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۳۰}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۹۰}{۲۱۶}$

پاسخ: گزینه «۱» کل فضای نمونه $n(S)=۶^۳=۲۱۶$ حالت دارد. اما برای ما مطلوب آن است که اعداد رو شده یکسان نباشند. اولین بار که تاس پرتاب می‌شود ۶ حالت برای آن وجود دارد. در دفعه دوم ۵ حالت ممکن است رخ دهد زیرا عدد دوم نباید مانند عدد اول باشد و در دفعه سوم ۴ حالت وجود دارد (عدد سوم نباید مانند عدد اول و دوم باشد) بنابراین:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۲۱۶}=\frac{۱۲۰}{۲۱۶}$$

مثال۶: **فرض کنید ۴ سکه و ۳ تاس پرتاب می‌شود. چقدر احتمال دارد که سکه‌ها یکسان و تاس‌ها متفاوت باشند؟**

۱) $\frac{۵}{۷۲}$ ۲) $\frac{۱۰}{۷۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

پاسخ: گزینه «۱» سکه اول را که پرتاب می‌کنیم دو حالت دارد. اما سکه‌های دیگر باید مانند سکه اول باشند لذا انتخابی به جز انتخاب حالت سکه اول ندارد. تاس‌ها نیز چنین‌اند، نباید مانند هم باشند یعنی در پرتاب اولین تاس هر عددی ظاهر شود، در پرتاب تاس دوم و سوم نباید اعداد تکراری باشند بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}=\frac{۲\times ۱\times ۱\times ۱\times ۶\times ۵\times ۴}{۲^۴\times ۶^۳}=\frac{۵}{۷۲}$$

مثال۷: **در یک بازی، بازیکن‌ها شش عدد صحیح مختلف را از بین اعداد ۱ تا ۴۹ انتخاب می‌کنند (ترتیب انتخاب مهم نیست) سپس ۶ عدد به عنوان اعداد برنده اعلام می شود. بازیکنی که همه‌ی شش عدد انتخابی او همان اعداد اعلام شده باشد جایزه بسیار بزرگی را می‌برد. و به همین ترتیب برای نفر دوم جایزه نصیب او می‌شود، اگر دقیقاً ۵ عدد انتخابی او مطابق پنج عدد اعلام شده باشد و برای نفر سوم نیز به همین ترتیب، احتمال برنده شدن جایزه سوم کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۵۴۱۰۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۷۷۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵۰۱۰}$

پاسخ: گزینه «۲» تعداد کل حالات برابر با انتخاب ۶ عدد از ۴۹ عدد است، اکنون حالت مطلوب آن است که ۴ عدد از ۶ عدد با اعداد اعلام شده یکسان باشند و ۲ انتخاب دیگر می‌تواند هر عددی باشد.

$$P(A)=\frac{\binom{۶}{۴}\binom{۴۳}{۲}}{\binom{۴۹}{۶}}\simeq\frac{۱}{۱۰۳۲}$$

مثال۸: **جعبه‌ای شامل ۳ توپ سفید، ۴ توپ سیاه و ۵ توپ قرمز است. یک توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم.**

الف ـ احتمال این‌که توپ انتخابی سفید باشد، را به دست آورید. **ب ـ احتمال این‌که توپ انتخابی سیاه باشد، را به دست آورید.**

پاسخ: W : توپ سفید و B : توپ سیاه

در اینجا فضای نمونه دارای $n(S)=۱۲$ عضو می‌باشد که شانس انتخاب همه توپ‌ها مساوی است. پس:

الف)

$$\begin{cases} n(S)=\binom{۱۲}{۱} \\ n(A)=\binom{۳}{۱}\end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۲}{۱}}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

$$\begin{cases} n(S)=\binom{۱۲}{۱} \\ n(B)=\binom{۴}{۱}\end{cases}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۲}{۱}}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

مثال۹: روی درب منزل شما ۲ قفل وجود دارد و کلیدهای آنها در بین ۵ کلید مختلفی است که در جیب دارید اما یکی از آنها را گم کرده‌اید. احتمال این‌که هنوز هم بتوانید درب منزلتان را باز کنید کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه «۴» یک کلید را که گم کرده‌اید یک کلید نیز برای یکی از قفل‌ها می‌باشد اکنون باید کلید قفل دیگر در بین سه کلید دیگر باشد تا بتوانید درب منزلتان را باز کنید یعنی مطلوب آن است که این کلید، کلید گم شده نباشد.

$$P(A)=\frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}}=\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۵}{۱}}=\frac{۳}{۵}$$

مثال۱۰: می‌خواهیم n مهره به شماره‌های ۱ تا n را در n جعبه به شماره‌های ۱ تا n تقسیم کنیم احتمال آن‌که جعبه اول خالی باشد کدام است؟

۱) $\left(\frac{n-۱}{n}\right)^n$ ۲) $\left(\frac{n-۲}{n}\right)^n$ ۳) $\frac{\binom{n}{۱}\times(n-۱)!}{n^n}$ ۴) $\frac{\binom{n}{۱}\times n-۱}{n^n}$

پاسخ: گزینه «۱» برای آن‌که جعبه اول خالی بماند، آن را کنار می‌گذاریم و باید n مهره متمایز را بین $n-۱$ جعبه دیگر تقسیم کنیم که بدون هیچ محدودیتی تعداد حالات برابر است با: $(n-۱)^n$ بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}}=\frac{(n-۱)^n}{n^n}=\left(\frac{n-۱}{n}\right)^n$$

مثال۱۱: در مثال قبل احتمال آن‌که فقط جعبه اول خالی باشد کدام است؟

۱) $\frac{\binom{n}{۲}\times(n-۱)!}{n^n}$ ۲) $\frac{\binom{n}{۲}\times(n-۱)^n}{n^n}$ ۳) $\frac{\binom{n}{۲}\times n!}{n^n}$ ۴) $\frac{(n-۱)^n}{n^n}$

پاسخ: گزینه «۱» به تفاوت این مثال با مثال قبل دقت کنید در مثال قبل ظرف اول خالی بود و ظرف‌های دیگر نیز می‌توانستند خالی باشند ولی در این مثال، باید فقط ظرف اول خالی بماند پس هیچ ظرف دیگری نباید خالی باشد. لذا دو تا از توپ‌ها را انتخاب می‌کنیم $\binom{n}{۲}$ و بین $n-۱$ ظرف تقسیم می‌کنیم که این دو توپ می‌توانند به $(n-۱)!$ در ظرف‌ها توزیع شوند پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}}=\frac{\binom{n}{۲}(n-۱)!}{n^n}$$

مثال۱۲: در جعبه‌ای N مهره با شماره‌های ۱ تا N وجود دارد. n مهره به تصادف و <u>با جایگذاری</u> از این جعبه خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که ماکزیمم شماره‌های انتخابی برابر با K باشد کدام است؟ $(K\le N)$

۱) $\frac{N^k-n^k}{N^n}$ ۲) $\frac{k^n-(k-۱)^n}{N^n}$ ۳) $\frac{k^N-(k-۱)^N}{N^n}$ ۴) $\frac{k^{N+۱}-k^N}{N^n}$

پاسخ: گزینه «۲» **روش اول:** باید در بین دسته‌های n تایی که با جایگذاری انتخاب می‌کنیم حداقل یکی از اعداد انتخابی k باشد و بقیه اعداد کمتر از k باشد (بقیه اعداد هر کدام (k-1) حالت دارد) یعنی، همه دسته‌های n تایی را شمارش کنیم که شامل یک k و بقیه کمتر از k یا شامل دو تا k و بقیه کمتر از k یا ...که برابر است با :

$$\frac{\binom{n}{۱}\times۱\times(k-۱)^{n-۱}+\binom{n}{۲}\times۱\times۱\times(k-۲)^{n-۲}+\ldots\binom{n}{n}\times۱\times\ldots\times۱\times(k-۱)^{n-n}}{N^n}=\frac{\sum_{i=۱}^{n}\binom{n}{i}(k-۱)^{n-i}}{N^n}$$

روش دوم: تمام مهره‌ها باید از k مهره‌ی اول (با جایگذاری) انتخاب شوند و حداقل یک بار مهره‌ی شماره k خارج شود و یا تمام مهره‌ها از بین $k-۱$ مهره‌ی اول خارج نشود.

$$\underbrace{\underbrace{1,2,3,\dots,k-1}_{(k-1)^n},k}_{k^n},k+1,k+2,\dots,N$$

$$P(A)=\frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}}=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$$

می‌توان نشان داد که دو جواب با یکدیگر برابرند:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(k-1)^{n-i}}{N^n}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(k-1)^{n-i}-(k-1)^n}{N^n}=\frac{(1+(k-1))^n-(k-1)^n}{N^n}=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$$

مثال ۱۳: احتمال آن‌که در یک اتاق ۱۰ نفری فقط دو نفر در یک روز به دنیا آمده باشند چقدر است؟

۱) $\dfrac{\binom{10}{2}\times P_{364}^{10}}{(365)^{10}}$ ۲) $\dfrac{\binom{10}{2}\times P_{364}^{8}}{(365)^{10}}$ ۳) $\dfrac{\binom{10}{2}\times P_{364}^{10}}{(365)^{9}}$ ۴) $\dfrac{\binom{10}{2}\times P_{364}^{8}}{(365)^{9}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا دو نفر از ۱۰ نفر انتخاب می‌کنیم. $\binom{10}{2}$ حالت که این دو نفر می‌توانند ۳۶۵ انتخاب داشته باشند. البته توجه کنید که یکی ۳۶۵ روز و دیگری باید تابع روز تولد اولی باشد (365×1) بقیه نیز به هر ترتیبی می‌توانند در روزهای دیگر تقسیم شوند. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{10}{2}\times 365\times 1\times P_{364}^{8}}{(365)^{10}}=\frac{\binom{10}{2}\times P_{364}^{8}}{(365)^{9}}$$

مثال ۱۴: شهری ۴ تعمیرکار تلویزیون دارد اگر ۴ دستگاه تلویزیون خراب باشند، احتمال این‌که دقیقاً به ۲ تعمیرکار مراجعه شود کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۴۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** تعداد کل حالات برابر است با تعداد حالات تقسیم ۴ تلویزیون خراب بین ۴ تعمیرکار تلویزیون (4^4 حالت). در صورت کسر احتمال، ابتدا ۲ تا از ۴ تعمیرکار انتخاب می‌گردد. حال ۴ تلویزیون متفاوت و ۲ تعمیرکار مختلف داریم یا به هر کدام از آنها ۲ تلویزیون خراب یا یکی را انتخاب کرده به او ۳ تلویزیون و به دیگری یکی می‌دهیم.

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}\left[\frac{4!}{2!2!}+\binom{2}{1}\frac{4!}{3!1!}\right]}{4^4}\simeq 0/32$$

روش دوم: ابتدا دو تعمیرکار از ۴ تعمیرکار را انتخاب کرده و هر کدام از ۴ تلویزیون خراب 2^4 انتخاب دارند که بین <u>۲</u> تعمیر کار تقسیم شوند. از این تعداد حالات، دو حالت است که هر چهار تلویزیون به یک تعمیرکار می‌رسد و جزء حالات مساعد نیست.

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}(2^4-2)}{4^4}\simeq 0/32$$

مثال ۱۵: اگر بخواهیم در مثال قبل ۲k اتاق دارای بازیکنان غیر هم رنگ باشند، احتمال آن کدام است؟

☑ **پاسخ:** ابتدا $2k$ بازیکن سیاه پوست از ۱۰ بازیکن سیاه پوست و $2k$ بازیکن سفید پوست از ۱۰ بازیکن سفید پوست انتخاب می‌کنیم. سپس به $(2k)!$ می‌توان بازیکنان هر گروه را هم اتاق نمود. همچنین باید بقیه بازیکنان سیاه پوست و بقیه بازیکنان سفید پوست نیز با یکدیگر هم اتاق شوند.

$$\frac{\binom{10}{2k}\times\binom{10}{2k}\times(2k)!\times\left[\frac{(10-2k)!}{2^{5-k}(5-k)!}\right]\times\left[\frac{(10-2k)!}{2^{5-k}(5-k)!}\right]}{\frac{20!}{(2!)^{10}\times 10!}}$$

مثال۱۶: اگر ۸ مهره رخ شطرنج را به تصادف روی صفحه شطرنج قرار دهیم احتمال این‌که هیچ یک از رخ‌ها دیگری را نزند یعنی هیچ سطر و یا ستونی بیش از یک رخ نداشته باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۶۴\times ۵۰\times ۳۶\times ۲۵\times ۱۶\times ۹\times ۵}{۶۴\times ۶۳\times ...\times ۵۷}$

۲) $\frac{۶۴\times ۴۹\times ۳۶\times ۲۵\times ۱۶\times ۹\times ۴\times ۱}{۶۴\times ۶۳\times ...\times ۵۷}$

۳) $\frac{۸^۸}{\binom{۶۴}{۸}}$

۴) $\frac{۷!}{\binom{۶۴}{۸}}$

پاسخ: گزینه «۲» توجه کنید که صفحه شطرنج ۸ سطر و ۸ ستون دارد. برای انتخاب اولین مکان ۶۴ گزینه داریم چراکه در اولین بار هیچ محدودیتی وجود ندارد. برای دومین رخ سطر یا ستون رخ اول حذف شده است (تا رخ اول زده نشود) یعنی، ۱۵ خانه حذف شده است $۶۴-۱۵=۴۹$ برای انتخاب سوم ۱۳ خانه دیگر حذف می‌شود $۴۹-۱۳=۳۶$ گزینه و همین‌طور تا آخرین خانه.

$$P(A)=\frac{۶۴\times ۴۹\times ۳۶\times ۲۵\times ۱۶\times ۹\times ۴\times ۱}{۶۴\times ۶۳\times ...\times ۵۷}$$

مثال۱۷: جعبه‌ای حاوی ۱۰ مهره سفید و ۱۲ مهره قرمز است. دو مهره به تصادف انتخاب کرده و بدون جایگذاری و بدون توجه به رنگشان آنها را دور می‌ریزیم، احتمال این‌که سومین مهره که به تصادف استخراج می‌کنیم قرمز باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۲}{۲۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱۲}{۱۸}$

پاسخ: گزینه «۲» در اینجا نیز چون هیچ اطلاعاتی از رنگ مهره اول و دوم نداریم این جمله در مسأله تأثیری در حل مسأله ندارد، انتخاب مهره سوم مانند انتخاب مهره اول است پس احتمال آن (مهره سوم) با احتمال انتخاب یک مهره قرمز برابر است با: $P(R_۳)=\frac{۱۲}{۲۲}$

می‌توان آن را با استفاده از نمودار درختی مانند مدل آوندپولیا نشان داد.

مثال ۱۸: اگر ۱۰ زوج متأهل دور یک میزگرد غذاخوری نشسته باشند، احتمال این‌که هیچ زنی در کنار شوهرش نباشد کدام است؟

۱) ۰/۶۷ ۲) ۰/۳۸ ۳) ۰/۶۲ ۴) ۰/۳۳

پاسخ: گزینه «۴» باز هم طبق تعمیم خاصیت ۵، خواهیم داشت: اگر $A_i\ (i=۱,۲,...,۱۰)$ نشان‌دهنده پیشامدی باشد که i امین زوج کنار هم نشسته باشند آنگاه احتمال مورد نظر برابر با $۱-P(\bigcup_{i=۱}^{۱۰}A_i)$ است. به ازای تعداد زوج پیشامدها، علامت منفی و به ازای تعداد فرد پیشامدها علامت مثبت وجود دارد.

$$P(\bigcup_{i=۱}^{۱۰}A_i)=\sum_{i=۱}^{۱۰}P(A_i)-...+(-۱)^{n+۱}.\sum_{i_۱<i_۲<...<i_n}P(A_{i_۱}A_{i_۲}...A_{i_n})+...-P(A_۱A_۲...A_{۱۰})$$

$$=\binom{۱۰}{۱}۲^۱\frac{۱۸!}{۱۹!}-\binom{۱۰}{۲}۲^۲\frac{۱۷!}{۱۹!}+\binom{۱۰}{۳}۲^۳\frac{۱۶!}{۱۹!}-...-\binom{۱۰}{۱۰}۲^{۱۰}\frac{۹!}{۱۹!}\simeq ۰/۶۶ \quad \Rightarrow ۱-P(\bigcup_{i=۱}^{۱۰}A_i)=۱-۰/۶۶\simeq ۰/۳۳$$

مثال۱۹: عددی را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی $[۳,۷]$ انتخاب می‌کنیم احتمال این‌که عدد انتخابی در فاصله $[۴,۵/۵]$ باشد را به‌دست آورید.

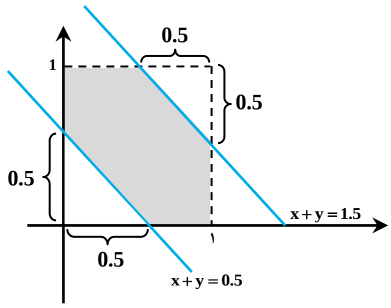
پاسخ: کل فضای نمونه ما به صورت $S=[۳,۷]$ و پیشامد $A=[۴,۵/۵]$ می‌باشند.

$$P(A)=\frac{\text{طول زیر فاصله } A}{\text{طول کل فضای نمونه}}=\frac{۵/۵-۴}{۷-۳}=\frac{۱/۵}{۴}=۰/۳۷$$

مثال۲۰: دو عدد تصادفی را در فاصله $(۰,۱)$ انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که مجموع آنها بین ۰/۵ و ۱/۵ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ : گزینه «۳» اگر یکی از اعداد را با x و دیگری را با y نشان دهیم، آنگاه نقطه به مختصات (x,y) در داخل مربع به ضلع ۱ واقع است و ناحیه مطلوب نقاطی است که:



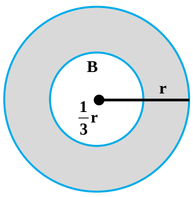
$$۰/۵ \le x+y \le ۱/۵$$

$$P(A)=\frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت کل فضای نمونه}}=\frac{۱-۲(\frac{۰/۲۵}{۲})}{۱}=۱-۰/۲۵=۰/۷۵$$

مثال ۲۱: نقطه‌ای را به طور تصادفی از دایره‌ای به شعاع $r=۳$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که نقطه انتخابی تا محیط دایره حداکثر $\frac{۲}{۳}$ شعاع باشد برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۹}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه «۲» فضای مطلوب ما در واقع فضای انتخابی بین دایره‌ای کلی و دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۳}r$ می‌باشد چرا که در این ناحیه هر نقطه‌ای اختیار شود فاصله‌اش تا محیط دایره حداکثر $\frac{۲}{۳}$ شعاع است (ناحیه هاشور خورده).

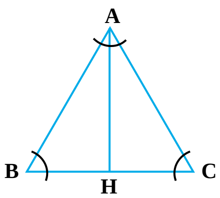


$$S_{\text{کل}}=\pi r^۲=۹\pi \quad , \quad S_A=S_{\text{کل}}-S_B=\pi r^۲-\frac{\pi r^۲}{۹}=\frac{۸}{۹}\pi r^۲ \quad , \quad P(A)=\frac{S_A}{S_{\text{کل}}}=\frac{\frac{۸}{۹}\pi r^۲}{\pi r^۲}=\frac{۸}{۹}$$

مثال ۲۲: یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌شود، احتمال آن‌که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از یک باشد کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۹\sqrt{۳}}$ ۲) $۱-\frac{۲\pi}{۹\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا به مرکز هر رأس به شعاع ۱ کمانی رسم می‌کنیم. اگر نقطه انتخابی از هر رأس بیشتر از یک واحد فاصله داشته باشد، باید درون مثلث خارج از این سه دایره باشد.



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}(AH\times BC)$$

$$AH^۲=AB^۲-BH^۲ \Rightarrow AH^۲=۳^۲-(\frac{۳}{۲})^۲ \Rightarrow AH=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۳=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

اکنون مساحت ۳ قطاع را به دست می‌آوریم:

$$S_۱=\frac{\alpha}{۳۶۰}\times\pi r^۲=\frac{۶۰}{۳۶۰}\times\pi\times۱\times۱=\frac{\pi}{۶}$$

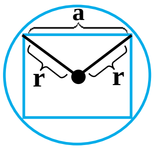
$$\Rightarrow S_۱+S_۲+S_۳=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow P(\text{مطلوب})=\frac{\text{مساحت کل مثلث} - \text{مجموع مساحت قطاع‌ها}}{\text{مساحت کل مثلث}}=\frac{\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}-\frac{\pi}{۲}}{\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}}=۱-\frac{۲\pi}{۹\sqrt{۳}}$$

مثال ۲۳: مربعی به طول ضلع a در داخل دایره‌ای محاط شده است اگر نقطه‌ای به تصادف در دایره انتخاب کنیم با چه احتمالی نقطه داخل مربع است؟

۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) $\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{a^{۲}}{۲\pi}$ ۴) $\frac{۲a^{۲}}{\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به راحتی می‌توانیم شعاع دایره را بر حسب ضلع مربع به دست آوریم. اکنون برای آن‌که نقطه داخل مربع باشد، باید مساحت مربع را بر مساحت دایره تقسیم کنیم.

$$r^{۲}+r^{۲}=a^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۲r^{۲}\Rightarrow p(A)=\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت دایره}}=\frac{a^{۲}}{\pi r^{۲}}=\frac{۲r^{۲}}{\pi r^{۲}}=\frac{۲}{\pi}$$



مثال ۲۴: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک شیر مشاهده شود.

الف ـ احتمال این‌که تعداد پرتاب‌های لازم فرد باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فضای نمونه به این صورت است که ممکن است در دفعه اول شیر مشاهده شود، ممکن است دفعه اول خط مشاهده شود و در پرتاب دوم شیر مشاهده شود و ...

S	H	TH	TTH...
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}\dots$

$$P(A)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲}+\dots=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-(\frac{۱}{۲})^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

ب ـ احتمال این‌که حداقل ۵ پرتاب لازم باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» پیشامد B پیشامد حداقل ۵ پرتاب است. توجه کنید که حداقل ۵ پرتاب یعنی ۵ پرتاب یا بیشتر .

$$P(B)=(\frac{۱}{۲})^{۵}+(\frac{۱}{۲})^{۶}+\dots=\frac{(\frac{۱}{۲})^{۵}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۶}$$

مثال ۲۵: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد، با کدام احتمال تعداد دفعات پرتاب شده فرد است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که وقتی دو تاس را پرتاب می‌کنیم :

ممکن است در بار اول پرتاب مجموع ۷ باشد : $e_{۱}$

ممکن است در بار دوم پرتاب مجموع ۷ باشد : $e_{۲}$

⋮ ⋮

دو تاس را پرتاب کنیم احتمال مجموع (۷) برابر است با: $e_{۱}:\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$$P(e_{۱})=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

دو تاس را پرتاب می‌کنیم احتمال آن‌که در بار دوم ۷ بیاید یعنی در بار اول نیاید و در بار دوم مجموع ۷ بیاید.

$$P(e_{۲})=\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}$$

حاصل جمع روبرو یک تصاعد هندسی است.

احتمال	$e_{۱}$	$e_{۲}$	$e_{۳}$	...
P	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}$	$(\frac{۵}{۶})^{۲}\times\frac{۱}{۶}$	...

$$P(e_{۱})+P(e_{۳})+\dots=\frac{۱}{۶}+(\frac{۵}{۶})^{۲}\cdot\frac{۱}{۶}+\dots=\frac{\frac{۱}{۶}}{۱-(\frac{۵}{۶})^{۲}}=\frac{۶}{۱۱}$$

مثال:۲۶ جعبه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز است. ۳ مهره یک به یک و بدون جایگذاری از جعبه خارج می‌کنیم.

الف ـ احتمال این‌که مهره انتخابی اول قرمز، دومی سفید و سومی قرمز باشد را به‌دست آورید.

۱) $\frac{6}{56}$　　۲) $\frac{8}{57}$　　۳) $\frac{1}{84}$　　۴) $\frac{10}{104}$

پاسخ: گزینه «۳» الف ـ طبق تعمیم قانون ضرب احتمال، فرض کنید R نشان‌دهنده مهره‌های قرمز و W نشان‌سدهنده مهره‌های سفید است. در این صورت خواهیم داشت:

$$P(R_1 \cap W_2 \cap R_3) = P(R_1).P(W_2 | R_1).P(R_3 | R_1 \cap W_2) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

ب ـ احتمال این‌که دو مهره قرمز و یک مهره سفید انتخاب شوند را به‌دست آورید.

۱) $\frac{1}{30}$　　۲) $\frac{2}{27}$　　۳) $\frac{1}{28}$　　۴) $\frac{2}{15}$

پاسخ: گزینه «۳» در اینجا ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست.

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{28}$$

مثال:۲۷ فرض کنید ۲۰ درصد کلیه پروازهای داخلی تأخیر دارند و ۵۰ درصد پروازها بین ظهر تا نیمه‌شب انجام می‌شود و ۷۵ درصد پروازهای دارای تأخیر از پروازهای بین ظهر تا نیمه شب است. احتمال این که یک پرواز منتخب از بین پروازهای ظهر تا نیمه‌شب تأخیر نداشته باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۲۵　　۲) ۰/۹۰　　۳) ۰/۴۵　　۴) ۰/۷۰

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به صورت مسأله اطلاعات آن به‌صورت زیر است:

A: تأخیر پرواز　　$P(A) = 0/2$

B: پرواز بین ظهر تا نیمه شب　　$P(B) = 0/5$　　, $P(B | A) = 0/75$

اکنون مسأله از ما $P(A' | B)$ را خواسته است که از مکمل آن استفاده می‌کنیم:

$$P(A' | B) = 1 - P(A | B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A).P(B | A)}{P(B)} \Rightarrow P(A' | B) = 1 - \frac{0/2 \times 0/75}{0/5} = 1 - 0/3 = 0/7$$

مثال:۲۸ سه ظرف I و II و III مفروض است. ظرف I شامل یک مهره سفید و ۲ مهره سیاه است. ظرف II شامل دو مهره سفید و سه مهره سیاه است و ظرف III شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. تاس همگنی را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ۶ بیاید ظرف III و اگر عدد ۱ یا ۲ بیاید ظرف II و در غیر این‌صورت ظرف I را انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که مهره سفید خارج شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{630}$　　۲) $\frac{1}{5}$　　۳) $\frac{1}{240}$　　۴) $\frac{23}{74}$

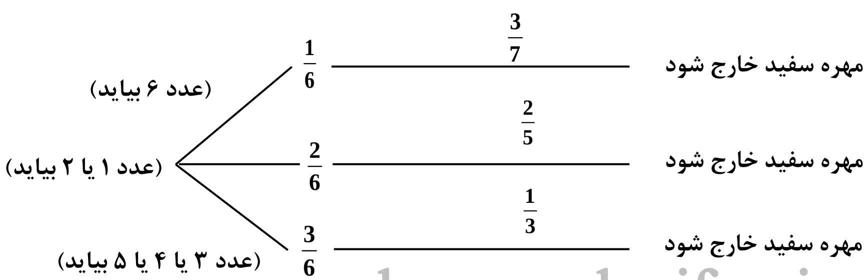
پاسخ: گزینه «۱» طبق قانون احتمال کل پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A_i: ظرف i ام انتخاب شود　　B: پیشامد آنکه مهره سفید خارج شود

اکنون طبق قانون احتمال کل $P(B)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).P(B | A_i) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{630}$$

یک روش ساده برای نشان دادن قانون احتمال کل، به صورت نمودار درختی است.



مثال۲۹: یک آزمایش تصادفی را در نظر بگیریم که به طور مستقل تکرار می‌شود. اگر پیشامدهای A و B از فضای نمونه این آزمایش تصادفی ناسازگار باشند احتمال آن‌که پیشامد A قبل از B رخ دهد کدام است؟

۱) $\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$ ۲) $\frac{P(A')}{P(A)+P(B)}$ ۳) $\frac{P(B)}{P(A)+P(B)}$ ۴) $\frac{P(B')}{P(A)+P(B)}$

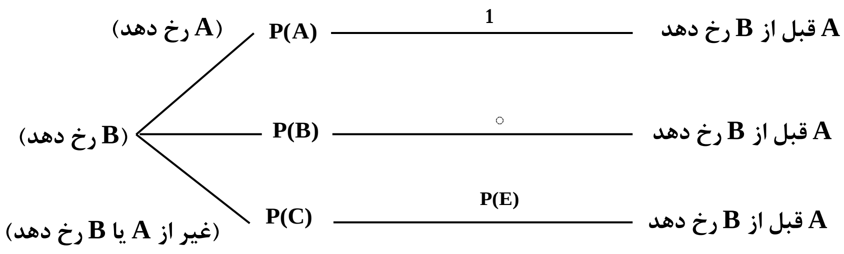
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم. پیشامدها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

E : پیشامد این‌که A قبل از B رخ دهد.

$$P(E)=P(A)\times P(E\,|\,A)+P(B)\times P(E\,|\,B)+P(C)\times P(E\,|\,C)=P(A)\times ۱+\circ+P(C)\times P(E)$$

$$\Rightarrow P(E)=P(A)+P(C)\times P(E)\Rightarrow P(E)=\frac{P(A)}{۱-P(C)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

روش نمودار درختی:



مثال۳۰: دو تاس سالم را می‌ریزیم تا مجموع ۴ یا ۷ مشاهده شود احتمال آن‌که مجموع ۴ قبل از مجموع ۷ رخ دهد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» این مسأله را می‌توانیم به مدل‌های مختلف حل کنیم. در اینجا با استفاده از قانون احتمال کل خواهیم داشت:

A : پیشامد مجموع ۴ قبل از مجموع ۷ $\qquad p(A)=?$

$B_۱$: پیشامد مجموع ۴ در اولین آزمایش $\qquad P(B_۱)=\frac{۳}{۳۶}$

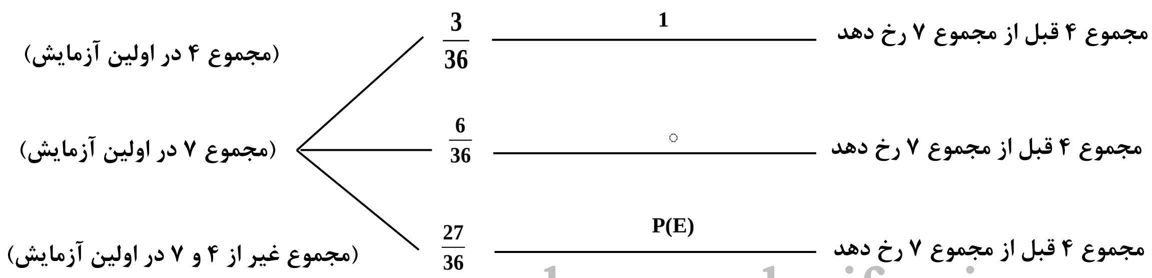
$B_۲$: پیشامد مجموع ۷ در اولین آزمایش $\qquad P(B_۲)=\frac{۶}{۳۶}$

$B_۳$: پیشامد مجموع غیر از ۴ و ۷ در اولین آزمایش $\qquad P(B_۳)=\frac{۲۷}{۳۶}$

اکنون طبق قانون احتمال کل $P(A)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A)=\sum_{i=۱}^{n}P(B_i).P(A\,|\,B_i)=P(B_۱)\times P(A\,|\,B_۱)+P(B_۲)\times P(A\,|\,B_۲)+P(B_۳)\times P(A\,|\,B_۳)$$

$$=\frac{۳}{۳۶}\times ۱+\frac{۶}{۳۶}\times\circ+\frac{۲۷}{۳۶}\times P(A)\Rightarrow P(A)=\frac{\frac{۳۳}{۳۶}}{۱-\frac{۲۷}{۳۶}}=\frac{۱}{۳}$$



مثال۳۱: فرض کنید که شما به طور پیوسته تمبر جمع می‌کنید و کلاً m نوع تمبر وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید هر مرتبه که یک تمبر جدید خریداری می‌کنید با احتمال P_i از نوع i ام $(i=1,2,\dots,m)$ است. اگر شما n امین تمبر را جمع‌آوری کرده باشید با چه احتمالی این تمبر جدید است؟

۱) $1-\sum_{i=1}^{m}P_i(1-P_i)^{n-1}$ ۲) $\sum_{i=1}^{m}P_i(1-P_i)^{n-1}$ ۳) $\sum_{i=1}^{m}\binom{n}{i}.P_i^n(1-P_i)^{n-m}$ ۴) صورت مسأله ناقص است.

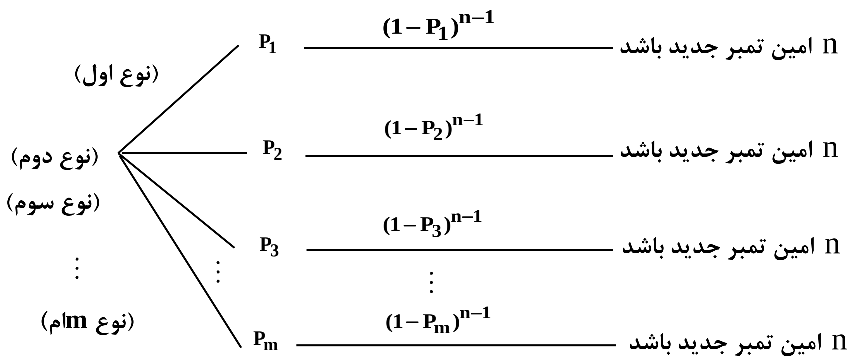
پاسخ: گزینه «۲»

$$P(\text{امین تمبر جدید باشد } n) = P(\text{نوع اول}).P(\text{جدید}\mid\text{نوع اول}) + P(\text{نوع دوم}).P(\text{جدید}\mid\text{نوع دوم})$$

$$+\dots+p(\text{نوع } m).P(\text{جدید}\mid\text{نوع } m) = P_1(1-P_1)^{n-1}+P_2(1-P_2)^{n-1}+\dots+P_m(1-P_m)^{n-1}=\sum_{i=1}^{m}P_i(1-P_i)^{n-1}$$

نکته: $P(\text{جدید}\mid\text{نوع اول})$ یعنی اینکه تمام $(n-1)$ تمبر قبلی، از نوع اول نبوده باشند یعنی $(1-P_1)^{n-1}$

نمودار درختی:



مثال۳۲: در یک کلاس ترک سیگار، ۴۸ درصد از زن‌ها و ۳۷ درصد از مردها شرکت کرده‌اند و موفق شده‌اند که حداقل تا یکسال بعد از کلاس سیگار نکشند، این افراد در پایان یکسال در یک جشن شرکت می‌کنند. اگر ۶۲ درصد از شرکت‌کنندگان در آن کلاس مرد باشند.

درصد زن‌هایی که در جشن شرکت کرده‌اند، برابر است با:

۱) ٪۳۸ ۲) ٪۴۱/۳ ۳) ٪۴۴/۳ ۴) ٪۳۵

پاسخ: گزینه «۳»

$$P(\text{زن باشد}\mid\text{در جشن شرکت کند})=P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B\mid A).P(A)+P(B\mid A').P(A')}$$

$$=\frac{۰/۴۸\times۰/۳۸}{(۰/۴۸\times۰/۳۸)+(۰/۳۷\times۰/۶۲)}=۰/۴۴۳\Rightarrow ۰/۴۴۳\times۱۰۰=۴۴/۳٪$$

مثال۳۳: مردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش شیر است نگه می‌دارد. او یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و آن را پرتاب می‌کند. اگر شیر ظاهر شود احتمال آن‌که سکه سالم انتخاب شده باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

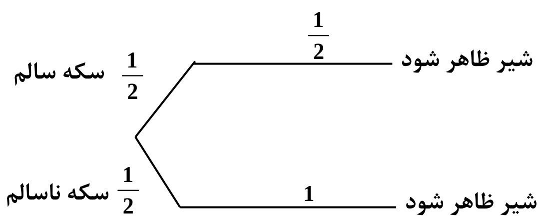
پاسخ : گزینه «۱» پیشامدها S و N_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

S: سالم بودن سکه N_1: بار اول سکه شیر بیاید

$$P(S\mid N_1)=\frac{P(S).P(N_1\mid S)}{P(S).P(N_1\mid S)+P(N_1\mid S').P(S')}\Rightarrow P(S\mid N_1)=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+۱\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

نمودار درختی مسأله به صورت روبرو می‌باشد:

شیر ظاهر شود

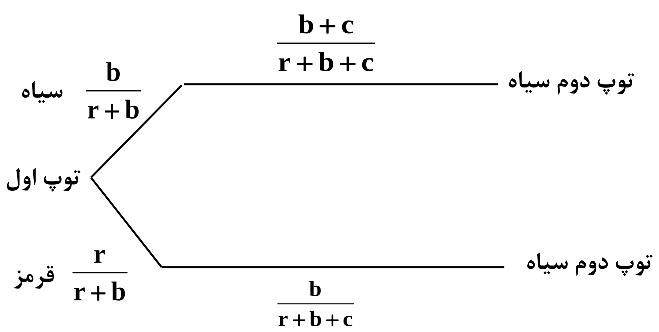


مثال ۳۴: (مدل آوندپولیا) در ظرفی b توپ سیاه و r توپ قرمز وجود دارد. توپی را به تصادف انتخاب و c توپ دیگر از همان رنگ به ظرف اضافه می‌کنیم. اکنون اگر توپ دیگری را از ظرف انتخاب کنیم احتمال این‌که توپ دوم سیاه باشد کدام است؟

۱) $\frac{r}{r+b+c}$ ۲) $\frac{b}{r+b}$ ۳) $\frac{b}{r+b+c}$ ۴) $\frac{rb}{r+b+c}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» توجه کنید که چون هیچ اطلاعی راجع به رنگ مهره اول به ما داده نشده است لذا مانند این است که برای اولین بار یک مهره از ظرف انتخاب می‌کنیم یعنی، احتمال آن برابر با $\frac{b}{r+b}$ است. این موضوع را می‌توان به صورت روبرو نشان داد.

این مدل مسأله توسط پولیا نشان داده شده که اگر اطلاعات داده شده در صورت مسأله سفید نباشد به صورت جمله اضافی در مسأله است.



آزمون فصل دوم

۱ـ اگر بدانیم ۰/۴ افراد دارای فرزند پسر و ۰/۲ دارای هم فرزند دختر و هم پسر و ۰/۳ دارای فرزند دختر در بین فرزندانشان می باشند حال احتمال این که یک خانواده فقط فرزند دختر یا پسر داشته باشد چقدر است؟

۱) ۰/۳   ۲) ۰/۴   ۳) ۰/۲   ۴) ۰/۵

۲ـ فرض کنید A , B دو مجموعه باشند آن‌گاه $(A\cap B')\cap(B\cap A')$ برابر است با:

۱) فضای مرجع   ۲) برابر تهی خواهد شد.

