مدرسان شریف

فصل اول

«مبانی و قضایای اولیه مدارهای الکتریکی و قضایای تونن و نورتن»

درسنامه (۱): مفاهیم و قضایای پایه در مدارهای الکتریکی

جریان

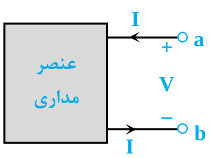
جریان، مقدار بار الکتریکی جابجا شده (q) در واحد زمان می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

یکای جریان در سیستم SI، آمپر (A) است و یک آمپر جریان، طبق تعریف، معادل با جابجایی باری به اندازه یک کولن در هر ثانیه می‌باشد.

ولتاژ

طبق تعریف ولتاژ دو سر یک عنصر مداری، انرژی مورد نیاز برای جابه‌جایی بار مثبت ۱ کولن از یک پایانه تا پایانه دیگر آن عنصر مداری می‌باشد و مطابق شکل روبه‌رو به‌صورت زیر تعریف می‌شود. یکای ولتاژ، ولت (V) است.



$$\boxed{V = V_a - V_b = V_{ab} = -V_{ba}}$$

توان

توان آهنگ مصرف انرژی است و به صورت $P = V.I$ تعریف می‌گردد. واحد توان **ژول بر ثانیه** و یا همان **وات** (w) است. بعضی عناصر مداری توان مصرف می‌کنند که به آنها **عناصر غیرفعال یا پسیو** می‌گوییم (مانند مقاومت) و بعضی عناصر، توان تولید می‌کنند که به آنها **عناصر فعال یا اکتیو** می‌گوییم (مانند منابع ولتاژ و جریان مستقل، البته گاهی اوقات این عناصر هم به صورت مصرف کننده عمل می‌کنند). اگر مقدار توان در محاسبات عددی منفی شود، می‌گوییم آن عنصر توان تولید می‌کند و اگر مقدار توان مثبت بدست آید، می‌گوییم آن عنصر توان جذب (تلف) می‌کند.

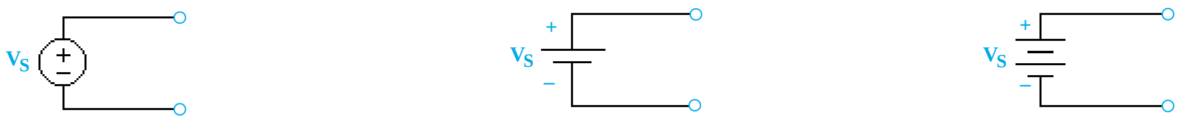
نکته۱: هرگاه جریان به ترمینال مثبت (منظور ترمینال ولتاژ عنصر است) المان مداری وارد و یا از ترمینال منفی آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P = +V.I$ در نظر گرفته می‌شود و هرگاه جریان به ترمینال منفی المان مداری وارد و یا از ترمینال مثبت آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P = -V.I$ بیان می‌گردد.

قضیه پایستگی توان

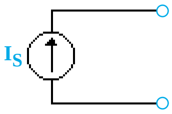
طبق قضیه پایستگی توان، مجموع توان مصرفی عناصر مختلف مدار، برابر صفر است. به عبارت دیگر مجموع توان تولیدی عناصر اکتیو مدار برابر مجموع توان مصرفی عناصر پسیو مدار است.

منبع ولتاژ مستقل (نابسته)

مقدار ولتاژ دو سر یک منبع ولتاژ مستقل ایده‌آل، صرفنظر از جریان آن عددی ثابت است و توان تولیدی آن محدودیتی نداشته و معمولاً مثبت است. منابع ولتاژ مستقل DC را به یکی از سه صورت زیر نمایش می‌دهیم.



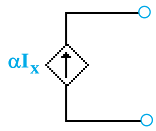
منبع جریان مستقل (نابسته)



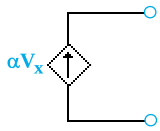
یک منبع جریان نابسته، مستقل از ولتاژ دو سر خود، جریان ثابتی دارد و می‌تواند توان نامحدودی تولید کند. منبع جریان مستقل DC را به شکل مقابل نمایش می‌دهیم:

منابع جریان و ولتاژ وابسته (کنترل شونده)

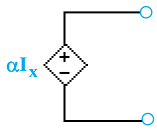
مقدار ولتاژ تولیدی منابع ولتاژ وابسته و جریان تولیدی منابع جریان وابسته برخلاف منابع مستقل، به ولتاژ یا جریان یک عنصر دیگر مدار بستگی دارد. این منابع به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.



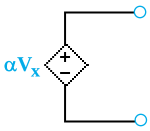
(منبع جریان وابسته به جریان)



(منبع جریان وابسته به ولتاژ)



(منبع ولتاژ وابسته به جریان)



(منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ)

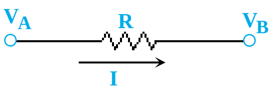
مقاومت و قانون اهم

طبق قانون اهم، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر رسانا به شدت جریانی که از آن عبور می‌کند، مقدار ثابتی است که این نسبت را مقاومت الکتریکی رسانا می‌نامیم. مقاومت از جمله عناصر غیرفعال (پسیو) مدار است.

یکای مقاومت الکتریکی در SI، ولت بر آمپر است که اهم نامیده شده و با Ω نشان داده می‌شود.

$$\boxed{R=\frac{V}{I}} \Rightarrow \text{قانون اهم}$$

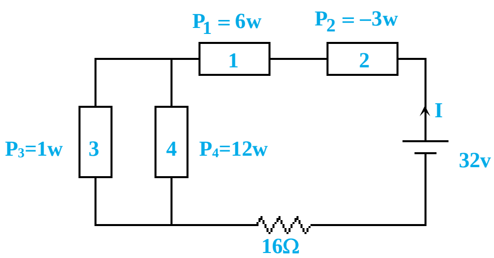
با توجه به قانون اهم، جریان یک مقاومت و توان مصرفی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\boxed{V=V_A-V_B \quad , \quad I=\frac{V}{R} \quad , \quad P=V.I=RI^2=\frac{V^2}{R}}$$

توجه کنید در صورتی که $R>0$ باشد، مقاومت پسیو خوانده شده و توان مقاومت همواره مثبت خواهد بود که با مفهوم مصرف‌کننده بودن مقاومت هم‌خوانی دارد. قابل ذکر است همه مقاومت‌ها به‌صورت پیش‌فرض پسیو هستند.

مثال۱: در مدار مقاومتی شکل زیر توان هر یک از عناصر داده شده است. جریان I چقدر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)



۱) ۱A

۲) ۲ A

۳) $\frac{1}{2}$A

۴) $\frac{1}{4}$A

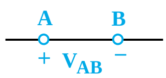
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در یک مدار الکتریکی، توان تولید شده توسط منبع مدار، برابر با توان مصرفی المان‌های مدار است. لذا داریم:

$$\text{توان منبع ولتاژ} = \text{توان مصرفی مقاومت} +P_1+P_2+P_3+P_4 \quad \Rightarrow \quad 32I=16I^2+6-3+1+12$$

$$\Rightarrow\ 16I^2-32I+16=0 \ \Rightarrow\ I^2-2I+1=0 \ \Rightarrow\ \mathbf{I=1A}$$

مفاهیم اتصال کوتاه، مدار باز و کلید

در اینجا به معرفی چند مفهوم بسیار مصطلح در بحث مدارهای الکتریکی می‌پردازیم:



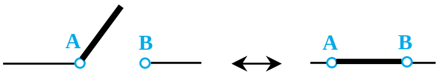
$V_{AB}=0$

اتصال کوتاه: اگر دو نقطه در یک مدار الکتریکی توسط مقاومتی با مقدار صفر اهم (یا در اصطلاح فیزیکی با سیم) به هم متصل شده باشند، اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه اتصال کوتاه هستند. اختلاف ولتاژ دو نقطه اتصال کوتاه همواره برابر صفر است.

مدار باز: اگر بین دو نقطه از یک مدار الکتریکی هیچ مسیری برای برقراری جریان وجود نداشته باشد اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه مدار باز هستند. جریان الکتریکی میان دو نقطه مدار باز همواره برابر صفر است.

$I_{AB} = \circ$

کلید ایده‌آل: کلید یک ابزار الکتریکی است که وضعیت اتصال میان دو نقطه را از حالت مدار باز به حالت اتصال کوتاه تغییر می‌دهد و بالعکس.



کلید در وضعیت باز　　　کلید در وضعیت بسته

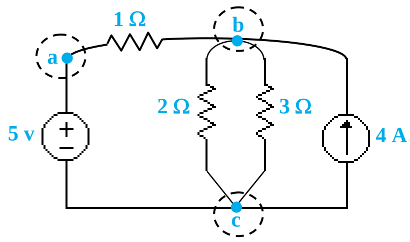
آمپرمتر و ولت‌متر

آمپرمتر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری جریان و به صورت سری با عنصری که می‌خواهند جریان آن را مشخص کنند، در مدار قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که آمپرمترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی صفر هستند. (مانند اتصال کوتاه)

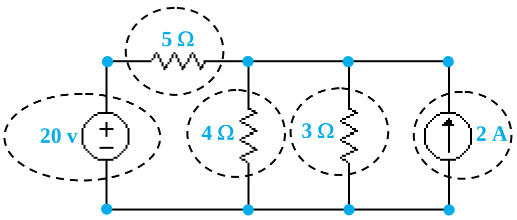
ولت‌متر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری ولتاژ و به صورت موازی با عنصری که می‌خواهند ولتاژ دو سر آن را بسنجند، در مدار قرار می‌گیرد. ولت‌مترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی بینهایت هستند. (مانند مدار باز)

قوانین کیرشهف

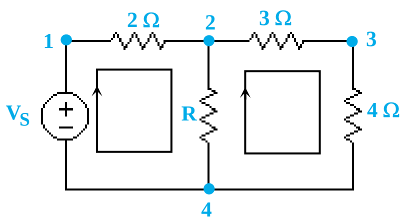
قبل از بیان قوانین کیرشهف ابتدا مفاهیم گره، شاخه و حلقه را تعریف می‌کنیم. **گره** محل اتصال دو یا چند عنصر مداری می‌باشد (شکل الف) و **شاخه** می‌تواند شامل یک عنصر و دو گره مربوط به دو سر آن باشد، مانند یک منبع ولتاژ و یا یک مقاومت (شکل ب). هر مسیر بسته‌ای در یک مدار که گره شروع و گره خاتمه آن یکی باشد، **یک حلقه** نامیده می‌شود (شکل ج).



(شکل الف): مدار شامل سه گره



(شکل ب): مدار شامل پنج شاخه

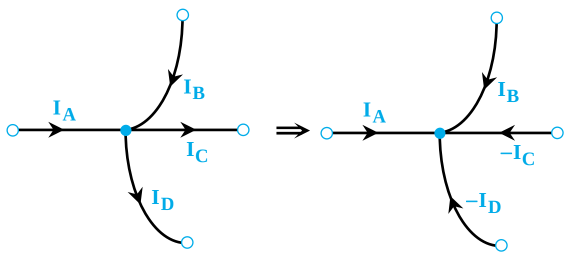


(شکل ج)

قانون جریان کیرشهف (KCL)

طبق این قانون **جمع جبری جریان‌هایی که به یک گره وارد می‌شوند، صفر است** و یا به عبارت دیگر **مجموع جریان‌های وارد شده به یک گره با مجموع جریان‌های خارج شده از آن برابر است**. به عنوان مثال برای مدار روبرو می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} I_A + I_B - I_C - I_D = \circ \\ \text{یا} \\ I_A + I_B = I_C + I_D \end{cases}$$



نکته۲: توجه شود جریان‌هایی که به گره وارد می‌شوند را **طبق قرارداد** با علامت مثبت در نظر می‌گیریم و جریان‌هایی که از گره خارج می‌شوند را با علامت منفی لحاظ می‌کنیم.

