مدرسان شریف

فصل اول

« مشتق‌گیری »

در پیشگفتار گفتیم که مشتق یکی از مفاهیم بنیادین در حساب دیفرانسیل و انتگرال است. همان‌طور که می‌دانید مسأله تعیین سرعت لحظه‌ای یک جسم متحرک در فیزیک و مسأله‌ی تعیین خط مماس بر یک خم در هندسه هر دو به مفهوم مشتق منجر می‌شوند. در این فصل ما از دیدگاهی کاملاً تحلیلی به مطالعه‌ی مشتق و خواص آن می‌پردازیم و برای این کار توجه خود را به توابعی معطوف می‌کنیم که بر بازه‌ها یا قطعه‌هایی از خط حقیقی تعریف شده‌اند، دقت شود که وقتی دامنه توابع مجموعه‌های دیگری مثل $\mathbb{R}^n$، n عددی طبیعی و بزرگتر از یک، یا اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یا یک منفلید (منفلید به طور شهودی یعنی یک $\mathbb{R}^n$ خمیده و پر چین و چروک مانند رویه‌های هموار) باشد تفاوت‌های چشمگیری در نظریه‌ی مشتق‌گیری حاصل می‌شود که در درس‌های دیگری نظیر آنالیز ریاضی ۳، توابع مختلط و هندسه‌ی منفلید به مطالعه‌ی این نظریه پرداخته می‌شود. بهرحال هدف از این مقدمه این است که بدانیم دامنه‌ی توابع بسیار مهم‌ترند تا مقادیر خود توابع چون تفاوت در دامنه‌ها، تفاوت در نظریه‌ها را ایجاب می‌کند، برای مثال در طبیعت کمیت‌های اسکالر زیادی یافت می‌شود که می‌توان آنها را به مقادیر یک تابع وابسته کرد اما دامنه‌ی این توابع چه باشد خود مسأله‌ی مهمی است و به روشن‌تر شدن مباحث کمک کرده و حتی ممکن است خود مبنای نظریه‌ی جدیدی باشد! (برای مثال بعدها در نظریه اندازه مصداق این جمله را خواهید دید.)

مشتق یک تابع حقیقی

❖ **تعریف۱:** فرض کنیم f یک تابع حقیقی مقدار بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد. به ازای هر $x\in[a,b]$ ، خارج قسمت نیوتنی

$$\text{۱)}\qquad \varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\quad (a<t<b\ ,\ t\neq x)$$

را تشکیل داده و تعریف می‌کنیم:

$$\text{۲)}\qquad f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t)$$

مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد پس به تابع f تابع f' مربوط می‌شود که قلمروش تمام آن xهایی است که برای آن حد ۲ وجود دارد. f' را مشتق f می‌نامیم. بنابراین هرگاه f' در نقطه‌ی x تعریف شده باشد یعنی چنانچه حد ۲ موجود باشد، گوییم f در x مشتق‌پذیر است و اگر f' در هر نقطه از مجموعه‌ی E، $E\subset[a,b]$، تعریف شده باشد، گوئیم f بر E مشتق‌پذیر است.

تذکر۱:

الف) تعریف بالا را به طور معادل با تعریف $\varepsilon-\delta$ یکی می‌دانند: تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ در x مشتق‌پذیر است هرگاه $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=L$ موجود باشد یعنی:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t}\ 0<|t-x|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-L\right|<\varepsilon$$

ب) در عبارت ۲ می‌توان حدود سمت راست و سمت چپ را در نظر گرفت تا به ترتیب مشتق‌های سمت راست و چپ $f'_+(x)\ ,\ f'_-(x)$ به دست بیاید و همان‌طور که می‌دانید $f'(x)$ موجود است اگر $f'_+(x)$ و $f'_-(x)$ موجود و برابر باشند. در ضمن در نقاط انتهایی دامنه‌ی تعریف، یعنی نقاط b,a، مشتق در صورت وجود همان مشتق‌های سمت راست و سمت چپ است. توجه کنید که تفاوت ظریفی بین $f'_+(x)$ و $f'(x^+)$ است چون

$f'_+(x) = \lim\limits_{t\to x^+} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ در صورت وجود، در حالیکه $f'(x^+) = \lim\limits_{t\to x^+} f'(t)$ در حالت اخیر فرض بر وجود تابع f' است و همین‌طور است تفاوت بین $f'_-(x)$ و $f'(x^-)$. در ادامه در برخی مسائل به این تفاوت‌ها اشاره شده است. ضمناً بعدها در نظریه سری‌های فوریه مشتق‌های یک طرفه‌ی $f'_+(x)$ و $f'_-(x)$ را اندکی متفاوت‌تر تعریف می‌کنند برای مثال $f'_+(x) = \lim\limits_{t\to x^+} \dfrac{f(t)-f(x^+)}{t-x}$ که در آن $f(x^+) = \lim\limits_{t\to x^+} f(t)$ و مشابهاً $f'_-(x)$ را تعریف می‌کنند. طبق این دیدگاه اگر f در x پیوسته باشد آنگاه $f'(x)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(x)$ و $f'_-(x)$ موجود و برابر باشند. توجه شود که ما از این تعریف در ادامه استفاده نخواهیم کرد.

پ) تفاوتی که تفاوت ایجاد می‌کند! خواننده‌ای که اندکی معلومات در زمینه‌ی توابع مختلط دارد می‌داند که تعریف ۱ نیز در آنجا معتبر است. اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یک میدان است لذا در آنجا نیز همانند $\mathbb{R}$، ساختن خارج قسمت‌ها معنی دارد، اما یک تفاوت بزرگ وجود دارد و آن مربوط به دامنه می‌شود. روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ شما از دو سمت راست و چپ می‌توانید به یک عدد مفروض نزدیک شوید اما در میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ بی‌شمار مسیر برای نزدیک شدن وجود دارد و همین تفاوت باعث می‌شود که اگر تابع مفروضی در عدد مختلطی مشتق‌پذیر باشد آنگاه در همان نقطه بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر شود و مفاهیم تحلیلی بودن و بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر بودن بر هم منطبق می‌شوند در حالی که در توابع با دامنه‌ی حقیقی چنین چیزی غلط است. دیگر تفاوت مهم $\mathbb{R}$ با $\mathbb{C}$، مربوط به وجود ترتیب در $\mathbb{R}$ است و این خود باعث ایجاد قضایای جالبی در $\mathbb{R}$ می‌شود که در $\mathbb{C}$ غلط‌اند، به هنگام مطرح شدن این قضایا به این تفاوت‌ها اشاره خواهیم کرد.

قضیه۱: فرض کنیم تابع حقیقی f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. هرگاه f در نقطه‌ی $x \in [a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، f در x پیوسته است.

تذکر۲: دقت شود که اولاًاین قضیه در دستگاه وسعت یافته‌ی اعداد حقیقی درست نیست چون در آنجا تابع علامت sgn دارای مشتق $(\text{sgn})'(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$ است در حالیکه sgn در $x=0$ ناپیوسته است. ثانیاً عکس قضیه‌ی فوق غلط است مثلاً تابع $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x) = |x|$ در نظر بگیرید. این تابع در صفر پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست چون $f'_+(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{|t|}{t} = 1$ ، $f'_-(0) = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{|t|}{t} = -1$ لذا طبق تذکر ۱ـ ب $f'(0)$ موجود نیست. در فصل سوم با استفاده از انتقالات این تابع، تابع g را بر کل $\mathbb{R}$ چنان تعریف می‌کنیم که متناوب باشد مثلاً $g(x+2) := f(x)$ اکنون تابع تعریف شده توسط سری $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n g(4^n x)$ چنان است که بر کل $\mathbb{R}$ پیوسته است اما در هیچ جای $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر نیست! اولین مثال از توابع پیوسته‌ی هیچ‌جا مشتق‌پذیر توسط ویراشتراس باضابطه‌ی $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ ارائه شده و مایه‌ی تعجب جامعه‌ی ریاضی قرن نوزدهم گردید و باعث شد که ریاضیدانان در استدلال‌های شهودی خود شک کنند.

قضیه‌های زیر قواعدی را در باب مشتق‌گیری از توابعی بیان می‌کنند که خود این توابع براساس روابط جبری یا ترکیب توابع مشتق‌پذیر تعریف شده‌اند. اگر دقت کنید می‌بینید که این قضایا برخی خواص عمل مشتق‌گیری را هم بیان می‌کنند. در ریاضیات پیشرفته خواص جبری و توپولوژیکی مشتق به عنوان یک عملگر، اهمیت فراوان دارد مثلاً قضیه‌ی زیر می‌گوید که فضای توابع مشتق‌پذیر بر یک بازه، تشکیل یک جبر (یک فضای برداری که ساختار حلقه هم دارد) می‌دهند که در آن به مفهومی تقسیم هم تعریف شده است.

قضیه۲: (خواص جبری مشتق): فرض کنیم f,g بر بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده و در نقطه‌ی $x \in [a,b]$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت $f \pm g$، $f.g$ و f/g در x مشتق‌پذیرند، و

الف) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

ب) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (قاعده‌ی لایب نیتز)

پ) $(\frac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ به شرطی که $g(x) \neq 0$

قضیه ۳: (قاعده‌ی زنجیری): اگر تابع f در نقطه‌ی x و تابع g در نقطه‌ی $y=f(x)$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه تابع مرکب gof در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر است و $(gof)'(x)=g'(y).f'(x)$.

توجه دارید که قضیه‌ی بالا به صورت‌های گوناگونی در کتاب‌ها بیان می‌شود اما جای نگرانی نیست چون در اثبات آن؛ پیوستگی f در نقطه x باعث نجات ما می‌شود. به غیر از این قواعد، قاعده‌ی دیگری در باب مشتق تابع معکوس موسوم به قضیه‌ی تابع معکوس وجود دارد که بعد از قضایای مقدار میانگین و پیوستگی مشتق‌ها ارائه و اثبات می‌شود.

مثال ۱:

الف) مشتق هر تابع ثابت صفر است. مشتق تابع همانی $f(x)=x$ برابر است با $f'(x)=1$ با بکار بردن قاعده لایب نیتز معلوم می‌شود که اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آنگاه $f'(x)=nx^{n-1}$ و اگر $n<0$ از قضیه ۲ـ پ داریم $f'(x)=nx^{n-1}$. بنابراین هر چند جمله‌ای مشتق‌پذیر است و همچنین هر تابع گویا جز در نقاطی که مخرجش صفر است، مشتق‌پذیر می‌باشد. (تابع گویا، تابعی مثل $g(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ است که در آن p و q چند جمله‌ای هستند)

ب) تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ x\sin\frac{1}{x} & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ گرچه در صفر پیوسته است اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست برای پیوستگی توجه داریم که اولاً $f(0)=0$ ثانیاً چون $|f(x)|\le|x|$ پس $\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=0$ لذا $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. اما برای مشتق ناپذیر بودن f در صفر باید نشان دهیم که حد خارج قسمت نیوتنی $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ وقتی $x\to0$ موجود نیست. برای این کار دو دنباله‌ی متمایز $(\frac{1}{n}),(\frac{1}{2\pi n})$ را که به صفر همگرایند در نظر می‌گیریم اکنون

$$\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0}=1\to1$$

$$\frac{f(\frac{1}{2\pi n})-f(0)}{\frac{1}{2\pi n}-0}=\frac{\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n)}{\frac{1}{2\pi n}}=\sin2\pi n=0\to0$$

بنابراین حد خارجی قسمت نیوتنی یکتا نبوده و در نتیجه $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ موجود نیست.

پ) تابع $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست اما برای $x\neq0$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

ت) تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است و $f'(0)=0$ و نیز برای $x\neq0$, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

ث) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\notin\mathbb{Q}\\ \cos x & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ و $g(x)=\lfloor x\rfloor$ در این صورت $h(x)=fog(x)=f(\lfloor x\rfloor)$ و چون $[x]\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ پس $h(x)=\cos\lfloor x\rfloor$ بوضوح اگر $x\in\mathbb{Z}$ آنگاه h در x پیوسته نیست. بنابراین h در نقاط صحیح نمی‌تواند مشتق‌پذیر باشد حال اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آنگاه عدد صحیح $n\in\mathbb{Z}$ هست که $n<x<n+1$ و در این حالت $h(x)=\cos(n)$ لذا، h روی بازه‌ی $(n,n+1)$ برابر مقدار ثابت $\cos(n)$ است. پس مشتق آن در این بازه صفر است پس در کل h' در نقاط غیر صحیح موجود و برابر صفر است.

مشتقات مراتب بالاتر: فرض کنیم f'، تابع مشتق تابع f بر یک بازه باشد. اگر مجدداً f' بر این بازه مشتق‌پذیر باشد، مشتق f' را با f'' نشان داده و آنرا مشتق دوم f می‌نامیم. لذا:

$$(f')'(x)=f''(x)=\lim_{t\to x}\frac{f'(t)-f'(x)}{t-x}$$

مشتقات مراتب بالاتر به صورت استقرایی و با رابطه‌ی $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$ و $n>1, n\in\mathbb{N}$ ، تعریف می‌شوند یعنی با تکرار روند عمل مشتق‌گیری، دنباله‌ی $f,f',f'',f^{(3)},\dots,f^{(n)}$ را داریم که هر جمله‌ی آن مشتق تابع قبلی است. $f^{(n)}$ را مشتق nاُم یا مرتبه‌ی n تابع f گویند. بنا به قرارداد $f=f^{(0)}$ و توجه داریم که $f^{(1)}=f'$ و $f^{(2)}=f''$. اگر $f^{(n)}(x)$ برای هر $x\in(a,b)$ و هر $n\in\mathbb{N}$ موجود باشد گوییم f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است یا به اصطلاح هموار است.

مثال۲: (دستور لایب نیتز): **فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و مشتقات مرتبه‌ی n توابع g,f موجود باشد. نشان دهید:**

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

برهان: **با استقرا بر n، فرمول را ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ درست است چون $(fg)'=f'g+fg'$. فرض کنید برای n فرمول درست باشد نشان می‌دهیم برای $n+1$ نیز درست است:**

$$(fg)^{(n+1)}=((fg)^{(n)})'=(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)})'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[f^{(k)}g^{(n-k)}]' \quad \text{(بنابر خاصیت خطی مشتق)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=f^{(0)}g^{(n+1)}+f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}]f^{(k)}g^{(n+1-k)}=f^{(0)}g^{(n+1)}+f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

تذکر۳:

الف) اگر $n\in\mathbb{N}$ و تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ، n مرتبه مشتق‌پذیر باشد آنگاه از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که $f^{(n-1)}$ روی (a,b) پیوسته است.

ب) یک تابع هموار، پیوسته است مشتقات تمام مراتب یک تابع هموار، هموار است و در نتیجه این مشتقات پیوسته هستند.

کلاس‌های هموار: اگر تابع f مشتق‌پذیر و تابع مشتق آن، f' پیوسته باشد آنگاه گوییم f به طور پیوسته مشتق پذیر است و گوییم f از کلاس C^1 است. اگر تابع f، n مرتبه مشتق‌پذیر بوده و تابع $f^{(n)}$ پیوسته باشد آنگاه گوییم f به طور پیوسته n مرتبه مشتق پذیر است و گوییم f از کلاس C^n است. اگر f هموار باشد، از تذکر فوق (قسمت ب)، نتیجه می‌شود که برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، f از کلاس C^n است بنابراین می‌گوییم f از کلاس C^∞ است. برای نمادگذاری بهتر، گوییم یک تابع پیوسته از کلاس C^0 است. اگر چنین فکر کنیم که هر C^n، نمایانگر مجموعه‌ای از توابع باشد آنگاه دنباله‌ی نزولی

$$C^0\supseteq C^1\supseteq C^2\supseteq\dots\supseteq C^\infty=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C^n$$

از مجموعه‌ها را داریم. هر شمول $C^n\supseteq C^{n+1}$، یک شمول سره است یعنی $C^n\supsetneq C^{n+1}$ بالفرض برای $n=1$ تابع پیوسته‌ای هست که از کلاس C^1 است اما از کلاس C^2 نیست و همین‌طور. برای مثال:

$f(x)=|x|$ از کلاس C^0 است اما از کلاس C^1 نیست.

$f(x)=x|x|$ از کلاس C^1 است اما از کلاس C^2 نیست. (*)

$f(x)=|x|^3$ از کلاس C^2 است اما از کلاس C^3 نیست.

$\vdots$

$f(x)=x^{n-1}|x|$ از کلاس C^{n-1} است اما از کلاس C^n نیست.

برای نمونه درستی * را نشان می‌دهیم. داریم $f(x)=\begin{cases}x^{2} & x>0\\ 0 & x=0\\ -x^{2} & x<0\end{cases}$. برای مقادیر $x>0$ مشتق تابع، $2x$ است، برای مقادیر $x<0$ مشتق تابع، $-2x$ است. در ضمن در نقطه‌ی $x=0$ داریم:

$$f'_{+}(0)=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{t^{2}-0}{t-0}=\lim_{t\to 0^{+}} t=0 \quad ; \quad f'_{-}(0)=\lim_{t\to 0^{-}}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^{-}}\frac{-t^{2}-0}{t-0}=\lim_{t\to 0^{-}} -t=0$$

پس $f'_{+}(0)=f'_{-}(0)$ و بنابراین $f'(0)=0$ نتیجتاً آنکه $f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ 0 & x=0\\ -2x & x<0\end{cases}$ و پیوستگی f' محرز می‌شود بنابراین f از کلاس C^{1} است. دوباره با محاسبه‌ی f'' برای $x>0$ و $x<0$ معلوم می‌شود که $f''(x)$ به ترتیب برای این بازه‌ها عبارت است از ۲و ۲-. اما $f''(0)$ موجود نمی‌باشد و حتی $f''_{+}(0)\neq f''_{-}(0)$ ، لذا f'' نمی‌تواند پیوسته باشد بنابراین f از کلاس C^{2} نیست.

تذکر ۴: بجز مفهوم هموار بودن، یک مفهوم دیگر تحت عنوان تحلیلی بودن وجود دارد که چنین تعریف می‌شود: تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ برای هر $x\in(a,b)$ تحلیلی است هرگاه بتوان آنرا حول x به صورت یک سری توانی نمایش داد یعنی $\delta>0$ موجود باشد به طوری که برای هر $|h|<\delta$ سری توانی $\sum a_n h^n$ همگرا بوده و $f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$. سری‌های توانی و همگرایی آنها در فصل ۴ مطرح می‌شوند و آنجا خواهیم دید که $a_n=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ و این یکتایی نمایش f بر حسب سری توانی مذکور را بیان می‌کند. بهرحال از نماد C^{ω} برای نمایش توابع تحلیلی استفاده می‌کنیم با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال و استقرا می‌توان نشان داد که برای تابع $g(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x}} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ داریم $\forall n\in\mathbb{N}\ g^{(n)}(x)=0$ بنابراین حول $x=0$ نمی‌توان مقادیر $g(x)$ را برحسب یک سری توانی (در واقع سری تیلور آن) نمایش داد چون سری نمایش صفر می‌شود، در حالیکه $g(x)$ ناصفر است (یعنی حول نقطه صفر، سری تیلور g به خود g همگرا نمی‌شود). این تابع هموار است اما تحلیلی نیست و چون هر تابع تحلیلی، هموار است پس شمول $C^{\infty}\supseteq C^{\omega}$ نیز سره است یعنی $C^{\infty}\supsetneqq C^{\omega}$ لذا برای توابع حقیقی، تحلیلی بودن و هموار بودن دو موضوع متفاوت‌اند در حالیکه در آنالیز مختلط این دو مفهوم بر هم منطبق‌اند.

مثال ۳: فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت:

۱) مشتق $|f|$ در هر نقطه‌ی $x\neq 0$ موجود است.