۳) بستگی به تعداد فصل مشترک دو مجموعه دارد.   ۴) هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

۳ـ فرض کنید شخصی به طور تصادفی گامی به سمت راست یا چپ بر می‌دارد که جهت گام‌ها مستقل از هم می‌باشد احتمال این که بعد از ۲ گام برداشتن این شخص در جای فعلی باشد چه‌قدر است؟

۱) $P^{۲}(۱-P)^{۲}$ ۲) $۲P(۱-P)$ ۳) $P(۱-P)^{۲}$ ۴) $P^{۲}$

۴ـ دو فرد A , B همزمان به سمت هدفی تیراندازی می کنند اگر احتمال اصابت تیر به هدف برای هر کدام برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد. و آن‌گاه بدانیم تیری به هدف خورده است چقدر احتمال دارد هر دو نفر هدف را مورد اصابت قرار دهند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

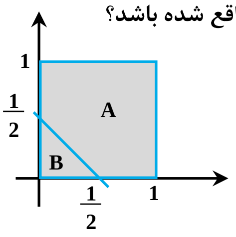
۵ـ در ظرفی ۲۰ مهره وجود دارد که ۴ سیاه و ۱۰ سفید، ۳ آبی و ۳ قرمز وجود دارد. ۴ نفر به ترتیب هر کدام یک مهره بدون جایگذاری انتخاب می کنند. چقدر احتمال دارد نفر اول مهره سفید، نفر دوم مهره سفید و نفر سوم مهره آبی و آخری مهره قرمز انتخاب کند؟

۱) ۰/۰۰۷   ۲) ۰/۰۴۱   ۳) ۰/۰۰۳   ۴) ۰/۰۰۶

۶ـ شخصی دارای n کلید است که یکی از این کلید ویژه درب اصلی است. حال فرض کنید شخص قصد دارد درب اصلی را باز کند لذا کلیدها را یک به یک چک کرده و اگر کلید متعلق به درب نباشد کنار گذاشته می‌شود تا به کلید اصلی برسد چقدر احتمال دارد در r اُمین انتخاب درب باز شود؟

۱) $\frac{۱}{n}$ ۲) $\frac{r}{n}$ ۳) $\left(\frac{n-۱}{n}\right)^{r}$ ۴) $\left(\frac{۱}{n}\right)^{r}$

۷ـ ۴ نقطه از ناحیه A انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد نقطه اول و دوم درون ناحیه B که زیر مجموعه ناحیه A است واقع شده باشد؟



۱) ۰/۰۱۲
۲) ۰/۱۲۵
۳) ۰/۰۷۲
۴) ۰/۰۳۵

۸ـ فرض کنید ۵ دختر و ۵ پسر قصد دارند روی ۱۰ صندلی در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد روی صندلی پنجم یک دختر باشد و دقیقاً کنار دست راست وی یک پسر قرار داشته باشد؟

۱) ۰/۰۰۴   ۲) ۰/۲۷۷۸   ۳) ۰/۵۵۵۶   ۴) ۰/۱۷۷۸

۹ـ یک عدد به طور تصادفی در فاصله $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ انتخاب می شود احتمال این که cos آن بزرگ‌تر از sin آن باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰ـ ظرفی شامل ۴ مهره آبی، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سفید است. دو مهره به این صورت انتخاب می‌کنیم که در هر بار استخراج مهره با مشاهده رنگ آن، مهره را به همراه یک مهره دیگر از همان رنگ به داخل ظرف باز می‌گردانیم. چقدر احتمال دارد هر دو ۲ توپ خارج شده هم‌رنگ باشند؟

۱) ۰/۴۷۳   ۲) ۰/۹۴۵   ۳) ۰/۳۷۴   ۴) ۰/۴۱۲

۱۱ـ در سؤال قبل احتمال این که مهره دوم خارج شده سفید باشد چقدر است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۰۷۲ ۴) ۰/۰۴۲

۱۲ـ اگر در خیابانی سه شخص را که به تصادف انتخاب شده‌اند متوقف کنیم و روز تولدشان را بپرسیم احتمال این‌که روز تولد هیچ‌کدام دوشنبه نباشد، چقدر است؟

۱) $\frac{216}{343}$ ۲) $\frac{116}{343}$ ۳) $\frac{1}{343}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳ـ شخصی به تصادف یکی از اعداد صحیح ۱ و ۲ و ۳ را انتخاب می‌کند و سپس به تعداد عدد انتخاب شده یک تاس را پرتاب می‌کند احتمال این‌که مجموع ۵ بیاورد کدام است؟

۱) $\frac{11}{108}$ ۲) $\frac{12}{108}$ ۳) $\frac{13}{108}$ ۴) هیچ‌کدام

۱۴ـ ظرفی محتوی ۳ مهره آبی و ۷ مهره سفید است. مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر رنگ این مهره سفید باشد آن را دوباره در ظرف قرار می‌دهیم و دو مهره سفید دیگر به ظرف اضافه می‌کنیم. اگر مهره استخراجی آبی باشد آن را در ظرف قرار نداده و مهره دیگری نیز در ظرف قرار نمی‌دهیم. سپس برای بار دوم دو مهره از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که دو مهره انتخاب شده در بار دوم سفید باشند کدام است؟

۱) $\frac{39}{72}$ ۲) $\frac{48}{78}$ ۳) $\frac{29}{52}$ ۴) $\frac{49}{88}$

۱۵ـ یک ظرف شامل ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. یک مهره از ظرف خارج می‌کنیم و هر رنگی که باشد مهره دیگری از رنگ مخالف آن در ظرف قرار می‌دهیم. سپس مهره دیگری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر این مهره با مهره قبلی که به دست آمده بود هم‌رنگ باشد احتمال این‌که هر دو سفید باشند کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۱۶ـ دو تاس را همزمان n بار پرتاب کنیم n چند بار باشد تا احتمال مشاهده حداقل یک بار مجموع ۱۲ برای اعداد دو بیش از $\frac{3}{4}$ باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۷۵

۱۷ـ فرض کنید n توپ متمایز را به تصادف در N ظرف توزیع می‌کنیم. احتمال این که m توپ در ظرف اول باشد چقدر است؟

۱) $\frac{\binom{N}{1}\binom{N}{m}(N-1)^n}{N^m}$ ۲) $\frac{\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}}{N^n}$ ۳) $\frac{\binom{n-m+N-1}{n-m}}{\binom{n+N-1}{n}}$ ۴) $\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}$

۱۸ـ اگر بخواهیم ۱۰ مهره نامتمایز را درون ۱۵ ظرف قرار دهیم. چقدر احتمال دارد که در هیچ ظرفی بیش از یک توپ نباشد؟

۱) ۰/۰۲۳ ۲) ۰/۰۰۲۳ ۳) ۰/۰۰۳۲ ۴) ۰/۰۱۸۴

۱۹ـ در ظرفی ۴ توپ سفید و ۶ توپ قرمز وجود دارد و همچنین در ظرف دیگر ۲۰ توپ وجود دارد که n تای آن سفید است. اگر احتمال انتخاب یک توپ سفید از این دو ظرف برابر $\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مقدار n چقدر است؟

۱) $n=12$ ۲) $n=6$ ۳) $n=10$ ۴) $n=18$

۲۰ـ در ظرفی ۴ توپ سفید و ۸ توپ سیاه وجود دارد. حال ۲ توپ به طور تصادفی و بدون جایگذاری از این ظرف انتخاب می‌کنیم و بعد از مشاهده رنگ توپ‌های منتخب با توجه به تعداد توپ قرمز (i) در نمونه ۲ تایی به اندازه 2^i توپ از رنگ سیاه به همراه توپ‌های انتخاب شده به ظرف بازگردانده می‌شود. حال یک توپ از مجموعه توپ‌های جدید انتخاب می‌کنیم. احتمال این که توپ منتخب سیاه باشد چقدر است؟

۱) ۰/۷۰۸ ۲) ۰/۲۹۲ ۳) ۰/۴۳۹ ۴) ۰/۷۶۸

۲۱ـ فرض کنید F,E دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش باشند. حال اگر آزمایش‌های ساده مستقل از این نوع را تکرار کنیم. آنگاه احتمال این که E قبل از F اتفاق بیفتد کدام است؟

۱) $P(E)$ ۲) $\frac{P(E)+P(F)}{P(t)}$ ۳) $\frac{P(E)}{P(E)-P(F)}$ ۴) $\frac{P(E)-P(F)}{P(E)}$

۲۲ـ فرض کنید ۵ نفر اسامی خود را روی ۵ تکه کاغذ هم شکل و همسان نوشته و ۵ تا را به یک صورت تا کرده به گونه‌ای که هیچ تمایزی بین کاغذها نباشد. حال کاغذها را روی زمین ریخته و هر نفر یک کاغذ به تصادف انتخاب کرده است. چقدر احتمال دارد که دقیقاً ۲ نفر آن‌ها کاغذی را بردارند و اسامی خودشان روی کاغذ نوشته نشده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

۲۳ـ ۹۹/۰ تلویزیون‌های تولید شده در یک شرکت دارای لامپ تصویر سالم هستند. لذا در انتهای خط تولید، تلویزیون‌های تولید شده تحت آزمایش قرار گرفته تا صحت سالم یا معیوب بودن لامپ تصویر را تست نماید که در ۹۵/۰ موارد آزمایش درست تشخیص می‌دهد. حال چند درصد تلویزیون‌ها بعد از تست سالم تشخیص داده می‌شوند؟

۱) ۰/۹۴ ۲) ۰/۹۵ ۳) ۰/۹۹ ۴) ۰/۹۷

۲۴ـ زوجی دارای دو فرزند است. احتمال این که هر دو دختر باشند به شرط این که فرزند بزرگتر دختر است کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۲۵ـ اگر $P(A)=۰/۳\ ,\ P(B)=۰/۴\ ,\ P(E|A)=۰/۱\ ,\ P(E'|B)=۰/۸$ می‌باشد احتمال E چقدر است؟

۱) ۰/۱۱ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۳۵

۲۶ـ در بازرسی نشان داده شده است که ۹۶٪ یک کالا طبق استاندارد می‌باشد. بازرسی ساده واحد، کالای استاندارد را با احتمال ۹۵/۰ مرغوب تشخیص می‌دهد و محصول غیر استاندارد را با احتمال ۰۸/۰ مرغوب تشخیص می‌دهد. احتمال این‌که واحد کالای بازرسی شده استاندارد تشخیص داده شود چقدر است؟

۱) ۰/۹۱۵ ۲) ۰/۹۹۶ ۳) ۰/۶۵۱ ۴) ۰/۷۲۰

۲۷ـ در سؤال قبل چقدر احتمال دارد یک کالا واقعاً معیوب باشد به شرطی که بازرسی آن را سالم تشخیص داده است؟

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۰۳۲ ۳) ۰/۰۰۳ ۴) ۰/۰۷۷

۲۸ـ کدام یک از تعاریف زیر مفهوم احتمال از طریق آماری را بیان می‌کند؟

۱) حد فراوانی نسبی وقتی که تعداد آزمایش‌ها به طور نامحدود افزایش یابد را احتمال به طریق آماری گویند.

۲) وقتی که تعداد آزمایش‌ها از ۳۰ بزرگ‌تر باشد فراوانی نسبی به عددی نزدیک می‌شود که احتمال به طریق آماری گویند.

۳) عددی که فراوانی‌های نسبی حادثه برای تعداد مشاهدات به اندازه کافی زیاد در حول آن متمرکز می‌شوند مفهوم احتمال به طریق آماری را بیان می‌کند.

۴) در تعداد آزمایش‌های محدود نسبت حالت‌های مساعد به حالت‌های ممکن وجود داشته باشد.

۲۹ـ آسانسوری شامل ۱۲ نفر افراد نامتمایز داریم که از همکف برای طبقه اول تا پنجم بالا رفته و مسافرین را در طبقات مختلف پیاده می‌کنند. چقدر احتمال دارد فقط در طبقه دوم، سوم، پنجم متوقف شود؟

۱) ۰/۰۲۰۳ ۲) ۰/۰۳۰۲ ۳) ۰/۰۴۰۱ ۴) ۰/۰۱۰۲

۳۰ـ در سؤال قبل اگر بین افراد تمایز وجود داشته باشد چقدر احتمال دارد که در طبقه دوم ۴ نفر و طبقه سوم ۴ نفر و در طبقه ۴ و ۵ هر طبقه ۲ نفر پیاده شوند؟

۱) $۰/۸۵\times ۱۰^{-۳}$ ۲) $۰/۱۴\times ۱۰^{-۳}$ ۳) $۰/۴۲\times ۱۰^{-۳}$ ۴) $۰/۵۸\times ۱۰^{-۳}$

۳۱ـ در فاصله $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ یک مقدار انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد sin این مقدار بیشتر از $\frac{1}{2}$ باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۲ـ اگر B,A پیشامدهای ناسازگار باشد آنگاه احتمال $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $P(A)$ ۲) $P(A)P(B)$ ۳) صفر ۴) $\frac{P(A)}{P(B)}$

۳۳ـ یک بازی بین سه نفر به این صورت اجرا می‌شود که هر سه نفر سه سکه را پرتاب کرده و اگر همه سکه‌ها خط یا شیر بیاید، آن شخص برنده است. حال اگر ترتیب انجام بازی از A شروع و سپس به B و سپس C ادامه یابد و در صورتی که برنده نداشته باشد مجدداً تکرار شود چقدر احتمال دارد نفر A برنده شود؟

۱) $0/314$ ۲) $0/432$ ۳) $0/571$ ۴) $0/482$

۳۴ـ ۵ مغازه لامپ فروشی در شهری وجود دارد. چقدر احتمال دارد تا چهار مشتری لامپ فقط ۲ مغازه از ۵ مغازه انتخاب کرده باشد؟

۱) $\frac{8}{125}$ ۲) $\frac{28}{125}$ ۳) $\frac{14}{625}$ ۴) $\frac{100}{625}$

۳۵ـ فرض کنید تعداد افرادی که در یک جامعه دچار مشکل کم خونی می‌باشند $0/01$ جامعه را تشکیل می‌دهند همچنین افراد جامعه می‌توانند در یک آزمایش پزشکی شرکت کرده و در مورد صحت و عدم صحت سلامتی خود اطلاع حاصل کنند. حال اگر در $0/98$ موارد این آزمایش بتواند درست تشخیص دهد. چقدر احتمال دارد یک فرد که این آزمایش را انجام می‌دهد، سالم تشخیص داده شود؟

۱) $0/98$ ۲) $0/97$ ۳) $0/99$ ۴) $0/94$

۳۶ـ اگر در سؤال قبل دو نفر برای آزمایش مراجعه کنند چقدر احتمال دارد که نتیجه هر دو سالم باشد؟

۱) $0/941$ ۲) $0/96$ ۳) $0/981$ ۴) $0/884$

۳۷ـ اگر $A\Delta B$ تفاضل متقارن دو پیشامد A و B باشند، آنگاه $P(A\Delta B)$ برابر است با:

۱) $P(A-B)+P(B-A)$ ۲) $P(B-A)-P(A-B)$

۳) $P(A-B)-P(B-A)$ ۴) هیچکدام

۳۸ـ اگر $P(B)=P(A)=\frac{3}{4}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $P(A\cup B)\geq\frac{3}{8}$ ۲) $P(A\cup B)<\frac{3}{4}$ ۳) $P(A\cup B)\leq\frac{3}{4}$ ۴) $P(A\cup B)\geq\frac{3}{4}$

۳۹ـ اگر $P(A)=P(B)=0/6$ و $P(A|B)=0/8$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $P(A|B')=0/3$ ۲) $P(A|B')=0/2$ ۳) $P(A|B')=0/5$ ۴) $P(A'|B')=0/5$

۴۰ـ اگر B, A دو پیشامد مستقل تصادفی باشند $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ و $P(A'\cap B')=\frac{1}{3}$ در این صورت:

۱) $\begin{cases}P(A)=\frac{1}{2}\\P(B)=\frac{1}{3}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}P(A)=\frac{1}{3}\\P(B)=\frac{1}{2}\end{cases}$ ۳) $P(A)\neq P(B)$ ۴) $P(A)=P(B)$

فصل سوم

«متغیرهای تصادفی»

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال ۱: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و متغیر X را برابر با مجموع اعداد روی دو تاس مشاهده شده در نظر می‌گیریم.

الف ـ تابع احتمال X را به‌دست آورید.

ب ـ احتمال این‌که مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۵ باشد را به‌دست آورید.

ج ـ احتمال این‌که مجموع اعداد روی دو تاس بین ۷ و ۹ شود را به‌دست آورید.

پاسخ : الف ـ متغیر تصادفی X می تواند مقادیر $\{2,3,\dots,12\}$ را اختیار کند. پس با استفاده از تابع احتمال می‌توان احتمال هر نقطه مورد نظر را به دست آورد. مثلاً احتمال آن‌که متغیر تصادفی مقدار ۳ را اختیار کند یعنی مجموع روی دو تاس عدد ۳ شده است یعنی، دو تاس به صورت (۱ و ۲) یا (۲ و ۱) آمده‌اند و بنابراین: $P(1,2)=P(2,1)=\frac{1}{36}$

$$P(X=3)=P\left(\{(1,2)\ \text{یا}\ (2,1)\}\right)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}$$

به طور مشابه

$$P(X=4)=P\left(\{(1,3)\ \text{یا}\ (3,1)\ \text{یا}\ (2,2)\}\right)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{3}{36}$$

بنابراین با محاسبه همه احتمالات مربوط به مقادیر X تابع احتمال به صورت زیر می‌باشد.

$X=x$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ب ـ

$$P(X\le 5)=f_X(1)+f_X(2)+f_X(3)+f_X(4)+f_X(5)=0+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{10}{36}$$

ج ـ

$$P(7\le X\le 9)=f_X(7)+f_X(8)+f_X(9)=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}=\frac{15}{36}$$

مثال ۲: در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب وجود دارد. از این جعبه ۳ لامپ را به روش تصادفی و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد لامپ‌های معیوب بین لامپ‌های انتخابی باشد تابع احتمال آن کدام گزینه است؟

۱) $P(x)=C_x^3(\frac{4}{10})^x(\frac{6}{10})^{3-x}\quad ;\quad x=1,2,3$

۲) $P(x)=C_x^3(\frac{4}{10})^x(\frac{6}{10})^{3-x}\quad ;\quad x=0,1,2,3,\dots$

۳) $P(x)=\frac{C_4^x.C_6^{3-x}}{C_{10}^3}\quad ;\quad x=0,1,2,3$

۴) $P(x)=\frac{C_4^x.C_6^x}{C_{10}^3}\quad ;\quad x=0,1,2,3$

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو گزینه ۱ و ۲ غلط هستند چرا که X تعداد لامپ‌های معیوب بین ۳ لامپ برداشته شده می‌باشد که می‌تواند $x=0,1,2,3$ باشد یعنی لامپ معیوبی در بین لامپ‌های انتخابی نباشد یا ۱ لامپ معیوب باشد یا ۲ تا و یا ۳ تا در حالی‌که در گزینه (۱) مقدار هیچ لامپ معیوب در مقدار x دیده نمی‌شود و در گزینه ۲ مقادیر x تا ∞ ادامه دارد. اما توجه کنید که اگر ما x تا معیوب در بین ۳ لامپ برداشته شده داشته باشیم پس $3-x$ لامپ سالم داریم که فقط گزینه‌ی (۳) این مطلب را نشان می‌دهد و ما می‌توانیم با جایگذاری مقادیر x در تابع احتمال این مطلب را متوجه شویم. علاوه بر این به $\binom{10}{3}$ طریق می‌توان ۳ لامپ از ۱۰ لامپ را به صورت تصادفی انتخاب کرد. همچنین تعداد حالاتی که x لامپ معیوب انتخاب شود برابر $\binom{6}{3-x}\binom{4}{x}$ است.

مثال ۳: فرض کنید تابع $f(n)=k\frac{(\frac{1}{3})^{n+2}}{n+2}$ یک تابع احتمال برای متغیر تصادفی گسسته $n=0,1,2,\dots$ باشد مقدار k کدام است؟

۱) $\ln\frac{2}{3}$

۲) $\ln\frac{1}{3}$

۳) $(\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{3})^{-1}$

۴) $(\frac{2}{3}-\ln\frac{2}{3})^{-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به خاصیت تابع احتمال خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x)=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} k\frac{(\frac{1}{3})^{n+2}}{n+2}=1 \Rightarrow k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{3})^{n+2}}{n+2}=1$$

برای محاسبه حاصل جمع بالا به مطلب زیر دقت کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}=\frac{a}{1-a} \xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال‌گیری می‌کنیم}}$$

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}da=\int\frac{a}{1-a}da \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\int a^{n+1}da=\int\frac{a}{1-a}da \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{n+2}=\int a(1-a)^{-1}da=(1-a)-\ln|1-a|+c$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{n+2}=(1-a)-\ln|1-a|$$

اکنون به ازای $a=\frac{1}{3}$ به راحتی حاصل جمع مورد نظر به دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{3})^{n+2}}{n+2}=(1-\frac{1}{3})-\ln\left|1-\frac{1}{3}\right| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{3})^{n+2}}{n+2}=\frac{2}{3}-\ln\frac{2}{3}$$

اکنون این حاصل جمع را در رابطه اول تابع احتمال قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow K(\frac{2}{3}-\ln\frac{2}{3})=1 \Rightarrow K=(\frac{2}{3}-\ln\frac{2}{3})^{-1}$$

مثال ۴: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال روبرو باشد مقدار C کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} c+x & -2\le x\le 0 \\ c-x & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به خاصیت تابع چگالی احتمال باید $\int f(x)dx=1$ باشد.

$$\int_{-2}^{0}(c+x)dx+\int_{0}^{2}(c-x)dx=1 \Rightarrow cx+\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}+cx-\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}=1-(-2c+2)+(2c-2)=1\Rightarrow 4c=5\Rightarrow c=\frac{5}{4}$$

مثال ۵: تابع چگالی احتمال زیر که به تابع چگالی مثلثی معروف است را در نظر بگیرید. مقدار K کدام است؟

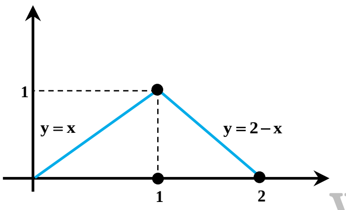
$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ k-x & 1<x\le 2 \\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به خاصیت تابع چگالی احتمال خواهیم داشت :

$$\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}(k-x)dx=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+kx-\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}=1\Rightarrow(\frac{1}{2}-0)+[(2k-2)-(k-\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}+k-\frac{3}{2}=1\Rightarrow k=2$$

به شکل این تابع چگالی دقت کنید:



مثال ۶: فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{-|x-\theta|}{2}}$ باشد، مقدار مُد کدام است؟ $\theta \in IR$, $X \in IR$

۱) ۲ ۲) صفر ۳) θ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این تابع زمانی ماکزیمم است که توان نپر $\frac{|x-\theta|}{2}$ کمترین مقدار را داشته باشد و این قدر مطلق زمانی کمترین است که $x=\theta$ باشد.

بنابراین: $MO=\theta$

مثال ۷: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $x>0$ $f(x)=e^{-x}$ باشد، مقدار مُد کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ∞

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از تابع مشتق می‌گیریم: مشتق همواره منفی است $f'(x)=-e^{-x}<0 \Rightarrow$

تابع نزولی است بنابراین بیشترین مقدار خود را در ابتدای بازه اختیار می‌کند بنابراین $MO=0$

مثال ۸: فرض کنید متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع احتمال به صورت $P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=1,2,\dots,n\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ باشد، تابع توزیع X کدام است؟

۱) $F_X(x)=\begin{cases}0 & ; & x<1\\ x & ; & 1\le x<n\\ 1 & ; & x\ge n\end{cases}$

۲) $F_X(x)=\begin{cases}0 & ; & x<1\\ \frac{x}{n+1} & ; & 1\le x<n\\ 1 & ; & x\ge n\end{cases}$

۳) $F_X(x)=\begin{cases}0 & ; & x<1\\ \frac{x}{n} & ; & 1\le x<n\\ 1 & ; & x\ge n\end{cases}$

۴) $F_X(x)=\begin{cases}0 & ; & x<1\\ \frac{x}{n^2} & ; & 1\le x<n\\ 1 & ; & x\ge n\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای $n=3$ می‌توانیم امتحان کنیم:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{3} & 1\le x<2\\ \frac{2}{3} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

مثال ۹: فرض کنید طول عمر قطعه‌ای دارای تابع نرخ خرابی $t>0$ $\lambda(t)=t^3$ (بر حسب سال) می‌باشد. احتمال آن‌که طول عمر قطعه ۲ سال باشد کدام است؟

۱) صفر ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با کمی دقت متوجه می‌شویم که طول عمر، متغیری پیوسته است پس احتمال در یک نقطه برابر صفر است.

مثال ۱۰: در تابع توأم روبرو $x=1,2,\dots$, $y=x,x+1,\dots$ $f(x,y)=\frac{7}{2}(\frac{1}{2})^{2x+y}$ تابع کناری متغیر Y کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^y\times(\frac{3}{4})^{2y}$ ۲) $\frac{7}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{4})^y}{y}$ ۳) $\frac{7}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{4})^y}{\frac{3}{4}}$ ۴) $\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^y\times\frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^y)}{1-\frac{1}{4}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که با یک نگاه ساده ولی اشتباه تکیه‌گاه x از ۱ تا ∞ است، در حالی که دو متغیر y, x به یکدیگر وابسته هستند و به صورت $1 \le x \le y < \infty$ تعریف شده‌اند بنابراین تکیه‌گاه متغیر x از ۱ تا y است بنابراین:

$$P(Y=y)=\sum_{x=1}^{y}\frac{7}{2}(\frac{1}{2})^{2x+y}=\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^{y}\sum_{x=1}^{y}(\frac{1}{2})^{2x}=\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^{y}\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots+(\frac{1}{4})^{y}=\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^{y}\times\frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^{y})}{1-\frac{1}{4}}$$

مثال ۱۱: در مثال قبل تابع کناری متغیر تصادفی X کدام است؟

۱) $(\frac{1}{2})^{2x}$ ۲) $\frac{7}{2}(\frac{1}{2})^{2x}$ ۳) $7(\frac{1}{2})^{2x}$ ۴) $7(\frac{1}{2})^{3x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» روی تکیه‌گاه متغیر y جمع می‌بندیم:

$$P(X=x)=\sum_{y=x}^{\infty}\frac{7}{2}(\frac{1}{2})^{2x+y}=\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^{2x}\underbrace{\sum_{y=x}^{\infty}(\frac{1}{2})^{y}}_{\text{تصاعد هندسی با قدر نسبت } \frac{1}{2}}=\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^{2x}\times\frac{(\frac{1}{2})^{x}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{7}{2}\times(\frac{1}{2})^{2x}\times 2(\frac{1}{2})^{x}$$

$$7\times(\frac{1}{2})^{3x}\Rightarrow P(X=x)=7(\frac{1}{2})^{3x}\qquad x=1,2,\dots$$

مثال ۱۲: در تابع احتمال $p(x,y)=2(\frac{1}{2})^{x}(\frac{1}{3})^{y}\ ,\ x=1,2,3,\dots\ ,\ y=1,2,3,\dots$ مقدار $p(X\ge Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» روی مقادیر x جمع می‌بندیم $p(X\ge Y)=\sum_{y=1}^{\infty}p(X\ge Y,Y=y)$

به کران‌های سیگما دقت کنید:

$$=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=y}^{\infty}p(X=x,Y=y)=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=y}^{\infty}2(\frac{1}{2})^{x}(\frac{1}{3})^{y}=\sum_{y=1}^{\infty}(2(\frac{1}{3})^{y}\ .\ \underbrace{\sum_{x=y}^{\infty}(\frac{1}{2})^{x}\quad}_{\text{تصاعد هندسی با قدر نسبت } \frac{1}{2}})$$

$$=\sum_{y=1}^{\infty}2(\frac{1}{3})^{y}\frac{(\frac{1}{2})^{y}}{1-\frac{1}{2}}=\sum_{y=1}^{\infty}4(\frac{1}{6})^{y}=4\underbrace{\sum_{y=1}^{\infty}(\frac{1}{6})^{y}}_{\text{تصاعد هندسی با قدر نسبت } \frac{1}{6}}=4\times\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{4}{5}$$

مثال ۱۳: برای تابع احتمال توأم بردار تصادفی (X,Y) به صورت زیر داده شده است.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2(\frac{1}{2})^{x}.(\frac{1}{3})^{y} & x,y=1,2,3,\dots\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

تابع احتمال شرطی X به شرط $Y=y$ کدام است؟

۱) $(\frac{1}{2})^{y}$ ۲) $(\frac{1}{2})^{x}$ ۳) $(\frac{1}{3})^{x}$ ۴) $(\frac{1}{3})^{y}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از رابطه احتمال شرطی استفاده می‌کنیم: $f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$f_Y(y)$ تابع احتمال کناری Y است آن را بدست می‌آوریم.

$$f_Y(y)=\sum_x f(x,y)=\sum_{x=1}^{\infty}2(\frac{1}{2})^x(\frac{1}{3})^y=2(\frac{1}{3})^y.\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^x}_{\text{تصاعد هندسی}}=2(\frac{1}{3})^y.\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2.(\frac{1}{3})^y\times 1=2.(\frac{1}{3})^y \qquad y=1,2,...$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\cancel{2}(\frac{1}{2})^x.\cancel{(\frac{1}{3})^y}}{\cancel{2}.\cancel{(\frac{1}{3})^y}}=(\frac{1}{2})^x \quad ; \quad x=1,2,...$$

مثال ۱۴: در مثال قبل $P(X\le 2\,|\,y=2)$ کدام است؟

y \ x	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

۱) $\frac{1}{5}$　　۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{5}$　　۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» از جدول توزیع احتمال شرطی بالا می‌توانیم این مقدار را به دست آوریم.

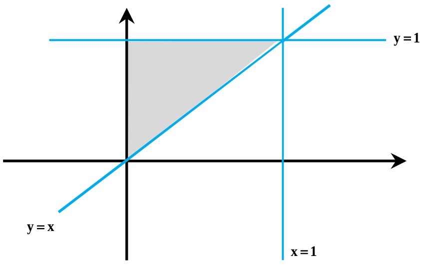
$$P(X\le 2\,|\,y=2)=\sum_{x=1}^{2}f_{X|Y}(x|2)=\sum_{x=1}^{2}(\frac{1}{2})^x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال ۱۵: اگر تابع توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت روبرو باشد مقدار C کدام است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy^2 & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

۱) $\frac{1}{10}$　　۲) $\frac{1}{100}$　　۳) ۱۰　　۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه «۳» به دامنه چگالی توأم دقت کنید:



$$\int_0^1\int_x^1 cxy^2dydx=1 \Rightarrow \int_0^1(\int_x^1 y^2dy)cx\,dx=1$$

$$\Rightarrow \int_0^1(\frac{1}{3}y^3)_x^1 cx\,dx=1 \Rightarrow c\int_0^1(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^3)x\,dx=1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{3}\int_0^1(1-x^3)x\,dx=\frac{c}{3}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5)_0^1=1 \Rightarrow \frac{c}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})=\frac{c}{3}\times\frac{3}{10}\Rightarrow c=10$$

توجه: برای محاسبه احتمال قرار گرفتن (x,y) در یک ناحیه A در صفحه xy به صورت روبرو عمل می‌کنیم:

$$P\big((X,Y)\in A\big)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

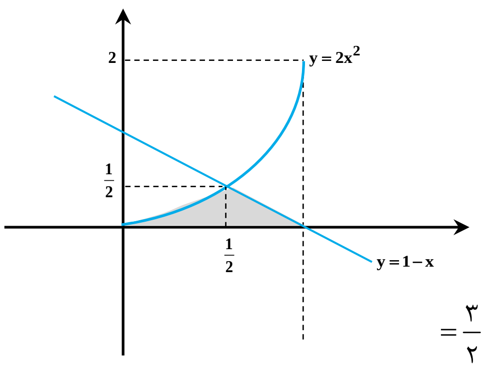
مثال ۱۶: تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت روبه‌رو مفروض است:

$$f(x,y)=\begin{cases}3xy & 0<y<2x^2\ ,\ 0<x<1\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

مقدار $P(X+Y\le 1)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{128}$　　۲) $\frac{7}{128}$　　۳) $\frac{3}{64}$　　۴) $\frac{5}{64}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» دامنه چگالی توأم و مساحت مشترک $X+Y<1$ را روی شکل مشخص می‌کنیم.



$$P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y}3xy\,dx\,dy=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^2y\Big|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y}dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-y)^2-\frac{y}{2}\right)y\,dy=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(y^3-\frac{5y^2}{2}+y)dy$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{y^4}{4}-\frac{5y^3}{6}+\frac{y^2}{2}\right)_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\frac{1}{64}-\frac{5}{48}+\frac{1}{8})=\frac{7}{128}$$

مثال ۱۷: اگر $F_X(1)=0/2$ و $F_Y(2)=0/8$ باشد حداکثر و حداقل مقدار $F_{X,Y}(1,2)$ کدام است؟

۱) $1,0$ ۲) $0/4, 0/16$ ۳) $1, 0/4$ ۴) $0, 0/4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به آن که ماکزیمم و می‌نیمم تابع توزیع توأم بین مقدارهای $\sqrt{F_X(x).F_Y(y)}$ و $F_X(x)+F_Y(y)-1$ قرار دارد

$$\max:\sqrt{F_X(x).F_Y(y)}=\sqrt{\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}}=\sqrt{\frac{16}{100}}=0/4$$

$$\min:F_X(x)+F_Y(y)-1=0/2+0/8-1=0$$

مثال ۱۸: تابع چگالی توأم روبرو را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & x+y<1,\ x>0,\ y>0\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

$f(y\mid x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{1-x}$ ۲) $2(1-x)$ ۳) $\frac{1}{1-x}$ ۴) $1-x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به رابطه گفته شده در خواهیم داشت:

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2}{\int_0^{1-x}2dy}=\frac{2}{2(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

مثال ۱۹: فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم $f(x,y)=\begin{cases}3xy & 0<x<1\ ;\ 0<y<2x^2\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$ باشند.

مقدار $P(\frac{1}{2}<X<1\mid y=\frac{1}{3})$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** طبق نکته (۵) می‌توانیم احتمال داده شده را به دست آوریم:

$$I:P(\frac{1}{2}<X<1\mid y=\frac{1}{3})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_{X|Y}(x\mid\frac{1}{3})dx$$

از طرفی: $f_Y(y)=\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}3xydx=\frac{3}{2}y\left(x^2\right)_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}=\frac{3}{2}y(1-\frac{y}{2})$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3xy}{\frac{3}{2}y(1-\frac{y}{2})}=\frac{4x}{2-y}\quad;\quad I\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{4x}{2-y}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{4x}{2-\frac{1}{3}}dx=\frac{6}{5}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{9}{10}$$

آزمون فصل سوم

۱ـ به ازای چه مقادیری از k می‌توان تابع روبرو را به عنوان تابع چگالی یک متغیر تصادفی به کار برد؟ $f(x)=(1-k)k^x \quad x=0,1,2,\dots$

۱) $k=1$
۲) $k\ge 1$
۳) $0<k<1$
۴) k هر مقدار طبیعی می‌تواند بگیرد.

۲ـ متغیر تصادفی X به صورت روبرو می‌باشد. مقدار C کدام است؟ $f(x)=\frac{c}{\sqrt{x}} \quad 0<x<4$

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۴
۳) ۲
۴) $\frac{1}{4}$

۳ـ سه توپ به طور تصادفی و بدون جایگذاری از ظرفی که شامل ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ است انتخاب می‌کنیم. اگر بخواهیم یک تابع احتمال برای بزرگترین عدد انتخاب شده در این نمونه ۳ تایی به دست آوریم کدام گزینه صحیح است؟

۱) $p(X=x)=\frac{1}{\binom{20}{3}} \quad , \quad x=1,2,\dots,20$
۲) $p(X=x)=\frac{\binom{20}{x}}{\binom{20}{3}} \quad , \quad x=1,2,3$
۳) $p(X=x)=\frac{\binom{20-x}{2}}{\binom{20}{3}} \quad , \quad x=3,4,\dots,20$
۴) $p(X=x)=\frac{\binom{x-1}{2}}{\binom{20}{3}} \quad , \quad x=3,4,\dots,20$

۴ـ pdf متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است، میانه این متغیر کدام است؟ $f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} \quad x>0$

۱) ۱/۳۹
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۲۲۱
۴) ۰/۶۹۵

۵ـ تابع جرمی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است. مقدار k کدام است؟ $p(x=k)=k(\frac{1}{4})^x \quad x=0,1,2,\dots$

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

۶ـ دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم تا مجموع دو تاس ۷ حاصل شود. احتمال این‌که در بیش از ۲ پرتاب این نتیجه حاصل شود چقدر است؟

۱) $\frac{11}{36}$
۲) $\frac{25}{36}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{5}$

۷ـ تابع چگالی طول عمر یک قطعه از ماشین صنعتی بر حسب سال به صورت روبرو تعریف می‌شود، مقدار a کدام است؟ $f(x)=\frac{a}{x^2} \quad x>10$

۱) $\frac{1}{10}$
۲) $\frac{1}{100}$
۳) ۱۰
۴) ۱۰۰

۸ـ فرض کنید x دارای تابع مولد گشتاور روبرو باشد آنگاه $p(X\ge 2)$ کدام است؟ $M_\alpha{}^{(t)}=\left[\mathrm{Exp}(\alpha e^t-1)\right]$

۱) ۰/۷۶۴
۲) ۰/۰۱۳
۳) ۰/۹۸۷
۴) ۰/۴۴۱

۹ـ فرض کنید X دارای تابع چگالی به صورت روبرو باشد مقدار C کدام است؟ $f_x(x)=cxe^{-\frac{x}{2}} \quad x>0$

۱) $\frac{1}{32}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{16}$
۴) $\frac{1}{8}$

۱۰ـ فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در فاصله (۰ و ۱) است حال ۳نمونه از توزیع مذکور انتخاب می‌کنیم آن‌گاه $y=\min(x_1,x_2,x_3)$ دارای کدام توزیع زیر است؟

۱) $f_y(y)=3(1-y)^2 \quad 0<y<1$
۲) $f_y(y)=1-y^3 \quad 0<y<1$
۳) $f_y(y)=4y^3 \quad 0<y<1$
۴) $f_y(y)=1-3y^2 \quad 0<y<1$

۱۱ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت $(-۱,۱)$ است مقدار $P(\sin\frac{\pi x}{۲} > \frac{\sqrt{۲}}{۲})$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۲ـ اگر $X_۱$ و $X_۲$ بر روی فضای $(۰,۱)$ به طور یکنواخت پخش شده باشند $P(X_۱X_۲ < \frac{۱}{۴})$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\text{Ln}\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\text{Ln}\frac{۱}{۴}$ ۳) $\text{Ln}\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\text{Ln}\frac{۱}{۴}$

۱۳ـ اگر X دارای چگالی به فرم $f(x)=\frac{۱}{۲}\ ;\ ۰<x<۲$ و $Y=\begin{cases} x & x\le ۱ \\ x^۲ & x>۱ \end{cases}$ باشد مقدار $P(\frac{۱}{۴}<y<\frac{۹}{۴})$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴ـ اگر X دارای چگالی به صورت $f(x)=۲x\ ;\ ۰<x<۱$ باشد احتمال آن که کوچکترین x_i از میانه بزرگتر باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۵ـ فرض کنید X دارای توزیع پیوسته و صعودی $F(x)$ است. فرض کنید $Y=[F(x)]^۲$ باشد واریانس متغیر Y کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۷}{۴۵}$ ۳) $\frac{۴}{۴۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴۵}$

۱۶ـ فرض کنید $X_۱,X_۲$ دارای چگالی به فرم $\underset{۰<x_۱,x_۲<۲}{f(x_۱,x_۲)=\frac{۱}{۲}}$ باشد مقدار $P(\min(X_۱,X_۲)>\frac{۱}{۲})$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۷ـ فرض کنید $f(x)=۱;\ ۰<x<۱$ و $f_{y|x}(y\,|\,x)=۱$ در این صورت $P(X+Y<۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۸ـ اگر (x,y) دارای چگالی توأم $x,y>۰$ $f(x,y)=ye^{-y(۱+x)}$ مقدار $P(\max(X,Y)\ge ۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}e^{-۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۳}e^{-۱}$ ۳) $-۸e^{-۲}+\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}+e^{-۱}-\frac{۱}{۲}e^{-۲}$

۱۹ـ فرض کنید تابع چگالی توأم (x,y) به صورت $\underset{x,y=۱,۲,۳,...}{f(x,y)=۲(\frac{۱}{۲})^x(\frac{۱}{۳})^y}$ باشد مقدار $P(Y\le X)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۱۱}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۲۵}$

۲۰ـ در تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی y و x که به صورت زیر تعریف شده است. مقدار $P(y>\frac{-۱}{۲})$ کدام است؟

$f(x,y)=۱,\ ۰<x<۱\ ;\ |y|<x$

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

فصل چهارم

«امیدریاضی و واریانس»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال۱: فرض کنید سکه‌ای را ۲ بار پرتاب می‌کنیم. اگر X نشانگر تعداد شیرها در این پرتاب‌ها باشد امید ریاضی (مقدار مورد انتظار) X کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۱۰   ۳) ۷   ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این‌که متغیر X گسسته است بنابراین ابتدا تابع احتمال این متغیر را با توجه به تعریف مشخص می‌کنیم:

$$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

$X=x$	۰	۱	۲
$P(X=x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

اکنون با توجه به رابطه امید ریاضی خواهیم داشت:

$$E(X)=\sum_{x=۰}^{۲} x.p(X=x)=(۰\times\frac{۱}{۴})+(۱\times\frac{۱}{۲})+(۲\times\frac{۱}{۴})=۱$$

و این بدین معنی است که در پرتاب مکرر دوبار یک سکه سالم در دراز مدت، انتظار داریم در هر دو بار پرتاب یک شیر مشاهده شود.

مثال۲: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال به صورت زیر باشد. مقدار امید ریاضی کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & ۰<x<۲\\ ۰ & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» چون در اینجا X متغیر تصادفی پیوسته است بنابراین خواهیم داشت:

$$\mu=E(X)=\int_۰^۲ x.|x-۱|dx=\int_۰^۱ x(۱-x)dx+\int_۱^۲ x(x-۱)dx=\int_۰^۱(x-x^۲)dx+\int_۱^۲(x^۲-x)dx=\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۶}=۱$$

مثال۳: تابع چگالی احتمال X به صورت مقابل است:

$$f_X(x)=\begin{cases}a+bx^۲ & ۰\le x\le ۱\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

اگر $E(X)=\frac{۳}{۵}$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

پاسخ : چون $f(x)$ تابع چگالی است:

$$\int_۰^۱ f(x)dx=۱ \Rightarrow \int_۰^۱(a+bx^۲)dx=۱ \Rightarrow ax+\frac{bx^۳}{۳}\Big|_۰^۱=۱ \Rightarrow a+\frac{b}{۳}=۱$$

از طرفی $E(X)=\frac{۳}{۵}$ است بنابراین طبق تعریف امید ریاضی داریم:

$$E(X)=\int_۰^۱ x.f(x)dx=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\int_۰^۱(ax+bx^۳)dx=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{ax^۲}{۲}+\frac{bx^۴}{۴}\Big|_۰^۱=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{b}{۳}=۱\\ \frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}=\frac{۳}{۵}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۳}{۵}\ ,\ b=\frac{۶}{۵}$$

مثال۴: طول عمر یک لامپ الکتریکی (برحسب ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال مقابل است:

$$f(x)=x.e^{-x}\quad ;\quad x>۰$$

متوسط طول عمر چنین لامپی کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از روش انتگرال جزء به جزء :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x.f(x)dx=\int_{0}^{\infty}x^{2}e^{-x}dx=-x^{2}.e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}-2xe^{-x}dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}2xe^{-x}dx=-2xe^{-x}\Big|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}-2e^{-x}dx=2\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}=2$$

مثال ۵: فرض کنید متغیر X دارای تابع احتمال زیر باشد. مقدار امید ریاضی $Y=X^{2}-1$ کدام است؟

x	−۲	−۱	۰	۱
P(X = x)	۰/۲	۰/۱	۰/۵	۰/۲

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲
۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$E(X^{2}-1)=\sum_{x=-2}^{1}(x^{2}-1)P(X=x)=((-2)^{2}-1)(0/2)+((-1)^{2}-1)(0/1)+(0^{2}-1)(0/5)+(1^{2}-1)(0/2)=0/1$$

مثال ۶: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد. مقدار امید ریاضی تابع $Y=5X-4$ کدام است؟

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}\sqrt{x} & 0<x<4\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$E(5X-4)=\int_{0}^{4}(5x-4)\frac{3}{16}\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{16}\int_{0}^{4}(5x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{3}{16}\left[2\sqrt{x^{5}}-\frac{8}{3}\sqrt{x^{3}}\right]_{0}^{4}=\frac{3}{16}\left[64-\frac{64}{3}\right]=8$$

مثال ۷: فرض کنید تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی Y,X به صورت $f(x,y)=\frac{1}{n(n-1)}$ باشد مقدار $E(xy)$ کدام است؟

$x,y=1,2,\ldots,n \qquad x\neq y$

۱) $\frac{(n+1)(n+2)}{4}$ ۲) $\frac{(n^{2}-1)(n+1)}{4}$ ۳) $\frac{n^{2}-1}{12}$ ۴) $\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$E(XY)=\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}xy\,f(x,y)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}xy$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}[\sum_{x=1}^{n}x\sum_{y=1}^{n}y-\sum_{x=1}^{n}x^{2}]=\frac{1}{n(n-1)}[\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

توجه کنید که $x\neq y$ است بنابراین نقاط مشترک $\sum_{x=1}^{n}x\sum_{y=1}^{n}y$ یعنی، $(1\times1,2\times2,\ldots,n\times n)$ را باید کم می‌کردیم، در نتیجه:

$$=\frac{1}{n(n-1)}.[\frac{(n^{2}+n)^{2}}{4}-\frac{(n^{2}+n)(2n+1)}{6}]=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

مثال۸: متغیر تصادفی (X,Y) دارای تابع چگالی احتمال توأم $f(x,y)=\frac{1}{\pi}$ است. که در آن (x,y) نقاط مربوط به دایره به شعاع یک مرکز مبدأ مختصات است. امید ریاضی x^2y^2 کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$　۲) $\frac{1}{12}$　۳) $\frac{1}{36}$　۴) $\frac{1}{24}$

پاسخ: گزینه «۴» توجه کنید باید مساحت دایره به شعاع ۱ را در نظر بگیریم:

$$E(x^2y^2)=\iint x^2y^2.f(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\pi}x^2y^2dxdy$$

از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow dxdy=rdrd\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\cos^2\theta\sin^2\theta drd\theta=\frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2\theta}{4}d\theta=\frac{1}{48\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)d\theta=\frac{2\pi}{48\pi}=\frac{1}{24}$$

مثال۹: فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد موفقیت‌ها در n بار تکرار یک آزمایش مستقل می‌باشد هر کدام از آزمایش‌ها دارای احتمال موفقیت P هستند می‌توانیم X_i ها را تعداد موفقیت در هر مرحله معرفی کنیم؛ بنابراین $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ مقدار امید ریاضی متغیر X کدام است؟

۱) P　۲) np　۳) $n2p2$　۴) $n+p$

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که در صورت مسئله گفته شده است:

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\Rightarrow E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

اکنون می‌توانیم X_i ها را به صورت متغیر نشانگر (برنولی) به صورت زیر تعریف کنیم:

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{اگر } i\text{امین آزمایش موفقیت باشد}\\ 0 & \text{اگر } i\text{امین آزمایش شکست باشد}\end{cases}$$

بنابراین طبق تعریف امید ریاضی خواهیم داشت:

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}[(1\times p)+(0\times(1-p))]=\sum_{i=1}^{n}p=np$$

مثال۱۰: اگر n توپ به تصادف از جعبه‌ای با N توپ که mتای آن سفید هستند انتخاب کنیم، امید ریاضی تعداد توپ‌های سفید انتخابی کدام است؟

۱) $\frac{mn}{N}$　۲) $\frac{n}{N}$　۳) $\frac{m}{N}$　۴) $\frac{Nm}{n}$

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنید X نشان دهنده تعداد توپ‌های سفید انتخابی باشد که آن را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم: $X=X_1\ldots+X_m$

به طوری که:

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{اگر } i\text{امین توپ سفید انتخاب شود.}\\ 0 & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

اکنون امید ریاضی X_i ها را طبق تعریف بدست می‌آوریم:

$$E(X_i)=1\times p\{X_i=1\}=1\times p\{i\text{ امین توپ سفید انتخاب شود}\}=\frac{\binom{1}{1}\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}=\frac{n}{N}$$

بنابراین:

$$E(X)=E(X_1)+\ldots+E(X_m)=\sum_{i=1}^{m}\frac{n}{N}=\frac{nm}{N}$$

مثال۱۱: (امید ریاضی تعداد انطباق‌ها) گروهی متشکل از N نفر کلاه‌های خود را وسط یک اطاق پرتاب می‌کنند. کلاه‌ها مخلوط می‌شوند و هر نفر به تصادف یکی از کلاه‌ها را انتخاب می‌کند. امید ریاضی تعداد افرادی که کلاه خود را انتخاب می‌کنند کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» اگر X نشان دهنده تعداد انطباق‌ها باشد آنگاه $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ می‌باشد به طوری که :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{امین فرد کلاه خود را انتخاب کند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از آنجایی که هر کسی با احتمال یکسان $\frac{1}{N}$ کلاه خود را انتخاب می‌کند طبق رابطه امید ریاضی خواهیم داشت:

$$E(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) = \frac{1}{N}$$

بنابراین:

$$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_N) = N \times \left(\frac{1}{N}\right) = 1$$

در نتیجه به طور متوسط یک نفر کلاه خود را انتخاب می‌کند.