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:
$$-۱۲+۲I_x+۲I_y=۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:
$$-۱۵+۴I_y+۵I_x=۰ \qquad (۲)$$

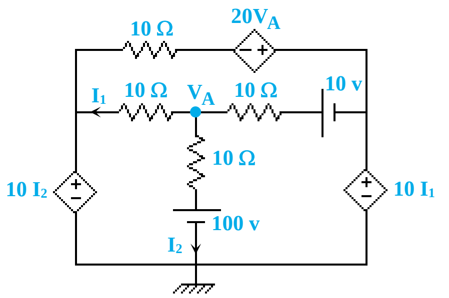
حال دستگاه معادلات شامل روابط (۱) و (۲) را به شکل زیر حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲I_x+۲I_y=۱۲ & (۱) \\ ۵I_x+۴I_y=۱۵ & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۲)-(۱)\times ۲} \begin{array}{l} I_x=۱۵-۲\times ۱۲=-۹A \\ I_y=\dfrac{۱۲-۲I_x}{۲}=\dfrac{۱۲+۱۸}{۲}=۱۵A \end{array}$$

تشخیص روش مناسب برای تحلیل مدار

سؤال مهمی که دانشجویان معمولاً می‌پرسند، این است که کدام یک از دو روش «تحلیل گره» یا روش «تحلیل مش» مناسب‌تر است. واضح است انتخاب روش مناسب به شکل مدار و منابع موجود در آن مدار بستگی دارد. برای انتخاب بهترین و ساده‌ترین راه حل برای یک مسأله با حداقل عملیات، باید ابتدا تعداد حلقه‌ها و گره‌های مدار را شمارش کنیم. حال در مدار به تعداد گره‌ها، معادله KCL و به تعداد حلقه‌ها، معادله KVL موجود است. لازم به ذکر است که گره‌ای برای KCL مناسب است که محل تقاطع بیش از دو المان بوده و دارای ولتاژ معین نسبت به زمین نباشد. همچنین حلقه‌ای که شامل منبع جریان وابسته یا مستقل باشد، برای KVL مناسب نیست. با شمارش تعداد حلقه‌ها و گره‌های مفید مدار، اگر تعداد حلقه‌ها کمتر بود، راه‌حل مناسب KVL و اگر تعداد گره‌ها کمتر بود، راه‌حل مناسب KCL است. در صورتی که تعداد مجهولات ناشی از حلقه‌ها و گره‌ها و یا به عبارتی تعداد حلقه‌ها و گره‌ها برابر باشد، یک توصیه غیررسمی این است که ببینید مجهول مسأله کدام است؛ اگر جریان مجهول باشد، از روش تحلیل مش و اگر ولتاژ مجهول بود از روش تحلیل گره برای حل مدار استفاده می‌شود.

مثال ۲۸: در مدار مقابل مقدار جریان $I_۱$ کدام است؟



۱) $۰/۲A$

۲) $۱/۲A$

۳) $۲/۲A$

۴) $۱۰A$

پاسخ: گزینه «۴» باید دقت شود که مدار فوق دارای سه حلقه است و با نوشتن سه KVL در حلقه‌ها می‌توان مدار را حل کرد. اما این روش بسیار وقت‌گیر می‌باشد. همچنین با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای سه گره می‌باشد و گره‌های سمت راست و سمت چپ مدار دارای ولتاژ معین نسبت به زمین هستند و برای KCL مناسب نیستند. بنابراین فقط گره A برای KCL مناسب است. حال با نوشتن KCL در مدار، با یک معادله و یا با نوشتن KVL در سه حلقه مدار، با سه معادله، مدار قابل حل است و روش ساده‌تر همان KCL در گره A می‌باشد.

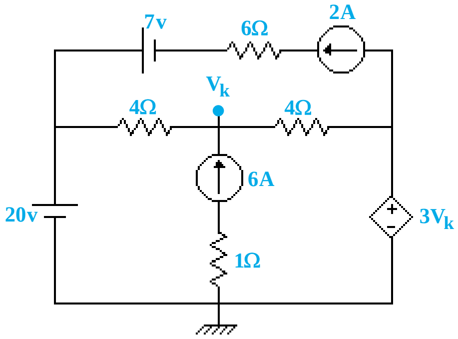
حال با نوشتن معادله KCL در گره A داریم:
$$\frac{V_A-۱۰I_۲}{۱۰}+\frac{V_A-۱۰۰}{۱۰}+\frac{V_A-۱۰I_۱-۱۰}{۱۰}=۰$$

با نوشتن قانون اهم، جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را می‌نویسیم:
$$I_۱=\frac{V_A-۱۰I_۲}{۱۰} \quad , \quad I_۲=\frac{V_A-۱۰۰}{۱۰}$$

با جایگذاری معادلات $I_۱$ و $I_۲$ در معادله KCL داریم:
$$\frac{V_A-۱۰[\frac{V_A-۱۰۰}{۱۰}]}{۱۰}+\frac{V_A-۱۰۰}{۱۰}+\frac{V_A-۱۰[\frac{V_A-۱۰[\frac{V_A-۱۰۰}{۱۰}]}{۱۰}]-۱۰}{۱۰}=۰$$

$$V_A=۵۵v \Rightarrow I_۲=\frac{۵۵-۱۰۰}{۱۰}=-۴/۵A \Rightarrow I_۱=\frac{۵۵-۱۰\times(-۴/۵)}{۱۰} \Rightarrow \mathbf{I_۱=۱۰\,A}$$

مثال ۲۹: در مدار مقابل مقدار V_k برحسب ولت کدام است؟



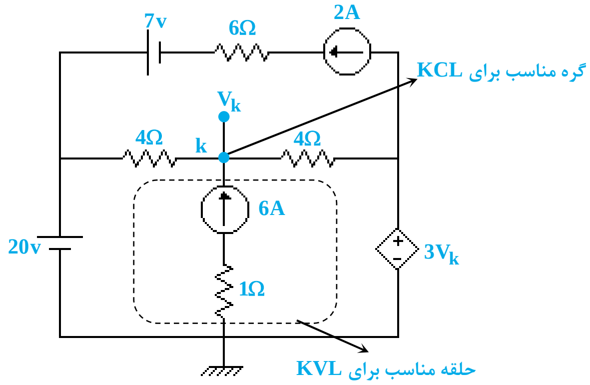
۱) -۲۲

۲) -۴۴

۳) ۲۲

۴) ۴۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۳ گره است. با توجه به این‌که ولتاژ گره‌های سمت راست و چپ به ترتیب $3V_k$ و ۲۰v است، لذا در گره‌های فوق اعمال KCL مناسب نمی‌باشد و برای حل مدار از روش گره فقط باید در گره وسط مدار اعمال KCL شود. با توجه به وجود منبع جریان در شاخه وسطی در مدار، حلقه‌های سمت راست و چپ در پایین مدار برای KVL مناسب نیست. همچنین به علت وجود یک منبع جریان در شاخه بالای مدار، حلقه بالای مدار برای اعمال KVL مناسب نیست. بنابراین مدار دارای فقط یک حلقه به صورت نشان داده شده در شکل روبرو است. با توجه به این‌که مدار دارای یک حلقه و یک گره است، باید به مجهول مدار توجه شود و با توجه به مجهول بودن V_k از روش KCL استفاده می‌شود. با نوشتن KCL در گره k داریم:

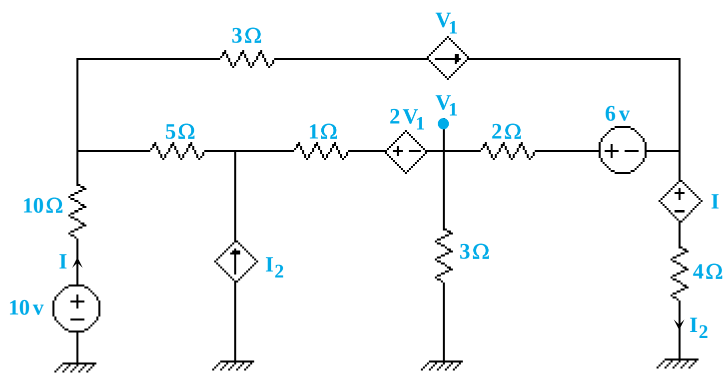


$$\frac{V_k-20}{4}+\frac{V_k-3V_k}{4}=6 \Rightarrow V_k-20+V_k-3V_k=24 \Rightarrow V_k=-44v$$

حل مسائل مدار با روش ترکیبی حلقه (مش) و گره

در برخی مسائل مدار اگر بخواهیم فقط از روش حلقه و یا فقط از روش گره استفاده کنیم، ممکن است روند حل مدار طولانی شده و یا معادلات بدست آمده برای رسیدن به جواب کافی نباشد. بنابراین پیشنهاد می‌شود که علاوه بر استفاده از انتخاب روش مناسب برای حل مدار که قبل از این بیان شد، از روش حلقه و گره به صورت هم‌زمان نیز استفاده شود. به عنوان مثال اگر یک حلقه را برای نوشتن KVL در مدار، مناسب تشخیص دهیم، بر روی المان‌های موجود در حلقه موردنظر حرکت می‌کنیم و با رسیدن به هر گره و با نوشتن KCL در آن، جریان مقاومت‌های موجود در حلقه را بر حسب مجهول اصلی سؤال می‌نویسیم و ولتاژ یا جریان شاخه‌ای را به عنوان مجهول جدید در نظر نمی‌گیریم. حال با نوشتن KVL در حلقه انتخاب شده، معادله‌ای بدست می‌آید که فقط شامل مجهول اصلی سؤال بوده و به سادگی قابل حل می‌باشد. علاوه بر این گاهی دیده می‌شود که فقط یک گره مناسب برای KCL در مدار وجود دارد، ولی معادله بدست آمده از KCL در آن گره، برای حل مدار کافی نیست و در آن معادله، چند مجهول وجود دارد. در این حالت لازم است که حلقه‌های مناسب برای KVL نیز بررسی شوند و با انتخاب مناسب آنها و نوشتن KVL در آنها، معادلات دیگری نیز بدست آید، که با حل معادلات بدست آمده از KVL ها و KCL، مجهول اصلی سؤال محاسبه می‌شود. برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۳۰: در مدار مقابل مقدار جریان I بر حسب آمپر کدام است؟



۱) $\frac{25}{33}$

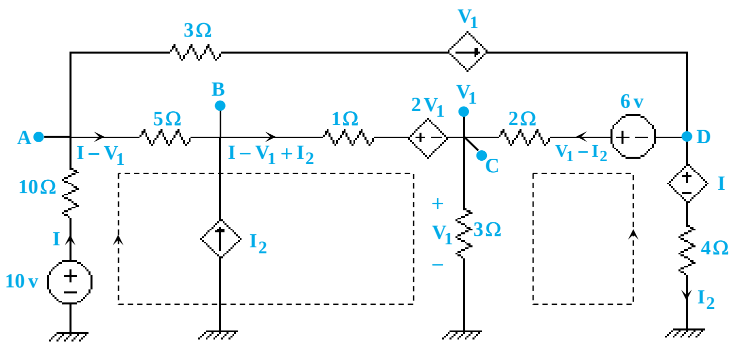
۲) $\frac{33}{25}$

۳) $\frac{19}{25}$

۴) $\frac{25}{19}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۴ گره مناسب برای KCL و دو حلقه مناسب برای KVL است. با توجه به اینکه تعداد حلقه‌ها، از تعداد گره‌ها کمتر است، از روش KVL استفاده می‌کنیم. (دقت کنید حلقه‌ای را برای KVL انتخاب می‌کنیم که شامل منبع جریان نباشد) حال قبل از نوشتن KVL در حلقه‌های مدار، در مسیر حلقه‌های مدار حرکت می‌کنیم و با رسیدن به هر گره و با نوشتن KCL در آن، جریان مقاومت‌های موجود در هر حلقه را بر حسب مجهول اصلی مدار و بقیه پارامترهای مدار بدست می‌آوریم. حال ابتدا در مسیر حلقه سمت چپ مدار به صورت ساعتگرد حرکت می‌کنیم. با توجه به مشخص بودن جریان مقاومت ۱۰ اهمی، با نوشتن KCL در گره A، جریان مقاومت ۵ اهمی برابر با $(I-V_1)$ می‌شود. در ادامه حرکت در حلقه سمت چپ به مقاومت ۱ اهمی می‌رسیم که با نوشتن KCL در گره B، جریان آن را به اندازه $(I-V_1+I_2)$ بدست می‌آوریم. آخرین مقاومت موجود در حلقه سمت چپ، مقاومت ۳ اهمی است که ولتاژ آن برابر با V_1 است و نیازی به مشخص کردن جریان آن نمی‌باشد.