۲) اگر $f(x)=0$ آنگاه $|f|$ در x مشتق‌پذیر نیست.

۳) $|f|$ در هر نقطه‌ی x که $f(x)\neq 0$ مشتق‌پذیر است همچنین اگر $f'(x)=0$ آنگاه $|f|'(x)=0$

۴) $|f|$ در هر نقطه‌ی x که $f(x)\neq 0$ مشتق‌پذیر است همچنین اگر $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ آنگاه $|f|'(x)=0$

پاسخ: گزینه «۴» قرار دهید $g(x)=|x|$ بنابراین $h(x)=|f|(x)=gof(x)$. چون تابع g در جاهایی که $x\neq 0$ مشتق‌پذیر است. از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود که تابع $h=|f|$ در هر نقطه‌ی x که $f(x)\neq 0$ مشتق‌پذیر است و نیز اگر $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ آنگاه

$$(1)\quad h'_{+}(x)=\lim_{t\to x^{+}}\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\lim_{t\to x^{+}}\frac{|f(t)|-|f(x)|}{t-x}=\lim_{t\to x^{+}}\frac{|f(t)|}{t-x}=\lim_{t\to x^{+}}\left|\frac{f(t)}{t-x}\right|$$

اما می‌دانیم که: $\lim_{x\to a} u(x)=0$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a}|u(x)|=0$ این نتیجه برای حالتی که $x\to a^{+}$ یا $x\to a^{-}$ برقرار است. [دلیل این است که در تعریف $\varepsilon-\delta$ داریم $\big||u(x)|-0\big|=|u(x)|=|u(x)-0|<\varepsilon$]. بنابراین چون برای طرف راست (۱) داریم:

$$\lim_{t\to x^{+}}\frac{f(t)-0}{t-x}=f'_{+}(x)=0$$

پس $h'_{+}(x)=0$. مشابهاً:

$$h'_{-}(x)=\lim_{t\to x^{-}}\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\lim_{t\to x^{-}}\frac{|f(x)|}{t-x}=-\lim_{t\to x^{-}}\left|\frac{f(x)}{t-x}\right|=-f'_{-}(x)=0$$

بنابراین $h'(x)=|f|'(x)=0$.

مثال۴: تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ \sin x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ **مفروض است در این صورت**

۱) f در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است و $|f|'(0)$ موجود است.
۲) f در $x=0$ مشتق‌پذیر است و $|f|'(0)$ موجود نیست.
۳) $|f|$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است.
۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا نشان می‌دهیم که f در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} \qquad (1)$$

چون همواره $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, $\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$ صرف نظر از اینکه t گنگ باشد یا گویا پس در هر حال حد موجود در طرف راست عبارت (۱) به سمت عدد ۱ میل می‌کند بنابراین $f'(0)=1$. اگر $x\neq 0$ نشان می‌دهیم که f در x پیوسته نیست با توجه به چگال بودن $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ در $\mathbb{R}$ می‌توان دنباله‌های (q_n) از اعداد گویا و (t_n) از اعداد گنگ را چنان یافت که $t_n\to x$, $q_n\to x$. حالا $\lim_{n\to\infty}f(q_n)=x$, $\lim_{n\to\infty}f(t_n)=\sin x$ در این صورت:

الف) اگر $|x|>1$ ، چون همیشه $|\sin x|\leq 1$ پس $\lim_{n\to\infty}f(t_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(q_n)$ و در نتیجه $\lim_{t\to x}f(t)$ موجود نیست بنابراین f در x پیوسته نیست.

ب) اگر $|x|\leq 1$ و $|x|\neq 0$ با توجه به معلومات ریاضی عمومی چون تنها جواب معادله‌ی $\sin x=x$ در بازه‌ی $[-1,1]$ ، در نقطه‌ی صفر اتفاق می‌افتد و چون در اینجا $x\neq 0$ پس دوباره $\lim_{n\to\infty}f(t_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(q_n)$ و در نتیجه f در x پیوسته نیست [توجه اگر معادله‌ی $\sin x=x$ در $[-1,1]$ دارای جواب $c\neq 0$ باشد و آنگاه $-c$ نیز یک جواب دیگر خواهد بود بدون کاستن از کلیت فرض کنید $c>0$ بنابراین تابع $g(x)=x-\sin x$ روی $[-1,1]$ دارای سه ریشه‌ی $-c,0,c$ خواهد بود بنا به قضیه‌ی رُل، g' باید در دو نقطه c_1,c_2؛ $-c<c_1<0<c_2<c$؛ صفر شود، معادلاً این یعنی در دو نقطه‌ی c_1 و c_2 داریم $\cos c_1=\cos c_2=1$ که غیر ممکن است.]

از طرفی $|f|$ در صفر مشتق‌پذیر نیست چون اگر (q_n) یک دنباله از اعداد گویای مثبت باشد که $q_n\to 0$ و (p_n) دنباله‌ای از اعداد گویای منفی باشد که $p_n\to 0$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f|(q_n)-|f|(0)}{q_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{q_n}=1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|f|(p_n)-|f|(0)}{p_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{-p_n}{p_n}=-1$$

بنابراین $\lim_{t\to 0}\frac{|f|(t)-|f|(0)}{t-0}$ موجود نیست در نتیجه $|f|'(0)$ موجود نیست.

توجه: به یاد داشته باشید که اگر $f(x)=\begin{cases} g_1(x) & x\in\mathbb{Q} \\ g_2(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ **و اگر خود g_1,g_2 به عنوان توابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ پیوسته باشند آنگاه نقاط پیوستگی f، جاهایی است که $g_1(x)=g_2(x)$، یعنی f در x پیوسته است اگر و تنها اگر $g_1(x)=g_2(x)$. همچنین اگر g_1,g_2 در x مشتق‌پذیر بوده و $g_1'(x)=g_2'(x)$ آنگاه f در x مشتق‌پذیر است.**

مثال۵: فرض کنیم $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q}^c \\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\ ,\ p\in\mathbb{Z}\ ,\ q\in\mathbb{N}\ ,\ (p,q)=1\end{cases}$ **، این تابع به تابع خط کش ریمان معروف است. دراین صورت:**

۱) f در همه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است و $f'=0$.
۲) f هیچ جا پیوسته نیست.
۳) f در نقاط گویا پیوسته است.
۴) f هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۴» اولاً با توجه به معلومات آنالیز ۱ می‌دانیم که این تابع فقط در نقاط گنگ پیوسته است و در مجموعه همه‌ی نقاط گویا ناپیوسته است (به مثال ۵ـ۲۰ کتاب بارتل مراجعه شود) لذا از قضیه‌ی ۱ نتیجه می‌شود که f در نقاط گویا مشتق‌پذیر نیست. بنابراین کافی است نشان دهیم f در نقاط گنگ مشتق‌پذیر نیست. فرض کنید $x\in\mathbb{Q}^c$ نشان می‌دهیم که $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ موجود نیست کافی است روی مقادیر گویا و گنگ h بحث کنیم. بوضوح اگر h گویا باشد چون دوباره $x+h\in Q^c$ پس $f(x+h)=f(x)=0$ لذا خارج قسمت نیوتنی صفر شده و

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{Q}}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ و اگر x دارای بسط اعشاری $x=0/x_1x_2x_3\ldots$ باشد با انتخاب دنباله‌ی $h_n=-0/\cdots x_{n+1}x_{n+2}\cdots$ می‌بینیم که $x+h_n=0/x_1x_2\ldots x_n=\frac{\overline{x_1x_2\ldots x_n}}{10^n}$ که عددی گویاست لذا $f(x+h_n)\geq\frac{1}{10^n}$ از طرفی چون $|h_n|\leq\frac{1}{10^n}$ بنابراین $\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|=\frac{|f(x+h_n)|}{|h_n|}\geq\frac{1}{10^n|h_n|}\geq 1$ لذا حد موجود در عبارت $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{Q}^c}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ نمی‌تواند صفر شود چون قدر مطلق خارج قسمت نیوتنی همیشه بزرگتر از عدد یک است بنابراین $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ موجود نمی‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: فرض کنید f مشتق پذیر باشد در این صورت حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ کدام است؟

۱) $f'(a)-af(a)$ ۲) $f(a)-af'(a)$ ۳) $af'(a)-f(a)$ ۴) $af(a)-f'(a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a(f(x)-f(a))}{x-a}=f(a)-a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: اگر g,f مشتق پذیر باشند آنگاه حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$ کدام است؟

۱) $f'(a)g(a)-f(a)g'(a)$ ۲) $f(a)g'(a)-f'(a)g(a)$ ۳) $f'(a)g'(a)-f(a)g(a)$ ۴) $f(a)g(a)-f'(a)g'(a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(a)-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$=g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g(a)f'(a)-f(a)g'(a)$$

نکته۱: با جایگذاری $g(x)=x^n$ در سوال بالا داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}=-na^{n-1}f(a)+a^nf'(a)$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^nf(a)-a^nf(x)}{x-a}=na^{n-1}f(a)-a^nf'(a)$$

مثال۸: در مورد عبارت $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ چه می‌توان گفت؟

۱) اگر f مثبت باشد این حد موجود و ناصفر است.

۲) اگر f روی $(0,\infty)$ مثبت و مشتق‌پذیر باشد این حد موجود و ناصفر است.

۳) اگر f روی $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر باشد این حد موجود و ناصفر است.

۴) اگر f روی $(0,\infty)$ مثبت مشتق‌پذیر باشد این حد موجود و برابر ۱ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم $x\in(0,\infty)$, $\delta>0$ اکنون چون f مثبت است داریم:

$$Ln\left(\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\xlongequal{\text{پیوسته بودن تابع Ln}}\lim_{\delta\to 0}Ln\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\delta}}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}Ln\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{Ln(f(x+\delta x))-Ln(f(x))}{\delta}\right)=x\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{Ln(f(x+\delta x))-Ln(f(x))}{\delta x}\right)\xlongequal{(1)}x(Lnf(x))'=x\frac{f'(x)}{f(x)}$$

دقت شود که برقراری (۱) بخاطر مشتق‌پذیر بودن f و قاعده‌ی زنجیری است، در نتیجه:

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\delta}}=e^{x\frac{f'(x)}{f(x)}}\neq 0$$

مثال۹: فرض کنید f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد و $f(a) > 0$، در این صورت حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}}$ برابر است با:

۱) $e^{a\frac{f'(a)}{f(a)}}$ ۲) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۳» چون f در نقطه‌ی a پیوسته است و $f(a) > 0$ لذا در یک همسایگی a، f مثبت است از اینرو برای nهای به قدر کافی بزرگ $f(a+\frac{1}{n}) > 0$ چون f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است با توجه قاعده‌ی زنجیری تابع مرکب $x \to \operatorname{Ln} f(x)$ نیز در a مشتق پذیر است بنابراین:

$$\operatorname{Ln}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \xlongequal{\text{پیوستگی تابع Ln}} \lim_{n\to\infty}\operatorname{Ln}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}f(a+\frac{1}{n})-\operatorname{Ln}f(a)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{\operatorname{Ln}(f(a+\frac{1}{n}))-\operatorname{Ln}(f(a))}{\frac{1}{n}} = 0\times(\operatorname{Ln}f(x))'\Big|_{x=a} = 0\times\frac{f'(a)}{f(a)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

مثال۱۰: فرض کنید $a > 0, f(a) > 0$ و همچنین f در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشد در این صورت حاصل $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}a}}$ کدام است؟

۱) $\frac{f'(a)}{f(a)}a$ ۲) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}a}$ ۳) $ae^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲»

$$\operatorname{Ln}\left(\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}a}}\right) = \lim_{x\to a}\operatorname{Ln}\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}a}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{Ln}f(x)-\operatorname{Ln}f(a)}{\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}a} = \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{Ln}f(x)-\operatorname{Ln}f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}a} = \frac{f'(a)}{f(a)}a \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}a}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}a}$$

مثال۱۱: فرض کنید تابع حقیقی مقدار f در یک بازه‌ی باز حول نقطه‌ی a تعریف شده و در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد. (x_n) و (y_n) را دو دنباله در دامنه‌ی f گرفته که هر دو همگرا به a بوده و همواره $x_n \neq a$ ، $y_n \neq a$ در این صورت:

۱) اگر همواره $x_n \neq y_n$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(a)$

۲) اگر همواره $x_n \neq y_n$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = 2f'(a)$

۳) اگر همواره $x_n < a < y_n$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(a)$

۴) اگر همواره $x_n < a < y_n$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = 2f'(a)$

پاسخ: گزینه «۳»

با توجه به مفروضات قرار دهید:

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}.\frac{x_n-a}{x_n-y_n} + \frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}.\frac{a-y_n}{x_n-y_n}$$

که در آن:

$$0 < \frac{x_n-a}{x_n-y_n} < 1 \ , \ 0 < \frac{a-y_n}{x_n-y_n} < 1 \ , \ \frac{x_n-a}{x_n-y_n} + \frac{a-y_n}{x_n-y_n} = 1$$

بنابراین:

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}<\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}<\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}$$

اکنون با عنایت به قضیه‌ی خوشمزه‌ی ساندویچ ! و وجود حدود در دو طرف نامساوی بالا داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(a)$$

توجه شود که مثال نقض برای گزینه ۱ توسط تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ و نقطه‌ی $a=0$ و دنباله‌های $x_n=\frac{2}{\pi(4n+1)}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi}$ فراهم است چون $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=-\frac{2}{\pi}\neq 0=f'(0)$.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۲: کدام گزینه صحیح است؟

۱) فرض کنیم برای هر $\alpha>1$ و هر $x,y\in\mathbb{R}$، $|f(x)-f(y)|<|x-y|^{\alpha}$ آنگاه f تابع ثابت است.

۲) توابع مشتق پذیر g,f در معادله‌ی $fg'-gf'=0$ صدق می‌کنند و تابع f متحد با صفر نیست. اگر b,a دو صفر متوالی f بوده ولی $g(a)$ و $g(b)$ مخالف صفر باشند آنگاه برای xی بین b,a، $g(x)=0$.

۳) اگر f بر $[a,b]$ مشتق پذیر و $f(a)=f(b)=0$ اما برای هر $x\in(a,b)$، $f(x)\neq 0$ آنگاه $f'_-(b),f'_+(a)$ مختلف العلامتند.

۴) همه‌ی موارد صحیح می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

۱) چون برای گزینه‌ی ۱ با تقسیم طرفین بر $|x-y|$ و حدگیری از نامساوی مربوطه وقتی که $x\to y$ داریم:

$$\lim_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le\lim_{x\to y}|x-y|^{\alpha-1}=0\Rightarrow\forall y\ f'(y)=0\Rightarrow \text{f تابع ثابت است}$$

۲) برای گزینه ۲ فرض کنید که $a<b$ و برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $g(x)\neq 0$ در این صورت تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ بنا به فرض متحداً صفر نیست. با توجه به فرض $fg'-gf'=0$ داریم:

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}=0$$

چون دامنه‌ی h همبند است بنابراین h باید روی $[a,b]$ ثابت بوده لذا برای هر $h(x)=c\neq 0\ ,\ x\in(a,b)$ و در نتیجه برای هر $g(x)=\frac{1}{c}f(x)\ ,\ x\in(a,b)$ اما با توجه به پیوستگی توابع g,f داریم:

$$g(a)=\lim_{x\to a^+}g(x)=\frac{1}{c}\lim_{x\to a^+}f(x)=\frac{1}{c}f(a)=0\quad;\quad g(b)=\lim_{x\to b^-}g(x)=\frac{1}{c}\lim_{x\to b^-}f(x)=\frac{1}{c}f(b)=0$$

بنابراین فرض خلف مبنی بر $g(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$ باطل است پس برای هر $x\in(a,b)$ داریم $g(x)=0$.

۳) فرض خلف که $f'_-(b),f'_+(a)$ هر دو هم علامت باشند بدون کاستن از کلیت فرض کنید هر دو مثبت باشند. بنابراین:

$$f'_+(a)>0\xrightarrow{\text{تعریف } \varepsilon-\delta \text{ مشتق و پیوستگی } f}\exists\delta_1>0\ \forall x\ ,a<x<a+\delta_1\ \ f(x)>f(a)=0\qquad(1)$$

$$f'_-(b)>0\xrightarrow{\text{همان دلیل}}\exists\delta_2>0\ \forall x\ ,\ b-\delta_2<x<b\ \ f(x)<f(b)=0\qquad(2)$$

برای (۱) و (۲) عدد $\delta>0$ی مشترکی چنان می‌توان یافت که $b-\delta<a+\delta$. لذا x_2,x_1 چنان موجودند که $b-\delta<x_2<x_1<a+\delta$ اکنون تابع f روی $[x_2,x_1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است لذا با توجه به روابط بالا روی $[x_2,x_1]$ تغیر علامت می دهد. بنابراین طبق قضیه‌ی مقدار میانی ریاضیات عمومی، $x_3\in(x_2,x_1)$ چنان موجود است که $f(x_3)=0$ ولی این ناقض فرض $f(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$ است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال ۱۳: فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و f و f' هیچ صفر مشترکی ندارند در این صورت

۱) مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ متناهی است.

۲) مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ شمارای نامتناهی است.

۳) مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ ناشماراست.

۴) مجموعه‌ی صفرهای f' از لحاظ کاردینالیته بزرگتر از مجموعه صفرهای f است.

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنیم $z_f=\{x\in[a,b]:f(x)=0\}$ مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ باشد چون $z_f=f^{-1}\{0\}$ و f پیوسته است پس z_f در $[0,1]$ بسته و لذا فشرده هم می‌باشد. فرض خلف که z_f نامتناهی باشد پس z_f دارای یک نقطه‌ی حدی چون $x_0\in[0,1]$ هست و چون z_f بسته است داریم $x_0\in z_f$ لذا دنباله‌ی (x_n) در z_f چنان موجود است که $x_n\to x_0$. حالا:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \xlongequal{\text{با توجه به وجود مشتق}}\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{x_n-x_0}$$

و این یعنی $f'(x_0)=0=f(x_0)$ که فرض مسأله را نقض می‌کند. بنابراین باید z_f متناهی باشد.

مثال ۱۴: فرض کنیم $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $z_f=\{x\in[0,1]|f(x)=0\}$ نامتناهی باشد در این صورت:

۱) f',f صفر مشترک ندارند.

۲) $x_0\in[0,1]$ چنان وجود دارد که $f'(x_0)=f(x_0)=0$

۳) $\operatorname{card}(z_f)>\operatorname{card}(z_{f'})$

۴) $\operatorname{card}(z_f)<\operatorname{card}(z_{f'})$

پاسخ: گزینه «۲» روش حل کاملاً مشابه حل تست قبل است.

خواص توابع مشتق‌پذیر (قضایای مقدار میانگین)

در این قسمت به خواصی از توابع حقیقی مقدار می‌پردازیم که در آن وجود رابطه‌ی ترتیبی در بُرد یا کامل بودن (به مفهوم کوشی) بُرد توابع مهم است. لذا به هنگام به کار بردن این قضایا دقت کنیم که آیا بُرد تابع مذکور $\mathbb{R}$ است یا $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}^k$، چون همان‌طور که می‌دانید $\mathbb{R}$ میدان مرتب است اما $\mathbb{C}$ میدان مرتب نیست چون $i^2=-1<0$، در ضمن روابط ترتیبی خوبی روی $\mathbb{R}^k$، $k>1$ نمی‌توان تعریف کرد که با خواص جبری $\mathbb{R}^k$ در ارتباط مناسب باشد.