مثال۱۲: در جدول زیر مقدار واریانس کدام است؟

X	۰	۱	۲	۳
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

۱) ۰/۲۵   ۲) ۰/۷۵   ۳) ۰/۹۶   ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» از رابطه واریانس که در بالا گفته شده استفاده می‌کنیم:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 P(X=x) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^1 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} = 1/6$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} xP(X=x) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \;;\; Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1/6 - (0/8)^2 = 0/96$$

مثال۱۳: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی $f(x) = 1 - |x| \;;\; |x| < 1$ باشد، مقدار $Var(X)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) صفر   ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱»

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|) = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x(1-|x|) = \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx = 0 \quad , \quad Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

مثال۱۴: اگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقل باشند و دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، کوواریانس بین $\sum_{i=1}^{5} X_i, \sum_{i=1}^{10} X_i$ کدام است؟

۱) σ^2 ۲) $\mu + \sigma^2$ ۳) $5\sigma^2$ ۴) $5\sigma^2 + 5\mu^2$

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که چون متغیر اول و ۵ متغیر دوم مستقل می‌باشد بنابراین، مجموع آن‌ها نیز از هم مستقل بوده و کوواریانس مجموع آن‌ها صفر شده است.

$$COV(\sum_{i=1}^{5} X_i, \sum_{i=1}^{10} X_i) = COV(\sum_{i=1}^{5} X_i \,,\, \sum_{i=1}^{5} X_i + \sum_{i=6}^{10} X_i) = COV(\sum_{i=1}^{5} X_i, \sum_{i=1}^{5} X_i) + COV(\sum_{i=1}^{5} X_i, \sum_{i=6}^{10} X_i) = Var(\sum_{i=1}^{5} X_i) + \text{صفر}$$

$$= Var(\sum_{i=1}^{5} X_i) = \sum_{i=1}^{5} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{5} \sigma^2 = 5\sigma^2$$

مثال ۱۵: اگر $Y = 2X + 5$ و $E(X) = -1$ و $E(X.Y) = 5$ باشد مقدار $Var(X)$ کدام است؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۵ ‏ ۳) ۹ ‏ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

پاسخ: گزینه «۱» از خواص امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E(X.Y) = 5 \Rightarrow E(X.(2X+5)) = 5 \Rightarrow E(2X^2 + 5X) = 5 \Rightarrow 2E(X^2) + 5E(X) = 5 \Rightarrow 2E(X^2) + 5\times -1 = 5$$

$$\Rightarrow 2E(X^2) = 10 \Rightarrow E(X^2) = 5 \Rightarrow Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - (-1)^2 = 4$$

مثال ۱۶: اگر دو متغیر مستقل باشند:

۱) $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ ‏ ۲) $P(x,y) = P(x).P(y)$ ‏ ۳) $COV(X,Y) = 0$ ‏ ۴) هر سه گزینه

پاسخ: گزینه «۴» در صورت استقلال دو متغیر، هر سه گزینه صحیح است ولی بر عکس آن‌ها همواره برقرار نیست و فقط با گزینه(۲) حالت اگر و تنها اگر معنی رابطه عکس برقرار است.

$$\text{اگر } X \text{ و } Y \text{ مستقل باشند} \begin{cases} \not\Leftrightarrow E(X.Y) = E(X).E(Y) \\ \not\Leftrightarrow COV(X,Y) = 0 \\ \Leftrightarrow P(x,y) = P(x).P(y) \end{cases}$$

مثال ۱۷: اگر $COV(X,Y) = 2$ مقدار $COV(1-X, 3+2Y)$ کدام است؟

۱) ۲- ‏ ۲) ۳- ‏ ۳) ۴- ‏ ۴) ۵-

پاسخ: گزینه «۳» طبق خواص کوواریانس داریم:

$$COV(aX \pm b, cY \pm d) = a.cCOV(X,Y)$$

$$COV(1-X, 3+2Y) = -1\times 2\times COV(X,Y) = -2\times 2 = -4$$

مثال ۱۸: اگر $Cov(X,Y) = 10$، $\sigma_X = 5$ و $\sigma_Y = 3$ باشد، ضریب همبستگی کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ‏ ۲) $\frac{1}{2}$ ‏ ۳) $\frac{2}{3}$ ‏ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» طبق رابطه ضریب همبستگی خطی:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}} = \frac{10}{5\times 3} = \frac{2}{3}$$

مثال ۱۹: در مسأله انطباق کلاه‌ها واریانس تعداد انطباق‌ها کدام است؟

۱) $\frac{N-1}{2}$ ‏ ۲) $\frac{N-1}{N^2}$ ‏ ۳) $\frac{N+1}{N^2}$ ‏ ۴) $\frac{N+1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که قبلاً ثابت کردیم $E(X) = 1$ که در اینجا x نشان دهنده تعداد انطباق‌ها می‌باشد، آنگاه $X = X_1 + X_2 + ... + X_N$ می‌باشد به طوری که:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i\text{امین فرد کلاه خود را انتخاب کند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اما طبق قضیه گفته شده:

$$Var(\sum_{i=1}^{N} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i<j}^{N}\sum^{N} a_i a_j COV(X_i, X_j)$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \begin{cases} E(X_i) = 1\times \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \\ E(X_i^2) = 1^2 \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \end{cases} \Rightarrow Var(X_i) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i.X_j) - E(X_i).E(X_j)$$

توجه کنید که باید $E(X_i.X_j)$ را به دست آوریم:

$$X_i.X_j=\begin{cases}۱ & \text{اگر } i\text{امین فرد و } j\text{امین فرد کلاه خود را انتخاب کنند}\\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

$$E(X_i.X_j)=۱\times P(X_i.X_j=۱)+۰\times P(X_i.X_j=۰)=P(X_i.X_j=۱)=P(X_i=۱,X_j=۱)$$

$$=P(X_i=۱)\times P(X_j=۱|X_i=۱)=\frac{۱}{N}\times\frac{۱}{N-۱}=\frac{۱}{N(N-۱)}$$

اکنون مقادیر به دست آمده را در رابطه کواریانس قرار می‌دهیم:

$$Cov(X_i,X_j)=E(X_i.X_j)-E(X_i).E(X_j)=\frac{۱}{N(N-۱)}-\frac{۱}{N}\times\frac{۱}{N}=\frac{۱}{N(N-۱)}-\frac{۱}{N^۲}$$

اکنون در فرمول اصلی مقادیر را جایگذاری می‌کنیم:

$$Var(\sum_{i=۱}^{N}X_i)=\sum_{i=۱}^{N}Var(X_i)+۲\sum_{i}^{N}\sum_{<j}^{N}COV(X_i,X_j)=\sum_{i=۱}^{N}(\frac{۱}{N}-\frac{۱}{N^۲})+۲\sum_{i}^{N}\sum_{<j}^{N}(\frac{۱}{N(N-۱)}-\frac{۱}{N^۲})$$

$$=N\times(\frac{۱}{N}-\frac{۱}{N^۲})+\underbrace{۲\times\binom{N}{۲}\times(\frac{۱}{N(N-۱)}-\frac{۱}{N^۲})}_{\frac{۱}{N}}=۱-\frac{۱}{N}+\frac{۱}{N}=۱$$

مثال ۲۰: فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی توأم به صورت روبرو باشند: $f_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-y}}{y}\quad ۰<x<y\quad ۰<y<\infty$

مقدار $E(X^۳\mid Y=y)$ کدام است؟

۱) $\frac{y^۲}{۲}$ ۲) $\frac{y^۳}{۳}$ ۳) $\frac{y^۳}{۴}$ ۴) $\frac{y^۲}{۴}$

پاسخ: گزینه «۳» برای بدست آوردن امید ریاضی شرطی ابتدا باید چگالی شرطی را به دست آوریم:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{e^{-y}}{y}}{\int_۰^y\frac{e^{-y}}{y}dx}=\frac{\frac{e^{-y}}{y}}{e^{-y}}=\frac{۱}{y}\Rightarrow E(X^۳\mid Y=y)=\int_۰^y\frac{x^۳}{y}dx=\frac{y^۳}{۴}$$

مثال ۲۱: حاصل $E(XY|x)$ کدام است؟

۱) XY ۲) $E(X|Y)$ ۳) $YE(X|x)$ ۴) $xE(Y|x)$

پاسخ: گزینه «۴» شرط بر روی x است بنابراین می‌توانیم به جای متغیر X مقدار x را قرار دهیم.

مثال ۲۲: فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $M_X(t)=\frac{۱}{۱۰}e^t+\frac{۲}{۱۰}e^{۲t}+\frac{۳}{۱۰}e^{۳t}+\frac{۴}{۱۰}e^{۴t}$ می‌باشد، مقدار $P(X\ge ۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۰}$ ۲) $\frac{۶}{۱۰}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۸}{۱۰}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه تابع مولد گشتاور خواهیم داشت:

$$E(e^{tx})=M_X(t)\Rightarrow M_X(t)=\sum_x e^{tx}.P(X=x)$$

$$=P(X=۰)+e^t.P(X=۱)+e^{۲t}P(X=۲)+e^{۳t}P(X=۳)+e^{۴t}P(X=۴)+....$$

از طرفی: $M_X(t)=\frac{۱}{۱۰}e^t+\frac{۲}{۱۰}e^{۲t}+\frac{۳}{۱۰}e^{۳t}+\frac{۴}{۱۰}e^{۴t}$ می‌باشد بنابراین:

با مقایسه این تابع و جملات باز شده بالا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P(X=۰)=۰ \\ P(X=۱)=\frac{۱}{۱۰} \\ P(X=۲)=\frac{۲}{۱۰} \Rightarrow P(X\geq ۳)=P(X=۳)+P(X=۴)=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۴}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰} \\ P(X=۳)=\frac{۳}{۱۰} \\ P(X=۴)=\frac{۴}{۱۰} \end{cases}$$

مثال ۲۳: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته باشد که در آن $K=۱,۲,۳,...$ ، $E(X^k)=۷^k$ می‌باشد، تابع مولد گشتاور این متغیر کدام است؟

۱) $e^{-۷t}$ ۲) $e^{۷t}$ ۳) $\frac{۷t}{۱+t}$ ۴) $\frac{۷t}{۱-t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از تعریف تابع مولد گشتاور X استفاده می‌کنیم:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=E\left(\sum_{K=۰}^{\infty}\frac{(tx)^k}{K!}\right)=E\left(\sum_{K=۰}^{\infty}\frac{(t^k)(x^k)}{K!}\right)=\sum_{K=۰}^{\infty}\frac{t^kE(x^k)}{K!}=\sum_{K=۰}^{\infty}\frac{t^k.۷^k}{K!}=\sum_{K=۰}^{\infty}\frac{(۷t)^k}{K!}=e^{۷t}$$

مثال ۲۴: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=\frac{۱}{\pi(۱+x^۲)}$ باشد، تابع مولد گشتاور آن کدام است؟

۱) $\frac{e^t}{۱+t^۲}$ ۲) $\frac{e^{t^۲}}{۱+t^۲}$ ۳) $\frac{e^{-t}}{۱+t^۲}$ ۴) وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق رابطه مولد گشتاور داریم:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\frac{dx}{\pi(۱+x^۲)}>\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{e^{tx}dx}{۱+x^۲}$$

توجه کنید که برای هر عدد K، $e^k>k$ می‌باشد بنابراین:

$$>\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{tx}{۱+x^۲}dx=\frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{\infty}\frac{۲x}{۱+x^۲}dx=\frac{t}{۲\pi}[\ln(۱+x^۲)\Big|_۰^{\infty}]=\infty$$

پس برای هر $t>۰$ تابع مولد گشتاور احتمال وجود ندارد.

آزمون فصل چهارم

۱ـ فرض کنید $U_1 \le U_2 \le U_3 \le U_4$ آمارهای ترتیبی برای یک نمونه تصادفی ۴ تایی از توزیعی پیوسته و صعودی و m میانه توزیع باشد، آنگاه $P(U_2 < m < U_4)$ برابر است با :

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۲ـ مقدار $E[X.E(Y|X)]$ برابر است با:

۱) $E[X].E[Y|X]$ ۲) $E[X].E[Y]$ ۳) $E(X.Y)$ ۲ ۴) هیچ‌کدام

۳ـ اگر (X, Y) دارای توزیع نرمال دو متغیره با میانگین‌های صفر و واریانس‌های ۱ و ضریب همبستگی ρ باشد، $-1 < \rho < 1$، $V(XY)$ کدام است؟

۱) ρ^2 ۲) $1+2\rho$ ۳) $1-\rho^2$ ۴) $1+\rho^2$

۴ـ هرگاه F_x، F_y و $F_{x,y}$ به ترتیب توابع توزیع X و Y و (X, Y) باشند، آنگاه:

۱) $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ ۲) $F_X(x)+F_Y(y)-1 \le F_{X,Y}(x,y)$

۳) $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)+F_{Y|X}(y|x)$ ۴) $1-F_{X,Y}-F_Y(y) \le F_{X,Y}(x,y)$

۵ـ فرض کنیم X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی f و g یک تابع غیر منفی تعریف شده بر اعداد حقیقی باشد. اگر $K > 0$ یک عدد ثابت باشد، آنگاه:

۱) $KP(g(x) \le k) \le E[g(x)]$ ۲) $KP(g(x) \ge k) \ge E[g(x)]$

۳) $KP(g(x) \ge k) \le E[g(x)]$ ۴) $KP(g(x) \le k) \ge E[g(x)]$

۶ـ فرض کنید X دارای تابع چگالی $f_X(x) = 2(1-x), 0 < x < 1$ باشد. مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی $Y = 1+X+X^2+\dots$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) ۳

۷ـ فرض کنید X , Y مستقل و دارای توزیع‌های یکنواخت در بازه $[0, 1]$ باشند، اگر $U = \min\{X, Y\}$، آنگاه $E[U]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۸ـ اگر $X^+ = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ و X متغیر تصادفی با تابع توزیع $F_X(x)$ باشد، تابع توزیع $Y = X^+$ کدام است؟

۱) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_X(y) & y > 0 \end{cases}$ ۲) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$ ۳) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_X(0) & y > 0 \end{cases}$ ۴) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_X(0) & y = 0 \\ F_Y(y) & y > 0 \end{cases}$

۹ـ دو متغیر X و Y پیوسته و دارای میانگین می‌باشند. در این صورت $E[YE(X|Y)]$ برابر است با:

۱) $E(Y)E(X)$ ۲) $E(XY)$ ۳) $E(Y)E(X|y)$ ۴) $uE(X|Y)$

۱۰ـ تابع چگالی توأم X و Y عبارت است از: $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & 0 < y < x < \infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ دراین صورت $E(X|y)$ عبارت است از:

۱) $y-1$ ۲) $y+\frac{1}{2}$ ۳) $y+1$ ۴) $2y+1$

۱۱ـ فرض کنید (X, Y) دارای تابع چگالی توأم روبرو باشد، $f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

امید شرطی X به شرط $Y = y$ کدام است؟

۱) $\frac{y}{2}$ ۲) $2y$ ۳) $\frac{y+1}{2}$ ۴) $\frac{x+y}{2}$

۱۲ـ اگر تابع مولد گشتاور X به صورت $(\frac{a}{a-t})^p$ ، $t < a$، باشد مقدار EX^r برای r صحیح مثبت برابر است با:

۱) $a^r.\Gamma(p+r)\Gamma(p)$ ۲) $a^r.\frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)}$ ۳) $\frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)}$ ۴) $\frac{1}{a^r}.\frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)}$

۱۳ـ فرض کنید $u \sim U(0,1)$ و $X = g(u)$ اگر $0 \le x \le 1$, $F_X(x) = 1-(1-x)^2$ ، تابع $g(u)$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{1-u}$ ۲) $1-\sqrt{1+u}$ ۳) $1+\sqrt{1-u}$ ۴) $1+\sqrt{1+u}$

۱۴ـ اگر X دارای چگالی $f(x) = 0/2(0/8)^x$ ، $x = 0,1,2,\ldots$ باشد. میانگین و واریانس X به ترتیب برابر است با:

۱) ۴ و ۲۰ ۲) ۵ و ۲۰ ۳) ۴ و ۲۵ ۴) ۵ و ۲۵

۱۵ـ اگر $x > 0, a, p > 0$ $f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}$ تابع مولد گشتاور X عبارت است از:

۱) $(a-t)^{-p}$ ۲) $(a-t)^p$ ۳) $(\frac{a-t}{a})^p$ ۴) $(\frac{a}{a-t})^p$

۱۶ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان و واریانس متناهی σ^2 باشند. با تعریف $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ مقدار $cov(\bar{X}_n, \bar{X}_n, \bar{X}_k)$ برابر است با:

۱) $\begin{cases} 0 & , \ k \le n \\ (\frac{1}{k}-\frac{1}{n})\sigma^2 & , \ k > n \end{cases}$

۲) $\begin{cases} 0 & , \ k \le n \\ (\frac{1}{n}-\frac{1}{k})\sigma^2 & , \ k > n \end{cases}$

۳) $\begin{cases} (\frac{1}{n}-\frac{1}{k})\sigma^2 & , \ k \le n \\ 0 & , \ k > n \end{cases}$

۴) $\begin{cases} (\frac{1}{k}-\frac{1}{n})\sigma^2 & , \ k \le n \\ 0 & , \ k > n \end{cases}$

۱۷ـ فرض کنید (X,Y) دارای تابع چگالی احتمال روبرو باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+c}(xy+c)e^{-x-y} & x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ c > -1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار $E(X)$ کدام است؟

۱) $\frac{1+c}{2+c}$ ۲) $\frac{2+c}{1+c}$ ۳) $\frac{3+c}{1+c}$ ۴) $\frac{1+c}{3+c}$

۱۸ـ فرض کنید X و Y دو متغیر مثبت و $E(Y \mid X) = bX$ ، $0 < b < \infty$ باشد، رابطه صحیح کدام است؟

۱) $E(\frac{X}{Y}) < \frac{1}{b}$ ۲) $E(\frac{X}{Y}) > \frac{1}{b}$ ۳) $E(\frac{X}{Y}) > b$ ۴) $E(\frac{X}{Y}) = \frac{1}{b}$

۱۹ـ تابع چگالی $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. اگر $Y = \begin{cases} X & X \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X > \frac{1}{2} \end{cases}$ ، امید ریاضی Y کدام است؟

۱) $\frac{11}{24}$ ۲) $\frac{12}{24}$ ۳) $\frac{25}{48}$ ۴) $\frac{26}{48}$

۲۰ـ فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی با میانگین یکسان μ باشند به قسمی که به ازای هر $\lambda > 0$ داریم:

$$P[|X_1 - \mu| \le \lambda] \ge P[|X_2 - \mu| \le \lambda]$$

آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱) $var(X_1) \ge var(X_2)$ ۲) $var(X_1) \le var(X_2)$ ۳) $EX_1^4 \ge EX_2^4$ ۴) $EX_1^4 \le EX_2^4$

۲۱ـ اگر Y دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ و X به شرط $Y=y$ دارای توزیع زیر باشد:

$$P(X=y \mid Y=y) = 1 - P(X = 1-y \mid Y=y) = 1-y$$

میانگین Y به شرط $X = \frac{1}{5}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{25}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{8}{25}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۲ـ فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم مقابل باشد: $f_{X,Y}(x,y)=3 \quad 0\le y\le x^2\le 1$

مقدار $V(Y|X=x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^4}{3}$ ۲) $\frac{2x^2}{3}$ ۳) $\frac{x^4}{12}$ ۴) $\frac{5x^2}{12}$

۲۳ـ فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال مقابل باشد: $f_\mu(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x-\mu}{2}} \quad ,x\ge\mu$

اگر $U=X_1^2+X_2-X_n^2$ و $E(U|X_{(1)})$ کدام است؟

۱) $X_{(1)}-\frac{n-4}{2}$ ۲) $X_{(1)}-\frac{2(n-1)}{n}$ ۳) $X_{(1)}+\frac{2(n-1)}{n}$ ۴) $X_{(1)}+\frac{n-4}{2}$

۲۴ـ برای دو متغیر تصادفی X و Y کدام رابطه درست است؟

۱) $Cov(X,Y)=Cov(E(Y|X),E(Y))$ ۲) $Cov(X,Y)=Cov(E(X|Y),E(Y|X))$

۳) $Cov(X,Y)=Cov(X,E(X|Y))$ ۴) $Cov(X,Y)=Cov(X,E(Y|X))$

۲۵ـ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم روبرو باشند. $f_{X,Y}(x,y)=e^{-y} \quad 0<x<y<+\infty$

مقدار $(E(X|Y=y)\,,\,Var(X|Y=y))$ کدام است؟

۱) (y,y^2) ۲) $(\frac{y}{2},\frac{y^2}{12})$ ۳) $(\frac{y}{2},y^2)$ ۴) $(y,\frac{y^2}{12})$

۲۶ـ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $x>0$ ، $f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$ باشد، $E(\frac{1}{1-X})$ کدام است؟

۱) $\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+i)\beta^{\alpha+i}$ ۲) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+i)\beta^i}{\Gamma(\alpha)}$ ۳) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(i)}\beta^i$ ۴) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha-i)}\beta^i$

۲۷ـ فرض کنید $Y_1<Y_2<\cdots<Y_n$ آماره‌های ترتیبی یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیعی پیوسته با تابع چگالی احتمال f باشند. مقدار $E(\int_{Y_i}^{Y_{i+1}}f(x)dx)$ کدام است؟

۱) $\frac{i}{n+1}-\frac{i-1}{n}$ ۲) $1-\frac{1}{n}$ ۳) $\frac{1}{n}$ ۴) $\frac{1}{n+1}$

۲۸ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با چگالی‌های روبرو باشند: $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}\ ,\ f(y)=\begin{cases}3e^{-3y} & y>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

اگر $W=\min(X,Y)$ و $V=\max(X,Y)$ ، آن‌گاه امید ریاضی $Z=V+W$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) ۵

۲۹ـ تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت $f(x,y)=xe^{-x(y+1)}$ است. تابع مولد گشتاور $Z=XY$ کدام است؟ $(t<1)$

۱) $(1-t)^{-2}$ ۲) $(1-t)^{-1}$ ۳) $(1-2t)^{-2}$ ۴) $(1-2t)^{-1}$

۳۰ـ اگر X متغیر تصادفی باشد که تابع مولد گشتاور آن به صورت $M_X(t)=\cosh t\,,t\in R$ باشد، آن‌گاه X دارای توزیع یکنواخت بر کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $\{-1,1\}$ ۳) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ۴) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

۳۱ـ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور به صورت $M_X(t)=\frac{4}{10}+\frac{2e^t}{10}+\frac{e^{-t}}{10}+\frac{3e^{\frac{t}{2}}}{10}$ باشد. مقدار $P\left(X\le\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۳۲ـ تابع چگالی توأم زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & ۰<x<۱,\ ۰<y<۱\\ \frac{۳}{۸} & (x,y)\in\{(۱,۰),(۱,۱)\}\\ ۰ & o.w.\end{cases}$$

مقدار $E(Y\mid X=x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}I_{(۰,۱)}(x)+\frac{۳}{۸}I_{\{۱\}}(x)$
۴) $\frac{۱}{۴}I_{(۰,۱)}(x)+\frac{۱}{۲}I_{\{۱\}}(x)$

۳۳ـ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $\theta>۱$, $x>۰$, $f(x)=\theta e^{-\theta x}$ باشد، مقدار $E\left(e^{[x]}\right)$ کدام است؟ ($[x]$ جز صحیح x است)

۱) $\frac{۱-e^{\theta}}{۱+e^{\theta-۱}}$
۲) $\frac{۱-e^{\theta}}{۱-e^{\theta-۱}}$
۳) $\frac{۱+e^{-\theta}}{۱+e^{۱-\theta}}$
۴) $\frac{۱-e^{-\theta}}{۱-e^{۱-\theta}}$

۳۴ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با مقادیر ممکن بر بازه $[۰,c]$ باشد. کران بالا برای $V(X)$ کدام است؟

۱) $\frac{c^۲}{۳}$
۲) $\frac{c^۲}{۴}$
۳) $\frac{c(c+۱)}{۴}$
۴) $\frac{(c+۱)^۲}{۴}$

۳۵ـ فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای تابع احتمال زیر باشد:

$Y=y$	-۱	۱
$P(Y=y)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

اگر $Y=\ln X$، مقدار $var(\sqrt{X})$ کدام است؟

۱) $\frac{e^{-۱}+e+۴}{۴}$
۲) $\frac{e^{-۱}+e-۴}{۴}$
۳) $\frac{e^{-۱}+e-۲}{۴}$
۴) $\frac{e^{-۱}+e+۲}{۴}$

۳۶ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال روبرو باشد: $f_{\theta}(x)=\frac{۱}{\theta},۰<x<\theta$

تابع مولد گشتاور $U=-(\ln X-\ln\theta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱-t}$
۲) $\frac{۱}{۱-\theta t}$
۳) $\frac{\theta}{\theta-t}$
۴) $\frac{۱}{t}$

۳۷ـ تابع توزیع متغیر تصادفی X برابر $F(x)=\begin{cases}۰ & x<۱\\ \frac{x^۲-۲x+۲}{۲} & ۱\le x<۲\\ ۱ & x\ge ۲\end{cases}$ است، مقدار $E(X)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$
۲) $\frac{۷}{۶}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۸ـ فرض کنید $M(t)=\frac{۱}{۲}(۱+\cosh t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X باشد، مقدار $P(X^۲=۱)$ کدام است؟

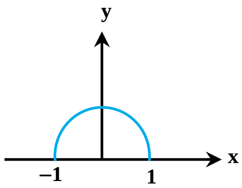
۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

۳۹ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع باشند.

اگر تابع مولد گشتاور $X+Y$ برابر معادله روبرو باشد، مقدار $P(X\le ۰)$ کدام است؟ $۰/۰۹c^{-۲t}+۰/۲۴e^{-t}+۰/۳۴+۰/۲۴e^{t}+۰/۰۹c^{۲t}$

۱) ۰/۱
۲) ۰/۳
۳) ۰/۴
۴) ۰/۷

۴۰ـ نقطه‌ای به تصادف از داخل نیم دایره شکل زیر انتخاب می‌کنیم. اگر (X,Y) نمایانگر مختصات نقطه انتخابی باشد، $var(X\mid Y=y)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱-y^۲}{۲}$
۲) $\frac{۱+y^۲}{۲}$
۳) $\frac{۱-y^۲}{۳}$
۴) $\frac{۱+y^۲}{۳}$

۴۱ـ فرض کنید $i=1,\dots,n$ ، $Y_i=\frac{2X_i}{X_i+1}$ که در آن $X_1,X_2,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2},x>0$ باشد. مقدار $var(\prod_{i=1}^{n} Y_i)$ کدام است؟

۱) $(\frac{4}{3})^n-1$ ۲) $(\frac{4}{3})^n$ ۳) $1-(\frac{3}{4})^n$ ۴) $(\frac{3}{4})^n$

۴۲ـ n توپ داریم که می‌خواهیم در n جعبه قرار دهیم.به طوری که هر توپ با شانس یکسان می‌تواند در یکی از جعبه‌های موجود قرار بگیرد و مستقل از محل قرار گرفتن توپ قبلی باشد، آنگاه واریانس تعداد جعبه‌هایی که خالی می‌مانند کدام است؟

۱) $n(1-\frac{1}{n})^{2n}$ ۲) $n(1-\frac{1}{n})^n\left[1-(1-\frac{1}{n})^n\right]$ ۳) $n\left[1-\frac{1}{n}\right]^n\left[1-(\frac{1}{n})^n\right]$ ۴) $n\left[1-\frac{1}{n}\right]\left[1-(1-\frac{1}{n})^n\right]$

۴۳ـ اگر تابع مولد گشتاور توأم (x,y) برابر با $M_{X,Y}(t_1,t_2)=\frac{e^{\frac{t_1^2}{2}}}{1-t_1-t_2}$ باشد، تابع مولد گشتاور x کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-t_1}.e^{\frac{t_1^2}{2}}$ ۲) $\frac{1}{1-t_1}$ ۳) $\frac{e^{\frac{t_2^2}{2}}}{1-t_2}$ ۴) هیچ‌کدام

۴۴ـ اگر تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت $f(x_1,x_2)=e^{-(x_1+x_2)}$ ؛ $x_1,x_2>0$ تعریف شده باشد، آنگاه $Var(X_1+X_2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰

۴۵ـ فرض کنید X دارای تابع مولد گشتاور به شکل زیر باشد. آنگاه $E(X^2)$ کدام است؟

$$M_X(t)=\frac{e^{-t}}{6}+\frac{1}{2}+\frac{e^t}{6}+\frac{e^{2t}}{6}$$

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴۶ـ از جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی دو مهره بدون جایگذاری به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مهره‌ها از یک رنگ باشند، آنگاه ۲ تومان جایزه می‌گیریم و اگر از رنگ‌های متفاوت باشند، ۱ تومان جریمه می‌شویم. مقدار انتظار شما از شرط‌بندی چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۱۱- ۳) ۰/۳۳۳ ۴) ۰

۴۷ـ ظرفی شامل n_1 مهره سفید و n_2 مهره سیاه و n_3 مهره قرمز می‌باشد. C مهره از ظرف بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. امید ریاضی تعداد مهره‌های سفید انتخاب شده کدام است؟

۱) $C\left[\frac{n_3+n_2}{n_1+n_2+n_3}\right]$ ۲) $\frac{cn_1}{n_1+n_2+n_3}$ ۳) $\frac{cn_1}{n_1n_2n_e}$ ۴) $\frac{cn_2n_3}{n_1+n_2+n_3}$

۴۸ـ کدام تساوی در مورد عملگر امید ریاضی غلط است؟ (a و c مقادیر ثابت هستند.)

۱) $E[c(a+x)]=ac+E(x)$ ۲) $E(a+x)=a+E(x)$ ۳) $E(cx)=cE(x)$ ۴) $E(a)=a$

۴۹ـ تابع چگالی مقابل را در نظر بگیرید: $f(x)=|1-x| \quad 0<x<2$

آنگاه $E(3X+4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۲ ۴) ۷

۵۰ـ در ناحیه‌ای ۱۰ نوع مختلف حشره زندگی می‌کنند و هر دفعه که حشره‌ای به دام می‌افتد مستقل از نوع حشره قبلی با احتمال $\frac{1}{10}$ از نوع i ام است (is ۱,۲,...,۱۰). حال متوسط تعداد انواع حشراتی که قبل از به دام افتادن حشره نوع ۱ به دام افتاده‌اند کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۹/۵ ۴) ۴/۵

فصل پنجم

«توزیع‌های آماری خاص»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال ۱: اگر X دارای توزیع برنولی با احتمال موفقیت $\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $E\{(X-2)(X^2+2X+4)\}$ کدام است؟

۱) $-8/5$ ۲) $-7/5$ ۳) $-4/5$ ۴) -4

پاسخ: گزینه «۲» از رابطه خطی امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E((X-2)(X^2+2X+4))E\{X^3+2X^2+4X-2X^2-4X-8\}=E(X^3-8)=E(X^3)-8 \Rightarrow \frac{1}{2}-8=-7/5$$

از طرفی: $E(X^K)=(0)^K\times q+(1)^K\times p=p \Rightarrow E(X^3)=\frac{1}{2}$

مثال ۲: اگر X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد واریانس (X^K) کدام است؟

۱) pq^K ۲) qp^K ۳) pq ۴) $(pq)^K$

پاسخ: گزینه «۳» طبق رابطه واریانس: $Var(X^K)=E(X^{2K})-E^2(X^K)$ اما در مسئله قبل مشاهده کردیم که: $E(X^K)=P$

بنابراین: $Var(X^K)=P-(P)^2=p-p^2=p(1-p)=pq$

مثال ۳: اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ مستقل و هم‌توزیع و دارای توزیع برنولی با پارامتر P باشد، توزیع $Y=\min(X_1,X_2,\dots,X_n)$ کدام است؟

۱) برنولی ۲) یکنواخت گسسته ۳) تباهیده ۴) نامشخص

پاسخ: گزینه «۱» با کمی دقت متوجه می‌شویم Y ها هم فقط مقادیر صفر و یک را می‌توانند اختیار کنند.

$P(Y=1)=P(\min(X_1,X_2,\dots,X_n)=1)=P$ (همه $X_i=1$ باشد)

$=P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times\dots\times P(X_n=1)=P\times P\times\dots\times P=P^n$

$P(Y=0)=1-P(Y=1)=1-P^n$

مثال ۴: جعبه‌ای شامل ۱۰ مهره سفید، ۴ مهره قرمز، ۵ مهره سیاه و ۶ مهره آبی است. سه مهره به تصادف و با جایگذاری خارج می‌کنیم احتمال آن‌که هر ۳ مهره قرمز باشند کدام است؟

۱) $(\frac{4}{25})^2$ ۲) $(\frac{4}{25})^3$ ۳) $\binom{4}{3}(\frac{4}{25})^1$ ۴) $\binom{4}{3}(\frac{4}{25})^3(\frac{21}{45})^1$

پاسخ: گزینه «۲» توزیع دو جمله‌ای با احتمال موفقیت $P=\frac{4}{25}$ است چرا که نمونه‌گیری **با جایگذاری** (آزمایش‌های مستقل انجام می‌شود) می‌باشد:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x} \quad x=0,1,2,\dots,n$$

اکنون می‌خواهیم تعداد موفقیت‌ها $X=3$ باشد، بنابراین: $(n=3, x=3)$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}(\frac{4}{25})^3(\frac{21}{25})^0=(\frac{4}{25})^3$$

مثال۵: تاسی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم احتمال این‌که دقیقاً ۳ بار عدد ۴ مشاهده شود چقدر است؟

۱) ۰/۴۵　　۲) ۰/۵　　۳) ۰/۰۳۲　　۴) ۰/۷۱

پاسخ: گزینه «۳» با یک توزیع دو جمله‌ای با احتمال موفقیت $P=\frac{۱}{۶}$ روبرو هستیم که ویژگی‌های آن به صورت زیر است:

$$X \sim B(۵,\frac{۱}{۶}) \quad ; \quad n=۵ \;\; , \;\; p=\frac{۱}{۶}$$

$$P(X=x)=\binom{۵}{x}.\left(\frac{۱}{۶}\right)^x.\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵-x} \qquad x=۰,۱,۲,\dots,۵ \to P(X=۳)=\binom{۵}{۳}.\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳.\left(\frac{۵}{۶}\right)^۲=۰/۰۳۲$$

مثال۶: سکه‌ای را ۲۰ بار پرتاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که ۱۲ بار شیر ظاهر شده است. احتمال این‌که ۶ بار اول شیر باشند، کدام است؟

۱) $\dfrac{(\frac{۱}{۲})^۶}{\binom{۲۰}{۶}}$　　۲) $\dfrac{(\frac{۱}{۲})^۸}{\binom{۲۰}{۸}}$　　۳) $\dfrac{(\frac{۱}{۲})^{۱۲}}{\binom{۲۰}{۱۲}}$　　۴) $\dfrac{۱}{\binom{۲۰}{۱۲}}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر E پیشامد آن باشد که ۶ بار اول شیر مشاهده شود و X تعداد شیرها در ۲۰ بار پرتاب باشد، آنگاه احتمال موردنظر به صورت زیر است:

$$P(E\,|\,X=۱۲)=\frac{P(E,X=۱۲)}{P(X=۱۲)}=\frac{P(E)=(\frac{۱}{۲})^۶(\frac{۱}{۲})^{۱۴}}{\binom{۲۰}{۱۲}(\frac{۱}{۲})^{۱۲}(\frac{۱}{۲})^۸}=\frac{۱}{\binom{۲۰}{۱۲}}$$

مثال۷: حاصل عبارت $A=\sum_{x=۰}^{n} e^x\binom{n}{x}$ کدام است؟

۱) $(e-۱)^n$　　۲) $(۱-e)^n$　　۳) $(e+۱)^n$　　۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» از توزیع دوجمله‌ای در پاره‌ای از مواقع می‌توان برای محاسبه بعضی از سری‌ها استفاده کرد:

$$A=\sum_{x=۰}^{n} e^x\binom{n}{x}=۲^n\sum_{x=۰}^{n} e^x\binom{n}{x}(\frac{۱}{۲})^n=۲^n.M_X(۱)=۲^n(\underbrace{\frac{۱}{۲}e+\frac{۱}{۲}}_{\text{بسط دوجمله‌ای}})^n=(۲\times\frac{۱}{۲}e+۲\times\frac{۱}{۲})^n=(e+۱)^n$$

مثال۸: در توزیع چند جمله‌ای مقدار $\operatorname{cov}(X_i,X_j)$ کدام است؟

۱) $n(n-۱)P_iP_j$　　۲) $-nP_iP_j$　　۳) $-n(n-۱)P_iP_j$　　۴) nP_iP_j

پاسخ: گزینه «۲» طبق رابطه کوواریانس خواهیم داشت:

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)$$

از طرفی می‌توانیم این امید ریاضی‌ها را با تابع مولد گشتاور بدست آوریم:

$$E(X_iX_j)=\left.\frac{\partial^۲ M_X(۰,۰,\dots,t_i,\dots,t_j,۰,۰,\dots,۰)}{\partial t_i\partial t_j}\right|_{t_i=t_j=۱}=nP_i(n-۱)P_j=n(n-۱)P_iP_j$$

توجه کنید که:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_i}M_X(۰,۰,\dots,t_i,۰,۰,\dots,۰)\right|_{t=۱}=nP_i \quad i=۱,۲,\dots k-۱$$

$$E(X_i)=nP_i \quad , \quad E(X_j)=nP_j \Rightarrow \operatorname{cov}(X_i,X_j)=n(n-۱)P_iP_j-nP_inP_j=-nP_iP_j \quad i\neq j$$

مثال۹: در انتخاب ۵ لامپ از بین ۴۰ لامپ که ۳ تای آن‌ها معیوب است. احتمال این‌که حداکثر یک لامپ انتخاب شده معیوب باشد کدام است؟

۱) ۰/۹۶ ۲) ۰/۷۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تابع احتمال متغیر فوق هندسی، $M=3$ و $n=5$ و $N=40$ باید ۲ حالت احتمال این‌که صفر لامپ معیوب باشد یا یک لامپ معیوب باشد را با هم جمع کنیم:

$$P(X\le 1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}}+\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}=0/963$$

مثال۱۰: به طور متوسط در هر صفحه از کتابی ۲ غلط چاپی وجود دارد. اگر صفحه‌ای از کتاب را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که غلط تایپی وجود نداشته باشد چقدر است؟

۱) $2e^{-1}$ ۲) e^{-1} ۳) e^{-3} ۴) e^{-2}

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» متغیر تصادفی پواسون است.

$$X\sim P(2)\Rightarrow P(X=x)=\frac{e^{-2}.2^x}{x!}\quad x=0,1,2,\dots\quad\Rightarrow P(X=0)=\frac{e^{-2}.2^0}{0!}=e^{-2}$$

مثال۱۱: مشتری‌های یک مغازه مطابق یک توزیع پواسون با میانگین ۲۰ نفر در ساعت، برای خرید به مغازه مراجعه می‌کنند. احتمال این‌که مغازه‌دار مجبور شود بیش از ۵ دقیقه برای مراجعه اولین مشتری منتظر بماند، کدام است؟

۱) $1-e^{-\frac{5}{3}}$ ۲) e^{-20} ۳) $e^{-\frac{5}{3}}$ ۴) $1-e^{-20}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» باید احتمال این که در ۵ دقیقه اول مشتری وارد نشود را محاسبه کنیم:

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!}=e^{-20\times\frac{1}{12}}=e^{-\frac{5}{3}}$$

توجه کنید که چون واحد زمانی پایه یک ساعت یا ۶۰ دقیقه است، پارامتر λ در $\frac{5}{60}$ ضرب می‌شود.