در ادامه حل، در مسیر حلقه سمت راست مدار به صورت پادساعتگرد حرکت می‌کنیم. جریان مقاومت ۴ اهمی برابر با I_2 بوده و نیازی به محاسبه ندارد. ولی با نوشتن KCL در گره D، جریان مقاومت ۲ اهمی را به اندازه (V_1-I_2) بدست می‌آوریم. حال با مشخص شدن جریان مقاومت‌های موجود در حلقه‌های مدار بر حسب مجهولات موجود، در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:
$$-10+10I+5\times(I-V_1)+1\times(I-V_1+I_2)+2V_1+V_1=0 \Rightarrow 16I-3V_1+I_2=10 \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:
$$-4I_2-I-6+2\times(V_1-I_2)+V_1=0 \Rightarrow -6I_2+3V_1-I=6 \qquad (2)$$

دقت کنید که معادلات (۱) و (۲) هر کدام شامل سه مجهول است و برای حل این معادلات به یک معادله دیگر نیز نیاز است.

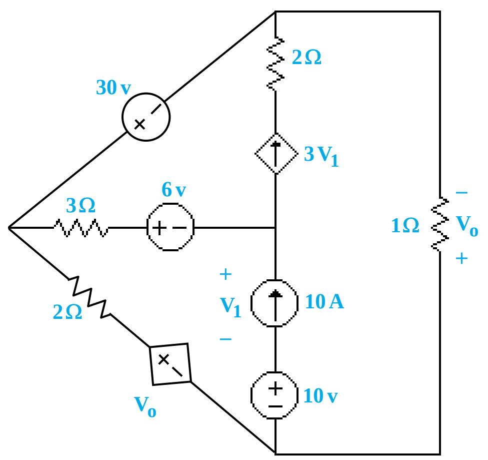
با نوشتن KCL در گره C این معادله را بصورت مقابل بدست می‌آوریم:
$$I-V_1+I_2+V_1-I_2=\frac{V_1}{3} \Rightarrow V_1=3I \qquad (3)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۳) داریم:
$$16I-3\times3I+I_2=10 \Rightarrow 7I+I_2=10 \qquad (4)$$

با ترکیب روابط (۳) و (۲) داریم:
$$-6I_2+3\times3I-I=6 \Rightarrow -6I_2+8I=6 \qquad (5)$$

با حل دستگاه تشکیل شده از معادلات (۴) و (۵)، مقدار جریان I به صورت زیر محاسبه می‌شود:
$$\begin{cases}7I+I_2=10\\-6I_2+8I=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}I=\dfrac{33}{25}A\\[2mm] I_2=\dfrac{19}{25}A\end{cases}$$

مثال۳۱: در مدار زیر مقدار ولتاژ دو سر منبع جریان ۱۰ آمپر بر حسب ولت کدام است؟



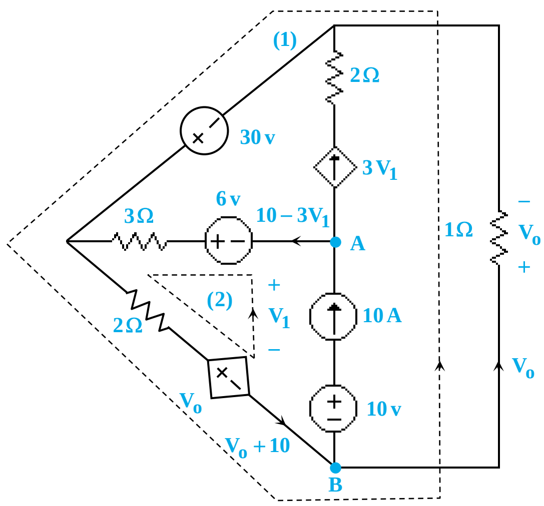
۱) ۴/۱۵

۲) ۳/۱۵

۳) ۲/۵

۴) ۵/۵

پاسخ: گزینه «۱» با دقت در مدار دیده می‌شود که به علت وجود منابع جریان، فقط حلقه بیرونی مدار برای KVL مناسب است. ولی با توجه به اینکه ولتاژ دو سر منبع جریان ۱۰ A به عنوان متغیر انتخاب شده است، می‌توانیم در حلقه پایین مدار نیز KVL بنویسیم. برای نوشتن KVL در حلقه‌های مشخص شده در مدار، لازم است که جریان مقاومت‌های موجود در حلقه‌های مدار بر حسب مجهولات سؤال مشخص شود. بنابراین در مسیر حلقه‌های مدار حرکت می‌کنیم و با رسیدن به هر گره و با نوشتن KCL در آن، جریان مقاومت‌های موجود در هر حلقه را محاسبه می‌کنیم. جریان مقاومت ۱ اهمی مطابق با قانون اهم برابر با V_o می‌باشد. با نوشتن KCL در گره B جریان مقاومت ۲ اهمی برابر با (V_o+10) است و همچنین با نوشتن KCL در گره A نیز جریان مقاومت ۳ اهمی $(10-3V_1)$ بدست می‌آید. حال با مشخص شدن جریان مقاومت‌های درون حلقه‌های مدار، ابتدا در حلقه شماره (۱) به صورت زیر KVL می‌زنیم:

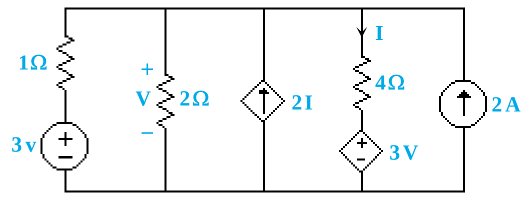


$$V_o-30+2\times(V_o+10)+V_o=0 \Rightarrow V_o=2/5v \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه شماره (۲) داریم:
$$-10-V_1-6+3\times(10-3V_1)+2\times(V_o+10)+V_o=0 \qquad (2)$$

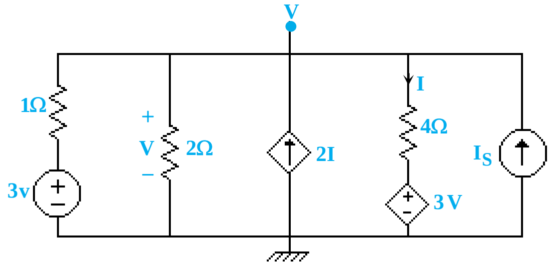
با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:
$$\Rightarrow -10-V_1-6+3\times(10-3V_1)+2\times(2/5+10)+2/5=0 \Rightarrow V_1=4/15v$$

مثال۴۹: در مدار شکل زیر، اگر به جای منبع جریان ۲ آمپری، یک منبع جریان ۵ آمپری در مدار قرار گیرد، نسبت جریان منبع ولتاژ وابسته در مدار جدید، به جریان منبع ولتاژ وابسته در مدار فعلی، برابر با کدام گزینه می‌شود؟



۱) ۱/۶
۲) ۱/۸
۳) ۱/۲۵
۴) ۱/۵

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه منبع جریان 2A در دو حالت ذکر شده متغیر است، مقدار آن را با I_S در مدار نمایش می‌دهیم و جریان I را که همان جریان منبع ولتاژ وابسته است، برحسب I_S به صورت پارامتری محاسبه می‌کنیم و در هر دو حالت مقدارهای I_S را جایگزین کرده و I را بدست می‌آوریم. بنابراین با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



$$\frac{V}{۲}+\frac{V-۳}{۱}+I=۲I+I_S \quad\Rightarrow\quad ۱/۵V-۳=I+I_S \quad (۱)$$

با نوشتن قانون اهم برای مقاومت ۴ اهم داریم:

$$I=\frac{V-۳V}{۴}=\frac{-V}{۲} \quad\Rightarrow\quad V=-۲I \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۱/۵\times(-۲I)-۳=I+I_S \quad\Rightarrow\quad I=\frac{-I_S-۳}{۴}$$

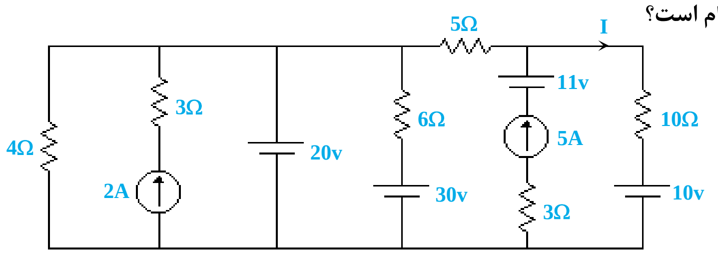
حال در هر دو حالت، مقادیر I را برحسب تغییرات I_S مقایسه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} I_S=۲A \;\Rightarrow\; I_{old}=\frac{-۲-۳}{۴}=\frac{-۵}{۴}A \\ I_S=۵A \;\Rightarrow\; I_{new}=\frac{-۵-۳}{۴}=\frac{-۸}{۴}A \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{I_{new}}{I_{old}}=\frac{-\frac{۸}{۴}}{-\frac{۵}{۴}}=۱/۶ \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I_{new}=۱/۶I_{old}}$$

چند نکته مهم در ساده‌سازی مدار

۱) کلیه المان‌های سری با منبع جریان چه مستقل و چه وابسته، با برقراری چهار شرط زیر می‌توانند از مدار حذف شوند:
الف) جریان، ولتاژ یا توان المان یا شاخه قابل حذف مورد سؤال نباشد. ب) جریان، ولتاژ یا توان منبع مذکور مورد سؤال نباشد.
ج) در مدار نباید منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد که مقدار آن به ولتاژ یا جریان المان قابل حذف مرتبط باشد.
د) در مدار نباید منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد که مقدار آن به ولتاژ دو سر منبع جریان مرتبط باشد.
۲) کلیه المان‌ها و شاخه‌های موازی منبع ولتاژ (چه مستقل و چه وابسته) از مدار قابل حذف هستند، در صورتی که شرایط (الف)، (ب) و (ج) در فوق عیناً صادق بوده و در مدار هیچ منبع وابسته‌ای وجود نداشته باشد که مقدار آن به جریان منبع ولتاژ موردنظر مرتبط باشد.
۳) کلیه المان‌های مقاومتی موازی اتصال کوتاه، حاوی جریان صفر بوده و از مدار حذف می‌شوند. ($I=\frac{V}{R}$ و $V=۰$ در نتیجه $I=۰$)

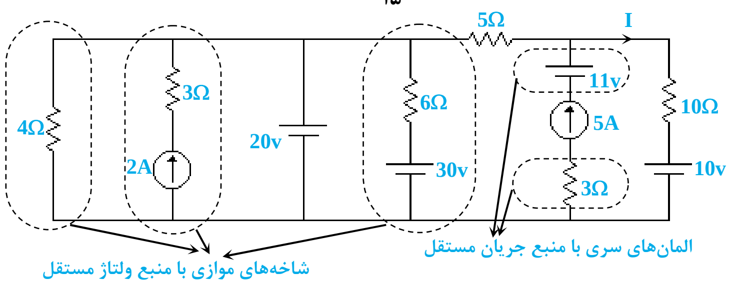
مثال۵۰: در مدار زیر مقدار جریان عبوری از مقاومت ۱۰ اهمی کدام است؟