❖ **تعریف ۲:** فرض کنیم تابع حقیقی f بر فضای متری X تعریف شده است می‌گوییم f در نقطه‌ی $p\in X$ ماکزیمم موضعی دارد هرگاه δ ی مثبتی یافت شود به طوری که برای هر $q\in B(p,\delta)=\{x\in X:d(p,x)<\delta\}$ داشته باشیم $f(q)\le f(p)$ یعنی هرگاه یک همسایگی p را بتوان یافت که بر آن همسایگی $f(p)$ بیشترین مقدار را داشته باشد. توجه دارید که اگر f بر زیر فضایی از X مثل M تعریف شده باشد آنگاه باید $q\in B(p,\delta)\bigcap M$ را در نظر گرفت. منیمم‌های موضعی به طور مشابهی تعریف می‌شوند. گهگاهی برای اشاره به هر دو مفهوم ماکزیمم و مینیمم موضعی از کلمه‌ی اکسترمم موضعی استفاده می‌شود. توجه شود که ریاضیات دبیرستانی منظور از همسایگی، یک بازه باز بود اما در آنالیز پیشرفته به مدد مفهوم فضای متریک و مجموعه‌های باز نسبی می‌دانید که اگر تابع f در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد آنگاه هر بازه $[a,c)$ که $c<b$ یک همسایگی a است بنابراین اکسترمم نسبی در ابتدای بازه نیز می‌تواند اتفاق بیفتد ولی در قضیه زیر باید x نقطه‌ی درونی بازه باشد.

قضیه ۴: هرگاه تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x\in(a,b)$ ماکزیمم موضعی داشته و $f'(x)$ موجود باشد آنگاه $f'(x)=0$.

نکته ۲:

الف) برای مینیمم‌های موضعی قضیه‌ی مشابهی برقرار است. دقت کنید که عکس قضیه برقرار نیست مثال مشهور در این زمینه $f(x)=x^3$ روی $[-1,1]$ است. دقت شود که برای یافتن نقاط اکسترمم یک تابع نیاز است که مقادیر تابع را برای تمام نقاط بحرانی (شامل نقاط مرزی، نقاطی که در آن مشتق موجود نیست و جاهایی که $f'=0$) بیابیم.

ب) در برهان قضیه، به شدت از ترتیب موجود در $\mathbb{R}$ به عنوان بُرد تابع f استفاده می‌شود و چون این قضیه اساس بسیاری از کاربردهای مشتق‌گیری است و قضایای مقدار میانگین براساس آن اثبات می‌شوند، لذا در حالت کلی این قضایا برای وقتی که بُرد تابع f، $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}^k$، $k>1$، باشد درست نیست.

قضیه۵: (مقدار میانگین کوشی): هرگاه g,f توابع حقیقی پیوسته‌ای بر بازه‌ی $[a,b]$ باشند که در بازه (a,b) مشتق پذیرند آنگاه نقطه‌ای مانند $x\in(a,b)$ وجود دارد که در آن: $[f(b)-f(a)]g'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x)$

قضیه‌ی بالا، صورت تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی زیر است:

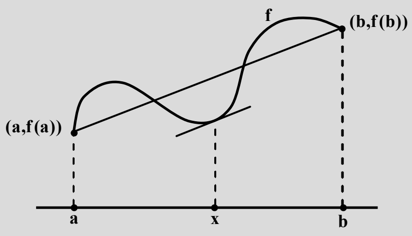
قضیه۶: (مقدار میانگین): هرگاه f یک تابع حقیقی پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ باشد که بر (a,b)مشتق پذیر است آنگاه نقطه‌ای مانند $x\in(a,b)$ هست که در آن: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(x)$

مثال۱۵: تابع مشتق‌پذیری که برای آن قضیه‌ی مقدار میانگین غلط است. چنانچه در نکته‌ی بالا تشریح شد، برای یافتن چنین مثالی، باید بُرد تابع زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ نباشد لذا تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x\end{cases}$ را روی $[\circ,2\pi]$ در نظر بگیرید حالا $f(2\pi)-f(\circ)=1-1=\circ$ اما چون $f'(x)=ie^{ix}$ پس $|f'(x)|=1$ لذا تساوی موجود در قضیه‌ی مقدار میانگین برای این تابع نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

نکته۳:

الف) قضیه‌ی مقدار میانگین یکی از قضایای فوق العاده مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال و ابزاری قدرتمند برای حل مسائل است به طوری که هنگام مواجهه با هر مسأله‌ی مربوط به مشتق‌گیری چنانچه این قضیه یا یکی از نتایجش را بخاطر بیاورید احتمال اینکه بتوانید آن مسأله را حل کنید خیلی زیاد است! این قضیه کاربردهای عملی هم دارد: مثل تقریب توابع با یک چند جمله‌ای درجه یک (قضیه‌ی تیلور توابع را با چند جمله‌ای‌ها از هر درجه تقریب می‌زند و یک نوع تعمیم قضیه‌ی مقدار میانگین است)، یافتن محل ریشه‌های یک تابع (معمولاً از قضیه‌ی رُل که هم خانواده‌ی قضیه‌ی مقدار میانگین است استفاده می‌کنند)، اثبات خیلی از نامساوی‌های مربوط به توابع و اعداد و تعمیم برخی نامساوی‌ها از $\mathbb{Z},\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$. همچنین از کاربردهای نظری این قضیه اثبات قضایای هوپیتال، تیلور و قضایای بنیادین حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

ب) اکنون که قضیه‌ی مقدار میانگین چنین مهم است پس با اجازه‌ی شما سرشت آنرا بیشتر می‌شکافیم؛ اولاً از لحاظ هندسی این قضیه می‌گوید که اگر نمودار تابع f به قدر کافی خوش رفتار باشد آنگاه در یک نقطه بین a و b، مماس بر منحنی موازی پاره خطی است که نقاط $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ را به هم وصل می‌کند.



تعبیر هندسی قضیه‌ی مقدار میانگین

اما از دیدگاه آنالیزی، برهان قضیه به طور ضمنی از خاصیت کمال اعداد حقیقی استفاده می‌کند. چون در برهان قضیه مقدار میانگین از قضیه‌ی مینی ـ ماکس استفاده می‌شود و خود این قضیه با استعانت از خاصیت کمال (برای بُرد تابع) اثبات می‌شود به خاطر اهمیت قضیه‌ی مقدار میانگین و قضیه مینی ـ ماکس می‌خواهیم بگوییم که:

رفتار یک تابع پیوسته روی بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ ، پایه‌ی اصلی حسابان است. در ضمن با استفاده از خاصیت کمال اعداد حقیقی می‌توان خواص اساسی چنین توابعی را اثبات کرد.

در اینجا مناسب است که سه قضیه‌ی اساسی درباره‌ی توابع پیوسته را که از آنها تحت عنوان اسکلت حسابان نام می‌برند، کنار هم بیان کنیم چون براساس این قضیه‌ها بقیه‌ی حسابان بنا می‌شود! این قضایا به شرح زیرند:

۱) قضیه‌ی مقدار میانی: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و عدد حقیقی r بین $f(b),f(a)$ باشد آنگاه نقطه‌ی $c\in[a,b]$ چنان موجود است که $f(c)=r$.

۲) قضیه مینی ـ ماکس: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه نقاط $p,q\in[a,b]$ چنان موجودند که برای هر $x\in[a,b]$ داریم $f(p)\le f(x)\le f(q)$.

۳) قضیه‌ی پیوستگی یکنواخت: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه پیوسته‌ی یکنواخت هم خواهد بود.

مهمترین موارد استفاده‌ی این قضایا در نمودار استلزام زیر دیده می‌شود:

خاصیت کمال $\mathbb{R}$ → قضیه‌ی مقدار میانی → ساختن توابع معکوس

خاصیت کمال $\mathbb{R}$ → قضیه‌ی مینی ـ ماکس → قضیه‌ی مقدار میانگین → قضایای بنیادین حسابان

خاصیت کمال $\mathbb{R}$ → قضیه‌ی پیوستگی یکنواخت → انتگرال پذیری توابع پیوسته

از این قضایا تحت عنوان قضایایی درباره‌ی توابع پیوسته نام بردیم اما این قضایا نه تنها به پیوستگی تابع f بستگی دارد بلکه به خواص توپولوژیکی بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ هم بستگی دارد. بجای استفاده از اصل کمال می‌توان با استفاده از هم بند بودن $[a,b]$ قضیه‌ی مقدار میانی را اثبات کرد. بهرحال قضیه‌های مینی ماکس و پیوستگی یکنواخت با استفاده از فشردگی $[a,b]$ راحت‌تر اثبات می‌شود. (همبندی خاصیتی است که برای علمای هندسه مهم است تا بتوانند خواص موضعی را به خواص سرتاسری تبدیل کنند و فشردگی برای علمای آنالیز سودمند است، فشردگی باعث می‌شود که حالت‌های نامتناهی به حالت‌های متناهی تقلیل یابد!)

پ) در فرض قضیه‌ی مقدار میانگین، فرض پیوستگی f در کل بازه‌ی $[a,b]$ تا حدودی زائد است چرا که با توجه به مشتق‌پذیری f در این بازه، کافی است که f در b,a پیوسته باشد.

قضیه۷: (قضیه‌ی رُل): هرگاه f یک تابع حقیقی پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ بوده و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$ آنگاه نقطه‌ای مانند $x\in(a,b)$ هست که در آن $f'(x)=0$.

توجه شود که این قضیه می‌گوید بین هر دو ریشه‌ی تابع مشتق‌پذیر f، یک ریشه‌ی f' موجود است. گرچه به سادگی می‌توان قضیه‌ی رُل را از قضیه‌ی مقدار میانگین نتیجه گرفت اما در متون کلاسیک ابتدا قضیه‌ی رُل را ثابت می‌کنند و به کمک آن قضیه‌ی مقدار میانگین را اثبات می‌کنند. در ضمن حکم قضیه با فرض $f(a)=f(b)$ هم درست است (از قضیه‌ی مقدار میانگین) دوباره توجه کنید که x نقطه درونی بازه است. می‌توان قضیه رُل را به کمک قضیه‌ی ۴ و قضیه‌ی مینی ـ ماکس اثبات کرد. از طرف دیگر یک راه سریع برای اثبات قضیه‌ی مقدار میانگین و قضیه‌ی مقدار میانگین تعمیم یافته با استفاده از قضیه‌ی رُل به صورت زیر است:

لم: فرض کنید توابع h,g,f روی $[a,b]$ پیوسته روی (a,b) مشتق پذیر باشند تعریف کنید.

$$F(x)=\det\begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{bmatrix}\quad ;\quad x\in[a,b]$$

آنگاه $x_0\in(a,b)$ وجود دارد که $F'(x_0)=0$

برهان: چون دترمینان را می‌توان بر حسب چند جمله‌ای از درایه‌هایش نوشت پس F روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر است و از طرفی هم بنا به خواص دترمینان $F(a)=F(b)=0$. [خواننده‌ای که با اندکی جبر خطی آشنایی دارد می‌داند که:

$$F(x)=\det\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{vmatrix}=f(x)\begin{vmatrix} g(a) & h(a)\\ g(b) & h(b)\end{vmatrix}-g(x)\begin{vmatrix} f(a) & h(a)\\ f(b) & h(b)\end{vmatrix}+h(x)\begin{vmatrix} f(a) & g(a)\\ f(b) & g(b)\end{vmatrix}$$

و به یاد می‌آورد که اگر یک ماتریس مربعی دارای دو سطر یا ستون یکسان باشد آنگاه دترمینانش صفر است] اکنون از قضیه‌ی رُل نتیجه می‌شود که $x_0\in(a,b)$ چونان موجود است که $F'(x_0)=0$.

نتیجه۱:

i) تحت مفروضات لم قبل اگر $h(x)=1$, $g(x)=x$ آنگاه قضیه مقدار میانگین به دست می‌آید.

ii) تحت مفروضات لم قبل اگر $h(x)=1$ آنگاه قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته به دست می‌آید.

برهان:

i) در این حالت طبق حکم لم قبل داریم: $F'(x_0)=\det\begin{vmatrix} f'(x_0) & 1 & 0\\ f(a) & a & 1\\ f(b) & b & 1\end{vmatrix}=0$ و چون $F'(x_0)=f'(x_0)(a-b)-(f(a)-f(b))$ پس نتیجه حاصل می‌شود.

ii) در این حالت طبق حکم لم قبل داریم:

$$0=F'(x_0)=\det\begin{vmatrix} f'(x_0) & g'(x_0) & 0\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix}=f'(x_0)(g(a)-g(b))-g'(x_0)(f(a)-f(b))$$

و لذا نتیجه حاصل می‌شود.

نکته۴: چند تذکر فلسفی درباره‌ی قضیه‌های ریاضی:

در اینجا چند تذکر فلسفی راجع به قضایای ریاضی موجّه به نظر می‌آید. قضایایی مانند قضیه‌ی مقدار میانگین و نتایج آن قضایایی وجودی هستند بعضی قضایای ریاضی وقتی وجود چیزی را بیان می‌کنند، روشی را هم برای به دست آوردن آن چیز به دست می‌دهند و از این حیث وجودی ـ ساختنی هستند و لذا اهمیت زیادی دارند اما قضیه‌ی مقدار میانگین که بر پایه‌ی خاصیت کمال $\mathbb{R}$ ثابت می‌شود، وجودی صرف است. حتی قضیه‌ی مقدار میانی را نیز می‌توان با استفاده از خاصیت کمال $\mathbb{R}$ ثابت کرد، پس آن قضیه هم وجودی صرف است لذا در کاربُردهای آنها مثل ریشه‌یابی ... به تقریب متوسل می‌شویم (البته در دنیای واقعی روش‌های تقریبی و عددی بسیار مهم‌اند چون حتی شما ممکن است جواب مساله‌ای یا مقدار تابعی را بدانید، اما استفاده‌ی مستقیم از آن جواب به علت پیچیده بودن ضابطه مشکل است!) یک بحث دیگر، بحث یکتایی است که در خیلی قضیه‌های ریاضی وارد می‌شود، معمولاً اثبات یکتایی خیلی ساده‌تر از اثبات وجود است البته موارد معدودی هستند که برای آنها مسأله‌ی یکتایی مشکل‌تر از مسأله‌ی وجود اثبات می‌شود!

اما مباحث مهم‌ترمربوط به استفاده از قضایا و روش‌هایی در باب وجود است، مشهورترین این مباحث ریاضیات بدون استفاده از اصل انتخاب و ریاضیات بدون استفاده از برهان خلف است! اصل انتخاب بعضی نتایج حیرت آوری دارد که با شهود سازگار نیست! اما بهرحال ابزاری بسیار کارآمدی است! حتی برخی ریاضیدانها در پی آن بوده‌اند که ریاضیات را بدون استفاده از اصل انتخاب یا برهان خلف بازسازی کنند! لذا از این به بعد در اثبات هر قضیه‌ای دقت کنید که ببینید آیا از اصل انتخاب یا برهان خلف استفاده می‌شود یا نه. مثلاً قضیه مقدار میانی بدون استفاده از فرض خلف قابل اثبات نیست!

یک مطلب دیگر راجع به برهان قضیه‌های دو شرطی است، معمولاً یک طرف برهان این قضایا راحت‌تر اثبات می‌شود اما ممکن است طرف دیگر مشکل‌تر باشد، لذا نگران نباشید، حداقل یک طرف ماجرا قابل حل است! در قضیه‌های وجودی ـ یکتایی نیز معمولاً همین داستان برقرار است!

قضیه۸: فرض کنیم f در (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

الف) هرگاه به ازای هر $x\in(a,b)$ ، $f'(x)\geq 0$ آنگاه f صعودی است.

ب) هرگاه به ازای هر $x\in(a,b)$ ، $f'(x)=0$ آنگاه f ثابت است.

پ) هرگاه به ازای هر $x\in(a,b)$ ، $f'(x)\leq 0$ آنگاه f نزولی است.

ت) هرگاه عدد حقیقی و مثبت M چنان باشد که به ازای هر $x\in(a,b)$ ، $|f'(x)|\leq M$ آنگاه f در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند یعنی برای هر $x_1,x_2\in(a,b)$، $|f(x_1)-f(x_2)|\leq M|x_1-x_2|$.

نکته۵:

الف) همبند بودن بازه‌ی (a,b) حیاتی است!

ب) یک نتیجه‌ی مورد آخر قضیه‌ی قبل این است: چنانچه f' بر بازه‌ی (a,b) کراندار باشد آنگاه f بر آن بازه پیوسته یکنواخت است. اما عکس این مطلب درست نیست. چون تابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & 0<x\leq 1 \\ 0 & x=0\end{cases}$ روی $[0,1]$ پیوسته است لذا پیوسته یکنواخت است اما مشتق آن $f'(x)=2x\sin(\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$ روی $(0,1)$ بی کران است چون اگر $x_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ اختیار شود آنگاه $x_n\to 0$ ولی $|f'(x_n)|=2\sqrt{2\pi n}\ \to\ \infty$.

پ) ممکن است f' فقط در یک نقطه مثبت باشد اما f در هیچ همسایگی آن نقطه یکنوا نباشد. تابع $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ چنین است.

چون داریم $f'(x)=\begin{cases} 1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$ ، f' در هر همسایگی صفر هم مقادیر مثبت را می‌پذیرد و هم مقادیر منفی. دقت شود که اگر f' در $x=0$ پیوسته می‌شد آنگاه در یک همسایگی $x=0$ ، $f'>0$ (یعنی در یک همسایگی صفر، f' مثبت است) که درست نیست لذا f' در $x=0$ پیوسته نیست.

قضیه۹: فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته بوده و همه جا در (a,b) بجز احتمالاً در $c\in(a,b)$ مشتق پذیر باشد. همچنین فرض کنید $\lim\limits_{x\to c} f'(x)=L$. در این صورت f در نقطه c مشتق پذیر بوده و $f'(c)=L$.

برهان: نشان می‌دهیم که $f'_-(c)\,,\,f'_+(c)$ هر دو موجود و برابر L می‌باشند. برای وجود $f'_+(c)$ توجه خود را به بازه‌ی (c,b) معطوف می‌کنیم. اگر $t\in(c,b)$ دلخواه باشد با بکار بردن قضیه‌ی مقدار میانگین روی بازه‌ی $[c,t]$ نتیجه می‌گیریم که $x_t\in(c,t)$ چنان موجود است که $\frac{f(t)-f(c)}{t-c}=f'(x_t)$ اگر $t\to c^+$ آنگاه بنا به قضیه‌ی ساندویچ (فشار) داریم $x_t\to c^+$. اما در این حالت بنا به فرض $\lim\limits_{x_t\to c^+} f'(x_t)=L$ بنابراین:

$$f'_+(c)=\lim_{t\to c^+}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}=\lim_{t\to c^+}f'(x_t)=\lim_{x_t\to c^+}f'(x_t)=L$$

استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $f'_-(c)=L$ لذا $f'_+(c)=f'_-(c)=L$ بنابراین $f'(c)=L$. ضمناً مثال ۲۰ نشان می‌دهد که عکس این قضیه غلط است.

خاصیت مقدار میانی مشتق‌ها

قبلاً در مثال ۱ـ ت، تابعی معرفی شد که برای آن f' همواره موجود بود در حالیکه f' در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته نبود، اما چنین نیست که ناپیوستگی‌های f' از هر نوعی باشند! در این قسمت نشان می‌دهیم که برای هر تابع f، تابع f' در صورت وجود از خاصیت مقدار میانی برخوردار است بیان دقیق این خاصیت در قضیه‌ی زیرین آمده است. این خاصیت نشان می‌دهد که اگر تابعی چون g بخواهد تابع اولیه‌ای مثل G داشته باشد (معادلاً اگر Gای موجود باشد که در معادله‌ی $G'=g$ صدق کند) لازم است که g دارای خاصیت مقدار میانی باشد. پس برای توابعی که خاصیت مقدار میانی ندارند (مانند تابع علامت و ...) نمی‌توان تابع اولیه‌ای یافت.