مثال۱۲: فرض کنید برای مقادیر صحیح و غیر منفی X تابع جرم احتمال به صورت $f(x+1)=\frac{1}{x+1}f(x)$ باشد. مقدار $E(X^2-X)$ کدام است؟

$x=0,1,2,\dots$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مقادیر را در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}x=0\Rightarrow f(1)=f(0)\\ x=1\Rightarrow f(2)=\frac{1}{2}f(1)\\ x=2\Rightarrow f(3)=\frac{1}{3}f(2)\\ x=3\Rightarrow f(4)=\frac{1}{4}f(3)\\ \vdots\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=f(0)\\ f(2)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}f(0)\\ f(3)=\frac{1}{3}f(2)=\frac{1}{6}f(0)\\ f(4)=\frac{1}{4}f(3)=\frac{1}{24}f(0)\end{cases}\Rightarrow f(k)=\frac{f(0)}{k!}\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}f(k)=1\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(0)}{k!}=1$$

$$f(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1\Rightarrow f(0)\times e^1=1\Rightarrow f(0)=e^{-1}\Rightarrow f(k)=\frac{e^{-1}}{k!}\qquad k=0,1,2,\dots\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow E(X)=var(X)=\lambda=1$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)\Rightarrow E(X^2)=Var(X)+E^2(X)=1+1=2$$

از طرفی آنچه خواسته شده است به صورت روبرو است:

$$E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)=2-1=1$$

مثال ۱۳: اگر $X \sim P(\lambda)$ باشد مقدار $E(X \mid X > ۰)$ کدام است؟ (توزیع بریده شده پواسون)

۱) $\dfrac{\lambda}{e^{-\lambda}}$ ۲) $\dfrac{\lambda}{۱+e^{-\lambda}}$ ۳) $\dfrac{\lambda}{۱-e^{-\lambda}}$ ۴) $۱-e^{-\lambda}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا تابع احتمال شرطی را به دست می‌آوریم:

$$P(X=x \mid x>۰)=\frac{P(X=x,\ x>۰)}{P(X>۰)}=\frac{P(X=x)}{P(X>۰)}=\frac{P(X=x)}{۱-P(X=۰)}=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^x/x!}{۱-\dfrac{e^{-\lambda}\times\lambda^۰}{۰!}}=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{(۱-e^{-\lambda})x!}\Rightarrow E(X\mid X>۰)$$

$$=\sum_{x=۱}^{\infty}x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!(۱-e^{-\lambda})}=\frac{۱}{۱-e^{-\lambda}}\sum_{x=۱}^{\infty}x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}=\frac{۱}{۱-e^{-\lambda}}[\sum_{x=۰}^{\infty}x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}-۰\frac{e^{-\lambda}.\lambda^۰}{۰!}]=\frac{۱}{۱-e^{-\lambda}}(\underbrace{E(X)}_{\lambda}-۰)=\frac{\lambda}{۱-e^{-\lambda}}$$

مثال ۱۴: در یک توزیع پواسون به صورت $\dfrac{e^{-\lambda}\times\lambda^x}{x!}$ مقدار $E(\dfrac{۱}{X+۱})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱+e^{-\lambda}}{\lambda}$ ۲) $\dfrac{۱-e^{-\lambda}}{\lambda}$ ۳) $\dfrac{۱+e^{-\lambda}}{\lambda^۲}$ ۴) وجود ندارد

پاسخ: گزینه «۲» از تعریف امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E(\frac{۱}{x+۱})\xrightarrow{\text{طبق تعریف امید ریاضی}}\sum_{x=۰}^{\infty}\frac{۱}{x+۱}.\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^x}{x!}$$

$$=\frac{۱}{\lambda}\sum_{x=۰}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x+۱}}{(x+۱)!}\ \overset{x+۱=t}{\underset{x=۰\to t=۱}{=\!=\!=}}\ \frac{۱}{\lambda}\sum_{t=۱}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^t}{t!}=\frac{۱}{\lambda}(۱-e^{-\lambda})=\frac{۱}{\lambda}[\sum_{t=۰}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^t}{t!}-\frac{e^{-\lambda}.\lambda^۰}{۰!}]=\frac{۱}{\lambda}(۱-e^{-\lambda})$$

مثال ۱۵: در توزیع پواسون $۲\lambda<۱$ ؛ $x=۰,۱,۲,...$ $P(X=x)=\dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$ مقدار $E(X!)$ کدام است؟

۱) λ ۲) ۲λ ۳) $\dfrac{e^{-\lambda}}{۱-\lambda}$ ۴) $\dfrac{e^{-\lambda}}{۱+\lambda}$

پاسخ: گزینه «۳» از تعریف امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E(X!)=\sum_{x=۰}^{\infty}x!.\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^x}{x!}=\sum_{x=۰}^{\infty}e^{-\lambda}\times\lambda^x=e^{-\lambda}\sum_{x=۰}^{\infty}\lambda^x=e^{-\lambda}\times(\underbrace{۱+\lambda+\lambda^۲+..}_{\text{تصاعد هندسی}})=e^{-\lambda}\times\frac{۱}{۱-\lambda}$$

مثال ۱۶: آمار به دست آمده در یک مدت طولانی نشان می‌دهد که فراوانی نسبی قرقره‌های ناقص تولید شده در کارخانه‌ای به طور ثابت ۰/۰۰۵ است. احتمال این‌که در یک جعبه ۶۰۰۰ تایی از قرقره‌های این کارخانه، ۳۵ قرقره ناقص وجود داشته باشد کدام است؟

۱) ۰/۰۴۵۳ ۲) ۰/۰۲۰۱ ۳) ۰/۰۹۳ ۴) ۰/۹۰

پاسخ: گزینه «۱» در ابتدا $X \sim bin(۶۰۰۰, ۰/۰۰۵)$ می‌باشد اما توجه کنید که $n>۲۰$ $P<۰/۰۵$ بنابراین، $\lambda=np=۶۰۰۰\times۰/۰۰۵=۳۰$

اکنون: $$P(X=۳۵)=\frac{e^{-۳۰}\times(۳۰)^{۳۵}}{۳۵!}\simeq ۰/۰۴۵۳۱$$

مثال ۱۷: فرض کنید سه نفر برای پرداخت صورت‌حساب رستوران سکه پرتاب می‌کنند، فردی که در اقلیت باشد، پول غذا را می‌دهد. اگر سه سکه یکسان بیایند دوباره پرتاب انجام می‌شود. احتمال آن‌که در چهارمین پرتاب تکلیف روشن شود کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲۵۶}$ ۲) $\dfrac{۲۷}{۲۵۶}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲۵۶}$ ۴) $\dfrac{۸۱}{۲۵۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر X^* تعداد پرتاب‌های لازم برای روشن کردن تکلیف باشد $X^* \sim Ge(\frac{3}{4})$ در صورتی که سه سکه یکسان بیاید تکلیف مشخص نیست. پرتاب ۳ سکه ۸ حالت دارد که دو حالت هر سه شیر یا هر سه خط تکلیف را مشخص نمی‌کند و ۶ حالت آن تکلیف را مشخص می‌کند بنابراین، احتمال روشن شدن تکلیف برابر $\frac{3}{4}$ است.

$$A' = \{HHH, TTT\}$$

$$P(A') = \frac{2}{8} \Rightarrow P(X^* = 4) = \frac{6}{8} \times (\frac{2}{8})^{4-1=3} = \frac{3}{256}$$

مثال ۱۸: اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر دو دارای توزیع هندسی با پارامتر p ، $0 < p < 1$ باشند آنگاه احتمال $X = Y$ کدام است؟

۱) $\frac{p}{2-p}$ ۲) $\frac{1}{2-p}$ ۳) $\frac{p}{1-p}$ ۴) $\frac{1}{1-p}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$P(X=Y) = P(X=Y=1) + P(X=Y=2) + \cdots \xlongequal{\text{x و y متغیرهای مستقل‌اند}} P(X=1).P(Y=1) + P(X=2).P(Y=2) + \cdots$$

$$= p(1-p)^0 p(1-p)^0 + p(1-p)p(1-p) + \cdots = p^2 + p^2(1-p)^2 + \cdots \xlongequal{\text{تصاعد هندسی}} \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

مثال ۱۹: سکه‌ی سالمی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا حداقل یک شیر و یک خط داشته باشیم امید ریاضی تعداد پرتاب‌های لازم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌های لازم برای رسیدن به حداقل یک شیر و یک خط تعریف کنیم، برای آن‌که حداقل یک شیر و یک خط داشته باشیم باید حداقل ۲ بار پرتاب داشته باشیم:

$$f(x) = pq^{x-1} + pq^{x-1} \quad x \ge 2 \quad ; p = q = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \sum_{x=2}^{\infty} x(pq^{x-1} + pq^{x-1}) = \sum_{x=2}^{\infty} x((\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{2})^x) = \sum_{x=2}^{\infty} x(2 \times (\frac{1}{2})^x) = \sum_{x=2}^{\infty} x.(\frac{1}{2})^{x-1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + 1 = 3$$

یادآوری: $\sum_{x=1}^{\infty} x.a^{x-1} = \frac{d}{da}\sum_{x=0}^{\infty} a^x = \frac{d}{da}(\frac{1}{1-a}) = \frac{1}{(1-a)^2} \Rightarrow \sum_{x=2}^{\infty} x.a^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} x.a^{x-1} + 1$

مثال ۲۰: فرض کنید $X_1, X_2 \ldots X_n \sim Ge(P)$ نمونه‌ای مستقل باشند، توزیع $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ کدام است؟

۱) $Ge(q^n)$ ۲) $Bin(q^n)$ ۳) $Ge(1-q^n)$ ۴) $Bin(1-q)^n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق تعریف تابع توزیع احتمال:

$$F_Y(y) = P(\min(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \le y) = 1 - P(\min(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) > y \Rightarrow$$

هر کدام از نمونه‌ها از y بزرگتر هستند

$$= 1 - P(X_1 > y).P(X_2 > y)\ldots P(X_n > y)$$

به دلیل آن‌که x_i ها هم توزیع و مستقلاند

$$= 1 - [P(x_i > y)]^n = 1 - (q^y)^n = 1 - q^{ny}$$

$$F_y(y) = 1 - q^{ny} \Rightarrow y \sim Ge(1-q^n)$$

مثال ۲۱: احتمال گل شدن پرتاب یک بسکتبالیست ۰/۸ است. احتمال اینکه او در پنجمین پرتاب به دومین گل برسد چقدر است؟

۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۶۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از توزیع دو جمله‌ای منفی با تعریف X به عنوان تعداد آزمایش‌ها استفاده می‌شود:

$$P(X=5) = \binom{5-1}{2-1}.(0/8)^2(0/2)^{5-2} = \binom{4}{1}.(0/64)(0/008) = 0/020$$

مثال ۲۲: فرض کنید a عددی تصادفی از فاصله $[-4,4]$ باشد. احتمال این‌که معادله درجه دوم $x^2 + ax + 1 = 0$ دو ریشه حقیقی داشته باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» تابع چگالی احتمال a به صورت روبرو می‌باشد:

$$f(a)=\frac{1}{4-(-4)}=\frac{1}{8} \qquad -4<a<4$$

برای اینکه معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی داشته باشد باید $\Delta \ge 0$ باشد، بنابراین:

$$P(a^2-4\ge 0)=P(a^2\ge 4)=P(|a|\ge 2)=P(a>2 \text{ یا } a<-2)=1-P(-2<a<2)=1-\int_{-2}^{2}\frac{1}{8}dx=1-\frac{4}{8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۳: فرض کنید که $X\sim U(0,2)$ و همچنین $Y=\begin{cases}X\ ;\ x\le 1\\ X^2\ ;\ x>1\end{cases}$ باشد. مقدار احتمال $p(\frac{1}{4}<Y<\frac{9}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{8}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینه «۴» مقدار Y را در فاصله‌های خواسته شده با توجه به بازه‌های X جدا می‌کنیم:

$$P(\frac{1}{4}<Y<\frac{9}{4})=p(\frac{1}{4}<Y<1)+p(1<Y<\frac{9}{4})=p(\frac{1}{4}<X<1)+p(1<X^2<\frac{9}{4})=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{2}dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

مثال ۲۴: مقدار مورد انتظار سود در شرکتی برابر با ۴۰ و واریانس سود برابر با ۱۲ است. احتمال آن که متغیر تصادفی سود که دارای توزیع یکنواخت است مقدار بیش از ۴۰ را اختیار کند کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه «۲» در توزیع یکنواخت پیوسته با توجه به رابطه میانگین و واریانس به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{matrix}E(X)=\dfrac{a+b}{2}=40\\ Var(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=12\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=80\\(b-a)^2=144\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=80\\(b-a)=12\end{cases}\Rightarrow 2b=92\Rightarrow b=46\Rightarrow a+46=80\Rightarrow a=80-46=34$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{12} & 34<x<46\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

روی فاصله خواسته شده انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$P(X>40)=\int_{40}^{46}\frac{1}{12}dx=\frac{1}{12}x\Big|_{40}^{46}=\frac{46}{12}-\frac{40}{12}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۵: به طور متوسط ۵۰ تصادف رانندگی در یک ساعت رخ می‌دهد. احتمال این‌که حداقل ۲ دقیقه طول بکشد تا تصادف بعدی براساس لحظه معینی رخ دهد کدام است؟

۱) $e^{-\frac{5}{6}}$ ۲) $1-e^{-\frac{5}{6}}$ ۳) $1-e^{-\frac{5}{3}}$ ۴) $e^{-\frac{5}{3}}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مقدار λ را بدست می‌آوریم. متوسط زمان انتظار برای وقوع ۵۰ تصادف برابر ۶۰ دقیقه است. لازم است متوسط زمان انتظار برای وقوع یک تصادف به عنوان میانگین متغیر تصادفی نمایی محاسبه شود:

تصادف	دقیقه
۵۰	۶۰
۱	$\frac{1}{\lambda}=\frac{5}{6}$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}=\begin{cases}\frac{5}{6}e^{-\frac{5x}{6}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}\Rightarrow P(X\ge 2)=\int_{2}^{+\infty}\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}x}dx=-e^{-\frac{5}{6}x}\Big|_{2}^{\infty}=e^{-\frac{5}{3}}$$

مثال ۲۶: در توزیع نمایی به صورت $x>0$ $\quad f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ تابع نرخ شکست کدام است؟

۱) $\frac{\lambda}{t}$ ۲) λ ۳) $\frac{1}{\lambda}$ ۴) $\frac{t}{\lambda}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق رابطه تابع نرخ شکست جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{f(x)}{1-F(x)}=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-(1-e^{-\lambda x})}=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}}=\lambda$$

نتیجه: همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع نرخ شکست تابعی ثابت است. این به مفهوم آن است که گذشت زمان در طول عمر باقیمانده هیچ تأثیری ندارد که همان خاصیت بی‌حافظگی را تأیید می‌کند.

مثال ۲۷: طول عمر لامپ‌های تولیدی یک کارخانه دارای توزیع نمایی با میانگین ۶ ماه می‌باشد. اگر به تصادف و با جایگذاری ۱۰ لامپ از این کارخانه انتخاب کنیم احتمال آن که حداقل ۲ لامپ حداکثر ۵ ماه عمر کند کدام است؟

۱) ۰/۹۹۷ ۲) ۰/۷۲۳ ۳) ۰/۸۴۷ ۴) ۰/۵۵۶

پاسخ: گزینه «۱» اگر فرض کنیم y تعداد لامپ‌های انتخابی از این کارخانه باشد که طول عمر آن‌ها حداکثر ۵ ماه است، در این صورت داریم:

$$Y\sim bin(10,p)\ ;\ X\sim exp(\frac{1}{6})\quad ,\quad p=P(X<5)=\int_0^5\frac{1}{6}e^{\frac{-x}{6}}dx=-e^{\frac{-x}{6}}\Big|_0^5=1-e^{-\frac{5}{6}}=F_X(5)=0/57$$

$$p(Y\ge 2)=1-p(Y\le 1)=1-p(Y=0)-p(Y=1)=1-\binom{10}{0}(0/57)^0(0/43)^{10}-\binom{10}{0}(0/57)(0/43)^9=0/997$$

مثال ۲۸: در مثال قبل اگر بدانیم یک لامپ حداقل ۲ ماه کار کرده است احتمال آن که حداقل ۸ ماه کار کند چقدر است؟

۱) e^{-1} ۲) e^{-2} ۳) e^{-3} ۴) e^{-4}

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به خاصیت عدم حافظه در توزیع نمایی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$p(X>8\,|\,X>2)=p(X>2+6\,|\,X>2)=p(X>6)=\int_6^\infty\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}dx=-e^{-\frac{x}{6}}\Big|_6^\infty=e^{-1}$$

مثال ۲۹: اگر X دارای تابع چگالی $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ باشد، مقدار $E(X\,|\,X>1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\lambda}$ ۲) $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ ۳) $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ ۴) $\frac{\lambda-2}{\lambda}$

پاسخ: گزینه «۲» در فصل سوم ثابت کردیم که:

$$E(g(x)\,|\,a<x<b)=\frac{\int_a^b g(x).f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{\int_1^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx}=\frac{e^{-\lambda}(\frac{1}{\lambda}+1)}{e^{-\lambda}}=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

همچنین به طور مستقیم $E(X\,|\,X>1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P(X>x\,|\,X>1)\xlongequal{\text{بی حافظگی}}P(X>x-1)\Rightarrow 1-F_X(x\,|\,X>1)=1-F_X(x-1)\xrightarrow{\text{مشتق}}f_X(x\,|\,X>1)=f_X(x-1)\quad ;\quad x>1$$

$$\Rightarrow E(X\,|\,X>1)=\int_1^\infty x.f_X(x\,|\,X>1)dx=\int_1^\infty x.f_X(x-1)dx=\int_1^\infty x.\lambda e^{-\lambda(x-1)}dx=e^{\lambda}\int_1^\infty x.e^{-\lambda x}dx$$

$$\xlongequal{\text{جزء به جزء}}e^{\lambda}(e^{-\lambda}(\frac{1}{\lambda}+1))=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

مثال ۳۰: مقادیر $\Gamma(5)$ و $\Gamma(\frac{5}{2})$ را به دست آورید.

پاسخ: چون ۵ عددی صحیح است بنابراین $\Gamma(5)=(5-1)!=4!$. از طرفی چون $\frac{5}{2}$ عددی صحیح نیست.

طبق رابطه بازگشتی:

$$\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

مثال ۳۱: **شماره‌گیری‌های مشترکین در یک مرکز تلفن براساس یک فرآیند پواسون با آهنگ ۵ تلفن در دقیقه صورت می‌گیرد. احتمال این‌که حداکثر یک دقیقه برای دو شماره‌گیری صرف شود کدام است؟**

۱) ۰/۵۸   ۲) ۰/۹۶   ۳) ۰/۷۵   ۴) ۰/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** مقدار λ را بدست می‌آوریم، همچنین زمان انتظار تا وقوع دومین شماره‌گیری $\alpha = ۲$ است. شماره‌گیری دقیقه

۱ ۵

$\frac{۱}{\beta} = \lambda = ۵$ ۱

$$P(X \le ۱) = \int_{۰}^{۱} \frac{۵^{۲}}{\Gamma(۲)} . x^{۲-۱} . e^{-۵x} dx = ۲۵\int_{۰}^{۱} x . e^{-۵x} dx = ۲۵(-\frac{x}{۵}e^{-۵x})\Big|_{۰}^{۱} + \frac{۱}{۵}\int_{۰}^{۵} e^{-۵x}dx = ۱-۶e^{-۵} = ۰/۹۶$$

روش دوم: با استفاده از نکته (۲) گفته شده در بالا (رابطه گاما و پواسون) می‌توان بیان کرد که:

$$P(X \le ۱) = P(Y \ge ۲) \; ; \; \begin{cases} X \sim \Gamma(۲,۵) \\ Y \sim P(۵) \end{cases}$$

$$P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{y}}{y!} \qquad y = ۰,۱,۲,\cdots$$

بنابراین $P(Y \ge ۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(Y \ge ۲) = ۱ - P(Y < ۲) = ۱ - P(Y = ۰) - P(Y = ۱) = ۱ - \frac{e^{-۵}.۵^{۰}}{۰!} - \frac{e^{-۵}.۵^{۱}}{۱!} = ۱ - e^{-۵} - ۵e^{-۵} = ۱ - ۶e^{-۵}$$

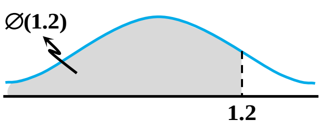
مثال ۳۲: **اگر $X \sim N(۵۰, ۱۰۰)$ باشد، مقدار $P(۴۵ \le X \le ۶۲)$ کدام است؟**

۱) ۰/۵۷   ۲) ۰/۳۶   ۳) ۰/۵۹   ۴) ۰/۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا متغیر را استاندارد کرده سپس از جدول مقادیر، احتمال را محاسبه می‌کنیم.

$$P(\frac{۴۵-۵۰}{\sqrt{۱۰۰}} \le Z \le \frac{۶۲-۵۰}{\sqrt{۱۰۰}}) = P(Z \le ۱/۲) - P(Z \le -۰/۵) = \varnothing(۱/۲) - \varnothing(-۰/۵) = ۰/۸۸۴۹ - [۱ - ۰/۶۹۱۵] = ۰/۵۷۶۴$$

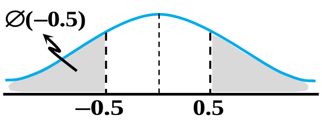
برای محاسبه $\varnothing(Z)$، ابتدا عدد Z را در سطر و ستون اول جدول به دست می‌آوریم (به عنوان مثال برای عدد $Z = ۱/۲$، عدد ۱ در ستون اول جدول و عدد ۰/۲ در سطر اول جدول) سپس مقدار احتمال مورد نظر مربوط به Z را از درون جدول محاسبه می‌کنیم.



برای محاسبه مقدار احتمال مربوط به Zهای منفی، از ویژگی تقارن شکل تابع چگالی نرمال استاندارد حول صفر استفاده می‌کنیم. برای Zهای منفی می‌توانیم ابتدا مقدار احتمال را با روش توضیح داده شده برای $|Z|$ به دست آورده سپس از رابطه روبه‌رو استفاده کنیم: $\varnothing(Z) = ۱ - \varnothing(|Z|)$

به طور مثال $\varnothing(-۰/۵) = ۱ - \varnothing(۰/۵)$ می‌باشد.

توجه کنید:



$$\begin{cases} P(Z \le ۰) = P(Z < ۰) = ۰/۵ \\ P(Z \ge ۰) = P(Z > ۰) = ۰/۵ \end{cases}$$

مثال ۳۳: **اگر $X \sim N(۱,۱)$ باشد، مقدار $p(X \ge ۲ | X \ge ۱)$ کدام است؟**

۱) $۲ - ۲\phi(۱)$ ۲) $۱ - \phi(۱)$ ۳) $\phi(۱)$ ۴) $۲\phi(۱) - ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به رابطه احتمال شرطی خواهیم داشت:

$$p(X\geq ۲|X\geq ۱)=\frac{p(X\geq ۲,X\geq ۱)}{p(X\geq ۱)}=\frac{p(X\geq ۲)}{p(X\geq ۱)}=\frac{p(\frac{X-۱}{۱}\geq\frac{۲-۱}{۱})}{p(\frac{X-۱}{۱}\geq\frac{۱-۱}{۱})}=\frac{p(Z\geq ۱)}{p(Z\geq ۰)}=\frac{۱-p(Z\leq ۱)}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱-\phi(۱)}{\frac{۱}{۲}}=۲-۲\phi(۱)$$

مثال ۳۴: فرض کنید $X\sim N(۲,۴)$ باشد، مقدار $Var(e^{۲X})$ کدام است؟

۱) $e^{۴۰}-e^{۳۲}$ ۲) $e^{۳۲}-e^{۱۶}$ ۳) $e^{۴۰}-e^{۲۴}$ ۴) $e^{۴۰}-e^{۱۸}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$Var(e^{۲X})=E(e^{۴X})-E^{۲}(e^{۲X})\xrightarrow{M_X(t)=E(e^{tX})}M_X(۴)-(M_X(۲))^{۲}$$

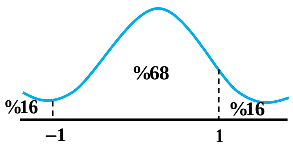
از طرفی: $M_X(t)=e^{\mu t+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}t^{۲}}$، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases}M_X(۴)=e^{۲\times۴+\frac{۱}{۲}\times۴\times(۴)^{۲}}=e^{۴۰}\\ M_X(۲)=e^{۲\times۲+\frac{۱}{۲}\times۴\times(۲)^{۲}}=e^{۱۲}\end{cases}\Rightarrow M_X(۴)-(M_X(۲))^{۲}=e^{۴۰}-(e^{۱۲})^{۲}=e^{۴۰}-e^{۲۴}$$

مثال ۳۵: در یک توزیع پواسون با میانگین ۲۵، مقدار $P(X<۳۰)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۶۸ ۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۳۴

پاسخ: گزینه «۳» در اینجا $\mu=\lambda=۲۵$ می‌باشد و شرایط تقریب برقرار است:



$$P(X<۳۰)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۳۰-۲۵}{\sqrt{۲۵}})=P(Z<۱)=۰/۸۴$$

مثال ۳۶: احتمال قبولی دانشجویان در کنکور امسال ۰/۸ است. اگر نمونه ۱۰۰ تایی انتخاب کنیم، احتمال آن‌که حداقل ۸۴ نفر قبول شوند کدام است؟

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۸۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۳۴

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این‌که آزمایش با احتمال ثابت $p=۰/۸$ به تعداد $n=۱۰۰$ بار تکرار شده است، خواهیم داشت:

$$p(X\geq ۸۴)=p(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{۸۴-np}{\sqrt{npq}})=p(Z\geq\frac{۸۴-۸۰}{\sqrt{۱۶}})=p(Z>۱)=۰/۱۶$$

مثال ۳۷: فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، در این‌صورت تابع چگالی

احتمال $\sigma^{۲}=npq=۱۰۰\times\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}=۱۶$, $n=۱۰۰,p=۰/۸\Rightarrow\mu=np=۱۰۰\times\frac{۸}{۱۰}=۸۰$ $\mathbf{Y=X^{۳}}$ را به دست آورید.

$$f_X(x)=\begin{cases}۱ & ۰<x<۱\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

پاسخ: ابتدا تابع توزیع را به دست می‌آوریم:

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^{۳}\leq y)=P(X\leq y^{\frac{۱}{۳}})=F(y^{\frac{۱}{۳}})=\int_{۰}^{y^{\frac{۱}{۳}}}۱\,dx=y^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow F_Y(y)=y^{\frac{۱}{۳}}$$

علاوه بر این، می‌توان با مشتق گرفتن از طرفین رابطه زیر تابع چگالی مورد نظر را به دست آورد:

$$F_Y(y)=F_X(y^{\frac{۱}{۳}})\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF_X(y^{\frac{۱}{۳}})}{dy}=\frac{۱}{۳}y^{-\frac{۲}{۳}}.\underbrace{f_X(y^{\frac{۱}{۳}})}_{۱}=\frac{۱}{۳}y^{-\frac{۲}{۳}}$$

مثال ۳۸: اگر $X \sim \exp(\frac{۱}{\lambda})$ باشد، تابع چگالی $Y = X^{\frac{۱}{\alpha}}$ کدام است؟

۱) وایبول ۲) نمایی ۳) نرمال ۴) پواسون

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع چگالی احتمال نمایی به صورت $f(x) = \frac{۱}{\lambda} e^{\frac{-x}{\lambda}} \ ; \ x > ۰$ می‌باشد. اکنون تابع توزیع Y را به دست می‌آوریم:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^{\frac{۱}{\alpha}} \le y) = P(X \le y^\alpha) = F_X(y^\alpha) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \alpha y^{\alpha-۱} f_X(y^\alpha) = \alpha y^{\alpha-۱} \times \frac{۱}{\lambda} e^{\frac{-y^\alpha}{\lambda}}$$

تابع چگالی به دست آمده همان تابع چگالی وایبول می‌باشد.

مثال ۳۹: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(۰,۱)$ باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = -\lambda \ln X$ کدام است؟

۱) نمایی با میانگین λ ۲) نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$ ۳) گاما با پارامترهای λ و α ۴) یکنواخت $(۰,۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع توزیع Y را به دست می‌آوریم:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-\lambda \ln X \le y) = P(\ln X \ge \frac{-y}{\lambda}) = P(X \ge e^{\frac{-y}{\lambda}}) = ۱ - P(X \le e^{\frac{-y}{\lambda}}) = ۱ - F(e^{\frac{-y}{\lambda}})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{۱}{\lambda} e^{\frac{-y}{\lambda}} \times \underbrace{f_X(e^{\frac{-y}{\lambda}})}_{۱} = \frac{۱}{\lambda} e^{\frac{-y}{\lambda}} \Rightarrow Y \sim \exp(\frac{۱}{\lambda}) \quad ; \quad E(Y) = \lambda$$

مثال ۴۰: اگر X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال روبرو باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر $Y = |X|$ کدام است؟

۱) $f_Y(y) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۲) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} & -۱ < y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۳) $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \ge ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف تابع توزیع داریم:

$$Y = |X| \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = P(X \le y) - P(X \le -y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

اکنون از تابع توزیع مشتق گرفته خواهیم داشت:

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مثال ۴۱: فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ یک نمونه تصادفی از چگالی $f_X(x) = \begin{cases} ۲x & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد. توزیع متغیر $Y = \frac{X_۱}{X_۲}$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** ابتدا متغیر جدیدی مانند $Y' = X_۲$ معرفی می‌کنیم سپس معکوس‌ها را بدست آورده ژاکوبین می‌گیریم:

$$\begin{cases} Y = \frac{X_۱}{X_۲} \\ Y' = X_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_۱ = YY' & ۰ < yy' < ۱ \\ X_۲ = Y' & ۰ < y' < ۱ \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_۱}{\partial y} & \frac{\partial x_۱}{\partial y'} \\ \frac{\partial x_۲}{\partial y} & \frac{\partial x_۲}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y' & y \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = y'$$

$$\Rightarrow f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1).f_{X_2}(x_2)=2x_1.2x_2=4x_1x_2$$

$$\Rightarrow f_{Y,Y'}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(yy',y').|J|=4(yy')(y')y'=4yy'^3 \Rightarrow f_Y(y)=\int f_{Y,Y'}(y,y')dy'$$

اما به حدود y' دقت کنید:

$$\begin{cases} 0<y'<1 & \Rightarrow \quad 0<y'<\min(1,\frac{1}{y}) \\ 0<yy'<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} \int_0^1 4yy'^3\,dy'=4y\times\frac{y'^4}{4}\Big|_0^1=y \quad ; \quad 0<y<1 \Rightarrow \min(1,\frac{1}{y})=1 \Rightarrow 0<y'<1 \\ \int_0^{\frac{1}{y}} 4yy'^3\,dy'=4y\times\frac{y'^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{y}}=\frac{1}{y^3} \; ; \; 1<y<\infty \quad \Rightarrow \min(1,\frac{1}{y})=\frac{1}{y} \Rightarrow 0<y'<\frac{1}{y} \end{cases}$$

مثال ۴۲: اگر X_1 و X_2 دو نمونه تصادفی از توزیع $U(0,\theta)$ باشند، توزیع $Y=X_1+X_2$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** متغیر جدیدی مانند $Y'=X_1$ تعریف می‌کنیم:

ژاکوبین به صورت روبه‌رو است:

$$\begin{cases} Y=X_1+X_2 \\ Y'=X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1=Y' \\ X_2=Y-Y' \end{cases} \Rightarrow J=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y} & \frac{\partial X_1}{\partial Y'} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y} & \frac{\partial X_2}{\partial Y'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1$$

از طرفی: $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f(x_1).f(x_2)=\begin{cases} \frac{1}{\theta^2} & 0<x_1,x_2<\theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

$$f_{Y,Y'}(y,y')=f_{X_1,X_2}(y',y-y').|J|=\frac{1}{\theta^2} \quad , \quad f_Y(y)=\int f_{Y,Y'}(y,y')dy'$$

$$\begin{cases} 0<y'<\theta \\ 0<y-y'<\theta \end{cases} \Rightarrow -\theta<y'-y<0 \Rightarrow y-\theta<y'<y \xrightarrow[0<X_1<\theta]{Y'=X_1} \max\{y-\theta,0\}<y'<\min\{y,\theta\}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} \int_0^y \frac{1}{\theta^2}dy'=\frac{y}{\theta^2} & 0\le y<\theta \Rightarrow \begin{cases} \max(y-\theta,0)=0 \\ \min(y,\theta)=y \end{cases} \Rightarrow 0<y'<y \\ \int_{y-\theta}^{\theta} \frac{1}{\theta^2}dy'=\frac{2\theta-y}{\theta^2} & \theta\le y<2\theta \Rightarrow \begin{cases} \max(y-\theta,0)=y-\theta \\ \min(y,\theta)=0 \end{cases} \Rightarrow y-\theta<y'<\theta \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مثال ۴۳: فرض کنید $X_1,X_2,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با چگالی مشترک $f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & 1<x<\infty \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشند. تابع چگالی احتمال $Y=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ کدام است؟

۱) $f_Y(y)=\begin{cases} 1-y^n & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۲) $f_Y(y)=\begin{cases} 1-\frac{1}{y^n} & 1<y<\infty \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۳) $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{y^n} & 1<y<\infty \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق مثال بالا مقادیر را به دست آورده و جایگذاری می‌کنیم: $f_Y(y)=n(1-F_X(y))^{n-1}.f_X(y)$

$$F_X(y)=\int_1^y \frac{1}{x^2}dx=\int_1^y x^{-2}dx=-x^{-1}\Big|_1^y=-\frac{1}{x}\Big|_1^y=-\frac{1}{y}+1 \Rightarrow f_Y(y)=n.(1-1+\frac{1}{y})^{n-1}.\frac{1}{y^2}=n.y^{-n+1}.y^{-2}=n.y^{-n-1}$$

مثال ۴۴: **فرض کنید طول عمر هر یک از دو مؤلفه از سیستمی که به طور متوالی (سری) به یکدیگر متصل شده‌اند متغیرهای تصادفی از نوع نمایی با پارامتر λ باشد. متوسط طول عمر سیستم کدام است؟**

۱) 2λ ۲) $\frac{1}{2\lambda}$ ۳) λ^2 ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مؤلفه‌ها سری هستند و سیستم زمانی کار می‌کند که هر دو مؤلفه کار کند. لذا طول عمر یک سیستم برابر با حداقل طول عمر دو مؤلفه می‌باشد. طول عمر سیستم $Y=Min(X_1,X_2)$

$$f(y)=2(1-F_X(y)f(y)=2(1-1+e^{-\lambda y})\lambda e^{-\lambda y}=2\lambda e^{-2\lambda y} \quad 0<y<\infty$$

بنابراین $Y=\min(X_1,X_2)$ نمایی پارامتر 2λ پیروی می‌کند. لذا متوسط طول عمر برابر است با $\frac{1}{2\lambda}$.

مثال ۴۵: **فرض کنید طول عمر لامپ‌های تلویزیونی بر حسب ساعت دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ باشند. اگر X_3 و X_2 و X_1 نمایانگر طول عمر سه لامپ تلویزیونی باشند، احتمال این که عمر اولین لامپی که می‌سوزد کمتر از $\frac{1}{3}$ ساعت باشد کدام است؟**

۱) $1-e^{-3}$ ۲) e^{-3} ۳) $1-e^{-1}$ ۴) e^{-1}

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طول عمر اولین لامپی که می‌سوزد برابر $Y=\min(X_1,X_2,X_3)$ می‌باشد. ابتدا تابع چگالی Y را به دست می‌آوریم:

$$f_Y(y)=n(1-F_X(y))^{n-1}.f_X(y) \qquad n=3\ ,\ \lambda=1,\ F_X(y)=1-e^{-y}\ ,\ f_X(y)=e^{-y}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=3(1-(1-e^{-y}))^2.e^{-y}=3(e^{-y})^2.e^{-y}=3e^{-3y} \Rightarrow P(Y<\frac{1}{3})=\int_0^{\frac{1}{3}} 3e^{-3y}dy=-e^{-3y}\Big|_0^{\frac{1}{3}}=1-e^{-1}$$

توجه کنید که برخلاف مشاهدات نمونه $X_1,X_2,...X_n$ آماره‌های تصادفی $y_1,y_2,...y_n$ مستقل نیستند. این موضوع به سادگی توسط رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$p\{Y_i>y\ ,Y_{i+1}>y\}=P(Y_i>y)\neq P(Y_i>y)\times P(Y_{i+1}>y) \quad i=1,2,...n-1$$

پس چگالی توأم Y_n را نمی‌توان از حاصلضرب چگالی‌های کناری به دست آورد. لذا در قضیه زیر آن را مستقیماً به دست می‌آوریم:

مثال ۴۶: **فرض کنید X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت بر $(0,1)$ است. توزیع آماره مرتب Y_i کدام است؟**

۱) $\beta(i,n-i+1)$ ۲) $\beta(i+1,n+i-1)$ ۳) $\beta(n+i,i-1)$ ۴) $\beta(n+i-1,i+1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f_{y_i}(y)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\times y^{i-1}\times(1-y)^{n-i} \quad ; \quad 0<y<1$$

همان‌طور که دیده می‌شود آماره مرتب Y_i دارای توزیع بتا با پارامترهای $(i,n-i+1)$ می‌باشد.

آزمون فصل پنجم

۱ـ آزمایشی به صورت زیر انجام می‌شود، سه سکه هم‌زمان پرتاب می‌شوند. این آزمایش آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا به طور هم‌زمان هر سه سکه شیر را نشان دهند. آنگاه متغیر تصادفی این آزمایش ....

۱) گسسته و متناهی می‌باشد. ۲) پیوسته و نامتناهی می‌باشد. ۳) گسسته و نامتناهی می‌باشد. ۴) پیوسته و متناهی می‌باشد.

۲ـ یک تاس منصف را در نظر بگیرید. در یک آزمایش این تاس آنقدر پرتاب می‌شود تا ۶ بار پشت سر هم عدد ۳ مشاهده شود. متغیر این آزمایش چیست؟

۱) دو جمله‌ای ۲) هندسی ۳) برنولی ۴) دو جمله‌ای منفی

۳ـ در سؤال قبل به طور متوسط چند بار باید این تاس پرتاب شود تا ۶ بار پشت سر هم عدد ۳ مشاهده شود؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۴۶۶۵۴ ۳) ۱۲۹۶ ۴) ۳۶

۴ـ از جعبه‌ای که دارای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی است، ۱۰ مهره با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. متوسط تعداد مهره‌های قرمز استخراجی در این نمونه برابر است با:

۱) ۴ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۵ـ یک تاس چهار وجهی منصف را که بر روی هر وجه آن حروف C,B,A و D نوشته شده که هر حرف معرف یک نفر است در نظر بگیرید. فرض کنید این تاس آنقدر پرتاب می‌شود تا یکی از این وجوه سه بار مشاهده شود و آن شخص یک بار برنده شود. احتمال این‌که نفر A در نهمین پرتاب برای اولین بار برنده شود چقدر است؟

۱) ۰/۲۳۴ ۲) ۰/۶۲۳ ۳) ۰/۰۷۸ ۴) ۰/۲۵

۶ـ در سؤال قبل انتظار دارید در چند بار پرتاب تاس، A برای دومین بار برنده شود؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۷ـ در شهر تهران ۵۰% تماشاگران تلویزیون شبکه سوم و ۱۰% برنامه شبکه اول و ۱۵% برنامه شبکه دوم و ۲۵% برنامه شبکه چهارم را تماشا می‌کنند. اگر از افراد این شهر ۱۰ نفر انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که ۲ نفر شبکه اول و ۳ نفر شبکه دوم و ۴ نفر شبکه سوم را ببینند؟

۱) ۰/۰۰۶۶ ۲) ۰/۲۰۵ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۱۲

۸ـ یک سکه پرتاب می‌شود چقدر احتمال دارد ۲ شیر قبل از ۲ خط مشاهده شود؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲۵

۹ـ یک جعبه شامل $۲^۵$ مهره است که $\binom{۵}{x}$ تای آن دارای شماره x است. $(x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$ دو مهره با جایگذاری از جعبه خارج می‌کنیم. اگر x شماره روی آن باشد Var(X) چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲/۵

۱۰ـ چند نفر لازم است تا احتمال این که حداقل یکی از آن‌ها در روز تولد شما به دنیا آمده باشد بیش از $\frac{۱}{۲}$ گردد؟

۱) ۱۷۰ ۲) ۲۵۳ ۳) ۲۴۲ ۴) ۲۵۱

۱۱ـ تعداد افرادی که به یک سیستم بانکی وارد می‌شوند دارای توزیع پواسون با میانگین ۱۰ نفر در ساعت می‌باشد. اگر بدانیم یک نفر بین ساعت ۱۱ تا ۱۳ به سیستم وارد شده باشد چقدر احتمال دارد این شخص بین ساعت ۱۱ الی ۱۲/۵ به سیستم وارد شده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $e^{-۱/۵}$ ۴) ۰

۱۲ـ در سؤال قبل اگر بدانیم بین ساعت ۱۲ الی ۱۲/۵ هیچ کس به سیستم وارد نشده است چقدر احتمال دارد تا ساعت ۱۳ نیز هیچ کس به سیستم وارد نشود؟

۱) $e^{-۱۰}$ ۲) $\frac{e^{۵}-۱}{e^{۵}}$ ۳) $۱-e^{-۱۰}$ ۴) $e^{-۵}$

۱۳ـ اگر X_1, X_2 دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $(5, \frac{1}{4})$ باشند آنگاه $p(X_1^2 \mid X_1 + X_2 = 5)$ کدام است؟

۱) ۰/۲۸۲ ۲) ۰/۳۹۷ ۳) ۰۷۱۴ ۴) ۰/۸۲۸

۱۴ـ تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم، اگر x برابر مجموع مقادیر و y برابر تفاضل نتیجه تاس دوم از تاس اول باشد $cov(x,y)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۵ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای (x,p) می‌باشد. مُد یا نماس متغیر تصادفی X کدام است؟

۱) $[np]$ ۲) $[\frac{n}{p}]$ ۳) $[(n-1)p]$ ۴) $[(n+1)p]$

۱۶ـ اگر نرخ ورود افراد به یک فروشگاه ۲۰ نفر در ساعت باشد و هم چنین اگر ۲۵ ٪۰ مشتریان را مردان تشکیل دهند چقدر احتمال دارد در ظرف یک ساعت ۴ مرد وارد فروشگاه شده باشند به شرطی که بدانیم ۱۲ نفر به فروشگاه وارد شده‌اند؟

۱) ۰/۳۹۵ ۲) ۰/۱۹۶ ۳) ۰/۸۰۴ ۴) ۰/۴۰۸

۱۷ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسون به ترتیب با پارامترهای ۷ و ۵ باشند $P(X = 5 - Y)$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) ۰/۰۰۴ ۲) ۰/۲۷۱ ۳) ۰/۰۱۲۷ ۴) ۰/۰۲۱۷

۱۸ـ فرض کنید تعداد اشتباهات چاپی در یک صفحه ازکتابی دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 2$ باشد. احتمال اینکه حداقل یک غلط در یک صفحه باشد چقدر است؟

۱) $e^{\frac{1}{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ۳) $1-e^{-2}$ ۴) $1-\frac{1}{2}e^{-2}$

۱۹ـ فرض کنید متغیر تصادفی X توزیع دارای پواسون با میانگین معلوم باشد، حال ضریب تغییرات این توزیع کدام است؟ (λ پارامتر توزیع می‌باشد)

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$ ۳) λ ۴) $\sqrt{\lambda}$

۲۰ـ اگر متغیرهای $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{64}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با میانگین ۱ و واریانس ۴ باشد، در این صورت $P(\sum_{i=1}^{64} x_i > 64)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۱ـ فرض کنید $[x]$ جزء صحیح عدد حقیقی X باشد. اگر X دارای توزیع یکنواخت بر بازه $[0,1]$ باشد امید ریاضی $[100x]$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۰/۵ ۴) ۵۱

۲۲ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنول با میانگین θ باشند در آن صورت $E(\prod_{i=1}^{n} X_i^4)$ برابر کدام است؟

۱) θ^n ۲) $(1-\theta)^n$ ۳) θ^{4n} ۴) $(1-\theta)^{4n}$

۲۳ـ فرض کنید $P(X_i = x_i) = \binom{1}{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$ $\quad i=1,2,\ldots,n$ در آن $Var(\prod_{i=1}^{n} X_i)$ عبارت است از:

۱) $p(1-p)$ ۲) $p(1-p^n)$ ۳) $p^n(1-p^n)$ ۴) $p^n(1-p)^n$

۲۴ـ در یک توزیع دو جمله‌ای، امید وقوع S سه برابر امید وقوع F است. اگر در این توزیع دوجمله‌ای $n = 10$ باشد محتمل‌ترین تعداد باری که S رخ می‌دهد برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۲

۲۵ـ شخصی $(m+n)$ آزمایش و مستقل از یکدیگر انجام می‌دهد که احتمال موفقیت در هر آزمایش p است و $q=1-p$. در این صورت بـه ازای هر $k=0,1,2,...,n$ احتمال شرطی اینکه دقیقاً $(m+k)$ آزمایش موفق باشد با فرض اینکه اولین m آزمایش موفق بوده باشد برابر است با:

۱) $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$　　۲) $\binom{n}{k}p^{m+k}.q^{n-k}$　　۳) $\binom{m+n}{k}p^{m+k}q^{n-k}$　　۴) $\binom{m+n}{k}p^{m+k}.q^{n-k}$

۲۶ـ اگر Z,Y,X متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر p و مرتبه n باشند، آنگاه $E[(X+Y+Z)^2]$ برابر است با:

۱) $3np(3np-1)$　　۲) $(3n-1)np^2$　　۳) $(3n-1)np$　　۴) $3np((3n-1)p+1)$

۲۷ـ در یک توزیع پواسون داریم $p(2)=p(4)$ در این صورت $p(3)$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}}$　　۲) $2\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}}$　　۳) $2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}}$　　۴) $4\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}}$

۲۸ـ متغیرهای Y,X دارای توزیع پواسون با پارامترهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ می‌باشند $P(X^2+Y^2\le 2)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{e}$　　۲) $\frac{20}{9e}$　　۳) $\frac{10}{11e}$　　۴) $\frac{1}{e}$

۲۹ـ یکی از اعداد مجموعه $\{1,2,3,4,5\}$ را به تصادف انتخاب کرده و آن را N می‌نامیم. اگر عددی از بازه $[0,N]$ به تصـادف انتخـاب کنـیم امید ریاضی آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$　　۲) $\frac{2}{5}$　　۳) $\frac{3}{5}$　　۴) $\frac{3}{2}$

۳۰ـ فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر P باشد و $X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی این نمونه تصادفی باشند $Var(X_{(1)}X_{(2)}...X_{(n)})$ کدام است؟

۱) $p^n(1-p)^n$　　۲) $p^n(1-p^n)$　　۳) $p^n(1-p^{2n})$　　۴) $p^n+(1-p)^n$

۳۱ـ یک کارخانه مایع ظرفشویی تولیدات خود را در ظروفی بسته‌بندی می‌کند که وزن این ظروف بعد از پر شدن دارای توزیـع نرمـال بـا میـانگین ۵۰۰ گرم و واریانس ۱۰۰ گرم است. اگر از این خط بسته‌بندی ۵۰ نمونه برداشته شود. به طور متوسط چه تعدادی از این بسته‌هـا دارای وزنـی کمتـر از ۵۰۰ گرم می‌باشد؟

۱) ۵۰　　۲) ۲۵
۳) ۱۲/۵　　۴) بدون جدول نرمال نمی‌توان محاسبه کرد.