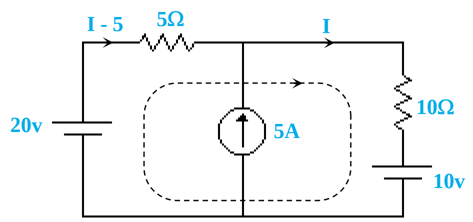


۱) ۰/۰۳۳ A
۲) ۰/۳۳ A
۳) ۱/۳۳A
۴) ۲/۳۳A

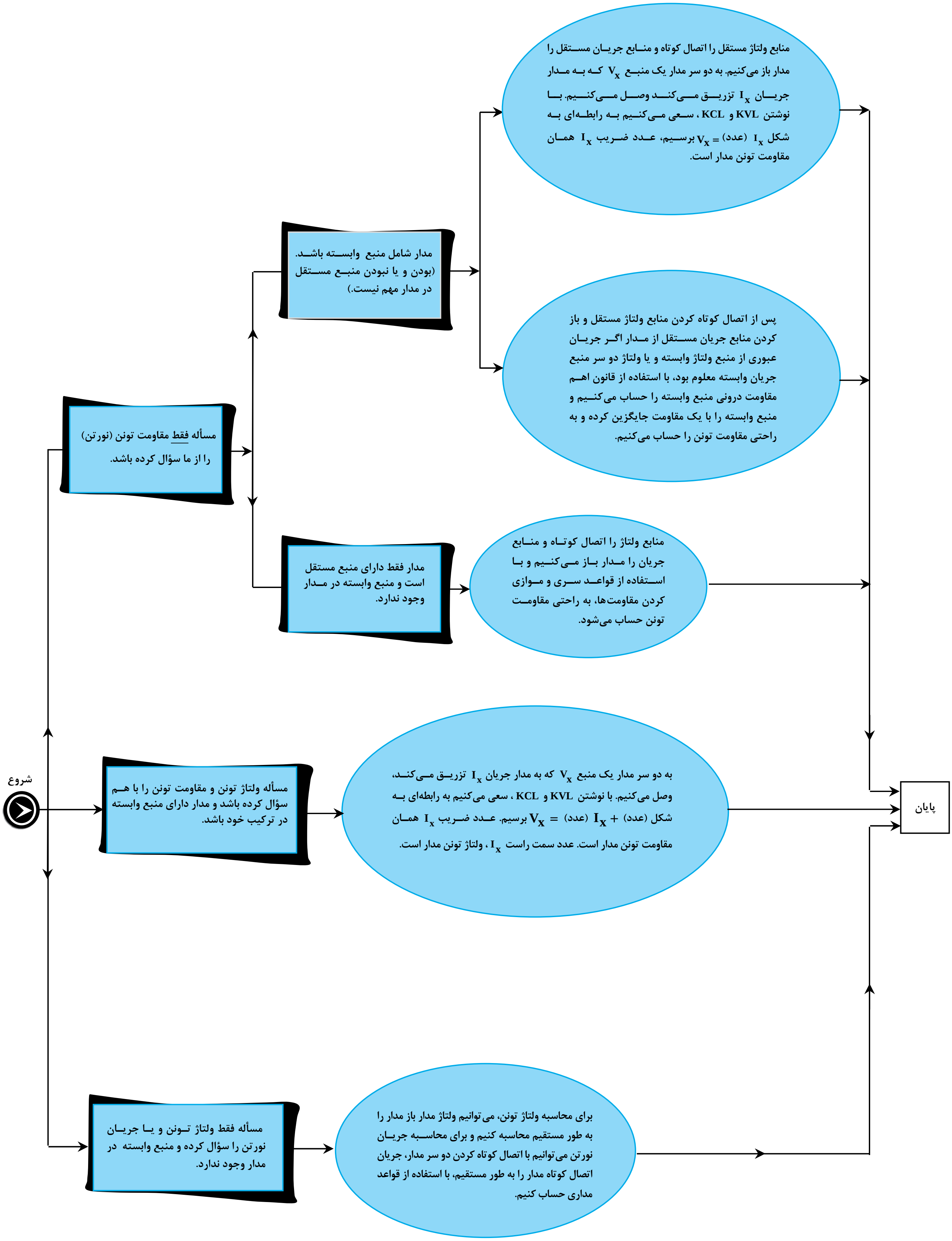
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکات گفته شده، برای ساده‌سازی مدار شاخه‌های موازی با منبع ولتاژ مستقل ۲۰v و المان‌های سری با منبع جریان 5A حذف می‌شوند. حال مدار به صورت زیر ساده می‌شود. در ادامه با توجه به وجود فقط یک حلقه در مدار و مجهول بودن I، در حلقه نشان داده شده KVL زده می‌شود.

$$-۲۰+۵(I-۵)+۱۰I+۱۰=۰ \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I=\frac{۳۵}{۱۵}=۲/۳۳A}$$





در زیر، دستورالعمل محاسبه مدار معادل تونن و نورتن به صورت الگوریتم آورده شده است:



$V - V_۱ = ۴V \qquad (۳)$

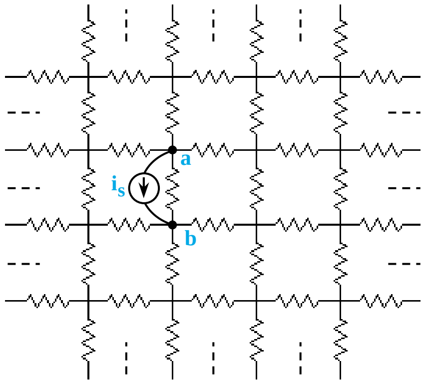
$(۱) \Rightarrow ۲V_A - V + ۸V_۱ = ۲ \qquad (۴)$ و $(۳) \Rightarrow V_۱ = -۳V \qquad (۵)$

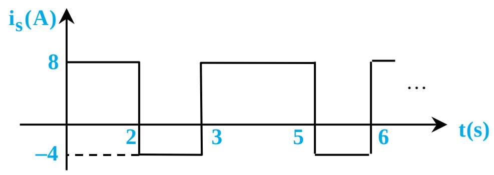
$(۴)\ ,\ (۵) \Rightarrow ۲V_A - ۲۵V = ۲ \qquad (۶)$ و $(۵)\ ,\ (۲) \Rightarrow ۱۹V - V_A = ۲\cos t \qquad (۷)$

$(۷)\ ,\ (۶) \Rightarrow V(t) = \frac{۴}{۱۳}\cos t + \frac{۲}{۱۳}$ و $V(t) = ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۱۳}\cos t + \frac{۲}{۱۳} = ۰ \Rightarrow \cos t = -\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow \ t = ۲k\pi + \frac{۲}{۳}\pi$ (k عدد صحیح)

مثال ۱۲۴: در شکل زیر تمام مقاومت‌ها 1Ω بوده و تا بینهایت ادامه دارند. اگر به پایانه‌های a و b منبع جریان i_s وصل شود، چه توانی در این مدار تلف می‌شود؟ (بر حسب وات)





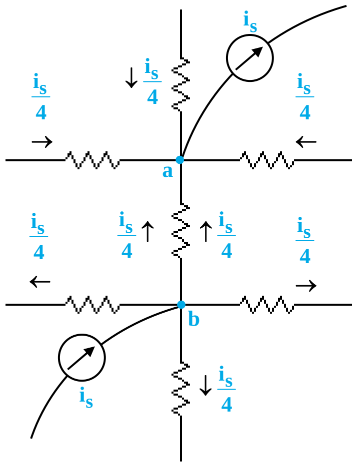
۱) ۳۲

۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید مقاومت معادل دو سر منبع جریان i_s را محاسبه کنیم.



چون مدار از دو سمت به ∞ می‌رود، می‌توان منبع i_s را با دو منبع i_s که یکی از ∞ به b وارد می‌شود و دیگری از a به سمت ∞ می‌رود، جایگزین کرد. پس داریم:

$$V_{ba} = (\frac{i_s}{۴} + \frac{i_s}{۴}) \times ۱$$

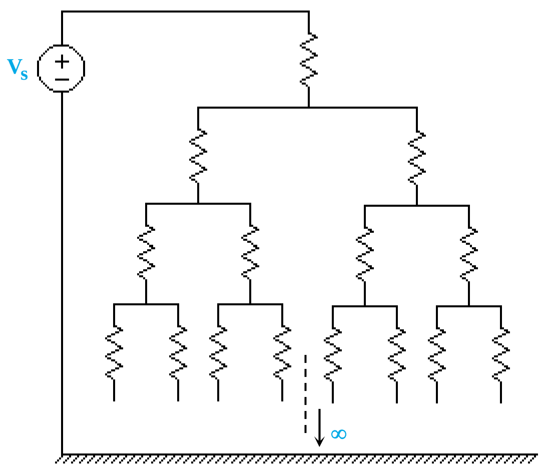
$$V_{ba} = ۰/۵ i_s \Rightarrow R_{eq} = ۰/۵\Omega$$

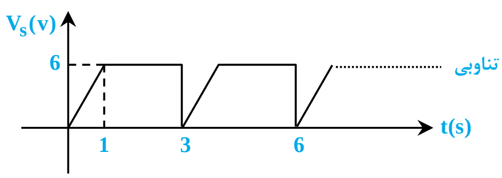
حال با توجه به رابطه $P = R_{eq} i_{rms}^۲$ باید مقدار $i_{rms}^۲$ را محاسبه کنیم:

$$i_{rms}^۲ = \frac{۱}{T}\int_۰^T i^۲(t)dt = \frac{۱}{۳}[\int_۰^۲ ۸^۲ dt + \int_۲^۳ (-۴)^۲ dt] = \frac{۱}{۳}[۶۴ \times ۲ + ۱۶ \times ۱] = \frac{۱۴۴}{۳} = ۴۸\ (A^۲)$$

$$\Rightarrow P = R_{eq} i_{rms}^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۴۸ = ۲۴(w)$$

مثال ۱۲۵: در مدار شکل مقابل مقاومت‌ها ۲ اهمی هستند و تا بینهایت ادامه دارند. توان تلف شده در این مدار بر حسب وات کدام است؟





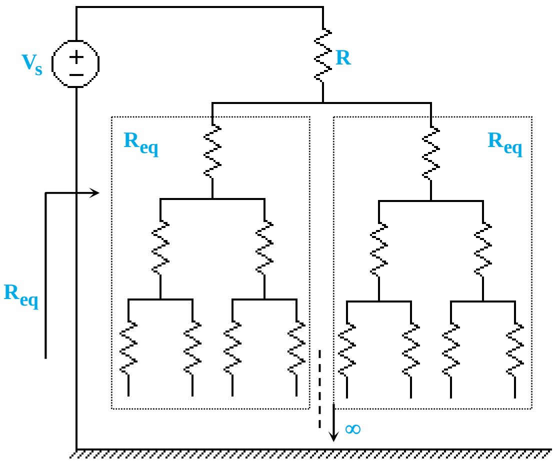
۱) ۴

۲) ۸

۳) ۷

۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر منبع ولتاژ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به مدار که تا ∞ ادامه دارد:



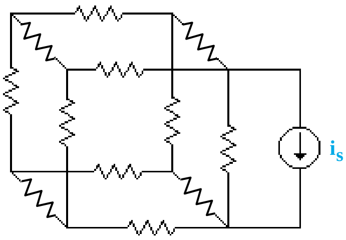
$$R_{eq} = R + R_{eq} \parallel R_{eq} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = R + \frac{R_{eq}}{۲}$$

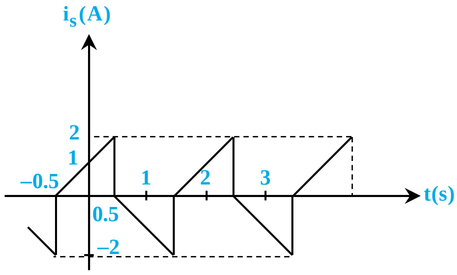
$$\Rightarrow \quad R_{eq} = ۲R \xrightarrow{R=۲} R_{eq} = ۴\Omega$$

حال با توجه به این که $P = \frac{V_{rms}^۲}{R_{eq}}$ می‌باشد، باید $V_{rms}^۲$ را محاسبه کنیم:

$$V_{rms}^۲ = \frac{۱}{T}\int_۰^T V^۲(t)dt = \frac{۱}{۳}[\int_۰^۱ (۶t)^۲ dt + \int_۱^۳ (۶)^۲ dt] = \frac{۱}{۳}[\frac{۳۶}{۳}t^۳\Big|_۰^۱ + ۳۶t\Big|_۱^۳] = \frac{۸۴}{۳} = ۲۸(v^۲) \Rightarrow P = \frac{V_{rms}^۲}{R_{eq}} = \frac{۲۸}{۴} = ۷(w)$$

مثال ۱۲۶: در مدار شکل زیر مقاومت‌های یک اهم اضلاع یک مکعب را تشکیل می‌دهند. توان تلف شده در این مدار در صورتی که سیگنال منبع جریان به صورت زیر باشد، کدام است؟





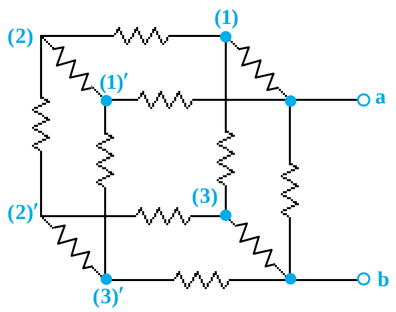
۱) $\frac{۱}{۳}$ وات

۲) ۱ وات

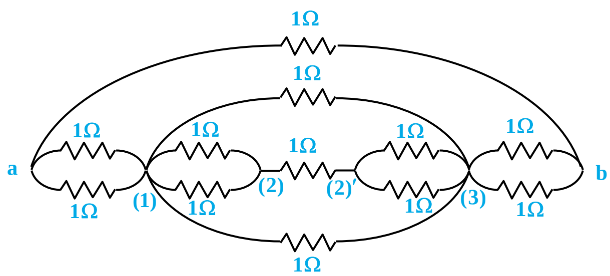
۳) $\frac{۱}{۹}$ وات

۴) $\frac{۷}{۹}$ وات

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باید ابتدا مقاومت دیده شده از دو سر منبع جریان را محاسبه کنیم. با توجه به تقارن مدار نقاط (۱) و $(۱)'$ و نقاط (۳) و $(۳)'$ هم‌پتانسیل بوده و می‌توان آن‌ها را به یکدیگر متصل کرد.