قضیه۱۰: (خاصیت مقدار میانی تابع مشتق) فرض کنیم تابع حقیقی f بر $[a,b]$ مشتق پذیر و عدد حقیقی λ بین $f'(a)$ و $f'(b)$ باشد در این صورت نقطه‌ای مانند $x\in(a,b)$ وجود دارد که $f'(x)=\lambda$.

نتیجه۲:

الف) هرگاه $f'\neq 0$ آنگاه یا $f'>0$ یا $f'<0$. یعنی اگر $f'\neq 0$ آنگاه f' همواره دارای یک نوع علامت بوده و تغییر علامت نمی‌دهد.

ب) هرگاه f بر $[a,b]$ مشتق پذیر باشد آنگاه ناپیوستگی‌های f' در صورت وجود از نوع دوم‌اند. یعنی f' نمی‌تواند ناپیوستگی ساده (جهشی) داشته باشد.

چون اگر f' ناپیوستگی ساده داشته باشد این ناپیوستگی باعث می‌شود که f' خاصیت مقدار میانی خود را از دست بدهد.

نقاط پیوستگی f و f'

دیدیم که f' در صورت وجود خاصیت مقدار میانی دارد و ناپیوستگی‌های f' نمی‌تواند هر چیزی باشند جالب است بدانید که f' نمی‌تواند همه جا ناپیوسته باشد هر چند که می‌تواند تقریباً همه جا در $[a,b]$ ناپیوسته باشد. تقریباً همه جایی یک اصطلاح مربوط به نظریه‌ی اندازه است که در ضمیمه این فصل تشریح شده است. به طور خلاصه، وقتی گفته می‌شود خاصیتی به طور تقریباً همه‌جایی برقرار است یعنی مجموعه نقاطی که برای آنها آن خاصیت نقض می‌شود دارای اندازه‌ی صفر (یا قابل اغماض) است. اگر f مشتق پذیر باشد، f' بایستی در یک زیر مجموعه‌ی ضخیم چگالی از $[a,b]$ پیوسته باشد. مفهوم ضخیم در تعریف ۴ در زیر آمده است. اثبات این مطلب بر اساس قضیه‌ی کاتگوری بئر و نوشتن $f'(x)$ بر حسب حد نقطه به نقطه‌ی خارج قسمت‌های نیوتنی است یعنی $f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\phi_n(x)$ که هر خارج قسمت نیوتنی ϕ_n پیوسته است و استفاده از قضایایی مبنی بر ارتباط نقاط پیوستگی f' و ϕ_nها، در فصل سوم در این رابطه شرح داده شده است. [ر.ک فصل سوم تذکر ۴]

❖ **تعریف۳:** اگر X یک فضای متریک باشد، مجموعه‌ی $G\subset X$ را یک مجموعه‌ی G_δ گویند هرگاه به صورت اشتراک شمارایی از زیر مجموعه‌های باز X باشد، مثلاً $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ که هر G_n باز است. مجموعه‌ی $F\subset X$ را یک مجموعه‌ی F_σ گویند هرگاه به صورت اجتماع شمارایی از زیر مجموعه‌های بسته‌ی X باشد، مثلاً $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ که هر F_n بسته است. [حروف یونانی δ و σ به ترتیب اختصار کلمات آلمانی Durchschnitt و Summe هستند که به ترتیب به معنای اشتراک و اجتماع هستند] توجه دارید که لزوماً اشتراک شمارای مجموعه‌های باز، باز نیست و همین‌طور لزوماً اجتماع شمارای مجموعه‌های بسته، بسته نیست. در ضمن: «یک مجموعه F_σ است اگر و تنها اگر متممش G_δ باشد.» و « یک مجموعه G_δ است اگر و تنها اگر متممش F_σ باشد.»

برای یک تابع $f:X\to\mathbb{R}$ این امکان هست که در هر نقطه‌ای ناپیوسته باشد مثلاً اگر $X=\mathbb{R}$ و $f=\chi_{\mathbb{Q}}$ تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی اعداد گویا باشد. بررسی نقاط پیوستگی و ناپیوستگی یک تابع خیلی آموزنده است. در این راستا قضیه‌ای به صورت زیر داریم:

قضیه۱۱: فرض کنیم X یک فضای متری و $f:X\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، همچنین فرض کنید D_f نمایانگر مجموعه نقاط ناپیوستگی f و C_f نمایانگر مجموعه نقاط پیوستگی تابع f باشد در این صورت D_f یک مجموعه‌ی F_σ است. بویژه C_f یک مجموعه G_δ خواهد شد.

نکته۶: هیچ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود ندارد که فقط در نقاط گویا پیوسته باشد چون مجموعه‌ی اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، یک مجموعه‌ی G_δ نیست. البته توجه دارید که تابعی چون $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هست که فقط در نقاط گنگ پیوسته باشد. این تابع، همان تابع خط کش ریمان مثال ۵ است. در ضمن این تابع هیچ جا مشتق پذیر نیست. از طرف دیگر توابع پیوسته‌ای هستند که هیچ جا مشتق پذیر نیستند. در ضمن تعداد این توابع خیلی بیشتر از توابعی است که مشتق دارند! قضیه‌ی زیر بیانگر این امر است (برای اثبات آن به کتاب توپولوژی مانکرز بخش ۴۹ رجوع شود)

قضیه۱۲: فرض کنید $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ تابع پیوسته‌ای مانند $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ با شرط $|h(x)-g(x)|<\varepsilon\ \ \forall x\in[a,b]$ وجود دارد که هیچ جا مشتق پذیر نیست!

پدیده‌های مشابهی برای اعضای فضاهای دیگری روی می‌دهد، برای ذکر این پدیده‌ها، به اصطلاحاتی نوین نیاز داریم:

❖ **تعریف۴:** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. در این صورت.

الف) $F\subseteq X$ را مجموعه‌ای از نوع اول یا لاغر گویند هرگاه F یک F_σ از هیچ جا چگال‌ها باشد یعنی $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ که هر F_n بسته و هیچ جا چگال است.

ب) $G\subseteq X$ را مجموعه‌ای از نوع دوم یا ضخیم گویند هرگاه G از نوع اول نباشد، معادلاً G یک G_δ از چگال‌ها باشد یعنی $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ که هر G_n باز و چگال است.

قضیه۱۳: (کاتگوری بئر): اگر (X,d) یک فضای متری کامل باشد آنگاه هر زیر مجموعه‌ی ضخیم آن چگال است. بویژه اگر (X,d) فضای متری کامل و ناتهی باشد آنگاه (X,d) لاغر نیست یعنی اگر $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ که هر F_n بسته است آنگاه $n_0\in\mathbb{N}$ چنان موجود است که $\operatorname{int}(F_{n_0})\neq\phi$.

توجه شود فضایی را که در آن هر زیرمجموعه‌ی ضخیم، چگال باشد؛ فضای بئر می‌نامند. با این اصطلاح، قضیه‌ی فوق می‌گوید که فضاهای متری کامل، فضاهای بئر هستند. قضیه‌ی بالا یک قضیه‌ی وجودی است و اثبات قضیه‌ی ۱۲ بر آن استوار است. بعداً خواهید دید که مجموعه‌ی $C([a,b])$ به متریک مناسبی به نام متریک سوپریممی تجهیز شده که تحت آن متریک، کامل است و قضیه‌ی بئر را در مورد این فضا زیاد به کار می‌برند، قضیه‌ی ۱۲ هم در مورد این فضاست.

❖ **تعریف۵:** فرض کنید (X,d) فضای متریک کاملی باشد. اگر تمام نقاط واقع در یک زیرمجموعه‌ی ضخیم آن در شرطی (خاصیتی) صدق کنند گویند آن شرط، عمومی یا (نوعی) است؛ یا می‌گویند که اکثر نقاط فضا در آن شرط صدق می‌کنند معادلاً اگر خاصیتی برای همه‌ی نقاط X، مگر برای زیرمجموعه‌ی لاغری از آن، برقرار باشد آن خاصیت را عمومی (یا نوعی، یا کلی) می‌نامند.

چند مثال از خواص عمومی:

عنصر «عمومی» $\mathbb{R}$، گنگ است.

ماتریس مربعی «عمومی»، دترمینانش ناصفر است. یعنی معکوس‌پذیر است.

تبدیل خطی «نوعی»، $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$، یکریختی است.

تبدیل خطی «نوعی»، $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m-k}$، پوشا است.

تبدیل خطی «نوعی»، $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+k}$، یک به یک است.

جفت خطوط عمومی در $\mathbb{R}^3$ متنافرند.

صفحه‌ی عمومی در $\mathbb{R}^3$، هر سه محور را در سه نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند.

چندجمله‌ای عمومی از درجه‌ی n، دارای n ریشه‌ی متمایز است.

عنصر عمومی ℓ_∞ واگرا است. ℓ_∞ فضای همه‌ی دنباله‌های کراندار است.

عنصر عمومی $C([a,b])$، هیچ جا مشتق‌پذیر نیست، حتی روی هیچ زیر بازه‌ای از $[a,b]$ یکنوا نیست.

لاغر بودن و ضخیم بودن در تعریف بالا، خواصی توپولوژیک هستند و به متریک فضا وابسته نیستند. اما باید توجه کرد که «عمومی» بودن یک خاصیت شدیداً به متریک فضای وابسته است مثلاً اگر e متریک اقلیدسی باشد آنگاه مجموعه‌ی $\mathbb{Q}^c$ در $(\mathbb{R},e)$ ضخیم بوده و عنصر نوعی $(\mathbb{R},e)$، گنگ است در حالی که اگر d متریک گسسته باشد عنصر نوعی $(\mathbb{R},d)$ نمی‌تواند گنگ باشد. در حالت اخیر عنصر نوعی $(\mathbb{R},d)$ حقیقی است! چنانچه خواننده اندکی آشنایی از نظریه‌ی اندازه داشته باشد (ر.ک. فصل بعد) خواهد دید که «خاصیت عمومی» در فضاهای متریک و توپولوژیک بسیار شبیه «خاصیت تقریباً همه جایی» در نظریه‌ی اندازه است، معادلاً مجموعه‌های لاغر و مجموعه‌های با اندازه‌ی صفر شبیه هم هستند، البته این دو خاصیت یکی نیستند چون یکی از آنها در حوزه‌ی توپولوژی است و دیگری در حوزه‌ی نظریه‌ی اندازه، به هر حال در فصل سوم درباره‌ی نقاط پیوستگی f و f' بحث‌های بیشتری خواهیم داشت.

مطلب زیر بیان می‌کند که هرگاه f' روی $[a,b]$ پیوسته باشد، f روی $[a,b]$ بطور یکنواخت مشتق پذیر است.

تذکر۵: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد. در این صورت f' روی $[a,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ ، $\delta(\varepsilon)>0$ یافت شود به‌طوری که برای هر $x,y\in[a,b]$ با شرط $0<|x-y|<\delta(\varepsilon)$ داشته باشیم $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|<\varepsilon$.

برهان: اگر شرط $\varepsilon-\delta$ برقرار باشد، پیوستگی f' با توجه به نامساوی مثلثی $|f'(t)-f'(x)|\le\left|f'(t)-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|+\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|$ بدست می‌آید اما بالعکس اگر f' روی $[a,b]$ پیوسته باشد پس پیوسته یکنواخت هم خواهد بود. حالا برای $\varepsilon>0$ داده شده $\delta(\varepsilon)>0$ هست که اگر $x,t\in[a,b]$ و $|x-t|<\delta(\varepsilon)$ آنگاه $|f'(x)-f'(t)|<\varepsilon$ (*). x را ثابت فرض کنید اکنون اگر $y\in[a,b]$, $y\neq x$ بدون کاستن از کلیت فرض کنید $y<x$ و اکنون با بکار بردن قضیه‌ی مقدار میانگین برای تابع f روی بازه‌ی $[y,x]$ نتیجه می‌گیریم $t\in(y,x)$ هست که $f'(t)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. حال با جایگذاری این کسر در رابطه‌ی (*) بجای $f'(t)$ نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

مثال۱۶: فرض کنید تابع $f:(a,b)\to[c,d]$ پوشا و مشتق پذیر باشد در این صورت

۱) f' دقیقاً یک ریشه دارد.

۲) f' حداکثر دو ریشه دارد.

۳) f' حداقل دو ریشه دارد.

۴) f' ممکن است ریشه داشته باشد یا نداشته باشد.

پاسخ: گزینه «۳» به علت پوشایی f، نقاط q,p از دامنه‌ی f چنان موجودند که $f(p)=c, f(q)=d$ اکنون f در نقطه‌ی p مینیمم موضعی و در نقطه‌ی q ماکزیمم موضعی دارد، $f'(p),f'(q)$ موجودند از طرفی p و q نقاط درونی دامنه‌ی f هستند لذا باید $f'(p)=f'(q)=0$.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۷: فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $[a,\infty)$ پیوسته و بر (a,∞) مشتق پذیر باشد در این صورت:

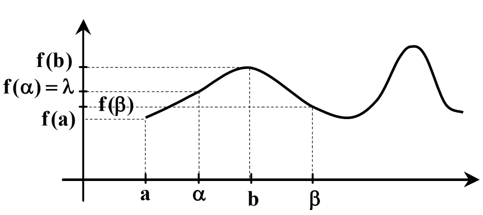
۱) اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(a)$ آنگاه حداقل نقطه‌ای مانند $c\in(a,\infty)$ موجود هست که $f'(c)=0$.

۲) اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(a)$ آنگاه حداکثر نقطه‌ای مانند $c\in(a,\infty)$ موجود هست که $f'(c)=0$.

۳) $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$

۴) $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

پاسخ: گزینه «۱» اگر برای $x\ge a$، $f(x)=f(a)$ آنگاه حکم واضح است. فرض کنید که نقطه‌ای مانند b هست که $a<b$, $f(a)\neq f(b)$ بدون کاستن از کلیت فرض کنید $f(a)<f(b)$ در این صورت طبق قضیه‌ی مقدار میانی برای λ، $f(a)<\lambda<f(b)$، می‌توان α را چنان یافت که $a<\alpha<b$ و $\lambda=f(\alpha)$. از طرفی چون $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(a)<f(b)$ پس با توجه به فرض پیوستگی f از قضیه‌ی مقدار میانی دوباره می‌توان نقطه‌ای β , $\beta>b$ را چنان یافت که $f(\beta)<f(b)$.



اکنون تابع f را روی بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ در نظر می‌گیریم. از قضیه‌ی مینی ـ ماکس نتیجه می‌شود که نقطه‌ی $c\in(\alpha,\beta)$ چنان موجود است که f در آن ماکزیمم خود را اختیار می‌کند اکنون با توجه به مفروضات مسأله چون $f'(c)$ موجود است لذا باید $f'(c)=0$. پس حداقل یک چنین c ی موجود است.

مثال۱۸: فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد. در این صورت:

۱) اگر $f(a)=f(b)=0$ آنگاه برای هر عدد حقیقی λ، نقطه‌ای مانند $x\in(a,b)$ هست که $f'(x)=\lambda f(x)$.

۲) اگر $f(a)<f(b)$ آنگاه نقطه‌ای مانند $x\in(a,b)$ هست که $f'(x)>0$.

۳) اگر $c\in(a,b)$ موجود باشد که $f(a)\le f(b)<f(c)$ آنگاه نقطه‌ای $x\in(a,b)$ هست که $f'(x)=0$.

۴) هر سه گزینه صحیح می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۴» ۱) قرار دهید $g(x)=e^{-\lambda x}f(x)$ این ضریب نمایی به ما کمک می‌کند که یک معادله دیفرانسیل کامل به دست بیاوریم. اکنون قضیه‌ی رُل را برای تابع g روی $[a,b]$ به کار می‌بریم چون g در آنجا پیوسته، روی (a,b) مشتق‌پذیر و $g(a)=g(b)=0$ لذا $c\in(a,b)$ وجود دارد که $g'(c)=0$.

$$0=g'(c)=-\lambda e^{-\lambda c}f(c)+e^{-\lambda c}f'(c)\Rightarrow e^{-\lambda c}\{-\lambda f(c)+f'(c)\}=0\Rightarrow f'(c)=\lambda f(c)$$

۲) چون اگر برای هر $x\in(a,b)$, $f'(x)\le 0$ آنگاه تابع f نزولی خواهد شد اما این با فرض $f(a)<f(b)$ در تناقض است.

۳) اولاً طبق قضیه‌ی مینی ـ ماکس، f ، ماکزیمم مطلق خود را بر $[a,b]$ در نقطه‌ی x اتخاذ می‌کنند و با توجه به فرض $f(a)\le f(b)<f(c)$ این ماکزیمم در نقاط انتهایی نیست. لذا ماکزیمم مورد نظر در یک نقطه درونی دامنه‌ی تابع اتفاق می‌افتد که با توجه به فرض وجود $f'(x)$ داریم $f'(x)=0$.

مثال۱۹: کدام گزینه درست است؟

۱) تابع پیوسته‌ای مانند $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ هست که مشتقش در یک زیر مجموعه‌ی ناشمارای سره‌ی $[a,b]$ مثل A موجود نیست و f' روی $[0,1]\setminus A$ صفر است و با این وجود f تابع ثابت هم نیست.

۲) اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد آنگاه $f'([a,b])$ می‌تواند اجتماع دو بازه‌ی مجزا باشد.

۳) اگر تابع f، تابعی فرد باشد، f' در صورت وجود فرد است.

۴) فرض کنید f بر $[a,b]$ تابعی حقیقی و f'' روی (a,b) موجود و همواره ناصفر است اگر $f(a)=f(b)=0$ آنگاه f در (a,b) ریشه دارد.

پاسخ: گزینه «۱»

۱) فرض کنید $A=C$ مجموعه‌ی کانتور باشد در این صورت تابع زیر که به تابع کانتور مشهور است دارای خاصیت مذکور است برای ساختن این تابع ابتدا مقدماتی نیاز است.