۳۲ـ یک شرکت اقدام به تولید لوله‌هایی می‌کند که طول این لوله‌ها دارای توزیع یکنواخت در بازه $(10-12)cm$ می‌باشد. اندازه مـورد نیـاز بـرای مصرف این لوله $11\ cm$ است. اگر طول لوله تولید شده با مقدار مورد نیاز اختلاف داشته باشد هزینه‌ای برابر $120(x-11)^2$ واحـد پـولی دارد. اگـر روزانـه ۵۰ عدد از این قطعه تولید شود به طور متوسط چقدر هزینه دوباره‌کاری داریم؟

۱) ۴۰۰　　۲) ۱۲۰۰　　۳) ۱۳۲۰۰　　۴) ۲۰۰۰۰

۳۳ـ تعداد مشتریانی که وارد یک فروشگاه می‌شوند دارای توزیع پواسون با میانگین ۱۲ نفر در ساعت می‌باشد. احتمال این‌که مغـازه‌دار بـرای ورود متوالی دو مشتری بیش از ۲۰ دقیقه انتظار بکشد چقدر است؟

۱) ۰/۰۱۸　　۲) ۰/۱۲۷　　۳) ۰/۲۱۳　　۴) ۰/۰۳۲

۳۴ـ در سؤال بالا به طور متوسط زمان انتظار مغازه‌دار برای ورود هر مشتری چقدر است؟

۱) ۱۲ دقیقه　　۲) ۵ دقیقه　　۳) $\frac{12}{60}$ دقیقه　　۴) $\frac{1}{12}$ دقیقه

۳۵ـ یک اتومبیل دارای ۴ لاستیک است که طول عمر این لاستیک‌ها دارای توزیع نمـایی بـا میـانگین ۱۰۰۰۰ کیلـومتر اسـت. اگـر بـدانیم ایـن ماشین ۵۰۰۰ کیلومتر را بدون مشکل طی کرده چقدر احتمال دارد این مقدار به ۱۲۰۰۰ کیلومتر افزایش پیدا کند؟

۱) ۰/۰۶۱　　۲) ۰/۴۹۷　　۳) ۰/۰۰۸　　۴) ۰/۳۰۱

۳۶ـ فرض کنید که به طور متوسط در هر ساعت ۳۰ مشتری طبق فرآیند پواسون به مغازه‌ای مراجعه می‌کنند. احتمال این‌که مغازه‌دار پیش از رسیدن دو مشتری نخست، بیش از ۵ دقیقه انتظار بکشد چقدر است؟

۱) ۰/۸۷۲ ۲) ۰/۴۳۱ ۳) ۰/۲۸۷ ۴) ۰/۵۶۱

۳۷ـ به طور متوسط در هر ساعت یک تلفن به یک شرکت زده می‌شود. احتمال این‌که در طول نیم ساعت به این شرکت تلفن زده نشود چقدر است؟

۱) $1-e^{\frac{-1}{2}}$ ۲) $1-e^{-2}$ ۳) $e^{\frac{-1}{2}}$ ۴) e^{-2}

۳۸ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و واریانس ۴ می‌باشد. امید ریاضی تقریبی تابع $y = \ln x + x$ کدام است؟

۱) ۱۴/۵ ۲) ۱۱/۳ ۳) ۱۲/۲۸ ۴) ۱۳/۲

۳۹ـ فرض کنید $X \sim u(0,1)$ آنگاه x_1, x_2, x_3 را از این توزیع انتخاب کرده $y = \min(x_1, x_2, x_3)$ را تعریف می‌کنیم. حال تابع توزیع y کدام است؟

۱) $0<y<1, (1-y)^2$ ۲) $3(1-y)^2 \quad 0<y<1$ ۳) $3(y-1)^2 \quad 0<y<1$ ۴) $\frac{1}{y} \quad 0<y<1$

۴۰ـ فرض کنید طول عمر نوعی لامپ دارای توزیع نمایی به صورت زیر می‌باشد $E(x \mid x \geq 50)$ کدام است؟ $x > 0$ $f_X(x) = \frac{1}{200} e^{\frac{-x}{200}}$

۱) ۸۸۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۱۵۰

۴۱ـ x_1, x_2 دارای توزیع نمایی با پارامترهای λ می‌باشند $\tau = x_1 + x_2$ حال دارای توزیع ... است.

۱) بتا ۲) نرمال ۳) نمایی ۴) کای‌مربع

۴۲ـ اگر $f \sim F_{(10,12)}$ باشد و $P(F > x) = 0/01$ در این صورت x کدام است؟

۱) $F_{0/95}(10,12)$ ۲) $F_{0/95}(12,10)$ ۳) $F_{0/95}(10,12)$ ۴) $F_{0/99}(12,10)$

۴۳ـ فرض کنید X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ باشد. همچنین در نظر بگیرید $f(y/x) \sim N(x,x)$ می‌باشد حال $var(y)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) $2x$ ۴) $\frac{1}{6}$

۴۴ـ اگر X به طور یکنواخت روی فاصله (۱،۱-) توزیع شده باشد در این صورت $P\{|x| > \frac{1}{2}\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۴۵ـ اگر X_1, X_2, X_3, X_4 دارای توزیع نمایی با پارامترهای برابر $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) 2^4

۴۶ـ متغیر تصادفی X با توزیع نرمال و میانگین ۲ واریانس ۴ مفروض است. گشتاور مرکزی مرتبه هفدهم آن چقدر است؟

۱) صفر ۲) $(2-4) \times 17$ ۳) 2×17 ۴) 2^{17}

۴۷ـ اگر متغیر تصادفی T دارای توزیع t–استیودنت با n درجه آزادی باشد در این صورت $\frac{1}{T^2}$ دارای توزیع .... با .... درجه‌ی آزادی است.

۱) کای مربع, n ۲) $F, (n,1)$ ۳) $F, (1,n)$ ۴) $F, (1,n-1)$

۴۸ـ اگر $W \sim F(m,n)$ آنگاه توزیع $Y = \frac{1}{W}$ کدام است؟

۱) $F(m,n)$ ۲) $F(n,m)$ ۳) χ^2 ۴) مشخص نیست.

۴۹ـ فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی دوتایی از توزیع نمایی با میانگین ۱ باشد توزیع $k = \frac{X_1}{X_2}$ کدام است؟

۱) $\chi^2_{(2)}$ ۲) $F(2,2)$ ۳) $F(1,1)$ ۴) $\chi^2_{(1)}$

۵۰ـ اگر $X \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ آنگاه توزیع $Y = tagX$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$
۲) $\frac{\pi}{(2+y^2)}$
۳) $U(0,1)$
۴) $U(-1,1)$

۵۱ـ مصرف روزانه آب در شهر دارای توزیع گاما با پارامترهای $(\alpha = 2 , \beta = 3)$ می‌باشد احتمال اینکه در روز معینی شهروندان دچار کمبود آب شوند کدام است؟

۱) e^{-3}
۲) $2e^{-3}$
۳) $3e^{-3}$
۴) $4e^{-3}$

۵۲ـ اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۴ باشد. اگر $P\{X > c\} = 0/1$ مقدار c کدام است؟

۱) ۱/۲۸
۲) ۱۴/۵۶
۳) ۱۲/۲
۴) ۱/۹۶

۵۳ـ اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با تابع چگالی $x \ge 0$ $\lambda e^{-\lambda}$ باشد، $\int_0^\infty P(X > x)dx$ کدام است؟

۱) λ^2
۲) $\frac{\lambda^2}{2}$
۳) λ
۴) $\frac{1}{\lambda}$

۵۴ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال به میانگین صفر و واریانس۲ است. $E(X^4)$ برابر با:

۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۶

۵۵ـ دریک توزیع نمایی نرخ شکست برابر با $\frac{1}{30}$ است مقدار $(X \ge 60$ $P(X \ge 70$ کدام است؟

۱) $e^{-\frac{1}{30}}$
۲) $e^{-\frac{1}{3}}$
۳) e^{-30}
۴) e^{-10}

فصل ششم

«توزیع‌های نمونه‌ای»

تست‌های تالیفی فصل ششم

مثال ۱: برای قابل استفاده بودن نوعی شافت لازم است که قطر آن از ۱/۵ اینچ کمتر باشد. فرض کنید شافت‌ها طی فرآیندی تولید شوند که میانگین قطر آن‌ها ۱/۴۹ اینچ با انحراف معیار ۰/۰۰۴ اینچ باشد. اگر یک نمونه‌ی تصادفی ۱۰۰ تایی از شافت‌های تولیدی انتخاب کنیم احتمال آن‌که میانگین این نمونه در بازه قابل قبول قرار گیرد کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۰/۹۵ ۴) ۰/۶۸

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به توضیح مسئله شافت‌هایی قابل استفاده‌اند که قطر آن‌ها از ۱/۵ اینچ کمتر باشد از طرفی توزیع جامعه نامعلوم است. ولی $n > 30$ می‌باشد و بنابراین طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$\bar{X} \sim N(\mu_X = 1/49, \frac{(0/004)^2}{100})$$

$$P(\bar{X} < 1/5) = P(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{1/5 - 1/49}{\frac{0/004}{\sqrt{100}}}) = p(Z < 25) \approx 1$$

مثال ۲: اگر X یک متغیر تصادفی با $E(X) = 10$ و $Var(X) = 1$ باشد، کران پایین احتمال $P(8 < X < 12)$ چقدر است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸۵ ۳) ۰/۹۰ ۴) ۰/۹۶

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نامساوی چی‌بی‌شف خواهیم داشت:

$$\sigma^2 = 1 \rightarrow \sigma = 1$$

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow p(8 < X < 12) = P(-2 < X-\mu < 2) = P(|X-\mu| < 2) \geq 1 - \frac{1}{(2)^2} = \frac{3}{4}$$

مثال ۳: اگر $E(X) = 2$ و $E(X^2) = 8$ باشد مقدار $P(|X| \geq 8)$ کدام است؟

۱) حداکثر $\frac{1}{9}$ ۲) حداقل $\frac{1}{9}$ ۳) برابر با $\frac{1}{9}$ ۴) حداکثر $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه « ۱» با توجه به مقادیر امید ریاضی داده شده واریانس و سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = 8 - (2)^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow \sigma = \sqrt{4} = 2$$

براساس قضیه چی‌بی‌شف خواهیم داشت:

$$P(|X| \geq 8) = P(X \geq 8 \text{ یا } X \leq -8) \Rightarrow \begin{cases} \mu + k\sigma = 8 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3 \\ \mu - k\sigma = -8 \Rightarrow 2k = 10 \Rightarrow k = 5 \end{cases}$$

$$P(|X| \geq 8) = P(X \geq 2 + 3\times 2 \text{ یا } X \leq 2 - 5\times 2) \leq P(X \geq 2 + 3\times 2 \text{ یا } X \leq 2 - 3\times 2) \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

مثال ۴: دستگاه بسته‌بندی مواد غذایی یک کارخانه روی وزن ۵۰ گرم برای هر بسته تنظیم شده است. انحراف معیار وزن بسته‌ها ۲ گرم است. اگر نمونه‌ای $n = 10$ تایی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم احتمال این‌که میانگین این وزن ۱۰ بسته بین ۴۶ تا ۵۴ گرم باشد، کدام است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۰/۹۹ ۳) ۰/۹۷۵ ۴) ۰/۹۹۹

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نامعلوم بودن توزیع و $n < 30$ از نامساوی چی‌بی‌شف، خواهیم داشت:

$$P(46 < \bar{X} < 54) = P(46-\mu < \bar{X}-\mu < 54-\mu) = p(-4 < \bar{X}-\mu < 4) = p(|\bar{X}-\mu| < 4) > 1 - \frac{\sigma^2}{n4^2} = 1 - \frac{4}{10\times 16} = 0/975 \quad \text{(حداقل)}$$

مثال۵: فرض کنید نمونه‌ای تصادفی ۱۰ تایی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ انتخاب کرده باشیم. با فرض $\sigma^2=20$ مقدار $p(S^2>42/273)$ کدام است؟

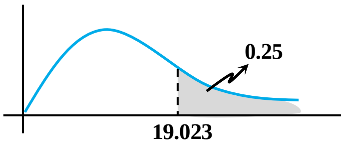
۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۰۵ ۳) ۰/۰۲۵ ۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینه «۳» در اینجا $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ است. در نتیجه:

$$P(S^2>42/273)=p\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\frac{9\times 42/274}{20}\right)$$

با توجه به جدول خواهیم داشت:

$$=P(\chi^2_{(9)}>19/023)=0/025$$

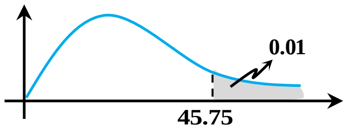


مثال ۶: درجه حرارت وضعیت روشن یک کلید که با ترموستات کنترل می‌شود، توزیع نرمال با میانگین و واریانس مجهول دارد. اگر نمونه‌ای ۲۶تایی انتخاب شود مقدار احتمال $P(\frac{S^2}{\sigma^2}\le 1/83)$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۹۵ ۴) ۰/۹۹

پاسخ: گزینه «۴» مشاهده می‌شود که $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ بنابراین:

$$P(\frac{S^2}{\sigma^2}\le 1/83)=P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le 25\times 1/83)=P(\chi^2_{(25)}\le 45/75)\simeq 1-0/01=0/99$$



مثال۷: فرض کنید $\bar{X}$ و S^2 به ترتیب میانگین و واریانس نمونه‌ای $n=10$ تایی باشند مقدار احتمال $p(\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-\mu)}{S}\ge -1/383)$ در جدول وجود دارد، کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۶۵

پاسخ: گزینه «۲» با کمی دقت متوجه می‌شویم که احتمال داده شده همان توزیع $t_{(9)}$ می‌باشد.

$$\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-\mu)}{S}=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{10}}}\sim t_{(9)}\Rightarrow p(t_{(9)}\ge -1/383)=1-p(t_{(9)}\ge 1/383)=1-0/1=0/9$$

مثال ۸: فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع نرمال استاندارد باشد توزیع $Y=\frac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}$ با فرض استقلال صورت و مخرج کدام است؟

۱) $\chi^2_{(1)}$ ۲) $t(1)$ ۳) $F(1,1)$ ۴) Z

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا صورت و مخرج را بر عدد $\sqrt{2}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}X_1,X_2\sim N(0,1)\\ E(X_1+X_2)=0+0=0\\ Var(X_1+X_2)=1+1=2\end{cases}\rightarrow X_1+X_2\sim N(0,2)\quad;\quad Y=\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\left|\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right|}=\frac{\overbrace{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}^{\sim N(0,1)}}{\underbrace{\sqrt{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}}}_{\sim\chi^2_{(1)}}}\Rightarrow Y\sim t(1)$$

چرا که:

$$X_1,X_2\sim N(0,1)\rightarrow E(X_1-X_2)=0-0=0,\quad Var(X_1-X_2)=1+1=2\rightarrow X_1-X_2\sim N(0,2)$$

مثال۹: دو متغیر تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین‌های یکسان و واریانس‌های به ترتیب برابر با ۸ و ۴ می‌باشند. براساس دو نمونه تصادفی به اندازه‌های ۱۶ از متغیر X و ۸ از جامعه Y توزیع $\bar{X}-\bar{Y}$ کدام است؟

۱) $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,12)$ ۲) $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,1)$ ۳) $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,4)$ ۴) $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,8)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به مطلب گفته شده در بالا خواهیم داشت:

$$X \sim N(0,8) \quad ; \quad \bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2 \text{ و } \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$\mu_1-\mu_2 \xrightarrow{\mu_1=\mu_2} 0$$

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}=\frac{8}{16}+\frac{4}{8}=1 \Rightarrow \bar{X}-\bar{Y} \sim N(0,1) \quad ; \quad Y \sim N(0,4)$$

مثال ۱۰: اگر $X_1,X_2,...,X_{16}$ یک نمونه تصادفی ۱۶تایی از یک توزیع نرمال با میانگین μ باشد، در این صورت توزیع احتمال متغیر تصادفی $U=\frac{15(X_{16}-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{15}(X_i-\mu)^2}$ کدام است؟

۱) T با ۱۵ درجه آزادی
۲) T با ۱۴ درجه آزادی
۳) F با ۱ و ۱۵ درجه آزادی
۴) F با ۱ و ۱۴ درجه آزادی

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به توزیع واریانس نمونه و توزیع نسبت واریانس‌های نمونه داریم: $\frac{(X_{16}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}$

$$\frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)} \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(15)} \Rightarrow U=\frac{\frac{(X_{16}-\mu)^2}{\sigma^2}}{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{15}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}}{15}}=\frac{\frac{\chi^2_{(1)}}{1}}{\frac{\chi^2_{(15)}}{15}} \sim F(1,15)$$

مثال ۱۱: فرض کنید X_i و Y_j به ازای $i=1,2,\cdots,7$, $j=1,2,\cdots,9$ نمونه‌های تصادفی مستقل هر دو با توزیع نرمال و میانگین صفر و با واریانس‌های به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ هستند مقدار $p(4\sum_{i=1}^{7}X_i^2 > 6\sum_{j=1}^{9}Y_i^2)$ کدام است؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۰۱
۳) ۰/۰۹۶
۴) ۰/۰۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که:

$$X \sim N(0,\frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \sim N(0,1) \Rightarrow 4X^2 \sim \chi^2_{(1)} \Rightarrow 4\sum_{i=1}^{7}X_i \sim \chi^2_{(7)}$$

$$Y \sim N(0,\frac{1}{3}) \Rightarrow \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \sim N(0,1) \Rightarrow 3Y^2 \sim \chi^2_{(1)} \Rightarrow 3\sum_{j=1}^{9}Y_i^2 \sim \chi^2_{(9)}$$

$$\Rightarrow p(\chi^2_{(7)} > 2\chi^2_{(9)})=P(\frac{\chi^2_{(7)}}{\chi^2_{(9)}}>2)=P(\frac{\frac{7\chi^2_{(7)}}{7}}{\frac{9\chi^2_{(9)}}{9}}>2)=P(\frac{\frac{\chi^2_{(7)}}{7}}{\frac{\chi^2_{(9)}}{9}}>2\times\frac{9}{7})=P(F_{7,9}>2\times\frac{9}{7}) = p(F_{7,9}>2.57) \simeq 0.096$$

نتیجه: در صورتی‌که به جای رابطه $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ از رابطه $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{(n_1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1)} \\ \frac{(n_2)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_2)} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{(n_1)S_1^2}{\sigma^2}}{n_1}}{\frac{\frac{(n_2)S_2^2}{\sigma^2}}{n_2}}=\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_1,n_2)}$$

آزمون فصل هفتم

۱ـ در فاصله $(0,1)$ به تصادف ۱۰۰ عدد را انتخاب می‌کنیم، احتمال تقریبی این‌که میانگین این ۱۰۰ عدد بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۲ـ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_{50}$ یک نمونه تصادفی از توزیع کای اسکور با یک درجه آزادی و $S = \sum_{i=1}^{50} x_i$ است. مقدار تقریبی $P(S_{50} \le 50)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳ـ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر $0 < p < 1$ باشد. آماره‌ی $T_n = x_1 x_2 \dots x_n$ را در نظر می‌گیریم. $\lim_{n\to\infty} var(T_n)$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۴ـ اگر $\bar{X}_n$ میانگین یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = \mu > 0$ و $\beta = 1$ باشد، توزیع حدی $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\bar{X}}}$ چیست؟

۱) t ـ استودنت با یک درجه آزادی ۲) نرمال استاندارد ۳) $N(\mu, 1)$ ۴) t ـ استودنت با $n-1$ درجه آزادی

۵ـ فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. اگر $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ و $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X})^2$ ، آنگاه:

۱) $E(\frac{\bar{X}}{S^2}) = \frac{\mu}{\sigma^2}$ ۲) $E(\frac{\bar{X}}{S^2}) \ge \frac{\mu}{\sigma^2}$ ۳) $E(\frac{\bar{X}}{S^2}) < \frac{\mu}{\sigma^2}$ ۴) $E(\frac{\bar{X}}{S^2}) = \frac{(n-1)\mu}{\sigma^2}$

۶ـ اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد، آنگاه $E(s^2 \mid \bar{x})$ عبارت است از:

۱) $\bar{x}$ ۲) $\frac{\bar{x}}{n}$ ۳) $\frac{s^2}{n}$ ۴) s^2

۷ـ اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع با میانگین μ باشد و قرار دهیم $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ آنگاه:

$\lim_{x\to\infty} P\{n(\mu - e) \le S_n \le n(\mu + e)\}$ برابر است با:

۱) عدد ۰ ۲) عدد ۱
۳) عددی کمتر از یک ۴) ٪۹۵ از سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

۸ـ اگر پیشامد نادری با شانس $\frac{1}{100}$ رخ دهد، احتمال این که در ۱۰۰ بار تکرار مستقل آن کمتر از ۲ پیشامد رخ دهد تقریباً برابر کدام عدد زیر است؟

۱) e^{-2} ۲) $\Phi(\frac{5}{\sqrt{99}})$ وقتی Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

۳) $2e^{-1}$ ۴) $\Phi(\frac{10}{\sqrt{99}})$ وقتی Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

۹ـ فرض کنید $X_1, X_2, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پواسون با میانگین ۱ باشد، مقدار $\lim_{x\to\infty} P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \le n\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰ـ فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع پیوسته با تابع توزیع $F(\circ)$ باشد توزیع حدی $(\theta>\circ), Z_n=\theta F(X_{(n)})$ که در آن $X_{(n)}$ نمایانگر بزرگترین عضو نمونه است کدام است؟

۱) تباهیده در θ است.
۲) دارای توزیع نمایی با میانگین θ است.
۳) دارای توزیع گاما با پارامترهای $(\theta\ ,\ ۲)$ است.
۴) دارای توزیع $N(\theta,۱)$ است.

۱۱ـ فرض کنید $x_1, x_2 \ldots x_n$ دارای توزیع نرمال بـا پارامترهـای μ و σ^2 باشـند و $y_1, y_2 \ldots y_k$ نیـز دارای توزیـع نرمـال صـفر و یـک باشـند. در این‌صورت $S_y^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}(y_i-\bar{y})^2}{k-1}$ تعریف می‌شود حال تابع نمونه‌ای $\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma s_y\sqrt{n}}$ دارای توزیع . . . است.

۱) t با n درجه آزادی
۲) t با $n-1$ درجه آزادی
۳) t با $k-1$ درجه آزادی
۴) توزیع خاصی نیست

۱۲ـ فرض کنید $x_1, x_2 \ldots x_n$ یک نمونه n تایی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ_n^2 می‌باشد و $y_1, y_2 \ldots y_n$ نیز نمونه n تایی از یک توزیـع نرمال با میانگین μ_y ، σ_y^2 باشد توزیع تابع $Z=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_y)^2}\cdot\dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ کدام است؟

۱) توزیع F با n و n درجه آزادی
۲) توزیع F با $n-1$ و $n-1$ درجه آزادی
۳) توزیع F با ۱ و n درجه آزادی
۴) توزیع t با 2n درجه آزادی

۱۳ـ فرض کنید x_1 و x_2 دارای توزیع نرمال و با میانگین‌های برابر و همچنین واریانس‌های برابر σ^2 می‌باشند، حال $\dfrac{x_1^2}{2\sigma^2}-\dfrac{x_1x_2}{\sigma^2}+\dfrac{x_2^2}{2\sigma^2}$ دارای چه توزیعی است؟

۱) نرمال
۲) کای مربع با یک درجه آزادی
۳) کای مربع با ۲ درجه آزادی
۴) F با ۲ و ۲ درجه آزادی

۱۴ـ اگـر $x_1,x_2,\ldots,x_n$ یک نمـونه تصـادفی n تایـی از یک جـامعـه‌ی نـرمال بـا میـانگین μ و واریـانس σ^2 باشد و اگـــر $y_1,y_2,\ldots,y_n$ نمونـه‌ای از جامعه‌ای دیگر با توزیع‌نرمال با همان مشخصات باشد، دراین صورت توزیع متغیر W کدام است؟

$$W=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\Sigma(y_i-\mu)^2}$$

۱) $\chi^2(n)$
۲) $t(n)$
۳) $F(n,n)$
۴) Z

۱۵ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه n تایی از یک توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. حال اگر n یک عدد بسیار بزرگ باشـد آن گـاه توزیع $y=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ کدام است؟

۱) نرمال استاندارد
۲) نرمال با میانگین $n\mu$ و واریانس $n\sigma^2$
۳) توزیع t با $n-1$ درجه آزادی
۴) دارای توزیع خاصی نیست.

فصل هفتم

«نظریه برآورد»

تست‌های تالیفی فصل هفتم

مثال ۱: فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از توزیع زیر باشد. MME پارامتر مجهول θ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \quad 0 < x < 1 \quad \theta > 0$$

۱) $\bar{X}$ ۲) $\frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$ ۳) $\frac{2(1-\bar{X})}{\bar{X}}$ ۴) $\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از برابری گشتاور اول و امید ریاضی داریم: (گشتاور اول همان $\bar{X}$ است)

$$E(X) = \int_0^1 \theta x^{\theta-1}.x dx \Rightarrow \theta \int_0^1 x^\theta dx = \theta.\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1} \quad \Rightarrow \mu_1 = M_1 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta+1} = \bar{x} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

مثال ۲: فرض کنید یافته‌های ۰/۹، ۰/۴، ۰/۲، ۰/۷ و ۰/۳ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآورد پارامتر θ به روش گشتاوری کدام است؟

$$f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1} \quad 0 < x < 1 \quad \theta > 0$$

۱) ۰/۲

۲) ۰/۵

۳) ۰/۹

۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» امید ریاضی را محاسبه کرده آن را برابر با میانگین داده‌های مسئله قرار می‌دهیم:

$$E(X) = \int_0^1 x.\theta(1-x)^{\theta-1}dx \Rightarrow 1-x = u \Rightarrow -dx = du \Rightarrow E(X) = \int_0^1 \theta(u^{\theta-1} - u^\theta)du = \theta\left[\frac{u^\theta}{\theta} - \frac{u^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\theta+1}$$

$$\bar{X} = M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5}(0/9+0/4+0/2+0/7+0/3) = 0/5 \Rightarrow \frac{1}{\theta+1} \simeq 0/5 \Rightarrow \tilde{\theta}_{MM} = 1$$

مثال ۳: فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی nتایی از توزیع لوگ نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، برآورد گشتاوری پارامتر μ و σ^2 کدام است؟

۱) $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}\ln(\bar{X}^4 / \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n})$ ، $\tilde{\sigma}^2 = \ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 / \bar{X}^2)$

۲) $\tilde{\mu} = \ln(\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n X_i^4})$ ، $\tilde{\sigma}^2 = \ln(\ln(\frac{\bar{X}^4}{n}))$

۳) $\tilde{\mu} = \tilde{\sigma}^2 = \bar{X}^2 - \overline{X^2}$

۴) وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» میانگین نمونه را به دست آورده با گشتاور اول مساوی قرار می‌دهیم، همچنین از تساوی گشتاورهای دوم نمونه و جامعه خواهیم داشت:

$$X \sim \ln(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \ln X = T \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow M_T(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\mu_1 = E(X_1) = E(e^{\ln x_1}) = M_T(1) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = \bar{X} \quad , \quad \mu_2 = E(X_1^2) = E(e^{2\ln x_1}) = M_T(2) = e^{2\mu+2\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\begin{cases} \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = \ln \bar{X} \\ 2\mu + 2\sigma^2 = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mu} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{X}^4}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right) \\ \tilde{\sigma}^2 = \ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\bar{X}^2}\right) \end{cases}$$

مثال ۴: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است. براساس یک نمونه تصادفی nتایی برآورد ماکزیمم درستنمایی برای p کدام است؟

$$f(x_i, p) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۱) $\bar{x}$　　۲) $\frac{1}{\bar{X}}$　　۳) $\bar{x}+1$　　۴) $\frac{1}{\bar{x}+1}$

پاسخ: گزینه «۲» تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1} = p^n (1-p)^{n\bar{x}-n}$$

برای یافتن مقدار مناسب p، می‌توان از تابع درستنمایی نسبت به p مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم و سپس $\hat{p}$ را محاسبه کنیم. همچنین در بسیاری از موارد، ابتدا از تابع درستنمایی می‌توانیم لگاریتم طبیعی گرفته و سپس نسبت به پارامتر مجهول مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار داده و مقدار $\hat{p}$ را به دست می‌آوریم:

$$\ln(p) = n\ln p + (n\bar{X} - n)\ln(1-p) \Rightarrow l'(p) = \frac{d}{dp}\ln(p) = 0 \Rightarrow \frac{n}{p} - \frac{n\bar{X}-n}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n - np - np\bar{X} + np}{P(1-p)} = \frac{n(1-p\bar{X})}{P(1-p)} = 0 \Rightarrow 1 - P\bar{X} = 0 \Rightarrow \hat{P} = \frac{1}{\bar{X}}$$

مثال ۵: فرض کنید یافته‌های ۰/۶، ۰/۸، ۰/۱، ۰/۵ و ۰/۴ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی ۵تایی از توزیعی با چگالی احتمال زیر باشند. برآورد حداکثر درستنمایی پارامتر θ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{1-\theta^2} \qquad \theta \le x < 1$$

۱) ۰/۱　　۲) ۰/۴۸　　۳) ۰/۵　　۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه «۱» تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{(1-\theta^2)^n}$$

برای اینکه $L(\theta)$ نسبت به θ ماکزیمم شود باید $1-\theta^2$ مینیمم شود بنابراین θ باید ماکزیمم شود و با توجه به این‌که $\theta \le x$، ماکزیمم θ با مینیمم x برابر است یعنی، $\hat{\theta} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. $\hat{\theta} = \min(0/6, 0/8, 0/1, 0/5, 0/4) = 0/1$

مثال ۶: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع مقابل باشد:

$$f(x_i, \theta) = \frac{1}{2}e^{\frac{-|x-\theta|}{2}} \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad ; \quad -\infty < \theta < \infty$$

برآورد ماکزیمم درستنمایی (M.L.E) پارامتر θ کدام است؟

۱) میانگین نمونه　　۲) میانه نمونه　　۳) بزرگترین مقدار نمونه　　۴) مد نمونه

پاسخ: گزینه «۲» تابع درستنمایی به صورت روبرو است:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \left(\frac{1}{2}\right)^n . e^{-\frac{1}{2}\sum|x_i - \theta|}$$

$L(\theta)$ زمانی ماکزیمم است که مقدار $\sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta|$ مینیمم گردد و می‌دانیم که زمانی این اتفاق می‌افتد که $\hat{\theta} = \text{med}\ (X_1, \ldots, X_n)$.

مثال ۷: فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\theta>0\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$ باشد، برآوردگر ماکزیمم درستنمایی $V_\theta(X)$ (واریانس X) کدام است؟

۱) S^2 ۲) $\bar{X}^2$ ۳) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\overline{x^2}$ ۴) $\frac{n-1}{n}S^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر X دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشد آنگاه: $E(X)=\theta$, $V(X)=\theta^2$, $f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}}$ $\quad x>0,\ \theta>0$

تابع چگالی احتمال را n بار در خودش ضرب می‌کنیم تا تابع درستنمایی حاصل شود سپس لگاریتم گرفته، مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_\theta(x_i)=\frac{1}{\theta^n}e^{\frac{-\overbrace{(x_1+x_2+...+x_n)}^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\theta}}\Rightarrow Ln(L(\theta))=\ell(\theta)=-nLn\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}\Rightarrow\frac{d\ell(\theta)}{\partial\theta}=\frac{-n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\bar{X}$$

اکنون طبق قضیه زهنا: $\hat{Var}(X)=\hat{\theta}^2=(\bar{X}^2)$

مثال ۸: فرض کنید ظرفی شامل θ مهره است که از ۱ تا θ شماره‌گذاری شده است. علاقه‌مند به برآورد θ هستیم. یک نمونه n تایی با جایگذاری از این ظرف انتخاب می‌کنیم. برآوردگر M.M برای پارامتر θ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** از برابری گشتاور اول و امید ریاضی داریم: $E(X)=\frac{\theta+1}{2}\Rightarrow\mu_1\simeq M_1\Rightarrow\frac{\theta+1}{2}\simeq\bar{X}\Rightarrow\tilde{\theta}_{MM}=2\bar{X}-1$

از طرفی $\max(X_1,X_2,...,X_n)\le\theta$ در این صورت یک برآوردگر مناسب عبارت است از $\max(X_{(n)},2\bar{X}-1)$.

مثال ۹: فرض کنید X_1 و X_2 و X_3 و X_4 یک نمونه تصادفی چهارتایی از یک جامعه با میانگین μ باشد. از برآوردکننده‌های زیر کدام‌یک برآوردکننده ناریب (μ) با واریانس کمتر است؟

۱) $\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{4}$ ۲) $\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{6}$ ۳) $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ ۴) $\frac{X_1-X_2+X_3-X_4}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از گزینه‌ها امید ریاضی می‌گیریم و بررسی می‌کنیم که کدام‌یک برابر با پارامتر μ می‌باشد. سپس از آن‌ها واریانس گرفته، هر کدام واریانس کمتری داشت برآوردکننده بهتری است.

$$E(\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{6})=\frac{\mu+2\mu+2\mu+\mu}{6}=\mu\ ,\ Var(\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{6})=\frac{\sigma^2+4\sigma^2+4\sigma^2+\sigma^2}{36}=\frac{5}{18}\sigma^2=\frac{10}{36}\sigma^2$$

$$E(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4})=\mu\quad ,\quad Var(\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{4})=\frac{4\sigma^2}{16}=\frac{\sigma^2}{4}=\frac{9}{36}\sigma^2$$

$$E(\frac{X_1+X_2+X_3}{3})=\mu\quad ,\quad Var(\frac{X_1+X_2+X_3}{3})=\frac{\sigma^2}{3}=\frac{12}{36}\sigma^2$$

بنابراین برآوردگرهای گزینه‌های ۱و۲و۳ ناریب می‌باشند و از بین آن‌ها گزینه (۲) دارای واریانس کمتری است.

مثال ۱۰: فرض کنید $x_1,x_2,...,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. اگر آماره $U=\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $W=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ تعریف شود. آماره‌ای که برآوردکننده ناریب $5\sigma^2$ باشد برابر است با:

۱) $\frac{5(W-\frac{U^2}{n})}{n-1}$ ۲) $\frac{5(W-U^2)}{n(n-1)}$ ۳) $\frac{5(W-nU^2)}{n-1}$ ۴) $\frac{5(W-U^2)}{n-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا می‌دانیم $E(S^2)=\sigma^2$ بنابراین $E(5S^2)=5\sigma^2$ و این به مفهوم آن است که $5S^2$ یک برآورد کننده ناریب برای $5\sigma^2$ است. اکنون به جای S^2 مقدار آن را قرار می‌دهیم:

$$5S^2=5\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2\right]=\frac{5(W-\frac{1}{n}U^2)}{n-1}$$

مثال ۱۱: به ازای چه مقداری از k برآوردکننده $g(X)=\frac{X}{k}$ برآورد کننده ناریب برای θ با تابع احتمال زیر است؟

$$f(x)=\theta^x(1-\theta)^{1-\theta}\qquad x=0,1$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شرط ناریبی را می‌نویسیم:

$$E(\frac{X}{k})=\theta\Rightarrow\frac{1}{k}E(X)=\theta\xrightarrow{E(X)=\theta}\frac{1}{k}.\cancel{\theta}=\cancel{\theta}\Rightarrow k=1$$

مثال ۱۲: اگر $X_1,X_2,\ldots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای دلخواه با میانگین μ باشد کدام‌یک از برآوردکننده‌های زیر برای μ ناریب است؟

۱) $\hat{\mu}_1=\frac{2\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)}{n}$ ۲) $\hat{\mu}_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}X_i}{k}-\frac{\sum_{i=1+k}^{n}X_i}{n-k}\right)$

۳) $\hat{\mu}_3=\frac{2\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)}{n}$ ۴) $\hat{\mu}_4=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}X_i}{k}+\frac{\sum_{i=1+k}^{n}X_i}{n-k}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با کمی دقت متوجه می‌شویم که گزینه ۴ همان میانگین نمونه است چرا که:

$$E(\hat{\mu}_4)=\frac{1}{2}E\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}X_i}{k}+\frac{\sum_{i=1+k}^{n}X_i}{n-k}\right)=\frac{1}{2}E(\bar{X}_1+\bar{X}_2)=\frac{1}{2}(\mu+\mu)=\mu$$

مثال ۱۳: فرض کنید $X_1,X_2,X_3\overset{iid}{\sim}N(\mu,4)$ باشد. کدام‌یک از برآوردگرهای زیر کاراتر است؟

$U=\bar{X}$
$V=3X_3-X_2-X_1$

۱) U ۲) V ۳) 2U ۴) 2U − V

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا متوجه می‌شویم که U و V دو برآوردکننده ناریب هستند، اکنون واریانس آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$E(U)=E(\bar{X})=\mu\quad,\quad E(V)=3\mu-\mu-\mu=\mu$$

$$var(U)=var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{4}{3}$$

$$var(V)=9\,var(X_3)+var(X_2)+var(X_1)=9\times4+4+4=44$$

$\Rightarrow var(U)<var(V)\Rightarrow$ U کاراتر از V است.

U، ۳۳ برابر کاراتر از V است.

$$e(U,V)=\frac{Var(V)}{Var(U)}=\frac{44}{\frac{4}{3}}=33$$

مثال ۱۴: متغیر تصادفی X با میانگین μ و واریانس σ^2 مفروض است. دو نمونه تصادفی مستقل با اندازه‌ی n_1 و n_2 دارای میانگین‌هـای $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ هستند. اگر بخواهیم واریانس $\bar{X}$ حداقل باشد a در عبارت $\bar{X}=a\bar{X}_1+(1-a)\bar{X}_2$ که در آن $0<a<1$ است، برابر است با:

۱) $\frac{n_2}{n_1+n_2}$ ۲) $\frac{n_1}{n_1+n_2}$ ۳) n_2 ۴) n_1

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» واریانس $\overline{X}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$Var(\overline{X}) = a^2 Var(\overline{X}_1) + (1-a)^2 Var(\overline{X}_2) \Rightarrow a^2 . \frac{\sigma^2}{n_1} + (1-a)^2 \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 (\frac{a^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2}{n_2})$$

اکنون نسبت به پارامتر a مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dVar(\overline{X})}{da} = 0 \Rightarrow \sigma^2 (\frac{2a}{n_1} - \frac{2(1-a)}{n_2}) = 0 \Rightarrow an_2 = n_1 - an_1 \Rightarrow a = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

مثال ۱۵: **دو برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ با ویژگی‌های زیر را در نظر بگیرید، $\underbrace{E(\hat{\theta}_2 - \theta) = 6}_{\text{اریبی}}$, $E(\hat{\theta}_1 - \theta) = 0$, $var(\hat{\theta}_1) = 90$, $var(\hat{\theta}_2) = 50$ آنگاه:**

۱) $\hat{\theta}_2$ مناسب‌تر است چون کاراتر است.

۲) $\hat{\theta}_1$ مناسب‌تر است زیرا یک برآوردکننده نااریب است.

۳) $\hat{\theta}_1$ مناسب‌تر است چون میانگین مجذور خطای آن (MSE) کمتر است.

۴) $\hat{\theta}_2$ مناسب‌تر است چون میانگین مجذور خطای آن (MSE) کمتر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$biase(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_1 - \theta) = 0 \Rightarrow$ نااریب است $\hat{\theta}_1$

$biase(\hat{\theta}_2) = E(\hat{\theta}_2 - \theta) = 6 \Rightarrow$ اریب است $\hat{\theta}_2$

آماره $\hat{\theta}_1$ نااریب و $\hat{\theta}_2$ اریب است بنابراین بهترین ملاک مقایسه استفاده از میانگین مجذور خطا به صورت زیر است:

$$\begin{cases} MSE(\hat{\theta}_1) = var(\hat{\theta}_1) + E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2 = 90 + 0^2 = 90 \\ MSE(\hat{\theta}_2) = var(\hat{\theta}_2) + E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2 = 50 + (6)^2 = 86 \end{cases} \Rightarrow MSE(\hat{\theta}_2) < MSE(\hat{\theta}_1)$$

بنابراین با وجود اینکه $\hat{\theta}_1$ نااریب است ولی $\hat{\theta}_2$ ترجیح داده می‌شود.