$\Longrightarrow$



با محاسبه‌ی مقاومت‌های معادل داریم:

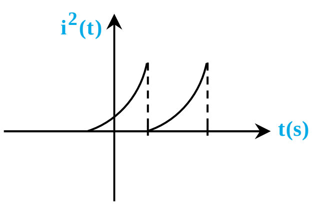
$$R_{ab} = \frac{۷}{۱۲}\Omega$$

حال مقدار توان را از رابطه روبرو محاسبه می‌کنیم:

$$P = Ri_{rms}^۲$$

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{۱}{T}\int_۰^T i^۲(t)dt}$$

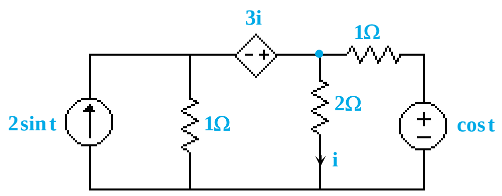
با توجه به سیگنال جریان داریم:



$$i_{rms}^۲ = \frac{۱}{۱}\int_۰^۱ ۴t^۲dt = \frac{۴}{۳}(A^۲) \quad (T = ۱sec)$$

$$P = \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۴}{۳} = \frac{۷}{۹}(w)$$

مثال ۱۲۷: در مدار زیر اندازه توان متوسط منبع وابسته چند برابر اندازه توان مصرفی مقاومت ۲ اهم می‌باشد؟



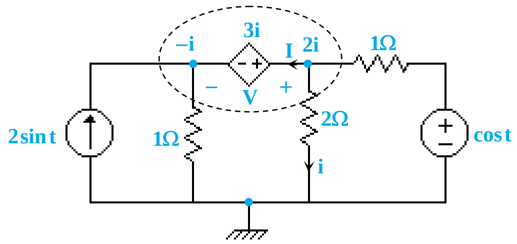
۱) ۷/۸

۲) ۶/۶

۳) ۳/۹

۴) ۳/۳

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا سعی می‌کنیم با تحلیل مدار، جریان مقاومت ۲ اهمی و جریان منبع وابسته را محاسبه کنیم. مطابق شکل روبرو می‌توان ولتاژ گره‌های مدار را برحسب جریان i مشخص نمود:



حال در ابرگره بالای مدار KCL می‌زنیم:

$$۲\sin t+\frac{i}{۱}=i+\frac{۲i-\cos t}{۱} \Rightarrow i=\sin t+\frac{\cos t}{۲}\ (A)$$

با بدست آمدن مقدار i مقدار جریان منبع وابسته و ولتاژ آن نیز به سادگی بدست می‌آید:

$$V=۳\times i=۳\sin t+\frac{۳\cos t}{۲}\ (v) \quad , \quad I=-۲\sin t-i=-۲\sin t-\sin t-\frac{\cos t}{۲}=-۳\sin t-\frac{\cos t}{۲}\ (A)$$

اکنون می‌خواهیم توان مقاومت ۲ اهم را محاسبه کنیم. بدین منظور می‌توان ابتدا توان لحظه‌ای این مقاومت را محاسبه کرد:

$$P_{۲\Omega}(t)=۲\times i^۲(t)=۲\times\left(\sin t+\frac{\cos t}{۲}\right)^۲=۲\sin^۲ t+۲\sin t\times\cos t+\frac{۱}{۲}\cos^۲ t$$

با توجه به این نکته که مقدار متوسط سیگنال‌های $\sin^۲\omega t$ و $\cos^۲\omega t$ برابر ۰/۵ و مقدار متوسط سیگنال‌های $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ برابر صفر است، داریم:

$$P_{۲\Omega}=\text{متوسط}\left[۲\sin^۲ t+\sin ۲t+\frac{۱}{۲}\cos^۲ t\right]=۲\times\frac{۱}{۲}+۰+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}\ w$$

مقدار توان متوسط مقاومت ۲ اهم را به روش زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$i(t)=\sin t+\frac{\cos t}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\sin(t+۲۶/۵^\circ) \Rightarrow i_{rms}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۵}}{۲}=\sqrt{\frac{۵}{۸}}\ A$$

$$P_{۲\Omega}=۲\times i_{rms}^۲=۲\times\frac{۵}{۸}=\frac{۵}{۴}\ w$$

اکنون توان متوسط منبع ولتاژ وابسته را محاسبه می‌کنیم. در این جا نیز مانند قبل ابتدا توان لحظه‌ای را محاسبه کرده و سپس از آن متوسط‌گیری می‌کنیم:

$$P_{۳i}(t)=V(t)\times I(t)=\left(۳\sin t+\frac{۳\cos t}{۲}\right)\times\left(-۳\sin t-\frac{\cos t}{۲}\right)=-۹\sin^۲ t-۶\sin t\times\cos t-\frac{۳}{۴}\cos^۲ t$$

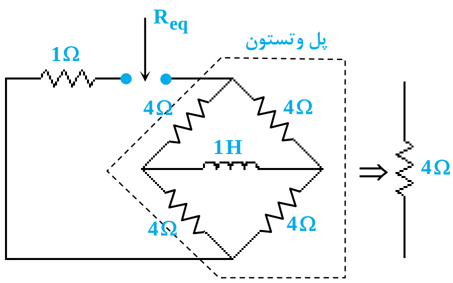
$$P_{۳i}=\text{متوسط}\left[-۹\sin^۲ t-۳\sin ۲t-\frac{۳}{۴}\cos^۲ t\right]=-۹\times\frac{۱}{۲}+-۳\times۰-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۳۹}{۸}\ w$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{|P_{۳i}|}{|P_{۲\Omega}|}=\frac{\frac{۳۹}{۸}}{\frac{۵}{۴}}=۳/۹$$

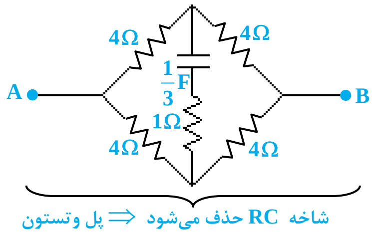
توجه: داوطلبانی که بعد از مطالعه کل کتاب نیاز به تست بیشتری برای مرور و تمرین دارند، می‌توانند با مراجعه به سایت www.modaresanesharif.ac.ir بانک تست‌های مربوط به همه فصول کتاب را دانلود نمایند.
پیشنهاد مناسب دیگر، تهیه کتاب «بانک تست ریاضیات و مدارهای الکتریکی ۱ و ۲» است که کتاب بسیار مفیدی برای یک ماه منتهی به آزمون اصلی سازمان سنجش است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا ثابت زمانی متأثر از خازن مدار را با فرض اتصال کوتاه بودن منبع V_S محاسبه می‌کنیم. در این حالت از دو سر خازن، مقاومت معادل را محاسبه می‌کنیم.



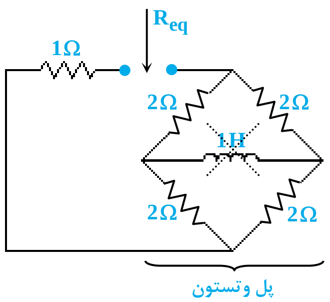
$$\Rightarrow R_{eq} = ۱ + ۴ = ۵\Omega \Rightarrow \tau_۱ = R_{eq}.C = ۵ \times \frac{۱}{۳} \Rightarrow \tau_۱ = \frac{۵}{۳}\sec$$

حال ثابت زمانی متأثر از سلف را محاسبه می‌کنیم.



$$\Rightarrow R_{eq}(A,B) = ۴\Omega \Rightarrow \tau = \frac{L}{۴} = \frac{۱}{۴}\sec$$

لذا ثابت زمانی بزرگتر در مدار، متأثر از وجود خازن است. حال اگر مقاومت‌های ۴Ω به ۲Ω تبدیل شوند، داریم:



$$R'_{eq} = ۱ + ۲ = ۳\Omega \Rightarrow \tau_۲ = R'_{eq}.C$$

$$\Rightarrow \tau_۲ = ۳ \times \frac{۱}{۳} \Rightarrow \tau_۲ = ۱\sec \Rightarrow \Delta\tau = \tau_۱ - \tau_۲ = \frac{۵}{۳} - ۱ = \frac{۲}{۳}\sec$$

روش تستی برای محاسبه مجهولات در مدار مرتبه اول

با توجه به اینکه مدارهای مرتبه اول دارای معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند و فرم پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه اول ثابت است، لذا برای بدست آوردن ولتاژ یا جریان هر المان مداری در مدارهای مرتبه اولی که به صورت خطی و با ورودی DC هستند، می‌توان از فرم پاسخ زمانی نمایی استفاده کرد. بر این اساس در صورتی که کلیدزنی در زمان صفر انجام شود، پاسخ کامل یک مدار مرتبه اول برای هر مجهول به صورت زیر است:

$$\boxed{f(t) = [f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}]u(t)}$$

با توجه به فرمول ذکر شده در صفحه قبل، می‌توان پاسخ‌های حالت ماندگار و حالت گذرا، همچنین پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر در یک مدار مرتبه اول را به طور کلی به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\text{پاسخ ورودی صفر} = f_۱(t) = f(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad , \quad \boxed{\text{پاسخ حالت صفر} = f_۲(t) = f(\infty)[۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}]}$$

(چون ورودی صفر است، لذا حتماً $f(\infty)$ صفر می‌شود.)

$$\boxed{\text{پاسخ حالت گذرا} = f_۳(t) = [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad , \quad \boxed{\text{پاسخ حالت ماندگار} = f_۴(t) = f(\infty)}$$

دقت کنید اگر کلیدزنی در زمان $t = t_۱$ باشد، با شیفت $t = 0$ به $t = t_۱$ برای پاسخ کامل داریم:

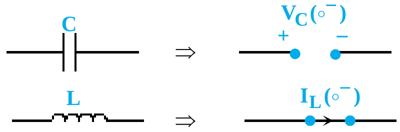
$$\boxed{f(t) = [f(\infty) + [f(t_۱^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t - t_۱}{\tau}}]u(t - t_۱)}$$

لازم به ذکر است که مقدار $f(0^+)$، مقدار اولیه ولتاژ یا جریان مجهول، اندکی بعد از کلیدزنی است و $f(t = t_۱)$ مقدار مجهول در $t = t_۱$ و $f(\infty)$ مقدار مجهول در $t = \infty$ است. در ادامه به بررسی قوانین تحلیل مدار در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ و $t = \infty$ می‌پردازیم.