هر $x\in[0,1]$ دارای یک بسط به پایه‌ی ۳ می‌باشد یعنی $x=\sum_{j=1}^{\infty}a_j 3^{-j}$ که $a_j\in\{0,1,2\}$ این بسط یکتا ست مگر اینکه برای اعداد صحیح k,p , $x=p3^{-k}$. در حالت اخیر x دارای دو بسط است: برای یکی از این بسطها اگر $j>k$ آنگاه $a_j=0$ و برای دیگری اگر $j>k$ آنگاه $a_j=2$.
اگر عدد صحیح p بر ۳ بخش پذیر نباشد، یکی از این بسطها در محل k اُم خود $a_k=1$ را دارد و دیگری در همین مکان «۲ یا $a_k=0$» را دارد. لذا قرار داد می‌کنیم که آن بسطی از x را انتخاب کنیم که در مکان k اُم ۲ یا $a_k=0$ را دارد. پس می‌بینیم که:

$$a_1=1\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$$

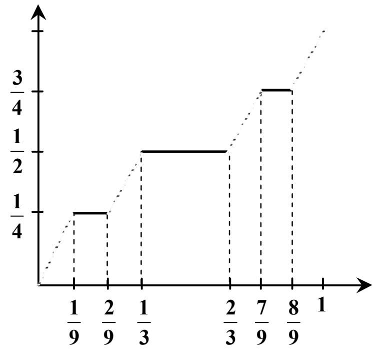
$$a_1\ne 1,\ a_2=1\Leftrightarrow \frac{1}{9}<x<\frac{2}{9}\quad \text{یا}\quad \frac{7}{9}<x<\frac{8}{9}$$

و همین‌طور. در ضمن برای $x=\sum a_j 3^{-j}$, $y=\sum b_j 3^{-j}$ داریم:

$$x<y\Leftrightarrow \exists n\ \text{s.t}\ a_n<b_n\ ;\ a_j=b_j\ \text{for}\ 1\le j<n$$

در این صورت مجموعه‌ی کانتور C برابر است با تمام آن $x\in[0,1]$ که $x=\sum a_j 3^{-j}$ و $a_j\in\{0,2\}$. از طرفی اگر I_j یک زیر بازه‌ی $[0,1]$ باشد که برای به دست آوردن C حذف شده است آنگاه نقاط انتهایی آن به فرم $p3^{-k}$ هستند و توجه داریم که این نقاط انتهایی را به فرمی بنویسیم که ۲ یا $a_k=0$. اکنون تابع کانتور $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{2}\right)2^{-i} & ;\quad x=\sum_{i=1}^{\infty}a_i 3^{-i}\in C\\ \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{b_i}{2}\right)2^{-i} & ;\quad \text{در بسته آوردن مجموعه‌ی کانتور باشد } I_j \text{ نقطه‌ی انتهایی سمت چپ هر بازه‌ی محذوف مثل } x=\sum_{i=1}^{\infty}b_i 3^{-i}\end{cases}$$



دقت شود که f روی بازه‌های محذوف ثابت است (به شکل رجوع شود). نشان می‌دهیم f پیوسته است.
اگر حتی قرار داد بالا را متوجه شده‌اید می‌توان تعریف جدیدی از f ارائه داد به این صورت که فرض کنید $x \in [0,1]$ دارای بسط بر مبنای ۳ به صورت $x = (0/x_1x_2\ldots)_3$ باشد، آنوقت بسط دو ـ دویی $y = f(x)$ به صورت $(0/y_1y_2\ldots)_2$ است که در آن:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \exists k < i \quad s.t \quad x_k = 1 \\ 1 & x_i = 1, \nexists k < i \quad s.t \quad x_k = 1 \\ \frac{x_i}{2} & x_i = 0 \quad \text{یا} \quad x_i = 2 \;, \nexists k < i \quad s.t \quad x_k = 1 \end{cases}$$

بهرحال با توجه به قرارداد اولیه‌ی ما راجع به بسط سه ـ سه‌ای عناصر $[0,1]$؛ تعریف $y = f(x)$ در ضابطه‌ی قبلی خوش تعریف است اما خوش تعریفی تعریف جدید تابع کانتور نیاز به اثبات دارد. برای پیوستگی f فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. عدد طبیعی k را چنان اختیار کنید که $\frac{1}{2^k} \le \varepsilon$.

اگر $|x - x'| < \frac{1}{3^k}$ آنگاه در بسط سه ـ سه‌ای x و x'؛ k محل اول برابرند یعنی اگر $x = (0/x_1x_2\ldots)_3$ و $x' = (0/x'_1x'_2\ldots)_3$ آنگاه $x_1 = x'_1, \ldots, x_k = x'_k$ در نتیجه بنا به تعریف $y = f(x)$ داریم که $|f(x) - f(x')| \le \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$ و لذا f پیوسته است.

۲) گزینه ۲ غلط است چون $f'([a,b])$ طبق خاصیت مقدار میانی مشتق باید هم بند باشد.
۳) گزینه ۳ غلط است چون اگر f فرد باشد f' در صورت وجود زوج است. و اگر f زوج باشد f' در صورت وجود فرد است.
۴) اصلاً f در (a,b) نمی‌تواند ریشه داشته باشد چون اگر $c \in (a,b)$ چنان موجود باشد که $f(c) = 0$ آنگاه قضیه‌ی رُل را بر $[a,c]$, $[c,b]$ به کار می‌بریم تا $d_1 \in (a,c)$ و $d_2 \in (c,b)$ یافت شوند که $f'(d_1) = f'(d_2) = 0$ دوباره قضیه‌ی رُل را در مورد f' به کار می‌بریم لذا باید $d \in (d_1, d_2)$ موجود باشد که $f''(d) = 0$ و این آشکارا با فرض در تناقض است.

مثال۲۰: در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ **,** $1 < \alpha \le 2$ **چه می‌توان گفت؟**

۱) $f'(0) = 0$, f' در صفر پیوسته است.
۲) $f'(0) = 0$, f' در صفر ناپیوسته است.
۳) $f'(0)$ موجود و مخالف صفر است.
۴) $f'(0)$ موجود نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $\alpha - 1 > 0$ پس:

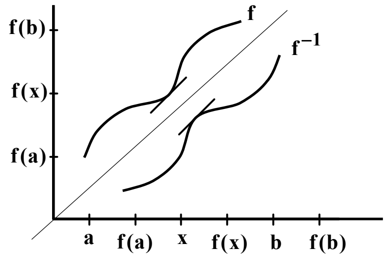
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x} = 0$$

از طرفی اگر $x \neq 0$ آنگاه $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos\frac{1}{x}$ چون برای $-1 < \alpha - 2 \le 0$ حد $\lim_{x \to 0} x^{\alpha-2} \cos\frac{1}{x}$ موجود نیست بنابراین $\lim_{x \to 0} f'(x)$ موجود نیست پس f' در صفر پیوسته نیست. این مثال نشان می‌دهد که عکس قضه‌ی ۹ درست نیست چون گرچه $f'(c)$ موجود است اما نمی‌توان گفت که $\lim_{x \to c} f'(x)$ موجود است. در ضمن طبق نتیجه ۲ این ناپیوستگی از نوع دوم است.

مشتق تابع معکوس

در اینجا دنبال شرایطی می‌گردیم که مشتق پذیری f مشتق‌پذیری تابع معکوسش، f^{-1} را ایجاب کند و حتی فرمولی برای محاسبه‌ی مشتق f^{-1} ارائه می‌کنیم. اما دقت کنید چنین نیست که همیشه مشتق‌پذیری f، مشتق‌پذیری f^{-1} را ایجاب کند. مثلاً تابع $f(x) = x^3$ در هر نقطه‌ای مشتق‌پذیر است اما تابع معکوس آن $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ در صفر مشتق‌پذیر نیست. طبیعی است که دنبال قضیه‌ی با این مضمون بگردیم که مشتق‌پذیری f^{-1} را به مشتق‌پذیری f ربط دهد چون قبلاً درباره‌ی توابع پیوسته تحت شرایطی از پیوستگی f، پیوستگی f^{-1} را نتیجه گرفتیم (ر.ک به کتاب رودین قضیه‌ی ۴-۱۷) آنجا شرایطی توپولوژیکی روی دامنه و بُرد f گذاشتیم، حال سوال این است که در مورد مشتق‌پذیری شرایط تحمیلی ما کدام است؟ در ضمن وقتی از f^{-1} اسم می‌بریم فرض بر وجود f^{-1} است لذا یک به یک بودن f مورد نیاز است.

قضیه۱۴: (تابع معکوس): اگر تابع $f:(a,b)\to(c,d)$ مشتق پذیر و پوشا بوده و $f'(x)$ هیچ گاه صفر نشود آنگاه f یک همسانریختی (یعنی یک دو سویی که خودش و معکوسش پیوسته‌اند) بوده و معکوسش مشتق پذیر است که با ضابطه‌ی $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ در نقطه‌ی $y=f(x)$ داده می‌شود.



برهان: چون f' هیچگاه صفر نمی‌شود با توجه به خاصیت مقدار میانی f' (نتیجه‌ی ۲ـ الف)، همواره $f'>0$ یا $f'<0$ بدون کاستن از کلیت فرض کنید $f'>0$ لذا f اکیداً صعودی است و چون مشتق‌پذیری، پیوستگی را نتیجه می‌دهد پس f همسانریختی است. برای بررسی مشتق‌پذیری f^{-1} در نقطه‌ی $y\in(c,d)$، تعریف کنید: $\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-x$ و $x=f^{-1}(y)$ آنگاه $\Delta y=f(x+\Delta x)-y=\Delta f$ و $y=f(x)$. بنابراین:

$$\frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y}=\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

چون f همسانریختی است پس: $\Delta x\to 0$ اگر و تنها اگر $\Delta y\to 0$ بنابراین $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y}$ موجود و برابر $\frac{1}{f'(x)}$ است.

توجه کنید که برای به خاطر سپردن رابطه مشتق تابع معکوس کافی است از قاعده زنجیری برای $f^{-1}(f(x))=x$ و یا ارتباط بین شیب خط‌هایی که نسبت به نیمساز ربع اول نسبت به هم منعکس هستند استفاده کنید. ضمناً این قضیه به همراه قضایای تابع ضمنی و رتبه از قضایای مهم حساب دیفرانسیل چند متغیره هستند، این سه قضیه رفتار موضعی f را برحسب f' بیان می‌کند.

قاعده هوپیتال

قضیه۱۵: (هوپیتال): فرض کنید توابع حقیقی مقدار g,f در بازه‌ی (a,b) که $-\infty\le a<b\le+\infty$ مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x\in(a,b)$، $g'(x)\neq 0$ در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

الف) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ یا ب) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$

آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

چند تبصره راجع به قضیه‌ی هوپیتال:

الف) چنانچه در قسمت ب داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$، باز قضیه برقرار خواهد بود. البته این قسمت، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را نیز پوشش می‌دهد. ضمناً از قبل می‌دانید برای استفاده از قاعده‌ی هوپیتال هُنر این است که حالت‌های مبهم دیگر را به این دو حالت تبدیل کنیم.

ب) نقطه انتهایی سمت چپ بازه‌ی (a,b)، یعنی a، در اثبات قضیه بی‌تأثیر است و لذا قضیه برای حالتی که $x\to b$ نیز درست است.

پ) حد موجود در قضیه، حد در دستگاه وسعت یافته‌ی اعداد حقیقی است لذا A ممکن است $+\infty$ یا $-\infty$ هم باشد.

ت) حقیقی مقدار بودن g,f مهم است، چون در اثبات قضیه‌ی هوپیتال از قضیه‌ی مقدار میانگین استفاده می‌شود لذا ترتیب موجود در $\mathbb{R}$ برای آن ضروری است، بعداً با ذکر مثال نشان می‌دهیم که برای توابع مختلط مقدار مگر در حالت‌های خاص این قضیه کاربرد ندارد!

ث) چون $x\to a$ ، لذا کافی است که ما رفتار و مشتق‌پذیری توابع را در یک همسایگی حتی‌الامکان کوچک از a در نظر بگیریم لذا تا می‌توانید نقطه‌ی b را نزدیک به نقطه a اختیار کنید (و بالعکس برای حالت $x\to b$، نکته‌ی مشابهی می‌توان بیان کرد)

ج) «از این به بعد هنگام بکار بردن قضیه‌ی هوپیتال، خیلی نگران شرایط قضیه نباشید!» فقط شرط $g'\neq 0$ را بخاطر بسپارید! به هنگام استفاده از قاعده هوپیتال الگوریتم زیر نحوه کاربری این قاعده را نشان می‌دهد

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ \text{یا}\ \frac{c}{\infty}\ \xrightarrow{H:\ (g'\neq 0\ \text{در این بازه و}\ a\ \text{موجود بوده و}\ \text{به}\ a\ \text{در یک بازه‌ی منتهی}\ g'\ \text{و}\ f')}\ \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \xrightarrow{H}\cdots\xrightarrow{H}A$$

توجه شود که باید $a,c,A\in\mathbb{R}^*$. قضیه‌ی هوپیتال ابزار نیرومندی در حل مسائل است و باعث صرفه جویی در اثبات‌ها می شود مخصوصاً در مواقعی که بتوان از قضیه‌ی مقدار میانگین هم استفاده کرد، ارجحیت با قاعده‌ی هوپیتال است.

مثال۲۱: فرض کنید تابع f در یکی از همسایگی‌های نقطه‌ی x تعریف شده باشد. در مورد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ **چه می‌توان گفت؟**

۱) اگر $f'(x)$ موجود باشد آنگاه حد مذکور برابر $2f'(x)$است.
۲) مساوی $f''(x)$ است.
۳) اگر $f''(x)$ موجود باشد آنگاه حد مذکور برابر $f''(x)$است.
۴) مساوی $2f''(x)$ است.

پاسخ: گزینه «۳» از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم (البته با صرف وقت بیشتر می‌توان از قضیه‌ی مقدار میانگین هم استفاده کرد!). به علت وجود $f''(x)$؛ توابع f',f در نقطه‌ی x پیوسته‌اند لذا به هنگام محاسبه‌ی حدود برای f',f اگر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ برخورد کردیم قاعده‌ی هوپیتال مشکل گشاست.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\xlongequal{\text{هوپیتال}}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-0+(-1)f'(x-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)\pm f'(x)-f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{(-h)\to 0}\frac{f'(x+(-h))-f'(x)}{(-h)}=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)=f''(x)$$

تذکر۶: دقت شود که ممکن است $f''(x)$ موجود نباشد اما حد مذکور موجود باشد مثلاً بری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-2f(0)+f(0-h)}{h^2}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-0-h^2}{h^2}=0\\[2ex] \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h^2-0+(-h)^2}{h^2}=0\end{cases}$$

لذا حد مذکور برابر صفر است و این در حالی است که $f''(0)$ موجود نیست.

مثال۲۲: در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **کدام گزینه درست است؟**

۱) C^∞ است اما C^ωنیست.
۲) برای هر عدد طبیعی $f^{(n)}(0)=0$
۳) برای هرn، $f^{(n)}$ در صفر پیوسته است.
۴) همه‌ی موارد

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر n , $f^{(n)}(0)=0$.کافی است درستی گزینه‌ی ۲ را نشان دهیم. هنگام اثبات می‌توان در برخی جاها از قاعده‌ی هوپیتال و قضیه‌ی ۹ بهره بُرد اما در اینجا اثباتی آورده می‌شود که اندکی متفاوت است. با استقرا می‌توان اثبات کرد که برای هر چند جمله‌ای حقیقی مانند $p(x)$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0 \qquad (*)$$

اکنون ادعا می‌کنیم که برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x\neq 0$؛ $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}p_{3n}(\frac{1}{x})$ که در آن $P_{3n}(t)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجه‌ی 3n است $(n\in\mathbb{N})$. از استقرا استفاده می‌کنیم [از قاعده‌ی هوپیتال و قضیه‌ی ۹ نیز می‌توان استفاده کرد.]

برای $n=0$ داریم $f^{(0)}(x)=f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{x^2}}P_0(\frac{1}{x})$ که در آن $P_0(t)=1$.

برای $n=1$ نیز $f^{(1)}(x)=f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}=e^{-\frac{1}{x^2}}P_3(\frac{1}{x})$ که در آن $P_3(t)=2t^3$.

حالا فرض کنید ادعای مذکور برای $n=k$بر قرار باشد، نشان می‌دهیم برای $n=k+1$ نیز برقرار است:

$$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)}(x))'\xlongequal{\text{فرض استقرا}}(e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k}(\frac{1}{x}))'=e^{-\frac{1}{x^2}}\{[2(\frac{1}{x})^3P_{3k}(\frac{1}{x})]-[(\frac{1}{x})^2P'_{3k}(\frac{1}{x})]\}$$

اما $[2t^3P_{3k}(t)]-[t^2P'_{3k}(t)]$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجه‌ی $3k+3$ است که اگر آن را با $P_{3k+3}(t)$ نشان دهیم آنگاه خواهیم داشت $f^{(k+1)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k+3}(\frac{1}{x})$. بنابراین ادعای مذکور طبق استقرای ریاضی اثبات شد. حالا از این ادعا بهره می‌بریم تا نشان دهیم که $\forall n\ f^{(n)}(0)=0$. برای $n=0$ که واضح است. فرض کنید که برای $n=k$ برقرار باشد یعنی $f^{(k)}(0)=0$ نشان خواهیم داد که برای $n=k+1$ نیز داریم $f^{(k+1)}(0)=0$ و دوباره حکم بنا به استقرای ریاضی برقرار است. حالا:

$$\frac{f^k(x)-f^k(0)}{x-0} \overset{\text{فرض استقرا}}{=\!=\!=} \frac{f^k(x)}{x} \overset{\text{ادعای بالا}}{=\!=\!=} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k}(\frac{1}{x})}{x}=\frac{tP_{3k}(t)}{e^{t^2}}=(\frac{tP_{3k}(t)}{e^t})(\frac{e^t}{e^{t^2}})$$

توجه دارید که در قسمت آخر تساوی بالا از تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ استفاده شده است لذا $t\to\pm\infty \Leftrightarrow x\to 0^{\pm}$ بنابراین:

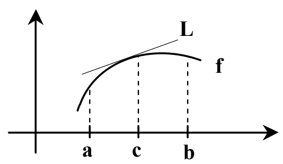
$$f^{k+1}(0)=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{f^k(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{t\to\pm\infty}(\frac{tP_{3k}(t)}{e^t})(\frac{e^t}{e^{t^2}}) \overset{\text{از (*)}}{=\!=} 0$$

برای گزینه‌ی ۳ شبیه همین رابطه‌ی خط بالا می‌توان دید که: $\lim\limits_{x\to 0}f^{(n)}(x)=f^{(n)}(0)=0$. لذا $f^{(n)}$ در صفر پیوسته است.

برای گزینه ۱ اگر بسط تیلور را حول صفر بنویسیم چون ضرایب a_n سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nh^n$ از رابطه‌ی $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ به دست می‌آیند پس نتیجه می‌شود که سری صفر است در حالیکه تابع f حول صفر، صفر نیست. لذا تابع f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است (هموار است) اما تحلیلی نیست.

قضیه‌ی تیلور

هرگاه f در نقطه‌ی c مشتق پذیر باشد، آنگاه f در مجاورت c تقریباً تابعی خطی است یعنی وقتی که x-c کوچک باشد، معادله‌ی $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$ تقریباً درست است (می‌دانید که این معادله یک جمله‌ی خطا در طرف راست می‌خواهد که البته به نقطه‌ی c وابسته است). تعبیر هندسی این معادله (و البته در کل تعبیر هندسی مشتق) این است که تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ در حالت کلی زیر مجموعه‌های $[a,b]$ را به صورت غیرخطی به $\mathbb{R}$ می‌نگارد اما f' نشان‌دهنده‌ی قسمت خطی این نگاشتن است چون معادله‌ی تقریب بالا برای f، خطی بوده و زیر مجموعه‌های $[a,b]$ را به صورت خطی به $\mathbb{R}$ می‌نگارد (به شکل رجوع شود).



خط L خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی c است. در محاسبات تقریبی در همسایگی‌های کوچک c بجای محاسبه‌ی مقادیر f در آن همسایگی‌ها، از مقادیر L در این همسایگی‌ها استفاده می‌شود (مخصوصاً هنگامی که ضابطه‌ی f پیچیده بوده و محاسبه‌ی مستقیم $f(c)$ دردسرآفرین باشد).

اما چنانچه بدانیم که f مشتقات مراتب بالاتری دارد، قضیه‌ی تیلور اطلاعات دقیق‌تری در مورد تقریب مقادیر f به ما می‌دهد. این قضیه f را با یک چند جمله‌ی از درجه‌ای مناسب تقریب می‌زند و همان‌طور که می‌دانید محاسبه‌ی مقدار آن چند جمله‌ای در نقطه‌ی $x=c$ معمولاً ساده‌تر از محاسبه‌ی مستقیم $f(c)$ است. بهرحال این محاسبه خطایی هم دارد، اما قضیه‌ی تیلور عبارت مفیدی برای محاسبه‌ی خطای حاصل از این تقریب بدست می‌دهد.