مثال ۱۶: **چنانچه $\hat{\theta} = \overline{X} + \frac{1}{n}$ برآوردکننده‌ای از میانگین جامعه باشد مقدار MSE این برآوردکننده برابر است با:**

۱) $\frac{n\sigma_X^2 + 1}{n^2}$ ۲) $\frac{\sigma_X^2 + 1}{n}$ ۳) $\frac{\sigma_X^2 - 1}{n}$ ۴) $\frac{n\sigma_X^2 - 1}{n^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از رابطه MSE استفاده می‌کنیم:

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + (\text{اریبی})^2 = var(\hat{\theta}) + (\underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{E(\overline{X}+\frac{1}{n})-\mu})^2 = var(\overline{X}) + (\frac{1}{n})^2$$

$$\frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n\sigma^2 + 1}{n^2}$$

❖ **تعریف:** برآوردگر $\hat{\theta}$ را یک برآوردگر سازگار برای پارامتر θ گوییم هرگاه $\lim_{n \to \infty} MSE(\hat{\theta}) = 0$

مثال ۱۷: **فرض کنید X یک متغیر تصادفی نمایی با تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ است. اگر فاصله $(0, kX)$ یک فاصله اطمینان $\%100(1-\alpha)$ برای θ باشد k کدام است؟**

۱) $Ln(1-\alpha)$ ۲) $\frac{1}{Ln(1-\alpha)}$ ۳) $-Ln(1-\alpha)$ ۴) $\frac{-1}{Ln(1-\alpha)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق تعریف فاصله اطمینان گفته شده در بالا پارامتر را در فاصله داده شده قرار می‌دهیم:

$$P(0 < \theta < kX) = P(X > \frac{\theta}{k}) = \int_{\frac{\theta}{k}}^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -e^{\frac{-x}{\theta}} \Big|_{\frac{\theta}{k}}^{\infty} = e^{-\frac{1}{k}} = 1 - \alpha \Rightarrow -\frac{1}{k} Lne = Ln(1-\alpha) \Rightarrow -\frac{1}{k} = Ln(1-\alpha) \Rightarrow k = \frac{-1}{Ln(1-\alpha)}$$

مثال ۱۸: اگر X یک تک مشاهده از توزیع $x>0$ $\quad f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$ باشد که در آن $\theta>0$ است، اگر $(X,2X)$ یک فاصله اطمینان برای $\frac{1}{\theta}$ باشد در این صورت ضریب اطمینان برابر است با:

۱) $e^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-\frac{1}{2}})$ ۲) $e^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-1})$ ۳) $e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}$ ۴) $e^{-\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{4}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف فاصله اطمینان، احتمال فاصله داده شده را برابر با $1-\alpha$ قرار می‌دهیم:

$$P(X<\frac{1}{\theta}<2X)=P(\frac{1}{2X}<\theta<\frac{1}{X})=p(\frac{1}{2\theta}<X<\frac{1}{\theta})=\int_{\frac{1}{2\theta}}^{\frac{1}{\theta}}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2\theta}}^{\frac{1}{\theta}}\theta e^{-\theta x}dx=-e^{-\theta x}\Big|_{\frac{1}{2\theta}}^{\frac{1}{\theta}}=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}=e^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-\frac{1}{2}})$$

مثال ۱۹: اگر $X_1,X_2,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد $(0<a<b)$ امید ریاضی طول بازه اطمینان زیر کدام است؟

$$\left(\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\ ,\ \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)$$

۱) $\frac{n\sigma^2}{ab}(b-a)$ ۲) $\frac{\sigma^2}{nab}(b-a)$ ۳) $\frac{\sigma^2}{n}(b-a)$ ۴) $\sigma^2(b-a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طول هر بازه برابر است با انتها منهای ابتدا:

$$\text{طول بازه اطمینان}=L=\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{a}-\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{b}$$

می‌دانیم که:

$$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow Z=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow Z^2=(\frac{X-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2_{(1)}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2_{(n)}$$

$$\Rightarrow E(\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2})=n\Rightarrow E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2)=n\sigma^2\qquad(*)$$

اکنون از طول بازه اطمینان امید ریاضی می‌گیریم:

$$\Rightarrow E(L)=E(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{a})-E(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{b})=\frac{1}{a}\underbrace{E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2)}_{*\text{رابطه}}-\frac{1}{b}\underbrace{E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2)}_{*\text{رابطه}}=\frac{1}{a}.n\sigma^2-\frac{1}{b}.n\sigma^2$$

$$=n\sigma^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=\frac{n\sigma^2(b-a)}{ab}$$

مثال ۲۰: اگر متغیر X دارای توزیع نمایی با چگالی $x>0$ $\quad f(x)=\theta e^{-\theta x}$ باشد و از این متغیر نمونه‌ای n تایی اختیار شود کدام یک از گزینه‌های زیر یک تابع محوری برای θ می‌باشد؟

۱) X^θ ۲) $\frac{X}{\theta}$ ۳) θX ۴) $1-e^{-\theta x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳و۴» توزیع هر کدام از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم؛ هر کدام به θ بستگی داشته باشد تابعی محوری نیست و هر کدام توزیع‌اش مستقل از θ باشد و به θ وابسته نباشد یک تابع محوری است:

گزینه «۱»: اگر $Y=X^\theta\xrightarrow[\text{توزیع}]{\text{از روش تابع}}F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^\theta\le y)=P(X\le y^{\frac{1}{\theta}})=F_X(y^{\frac{1}{\theta}})$

$$\xrightarrow[\text{مشتق گیری می کنیم}]{\text{از دو طرف نسبت به } Y}f_Y(y)=\frac{1}{\theta}y^{\frac{1}{\theta}-1}f_X(y^{\frac{1}{\theta}})=\frac{1}{\theta}y^{\frac{1}{\theta}-1}.\theta e^{-\theta.y^{\frac{1}{\theta}}}=y^{\frac{1-\theta}{\theta}}.e^{-\theta y^{\frac{1}{\theta}}}$$

توزیع گزینه اول به پارامتر θ بستگی دارد بنابراین نمی‌تواند یک تابع محوری باشد.

گزینه «۲»: اگر $Y=\frac{X}{\theta}\xrightarrow{\text{از روش تابع توزیع}}F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\frac{X}{\theta}\le y)=P(X\le\theta y)=F_X(\theta y)$

$$\xrightarrow[\text{مشتق گیری می کنیم}]{\text{از دو طرف نسبت به } y}f_Y(y)=\theta f_X(\theta y)$$

این گزینه نیز نمی‌تواند تابع محوری باشد.

$$=\theta.\theta e^{-\theta y}=\theta^{2}e^{-\theta y}$$

گزینه «۳»: اگر $Y=\theta X \xrightarrow{\text{از روش تابع توزیع}} F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\theta X\le y)=P(X\le \frac{y}{\theta}) \xrightarrow[\text{مشتق‌گیری می‌کنیم}]{\text{از دو طرف نسبت به } y} f_Y(Y)=\frac{1}{\theta}f_X(\frac{y}{\theta})$

به θ بستگی ندارد $\quad =\frac{1}{\theta}.\theta e^{-\theta.\frac{y}{\theta}}=e^{-y}\xrightarrow{y=\theta x} f_Y(y)=e^{-y}$

یعنی توزیع y به صورت روبرو می‌باشد $\quad Y=\theta X\sim \exp(1)$

گزینه «۴»: اگر $y=1-e^{-\theta X}\xrightarrow{\text{از روش تابع توزیع}} F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-e^{-\theta X}\le y)=P(-e^{-\theta X}\le y-1)=P(e^{-\theta X}\ge 1-y)$

$$=P(-\theta X\ge \mathrm{Ln}(1-y))=P(X\le \frac{-\mathrm{Ln}(1-y)}{\theta})=F_X(-\frac{\mathrm{Ln}(1-y)}{\theta})=1-e^{-\theta(-\frac{\mathrm{Ln}(1-y)}{\theta})}=1-e^{\mathrm{Ln}(1-y)}=1-1+y=y$$

بنابراین این گزینه نیز می‌تواند تابع محوری باشد. $\quad \xrightarrow[\text{مشتق‌گیری می‌کنیم}]{\text{از دو طرف نسبت به } y} f_Y(y)=1$

پس از معرفی تابع محوری و مشخص کردن آن، طرز به دست آوردن فاصله اطمینان بر اساس آن را توضیح خواهیم داد. با توجه به تعریف فاصله اطمینان و با توجه به آن‌که توزیع Q توزیع مشخصی است می‌توانیم اعداد a و b (که لزوماً یکتا نیستند) را چنان بیابیم که $P(a<Q<b)=1-\alpha$. از حل نامساوی $a<Q<b$ بر حسب پارامتر θ، پاسخ یکتایی به صورت: $L=g(X_1,\dots,X_n)<\theta<h(X_1,\dots,X_n)=U$ به دست می‌آید و بدین طریق فاصله اطمینان (L,U) با ضریب $1-\alpha$ برای θ به دست می‌آید.

مثال ۲۱: فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از X با چگالی $f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & x>0\ ;\ \theta>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ باشد. یک فاصله اطمینان برای پارامتر θ کدام است؟

۱) $\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}{2n\bar{X}},\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}}{2n\bar{X}}$ ۲) $\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2},\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ ۳) $\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\bar{X}},\frac{Z_{-\frac{\alpha}{2}}}{\bar{X}}$ ۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم در توزیع نمایی تابع توزیع به صورت $F_X(x)=1-e^{-\theta x}$ می‌باشد بنابراین:

$$Q=-2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}F(X_i,\theta)=2\theta n\bar{x}\sim\chi^2(2n)$$

$$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}<2n\theta\bar{x}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n})=1-\alpha\Rightarrow P(\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}{2n\bar{x}}<\theta<\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}}{2n\bar{x}})=1-\alpha\ \Rightarrow L=\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}{2n\bar{x}}\quad,\quad U=\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}}{2n\bar{x}}$$

در ادامه به معرفی فواصل اطمینان برای پارامترهای μ و σ^2 و P در جامعه می‌پردازیم که در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این فواصل اطمینان همگی بر اساس توابع محوری: $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$ ، $t=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t_{(n-1)}$ ، $X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ ، $Z=\frac{\bar{p}-p}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}}$ به دست آمده‌اند که در اینجا از ذکر روش اثبات آن‌ها خودداری می‌کنیم.

مثال ۲۲: در یک کارخانه خودروسازی قطعه‌ای تولید می‌شود. می‌خواهیم یک تخمین فاصله‌ای برای میانگین وزن این قطعه به دست آوریم فرض کنید توزیع وزن قطعات نرمال باشد، نمونه‌ای ۴۹تایی از خط تولید این قطعه انتخاب کرده که میانگین وزن این نمونه ۳ و انحراف معیار ۰/۰۸ به دست آمده‌است. تخمین فاصله‌ای برای میانگین وزن کل قطعات در سطح اطمینان ۰/۹۹ کدام است؟

۱) $(1/85, 2/25)$ ۲) $(1/5, 3/5)$ ۳) $(1/4, 4/24)$ ۴) $(2/97, 3/02)$

پاسخ: گزینه «۴» توجه کنید حجم نمونه بزرگتر از ۳۰ می‌باشد. مقادیر داده شده را در رابطه مورد نظر قرار می‌دهیم:

$$1-\alpha = 0/99 \Rightarrow \alpha = 0/01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/005 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2/58$$

$$n = 49 > 30 \quad ; \quad \bar{X} = 3 \quad ; \quad S = 0/08 \quad ; \quad \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$3 - \frac{0/08}{\sqrt{49}} \times \underbrace{Z_{\frac{0/01}{2}}}_{2/58} < \mu < 3 + \frac{0/08}{\sqrt{49}} \times \underbrace{Z_{\frac{0/01}{2}}}_{2/58} \Rightarrow 3 - \frac{0/08}{7} \times 2/58 < \mu < 3 + \frac{0/08}{7} \times 2/58$$

$$\Rightarrow 3 - 0/029 < \mu < 3 + 0/029 \Rightarrow 2/97 < \mu < 3/029$$

مثال ۲۳: دو نمونه تصادفی $n_1 = 9$ و $n_2 = 16$ تایی از دو جمعیت نرمال مستقل با $\bar{X}_1 = 64$ و $\bar{X}_2 = 59$ و $S_1 = 6$ و $S_2 = 5$ ارائه شده است. یک فاصله اطمینان ۰/۹۵ برای $\mu_1 - \mu_2$ با فرض $\sigma_1 = \sigma_2$ کدام است؟

۱) $(0/5, 10/05)$ ۲) $(0/37, 9/63)$ ۳) $(1/2, 10/5)$ ۴) $(0/05, 12/05)$

پاسخ: گزینه «۲» در اینجا واریانس دو جامعه نامعلوم است ولی در سؤال گفته شده است که آن‌ها با هم برابرند. همچنین توجه کنید حجم نمونه‌ها کوچک‌تر از ۳۰ می‌باشد. مقادیر را جایگذاری می‌کنیم:

$$1-\alpha = 0/95 \Rightarrow \alpha = 0/05, t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = t_{0/025, 23} = 2/069$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{8 \times 36 + 15 \times 25}{9+16-2} = 28/83 \Rightarrow S_p = \sqrt{28/83} = 5/37$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in (\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} \times S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}})$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in (64 - 59 \pm 2/069 \times 5/37 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}) \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in (0/37, 9/63)$$

مثال ۲۴: در نمونه‌ای به حجم $n = 20$ مقدار $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$ است. در سطح اطمینان ۹۵ درصد، فاصله اطمینان برای انحراف معیار کدام است؟ $(\chi^2_{0/025,19} = 32/85 \ , \ \chi^2_{0/975,19} = 8/90)$

۱) $(6/09, 22/47)$ ۲) $(2/46, 4/74)$ ۳) $(3/25, 7/82)$ ۴) $(5/337, 7/01)$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا یک فاصله اطمینان برای واریانس تشکیل می‌دهیم سپس جذر می‌گیریم تا فاصله اطمینان برای انحراف معیار حاصل شود:

$$n = 20, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 200, \alpha = 0/05 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 0/025 \\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0/025 = 0/975 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{0/025,19} = 32/85 \\ \chi^2_{0/975,19} = 8/90 \end{cases}$$ (از جدول مشاهده می‌کنیم)

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{200}{19} = 10/52$$

فاصله اطمینان: $\sigma^2 \in (\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}) \Rightarrow \sigma^2 \in (\frac{200}{32/85}, \frac{200}{8/90}) = (6/09, 22/47) \Rightarrow \sigma \in (\sqrt{6/09}, \sqrt{22/47}) = (2/47, 4/74)$

مثال ۲۵: برای تعیین درصد موافقین با یک موضوع در شهر یک نمونه ۴۰۰ تایی به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مشاهده شده است ۱۴۰ نفر موافق موضوع هستند. یک فاصله اطمینان برای موافقین در کل جامعه در سطح ۹۵٪ کدام است؟

۱) $(0/20, 0/5)$ ۲) $(0/3, 0/4)$ ۳) $(0/5, 0/7)$ ۴) $(0/2, 0/8)$

پاسخ: گزینه «۲» x : تعداد موافقان

$$1-\alpha = 0/95 \Rightarrow \alpha = 0/05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/025 \Rightarrow Z_{0/025} = 1/96$$

$$\bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{140}{400} = 0/35 \quad , \quad \bar{P} - \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} < P < \bar{P} + \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$0/35 - \sqrt{\frac{0/35 \times 0/65}{400}} \times 1/96 < P < 0/35 + \sqrt{\frac{0/35 \times 0/65}{400}} \times 1/96$$

$$0/35 - 0/024 \times 1/96 < P < 0/35 + 0/024 \times 1/96 \Rightarrow 0/3 < P < 0/4$$

مثال ۲۶: تحلیل‌گری می‌خواهد سهم فروش کفش گام را در بازار فروش کفش تعیین کند. تحلیل‌گر در می‌یابد که از کل ۱۰ هزار جفت کفش فروخته شده ۱۲۰۰ جفت از نوع کفش گام بوده است. برآورد سهم فروش کفش گام بصورت نقطه‌ای و فاصله‌ای چگونه است؟ $(Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2/33)$

۱) $0/12$ و $(0/112, 0/127)$ ۲) $0/15$ و $(0/141, 0/172)$ ۳) $0/12$ و $(0/112, 0/199)$ ۴) $0/15$ و $(0/110, 0/202)$

پاسخ: گزینه «۱» برآورد نقطه‌ای نسبت جامعه همان نسبت نمونه است که به‌صورت روبرو می‌باشد:

$$\hat{P} = \bar{p} = \frac{x}{n} = \frac{1200}{10000} = 0/12$$

اما برای برآورد فاصله‌ای نسبت مقادیر $\bar{P}$ و $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\bar{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \Rightarrow \begin{cases} \bar{p} = 0/12 \Rightarrow \bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0/12 = 0/88 \\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2/33 \end{cases}$$

$$p \in (0/12 \pm 2/33\sqrt{\frac{0/12 \times 0/88}{10000}}) = (0/1124, 0/1276)$$

مثال ۲۷: برای برآورد نسبت موافقان با موضوعی در یک شهر خطای نمونه‌گیری ۰/۰۴ در نظر گرفته شده است. یک نمونه ۴۰۰ تایی به صورت مقدماتی درنظر می‌گیریم که ۲۵ نفر از آن‌ها با موضوع مطرح شده موافقند. حداقل حجم نمونه برای برآورد نسبت کل موافقان چقدر است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۴۴

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به رابطه گفته شده خواهیم داشت:

$$1-\alpha = 0/95 \Rightarrow \alpha = 0/05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/025 \Rightarrow Z_{0/025} = 1/96$$

$$\bar{p} = \frac{x}{n} = \frac{25}{400} = 0/0625 \Rightarrow \bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0/0625 = 0/9375$$

$$n \ge \frac{\bar{p}\bar{q}(Z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{e^2} = \frac{(0/0625)(0/9375)(1/96)^2}{(0/04)^2} \Rightarrow n \ge \frac{0/06(1/96)^2}{0/0016} = 144 \Rightarrow n \ge 144$$

آزمون فصل هفتم

۱ـ فرض کنید $x \sim U(\theta, 4)$ می‌باشد آنگاه تخمین زننده θ به روش گشتاورها کدام است؟

۱) $\bar{x}$ ۲) $\bar{x}-8$ ۳) $2\bar{x}-4$ ۴) $2\bar{x}-8$

۲ـ فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه n تایی از جامعه نرمال با میانگین معلوم μ و واریانس σ^2 می‌باشد حال کدام تابع توزیع نمونه‌ای زیر (آماره) یک تخمین زننده نا اریب برای σ^2 می‌باشد؟

۱) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ ۲) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n+1}$ ۳) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$ ۴) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n-1}$

۳ـ به منظور برآورد فاصله یک‌طرفه برای نسبت (p) یک صفت در جامعه براساس یک نمونه ۳۶ تایی مقدار ۰/۴ برآورد شده است و قصد داریم این برآورد فاصله‌ای را طوری پایه‌گذاری کنیم که با اطمینان ۹۵% حد بالا شامل این نسبت واقعی جامعه گردد حال حد بالای این تخمین فاصله‌ای کدام است؟

۱) ۰/۵۶ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۵۳ ۴) ۰/۲۷

۴ـ فرض کنید $x_1 = 3,\ x_2 = 2, x_3 = 0$ یک نمونه سه تایی از یک توزیع دو جمله‌ای با پارامتر $B(4, \theta)$ می‌باشد حال تابع حداکثر درستنمایی این تابع به ازای x_1, x_2, x_3 کدام است؟

۱) $24\theta^6(1-\theta)^2$ ۲) $10\theta^{5(1-\theta)^7}$ ۳) $24\theta^7(1-\theta)^5$ ۴) $24\theta^5(1-\theta)^7$

۵ـ در سؤال قبل فرض کنید برای برآورد σ^2 تخمین زننده $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ را در نظر گرفته‌ایم آنگاه MSE $\hat{\sigma}^2$ برای $\hat{\sigma}^2$ کدام است؟

۱) $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$ ۲) $\frac{(n-1)\sigma^2}{n^2} + \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$ ۳) $\frac{\sigma^4(2n+1)}{n^2}$ ۴) $\frac{2(n-1)\sigma^6}{n^3}$

۶ـ فرض کنید تابع نمونه‌ای $\hat{\theta} = f(x_1, x_2 ..., x_n)$ تخمین زننده ناریب برای پارامتر مجهول θ می‌باشد در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\hat{\theta}^2$ برای θ^2 اریب است.

۲) $\hat{\theta}^2$ برابر $\hat{\theta}$ ناریب است.

۳) $\hat{\theta}^2$ در برخی موارد برای θ^2 می‌تواند اریب و گاهی ناریب باشد.

۴) بستگی به شکل تابع دارد.

۷ـ فرض کنید به منظور تخمین فاصله‌ای برای واریانس یک جامعه نرمال با میانگین مجهول یک نمونه ۱۰ تایی انتخاب کرد و σ^2 را محاسبه می‌کنیم حال کدام گزینه زیر می‌تواند بیانگر این تخمین فاصله‌ای باشد؟

۱) $\frac{9s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},9}} \le \sigma^2 \le \frac{9s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},9}}$

۲) $\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},9}} \le \sigma^2 \le \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},9}}$

۳) $\frac{9s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},9}} \le \sigma^2 \le \frac{9s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},9}}$

۴) گزینه ۱ و ۲ هر دو صیح می‌باشند.

۸ـ فرض کنید x تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین موفقیت دارای توزیع هندسی با پارامتر مجهول θ می‌باشد تخمین زننده θ با استفاده از روش گشتاوری کدام است؟

۱) $\hat{\theta} = \bar{x}$ ۲) $\hat{\theta} = \bar{x} - 1$ ۳) $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$ ۴) $\hat{\theta} = \frac{1}{x} + 1$

۹ـ فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$ و $\lambda > 0$ باشد برآورد M.L برای $P(x_1 \le 1)$ کدام است؟

۱) $\bar{e}^{\bar{x}}$ ۲) $\bar{e}^{\bar{x}}(1+\bar{x})$ ۳) $\bar{e}^{\bar{x}}(1-\bar{x})$ ۴) $\bar{e}^{\bar{x}}(1-\bar{x}^2)$

۱۰ـ اگر طول قد دانشجویان یک دانشکده دارای توزیع نرمال باشد، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین طول قد دانشجویان این دانشکده کدام است؟ اگر یک نمونه ۵تایی از بین آن‌ها انتخاب شده باشد و مقادیر ۱۶۰ و ۱۷۰ و ۱۶۵ و ۱۷۵ و ۱۸۰ به دست آمده باشد. ($Z_{\%5} = 1/640$ و $t_{0/975}(4) = 2/78$)

۱) (۱۶۷/۱۸, ۱۶۹/۲)
۲) (۱۶۰/۱۷ , ۱۷۹/۸۳)
۳) (۱۷۲/۵ , ۱/۷۵)
۴) (۱۵۸/۵ , ۱۶۹/۵)

۱۱ـ کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱) تمام برآوردکننده‌های MLE ناریب می‌باشند.
۲) تمام برآوردکننده‌های MLE دارای واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ می‌باشند.
۳) تمام برآوردکننده‌های MLE در حد سازگارند.
۴) ۱ و ۳ هر دو صحیح می‌باشند.

۱۲ـ در یک نمونه ۱۶ تایی با انحراف معیار ۲/۲ یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای σ^2 کدام است؟

$\chi^2_{0/995} = 4/60, \chi^2_{0/005} = 32/08$

۱) (۲/۲۶ ,۱۵/۷۸)
۲) (۳/۲۴ ,۱۰/۵۷)
۳) (۰,۱۲/۵)
۴) (۷/۸۲ ,۱۵/۲۶)

۱۳ـ فرض کنید x دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشد تابع حداکثر درستنمایی این توزیع کدام است؟

۱) $L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{x}{\theta^n}}$
۲) $L(\theta) = \theta e^{-\theta \sum x_i}$
۳) $L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{\frac{-\sum x_i}{\theta}}$
۴) $L(\theta) = \theta e^{-\theta x^n}$

۱۴ـ متغیر تصادفی x پارامترهای مجهول μ, σ^2 مفروض است. به منظور برآورد کردن σ^2 یک نمونه تصادفی n تایی برگرفته و متغیر تصادفی $\hat{S}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم حال کدام گزینه صحیح است؟ $\hat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

۱) $\hat{s}^2$ یک تخمین زننده، ناریب برای σ^2 می‌باشد.
۲) $\hat{s}^2$ کاراترین تخمین زننده برای σ^2 می‌باشد.
۳) مقدار تورش این تخمین زننده مثبت می‌باشد.
۴) $\hat{s}^2$ یک تخمین زننده ناریب مجانبی است.

۱۵ـ با مفروض بودن یک نمونه n تایی از جامعه‌ای با چگالی $0 < x < 1$ $f(x,\theta) = (\theta+1)x^\theta$ برآوردکننده‌ای برای θ به روش گشتاورها کدام است؟

۱) $\hat{\theta} = \frac{1-\bar{x}}{2\bar{x}-1}$
۲) $\hat{\theta} = \frac{2\bar{x}}{1-\bar{x}}$
۳) $\hat{\theta} = 2\bar{x}-1$
۴) $\hat{\theta} = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$

۱۶ـ متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین نامعلوم و واریانس σ^2 دارد. نمونه X_1, X_2, X_3 را می‌گیریم و مایلیم تعیین کنیم با چه احتمالی دست کم ۰/۹۵ از توزیع فوق در بازه $(-\infty, \mu+2s]$ قرار می‌گیرد. برای تعیین این احتمال S^2 را واریانس نمونه بگیرید و فرض کنید $Z_{0/05} = 1/645$ است؟

۱) ۰/۴۹۱۶
۲) ۰/۷۱۲۰
۳) ۰/۵۰۸۴
۴) ۰/۶۶۰۵

۱۷ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس مجهول σ^2 می‌باشد. یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی از این توزیع را می‌گیریم و متغیرهای تصادفی $\bar{X}$ و S^2 را به دست می‌آوریم. اگر رابطه $P(5\bar{X} > 1/71S) = 0/05$ برقرار باشد آن‌گاه مقدار $F_{0/9}(24,1)$ کدام است؟

۱) ۱/۳۶
۲) ۰/۳۴۲
۳) ۰/۵۸۵
۴) ۰/۲۲

۱۸ـ در توزیع هندسی با میانگین θ برآوردگر M.L برای پارامتر θ کدام است؟

۱) $\bar{X}$
۲) $\frac{1}{\bar{X}}$
۳) $\frac{2}{X}$
۴) $\frac{1}{\bar{X}^2}$

۱۹ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای n تایی از توزیع $P(\lambda)$ است برآوردگر M.L برای $P(X=0)$ کدام است؟

۱) $e^{-\bar{X}}$
۲) $\bar{X}$
۳) $\frac{1}{1-e^{-\bar{X}}}$
۴) وجود ندارد

۲۰ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) برآوردگرها حافظ دامنه پارامتر خود هستند.
۲) همواره $\theta, \hat{\theta}$ دو دامنه متفاوت دارند.
۳) لزومی ندارد برآوردگرها حافظ دامنه باشند.
۴) هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

فصل هشتم

«آزمون فرض‌ها»

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال ۱: فرضیه‌ای بدین صورت مطرح شده است که «پراکندگی قیمت‌ها در سال جاری حداکثر ۵۰ تومان بوده است» فرضیه H_1 کدام است؟

۱) $\sigma_X^2 > 50$ ۲) $\sigma_X^2 \geq 50$ ۳) $\sigma_X^2 < 50$ ۴) $\sigma_X^2 \leq 50$

پاسخ: گزینه «۱» پراکندگی در آمار به مفهوم واریانس است. H_1 نمی‌تواند تساوی داشته باشد. به کلمه حداکثر توجه کنید، حداکثر ۵۰ تومان یعنی ۵۰ تومان یا کمتر بنابراین، آن را در H_0 قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} H_0: \sigma_X^2 \leq 50 \\ H_1: \sigma_X^2 > 50 \end{cases}$$

مثال ۲: فرض کنید که X متغیر تصادفی با چگالی احتمالی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ باشد برای آزمون $\theta=1000$ در برابر $\theta=2000$ مشاهده‌ای به حجم $n=1$ اختیار شده است اگر $X_1>1000$ باشد، فرض H_0 را رد می‌کنیم. مقادیر α و β کدام است؟

۱) $1-e^{-\frac{1}{2}}, e^{-1}$ ۲) $1-e^{-1000}, e^{-1000}$ ۳) e^{-1000}, e^{-2000} ۴) صفر و ۱

پاسخ: گزینه «۱» طبق تعریف α و β خواهیم داشت: X_1 توزیع نمایی دارد، برای محاسبه احتمال روی فاصله خواسته شده انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\alpha = p(H_0 \text{ درست باشد} | H_0 \text{ رد}) = p(X_1>1000 | \theta=1000) = \int_{1000}^{\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \int_{1000}^{\infty}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}dx = -e^{-\frac{x}{1000}}\Big|_{1000}^{\infty} = 0-(e^{-\frac{1000}{1000}}) = e^{-1}$$

X_1 توزیع نمایی دارد، برای محاسبه احتمال روی فاصله خواسته شده انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\beta = p(H_0 \text{ نادرست باشد} | H_0 \text{ پذیرش}) = p(X_1<1000 | \theta=2000)$$

$$= \int_0^{1000}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \int_0^{1000}\frac{1}{2000}e^{-\frac{x}{2000}}dx = -e^{-\frac{x}{2000}}\Big|_0^{1000} = -e^{-\frac{1000}{2000}}+1 = 1-e^{-\frac{1}{2}}$$

مثال ۳: جعبه‌ای شامل n مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. براساس یک نمونه تصادفی ۳ تایی (بدون جایگذاری) می‌خواهیم بدانیم $H_0: n=3$ یا $H_1: n=4$ است. اگر فرض $n=3$ را با مشاهده حداقل ۲ مهره سیاه رد کنیم توان آزمون کدام است؟

۱) $\frac{50}{84}$ ۲) $\frac{25}{57}$ ۳) $\frac{32}{71}$ ۴) $\frac{18}{53}$

پاسخ: گزینه «۱» طبق تعریف توان آزمون خواهیم داشت: $\text{توان آزمون} = 1-p(H_0 \text{ پذیرش} | H_1 \text{ درست باشد}) = p(H_0 \text{ رد} | H_1 \text{ درست باشد})$

فرضیه H_0 را زمانی رد می‌کنیم که حداقل ۲ مهره سیاه مشاهده کنیم. توان یعنی تحت $H_1(n=4)$ حداقل دو مهره سیاه بیرون آید. حداقل ۲ مهره سیاه معادل است با بیرون آمدن حداکثر ۱ مهره سفید:

در نتیجه X تعداد مهره‌های مفید در ۳ استخراج بدون جایگذاری دارای توزیع فوق هندسی با پارامترهای $N=9$ ، $M=4$ و $n=3$:

$$P(X\leq 1) = p(X=0)+p(X=1) = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{50}{84}$$

مثال۴: می‌خواهیم تنها از یک مشاهده استفاده کنیم و فرضیه‌های $\begin{cases} H_0 : \theta = 10 \\ H_1 : \theta \neq 10 \end{cases}$ را آزمون کنیم اگر X توزیع نمایی با میانگین θ داشته باشد و ناحیه بحرانی به صورت $C = \{X \mid X > 12$ یا $X < 8\}$ باشد خطای نوع دوم به ازای $\theta = 2$ کدام است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۰۴

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad x > 0$$

ناحیه بحرانی جایی است که H_0 رد می‌شود، پس مکمل آنجایی است که H_0 پذیرش می‌شود. طبق تعریف β خواهیم داشت:

$$\beta = P(H_0 \text{ پذیرش} | H_0 \text{ نادرست}) = P_{\theta=2}(8 < X < 12) = \int_8^{12} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = -e^{-\frac{x}{2}} \Big|_8^{12} \simeq 0/02$$

مثال۵: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشد. طبق لم نیمن ـ پیرسون برای فرض‌های $\begin{cases} H_0 : \theta = 2 \\ H_1 : \theta = 1 \end{cases}$ براساس یک نمونه تصادفی $n = 10$ تایی و خطای نوع اول $\alpha = 0/05$ ناحیه بحرانی کدام است؟

۱) $\sum_{i=1}^{10} x_i < 0/05$ ۲) $\sum_{i=1}^{10} x_i > 10/9$ ۳) $\sum_{i=1}^{10} x_i < 10/9$ ۴) $\sum_{i=1}^{10} x_i < 0/05$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا تابع درستنمایی را تحت H_0 و H_1 تشکیل داده سپس نسبت آن‌ها را طبق لِم بالا از k بزرگتر قرار می‌دهیم:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \theta^{-10}.\ e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} \Rightarrow \frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} > K \Rightarrow \frac{L(1)}{L(2)} > K \Rightarrow 2^{10} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i} > K$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i} > K(2^{-10}) \Rightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i > Ln(K.2^{10}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i < K' \Rightarrow C = \left\{ \underset{\sim}{x} \Big| \sum_{i=1}^{10} x_i < K' \right\}$$

بنابراین ناحیه بحرانی به صورت ... می‌باشد اکنون طبق تعریف احتمال خطاهای نوع اول (α) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \alpha = P_{H_0}\left\{ \sum_{i=1}^{10} x_i < K' \right\}$$

$$X \sim \exp(\theta) \equiv \Gamma(1, \theta) \Rightarrow \frac{1}{\theta} x \sim \Gamma(1,1) \Rightarrow \frac{2}{\theta} x \sim \Gamma(1, \frac{1}{2}) \equiv \chi^2(2) \Rightarrow \frac{2\sum x_i}{\theta} \sim \chi^2_{(2n)}$$

$$\Rightarrow 0/05 = P_{\theta=2}\left(\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{2}{\theta} K'\right) = P\left\{ \chi^2_{(20)} < K' \right\} \Rightarrow K' = 10/9 \Rightarrow C = \left\{ \underset{\sim}{x} \Big| \sum_{i=1}^{10} x_i < 10/9 \right\}$$

مثال۶: فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع با چگالی احتمال روبرو باشد. $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ؛ $f_0(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

علاقه‌مند به آزمون $H_0 : f = f_0$ در مقابل $H_1 : f = f_1$ هستیم. ناحیه بحرانی به روش لم نیمن ـ پیرسون کدام است؟

۱) $\sum |x_i| > c$ ۲) $\sum(|x_i| + 1)^2 > c$ ۳) $\sum(|x_i| - 1)^2 > c$ ۴) $\sum(|x_i| - 1)^2 < c$

پاسخ: گزینه «۳» طبق لم نیمن پیرسون تابع‌های درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

تابع درستنمایی تحت H_1:
$$L(\theta_1) = f_{\theta_1(x)} = \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\sum x_i^2)$$

تابع درستنمایی تحت H_0:
$$L(\theta_0) = f_{\theta_0(x)} = \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i) = (2)^{-n} \exp(-\sum |x_i|)$$

$$(\text{طبق لم نیمن ـ پیرسون})\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)}=\frac{L_{(\theta_0)}}{L_{(\theta_1)}}\le k\to\frac{2^{-n}\exp(-\sum|x_i|)}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp(-\frac{1}{2}\sum x_i^2)}\le k\to\frac{\exp(-\sum_{i=1}^{n}|x_i|)}{\exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2)}\le K_1$$

$$\Rightarrow \exp-\{\frac{1}{2}\sum|x_i|^2+\sum|x_i|\}\ge\frac{1}{K_1}=K_2$$

$$(\frac{2}{\sqrt{2\pi}})^n\exp\{-\frac{1}{2}\Sigma(|x_i|-1)^2-n^2\}>k_1\to\exp\{-\frac{1}{2}\sum(|x_i|-1)^2-n^2\}>k_2$$

$$\to\{-\frac{1}{2}\Sigma(|x_i|-1)^2+\frac{n}{2}<Lnk_2\to-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|x_i|-1)^2<Lnk_2-\frac{n}{2}\to\sum_{i=1}^{n}(|x_i|-1)^2>-2\underbrace{(Lnk_2-\frac{n}{2})}_{C}$$

مثال ۷: فرض کنید X دارای یکی از توابع چگالی احتمال روبرو باشد: $f_1(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad x\in IR \qquad f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\ ;\ x\in IR$

در آزمون $H_0:f=f_0$ در برابر $H_1:f=f_1$ ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون اندازه α کدام است؟

۱) $X^2<\frac{1}{2}\chi^2_{(1-\alpha),1}$ ۲) $X^2>\chi^2_{\alpha,1}$ ۳) $X^2>\frac{1}{2}\chi^2_{\alpha,1}$ ۴) $X^2<\chi^2_{1-\alpha,1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از لم نیمن پیرسون استفاده کرده تابع درستنمایی را تحت H_0 و H_1 تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}{\frac{1}{\pi(1+x^2)}}=\sqrt{\pi}\frac{1+x^2}{e^{x^2}}<k\to Ln(1+x^2)-x^2<k'\to x^2>Ln(1+x^2)-k'$$

از طرفی چون $1+x^2>1$ می‌باشد بنابراین $Ln(1+x^2)>0$ پس می‌توان نتیجه گرفت $x^2>k''$ اما توجه کنید که:

$$X_{H_0}\sim N(0,\frac{1}{2})\to\frac{X}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\sim N(0,1)\to 2X^2\sim\chi^2_{(1)}\to\alpha=P_{f_0}(H_0\ \text{رد})=P(X^2>k'')=P(2X^2>2k'')=P(\chi^2_{(1)}>2k'')\Rightarrow k''=\frac{1}{2}\chi^2_{\alpha,1}$$

مثال ۸: ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون برای آزمون $H_0:x\sim f(x)=6x^5$ در برابر $H_1:x\sim g(x)=3x^2$ با احتمال خطای نوع اول $\alpha=\frac{1}{64}$ کدام است؟

۱) $x>\frac{1}{2}$ ۲) $x>\frac{1}{8}$ ۳) $x<\frac{1}{4}$ ۴) $x<\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به لم نیمن پیرسون $\frac{f_0(x)}{f_1(x)}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f_0(x)}{f_1(x)}=\frac{6x^5}{3x^2}=2x^3<k\to x^3<k'\xrightarrow{\text{ناحیه بحرانی}}x^3<k'\Rightarrow x<\sqrt[3]{k'}=k''$$

$$\alpha=P(H_0\ \text{رد}\mid H_0\ \text{درست باشد})=P(x<k''\mid f=f_0)=\int_0^{k''}6x^5dx=\frac{1}{64}$$

$$x^6\Big|_0^{k''}=\frac{1}{64}\longrightarrow(k'')^6=\frac{1}{64}\Rightarrow k''=\frac{1}{2}\to x<\frac{1}{2}$$

مثال۹: نمونه‌ای ۸ تایی از نمرات دانشجویان در درس آمار و احتمال به صورت روبرو بوده است: ۱۲ و ۷ و ۸ و ۱۹ و ۱۳ و ۱۱ و ۱۶ و ۹ با فرض نرمال بودن توزیع جامعه می‌خواهیم آزمون روبرو را انجام دهیم مقدار آماره آزمون کدام است؟

$$\begin{cases} H_0: \mu = ۱۱ \\ H_1: \mu \neq ۱۱ \end{cases}$$

۱) ۱۶/۶۹　　۲) ۰/۶　　۳) ۷/۷۵　　۴) ۱/۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مقدار آماره آزمون مناسب با توجه به جدول بالا به صورت $t = \dfrac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ می‌باشد، مقادیر مورد نظر در آماره آزمون را محاسبه کرده و در این رابطه جایگذاری می‌کنیم.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۹+۱۶+۱۱+۱۳+۱۹+۸+۷+۱۲}{۸} = ۱۱/۸۷$$

$$S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum (x_i - \overline{x})^۲ = \frac{(۹-۱۱/۸۷)^۲ + (۱۶-۱۱/۸۷)^۲ + \ldots + (۱۲-۱۱/۸۷)^۲}{۸-۱} = ۱۶/۶۹ \Rightarrow S = \sqrt{S^۲} = \sqrt{۱۶/۶۹} = ۴/۰۸$$

$$t = \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \Rightarrow t = \frac{۱۱/۸۷-۱۱}{\frac{۴/۰۸}{\sqrt{۸}}} = ۰/۶$$ (آماره آزمون مناسب)

مثال۱۰: یک دستگاه چاپ به طور متوسط در هر دقیقه ۴۵ نسخه از متنی را چاپ می‌کند. برای افزایش بازدهی ماشین یک وسیله کمکی به آن اضافه شده و سپس در سه نوبت نمونه‌گیری انجام شده است. نتایج نمونه‌گیری‌ها ۴۶ و ۴۷ و ۴۸ کپی در دقیقه بود. آیا این افزایش معنی دار است؟ $(\alpha = ۰/۰۵)$

۱) بلی　　۲) خیر　　۳) مشخص نیست　　۴) H_0 رد نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مراحل آزمون فرضیه را به ترتیب اجرا می‌کنیم:

۱) $\begin{cases} H_0: \mu = ۴۵ \\ H_1: \mu > ۴۵ \end{cases}$ (تشکیل فرضیه‌ها)　۲) مقدار $\alpha = ۰/۰۵$ می‌باشد.

۳) آماره آزمون مناسب با توجه به معلوم نبودن واریانس جامعه و کوچک بودن حجم نمونه $(n = ۳)$ به صورت $t = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ می‌باشد، مقدار آن را به دست می‌آوریم:

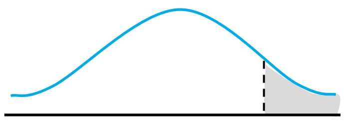
$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۴۶+۴۷+۴۸}{۳} = ۴۷$$

$$S^۲ = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^۲}{n-۱} = \frac{(۴۶-۴۷)^۲ + (۴۷-۴۷)^۲ + (۴۸-۴۷)^۲}{۳-۱} = ۱ \Rightarrow S = ۱$$

$$\Rightarrow t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \Rightarrow t = \frac{۴۷-۴۵}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = ۳/۴۷$$

۴) ناحیه بحرانی به‌صورت زیر است:

$$t > t_{\alpha, n-۱} \quad ; \quad t_{۰/۰۵,۲} = ۲/۹۲$$


$t_{\alpha,n-1}=t_{0.05,2}=2.92$

۵) **نتیجه‌گیری و مقایسه مقدار آماره آزمون و ناحیه بحرانی:** با توجه به این که مقدار آماره آزمون $(۳/۴۷)$ در ناحیه بحرانی (قسمت هاشور خورده) قرار می‌گیرد، بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

مثال۱۱: برای پراکندگی عمر نوعی قطعه الکتریکی نمونه‌ای ۲۰ تایی با میانگین ۱۵ هزار ساعت و انحراف معیار ۴ هزار ساعت به دست آمده است. با پذیرفتن نرمال بودن طول عمر قطعات در سطح خطای ۵ درصد نتیجه آزمون زیر کدام است؟

$$\begin{cases} H_0: \sigma^۲ = ۲۵ \\ H_1: \sigma^۲ \neq ۲۵ \end{cases}$$

۱) فرضیه صفر پذیرفته می‌شود.　　۲) فرضیه صفر رد می‌شود.

۳) بستگی به مقدار α دارد.　　۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

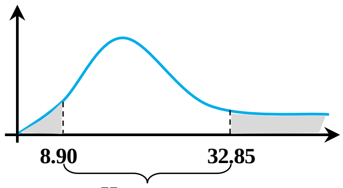
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مراحل انجام آزمون فرض را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) $\begin{cases} H_\circ : \sigma^۲ = ۲۵ \\ H_۱ : \sigma^۲ \neq ۲۵ \end{cases}$ ۲) $\alpha = \circ/\circ ۵$

۳) آماره آزمون مناسب به‌صورت روبرو محاسبه می‌شود: $n = ۲\circ, s = ۴, \sigma_\circ^۲ = ۲۵ \Rightarrow \chi^۲ = \dfrac{(n-۱)S^۲}{\sigma_\circ^۲} = \dfrac{(۲\circ-۱)(۴)^۲}{۲۵} = ۱۲/۶$

۴) ناحیه بحرانی به‌صورت روبرو است:

$$\chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} = \chi^۲_{\circ/\circ۲۵,۱۹} = ۳۲/۸۵ \quad و \quad \chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}, n-۱} = \chi^۲_{\circ/۹۷۵,۱۹} = ۸/۹\circ$$



۵) **نتیجه‌گیری و مقایسه مقدار آماره آزمون و ناحیه بحرانی:** با توجه به این که مقدار آماره آزمون (۱۲/۱۶) در ناحیه بحرانی (قسمت هاشور خورده) قرار نمی‌گیرد، بنابراین فرضیه صفر رد نمی‌شود.

مثال ۱۲: **فشار خون مردان بالای ۵۰ سال دارای انحراف معیار حدودی ۱۷ میلی متر می‌باشد. یک نمونه ۴۱ تایی از مردان انتخاب و فشار خونشان را اندازه‌گیری می‌کنیم که انحراف معیار نمونه برابر با ۱۵ میلی متر محاسبه شده است. مقدار آماره آزمون مناسب برای آزمون واریانس جامعه کدام است؟**

۱) ۳۰/۸۵ ۲) ۳۰/۰۵ ۳) ۳۱ ۴) ۳۱/۱۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» آماره آزمون مناسب برای واریانس یک جامعه به صورت $\chi^۲ = \dfrac{(n-۱)S^۲}{\sigma_\circ^۲} = \dfrac{(۴۱-۱)(۱۵)^۲}{(۱۷)^۲} = ۳۱/۱۴$ می‌باشد.