قوانین تحلیل مدار در زمان‌های 0^+، 0^- و ∞

الف) تحلیل مدار در $t=0^-$:

زمان $t=0^-$ اندکی قبل از کلیدزنی است و نوع تحلیل آن به صورت تحلیل DC می‌باشد. مدار در این وضعیت به حالت پایدار رسیده است و در این زمان سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز هستند. بنابراین داریم:

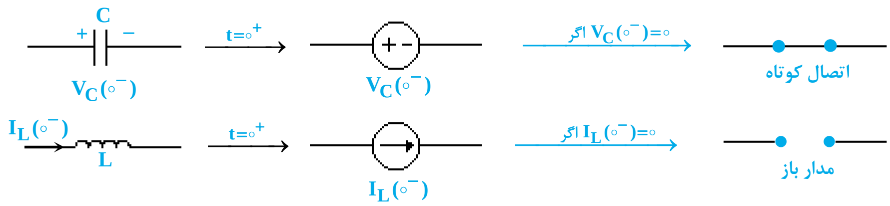


$V_C(0^-)=V_{th}$ (از دو سر خازن) $\quad$ $V_C=$ ثابت $\Rightarrow i_C=0 \Rightarrow$ مدار باز

$I_L(0^-)=I_N$ (از دو سر سلف) $\quad$ $i_L=$ ثابت $\Rightarrow V_L=0 \Rightarrow$ اتصال کوتاه

ب) تحلیل مدار در $t=0^+$:

زمان $t=0^+$ کمی بعد از عمل کلیدزنی در مدار است. در این حالت باید به جای خازن، یک منبع ولتاژ به اندازه $V_C(0^-)$ و به جای سلف یک منبع جریان به اندازه $I_L(0^-)$ قرار دهیم. واضح است در صورتی که $V_C(0^-)=0$ باشد، باید به جای خازن در $t=0^+$ اتصال کوتاه قرار دهیم و اگر $I_L(0^-)=0$ باشد، باید به جای سلف مدار باز قرار دهیم.



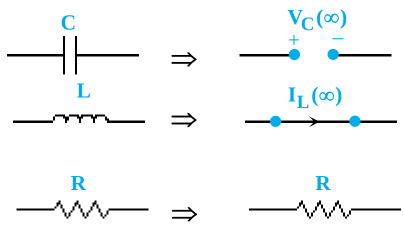
تذکر: با توجه به مطالب گفته شده به این نتیجه می‌رسیم که ولتاژ خازن در دو زمان $t=0^-$ و $t=0^+$ برابر بوده و تغییرات لحظه‌ای ندارد و همچنین در این دو زمان جریان سلف نیز برابر بوده و تغییری ندارد، یعنی داریم: $V_C(0^+)=V_C(0^-)$, $I_L(0^+)=I_L(0^-)$

نکته ۸: دیده می‌شود که جریان سلف و ولتاژ خازن تغییرات لحظه‌ای ندارند و مقادیر عددی آنها در 0^+ و 0^- برابر است. اما برابری $V_C(0^-)$ با $V_C(0^+)$ به معنی برابری $I_C(0^-)$ با $I_C(0^+)$ نمی‌باشد و در مورد جریان خازن فقط با تحلیل مدار می‌توان نظر داد. بحث مشابهی نیز در مورد ولتاژ سلف قابل ذکر است. **علاوه بر این ولتاژ خازن و جریان سلف در مواردی خاص تغییرات لحظه‌ای دارند که در قسمت‌های آینده مورد بررسی قرار می‌گیرد.**

نکته ۹: با توجه به اینکه در اکثر تست‌ها کلیدزنی در $t=0$ اتفاق می‌افتد، لذا ما نیز مبنای لحظه کلیدزنی را $t=0$ قرار دادیم. توجه کنید اگر مثلاً در لحظه $t=2$ کلیدزنی انجام شود، تمامی تحلیل‌های فوق صحیح است، فقط پارامترها به شکل $V_C(2^+)$ و $V_C(2^-)$ و همچنین $I_L(2^+)$ و $I_L(2^-)$ تغییر می‌کند.

ج) تحلیل مدار در $t=\infty$:

این تحلیل مختص منابع از نوع DC است و مربوط به زمانی است که مدار به حالت پایدار خود رسیده است. در این حالت سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز می‌باشند.



$V_C(\infty)=V_{th}$ (از دو سر خازن)

$I_L(\infty)=I_N$ (از دو سر سلف)

نکته ۱۰: نوع تحلیل در $t=\infty$ و $t=0^-$ کاملاً یکسان است، اما این امر دلیلی بر تساوی مجهولات در این دو زمان نمی‌باشد، زیرا به علت اعمال کلیدزنی و تغییر منابع تغذیه، مدار به لحاظ ساختاری در لحظات $t=0^-$ و $t=\infty$ متفاوت است.

مثال ۲۱: **در مدار شکل زیر تمام شرایط اولیه مدار برابر با صفر است. مقدار جریان‌های $I_{C_1}(0^+)$ و $I_{L_1}(+\infty)$ به ترتیب چند آمپر است؟**

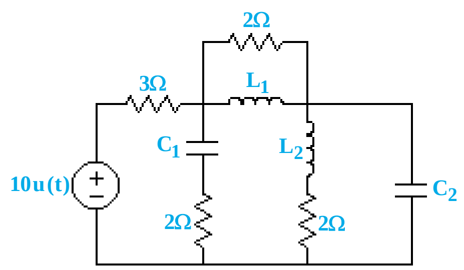
(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۹۰)

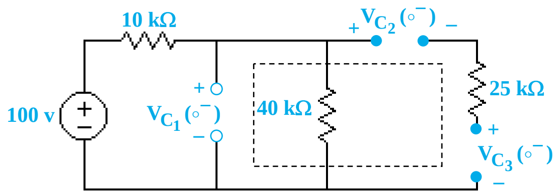
۱) ۰ و ۰

۲) ۱ و ۲

۳) ۲ و ۱

۴) ۱/۲۵ و ۲





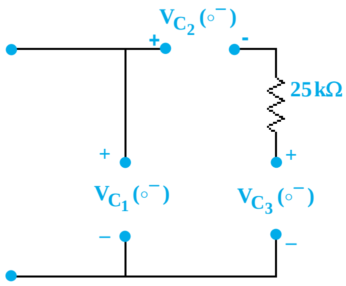
☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در $t=0^-$ مدار در حالت پایدار بوده است، لذا سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز هستند. با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_{C_۱}(0^-)=\frac{۴۰}{۴۰+۱۰}\times ۱۰۰=۸۰v=V_{۴۰k\Omega}$$

از طرفی چون دو خازن $C_۲$ و $C_۳$ با هم سری هستند، بار آنها با هم برابر بوده و ولتاژ آنها به نسبت عکس ظرفیتشان تقسیم می‌شود، یعنی: $\frac{۳}{۲}=\frac{C_۳}{C_۲}=\frac{V_{C_۲}(0^-)}{V_{C_۳}(0^-)}$ و یا $V_{C_۲}(0^-)=\frac{۳}{۲}V_{C_۳}(0^-)$ است. با نوشتن KVL در مش سمت راست داریم: $V_{C_۲}(0^-)+V_{C_۳}(0^-)=۸۰v$

$$\frac{۳}{۲}V_{C_۳}(0^-)+V_{C_۳}(0^-)=۸۰ \Rightarrow V_{C_۳}(0^-)=۳۲v \Rightarrow V_{C_۲}(0^-)=۸۰-۳۲=۴۸v$$

لازم به ذکر است که در $t=0^-$ با توجه به مدار باز بودن خازن‌ها، افت ولتاژی روی مقاومت‌ها و سلف‌های سری با خازن‌ها وجود ندارد. لذا ولتاژهای $V_{C_۲}$ و $V_{C_۳}$ را می‌توان از قانون تقسیم ولتاژ از ولتاژ خازن $C_۱$ بدست آورد. بنابراین داریم:

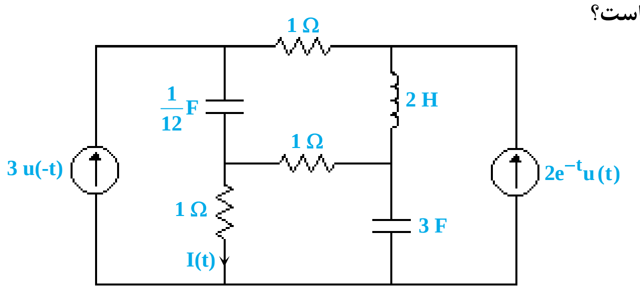


$$V_{C_۱}(0^-)=V_{۴۰k}=۸۰v$$

$$V_{C_۳}(0^-)=V_{C_۱}(0^-)\times\frac{C_۲}{C_۲+C_۳}=۸۰\times\frac{۲F}{۲F+۳F}=۳۲v$$

$$V_{C_۲}(0^-)=V_{C_۱}(0^-)\times\frac{C_۳}{C_۲+C_۳}=۸۰\times\frac{۳F}{۲F+۳F}=۴۸v$$

مثال ۳۴: در مدار مقابل جریان $I(t)$ در لحظه $t=0^+$ برحسب آمپر کدام است؟



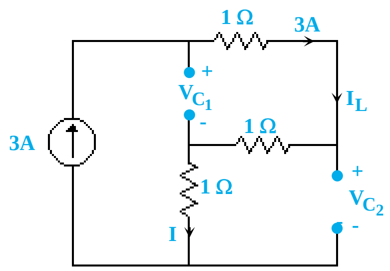
۱) ۳

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۵

۴) $\frac{۵}{۲}$

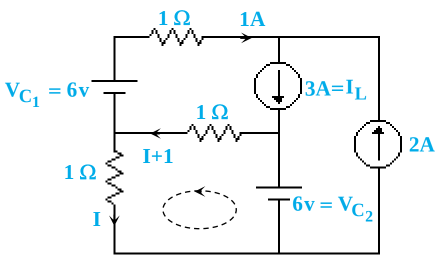
☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای محاسبه مقدار I در $t=0^+$، ابتدا مدار باید در $t=0^-$ تحلیل شود و مقدار $V_C(0^-)$ برای خازن‌ها و مقدار $I_L(0^-)$ برای سلف مدار محاسبه شود. در ادامه با توجه به شرایط اولیه، مدار معادل در $t=0^+$ ترسیم شده و مقدار $I(0^+)$ محاسبه می‌شود. برای تحلیل مدار در $t=0^-$ خازن‌ها را با مدار باز و سلف را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم. در $t=0^-$ منبع جریان سمت چپ مدار، برابر ۳A و منبع جریان سمت راست مدار برابر با صفر است.



$$I_L(0^-)=۳A$$
$$V_{C_۱}(0^-)=I_L(0^-)\times ۲=۶v$$
$$V_{C_۲}(0^-)=۲\times I_L(0^-)=۶v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_L(0^+)=۳A \\ V_{C_۱}(0^+)=۶v \\ V_{C_۲}(0^+)=۶v \end{cases}$$

حال مدار را در $t=0^+$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت منبع جریان سمت راست برابر۲A و منبع جریان در سمت چپ برابر صفر است. با نوشتن KVL در حلقه پایین مدار داریم:



$$۶=۱\times(I+۱)+I\times۱ \Rightarrow I=I(t=0^+)=۲/۵A$$

چکیده مطالب کلیدزنی در مدارهای مرتبه اول

به طور کلی معادله ولتاژ یا جریان یک عنصر مداری در مدارهای مرتبه اول در حالت خطی و با ورودی DC به صورت زیر قابل بیان است:

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(t)$ می‌تواند معادله ولتاژ و یا جریان یک عنصر و یا یک شاخه مدار باشد. برای بدست آوردن معادله جریان و ولتاژ مجهول، باید مقادیر آنها را در $t=0^+$ و $t=\infty$ حساب کنیم و با بدست آوردن ثابت زمانی مدار، معادله مورد نظر را بنویسیم. برای بدست آوردن مقدار $f(0^+)$، مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقدار $I_L(0^-)$ و یا $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و سپس با توجه به خواسته مسأله به دو حالت برخورد می‌کنیم:

۱) معادله جریان یک عنصر غیر از سلف و یا معادله ولتاژ یک عنصر غیر از خازن مورد سؤال باشد:

مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقدار $I_L(0^-)$ و یا $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و با ترسیم مدار در $t=0^+$، به جای خازن یک منبع ولتاژ به اندازه $V_C(0^-)$ و به جای سلف یک منبع جریان به اندازه $I_L(0^-)$ قرار می‌دهیم و مقدار عددی مجهول مسأله را در $t=0^+$ با توجه به مدار رسم شده حساب می‌کنیم. واضح است که اگر $I_L(0^-)=0$ و $V_C(0^-)=0$ باشند، در $t=0^+$ به جای سلف، مدار باز و به جای خازن، اتصال کوتاه قرار می‌دهیم.