قضیه۱۶: (تیلور): فرض کنیم f یک تابع حقیقی بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ بوده و n عددی طبیعی باشد. همچنین فرض کنید $f^{(n-1)}$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر باشد (یعنی $f^{(n)}$ بر (a,b) موجود باشد). c را از بازه‌ی $[a,b]$ انتخاب کرده و به کمک c یک چند جمله‌ای تعریف می‌کنیم:

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(t-c)^k$$

در این صورت برای هر $x\in[a,b]$ و $x\neq c$ نقطه‌ای مانند η بین c,x هست که:

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}(x-c)^n$$

نکته۷:

الف) اگر $n=1$، آنگاه حکم قضیه بیان می‌کند: η بین c,x هست که $f(x)=f(c)+f'(\eta)(x-c)$ و این همان قضیه‌ی مقدار میانگین است. به هر حال طبق قضیه‌ی تیلور f را می‌توان با یک چند جمله‌ای از درجه $n-1$ تقریب زد و با دانستن کران‌های $|f^{(n)}(\eta)|$ می‌توان خطا را محاسبه کرد.

ب) چنانچه تابع f از کلاس C^{∞} باشد آنگاه سری تیلور آن حول c، چند جمله‌ای تیلور نامتناهی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ است. قبلاً در حسابان، سری تیلور توابع خوبی ! مثل $e^x,\cos x,\sin x,\ldots$ را محاسبه کرده‌اید، این توابع تحلیلی‌اند: چون سری تیلور آنها به خود تابع همگرا است، یعنی آن توابع را به عنوان سری توانی بیان می‌کنند. در حالت کلی سری تیلور یک تابع هموار لازم نیست که به خود تابع همگرا شود و حتی ممکن است خودسری واگرا شود. مثلاً برای توابع $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ سری تیلور (حول نقطه‌ی صفر) به خود تابع همگرا نیست. مثال سری تیلور واگرا را می‌توان به کمک همین توابع ساخت. همگرایی یک سری تیلور به این مربوط است که با افزایش n، مشتق مرتبه‌ی nاُم چقدر افزایش می‌یابد. در فصل چهارم شرایط لازم و کافی برای اینکه بدانیم چه وقت یک تابع هموار، تحلیلی است ارائه می‌شود. اما به عنوان یک نکته‌ی اضافی، یک شرط کافی بیان می‌کنیم:

« فرض کنید تابع f هموار و عددی مثبت مانند M موجود باشد به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $|f^{(n)}|<M$ آنگاه f تحلیلی است».

دقت شود که در آنالیز مختلط به خاطر سرشت میدان مختلط $\mathbb{C}$، تحلیلی بودن با مشتق پذیری (حتی مشتق پذیری مرتبه‌ی اول) هم ارز است، اما در آنالیز حقیقی چنین نیست. چون در میدان $\mathbb{C}$ از بی‌نهایت مسیر دلخواه می‌توان به یک عدد مختلط نزدیک شد اما در میدان $\mathbb{R}$ فقط از دو سمت راست و چپ می‌توان به یک عدد حقیقی نزدیک شد. بخاطر سرشت میدان $\mathbb{C}$ آنالیز مختلط دارای قضیه‌های ساده و کلی و در عین حال عمیق است، اما در آنالیز حقیقی کمتر چنین است و استثناهای زیادی داریم. انگار از بین دو برادر آنالیز حقیقی و مختلط؛ آنالیز مختلط برادر خوب و آنالیز حقیقی برادر بد است!

پ) جمله‌ی $R_n=\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}(x-c)^n$، باقیمانده نام دارد، این باقیمانده را فُرم لاگرانژ از باقیمانده یا باقیمانده‌ی لاگرانژ نامند. توجه شود گاهی می‌نویسند $\eta=c+\theta(x-c)$ که در آن $\theta\in(0,1)$. فرم‌های دیگری از باقیمانده را می‌توان برای قضیه‌ی تیلور به دست آورد، یکی از این فرم‌ها، فرم کوشی از باقیمانده است و با ضابطه‌ی $R_n=(1-\theta)^{n-1}\frac{f^{(n)}((1-\theta)c+\theta x)}{(n-1)!}(x-c)^n$ برای یک θ، $0<\theta<1$ داده می‌شود. این دو فرم را می‌توان از فرم زیر که به فرم شلومیلچ ـ روشه [schlomilch- Roche] مشهور است با انتخاب p مناسب به دست آورد: با در نظر گرفتن مفروضات قضیه‌ی تیلور و همان $P(t)$، باقیمانده‌ی شلومیچ ـ روشه چنین است:

« برای هر $x\in[a,b]$, $x\neq c$ و برای هر $p>0$، عددی مانند θ، $0<\theta<1$، هست که برای آن $R_n=\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p}\frac{f^{(n)}((1-\theta)c+\theta x)}{(n-1)!}(x-c)^n$ بوضوح با انتخاب $p=n$, $p=1$ فرم‌های لاگرانژ و کوشی را می‌توان به دست آورد.

یک فرم دیگر برای R_n، فُرم پئانواست و با رابطه‌ی $R_n=o((x-c)^{n-1})$ تعریف می‌شود یعنی R_n باید طوری باشد که $\lim_{x\to c}\frac{R_n}{(x-c)^{n-1}}=0$.

مثال۲۳: **نشان دهید که اگر $|x|<1$ ، $s\in\mathbb{R}$ آنگاه فرمول دو جمله‌ای $(1+x)^s=1+sx+\frac{s(s-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}x^k+\cdots$ برقرار است.**

برهان: **یادآوری اینکه فرمول بالا، همان بسط ماکلورن تابع $f(x)=(1+x)^s$ است. به هر حال برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای تیلور $P(t)$ محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:**

$$f'(x)=s(1+x)^{s-1}\ ,\ f''(x)=s(s-1)(1+x)^{s-2}\ ,\ f'''(x)=s(s-1)(s-2)(1+x)^{s-3}$$

پس $f(0)=1$ و $f'(0)=s$ و $f''(0)=s(s-1)$ و $f'''(0)=s(s-1)(s-2)$ لذا $P(t)=1+st+\cdots+\frac{s(s-1)\cdots(s-n+2)}{(n-1)!}t^{n-1}$. بنابراین باید نشان دهیم که اگر $n\to\infty$ آنگاه $R_n\to 0$. فرم کوشی باقیمانده را در نظر می‌گیریم:

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x) = x^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}s(s-1)\cdots(s-n+1)(1+\theta x)^{s-n}$$

با تجزیه‌ی $(1+\theta x)^{s-n} = (1+\theta x)^{s-1}.(1+\theta x)^{1-n}$ خواهیم داشت:

$$R_n = (1+\theta x)^{s-1}\times\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\times\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)x^n}{(n-1)!}$$

$$R_n = a_n\times b_n\times c_n$$

چون $1-\theta<1+\theta x$ پس $|b_n|<1$، اگر نشان دهیم که a_n نیز کراندار است و $\lim_{n\to\infty}c_n=0$ کار تمام است.

$$s<1 \qquad |a_n|\le(1-|x|)^{s-1} \qquad ; \qquad s>1 \qquad |a_n|\le(1+|x|)^{s-1}$$

پس در هر حال، $M>0$ هست که $|a_n|\le M$. اما بـرای c_n داریـم کـه وقتـی $n\to\infty$, $|\frac{c_{n+1}}{c_n}|=|\frac{s-n}{n}||x|\to|x|$. عـدد L، $|x|<L<1$ را انتخاب می‌کنیم لذا $N\in\mathbb{N}$ هست کـه اگـر $n\ge N$ آنگـاه $|\frac{c_{n+1}}{c_n}|\le L$ در نتیجـه بـرای $n\ge N$ داریـم $|c_n|\le L^{n-N}|c_N|$، از اینـرو اگـر $n\to\infty$ داریم $c_n\to 0$. با کنار هم نهادن حقایق مربوط به a_n, b_n, c_n داریم: وقتی $|R_n|=|a_n||b_n||c_n|\le M\times1\times|c_n|\to 0$ و لذا اثبات تمام است.

مشتق گیری از توابع برداری

توابع برداری توابعی مثل $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ هستند که بردشان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^k$ است. برای این توابع می توان به راحتی مفهـوم مشتق را تعریف کرد. در این صورت برخی قضایای این فصل برای این نوع توابع معتبرند. مثلاً هرگاه توابع f_1,f_2 قسمت‌های حقیقـی و موهـومی f باشـند یعنی $a\le t\le b$ ؛ $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ که در آن توابع f_1,f_2 حقیقی مقدارند آنگاه در صورت وجود مشتق‌ها داریم: $f'(t)=f_1'(t)+if_2'(t)$ یعنی f در t مشتق پذیر است اگر و تنها اگر هر دوی f_1,f_2 در t مشتق پذیر باشند. اکنون فرض کنید که تابع f برداری باشد یعنی $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$، بـه هنگـام بکاربردن تعریف ۱ برای این نوع توابع توجه دارید که در تعریف $\varepsilon-\delta$ برای مشتق، روی دامنه از قـدر مطلـق و بـرای تفاضـل $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)$ از نرم $\mathbb{R}^k$ استفاده می‌کنیم. می‌توان دید که هرگاه $f_1,\dots,f_k$ توابع مؤلفه‌ای f باشند یعنی هرگاه $f=(f_1,f_2,\dots,f_k)$ آنگاه $f'=(f_1',f_2',\dots,f_k')$ لـذا f در نقطه‌ی x مشتق پذیر است اگر و تنها اگر هر یک از توابع $f_1,\dots,f_k$ در x مشتق پذیر باشند.

برای توابع برداری قضیه‌ی ۱ هنوز درست است. قسمت الف قضیه ۲ نیز درست است و اگر در قسمت ب قضیه‌ی ۲ از ضرب داخلی برای ضرب f,g استفاده کنیم، دوباره قضیه‌ی ۲- ب نیز برای توابع برداری برقرار است. اما در مورد قسمت پ همان قضیه چون $\mathbb{R}^k$ میدان نیست، چنین قاعده‌ای بی‌معنـی اسـت. اینجا یک تذکر لازم است و آن مربوط به ارتباط بین فضای برداری $\mathbb{R}^2$ و میدان $\mathbb{C}$ است. چنانچه $\mathbb{R}^2$ را به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{R}$ و همچنـین $\mathbb{C}$ را به عنوان فضای برداری نرمدار روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم در این صورت $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{C}$ به عنوان فضاهای برداری نرمدار یکی هستند. یعنی $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$ اما توجه کنید که در $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$ ضرب مناسب تعریف شده و آنرا به میدان تبدیل می‌کند اما برای $\mathbb{R}^k$، $K\ge 3$ چنین چیزی نداریم (به قضیه فروبنیوس در جبر رجوع شود). در ضمن قدر مطلق روی $\mathbb{R}$ از ترتیب $\mathbb{R}$ نشأت گرفته اما قدر مطلق یک عدد مختلط از نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$ نشأت گرفته و لذا منشأ آن ترتیب نیست.

قضایایی که در آنها از ترتیب $\mathbb{R}$ برای اثبات درستی آنها بهرهٔ بردیم مثل قضایای مقدار میانگین و هوپیتال در حالت توابع مختلط مقـدار یـا بـرداری مقـدار درست نیستند. قبلاً مثال مربوط به قضیه‌ی مقدار میانگین توسط تابع $f(x)=e^{ix}$ روی بازه‌ی $[0,2\pi]$ فـراهم شـد. امـا بـرای درسـت نبـودن قاعـده‌ی هوپیتال مثال زیر را در نظر بگیرید. در این مثال از قدرمطلق اعداد مختلط که همان فاصلـه از مبـداء اسـت اسـتفاده شـده لـذا بـرای $z=a+bi$ داریـم: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}\ge|b|$

$$f:(0,1)\to\mathbb{R} \qquad g:(0,1)\to\mathbb{C}$$

$$f:(x)=x \qquad g(x)=x+x^2e^{\frac{i}{x^2}}$$

چون برای t حقیقی $|e^{it}|=1$ پس:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(1+xe^{\frac{i}{x^2}})}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+xe^{\frac{i}{x^2}})}=\frac{1}{1+0}=1$$

از طرفی دیگر:

$$g'(x)=1+\{2x-\frac{2i}{x}\}e^{\frac{i}{x^2}} \qquad 0<x<1$$

$$|g'(x)|=|1+\{2x-\frac{2i}{x}\}e^{\frac{i}{x^2}}|\ge||\{2x-\frac{2i}{x}\}e^{\frac{i}{x^2}}|-|1||\ge|\{2x-\frac{2i}{x}\}e^{\frac{i}{x^2}}|-1=|2x-\frac{2i}{x}|-1\ge\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|=\frac{1}{|g'(x)|}\le\frac{x}{2-x}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$$

این در حالی است که $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

تذکر۷: اما قضیه‌ی هوپیتال در یک حالت خاص برای توابع مختلط مقدار از یک متغیر حقیقی درست است و آن هم به دلیل وجود «ضرب» در $\mathbb{C}$ است! این حالت به شرح زیر است:

فرض کنید g,f توابعی مختلط مقدار و مشتق پذیر بر $(0,1)$ باشند. همچنین وقتی که $x\to0$ داشته باشیم $f(x)\to0$ و $g(x)\to0$ و همچنین $f'(x)\to A$ و $g'(x)\to B$ که در آن B,A اعدادی مختلط‌اند و $B\neq0$ آنگاه: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$

برهان: چون $x\neq0$ پس $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{x}.\frac{x}{g(x)}$؛ این همان سودمندی «ضرب» در $\mathbb{C}$ است. اکنون g,f را به قسمت‌های حقیقی و موهومی‌شان تجزیه، سپس $\frac{f(x)}{x},\frac{g(x)}{x}$ را تشکیل داده، از اجزای حقیقی و موهومی آنها وقتی $x\to0$ حد گرفته [در این قسمت اخیر از قاعده‌ی هوپیتال برای اجزای حقیقی و موهومی $\frac{f(x)}{x},\frac{g(x)}{x}$ در هنگام محاسبه‌ی حدود استفاده می‌کنیم] سپس نتیجه‌ی مطلوب از «ضرب» حاصل می‌شود:

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x)\ ;\ f_1(x)\ ,\ f_2(x)\in\mathbb{R}$$
$$g(x)=g_1(x)+ig_2(x)\ ;\ g_1(x_1)\ ,\ g_2(x)\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f_1(x)}{x}+i\lim\limits_{x\to0}\frac{f_2(x)}{x}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim\limits_{x\to0}f_1'(x)+i\lim\limits_{x\to0}f_2'(x)=\lim\limits_{x\to0}f'(x)=A\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g_1(x)}{x}+i\lim\limits_{x\to0}\frac{g_2(x)}{x}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim\limits_{x\to0}g_1'(x)+i\lim\limits_{x\to0}g_2'(x)=\lim\limits_{x\to0}g'(x)=B\end{cases}$$

بنابراین $\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}=\frac{1}{B}$ و $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$ و در نتیجه $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}=A\cdot\frac{1}{B}=\frac{A}{B}$.

در ادامه‌ی بحث بالا در مورد برقراری قضایای قبلی درباره‌ی توابع برداری، به قضیه‌ی مقدار میانگین می‌رسیم. بهرحال با نگاه کردن به قضیه‌ی مقدار میانگین می‌توان نتیجه گرفت که $|f(b)-f(a)|\le(b-a)\sup\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$ و این نامساوی می‌تواند ایده‌ی خوبی برای حالت توابع برداری مقدار باشد. لذا همتای قضیه‌ی مقدار میانگین برای توابع برداری مقدار را می‌توان به صورت زیر بیان کرد که مشتمل بر یک نامساوی بوده و برای مسائل تقریب مناسب است.

قضیه۱۷: فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از $[a,b]$ به $\mathbb{R}^k$ و در (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت، x ی در (a,b) هست که:

$$\|f(b)-f(a)\|\le(b-a)\|f'(x)\|$$

که منظور از $\|f'(x)\|$ نرم اقلیدسی $f'(x)$ در $\mathbb{R}^k$ است.

نکته۸: یک مورد دیگر درباره‌ی برقراری قضایای پیشین درباره‌ی توابع برداری مقدار، تذکر ۵ است چون کافی است حکم مذکور را روی هر مؤلفه‌ی f_i از $f=(f_1,\dots,f_k)$ به کار ببریم و توجه داشته باشیم که اگر $\left|\frac{f_i(t)-f_i(x)}{t-x}-f_i'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{k}$ آنگاه:

$$\left\|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right\|\le\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{f_i(t)-f_i(x)}{t-x}-f_i'(x)\right|<k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$$

مثال۲۴: فرض کنیم f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π روی $\mathbb{R}$ باشد. به علاوه فرض کنیم f دارای مشتقات مرتبه اول و دوم روی $\mathbb{R}$ بوده و به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $|f''(x)| \le ۲$ در این صورت:

۱) $\forall x \in \mathbb{R}\ |f'(x)| \le \frac{\pi}{۲}$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}\ |f'(x)| \ge \frac{\pi}{۲}$ ۳) $\forall x \in \mathbb{R}\ |f'(x)| \le \pi$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R}\ |f'(x)| \ge \frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با بکار بردن قضیه‌ی تیلور برای نقاط $x, x+\pi$ ، نتیجه می‌گیریم $x < \eta < x+\pi$ موجود است که:

$$f(x+\pi) = f(x) + \frac{\pi}{۱!}f'(x) + \frac{\pi^۲}{۲!}f''(\eta)$$

از طرفی بنا به متناوب بودن f داریم $f(x+\pi) = f(x)$ که با جایگزینی در رابطه بالا می‌دهد:

$$\circ = \pi f'(x) + \frac{\pi^۲}{۲}f''(\eta) \Rightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{۲}f''(\eta)$$

بنابراین $|f'(x)| = \frac{\pi}{۲}|f''(\eta)| \le \frac{\pi}{۲} \times ۲ = \pi$.