مثال ۱۳: **برای مقایسه میانگین زمان استفاده کامپیوتر در هفته بین دو گروه از دانشجویان اطلاعات زیر بــه دســت آمــده اســت. در سـطح خطـای ۵ درصد فرضیه «میانگین زمان استفاده کامپیوتر در گروه اول بیشتر از گروه دوم» را آزمون کنید.**

$n_۱ = ۱۶ \qquad n_۲ = ۱۲$

$\bar{X}_۱ = ۴۴ \qquad \bar{X}_۲ = ۳۹ \quad ; \quad \sigma_۱ = ۱۳/۲ \qquad \sigma_۲ = ۱\circ/۲$

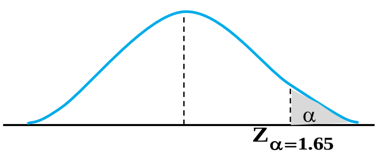
☑ **پاسخ:** مراحل انجام آزمون فرضیه را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) $\begin{cases} H_\circ : \mu_۱ \geq \mu_۲ \\ H_۱ : \mu_۱ > \mu_۲ \end{cases}$ (تشکیل فرضیه‌ها) ۲) $\alpha = \circ/\circ ۵$ (سطح معنی‌داری)

۳) آماره آزمون مناسب به‌صورت روبرو محاسبه می‌شود:

$$Z = \frac{\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲}{\sqrt{\dfrac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \dfrac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} = \frac{۴۴-۳۹}{\sqrt{\dfrac{(۱۳/۲)^۲}{۱۶} + \dfrac{(۱\circ/۲)^۲}{۱۲}}} = ۱/۱۳$$

۴) ناحیه بحرانی به‌صورت روبرو است: $Z_\alpha = Z_{\circ/\circ۵} = ۱/۶۵ \quad ; \quad Z > Z_\alpha$



۵) **نتیجه‌گیری و مقایسه مقدار آماره آزمون و ناحیه بحرانی:** با توجه به این که مقدار آماره آزمون (۱/۱۳) در ناحیه بحرانی (قسمت هاشور خورده) قرار نمی‌گیرد، بنابراین فرضیه صفر رد نمی‌شود.

مثال ۱۴: **جیره غذایی ۵ نفر را در یک اردو تغییر مختصری می‌دهیم و وزن آن‌ها را پیش از این تغییر و سه ماه پس از آن اندازه‌گیری می‌کنیم. فـرض افزایش وزن را آزمون می‌کنیم مقدار آماره آزمون مناسب چقدر است؟ (واحد پوند است)**

i	۱	۲	۳	۴	۵
پیش	۱۶۲	۱۹۲	۱۳۸	۱۸۲	۱۵۹
پس	۱۶۶	۱۹۶	۱۳۶	۱۹۰	۱۶۰

۱) ۱/۷۹ ۲) ۱/۷۹- ۳) ۳/۴۷ ۴) ۳/۴۷-

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آزمون زوجی استفاده می‌کنیم، فرضیه به صورت $\begin{cases} H_\circ : \mu_x \geq \mu_y \\ H_۱ : \mu_x < \mu_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_\circ : \mu_d = \mu_x - \mu_y \geq \circ \\ H_۱ : \mu_d = \mu_x - \mu_y < \circ \end{cases}$ می‌باشد.

$d_i = x_i - y_i = -۴, -۴, ۲, -۸, -۱$

آماره آزمون مناسب را به‌صورت $t=\frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$ محاسبه می‌کنیم، مقادیر $\bar{d}$ و S_d را محاسبه می‌کنیم:

(x: وزن پیش از تغییر)

$$\bar{d}=\bar{x}-\bar{y}=\frac{۱۶۲+۱۹۲+۱۳۸+۱۸۲+۱۵۹}{۵}-\frac{۱۶۶+۱۹۶+۱۳۶+۱۹۰+۱۶۰}{۵}=-۳$$

(y: وزن پس از تغییر)

$$S_d=\sqrt{\frac{\sum(d_i-\bar{d})}{n-۱}}=۳/۷۴ \quad , \quad t=\frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}=\frac{-۳}{\frac{۳/۷۴}{\sqrt{۵}}}\simeq ۱/۷۹$$

مثال ۱۵: ده زوج یکسان از نمونه‌ها تحت دو نوع پوشش قرار می‌گیرند عملکرد آن‌ها را اندازه‌گیری می‌کنیم، نتایج زیر حاصل شده است. برای آزمون فرض عدم وجود تفاوت در عملکرد چگونه می‌توان قضاوت کرد؟

نوع ۱	۹۲	۸۶	۹۳	۹۱	۹۳	۹۰	۸۶	۸۹	۹۱	۸۸
نوع ۲	۸۸	۸۵	۸۲	۹۰	۸۱	۹۳	۸۷	۹۲	۸۶	۸۵

۱) فرضیه عدم وجود تفاوت را می‌پذیریم.
۲) فرضیه عدم وجود تفاوت را نمی‌پذیریم.
۳) شرایط فرضیات مسئله کافی نیست.
۴) نمی‌توان قضاوت کرد.

پاسخ: گزینه «۱» مراحل انجام آزمون فرضیه را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) $\begin{cases} H_0: \mu_x=\mu_y \\ H_1: \mu_x\neq\mu_y \end{cases}$ (تشکیل فرضیه‌ها) ۲) $\alpha=\%۵$ (سطح معنی‌داری)

۳) آماره آزمون مناسب به‌صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود: $d_i=x_i-y_i \Rightarrow d_i: ۴,۱,۱۱,۱,۱۲,-۳,-۱,-۳,۵,۳$

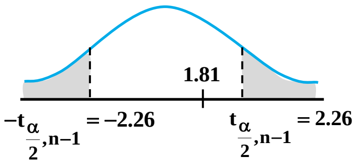
$$\bar{d}=\frac{\sum d_i}{n}=\frac{۴+۱+۱۱+۱+۱۲+\cdots+۳}{۱۰}=۳$$

$$S_d=\sqrt{\frac{\sum(d_i-\bar{d})^۲}{n-۱}}=\sqrt{\frac{(۴-۳)^۲+(۱-۳)^۲+\cdots+(۳-۳)^۲}{۱۰-۱}}=۵/۲۳$$

$$\Rightarrow \text{آماره آزمون}: t=\frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}=\frac{۳}{\frac{۵/۲۳}{\sqrt{۱۰}}}=۱/۸۱$$

۴) ناحیه بحرانی به‌صورت روبه‌رو است:

$$|t|>t_{\frac{\alpha}{۲},n-۱} \text{ و } t_{\frac{\alpha}{۲},۹}=t_{۰/۰۲۵,۹}=۲/۲۶$$



۵) **نتیجه‌گیری و مقایسه مقدار آماره آزمون و ناحیه بحرانی:** با توجه به این که مقدار آماره آزمون (۱/۸۱) در ناحیه بحرانی (قسمت هاشور خورده) قرار نمی‌گیرد، بنابراین فرضیه صفر رد نمی‌شود.

مثال ۱۶: به منظور مقایسه اسناد مالی دو شرکت تجاری، از شرکت اول نمونه‌ای به حجم $n_1=۱۰۰$ سند را بطور تصادفی انتخاب کرده و ملاحظه می‌شود که تعداد ۱۰ سند دارای اشتباه هستند و از شرکت دوم $n_2=۱۰۰$ سند انتخاب گردید که از این تعداد ۸ سند دارای خطا می‌باشند. مقدار آماره آزمون برای برابری نسبت‌های اسناد اشتباه در دو شرکت کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه «۱» آماره آزمون مناسب برای برابری نسبت‌ها به‌صورت $Z=\frac{\bar{p}_1-\bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}\bar{q}(\frac{۱}{n_1}+\frac{۱}{n_2})}}$ می‌باشد، مقادیر $\bar{p}_1,\bar{p}_2$ و $\overline{pq}$ را محاسبه

می‌کنیم و در این رابطه جایگذاری می‌کنیم:

$$\bar{p}_1 = \frac{x}{n_1} = \frac{10}{100} = 0/1 \quad , \quad \bar{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{8}{100} = 0/08$$

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{10+8}{100+100} = \frac{18}{200} = 0/09 \Rightarrow \bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0/09 = 0/91$$

$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}\bar{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \Rightarrow Z = \frac{0/1 - 0/08}{\sqrt{0/09 \times 0/91(\frac{1}{100} + \frac{1}{100})}} = \frac{0/02}{0/04} = 0/5 = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۷: روش جدیدی از شیوه مدیریت در ۳ اداره ارائه شده است که قبل و پس از ارائه این شیوه‌ی مدیریت آزمون‌هایی گرفته شد و امتیازهای آن به صورت زیر ثبت شد مقدار آماره آزمون برای اثرپذیری شیوه مدیریت کدام است؟

i	۱	۲	۳
قبل	۴۶۸۰	۴۶۵۰	۴۵۶۰
بعد	۴۰۲۰	۳۹۴۰	۴۰۱۰

۱) ۱۸/۷۲ ۲) ۱۵/۵۳

۳) ۱۳/۵۴ ۴) ۱۰/۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آزمون زوجی ابتدا d_iها و واریانس d_iها را محاسبه می‌کنیم: $d_i = x_i - y_i$

i	۱	۲	۳
d_i	۶۶۰	۷۱۰	۵۵۰

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{660+710+550}{3} = 640 \; ; \; S_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(660-640)^2 + (710+640)^2 + (550-640)^2}{3-1}} = 81/85$$

$$\Rightarrow \text{آماره آزمون} : t = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{S_d} = \frac{640\sqrt{3}}{81/85} \simeq 13/54$$

مثال ۱۸: تولیدات دو خط تولید A و B هر کدام دارای توزیع نرمال با ویژگی‌های زیر هستند. مقدار آماره آزمون برای برابری واریانس‌های دو جامعه کدام است؟

$n_A = 21 \quad S_A^2 = 0/33$

$n_B = 25 \quad S_B^2 = 0/15$

۱) ۱/۸ ۲) ۲

۳) ۲/۲ ۴) ۲/۷۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» آماره آزمون مناسب برای تساوی واریانس‌ها به صورت روبرو می‌باشد:

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{0/33}{0/15} = 2/2$$

مثال ۱۹: یک فاصله اطمینان برای قبول فرضیه $\mu_1 < \mu_2$ کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $(-3,-\frac{1}{2})$ ۴) $(-1,1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که فرضیه‌های آزمون به صورت $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$ می‌باشند. اکنون برای قبول $\mu_1 < \mu_2$ باید فرضیه H_0 رد شود و این مستلزم آن است که فاصله اطمینان فاقد نقطه صفر باشد و فقط گزینه (۳) مقدار صفر را ندارد یا به عبارتی $\mu_1 - \mu_2 < 0$ باشد.

مثال۲۰: به منظور مقایسه مدت زمان‌های مصرف شده توسط ۳ نفر در به کارگیری وسیله‌ای خاص، نمونه‌ای به حجم $n=۴$ اختیار شده است. و بر اساس نتایج مشاهدات جدول آنالیز واریانس به صورت زیر می‌باشد. مقدار عددی آماره آزمون (F) کدام است؟

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات
بین گروه‌های (تیمارها)	۱۰/۶۷		
داخل گروه‌ها (خطاها)			
جمع کل	۲۶/۶۷		

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه $F=\dfrac{\frac{SS_{tr}}{k-۱}}{\frac{SSE}{k(n-۱)}}$ به ترتیب همه مقادیر مورد نظر در این رابطه را محاسبه می‌کنیم:

$$k-۱=۳-۱=۲\Rightarrow df_{tr}=۲$$

$$k(n-۱)=۳(۴-۱)=۹\Rightarrow df_e=۹$$

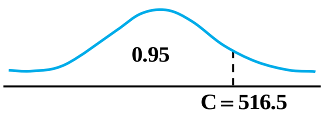
$$SST=SS_{tr}+SSE\Rightarrow ۲۶/۶۷=۱۰/۶۷+SSE\Rightarrow SSE=۲۶/۶۷-۱۰/۶۷=۱۶\Rightarrow F=\dfrac{\frac{۱۰/۶۷}{۲}}{\frac{۱۶}{۹}}=۳$$

مثال۲۱: فرض کنید کارخانه‌ای تراشه‌ای تولید می‌کند که دارای طول عمر نرمال با میانگین $\mu=۵۰۰$ ساعت و $\sigma^۲=۱۰۰۰۰$ ساعت است. مدیر کارخانه ادعا می‌کند میانگین طول عمر تراشه‌های جدید با توجه به تکنولوژی جدید کارخانه افزایش یافته است. میانگین طول عمر نمونه ۱۰۰ تایی برابر با ۵۲۰ ساعت شده است. می‌خواهیم با میزان $\alpha=۰/۰۵$ این ادعا را بیازماییم:
$\begin{cases}H_۰:\mu=۵۰۰\\H_۱:\mu>۵۰۰\end{cases}$

می‌دانیم که برآوردگر پارامتر μ آماره $\bar{X}$ است. اگر یافته این آماره یعنی، $\bar{x}$ خیلی بزرگ شود فرض $H_۰$ را به نفع $H_۱$ رد می‌کنیم بنابراین ناحیه بحرانی $\bar{X}>C$ است.

☑ **پاسخ:** طبق تعریف مقدار α به صورت روبرو محاسبه می‌شود.
$$\alpha=P(H_۰ \text{ در } | \text{ درست } H_۰)\ \Rightarrow ۰/۰۵=P(\bar{X}>C|\mu=۵۰۰)$$

$$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^۲}{n})\Rightarrow \bar{X}\sim N(۵۰۰,۱۰۰)\ \Rightarrow ۰/۰۵=P(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>\frac{C-۵۰۰}{۱۰})=۱-\phi(\frac{C-۵۰۰}{۱۰})$$



$$\Rightarrow \phi(\frac{C-۵۰۰}{۱۰})=۰/۹۵\ \Rightarrow \frac{C-۵۰۰}{۱۰}=۱/۶۵\ \Rightarrow C=۵۱۶/۵$$

بنابراین ناحیه بحرانی با میزان $\alpha=۰/۰۵$ به صورت $\bar{X}>۵۱۶/۵$ می‌باشد. اکنون چون در نمونه‌ها $\bar{x}=۵۲۰$ به دست آمده پس فرض $H_۰$ را با میزان $\alpha=۰/۰۵$ رد می‌کنیم در حالی‌که اگر α را تغییر دهیم با محاسبه‌ای مشابه بالا $\bar{x}=۵۲۰$ در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد و فرض $H_۰$ رد نمی‌شود. پس رد $H_۰$ بستگی به میزان α دارد. کوچکترین مقداری که برای α می‌توان در نظر گرفت تا $H_۰$ رد شود، برابر با مقدار احتمال یا همان $P-$ مقدار است. اگر $P-$ مقدار از این α که پژوهشگر انتخاب کرده است کمتر باشد فرض $H_۰$ رد می‌شود. با روش $P-$ مقدار $(P-Value)$ نیازی به داشتن ناحیه بحرانی برای آزمون نیست.

❖ **تعریف:** کمترین مقداری از α (سطح آزمون) که موجب رد فرض صفر می‌گردد، $P-$ مقدار $(P-Value)$ نام دارد.

مثال۲۲: در آزمون $\begin{cases}H_۰:\mu=۱۰۰\\H_۱:\mu>۱۰۰\end{cases}$ در توزیع نرمالی انحراف معیار ۱۲ و سطح آزمون ۰/۰۵ است. اگر حجم نمونه $n=۳۶$ و $\bar{x}=۱۰۶$ باشد مقدار $P-Value$ چقدر است؟ $S_{-\infty}^{-۳}=۰/۰۰۱۳$

۱) ۰/۰۰۱۳
۲) ۰/۰۱۲۵
۳) ۰/۰۲۵۷
۴) ۰/۰۱۲۴۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تعریف مقدار p خواهیم داشت: (آزمون یک دامنه به راست است (قسمت الف))

$$P-Value=P(\bar{X}\geq ۱۰۶|\mu=۱۰۰)=P(Z\geq\frac{۱۰۶-۱۰۰}{\frac{۱۲}{\sqrt{۳۶}}})=P(Z>۳)=P(Z<-۳)=۰/۰۰۱۳$$

مثال ۲۳: فرض کنید در جامعه‌ای انحراف معیار معلوم و مقدار آن $\sigma = ۳۰۰$ باشد برای انجام آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = ۱۲۰۰ \\ H_1 : \mu \neq ۱۲۰۰ \end{cases}$ یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی به تصادف از جامعه استخراج می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که میانگین نمونه برابر ۱۲۶۵ می‌باشد، مقدار $P-value$ برابر است با:

$$\int_{۲/۱۷}^{\infty} f(z)dz = ۰/۰۱۴۶$$

۱) ۰/۰۰۱ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق تعریف، مقدار $P-value$ با توجه به این‌که آزمون دو دامنه می‌باشد برابر است با:

$$P-value = ۲\min\{P(\overline{X} \geq ۱۲۶۵)\ ,\ P(\overline{X} \leq ۱۲۶۵)\}$$

$$(۱)\ \ P(\overline{X} \geq ۱۲۶۵) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{۱۲۶۵-۱۲۰۰}{\frac{۳۰۰}{\sqrt{۱۰۰}}}) = P(Z \geq ۲/۱۷) = ۰/۰۱۴۶$$

$$(۲)\ \ P(\overline{X} \leq ۱۲۶۵) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{۱۲۶۵-۱۲۰۰}{\frac{۳۰۰}{\sqrt{۱۰۰}}}) = P(Z \leq ۲/۱۷) = ۱-۰/۰۱۴۶ = ۰/۹۸۵۴$$

$$P-value = ۲\min\{۰/۰۱۴۶, ۰/۹۸۵۴\} = ۲ \times ۰/۰۱۴۶ \simeq ۰/۰۳$$

مثال ۲۴: نمونه‌ای به حجم $n = ۲۵$ از جامعه‌ای با توزیع نرمال با واریانس معلوم ۱۶ انتخاب می‌گردد اگر $\overline{x} = ۳۷$ باشد $P-value$ برای آزمون $H_0 : \mu = ۳۵$ در مقابل $H_1 : \mu \neq ۳۵$ کدام است؟

$$\int_{۲/۵}^{\infty} f(z)dz = ۰/۰۰۶۲$$

۱) ۰/۰۰۶۲ ۲) ۰/۰۰۸۷ ۳) ۰/۰۸۲ ۴) ۰/۰۱۲۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» آزمون دو دامنه می‌باشد طبق تعریف داریم:

$$P-value = ۲\min\{p(\overline{X} \geq ۳۷), p(\overline{X} \leq ۳۷)\}$$

$$(۱)\ \ P(\overline{X} \geq ۳۷) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{۳۷-۳۵}{\frac{۴}{\sqrt{۲۵}}}) = P(Z \geq ۲/۵) = ۰/۰۰۶۲$$

$$(۲)\ \ P(\overline{X} \leq ۳۷) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{۳۷-۳۵}{\frac{۴}{\sqrt{۲۵}}}) = P(Z \leq ۲/۵) = ۱-۰/۰۰۶۲ = ۰/۹۹۳۸$$

$$P-value = ۲\min\{۰/۰۰۶۲, ۰/۹۹۳۸\} = ۲ \times ۰/۰۰۶۲ = ۰/۰۱۲۴$$

مثال ۲۵: در یک نمونه تصادفی به حجم نمونه $n = ۱۰$ با میانگین و واریانس مجهول $\mu, \sigma^۲$ مقدار $\sum_{i=1}^{۱۰}(X_i - \overline{X}) = ۶۷/۶۸$ می‌باشد. برای فرض‌های $\begin{cases} H_0 : \sigma^۲ = ۴ \\ H_1 : \sigma^۲ \neq ۴ \end{cases}$ مقدار $P-Value$ کدام است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که آزمون فرض موردنظر دوطرفه می‌باشد بنابراین:

$$S^۲ = \frac{\sum_{i=1}^{۱۰}(X_i - \overline{X})^۲}{n-۱} = \frac{۶۷/۶۸}{۹} = ۷/۵۲$$

$$P-Value = ۲P(S^۲ \geq ۷/۵۲ \mid \sigma^۲ = ۴) = ۲P(\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \geq \frac{۶۷/۶۸}{۴}) = ۲P(\chi^۲_{(۹)} \geq ۱۶/۹۲) = ۰/۱$$

مثال ۲۶: فرض کنید می‌خواهیم آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = 300 \\ H_1 : \mu \neq 300 \end{cases}$ را در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/05$ در جامعه نرمال تست کنیم. به علاوه اگر μ واقعاً برابر با ۵۰۰ باشد می‌خواهیم شانس رد نکردن فرض صفر بیشتر از ۱۰ درصد نشود و همچنین واریانس نمونه $S^2 = (700)^2$ می‌باشد. مقدار اندازه نمونه کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۹ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۷۵

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این‌که آزمون دو دامنه است مقادیر مورد نظر را در رابطه زیر قرار می‌دهیم:

$$\mu_1 = 500 \quad , \quad \mu_0 = 300 \quad , \quad S^2 = (700)^2 \quad , \quad \alpha = 0/05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/025 \Rightarrow Z_{0/025} = 1/96 \quad , \quad \beta = 0/10 \Rightarrow Z_{0/10} = 1/28$$

$$n = \frac{(Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_\beta)^2 . \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} = \frac{(1/96 + 1/28)^2 \times (700)^2}{(500 - 300)^2} \simeq 129$$

۲) در آزمون‌های یک‌طرفه (به چپ یا به راست) $\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ اندازه نمونه به ازای مقادیر معلوم α و β برابر است با: $n = \frac{(Z_\alpha + Z_\beta)^2 . \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$

مثال ۲۷: در نمونه‌ای ۱۰۰ نفره از مشتریان یک بانک راجع به رضایت برخورد کارکنان نتایج زیر حاصل شده است:

رضایت مشتریان	خیلی کم	کم	متوسط	زیاد	خیلی زیاد
فراوانی	۱۰	۱۰	۱۰	۳۰	۴۰

می‌خواهیم این فرضیه را تست کنیم که «بین توزیع مشاهده شده و مورد انتظار (یکنواخت) تفاوت وجود دارد» مقدار آماره آزمون مناسب کدام است؟

۱) $t = 12/5$ ۲) $Z = 3/45$ ۳) $\chi^2 = 40$ ۴) $F = 18/5$

پاسخ: گزینه «۳» فرضیه‌های این آزمون به صورت روبه‌رو است:

$\begin{cases} H_0 : \\ H_1 : \end{cases}$ **بین توزیع مشاهده شده و مورد انتظار تفاوت وجود ندارد.**

از آزمون کای ـ دو استفاده می‌کنیم:

$$e_i = n.p_i = 100 \times \frac{1}{5} = 20$$

مشاهده	o_i	۱۰	۱۰	۱۰	۳۰	۴۰
شده	e_i	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰

انتظار می‌رود که به طور متوسط در هر طبقه ۲۰ نفر قرار می‌گرفت:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(40-20)^2}{20} + \frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} = 40$$

روش دوم (روش تستی): آماره آزمون نیکویی برازش مبتنی بر توزیع خی‌دو است، پس گزینه (۳) صحیح است.

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل هشتم

۱ـ تحلیل واریانس برای مقایسه ....

۱) واریانس‌های K جامعه $(k > 1)$ می‌باشد.
۲) واریانس‌های K جامعه $(k > 2)$ می‌باشد.
۳) میانگین‌های K جامعه $(k > 1)$ می‌باشد.
۴) میانگین K جامعه $(k > 2)$ می‌باشد.

۲ـ در تحلیل واریانس یکطرفه مدل به صورت................ است.

۱) $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ ، $i = 1,...K\ ,\ j = 1,...n$
۲) $X_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$ ، $i = 1,....,K\ ,\ j = 1,....,n$
۳) $x_{ij} = \mu$ ، $i = 1,....,K\ ,\ j = 1,....,n$
۴) هیچکدام

۳ـ در مدل $\begin{matrix} x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \\ i = 1...k\ ,\ j = 1...n \end{matrix}$ درجه‌ی آزادی خطا کدام است؟

۱) $k-1$
۲) $nk-1$
۳) $nk-k$
۴) $nk(k-1)$

۴ـ در مدل $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ مقدار (تیمارها) SS_{tr} کدام است؟

۱) $\Sigma x^2_{i\circ}$
۲) $\Sigma x^3_{i\circ}$
۳) $\frac{1}{n}\Sigma x^2_{i\circ} - \frac{x_{\circ\circ}^2}{nk}$
۴) $\Sigma\Sigma x^2_{ij} - \frac{X^2_{\circ\circ}}{nK}$

۵ـ به منظور ارزیابی تساوی میانگین ۵ جامعه از هر جامعه ۱۰ نمونه انتخاب می‌کنیم. برای این منظور چه آماره‌ای را پیشنهاد می‌کنید؟

۱) نرمال
۲) $F_{(5,10)}$
۳) $F_{(4,9)}$
۴) $F_{(4,45)}$

۶ـ در تحلیل واریانس یک‌طرفه، اگر تعداد تیمارها ۳ و $SST = 50$ و $SSE = 18$ باشد SS_{tr} کدام است؟

۱) ۶۸
۲) ۳۶
۳) ۳۲
۴) اطلاعات کافی نیست.

۷ـ در جدول آنالیز واریانس $\Sigma\Sigma x^2_{ij} - \frac{1}{kn}T^2_{\circ\circ}$ برابر است با:

۱) SSE
۲) SST
۳) SStr
۴) MSE

۸ـ با توجه به جدول زیر درجه آزادی SSE برابر است با :

	A	B	C	D
n_i	۲	۵	۶	۴
$\bar{x}_i$	۵	۱۰	۸	۹
S_i	۲/۳	۱/۱	۱/۵	۱

۱) ۳
۲) ۱۳
۳) ۱۷
۴) ۱۹

۹ـ در سؤال قبل درجه آزادی تیمار کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۰ـ در جدول آنالیز واریانس مقدار SSE برابر است با:

۱) $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2$
۲) $\sum_{i=1}^{k} n_i\,\bar{x}_i.$
۳) $\sum_{i=1}^{k} S_i^2$
۴) $\bar{S}_i^2$

۱۱ـ تولیدکننده نوعی لامپ ادعا می‌کند که طول عمر آنها دارای توزیع نرمال است. با میانگین ۵۵ و واریانس ۱۰۰، نمونه‌ای ۲۵ تایی از این لامپ‌ها گرفته شده است متوسط طول عمر این نمونه ۲۵ تایی ۵۰ ساعت بوده است. آیا ادعای این تولیدکننده در سطح $\alpha = 0/05$ پذیرفته می‌شود؟ $F(-2/5) = 0/0062$

۱) خیر
۲) بلی
۳) نمی‌توان قضاوت کرد
۴) اطلاعات مسئله کافی نیست

۱۲ـ فرض کنید دانشجویی تقلب نکرده ولی او به اتهام تقلب از امتحان محروم می‌شود:

۱) خطای نوع اول رخ داده است. ۲) خطای نوع دوم رخ داده است.

۳) نمی‌توان قضاوت کرد. ۴) در اینجا قضاوت به نسبت میزان معنی‌داری دارد.

۱۳ـ فرض کنید $X \sim bin(1,p)$ باشد. آزمون فرض‌های آماری زیر را می‌خواهیم آزمون کنیم $\begin{cases} H_0 : p \le \frac{1}{2} \\ H_1 : p > \frac{3}{4} \end{cases}$، فرض کنید که نمونه تصادفی چهارتایی از این توزیع را انتخاب کرده باشیم چنانچه $\sum_{i=1}^{4} X_i > 2$ باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم. خطای نوع اول کدام است؟

۱) ۰/۳۵ ۲) ۰/۳۱ ۳) ۰/۶۷ ۴) ۰/۹۵

۱۴ـ در سؤال قبل خطای نوع دوم کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۶۹

۱۵ـ برای آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = 550 \\ H_1 : \mu \ne 550 \end{cases}$ از جامعه‌ای با انحراف معیار ۹۲۵ یک نمونه تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر بخواهیم $\alpha = 0/05$ و برای $\mu = 850$ احتمال خطای نوع دوم برابر با ۰/۱ باشد حجم نمونه کدام است؟

$Z_{0/025} = 1/96$

$Z_{0/1} = 1/282$

۱) ۵۰ ۳) ۱۵۰

۲) ۱۰۰ ۴) ۲۰۰

۱۶ـ در آزمون $\begin{cases} H_0 : \theta \in H_0 \\ H_1 : \theta \in H_1 \end{cases}$ اگر $\pi(\theta)$ تابع توان باشد اندازه آزمون کدام است؟

۱) $\underset{\theta \in H_1}{\text{Sup}} [1-\pi(\theta)]$ ۲) $\underset{\theta \in H_0}{\text{Sup}} [1-\pi(\theta)]$ ۳) $\underset{\theta \in H_0}{\text{Sup}} [\pi-(\theta)]$ ۴) $\underset{\theta \in H_1}{\sup} [\pi(\theta)]$

۱۷ـ از جامعه‌ای نرمال نمونه‌ای ۱۱ تایی گرفته شده است و $S^2 = 23/2$ به دست آمده است. درباره $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 9 \\ H_1 : \sigma^2 > 9 \end{cases}$ چه قضاوتی می‌توان کرد؟ $(\chi^2_{0/05}(10) = 18/31)$

۱) فرض صفر رد می‌شود. ۲) فرض صفر رد نمی‌شود.

۳) نمی‌توان قضاوت کرد. ۴) با $\alpha = 0/08$ فرض صفر می‌شود.

۱۸ـ برای $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1 : H_0 \text{ نفی} \end{cases}$ برآورد میانگین کل کدام است؟

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4$

$S_1^2 = 3, S_2^2 = 3, S_3^2 = 2$

$\bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = 2, \bar{x}_3 = 1$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۹ـ سکه‌ای را ۱۰۰ بار پرتاب می‌کنیم ۶۰ بار شیر و ۴۰ بار خط می‌آید آیا سکه با احتمال ۹۵٪ سالم است: $\chi^2_{0/05,1} = 3/83$

۱) خیر ۲) بلی ۳) با احتمال ۰/۹۹ سالم است. ۴) نمی‌توان قضاوت کرد.

۲۰ـ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ نمونه‌ای از توزیع نرمال با واریانس ۹ باشد و می‌خواهیم $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{cases}$ را آزمون کنیم. اگر $\phi(0/8) = 0/78$ باشد و ناحیه بحرانی ما به صورت $c = \{\bar{X} \ge 0/6\}$ باشد α کدام است؟

۱) ۰/۷۸ ۲) ۰/۲۱ ۳) ۰/۳۴ ۴) ۰/۹۲

۲۱ـ فرض کنید x یک متغیر تصادفی گسسته می‌باشد.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
H_0	۰/۲	۰/۳	۰/۱	۰/۳	۰/۱
H_1	۰/۳	۰/۱	۰/۳	۰/۲	۰/۱

اگر ناحیه بحرانی ما به صورت $c=\{x_1,x_3,x_5\}$ باشد α کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۴

۲۲ـ در سؤال قبل مقدار β کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۶

۲۳ـ توان آزمون (power of test) عبارت است از:

۱) احتمال پذیرش فرضیه نادرست ۲) احتمال رد فرضیه نادرست ۳) احتمال پذیرش فرضیه درست ۴) رد فرضیه نادرست

۲۴ـ اگر کلیه عوامل مؤثر ثابت باقی بماند، با افزایش احتمال خطای نوع اول، توان آزمون:

۱) افزایش می‌یابد. ۲) کاهش می‌یابد. ۳) با شرط α ثابت افزایش می‌یابد. ۴) تغییری نمی‌کند.

۲۵ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه نرمال با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 نامعلوم باشد، برای آزمون فرضیه $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ تابع نمونه‌ای کدام است؟

۱) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ۲) $\frac{\max S^2}{\max S_i^2}$ ۳) $\frac{\min S^2}{\sigma_0^2}$ ۴) $\frac{\max S_i^2}{\min S_i^2}$

۲۶ـ در کدام‌یک از آزمون‌های زیر از توزیع F می‌توان استفاده کرد؟

۱) اختلاف بین دو مقدار واریانس ۲) برابری میانگین در دو جامعه

۳) استقلال دو کمیت ۴) برابری واریانس با عددی مشخص

۲۷ـ براساس اطلاعات زیر، آماره آزمون برای آزمون این ادعا که فروش کالا در سه نوع بسته‌بندی الف و ب و ج دارای احتمال یکسان است با کدام است؟

تعداد کالای فروخته شده : الف = ۱۰۰

تعداد کالای فروخته شده: ب = ۸۰

تعداد کالای فروخته شده: ج = ۱۲۰

۱) $\chi^2_{(2)} = ۸$ ۲) $\chi^2_{(2)} = ۴/۷$ ۳) $\chi^2_{(3)} = ۴/۷$ ۴) $\chi^2_{(3)} = ۸$

۲۸ـ اگر $\begin{cases} H_0 : p = \frac{1}{2} \\ H_1 : p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ و از بین ۱۰۰ آزمایش، ۵۹ موفقیت مشاهده شده باشد، آماره آزمون و نتیجه آزمون $\alpha = ۰/۰۵$ کدام است؟ $(Z_\alpha = ۰/۵۱)$

۱) ۱/۸۴ و H_0 رد می‌شود. ۲) ۱/۸۲ و H_0 رد می‌شود. ۳) ۱/۸۴ و H_0 رد نمی‌شود. ۴) ۱/۸ و H_0 رد نمی‌شود.

۲۹ـ تحقیق برای مقایسه دو روش آزمون دانشجویان با روش متداول یا سنتی و روش آموزش الکترونیکی یا جدید در دست مطالعه است. دو نمونه مستقل انتخاب و اطلاعات زیر به دست آمده است.

روش جدید	روش سنتی
$n_2 = ۱۵$	$n_1 = ۱۳$
$\bar{X}_2 = ۴۸$	$\bar{X}_1 = ۵۲$
$S_2^2 = ۱۶$	$S_1^2 = ۸۶$

مقدار آماره آزمون t چقدر است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۵۷ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۵۵

۳۰ـ اگر میانگین واقعی وزن قوطی‌هایی که توسط یک دستگاه اتوماتیک پر می‌شود ۳۹۶/۷ با انحراف معیار ۱۶ گرم باشد خطای نوع دوم آزمون فرضیه با نمونه تصادفی ۶۴ تایی با $\alpha = 0/05$ کدام است؟ $(Z_{0/05} = 1/65)$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 400 \\ H_1 : \mu < 400 \end{cases}$$

۱) ۰/۹۵
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۵
۴) ۰/۰۵

۳۱ـ برای آزمون استقلال سطوح A و B جدول زیر حاصل شده است آماره آزمون کدام است؟

	B	
A	۳۰	۲۰
	۲۰	۳۰

۱) ۳۲
۲) ۲۸
۳) ۸
۴) ۴

۳۲ـ فرض کنید x دارای تابع چگالی به صورت $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}$, $x > 0$ است. حال قصد آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \theta = 1 \\ H_1 : \theta \geq 1 \end{cases}$ را براساس یک نمونه ۲ تایی به این صورت داریم که اگر $\min(k_1, k_2) \geq 1$ باشد H_0 را رد می‌کنیم. در این آزمون فرض مقدار خطای نوع اول چقدر است؟

۱) ۰/۱۳۵
۲) ۰/۳۶۸
۳) ۰/۲۴۱
۴) ۰/۱۷۹

۳۳ـ در سؤال قبل مقدار توان آزمون به ازای $\theta = \frac{3}{2}$ چقدر است؟

۱) ۰/۷۳۶
۲) ۰/۲۶۴
۳) ۰/۲۲۳
۴) ۰/۷۷۷

۳۴ـ فرض کنید x دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $(3, \theta)$ می‌باشد و قصد آزمون فرض $\begin{cases} H_0 \theta = \frac{1}{2} \\ H_1 : \theta < \frac{1}{2} \end{cases}$ را داریم. لذا $x_1 . x_2$ را از این توزیع به دست می‌آوریم. در صورتی که $x_1 + x_2 < 2$ باشد آنگاه فرض صفر را رد می‌کنیم در این‌صورت چقدر احتمال دارد به ازای $\theta = 0/4$ فرض صفر را بپذیریم؟

۱) ۰/۲۳
۲) ۰/۷۷
۳) ۰/۸۷
۴) ۰/۳۵۲

۳۵ـ x دارای توزیع $0 < x < \theta$, $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}$ است به همین منظور قصد آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \theta = 2 \\ H_1 : \theta < 2 \end{cases}$ را داریم و ناحیه بحرانی به صورت $x_1 < B$ تعریف می‌شود که x_1 یک نمونه از این توزیع می‌باشد. حال B چقدر باشد تا ارتکاب خطای نوع اول ۰/۱ حداکثر آن باشد؟

۱) ۰/۱
۲) ۱
۳) ۰/۴
۴) ۰/۲

۳۶ـ کدام یک از آزمون فرضیه‌های زیر در مورد این‌که میانگین عمر یک محصول بیشتر از ۴ سال است به صورت سختگیرانه برخورد کرده است؟

۱) $\begin{cases} H_0 : \mu < 4 \\ H_1 : \mu \geq 4 \end{cases}$
۲) $\begin{cases} H_0 \mu \geq 4 \\ H_1 : \mu < 4 \end{cases}$
۳) $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 4 \\ H_1 : \mu > 4 \end{cases}$
۴) $\begin{cases} H_0 : \mu = 4 \\ H_1 : \mu \neq 4 \end{cases}$

۳۷ـ فرض کنید y,x دارای توزیع توأم نرمال دو متغیره می‌باشند. به منظور آزمون استقلال این دو متغیر یک نمونه ۱۵ تایی گرفته شده برای آزمون از چه توزیعی کمک می‌گیریم؟

۱) نرمال
۲) کای مربع با ۱۵ درجه آزادی
۳) t با ۱۴ درجه آزادی
۴) t با ۱۳ درجه آزادی

۳۸ـ فرض کنید $x \sim P(\theta)$ برای آزمون $\begin{cases} H_0 : \theta = 0/5 \\ H_1 : \theta > 0/5 \end{cases}$ نمونه تصادفی x_1 و x_2 را انتخاب می‌کنیم اگر $\bar{x} \leq 1$ فرض صفر را بپذیریم در این صورت مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{5}{2} e^{-1}$
۲) $1 - \frac{5}{2} e^{-1}$
۳) $5 e^{\frac{1}{2}}$
۴) $\frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}}$

۳۹ـ جعبه‌ای شامل n مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است بر اساس یک نمونه‌ی ۳ تایی و بدون جایگذاری آزمون $\begin{cases} H_0 : n = 3 \\ H_1 : n = 4 \end{cases}$ را بررسی می‌کنیم. β کدام است؟ برای پذیرش H_0 حداقل ۲ مهره‌ی سفید باید انتخاب شود.

۱) ۰/۴۱
۲) ۰/۳۸
۳) ۰/۳۷
۴) ۰/۴۵

۴۰ـ اگر $x \sim bin(5, P)$ برای آزمون $\begin{cases} H_0 : P = \frac{1}{2} \\ H_1 : P \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ اگر ناحیه‌ی بحرانی به صورتی $C = \{x \mid x = 0 \text{ یا } 5\}$ باشد احتمال خطای نوع اول کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{32}$ ۴) $\frac{1}{64}$

۴۱ـ طول عمر ۱۰۰۰ لامپ یک کارخانه را اندازه‌گیری کرده‌ایم و اطلاعات جدول زیر به دست آمده است همچنین $\Sigma x_i = 200000$ سرپرست کارخانه ادعا دارد که طول عمر لامپ‌ها دارای توزیع نمایی است. آیا ادعای او در سطح $\alpha = 0/01$ پذیرفته است؟ $(\chi^2_{0/99}(4) = 13/3)$

تعداد	طول t
۵۴۳	$t \le 150$
۲۵۸	$150 < t < 450$
۱۲۰	$300 < t \le 450$
۴۸	$450 < t \le 600$
۲۰	$600 < t \le 750$
۱۱	$t > 750$

۱) رد نمی‌شود.

۲) رد می‌شود.

۳) اطلاعات کافی نیست.

۴) در پاره‌ای مواقع رد می‌شود و در پاره‌ای از مواقع رد نمی‌شود.

۴۲ـ قرار است آزمون فرضی $\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu < 15 \end{cases}$ را برای میانگین یک جامعه نرمال با واریانس ۴ انجام دهیم. اگر در یک نمونه ۲۵ تایی از این جامعه میانگین نمونه کمتر از ۱۴ شد H_0 را رد می‌کنیم. سطح آزمون چه مقدار است؟

۱) $0/05 < \alpha < 0/1$ ۲) $0/05 < \alpha < 0/025$ ۳) $\alpha < 0/025$ ۴) $\alpha = 0/025$

۴۳ـ آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ معادل کدام برآورد فاصله‌ای زیر است؟

۱) $\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ۲) $\mu \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ۳) $\bar{X} + Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ۴) $\bar{X} - Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

۴۴ـ فرض کنید X دارای توزیع نمایی با پارامتر مجهول θ باشد. حال قصد آزمون $\begin{cases} H_0 : \theta = \frac{1}{4} \\ H_1 : \theta > \frac{1}{4} \end{cases}$ را داریم به همین منظور یک نمونه سه تایی می‌گیریم. چنانچه $(\max(x_1, x_2, x_3) < 3)$ گردید آن‌گاه فرض صفر را رد می‌کنیم. حال مقدار خطای نوع اول چقدر است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۰۵ ۳) ۰/۸۹۵ ۴) ۰/۲۱۲

۴۵ـ فرض کنید X دارای توزیع پواسون با پارامتر θ می‌باشد. به منظور آزمون $\begin{cases} H_0 : \theta \ge 1 \\ H_1 : \theta < 1 \end{cases}$ یک مشاهده از X به دست آورده و آن را x_1 می‌نامیم و در صورتی که مقدار مشاهده شده کمتر از ۲ باشد فرض صفر را رد می‌کنیم. حال چقدر احتمال دارد مقدار $\theta = \frac{1}{2}$ باشد ولی ما H_0 را بپذیریم؟

۱) ۰/۲۱۲ ۲) ۰/۰۹ ۳) ۰/۰۱۴ ۴) ۰/۲۶۴

۴۶ـ اگر تعداد پیروزی در ۲۰ آزمایش دو جمله‌ای ۵ باشد، $\begin{cases} H_0 : P = 0/5 \\ H_1 : P \neq 0/5 \end{cases}$ در سطح معنی‌دار بودن $\alpha = 0/05$ فرض صفر:

۱) رد می‌شود. ۲) رد نمی‌شود. ۳) اطلاعات کافی نیست. ۴) H_1 قبول نمی‌شود.

۴۷ـ سطح زیر منحنی مربوط به آماره آزمون فرضیه‌ی H_0 برابر است با:

۱) درصد اطمینان فرضیه ۲) α ۳) β ۴) $1 - \beta$

۴۸ـ در یک آزمون فرض خطای نوع دوم عبارت است از:

۱) احتمال قبول کردن فرض صفر در حالی که فرض صفر درست است.
۲) احتمال رد کردن فرض صفر در حالی که فرض صفر درست است.
۳) احتمال قبول کردن فرض صفر در حالی که فرض صفر درست نیست.
۴) احتمال رد کردن فرض صفر در حالی که فرض صفر درست نیست.

۴۹ـ فرض کنید قصد آزمون $\begin{cases} H_0 : \theta = \frac{1}{4} \\ H_1 : \theta > \frac{1}{4} \end{cases}$ برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع برنولی با پارامترهای $(10, \theta)$ می‌باشد را داریم. چنانچه $x \geq 3$ گردد ما فرض صفر را رد می‌کنیم. حال توان این آزمون کدام است؟

۱) $\sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} \theta^x (1-\theta)^{10-x}$
۲) $1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} \theta^x (1-\theta)^{10-x}$
۳) $1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} (\frac{1}{4})^x (\frac{3}{4})^{10-x}$
۴) $1 - \sum_{x=0}^{10} \binom{10}{x} \theta^x (1-\theta)^{10-x}$

۵۰ـ در سؤال قبل مقدار سطح اطمینان این آزمون چقدر است؟

۱) ۰/۵۲۶
۲) ۰/۴۷۴
۳) ۰/۹۶۰
۴) ۰/۸۷۲

۵۱ـ با توجه به جدول توافقی در مورد میزان تحصیلات و منطقه‌ی زندگی در کشور چه ربطی وجود دارد؟

تحصیلات ↓ / منطقه ←	غرب	شرق
پایین	۳۰	۱۱
متوسط	۱۹	۸
بالا	۱۱	۱۷

۱) نمی‌توان وابستگی آنها را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ رد کرد.
۲) بین تحصیلات افراد و محل زندگی افراد استقلال وجود دارد.
۳) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ از یکدیگر مستقل‌اند.
۴) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ این دو ناهمبسته‌اند.