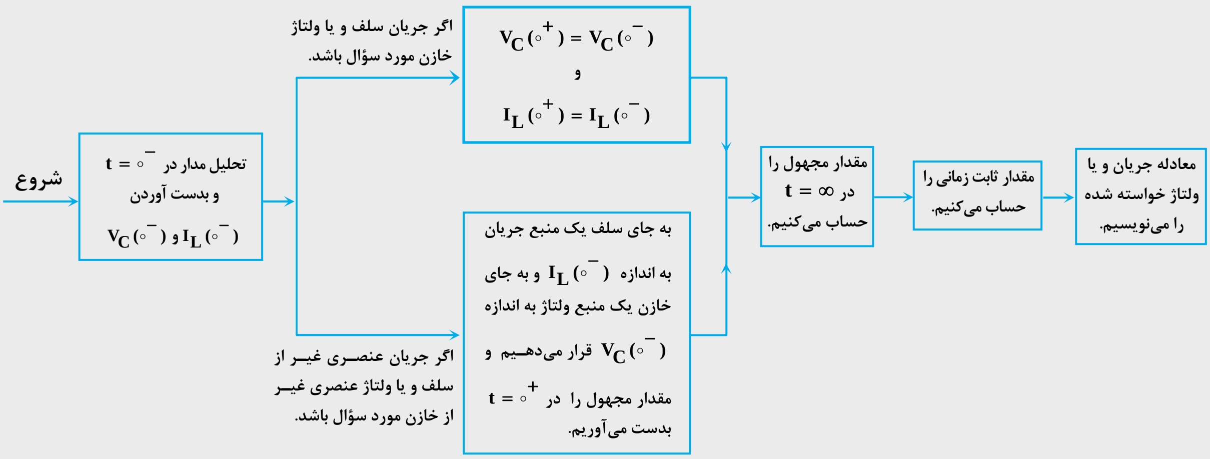
۲) معادله جریان سلف و یا ولتاژ خازن مورد سؤال باشد:

اگر هدف نوشتن معادله جریان سلف و یا ولتاژ خازن باشد، مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقادیر $I_L(0^-)$ و $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و دیگر تحلیل مدار در $t=0^+$ لازم نیست، زیرا $I_L(0^-)=I_L(0^+)$ و $V_C(0^-)=V_C(0^+)$ می‌باشد. **دقت کنید تساوی‌های اخیر به این دلیل است که ولتاژ خازن و جریان سلف تغییرات ناگهانی ندارند، غیر از مواردی که در ادامه این فصل بیان شده است.**

پس از بدست آوردن $f(0^+)$، باید به سراغ محاسبه $f(\infty)$ برویم. بعد از عمل کلیدزنی، زمانی که مدار به حالت پایدار رسیده است، به جای سلف، اتصال کوتاه و به جای خازن، مدار باز قرار می‌دهیم و مقدار $f(\infty)$ را حساب می‌کنیم.

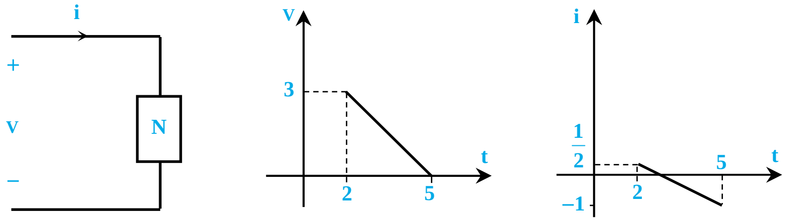
مرحله آخر، بدست آوردن ثابت زمانی مدار می‌باشد. اگر مدار دارای سلف و مقاومت باشد، از رابطه $\tau=\frac{L_{eq}}{R_{eq}}$ و اگر مدار دارای خازن و مقاومت باشد، از رابطه $\tau=R_{eq}.C_{eq}$ برای بدست آوردن ثابت زمانی استفاده می‌کنیم.

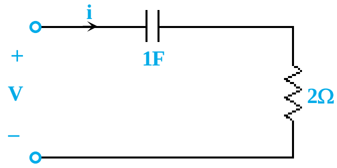
الگوریتم حل مسائل کلیدزنی مرتبه اول به صورت زیر می‌باشد:



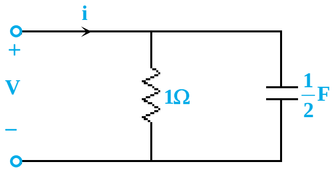
تذکر: دقت کنید در تست‌ها ممکن است مقادیر $f(0^+)$، $f(0^-)$ و یا $f(\infty)$ سؤال شود. در این حالت دیگر لازم نیست تمامی مراحل فوق را انجام دهیم و تا همان مرحله‌ای که مقادیر فوق حساب می‌شوند، ادامه می‌دهیم. مثلاً اگر $f(\infty)$ مورد سؤال باشد، تحلیل مدار در $t=0^-$ و یا در $t=0^+$ لازم نیست و اگر $f(0^+)$ را سؤال کرده باشند، باید مدار در دو زمان $t=0^-$ و $t=0^+$ تحلیل شود.

مثال ۸۷: به ازای مشخصه‌های زمانی V و i، اتصال کدام دو المان معادل N است؟ (مهندسی برق ـ دکتری ۹۵)

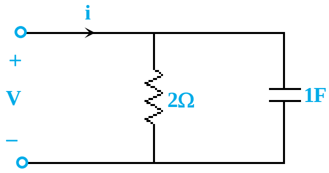




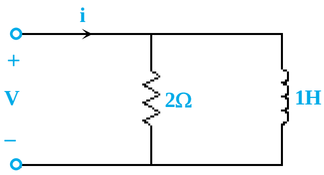
(۱)



(۲)



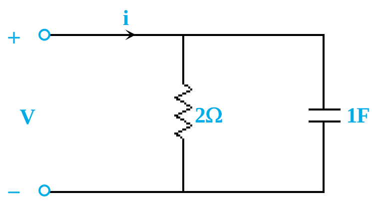
(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا سعی می‌کنیم با یافتن روابط زمانی V و i معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده احتمالی المان N را بدست آوریم:

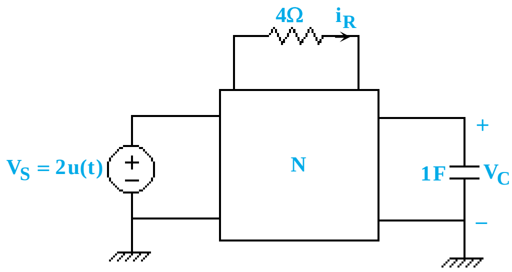
$$V=-t+5 \qquad i=-\frac{t}{2}+\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} i=\dfrac{V}{2}+\dot{V} & (1) \\ i=\dfrac{V}{2}+2\dot{i} & (2) \end{cases}$$



با دقت در گزینه‌ها مشخص است که رابطه (۱) معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده مدار گزینه (۳) است:

$$i=\frac{V}{2}+1\times\dot{V}=\frac{V}{2}+\dot{V}$$

مثال ۸۸: در مدار زیر شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی می‌باشد. با شروع به کار مدار، مقادیر ولتاژ خازن و جریان مقاومت تا لحظه $t=2$ ثانیه به صورت $V_C(t)=4-5e^{-\frac{t}{4}}$ و $i_R(t)=1+2e^{-\frac{t}{4}}$ ثبت شده است. در $t=2$ ثانیه منبع ولتاژ پله‌ای و خازن را از مدار جدا ساخته و جای آن دو را در مدار عوض می‌کنیم. در لحظه $t=2^+$ مجموعاً چه توانی روی خازن و شبکه N مصرف می‌شود؟



۱) ۰/۵ وات

۲) ۱ وات

۳) ۱− وات

۴) ۲/۵− وات

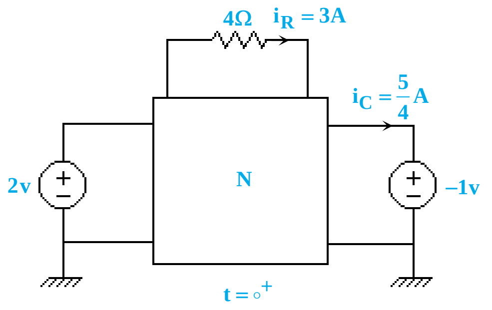
پاسخ: گزینه «۳» برای حل این تست جریان مقاومت و جریان منبع و متعاقباً توان آنها را در لحظه $t=2^+$ محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از قانون پایستگی توان، مجموع توان مصرفی بقیه مدار را بدست می‌آوریم. بدین منظور ابتدا باید با یک تحلیل مداری مقدار جریان مقاومت و مقدار جریان خازن را به ولتاژ منبع و ولتاژ خازن مرتبط سازیم. برای این کار می‌توان از دو روش مختلف استفاده کرد که ما هر دو روش را برای روشن‌تر شدن کلیت راه‌حل تست بیان می‌کنیم. قبل از بیان این دو روش مقادیر اولیه و نهایی جریان و ولتاژ خازن و جریان مقاومت را تعیین می‌کنیم. با توجه به ظرفیت خازن مشخص است که داریم:

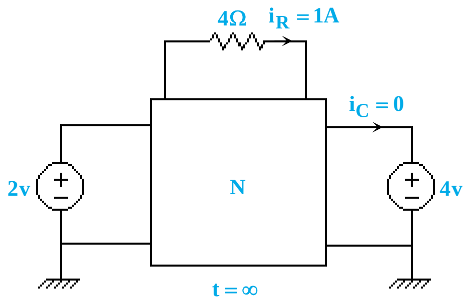
$$i_C=1\times\frac{dV_C}{dt}=\frac{5}{4}e^{-\frac{t}{4}}\ (A)$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_C(0)=\frac{5}{4}A \\ i_C(\infty)=0A \end{cases} , \quad \begin{cases} V_C(0)=-1v \\ V_C(\infty)=4v \end{cases} , \quad \begin{cases} i_R(0)=3A \\ i_R(\infty)=1A \end{cases}$$

روش اول: با تحلیل مدار در $t=0^+$ و $t=\infty$ مطابق با مدارهای معادل زیر می‌توان جریان مقاومت و جریان خازن را به صورت ترکیب خطی از ولتاژ منبع و ولتاژ خازن در نظر گرفت. دقت کنید از آنجایی که ولتاژ خازن در $t=\infty$ ثابت بوده و به طور لحظه‌ای نمی‌تواند تغییر کند، می‌توان خازن را در این زمان به صورت یک منبع ولتاژ مدل کرد.





بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_R(۰)=\alpha_R V_S+\beta_R V_C(۰) \\ i_R(\infty)=\alpha_R V_S+\beta_R V_C(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳=۲\alpha_R-\beta_R \\ ۱=۲\alpha_R+۴\beta_R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_R=۱/۳ \\ \beta_R=-۰/۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_C(۰)=\alpha_C V_S+\beta_C V_C(۰) \\ i_C(\infty)=\alpha_C V_S+\beta_C V_C(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۵}{۴}=۲\alpha_C-\beta_C \\ ۰=۲\alpha_C+۴\beta_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_C=۰/۵ \\ \beta_C=-۰/۲۵ \end{cases}$$

حال با بدست آمدن روابط فوق می‌توان جریان مقاومت و جریان خازن را به ازای هر مقدار دلخواه V_S و V_C تعیین کرد.