مثال۲۵: فرض کنید $|x| < \frac{۱}{۲}$ در این صورت خطای تقریب $\sqrt{۱+x} \approx ۱ + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۸}x^۲$ کدام است؟

۱) کمتر یا مساوی با $\frac{۱}{۲}|x|^{\frac{۳}{۲}}$ ۲) کمتر یا مساوی با $\frac{۱}{۲}|x|^۳$ ۳) کمتر یا مساوی با $\frac{۱}{۴}|x|^{\frac{۵}{۲}}$ ۴) کمتر یا مساوی با $\frac{۱}{۸}|x|^۵$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار دهید $f(x) = \sqrt{۱+x}$ اکنون قضیه‌ی تیلور را با فرم باقیمانده‌ی لاگرانژ برای نقاط $\circ, x$ به کار می‌بریم بنابراین عدد η ، $\circ < \eta < x$ وجود دارد که:

$$f(x) = f(\circ) + \frac{۱}{۱!}f'(\circ)(x-\circ) + \frac{۱}{۲!}f''(\circ)(x-\circ)^۲ + \frac{f'''(\eta)}{۳!}(x-\circ)^۳$$

با محاسبه معلوم می‌شود.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}(۱+x)^{-\frac{۱}{۲}},\ f''(x) = -\frac{۱}{۴}(۱+x)^{-\frac{۳}{۲}},\ f'''(x) = \frac{۳}{۸}(۱+x)^{-\frac{۵}{۲}}$$

بنابراین:

$$\sqrt{۱+x} = ۱ + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۸}x^۲ + \frac{۳}{۴۸}(۱+\eta)^{-\frac{۵}{۲}}x^۳\ ,\ R_۳ = \frac{۳}{۴۸}(۱+\eta)^{-\frac{۵}{۲}}x^۳\ ,\ \eta = \circ + \theta(x-\circ) = \theta x\ ,.\ \circ < \theta < ۱$$

اما $۱+\eta = ۱+\theta x > \frac{۱}{۲}$ پس:

$$|R_۳| = \left|\frac{۳}{۴۸}(۱+\eta)^{-\frac{۵}{۲}}x^۳\right| \le \frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۵}{۲}}|x|^۳ = \frac{\sqrt{۲}}{۴}|x|^۳ < \frac{۱}{۲}|x|^۳$$

مثال۲۶: فرض کنید توابع g,f روی دامنه‌ی $[\circ,۱]$ دارای مشتقات پیوسته از مرتبه‌ی دوم هستند و برای هر $x \in (\circ,۱)$ ، $g'(x) \neq \circ$ و نیز $f'(\circ)g''(\circ) \neq g'(\circ)f''(\circ)$. فرض کنید $\theta(x)$ طوری باشد که $\frac{f(x)-f(\circ)}{g(x)-g(\circ)} = \frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}$ در این صورت مقدار حد $\lim\limits_{x \to \circ^+} \frac{\theta(x)}{x}$ کدام است؟

۱) وجود ندارد ۲) $\circ$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولاً اگر توجه داشته باشید، $\theta(x)$ همان عدد موجود در قضیه‌ی مقدار میانگین تعمیم یافته است. ثانیاً با استفاده از فرمول تیلور برای صورت و مخرج

$$\frac{f(x)-f(\circ)}{g(x)-g(\circ)} = \frac{f'(\circ)x + \frac{f''(\eta_۱(x))}{۲}x^۲}{g'(\circ)x + \frac{g''(\eta_۲(x))x^۲}{۲}} = \frac{f'(\circ) + \frac{۱}{۲}xf''(\eta_۱(x))}{g'(\circ) + \frac{۱}{۲}xg''(\eta_۲(x))} \qquad (۱)$$

اما از طرف دیگر با بکار بردن قضیه‌ی مقدار میانگین (همان قضیه‌ی تیلور در حالت $n=۱$) برای صورت و مخرج کسر $\frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}$ داریم که:

$$\frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))} = \frac{f'(\circ) + \theta(x)f''(\eta_۳(x))}{g'(\circ) + \theta(x)g''(\eta_۴(x))} \qquad (۲)$$

دقت شود که در همه‌ی موارد $\circ < \eta_i(x) < x$ و نیز $\circ < \theta(x) < x$. با توجه به برابری عبارات سمت چپ در ۱و ۲، سمت راست آنها نیز با هم برابر است، لذا پس از مساوی قرار دادن کسرها نتیجه می‌گیریم که:

$$f'(\circ)g'(\circ)+f'(\circ)g''(\eta_۴(x))\theta(x)+\frac{۱}{۲}g'(\circ)f''(\eta_۱(x))x+\frac{۱}{۲}f''(\eta_۱(x))g''(\eta_۴(x))x\theta(x)$$

$$=f'(\circ)g'(\circ)+\frac{۱}{۲}f'(\circ)g''(\eta_۲(x))x+g'(\circ)f''(\eta_۳(x))\theta(x)+\frac{۱}{۲}f''(\eta_۳(x))g''(\eta_۲(x))x\theta(x)$$

اکنون با حذف جملات مساوی در طرفین، تقسیم طرفین بر x، سپس حد گرفتن از طرفین وقتی $x \to \circ^+$ و توجه به اینکه $\circ < \eta_۱(x) < x$ و $\circ < \theta(x) < x$ و اینکه g'', f'' پیوسته هستند داریم که: $(\lim\limits_{x\to\circ^+}\frac{\theta(x)}{x})g'(\circ)f''(\circ)+\frac{۱}{۲}f'(\circ)g''(\circ) = (\lim\limits_{x\to\circ^+}\frac{\theta(x)}{x})f'(\circ)g''(\circ)+\frac{۱}{۲}g'(\circ)f''(\circ)$

بوضوح با انتقال جملات به طرفین و توجه به اینکه $f'(\circ)g''(\circ)\neq g'(\circ)f''(\circ)$ نتیجه می‌گیریم که: $\lim\limits_{x\to\circ^+}\frac{\theta(x)}{x}=\frac{۱}{۲}$

مثال۲۷: $a_۱,\dots,a_n$ حقیقی‌اند. x کدام مقدار حقیقی باشد تا $\sum\limits_{i=۱}^{n}(a_i-x)^۲$ مینیمم خود را اتخاذ کند.

۱) $\frac{\sum\limits_{i=۱}^{n}a_i}{n}$ ۲) $\frac{\sum\limits_{I=۱}^{N}a_i^۲}{n}$ ۳) $\frac{\sum\limits_{i=۱}^{n}a_i}{n^۲}$ ۴) $\frac{\sum\limits_{i=۱}^{n}a_i}{۲n}$

پاسخ: گزینه «۱» قرار دهید $f(x)=\sum\limits_{i=۱}^{n}(a_i-x)^۲$ چون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و چون f پیوسته است پس f حداقل یک مینیمم دارد. فرض کنید این مینیمم در $x=c$ رخ دهد لذا $f'(c)=\circ$.

$$f'(x)=\sum_{i=۱}^{n}-۲(a_i-x)\xrightarrow{f'(c)=\circ}-۲\sum_{i=۱}^{n}(a_i-c)=\circ \Rightarrow \boxed{c=\frac{\sum\limits_{i=۱}^{n}a_i}{n}}$$

مثال۲۸: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع C^∞ باشد که در معادله‌ی دیفرانسیل $f''(x)+f'(x)-f(x)=\circ$ در بازه‌ی $[\circ,a]$ صدق می‌کند در این صورت:

۱) اگر $f(\circ)=f(a)$ آنگاه f روی $[\circ,a]$ صفر است.
۲) اگر $f(\circ)=f(a)=\circ$ آنگاه f روی $[\circ,a]$ صفر است.
۳) اگر $f(\circ)=\circ$ آنگاه f روی $[\circ,a]$ صفر است.
۴) اگر $f(a)=\circ$ آنگاه f روی $[\circ,a]$ صفر است.

پاسخ: گزینه «۲» چون اگر $f\neq\circ$ روی $[\circ,a]$ آنگاه f ماکزیمم مطلق و در نتیجه نسبی خود را در نقطه‌ی $p\in(\circ,a)$ اتخاذ می‌کند در این نقطه $f'(p)=\circ$ و $f''(p)<\circ$. لذا $f''(p)=f(p)$ اما چون $f''(p)\le\circ=f(a)\le f(p)$ پس باید $f(p)=\circ$. استدلال مشابهی درباره‌ی نقطه‌ی $q\in(\circ,a)$ که نقطه‌ی مینیمم مطلق و در نتیجه نسبی f است نشان می‌دهد که $f(q)=\circ$ و چون برای هر $x\in[\circ,a]$, $f(q)\le f(x)\le f(p)$ پس باید f روی $[\circ,a]$ برابر مقدار ثابت صفر باشد.

مثال۲۹: کدام گزینه درست است؟

۱) $۳^\pi > \pi^۳$
۲) $e^\pi < \pi^e$
۳) اگر $\circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $\circ<p<۱$ آنگاه $(\cos\theta)^p\ge\cos(p\theta)$
۴) اگر $\circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ آنگاه $\sin\theta\le\frac{۲}{\pi}\theta$

پاسخ: گزینه «۱» برای $x>\circ$ قرار دهید $f(x)=۳^x x^{-۳}$ لذا $f'(x)=\frac{۳^x}{x^۴}(x\mathrm{Ln}۳-۳)$ که برای $x>\frac{۳}{\mathrm{Ln}۳}$ داریم $f'(x)>\circ$. لذا f روی $(\frac{۳}{\mathrm{Ln}۳},\infty)$ صعودی است و چون $\pi>۳>\frac{۳}{\mathrm{Ln}۳}$ پس $۱=f(۳)<f(\pi)=\frac{۳^\pi}{\pi^۳}$ بنابراین $۳^\pi>\pi^۳$. دقت شود که در گزینه‌های دیگر، جهت نامساوی‌های

باید برعکس شود تا نامعادله‌ها برقرار شود. گزینه ۲ را از طریق تابع $g(x) = Lnx - \frac{x}{e}$ و گزینه‌های دیگر را از طریق قضیه‌ی مقدار میانگین بررسی کنید (البته می‌توان برای گزینه‌های ۳ و ۴ مثال نقض آورد مثلاً در گزینه ۳ قرار دهید $\theta = \frac{\pi}{۲}$, $p = \frac{۱}{۲}$ و در گزینه ۴ قرار دهید $\theta = \frac{\pi}{۴}$).

مثال۳۰: کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال می‌توان نشان داد که $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{۲x + \sin x} = \frac{۱}{۲}$.

۲) با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال می‌توان نشان داد که $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{۲x + \sin(۲x) + ۱}{(۲x + \sin ۲x)(\sin x + ۳)^۲}$ وجود دارد.

۳) با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال می‌توان نشان داد که $\lim\limits_{x\to ۰^+} (۲\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{۱}{x})^x = ۱$.

۴) با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال می‌توان نشان داد که $\lim\limits_{x\to ۰^+} (\frac{۱}{\sin^۲ x} - \frac{۱}{x^۲}) = \frac{۱}{۳}$.

پاسخ: گزینه «۴» چون در هر سه گزینه اول شرایط قضیه‌ی هوپیتال برقرار نمی‌باشد. در گزینه ۱ با بکار بردن قضیه‌ی هوپیتال به $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{۱ - \cos x}{۲ + \cos x}$ می‌رسیم که وجود ندارد. در گزینه‌ی ۲ با بکاربردن قضیه‌ی هوپیتال کسری بدست می‌آید که مخرجش دارای ریشه‌های $۲\pi n + \frac{\pi}{z}$ $n \in \mathbb{N}$ هست لذا شرط ناصفر بودن مشتق برآورده نمی‌شود. در گزینه‌ی ۳ شما باید برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۰^+} (f(x))^{g(x)}$ از $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{Lnf(x)}{\frac{۱}{g(x)}}$ کمک بگیرید و دوباره تابع مشتق واقع در مخرج مشکل پیدا می‌کند چون حد ندارد. اما محاسبه‌ی گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{\sin^۲ x} - \frac{۱}{x^۲}) = \lim_{x\to ۰} \frac{x^۲ - \sin^۲ x}{x^۲ \sin^۲ x} \overset{(*)}{=\!=} \lim_{x\to ۰} \frac{x^۲ - \sin^۲ x}{x^۴} \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=} \lim_{x\to ۰} \frac{۲x - \sin ۲x}{۴x^۳} \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=} \lim_{x\to ۰} \frac{۲ - ۲\cos ۲x}{۱۲x^۲}$$
$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos ۲x}{۶x^۲} \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=} \lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin^۲ x}{۶x^۲} = \frac{۱}{۳}$$

تساوی (*) بدین دلیل است که اگر $x \to ۰$ آنگاه $\sin^۲ \sim x^۲$.

مثال۳۱: فرض کنید g,f روی [a,b] پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر باشند و همچنین $f(a) = f(b) = ۰$ آنگاه:

۱) $x \in (a,b)$ هست که $g(x)f'(x) + f(x) = ۰$
۲) $x \in (a,b)$ هست که $g'(x)f(x) + f'(x) = ۰$
۳) $x \in (a,b)$ هست که $g'(x)f'(x) + f(x) = ۰$
۴) $x \in (a,b)$ هست که $g(x)f(x) + f'(x) = ۰$

پاسخ: گزینه «۲» قرار دهید $h(x) = e^{g(x)}f(x)$ دوباره مانند مثال ۱۸ از ضریب نمایی استفاده شده است. اکنون تابع h در شرایط قضیه‌ی رُل صدق می‌کند بنابراین $c \in (a,b)$ هست که:

$$۰ = h'(c) = (g'(c)f(c) + f'(c))e^{g(c)} \Rightarrow g'(c)f(c) + f'(c) = ۰$$

توجه شود حالتی که در آن $g(x)$ چند جمله‌ای درجه ۱ با ضریب پیشرو $\alpha \in \mathbb{R}$ است چنین است $\alpha f(c) + f'(c) = ۰$.

مثال۳۲: فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) > f(x)$ و در یک نقطه‌ی $x_۰ \in \mathbb{R}$, $f(x_۰) = ۰$ در این صورت:

۱) اگر $x > x_۰$ آنگاه $f(x) > ۰$
۲) اگر $x > x_۰$ آنگاه $f(x) < ۰$
۳) اگر $x < x_۰$ آنگاه $f(x) > ۰$
۴) اگر $x < x_۰$ آنگاه $f(x) < ۰$

پاسخ: گزینه «۱» قرار دهید $g(x) = e^{-x}f(x)$ اکنون g مشتق‌پذیر با مشتق $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$ است. چون $f' > f$ پس $g'(x) > ۰$، لذا g صعودی است. اگر $x > x_۰$ آنگاه $g(x) > g(x_۰) = ۰$ پس برای $x > x_۰$ داریم $f(x) = e^x g(x) > ۰$.

مثال۳۳: فرض کنید $a > 0$، آنگاه معادله‌ی $ae^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ چند ریشه دارد؟

۱) حداکثر ۱ ریشه ۲) حداقل دو ریشه ۳) دقیقاً یک ریشه ۴) دقیقاً ۲ ریشه

پاسخ: گزینه «۳» قرار دهید $f(x) = ae^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. چون f پیوسته است و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، بنابر قضیه‌ی مقدار میانی، f حداقل یک ریشه چون x_0 دارد. اگر f دارای ریشه‌ی دیگری چون x_1 باشد یعنی اگر $f(x_1) = 0$ آنوقت یا $x_0 < x_1$ یا $x_1 < x_0$ از طرفی چون داریم: $f'(x) = ae^x - 1 - x > ae^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = f(x)$

پس اگر $x_0 < x_1$ آنگاه طبق مسأله‌ی قبل $f(x_1) > 0$ که با $f(x_1) = 0$ در تناقض است. و اگر $x_1 < x_0$ دوباره با توجه به مسأله‌ی قبل (و با عوض کردن نقش x_1, x_0) باید $f(x_0) > 0$ که با $f(x_0) = 0$ در تناقض است. لذا f دقیقاً یک ریشه دارد و متعاقباً معادله‌ی مذکور نیز دقیقاً یک ریشه خواهد داشت.

مثال۳۴: فرض کنید $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$ در این صورت:

۱) $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$ ۲) f تابع ثابت صفر است.

۳) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ۴) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ممکن است موجود نباشد.

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: قرار دهید $g(x) = e^x f(x)$ لذا $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$ فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. با توجه به فرض عدد $A > 0$ هست که اگر $x > A$ آنگاه $|f(x) + f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ اگر $x > A$ آنگاه طبق قضیه‌ی مقدار میانگین تعمیم یافته، نقطه‌ی $c \in (A, x)$ هست که:

$$\frac{g'(c)}{e^c} = \frac{g(x) - g(A)}{e^x - e^A} \quad ; \quad f(c) + f'(c) = \frac{g(x) - g(A)}{e^x - e^A}$$

چون $|f(c) + f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ پس از معادله‌ی خط بالا داریم $|g(x) - g(A)| < \frac{\varepsilon}{2}|e^x - e^A|$ بنابراین $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|e^x - e^A| + |g(A)|$ و با توجه به اینکه $g(x) = e^x f(x)$ و $0 < e^{A-x} < 1$ پس داریم: $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|1 - e^{A-x}| + |f(A)e^{A-x}| < \frac{\varepsilon}{2} + |f(A)e^{A-x}|$

از طرف دیگر چون $\lim_{x\to\infty}|f(A)e^{A-x}| = 0$ پس $B > 0$ هست که اگر $x > B$ آنگاه $|f(A)e^{A-x}| < \frac{\varepsilon}{2}$ قرار دهید $M = \max\{A, B\}$، لذا برای $x > M$ داریم: $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. در نتیجه طبق تعریف $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

روش دوم: روش سریعتر استفاده از قاعده‌ی هوپیتال است: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim\frac{e^x(f(x) + f'(x))}{e^x} = \lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$

مثال۳۵: فرض کنید $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ پیوسته و روی $(0,1)$ مشتق‌پذیر بوده و $f(0) = 0$ باشد. آنگاه تحت کدام شرط اضافی f روی $[0,1]$ متحداً صفر خواهد شد؟

۱) $M > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in (0,1)$، $|f(x)| \le M|f'(x)|$.

۲) $M > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in (0,1)$، $|f'(x)| \le M|f(x)|$.

۳) f دارای مشتق کراندار باشد.

۴) f در شرط $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ صدق کند.

پاسخ: گزینه «۲» قرار دهید $A = \{x \in [0,1] |$ روی فاصله‌ی $[0,x]$ صفر شود $f\}$. اولاً چون $0 \in A$ پس A به عنوان زیر مجموعه‌ی $[0,1]$ ناتهی است و با توجه به کراندار بودن A از خاصیت کمال نتیجه می‌شود که $\sup A$ موجود است. قرار دهید $s = \sup A$. چون f پیوسته است پس مجموعه‌ی A بسته می‌باشد و لذا $s \in A$ کافی است نشان دهیم $s = 1$.

فرض خلف که $s<1$ بنابراین عدد حقیقی $r>0$ هست که $r<\frac{1}{M}$ و $s+r<1$. برای هر نقطه‌ی $x\in(s,s+r)$، قضیه‌ی مقدار میانگین وجود $c\in(s,x)$ را با شرط $f(x)-f(s)=f'(c)(x-s)$ تضمین می‌کند و چون $s\in A$ پس $f(s)=0$ و لذا $f(x)=f'(c)(x-s)$. از طرفی برای هر $x\in[s,s+r]$ داریم:

$$|f(x)|=|f'(c)(x-s)|=|x-s||f'(c)|\le rM|f(c)|\le rM\max_{s\le t\le s+r}|f(t)|$$

همچنین با گرفتن max از سمت چپ خواهیم داشت:

$$\max_{s\le x\le s+r}|f(x)|\le rM\max_{s\le t\le s+r}|f(t)|$$

قرار دهید $B=\max_{s\le u\le s+r}|f(u)|$ لذا $B\le rMB$ اما چون $rM<1$ پس باید $B\le rMB<1\times B=B$ که بوضوح تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و $s=1$ خواهد شد و این یعنی f روی $[0,1]$ صفر است.

توجه: در برهان از نقاط انتهایی $[0,1]$ هیچ استفاده‌ای بجز $r<\frac{1}{M}$ نشده، لذا همین استدلال برای هر تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ که روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر و $f(a)=0$ درست است، کافی است که $r<\frac{b}{M}$ اتخاذ شود.

مثال ۳۶: اگر $\frac{a_0}{1}+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+\cdots+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\frac{2^na_n}{n+1}=0$ که در آن $a_0,a_1,\dots,a_n$ ثوابتی حقیقی هستند آنگاه:

۱) معادله‌ی $a_0+a_1x^{-1}+\cdots+a_{n-1}x^{1-n}+a_nx^{-n}=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(0,1)$ دارد.

۲) معادله‌ی $a_0+a_1x2^x+\cdots+a_{n-1}x^n2^x+a_nx^n2^x=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(0,1)$ دارد.

۳) معادله‌ی $a_0+a_1(2x)+\cdots+a_{n-1}(2x)^{n-1}+a_n(2x)^n=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(0,1)$ دارد.

۴) معادله‌ی $a_0+a_1\mathrm{Ln}x+\cdots+a_{n-1}\mathrm{Ln}^{n-1}x+a_n\mathrm{Ln}^nx=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(1,e^2)$ دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار دهید $f(x)=\frac{a_n}{n+1}\mathrm{Ln}^{n+1}x+\cdots+\frac{a_2}{3}\mathrm{Ln}^3x+\frac{a_1}{2}\mathrm{Ln}^2x+\frac{a_0}{1}\mathrm{Ln}x=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+1}\mathrm{Ln}^{j+1}x$. اکنون قضیه‌ی مقدار میانگین یا رُل را برای f روی $[1,e^2]$ به کار می‌بریم.

$$f(1)=0\,,\ f(e^2)=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+1}(\mathrm{Ln}e^2)^{j+1}=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+1}(2\mathrm{Ln}e)^{j+1}=\sum_{j=0}^{n}\frac{2^{j+1}a_j}{j+1}=2\sum_{j=0}^{n}\frac{2^ja_j}{j+1}\overset{\text{فرض}}{=\!=}2\times0=0$$

حالا از قضیه‌ی مقدار میانگین نتیجه می‌شود که عدد $c\in(1,e^2)$ چنان وجود دارد که $0=0-0=f(e^2)-f(1)=(e^2-1)f'(c)$ لذا $f'(c)=0$

اما $f'(c)=(\sum_{j=0}^{n}a_j\mathrm{Ln}^jc)\times\frac{1}{c}$ و چون $c\ne0$ پس باید $\sum_{j=0}^{n}a_j\mathrm{Ln}^jc=0$ که همان گزینه ۴ است.