۵۲ـ یک تولیدکننده قطعات پیش‌ساخته مدعی است که انحراف معیار مقاومت محصولات او برابر ۱۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع است. یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از این محصولات نتایج $\bar{x} = 312$ و $S^2 = 195$ را به دست داده است. اگر اندازه‌ی مقاومت این محصولات دارای توزیع نرمال باشد، آیا نتایج به دست آمده با ادعای تولیدکننده سازگار است؟ سطح معنی‌دار را ۰/۰۵ بگیرید. $(\chi^2_{0/975}(9) = 19)$

۱) بله سازگار است.
۲) خیر سازگار نیست.
۳) در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/07$ بلی
۴) در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/05$ خیر ولی در سطح $\alpha = 0/01$ بلی

۵۳ـ تابع توزیع احتمال برای متغیر تصادفی X به شکل زیر است:

X	-2	b	۴
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$

می‌خواهیم براساس یک نمونه یکتایی فرضیه $\begin{cases} H_0 : b = 0 \\ H_1 : b > 0 \end{cases}$ را در سطح α آزمون کنیم ناحیه بحرانی به صورت $X > 2$ است. مقدار α کدام است؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۰۵
۳) ۰/۰۱۲۵
۴) ۰/۳۳

۵۴ـ خطای نوع اول عبارت است از:

۱) قبول بنا حق فرض H_0
۲) قبول بنا حق فرض H_1
۳) رد بنا حق فرض H_1
۴) رد بنا حق فرض H_0

۵۵ـ در یک آزمون فرض ضریب اطمینان برابر است با:

۱) α
۲) β
۳) $1-\beta$
۴) $1-\alpha$

فصل نهم

«رگرسیون و همبستگی»

تست‌های تألیفی فصل نهم

مثال ۱: توزیع احتمال توأم دو متغیر (X, Y) را به صورت جدول مقابل در نظر بگیرید.

Y \ X	۰	۱	۲	$f_Y(y)$
-1	۰/۲	۰/۳	۰/۱	۰/۶
۲	۰/۱	۰/۲	۰/۱	۰/۴
$f_X(x)$	۰/۳	۰/۵	۰/۲	

تابع رگرسیون Y بر روی X به ازای $x = 2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱/۵ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که در فصل‌های قبل خواندیم برای محاسبه $E(Y|X=x)$ باید ابتدا تابع احتمالی شرطی $Y|X=x$ را به دست آوریم:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(2,y)}{f_x(2)}\to E(Y|X=x)=\sum_{y=-1}^{2}\frac{y.f(2,y)}{f_{(x)}(2)}$$

$$\frac{-1\times f(2,-1)}{f_x(2)}+\frac{2\times f(2,2)}{f_x(2)}=\frac{-1\times 0/1}{0/2}+\frac{2\times 0/1}{0/2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

مثال ۲: فرض کنید تابع چگالی توأم (X,Y) به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & y>x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

بهترین تابع پیش‌بینی کننده Y بر روی X کدام است؟

۱) $x+1$ ۲) $x-1$ ۳) $\frac{1}{2}x^2$ ۴) x^2+x

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق رابطه امید ریاضی شرطی خواهیم داشت: (در حالت پیوسته)

$$E(Y|X=x)=\int y.\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy=\int_x^{\infty} y.\frac{e^{-y}}{f_X(x)}dy$$

تابع کناری متغیر x به صورت زیر است:

از طرف $f_X(x)=\int_x^{\infty}e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_x^{\infty}=e^{-x}$:

$$E(Y|X=x)=\int_x^{\infty}y.\frac{e^{-y}}{e^{-x}}dy=\frac{1}{e^{-x}}\int_x^{\infty}y.e^{-y}dy=\frac{1}{e^{-x}}.\left(-ye^{-y}\Big|_x^{\infty}+\int_x^{\infty}e^{-y}dy\right)=\frac{1}{e^{-x}}(xe^{-x}+e^{-x})=x+1$$

مثال ۳: برای داده‌های روبرو مقدار $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ کدام است؟

X	۱	۳	۴
Y	۵	۱	۲

۱) $-\frac{8}{7},\frac{40}{7}$ ۲) $\frac{8}{7},\frac{40}{7}$ ۳) $-\frac{8}{7},-\frac{40}{7}$ ۴) $\frac{3}{7},\frac{8}{7}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق روابط گفته شده در بالا:

$$\sum X_iY_i=(1\times 5)+(3\times 1)+(4\times 2)=16$$

$$\sum X_i=1+3+4=8\Rightarrow \bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{8}{3}\quad ;\quad \sum Y_i=5+1+2=8\Rightarrow \bar{Y}=\frac{\sum Y_i}{n}=\frac{8}{3}$$

$$\sum X_i^2=1^2+3^2+4^2=26$$

این مقادیر را در روابط $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}$ قرار می‌دهیم:

$$\hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{\sum x_iy_i-\frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum X_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}}=\frac{16-\frac{64}{3}}{26-\frac{64}{3}}=-\frac{8}{7}\quad ;\quad \hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{X}=\frac{8}{3}-(-\frac{8}{7})\times(\frac{8}{3})=\frac{40}{7}$$

مثال۴: در مدل $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ ، ε_iها دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,1)$ می باشند برآورد حداقل مربعات β کدام است؟

۱) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

۲) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

۳) $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

۴) $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2$

پاسخ: گزینه «۱» توجه کنید که در روش حداقل مربعات توزیع ε_iها ربطی به برآورد $\hat{\beta}$ ندارد و برآورد پارامتر به صورت زیر انجام می‌شود:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta x_i)^2 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - \beta x_i) = 0 \rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

مثال۵: در مدل رگرسیون $Y_i = b_0 + b_1 X_i + e_i$ اگر $X_1 = 0$ و $X_2 = -1$ باشد کدام گزینه صحیح است؟

۱) $SSE = Y_1 + Y_2$

۲) $SSE = 5Y_1$

۳) $Var(\hat{b}_1) = 2\sigma^2$

۴) $Var(\hat{b}_1) = \sigma^2 Y_1 Y_2$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این واریانس شیب خط به صورت زیر تعریف می‌شود و همچنین مقدار S_{xx} به صورت زیر است:

$$Var(\hat{b}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \Rightarrow S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \bar{X} = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_{xx} = (0 + \frac{1}{2})^2 + (-1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Var(\hat{b}_1) = 2\sigma^2$$

مثال۶: جدول آنالیز واریانس زیر برای آزمون $\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$ می‌باشد مقدار آماره F کدام است؟

منبع	S.S	d.f	M.S
رگرسیون روی X	۴/۶۹		
خطای پیش‌بینی			
کل	۷/۵۳	۴	

$F = ?$

۱) ۳/۲۲

۲) ۴/۴۵

۳) ۵/۰۱

۴) ۵/۵۳

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه $F = \dfrac{\frac{SS_R}{1}}{\frac{SS_E}{n-2}}$ باید مقادیر مورد نیاز را به دست آوریم. ابتدا مقدار SS_E را به دست می‌آوریم:

$$SS_E = SS_T - SS_R = 7/53 - 4/69 = 2/84 \quad , \quad n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow n - 2 = 5 - 2 = 3$$

$$F = \frac{\frac{SS_R}{1}}{\frac{SS_E}{n-2}} = \frac{\frac{4/69}{1}}{\frac{2/84}{3}} = 5/53$$

مثال۷: فرض کنید مجموعه داده‌های زیر را در اختیار داریم. چنانچه مدل مناسب برای این داده‌ها به صورت زیر باشد:

$y = \beta_0 + \beta_1(\frac{1}{x}) + e$ برآورد ضرایب β_0 و β_1 کدام است؟

X	۱	۲	۳	۴
Y	۱۰	۵	۲/۵	۲

۱) $b_0 = 0/4$ و $b_1 = 0/7$

۲) $b_0 = 0/7$ و $b_1 = 0/4$

۳) $b_0 = 0$ و $b_1 = 1$

۴) $b_0 = 1$ و $b_1 = 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا با توجه به جدول گفته شده در بالا $X'=\frac{1}{X}$ بنابراین

X	۱	۲	۳	۴
X'	۱	۰/۵	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$
Y	۱۰	۵	۲/۵	۲

با توجه به روابط $\hat{\beta}_۰$ و $\hat{\beta}_۱$ داریم:

$$\begin{cases} S_{X'Y}=\sum X'_i y_i - n\bar{X}'\bar{y} \\ S_{X'X'}=\sum X'^{۲}_i - n\bar{X}' \end{cases} \quad \hat{\beta}_۰=\bar{Y}-\hat{\beta}_۱\bar{x}=۰/۴ \quad , \quad \hat{\beta}_۱=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=۰/۷$$

مثال۸: با توجه به اطلاعات به دست از جامعه‌ای نرمال که به صورت زیر می‌باشند.

x_i	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۲۰
y_i	۷	۶	۸	۹	۱۰	۱۲

ضریب همبستگی بین x و y کدام است؟ آیا در سطح $\alpha=۰/۰۵$ فرضیه‌ی $\rho=۰$ معنی‌دار است؟

۱) ۰/۹۴ و رد می‌شود. ۲) ۰/۵۸ و رد می‌شود. ۳) ۰/۹۹ و رد نمی‌شود. ۴) ۰/۹۴ و رد نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق رابطه گفته شده در بالا ابتدا ضریب همبستگی خطی را محاسبه می‌کنیم:

$$R=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}=\frac{۳۵}{\sqrt{۵۹/۵\times ۲۳/۳}}=۰/۹۴$$

آماره‌ی آزمون مناسب را تشکیل داده و با مقدار جدول مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} H_۰:\rho=۰ \\ H_۱:\rho\neq ۰ \end{cases} \quad \Rightarrow t=\frac{r\sqrt{n-۲}}{\sqrt{۱-r^۲}}=\frac{۰/۹۴\sqrt{۶-۲}}{\sqrt{۱-۰/۸۹}}=۵/۶۶$$

$t_{۴,۰/۰۲۵}=۲/۷۸ \Rightarrow ۵/۶۶>۲/۷۸ \Rightarrow$ فرضیه $H_۰$ رد می‌شود.

آزمون فصل نهم

۱ـ اگر $SS_x = ۲۰۰$ و $S_{xy} = ۳۰۰$ و $\bar{X} = ۲, \bar{y} = ۳$ معادله خط رگرسیون کدام است؟

۱) $y = \frac{۳}{۲}x + ۲$ ۲) $y = \frac{۳}{۲}x$ ۳) $y = \frac{۲}{۳}x$ ۴) $y = \frac{۳}{۲}x + ۲$

۲ـ اطلاعات زیر در مورد درآمد (x) و اجاره مسکن (y) در بین ۵ خانوار شهری محاسبه شده است.

$$\sum x = ۳۴, \sum y = ۱۴, \sum x^۲ = ۲۵۴, \sum y^۲ = ۵۰, \sum xy = ۱۱۰$$

معادله خط رگرسیون بین اجاره مسکن y و درآمد x کدام است؟

۱) $y = -۱/۶۱ + ۰/۷۵x$ ۲) $y = -۱/۶۱ - ۰/۷۵x$ ۳) $y = -۱/۶۱ + ۰/۶۵x$ ۴) $y = -۱/۶۱ - ۰/۶۵x$

۳ـ اطلاعات زیر به دست آمده است $\sum x_i^۲ = ۵۵۰$ ، $\bar{x} = ۵, \bar{y} = ۱۰, n = ۲۰$ و $\Sigma xy = ۱۱۵۰$ مقدار پیش‌بینی شده y به ازای $x = ۶$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۴ـ اگر $SS_x = ۹$ ، $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = ۳, SS_y = ۴$ باشد ضریب همبستگی بین y, x کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵ـ اگر معادله خط رگرسیون به صورت $y = ۴x - ۱$ باشد و $SS_y = ۱۶, SS_{xy} = ۴$ باشد، ضریب همبستگی بین آن‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۴

۶ـ فرض کنید $y = ax + b$ خط رگرسیون y نسبت به x باشد دراین صورت:

۱) $y - \bar{y} = \frac{۱}{r}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x - \bar{x})$ ۲) $y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ ۳) $y - \bar{y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x - \bar{x})$ ۴) $y - \bar{y} = \frac{۱}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

۷ـ ضریب همبستگی بین y, x مساوی ۸۰% است. چند درصد از تغییرات y تحت تأثیر x نیست؟

۱) ۶۴% ۲) ۴۹% ۳) ۳۶% ۴) ۵۱%

۸ـ اگر $cov(x,y) = ۱۲$ ، $\sigma_x = ۴$ ، $\sigma_y = ۳$ ، $n = ۱۰$ باشد ضریب همبستگی و $\hat{\beta}$ عبارتند از:

۱) ۰/۷۵,۱ ۲) ۱,۱/۲۵ ۳) ۲/۵,۰/۷۵ ۴) $\frac{۱}{۲}$,۱

۹ـ با اطلاعات به دست آمده $\sum x_i y_i = ۱۸۰$ ، $\sum y_i^۲ = ۲۱۰$ ، $\sum y_i = ۴۰$ ، $\sum x_i^۲ = ۳۰۰$ ، $\sum x_i = ۵۰$ برای نمونه‌ای به حجم $n = ۱۰$ مقدار $r^۲$ کدام است؟

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۲۷ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۳۶

۱۰ـ در مدل ساده رگرسیون خطی $var(e_i)$ ها عبارت است از:

۱) $\sigma^۲$ ۲) $۲\sigma^۲$ ۳) $\frac{\sigma^۲}{n}$ ۴) $(n-۲)\sigma^۲$

۱۱ـ در مدل رگرسیون ساده خطی $E(\hat{\beta})$ کدام است؟

۱) $\frac{\alpha + ۲}{۲}$ ۲) $\beta - ۱$ ۳) α ۴) β

۱۲ـ اگر $\begin{cases} H_0 : \alpha = -۱ \\ H_1 : \alpha = \pm۱ \end{cases}$ ، $t_{۰/۹۹۵}(۱۰) = ۳/۱۷, \hat{\alpha} = -۰/۹۴۸$ باشد همچنین $n = ۱۲$ و $S_{xx} = ۸۵۴/۹۱۷$ و $\sum x_i^۲ = ۲۴۵۲۹$ و $S_e^۲ = ۱/۲۱۳$ باشد آماره T کدام است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۰۳

۱۳ـ اگر $\sum x_i y_i = ۲۶۴$, $\sum y_i^۲ = ۸۴۸$, $\sum x_i^۲ = ۲۶۱$, $\sum x_i = ۴۷$ و $n = ۹$ یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برابر α عبارت است از:

۱) $(۱/۳۶۵, ۹/۰۹)$ ۲) $(۲/۲۵, ۵/۰۶۵)$ ۳) $(۰, ۱۷/۲۵)$ ۴) $(-۲/۰۱۷, ۲/۰۲۷)$

۱۴ـ در سؤال قبل آیا می‌توان ادعا کرد که $\beta < ۲$ است؟

$(t_{\text{جدول}} = -۱/۹)$

$\alpha = ۰/۰۵$

۱) بلی ۲) خیر ۳) در پاره‌ای از مواقع ۴) نمی‌توان قضاوت کرد

۱۵ـ همواره $\sum x_i e_i$ برابر است با:

۱) صفر ۲) یک ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶ـ برای مشخص کردن یک رابطه رگرسیون بین y, x بایدابتدا:

۱) β, α معلوم شوند.

۲) فروض رگرسیون برقرار باشند.

۳) واریانس خطا مشخص گردد.

۴) توزیع خطاها مشخص گردد.

۱۷ـ اگر معادلات خط رگرسیون خطی y بر حسب x و x برحسب y به صورت $\hat{y} = \hat{\alpha}_۱ + \hat{\beta}_۱ x$, $\hat{x} = \hat{\alpha}_۲ + \hat{\beta}_۲ y$ باشند.دراین صورت:

۱) $r^۲ = \hat{\alpha}_۱ . \hat{\alpha}_۲$ ۲) $r^۲ = \hat{\beta}_۱ . \hat{\beta}_۲$ ۳) $r^۲ = S_x . S_y$ ۴) هیچکدام

۱۸ـ آماره $w = \frac{۱}{۲} Ln \frac{۱+R}{۱-R}$ دارای ..... می‌باشد.

۱)توزیع نرمال با واریانس تقریبی $\frac{۱}{n-۲}$

۲) توزیع $\chi^۲$ با درجه آزادی $n-۲$

۳) توزیع نرمال با واریانس تقریبی $\frac{۱}{n-۳}$

۴) توزیع t به درجه آزادی $n+۲$

۱۹ـ به منظور ارزیابی ضریب همبستگی بین دو متغیر تصادفی y, x براساس یک نمونه ۲۵ تایی اطلاعات زیر حاصل گردیده است. براساس این اطلاعات مقدار برآورد نقطه‌ای ضریب همبستگی کدام است؟

$$\sum_{i=۱}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = ۱۰۲ \qquad \sum_{i=۱}^{n} (y_i - \bar{y})^۲ = ۱۶۰ \qquad \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \bar{x})^۲ = ۹۰$$

۱) $۰/۷۰۸$ ۲) $۰/۸۵$ ۳) $۰/۴۸۹$ ۴) $۰/۹۱$

۲۰ـ فرض کنید براساس یک نمونه ۵۰ تایی مدل رگرسیون زیر حاصل شده است. کدام گزینه در مورد ضریب همبستگی صحیح است؟

$\hat{y} = ۴/۱ - ۴/۷۲x$

۱) ضریب همبستگی خطی در این مورد مثبت است.

۲) ضریب همبستگی خطی صفر است.

۳) ضریب همبستگی خطی برابر $\frac{-۴/۷۳}{۵۰}$ است.

۴) ضریب همبستگی قطعاً مثبت نخواهد بود.

۲۱ـ در رگرسیون خطی یک متغیره آزمون فرض، برابر بودن ضریب همبستگی خطی y, x با صفر در نظر می‌باشد حال این آزمون معادل کدام آزمون فرض زیر است؟

۱) $\begin{cases} H_۰ : \alpha = ۰ \\ H_۱ : \alpha \neq ۰ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} H_۰ : e_{ij} = ۰ \\ H_۱ : e_{ij} \neq ۰ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} H_۰ : \beta = ۰ \\ H_۱ : \beta \neq ۰ \end{cases}$ ۴) گزینه‌ی ۱ و ۳

۲۲ـ فرض کنید که قصد داریم یک رابطه خطی برای y برحسب x برازش کنیم. x متغیر تصادفی است کـه حـول نقطـه صـفر متقـارن اسـت و در فاصله $(-۱, ۱)$ توزیع شده است. شما انتظار دارید براساس یک نمونه ۵۰ تایی واریانس عرض از مبدأ و شیب چه ارتباطی با هم داشته باشند؟

۱) هیچ اظهارنظری نمی‌توان کرد.

۲) واریانس عرض از مبدأ و واریانس شیب با هم برابر می‌باشند.

۳) انتظار داریم واریانس شیب بیشتر از واریانس عرض از مبدأ باشد.

۴) انتظار داریم واریانس عرض از مبدأ بیشتر از واریانس شیب باشد.

۲۳ـ در روش کم‌ترین مربعات، برآورد ضریب رگرسیون طوری صورت می‌گیرد که کدام‌یک از کمیت‌های زیر حداقل گردد؟

۱) Σb^2 ۲) $\Sigma \hat{y}_i^2$ ۳) $\Sigma_i (y_i-\hat{y}_i)^2$ ۴) $\Sigma(y_i-\bar{y})^2$

۲۴ـ با فرض $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ و ε_iها مستقل، در رگرسیون خطی ساده $y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i$ واریانس $\hat{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{SS_x}{\sigma^2}$ ۲) $\frac{SS_x}{\sigma}$ ۳) $\frac{\sigma^2}{SS_x}$ ۴) $\sigma^2 SS_x^2$

۲۵ـ اگر ρ ضریب همبستگی جامعه و r ضریب همبستگی نمونه باشد، آن‌گاه برای آزمون فرض همبستگی جامعه $\begin{cases} H_0: \rho=0 \\ H_1: \rho\neq 0\end{cases}$ آماره آزمون مناسب کدام است؟

۱) $\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ ۲) $\frac{r}{n-2}$ ۳) $\frac{r\sqrt{n-1}}{1-r^2}$ ۴) $\frac{r(n-2)}{1-r}$

۲۶ـ اگر $\Sigma x_i^2=550$ و $n=20$ و $\bar{y}=10$ و $\bar{x}=5$ و $\Sigma xy=1150$ پیش‌بینی مقدار y به ازای $x=6$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۷ـ اگر $\Sigma(y_i-\bar{y})^2=25$ و $\Sigma(x_i-\bar{x})^2=16$ و $r_{xy}=0/4$ و $n=3$ آن‌گاه SSE کدام است

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۲۸ـ در رگرسیون خطی ساده به کمک ۴ نمونه زوج مشاهده (x_i, y_i) پارامترهای شیب و عرض از مبدأ برآورد شده‌اند و مقدار ۴/۶۱ را برای برآورد واریانس حول خط به دست آورده‌ایم. در این صورت یک فاصله اطمینان یک طرفه ۹۹% از سمت پایین برای σ^2 عبارتند از:

۱) $[2/412,+\infty)$ ۲) $[0,4/64]$
۳) $[1,+\infty)$ ۴) بدون جدول قابل محاسبه نیست.

۲۹ـ در مدل رگرسیون $y_i=\beta x_i+\varepsilon_i$ با فرض این‌که ε_iها دارای توزیع نرمال استاندارد باشند برآوردکننده به روش حداقل مربعات β کدام است؟

۱) $e^{-n\bar{x}-n\bar{y}}$ ۲) $\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$ ۳) $\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}$ ۴) $\frac{\sum x_i}{\sum y_i}$

۳۰ـ برای نقاط $(4,2),(3,1),(1,5)$ مقدار $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ کدام‌اند؟

۱) $-\frac{8}{7},\frac{40}{7}$ ۲) $\frac{8}{7},\frac{40}{7}$ ۳) $-\frac{8}{7},-\frac{40}{7}$ ۴) $\frac{3}{7},\frac{8}{7}$

۳۱ـ فرض کنید در یک نمونه ده‌تایی مقدار $r=0/96$ در این صورت مقدار آماره آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن ضریب همبستگی کدام است؟

۱) ۹/۶۹ ۲) ۱/۵۶ ۳) ۱۱/۵ ۴) ۱۲

۳۲ـ فرض کنید x و y دارای توزیع توأم به صورت زیر باشد. حال بهترین معادله رگرسیون (بهترین تابع پیش‌بینی‌کننده) y برحسب x کدام است؟

$f(x,y)=xe^{-x(1+y)}$ $x>0\ y>0$

۱) $\mu_{(y|x)}=\frac{1}{1+x}$ ۲) $\mu_{(y|x)}=x$ ۳) $\mu_{(y|x)}=\frac{1}{x}$ ۴) $\mu_{(y|x)}=xe^{-xy}$

۳۳ـ مقدار $E(\hat{\alpha})$ برابر است با:

۱) α ۲) $\alpha-1$ ۳) $\alpha+1$ ۴) 2α

۳۴ـ در رگرسیون ساده خطی $E(e_i)$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۵ـ در رگرسیون ساده خطی ابتدا باید:

۱) فرض‌ها بررسی شود. ۲) شیب خط را به دست آوریم. ۳) عرض از مبدأ را به دست آوریم. ۴) توزیع خطاها را مشخص کنیم.

فصل دهم

«آمار توصیفی»

تست‌های تألیفی فصل دهم

مثال ۱: معدل یک دانشجو در ده درس برابر با ۱۵/۲۵ می‌باشد اگر نمره درس یازدهم او ۱۷/۵ باشد معدل جدید او چقدر است؟

۱) ۱۴/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۱۵/۴۵ ۴) ۱۵/۷۵

پاسخ: گزینه «۳» معدل دانشجو در ده درس ۱۵/۲۵ می‌باشد بنابراین جمع نمرات او برابر است با:

$$\sum x_i = N\mu_x = ۱۰ \times ۱۵/۲۵ = ۱۵۲/۵$$

$$\Rightarrow \text{جمع نمرات جدید} = \underbrace{۱۵۲/۵}_{\text{جمع نمرات قبلی}} + \underbrace{۱۷/۵}_{\text{نمره درس}} = ۱۷۰ \Rightarrow \text{معدل جدید} = \frac{\text{مجموعه نمرات}}{\text{تعداد درس‌ها}} = \frac{۱۷۰}{۱۱} = ۱۵/۴۵$$

مثال ۲: با تغییر مدیریت در یک فروشگاه، فروش در سال اول، برابر سال قبل، در سال دوم دو برابر سال اول و در سال سوم، ۴ برابر سال دوم شده است. به طور متوسط فروش چند برابر شده است؟

۱) بیش از ۳ برابر ۲) سه برابر ۳) کمتر از ۳ برابر ۴) ۲/۵ برابر

پاسخ: گزینه «۳» اگر فروش در سال اول P_1 و در سال دوم P_2 و در سال n ام، P_n باشد فروش در هر سال نسبت به سال قبل به‌طور متوسط به صورت مقابل می‌باشد. قیمت در سال nام به صورت $P_n = P_0(1+r)^n$ محاسبه می‌شود که با جایگذاری $P_n = P_3$ و $P_0 = P_0$ و $n = ۳$ خواهیم داشت.

$$p_1 = p_0$$
$$p_2 = ۲p_1$$
$$p_3 = ۴p_2 = ۴(۲p_1) = ۸p_1 = ۸(p_0) = ۸p_0$$

$$\Rightarrow G = \sqrt[۳]{\frac{p_1}{p_0} \times \frac{p_2}{p_1} \times \frac{p_3}{p_1}} = \sqrt[۳]{\frac{p_3}{p_0}} = \sqrt{\frac{۸p_0}{p_0}} = \sqrt[۳]{۸} < ۳ \rightarrow ۲ < ۳$$

مثال ۳: در جدول زیر مقدار میانه برابر است با:

حدود	۱-۵	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷
F_i	۵	۱۰	۳	۲

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه «۲» مراحل گفته شده در بالا را به‌ترتیب اجرا می‌کنیم. ابتدا مقدار $\frac{N}{۲} = \frac{\sum F_i}{۲} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$ را به‌دست می‌آوریم فراوانی‌های تجمعی این جدول به‌صورت زیر می‌باشند:

حدود	۱-۵	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷
F_i	۵	۱۰	۳	۲
FC_i	۵	۱۵	۱۸	۲۰

طبقه دوم اولین طبقه‌ای است که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی ۱۰ می‌باشد بنابراین میانه در طبقه دوم قرار دارد و مقدار میانه برابر است با:

$$\begin{cases} L = ۵ \\ n = ۲۰ \\ FC_{i-1} = ۵ \\ F_i = ۱۰ \\ I = ۴ \end{cases} \Rightarrow Md = L + \left(\frac{\frac{N}{۲} - FC_{i-1}}{F_i}\right).I = ۵ + \left(\frac{۱۰-۵}{۱۰}\right) \times ۴ = ۵ + \frac{۵}{۱۰} \times ۴ = ۵ + \frac{۲۰}{۱۰} = ۵ + ۲ = ۷$$

مثال ۴: اگر $x_1, x_2, \cdots, x_{20}$ دارای میانه‌ای برابر با ۵ باشد و قرار دهیم $U_i = \frac{x_i - ۱۵}{۵}$ میانه U_i ها برابر است با: $i = ۱, ۲, \cdots, ۲۰$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از داده‌ها هر عددی کم شود و بر آن‌ها تقسیم شود برای میانه نیز همین اتفاق خواهد افتاد. پس در اینجا میانه نیز از ۱۵ کم شده و بر ۵ تقسیم می‌شود بنابراین، مقدار میانه‌ی U ها برابر است با:

$$Me(U_i)=\frac{۵-۱۵}{۵}=-۲$$

مثال ۵: در داده‌های ۲,۵,۷,۹,۱۰,۷ مقدار مد کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۷   ۳) ۵   ۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عدد ۷ دوبار تکرار شده است و بقیه داده‌ها یک‌بار بنابراین عدد ۷ مُد است.

مثال ۶: در جدول روبرو مد کدام است؟

x_i	۲	۵	۷	۱۰
F_i	۳۰	۱۰	۲۰	۲۵

۱) ۱۰   ۲) ۲   ۳) ۳۰   ۴) ۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عدد ۲ نسبت به سایر داده‌ها تکرار بیشتری دارد بنابراین این عدد مُد است.

مثال ۷: در یک توزیع متمایل به راست، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\mu_x<Md<Mo$ ۲) $\mu_x<Mo<Md$ ۳) $Mo<Md<\mu_x$ ۴) $Md<Mo<\mu_x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در توزیع‌های چوله به راست میانگین بزرگتر است.

مثال ۸: اگر $S_u^۲=۱, T=۲-۴u$ آنگاه مقدار $S_T^۲$ کدام است؟

$$\sigma(ax\pm b)=|a|\sigma_x$$

۱) ۴   ۲) ۸   ۳) ۱۶   ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق خاصیت (۲) جمع و تفریق عددی ثابت اثری در واریانس ندارد. $var(T)=var(۲-۴u)=(-۴)^۲.var(u)=۱۶\times۱=۱۶$

مثال ۹: حقوق پرداختی به کارمندان شرکت آلفا به طور متوسط ۱۵ هزار تومان با انحراف معیار ۳ هزار تومان است. اگر ۲۰% میانگین به حقوق کارمندان اضافه شود، به ترتیب میانگین و انحراف معیار حقوق پرداختی چقدر خواهد شد؟

۱) ۱۵/۳، ۳   ۲) ۱۵/۳، ۳/۶   ۳) ۱۸، ۳   ۴) ۱۸، ۳/۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این‌که ۲۰% میانگین به حقوق قدیم اضافه شده است، بنابراین داده‌ها به صورت جدید تبدیل می‌شوند، یعنی:

$\mu_x=۱۵$, $\sigma_x=۳$

y_i: حقوق جدید

x_i: حقوق

$$y_i=x_i+۰/۲\mu_x=x_i+۰/۲\times۱۵=x+۳$$

$$\mu(y_i)=\mu_x+۳=۱۵+۳=۱۸ \quad ; \quad \sigma(y_i)=\sigma(x+۳)=\sigma_x=۳$$

مثال ۱۰: اگر به مقدار متغیر X (با انحراف معیار ۱) عددی مانند a اضافه کنیم و آن را در عددی مانند $\frac{c}{b}$ ضرب کنیم، انحراف معیار آن برابر خواهد شد با:

۱) $a+\frac{c}{b}$ ۲) $a+\frac{c^۲}{b^۲}$ ۳) $|\frac{c}{b}|$ ۴) $a^۲+\frac{c}{d}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بنا به خواص انحراف معیار توجه کنید که ضرب و تقسیم در انحراف معیار اثرگذارند ولی جمع و تفریق تأثیری ندارند:

$$y=(x+a)\frac{c}{b}\Rightarrow\sigma_y=|\frac{c}{b}|\sigma_x\xrightarrow{\sigma_x=۱}\sigma_y=|\frac{c}{b}|$$

مثال۱۱: در نتایج امتحان آمار و احتمالات استاد این درس در زیر نمرات دانشجویان معیارهای مرکزی و پراکندگی را محاسبه کرده و به صورت بسیار خاص آن‌ها را نوشته است هدف او چیست؟

۱) نمرات بسیار پایین است. ۲) نمرات بسیار عالی است. ۳) پراکندگی نمرات متعادل است. ۴) هدف خاصی را دنبال نمی‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» استاد این درس با محاسبه معیارها به ما نشان می‌دهد که امتحان متعادل بوده و پراکندگی نمـرات بسـیار عادلانـه اسـت. در واقـع مقادیر میانگین و میانه و مد بسیار به یکدیگر نزدیک هستند.

مثال۱۲: در جدول روبرو کدام معیار برای اندازه‌گیری مناسب است؟

حدود	<۵	$۵-۸$	$۸-۱۱$	$۱۱-۱۴$	≥ ۱۴
F_i	۲	۱۰	۵	۷	۱۵

۱) انحراف چارکی ۲) میانگین ۳) واریانس ۴) میانگین قدرمطلق انحرافات

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در اینجا توزیع داده‌ها در دنباله‌های خود باز می‌باشد.

مثال۱۳: اگر $\sum F_i x_i = ۱۲۰۰ , \sum F_i (x_i - \mu)^۲ = ۳۶ , N = ۱۰۰$ باشند، ضریب تغییرات کدام است؟

۱) ٪۵ ۲) ٪۲ ۳) ٪۴ ۴) ٪۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» میانگین و واریانس (انحراف معیار) را به‌دست آورده در رابطه ضریب تغییرات قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{\sum F_i x_i}{N} = \dfrac{۱۲۰۰}{۱۰۰} = ۱۲ \\ \sigma^۲ = \dfrac{\sum F_i (x_i - \mu)^۲}{N} = \dfrac{۳۶}{۱۰۰} = ۰/۳۶ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۰/۳۶} = ۰/۶ \end{cases} \Rightarrow C.V = \dfrac{\sigma}{\mu} = \dfrac{۰/۶}{۱۲} = ۰/۰۵$$

مثال۱۴: قطر یک کالا را با دقت یک رقم اعشار اندازه‌گیری می‌کنیم نمودار ساقه و برگ آن به صورت زیر است میانه و دامنه تغییرات داده‌ها کدام است؟

۱) ۲۲/۰۳ و ۶/۵ ۲) ۲۲ و ۶/۵ ۳) ۲۲/۲۵ و ۶/۱ ۴) ۲۲/۵ و ۶/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قطر این کالاها به صورت زیر می‌باشند. دقت کنید برگ‌ها اعشارها می‌باشند.

۱۹	۰	۱			
۲۰	۰	۹	۰	۲	
۲۱	۱	۰	۳	۴	
۲۲	۵	۰	۱	۶	۷
۲۳	۲	۱	۰	۱	
۲۴	۴	۰	۰	۰	
۲۵	۵				

۲۱/۴ و ۲۱/۳ و ۲۱ و ۲۱/۱ و ۲۰/۲ و ۲۰ و ۲۰/۹ و ۲۰ و ۱۹/۱ و ۱۹

و ۲۳/۱ و ۲۳ و ۲۳/۱ و ۲۳/۲ و ۲۲/۷ و ۲۲/۶ و ۲۲/۱ و ۲۲ و ۲۲/۵ و

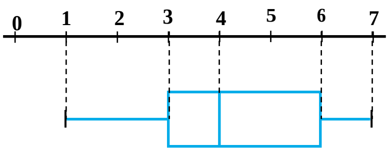
۲۵/۵ و ۲۴ و ۲۴ و ۲۴ و ۲۴/۴

$R = \max - \min = ۲۵/۵ - ۱۹ = ۶/۵$

تعداد داده‌ها $N = ۲۴$ می‌باشد که عددی زوج است بنابراین، میانه میانگین دو عدد وسط است.

$$Me = \dfrac{x_{۱۲} + x_{۱۳}}{۲} = \dfrac{۲۲/۱ + ۲۲/۵}{۲} = ۲۲/۰۳$$

مثال۱۵: در نمودار جعبه‌ای زیر ضریب چولگی چقدر است؟



۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۳۳

۳) ۰/۴۸

۴) ۰/۷۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل به ترتیب چارک اول و دوم و سوم برابر با ۳و ۴ و ۶ می‌باشند. بنابراین ضریب چولگی چارکی برابر است با:

$$\begin{cases} Q_۱ = ۳ \\ Q_۳ = ۶ \\ Q_۲ = me = ۴ \end{cases} \Rightarrow SK_Q = \dfrac{Q_۳ - ۲Q_۲ + Q_۱}{Q_۳ - Q_۱} = \dfrac{۶ - ۲ \times (۴) + ۳}{۶ - ۳} = \dfrac{۱}{۳} = ۰/۳۳$$

آزمون فصل دهم

۱ـ کدام یک پارامتر مرکزی محسوب نمی‌شود؟

۱) میانگین ۲) میانه ۳) مد یا نما ۴) واریانس

۲ـ برای یک توزیع خفیف چوله، میانه برابر ۴۰ و نما برابر ۳۰ می‌باشد، میانگین کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۸ ۳) ۲۷ ۴) ۴۵

۳ـ در کدام توزیع، میانه کوچکتر از نما است؟

۱) متقارن ۲) چولگی مثبت ۳) چولگی منفی ۴) هیچ‌کدام

۴ـ متوسط رشد قیمت کالایی در چهار سال متوالی به صورت زیر به دست آمده است:

۲/۸ و ۲/۷ و ۲/۱۵ و ۲/۱ میانگین رشد قیمت سالانه کدام است؟

۱) ۲/۷۱۷ ۲) ۲/۴۳۷ ۳) ۲/۴۱۷ ۴) ۲/۱۵

۵ـ هواپیمایی یک فاصله ۸۰۰ کیلومتری را می‌پیماید. اگر این هواپیما ثلث اول و سوم را با سرعت ۲۵۰ کیلومتر و ثلث دوم فاصله را با سرعت ۳۰۰ کیلومتر در ساعت طی کند متوسط سرعت این هواپیما چقدر است؟

۱) ۲۷۰/۱۲ ۲) ۲۶۴/۷۱ ۳) ۳۵۲/۱ ۴) ۴۲۰/۸۷

۶ـ اگر در آزمون آمار اکثریت دانش‌آموزان نمره خوب و قابل قبولی کسب کرده‌اند شکل توزیع نمرات چگونه خواهد بود؟

۱) نرمال ۲) دو نمایی ۳) دارای چولگی منفی ۴) دارای چولگی مثبت

۷ـ با استفاده از جدول توزیع فراوانی زیر مقدار میانه چیست؟

حدود	[۰,۱۵)	[۱۵,۳۰)	[۳۰,۴۵)	[۴۵,۶۰)	[۶۰,۷۵)
فراوانی	۱۵	۱۳	۸	۲	۲

۱) ۱۸/۵ ۲) ۲۸/۷۷ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۰/۷۷

۸ـ در جدول زیر چارک اول کدام است؟

C−L	۵۰−۵۹	۶۰−۶۹	۷۰−۷۹	۸۰−۸۹	۹۰−۹۹	۱۰۰−۱۰۹	۱۱۰−۱۱۹
f_i	۳	۱۰	۱۴	۶۰	۱	۱۰	۲

۱) ۸۷/۰۸ ۲) ۸۸/۰۷ ۳) ۷۸/۵۷ ۴) ۷۷/۰۸

۹ـ برای داده‌های ۱۴و ۱۲و ۱۰ و ۹و ۸ و ۶و ۵ و ۴، صدک بیستم کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵/۲ ۳) ۴/۸ ۴) صفر

۱۰ـ چند درصد داده‌ها بین $(\mu-3\sigma , \mu+3\sigma)$ قرار دارند (توزیع داده‌ها دارای چولگی کم است)؟

۱) ٪۶۸ ۲) ٪۹۵ ۳) ٪۹۹ ۴) ٪۱۷

۱۱ـ در داده‌های ۱۲ و ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ که به ترتیب غیرنزولی مرتب شده‌اند $Q_{0/6}$ کدام است؟

۱) ۵/۴ ۲) ۵/۲ ۳) ۷/۸ ۴) ۸/۵

۱۲ـ براساس یک نمونه ۵۰ تایی اطلاعات زیر حاصل شده است میانه داده‌های زیر کدام است؟

طبقات	۱−۴	۵−۸	۹−۱۲	۱۳−۱۶	۱۷−۲۰	۲۱−۲۴
فراوانی	۴	۶	۱۲	۱۵	۱۰	۳

۱) ۱۳/۳ ۲) ۱۴/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۳ـ براساس یک نمونه n از یک توزیع که دارای چولگی خفیف می‌باشد. میانگین $\bar{X} = ۱۷/۴۶$ و میانه $me = ۱۹/۰۴$ و $m_{\circ} = ۲۱$ حاصل شده است حال کدام گزینه صحیح است؟

۱) توزیع دارای چولگی منفی است.

۲) توزیع دارای چولگی مثبت است.

۳) توزیع دارای شکل متقارن است.

۴) توزیع دارای چولگی است ولی مثبت یا منفی آن را نمی‌توان با این اطلاعات معین کرد.

۱۴ـ فرض کنید مقادیر زیر در یک نمونه ۱۰ تایی مشاهده شده است مقدار چارک سوم این داده‌ها کدام است؟

۴ ۳ ۱ ۳ ۱ ۲ ۴ ۳ ۵ ۶

۱) ۴/۷۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۲۵ ۴) ۴

۱۵ـ فرض می‌کنیم داده‌های دسته‌بندی شده براساس یک نمونه ۵۰ تایی حاصل شده است. میانه داده‌های زیر کدام است؟

طبقات	۴-۷	۸-۱۱	۱۲-۱۵	۱۶-۱۹	۲۰-۲۳
فراوانی	۲	۸	۱۴	۲۰	۶

۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۵/۵ ۳) ۱۵/۷ ۴) ۱۳

۱۶ـ اگر میانگین داده‌های ... و $۲x_۲ - ۳$ و $۲x_۱ - ۳$ برابر با ۲۹ باشد حاصل $\sum x_i$ کدام است؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۱۷ـ وزن ۱۰ به صورت روبرو است دامنه تغییرات کدام است؟ ۸۱ و ۸۲ و ۷۹ و ۷۴ و ۷۲ و ۶۵ و ۷۱ و ۶۰

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۱۸ـ حاصل $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹ـ حاصل $\sum_{i=1}^{n} |x_i - m|$ همواره:

۱) حداقل است. ۲) حداکثر است. ۳) صفر است. ۴) هیچ‌کدام

۲۰ـ در توزیع‌های متقارن ضریب کشیدگی برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: آنالیز ترکیبی

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۱»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۴»
۳۱ـ گزینه «۳»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۳»	۳۴ـ گزینه «۴»	۳۵ـ گزینه «۳»

فصل دوم: اصول احتمال و احتمال شرطی

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۱»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۳»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۱»
۳۱ـ گزینه «۲»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۲»	۳۴ـ گزینه «۲»	۳۵ـ گزینه «۲»
۳۶ـ گزینه «۱»	۳۷ـ گزینه «۱»	۳۸ـ گزینه «۴»	۳۹ـ گزینه «۱»	۴۰ـ گزینه «۳»

فصل سوم: متغیرهای تصادفی

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۴»

فصل چهارم: امید ریاضی و واریانس

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۴»	۱۶ـ گزینه «۲»
۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۳»	۲۱ـ گزینه «۳»
۲۲ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۴»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۴»
۲۶ـ گزینه «۴»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۴»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۴»	۳۴ـ گزینه «۲»	۳۵ـ گزینه «۳»
۳۶ـ گزینه «۱»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۳»	۳۹ـ گزینه «۴»	۴۰ـ گزینه «۳»
۴۱ـ گزینه «۱»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۱»	۴۴ـ گزینه «۱»	۴۵ـ گزینه «۱»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۲»	۴۸ـ گزینه «۱»	۴۹ـ گزینه «۴»	۵۰ـ گزینه «۴»

فصل پنجم: توزیع‌های آماری خاص

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۴»	۲۷ـ گزینه «۴»	۲۸ـ گزینه «۲»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۲»

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»

۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۲»

فصل ششم : توزیع‌های نمونه‌ای

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۱»

فصل هفتم: نظریه برآورد

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل هشتم: آزمون فرض‌ها

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۴»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۱»
۳۱ـ گزینه «۴»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۳»
۳۶ـ گزینه «۱»	۳۷ـ گزینه «۲»	۳۸ـ گزینه «۲»	۳۹ـ گزینه «۱»	۴۰ـ گزینه «۲»
۴۱ـ گزینه «۱»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۴»	۴۴ـ گزینه «۲»	۴۵ـ گزینه «۳»
۴۶ـ گزینه «۱»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۳»	۴۹ـ گزینه «۱»	۵۰ـ گزینه «۲»
۵۱ـ گزینه «۱»	۵۲ـ گزینه «۲»	**۵۳ـ گزینه «۴»**	۵۴ـ گزینه «۴»	۵۵ـ گزینه «۴»

فصل نهم: رگرسیون و همبستگی

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۴»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۲»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۱»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۱»

فصل دهم: آمار توصیفی

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۴»