مثال ۳۷: فرض کنید f روی $(0,\infty)$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{x\to+\infty}f(x)+2\sqrt{x}f'(x)=0$ آنگاه:

۱) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ۲) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ ۳) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ۴) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ موجود نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: کافی است قضیه‌ی مقدار میانگین تعمیم یافته را برای توابع $g(x)=e^{\sqrt{x}}f(x)$ و $h(x)=e^{\sqrt{x}}$ به کار ببریم. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد پس $A>0$ هست که اگر $x>A$ آنگاه:

$$|f(x)+2\sqrt{x}f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(1)$$

اگر $x>A$ آنگاه طبق قضیه‌ی مقدار میانگین تعمیم یافته برای توابع h,g، نقطه‌ای مانند $c\in(A,x)$ هست که:

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{c}}e^{\sqrt{c}}\{f(c)+2\sqrt{c}f'(c)\}}{\frac{1}{2\sqrt{c}}e^{\sqrt{c}}}=\frac{g'(c)}{h'(c)}=\frac{g(x)-g(A)}{h(x)-h(A)}\Rightarrow f(c)+2\sqrt{c}\,f'(c)=\frac{g(x)-g(A)}{e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{A}}}\qquad(2)$$

از (۱) و (۲) داریم $|g(x)-g(A)|<\frac{\varepsilon}{۲}|e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{A}}|$ بنابراین:

$$|e^{\sqrt{x}}f(x)|=|g(x)|<\frac{\varepsilon}{۲}|e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{A}}|+|g(A)|=\frac{\varepsilon}{۲}|e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{A}}|+|e^{\sqrt{A}}f(A)|$$

$$\Rightarrow|f(x)|<\frac{\varepsilon}{۲}|۱-e^{\sqrt{A}-\sqrt{x}}|+|f(A)e^{\sqrt{A}-\sqrt{x}}| \quad , \quad ۰<e^{\sqrt{A}-\sqrt{x}}<۱$$

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{۲}+|f(A)e^{\sqrt{A}-\sqrt{x}}| \qquad (۳)$$

و چون $\lim_{x\to\infty} f(A)e^{\sqrt{A}-\sqrt{x}}=۰$ پس $B>۰$ هست که اگر $x>B$ آنگاه:

$$|f(A)e^{\sqrt{A}-\sqrt{x}}|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۴)$$

با اتخاذ $M=\max\{A,B\}$, $x>M$ و استفاده از (۳) و (۴) داریم $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$ و لذا نتیجه حاصل است.

روش دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}f(x)}{e^{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}(f(x)+۲\sqrt{x}f'(x))}{e^{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty} f(x)+۲\sqrt{x}f'(x)=۰$$

مثال۳۸: فرض کنید تابع f روی $(۰,\infty)$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))=L$ در این صورت:

۱) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f'(x)=\frac{L}{۲}$

۲) $\lim_{x\to\infty} f'(x)=۰\ ,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=L$

۳) $\lim_{x\to\infty} f'(x)=L\ ,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=۰$

۴) ممکن است هیچکدام از $\lim_{x\to\infty} f'(x), \lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود نباشند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x(f(x)+f'(x))}{e^x}=\lim_{x\to\infty} f(x)+f'(x)=L$$

لذا باید $\lim_{x\to\infty} f'(x)=۰$.

مثال۳۹: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته روی $[a,b]$ باشد در این صورت:

۱) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل دو صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$دارد.

۲) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل سه صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

۳) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل دو صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=۲f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

۴) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل سه صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=۲f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع $g(x)=e^{-x}f(x)$ را روی $[a,b]$ در نظر بگیرید لذا g روی $[a,b]$ از کلاس $C^۲$ است. در ضمن g روی $[a,b]$ دارای سه صفر متمایز است پس بنا به قضیه رُل $(g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x)))$ دارای دو صفر متمایز در $[a,b]$ است. دوباره بنا به قضیه‌ی رُل در مورد g'، نتیجه می‌گیریم که $g''(x)=e^{-x}(f(x)+f''(x)-۲f'(x))$ در $[a,b]$ یک ریشه دارد.

مثال۴۰: فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ پیوسته بوده و برای هر $a\le x\le b$ داشته باشیم $a\le f(x)\le b$. همچنین f روی (a,b) مشتق پذیر و برای هر $x\in(a,b)$ ، $|f'(x)|\le\alpha<۱$ در این صورت:

۱) f در $[a,b]$ فقط یک نقطه ثابت دارد.

۲) f حداکثر یک نقطه‌ی ثابت در $[a,b]$ دارد.

۳) f در $[a,b]$ حداقل دو نقطه ثابت دارد.

۴) f در $[a,b]$ هیچ نقطه‌ی ثابت ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اولاً f در $[a,b]$ حداقل یک نقطه‌ی ثابت دارد: اگر $f(a)=a$ یا $f(b)=b$ حکم ثابت است و توجه دارید که هر دو حالت همزمان نمی‌توانند اتفاق بیفتدچون با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین $c\in(a,b)$ یافت می‌شود که $b-a=f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ لذا $f'(c)=1$ که تناقض با فرض $|f'|\le\alpha<1$ است اما اگر $a<f(x)<b$ آنوقت تابع $g(x)=f(x)-x$ را روی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. این تابع روی $[a,b]$ پیوسته بوده، $g(a)>0$ و $g(b)<0$ لذا با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی $c\in(a,b)$ یافت می‌شود که $g(c)=0$ در نتیجه c نقطه‌ی ثابت f است. بنابراین f حداقل یک نقطه‌ی ثابت در $[a,b]$ دارد.

ثانیاً f نمی‌تواند بیش از یک نقطه‌ی ثابت داشته باشد چون اگر c_1, c_2 دو نقطه‌ی ثابت f بوده و $c_1\ne c_2$ بدون کاستن از کلیت فرض کنید $c_1<c_2$ حالا قضیه‌ی مقدار میانگین برای f روی $[c_1,c_2]$ نتیجه می‌دهد که $\theta\in(c_1,c_2)$ هست که $c_2-c_1=f(c_2)-f(c_1)=(c_2-c_1)f'(\theta)$ لذا باید $f'(\theta)=1$ که با فرض $|f'|\le\alpha<1$ در تناقض است.

مثال۴۱: فرض کنید f تابع حقیقی مشتق پذیری بر $(-\infty,\infty)$ باشد. در این صورت

۱) اگر برای هر عدد حقیقی t، $f'(t)\ne 1$ آنگاه f یک نقطه‌ی ثابت دارد.

۲) اگر برای هر عدد حقیقی t، $0<f'(t)<1$ آنگاه f یک نقطه‌ی ثابت دارد.

۳) اگر برای هر عدد حقیقی t، $f'(t)\ne 1$ آنگاه f حداکثر یک نقطه‌ی ثابت دارد.

۴) اگر برای هر عدد حقیقی t، $0<f'(t)<1$ آنگاه f حداقل یک نقطه‌ی ثابت دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر قرار باشد که f بیش از یک نقطه‌ی ثابت مانند x_1, x_2 داشته باشد یعنی $f(x_1)=x_1$ و $f(x_2)=x_2$ طبق قضیه‌ی مقدار میانگین عدد θ بین x_1, x_2 هست که:

$$x_2-x_1=f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\theta)$$

لذا $f'(\theta)=1$ که با فرض $f'(t)\ne 1$ در تناقض است. لذا f حداکثر می‌تواند یک نقطه‌ی ثابت داشته باشد. از طرفی f می‌تواند نقطه‌ی ثابتی نداشته باشد چنانچه قرار دهیم $f(t)=t+\dfrac{1}{1+e^t}$ آنگاه برای هر t، $f'(t)=1-\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ که بوضوح $0<f'(t)<1$ اما f نقطه‌ی ثابت ندارد چون اگر x_0 بخواهد در معادله‌ی $f(x_0)=x_0$ صدق کند آنگاه داریم $x_0+\dfrac{1}{1+e^{x_0}}=x_0$ لذا باید $\dfrac{1}{1+e^{x_0}}=0$ که امکان‌پذیر نمی‌باشد.

مثال۴۲: فرض کنید f روی $(-\infty,\infty)$ مشتق پذیر باشد در این صورت:

۱) اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجود باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

۲) اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ هر دو موجود باشند آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

۳) اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجود باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ موجود اما مخالف صفر است.

۴) اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ موجود باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجود است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $x\to+\infty$ پس کافی است با مقادیر مثبت کار کنیم. برای $x>0$ قضیه‌ی مقدار میانگین را روی $[x,x+1]$ به کار می‌بریم لذا عدد t، $x<t<x+1$ وجود دارد که:

$$f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(t)=f'(t)$$

حال اگر $x\to\infty$ آنگاه $t\to\infty$ و بالعکس بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim_{x\to\infty} f'(t)$$

و چون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ موجود است پس:

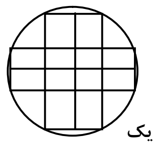
$$\lim_{t\to\infty} f'(t)=\lim_{x\to\infty} f(x+1)-\lim_{x\to\infty} f(x)=L-L=0$$

ضمیمه

در اینجا یک بحث غیر رسمی از مفهوم اندازه (measure) ارائه می‌دهیم، هدف اینست که در خواننده انگیزه‌ای برای مطالعه شخصی ایجاد شود. خواننده می‌تواند برای بحث دقیق‌تر و جامع‌تر به کتابهای پیشرفته در زمینه‌ی آنالیز حقیقی مراجعه کند.

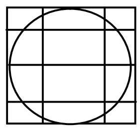
فرض کنید ناحیه‌ی کراندار B در صفحه داده شده و می‌خواهیم عددی را به عنوان مساحت به B نسبت دهیم. از حسابان به یاد دارید که باید مراحل زیر طی شوند:

الف) یافتن مساحت درونی B: ناحیه‌ی B را هر بار با شبکه‌ای از مستطیل‌های داخلی می پوشانیم و هر بار مساحت این شبکه‌ی داخلی را حساب می‌کنیم، این مقدار تقریبی از مساحت درونی B به دست می‌دهد. چنانچه بخواهیم تقریب بهتری به دست بیاوریم هر بار شبکه را ریزتر(finer) می‌کنیم، بنابراین مساحت‌های شبکه‌های داخلی بیشتر می‌شود، سوپریمم این مقادیر را مساحت درونی B می‌نامیم.



ناحیه‌ی B به همراه یک شبکه‌ی درونی

ب) یافتن مساحت بیرونی B: این بار ناحیه B را با شبکه‌ای از مستطیل‌های بیرونی می پوشانیم و هر بار مساحت این شبکه‌ی بیرونی تقریبی از مساحت بیرونی B به دست داده که با ریزتر کردن این شبکه تقریب بهتری از مساحت بیرونی به دست می‌آوریم. بنابراین اینفیمم مقادیر مساحت‌های شبکه‌های بیرونی را مساحت بیرونی B می نامیم.



ناحیه B به همراه یک شبکه بیرونی

حالا چنانچه مساحت بیرونی B با مساحت درونی B برابر باشد این مقدار مشترک را مساحت B می‌نامیم. توجه دارید که با استفاده از توسیع اعداد حقیقی این کار را برای نواحی بیکران هم می توان انجام داد. برای ما مفهوم مساحت بیرونی اساسی‌تر است چون اگر R یک مستطیل بزرگ شامل B باشد آنگاه مساحت درونی B برابر است با مساحت R منهای مساحت بیرونی ناحیه‌ی $R\backslash B$. به راحتی می توان بحث بالا را برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار B از $\mathbb{R}^n$، $n=1,2,3$ معتبر دانست و به ترتیب از شبکه‌های تشکیل شده به کمک بازه‌ها، مستطیل‌ها و مکعب‌ها استفاده کرد ما این اشکال ساده‌ی خاص را مکعب‌های طبیعی $\mathbb{R}^n$ ، $n=1,2,3$ می‌نامیم و منظورمان از حجم این مکعب‌های طبیعی به ترتیب طول، مساحت و حجم معمولی آنهاست. با این قرار دادها اگر $\mathfrak{I}_n$ را گردایه‌ی همه‌ی مکعب‌های طبیعی $\mathbb{R}^n$ ، $n=1,2,3$ بگیریم آنگاه به هر عضو E از $\mathfrak{I}_n$ عددی مثل $\rho_n(E)$ منسوب است که حجم (n-بعدی) مکعب E را بیان می‌کند بنابراین تابع زیر را می‌توان تعریف کرد:

$$\begin{aligned}\rho_n : \mathfrak{I}_n &\to [0,\infty]\\ E &\to \rho_n(E)\end{aligned}$$

اکنون فرض کنید زیر مجموعه‌ی B از $\mathbb{R}^n$ را توسط فرآیندهایی شمارا از زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ با این شرط ساخته‌ایم که این فرآیندها فقط مشتمل بر اشتراک‌گیری، اجتماع‌گیری و متمم‌گیری باشد، یعنی B را از طریق اشتراک یا اجتماع یا متمم‌گیری‌های شمارا روی مجموعه‌های باز می‌سازیم، توجه دارید که به علت وجود متمم می توان گفت که فرآیند فوق روی مجموعه‌های بسته وحتی روی مکعب‌های طبیعی انجام می‌شود. به هرحال B را می‌توان با شبکه‌ای (شمارا و ساخته شده) از اعضای $\mathfrak{I}_n$ از بیرون پوشاند یعنی گردایه‌ای شمارا مثل $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ از اعضای $\mathfrak{I}_n$ یافت به طوری که $B\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$، بنابراین می‌توان اندازه‌ی (بیرونی) B را بدین صورت تعریف کرد که:

$$\lambda_n(B)=\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}\rho_n(E_j) : B\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\ ,\ E_j\in\mathfrak{I}_n\}$$

این همان اندازه‌ی لبگ n-بعدی B است. در ادامه اندیس n را بخاطر جلوگیری از شلوغی نمادها حذف می‌کنیم و خواننده خود باید تشخیص دهد که در کدام $\mathbb{R}^n$ بوده و با کدام λ_n کار می‌شود. توجه دارید که $0\le\lambda(B)\le\infty$ و چنانچه $\lambda(B)=0$ گوییم B یک مجموعه‌ی پوچ است. برای مثال اگر $B\subseteq\mathbb{R}$ آنگاه B پوچ است اگر و تنها اگر برای هر ε مثبت گردایه‌ای مانند $\{[a_j,b_j]\}_{j=1}^{\infty}$ موجود باشد به قسمی که $B\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j]$ و $\sum_{j=1}^{\infty} b_j-a_j<\varepsilon$. این گردایه را یک εـ پوشش B نیز می‌نامند.

نکته۹: گویند خاصیتی (مثل پیوستگی و ... برای یک تابع یا مجموعه یا...) به طور تقریبا همه جایی برقرار است یا تقریبا همه جاست هرگاه مجموعه نقاطی که آن خاصیت را نقض می‌کنند پوچ باشد (یعنی نقاط ناگوار، قابل اغماص باشند). خوبی اینکار در اینست که می‌توان از آن مجموعه نقاط صرفنظر کرد.
می‌توان نشان داد که مجموعه‌های شمارا از جمله $\mathbb{Q}$ پوچ است و حتی برخی مجموعه‌های نا شمارا مانند مجموعه‌ی کانتور نیز پوچ هستند، در جدول انتهای این بخش سه مفهوم شمارایی (در نظریه مجموعه‌ها)، هیچ جا چگال بودن (در فضاهای متریک) و پوچ بودن (در نظریه‌ی اندازه) با هم مقایسه شده و نشان داده شده که در حالت کلی این سه مفهوم مستقل از هم هستند. توجه شود که اندازه‌ی لبگ λ دارای خواصی شبیه تابع احتمال در نظریه‌ی احتمال است با این تفاوت که این اندازه بیکران است. لذا خواص اساسی λ به صورت زیرند:

۱ـ $\lambda(\varnothing)=0$

۲ـ جمعی شمارا: اگر B_j ها دوبه‌دو مجزا باشند آنگاه $\lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(B_j)$.

توجه کنید که خاصیت ۲ بسیار اساسی است، از این خاصیت و مثبت بودن λ می‌توان نتیجه گرفت که λ صعودی است! بهرحال فرض کنید $U\subseteq\mathbb{R}$ باز باشد آنگاه چون U شامل زیر بازه ای به فرم (a,b) است پس طبق صعودی بودن: $0<b-a=\lambda((a,b))\le\lambda(U)$ بنابراین $0<\lambda(U)$ اما عملا برای هر ε مثبت می‌توان مجموعه ی بازی چون $U\subseteq\mathbb{R}$ یافت که $0<\lambda(U)\le\varepsilon$ و همین نکته یک وجه ممیزه‌ی اندازه و متریک است به مثال زیر دقت کنید:

مثال۴۳: فرض کنید $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ شمارشی از اعداد گویای داخل بازه‌ی $[0,1]$ و ε عدد دلخواه مثبتی باشد. قرار دهید $I_j=(r_j-\frac{\varepsilon}{2^{j+1}},r_j+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}})$ و $I=\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$. در اینصورت I_jها باز بوده بنابراین I هم باز است ونیز $\lambda(I)\le\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(I_j)=\varepsilon$. اکنون مجموعه‌ی $U=(0,1)\bigcap I$ در $[0,1]$ باز و چگال می‌باشد اما توجه کنید که $0<\lambda(U)\le\lambda(I)\le\varepsilon$. حالا قرار دهید $K=[0,1]\setminus U$ چون K متمم یک مجموعه‌ی باز و چگال است پس بسته و هیچ جا چگال می‌باشد در حالیکه $\lambda(K)\ge 1-\varepsilon$ چون $1=\lambda([0,1])=\lambda(U\bigcup K)=\lambda(U)+\lambda(K)$. در نتیجه دیده می‌شود که U گرچه از نقطه نظر فضای متریک بزرگ است اما از نقطه نظر فضای اندازه کوچک است. در حالیکه برای K وضعیت کاملا برعکس است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۴: می توان نشان داد که $\lambda(\mathbb{Q}\bigcap[0,1])=0,\ \lambda(\mathbb{Q}^c\bigcap[0,1])=1$ و حتی فراتر آنکه $\lambda(\mathbb{Q})=0\ ,\ \lambda(\mathbb{Q}^c)=\infty$.

مثال۴۵: مقایسه بین سه مفهوم شمارایی(در نظریه مجموعه‌ها)، هیچ جا چگال بودن(در فضاهای متریک) و پوچ بودن(در نظریه‌ی اندازه) با هم.
فرض کنید C مجموعه‌ی کانتور، K و U مثل بالا، $\mathbb{Q}$ اعداد گویا و λ اندازه لبگ باشد بنابراین:

نوع \ سایز	کوچک	بزرگ
نظریه مجموعه	$\mathbb{Q}$	C,K,U
فضای متریک	C,K	$\mathbb{Q},U$
نظریه اندازه	$\mathbb{Q},C,U$	K

نوع \ سایز	کوچک	بزرگ
نظریه مجموعه	شمارا	ناشمارا
فضای متریک	هیچ جا چگال	چگال یا باز
نظریه اندازه	پوچ یا با اندازه ی خیلی کوچک	با اندازه ی مثبت