روش دوم: فرض کنید به جای خازن موجود در مدار، منبع ولتاژی با ولتاژ $V_C(t)=۴-۵e^{-\frac{t}{۴}}$ در مدار قرار گیرد. می‌توان نشان داد که در این حالت، جریان و ولتاژ شاخه‌های مدار نسبت به حالت اول هیچ تفاوتی نمی‌کند، چرا که به عنوان مثال اگر روشی مثل روش تحلیل ولتاژ گره در تحلیل مدار مورد استفاده قرار گیرد، با مشخص شدن ولتاژ خازن در هر لحظه، می‌توان ولتاژ سایر گره‌ها و به تبع آن جریان تمام شاخه‌های مدار را تعیین کرد. حال با جایگزین شدن خازن توسط منبع ولتاژ مورد نظر، با توجه به این که مدار دارای دو منبع ولتاژ می‌باشد، طبق قضیه جمع آثار باید بتوان جریان مقاومت و جریان خازن را در هر لحظه از زمان بر حسب ولتاژ این دو منبع بیان نمود:

$$i_R(t)=\alpha_R\times V_S(t)+\beta_R\times V_C(t) \Rightarrow ۱+۲e^{-\frac{t}{۴}}=۲\alpha_R+\beta_R\times(۴-۵e^{-\frac{t}{۴}})=۲\alpha_R+۴\beta_R-۵\beta_R e^{-\frac{t}{۴}}$$

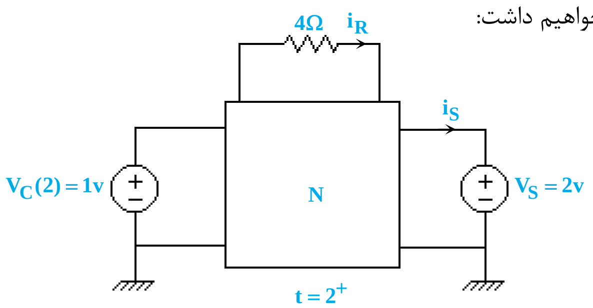
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\alpha_R+۴\beta_R=۱ \\ -۵\beta_R=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_R=۱/۳ \\ \beta_R=-۰/۴ \end{cases} \Rightarrow i_R(t)=۱/۳V_S(t)-۰/۴V_C(t)$$

$$i_C(t)=\alpha_C\times V_S(t)+\beta_C\times V_C(t) \Rightarrow \frac{۵}{۴}e^{-\frac{t}{۴}}=۲\alpha_C+\beta_C\times(۴-۵e^{-\frac{t}{۴}})=۲\alpha_C+۴\beta_C-۵\beta_C e^{-\frac{t}{۴}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\alpha_C+۴\beta_C=۰ \\ -۵\beta_C=\frac{۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_C=۰/۵ \\ \beta_C=-۰/۲۵ \end{cases} \Rightarrow i_C(t)=۰/۵V_S(t)-۰/۲۵V_C(t)$$

در ادامه حل این تست مدار را در $t=۲$ ثانیه تحلیل می‌کنیم. در این زمان ولتاژ خازن برابر است با: $V_C(t=۲)=۴-۵e^{-\frac{۲}{۴}}\cong ۴-۵\times۰/۶=۴-۳=۱v$

حال با عوض شدن جای خازن و منبع ولتاژ در $t=۲$ ثانیه مدار معادلی به شکل مقابل خواهیم داشت. بنابراین طبق روابطی که قبلاً بدست آوردیم، داریم: (دقت کنید که در اینجا با استفاده از رابطه بدست آمده برای جریان خازن در مرحله قبل، جریان منبع V_S را در شرایط جدید محاسبه می‌کنیم.)



$$i_R(t=۲^+)=۱/۳V_C(t=۲^+)-۰/۴V_S(t=۲^+)=۱/۳\times۱-۰/۴\times۲=۰/۵A$$

$$\Rightarrow P_R(t=۲^+)=۴\times(۰/۵)^۲=۱w$$

$$i_S(t=۲^+)=۰/۵V_C(t=۲^+)-۰/۲۵V_S(t=۲^+)=۰/۵\times۱-۰/۲۵\times۲=۰ \Rightarrow P_S(t=۲^+)=۰$$

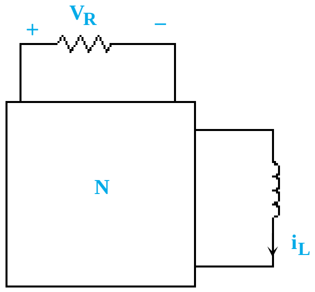
$$\Rightarrow P_S(۲^+)+P_R(۲^+)=۱w \Rightarrow P_C(۲^+)+P_N(۲^+)=-۱w$$

و لذا گزینه (۳) پاسخ این تست می‌باشد.

مثال ۸۹: در مدار زیر، شبکه N متشکل از تعدادی مقاومت و یک منبع DC می‌باشد. تحت شرایط اولیه $i_L(۰)=۰$ داریم:

$$i_L(t)=۳-۳e^{-۲t}\ ,\ V_R(t)=۴-e^{-۲t}$$

حال در آزمایش دیگری که مقدار $i_L(۰)$ و اندازه منبع DC در آن متفاوت است، ولتاژ مقاومت به صورت $V'_R(t)=-۲+\frac{۳}{۲}e^{-۲t}$ بدست آمده است. در این حالت معادله جریان سلف کدام است؟



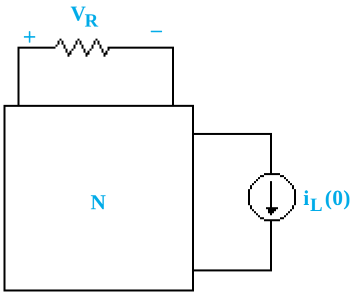
۱) $i'_L(t)=-۳+۶e^{-۲t}$

۲) $i'_L(t)=-۳+۹e^{-۲t}$

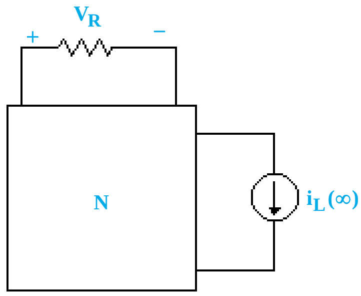
۳) $i'_L(t)=-۱/۵+۴/۵e^{-۲t}$

۴) $i'_L(t)=-۱/۵+۳e^{-۲t}$

پاسخ: گزینه «۳» مدار را در زمان‌های $t=۰$ و $t=\infty$ مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



$t=۰$



$t=\infty$

در زمان $t=۰$ ولتاژ مقاومت متأثر از منبع ولتاژ DC در داخل شبکه N و جریان اولیه سلف می‌باشد. پس با فرض این که اندازه منبع DC برابر A باشد، می‌توان نوشت:

$$V_R(۰)=\alpha A+\beta i_L(۰)$$

و همچنین در حالت دایمی مطابق با شکل فوق داریم:

$$V_R(\infty)=\alpha A+\beta i_L(\infty)$$

حال نتایج بدست آمده از آزمایش اول را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. با توجه به توابع زمانی $i_L(t)$ و $V_R(t)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_L(۰)=۰A \\ i_L(\infty)=۳A \end{cases} ,\quad \begin{cases} V_R(۰)=۳v \\ V_R(\infty)=۴v \end{cases}$$

اکنون می‌توانیم مقادیر αA و β در روابط فوق را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} V_R(۰)=\alpha A+\beta i_L(۰) \Rightarrow \alpha A=۳ \\ V_R(\infty)=\alpha A+\beta i_L(\infty) \Rightarrow ۴=۳+\beta\times۳ \Rightarrow \beta=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

حال آزمایش دوم را که در آن مقدار $i_L(۰)$ و A تغییر یافته است، در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه داده شده برای $V'_R(t)$ داریم:

$$\begin{cases} V'_R(۰)=-\frac{۱}{۲}A \\ V'_R(\infty)=-۲A \end{cases}$$

از طرفی با فرض این که منبع DC، k برابر شده باشد، می‌توان جریان نهایی سلف را به صورت مقابل نوشت: $i'_L(\infty)=k\,i_L(\infty)=۳k$

حال سعی می‌کنیم با مدنظر قرار دادن مقادیر $V'_R(۰)$ و $V'_R(\infty)$، مقادیر $i'_L(۰)$ و k را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} V'_R(۰)=\alpha Ak+\beta i'_L(۰) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=۳k+\frac{۱}{۳}\times i'_L(۰) \\ V'_R(\infty)=\alpha Ak+\beta i'_L(\infty) \Rightarrow -۲=۳k+\frac{۱}{۳}\times۳k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow i'_L(\infty)=۳k=-\frac{۳}{۲} \\ i'_L(۰)=۳A \end{cases}$$

در نهایت با توجه به مقادیر بدست آمده برای $i'_L(\infty)$ و $i'_L(۰)$ و با توجه به ثابت ماندن مقدار ثابت زمانی مدار در آزمایش دوم داریم:

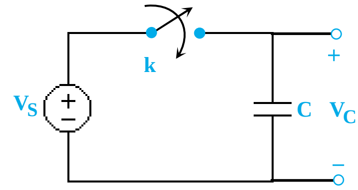
$$i'_L(t)=i'_L(\infty)+(i'_L(۰)-i'_L(\infty))e^{-۲t}=-\frac{۳}{۲}+(۳-(-\frac{۳}{۲}))e^{-۲t}=-\frac{۳}{۲}+\frac{۹}{۲}e^{-۲t}\ (A)$$

تغییر ناگهانی ولتاژ خازن و جریان سلف

همان‌طور که در ابتدای مطالب کلیدزنی اشاره شد، معمولاً ولتاژ خازن تغییرات ناگهانی ندارد و در اغلب اوقـات $V_C(0^+) = V_C(0^-)$ اسـت و همچنـین جریـان سلف نیز تغییرات ناگهانی ندارد و در اغلب اوقات $I_L(0^+) = I_L(0^-)$ است. اما در مواردی این روابط صحیح نیستند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

۱ـ اتصال موازی یک منبع ولتاژ با کلید به یک خازن:

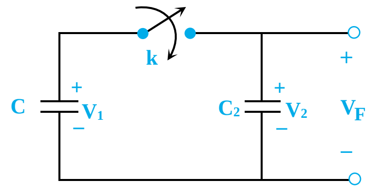
در صورتی که یک خازن با کلید، مستقیماً به یک منبع مستقل ولتاژ وصل شود، بعد از کلیدزنی ولتاژ V_C باید مساوی V_S باشـد و شـارژ خـازن ناچـاراً بـه صورت آنی انجام می‌شود. در این حالت جریان خازن شامل تابع ضربه خواهد بود.



$$V_C(0^-) = 0 \quad , \quad V_C(0^+) = V_S$$

$$V_C(0^-) \neq V_C(0^+)$$

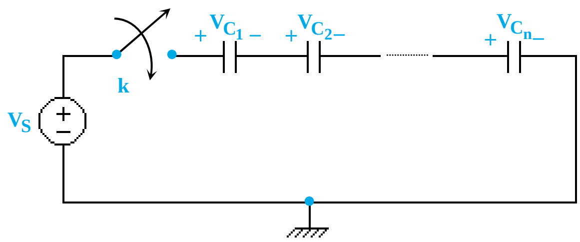
۲ـ اتصال موازی دو خازن با ولتاژهای مختلف:



در واقع شبیه حالت اول می‌باشد. در این حالت ولتاژ نهایی پس از اتصـال کلیـد از رابطـه زیـر محاسـبه می‌شود. در این حالت اگر پلاریته ولتاژهای اولیه مطابق با پلاریته V_F باشد، ولتاژهای اولیـه بـا علامـت مثبت وارد معادله می‌شوند و در غیر این صورت با علامت منفی در معادله لحاظ می‌شوند.

$$V_F = \frac{\pm C_1 V_1 \pm C_2 V_2}{C_1 + C_2} = \frac{\pm q_1 \pm q_2}{C_{eq}}$$

۳ـ تشکیل یک حلقه توسط خازن‌ها و منابع ولتاژ (حلقه خازنی) بعد از کلیدزنی:



اگر کلیدزنی در مدار موجب تشکیل یک حلقه خازنی شود، یعنی حلقه‌ای که شامل یک یا چند خازن و یـک یـا چنـد منبـع ولتـاژ مسـتقل اسـت، خازن‌های مدار جهش ولتاژ خواهند داشت.

در این حالت ولتاژ خازن‌ها را در لحظه $t = 0^+$ (با پلاریته مشخص شده روی شکل) می‌توان از طریق رابطه کلی زیر محاسبه کرد:

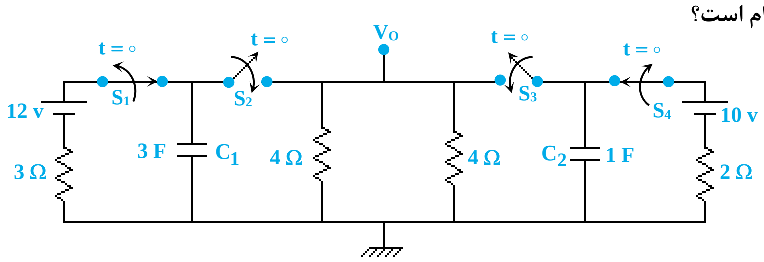
$$V_{C_i}(0^+) = \frac{C_{eq}}{C_i}\left[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-) - \cdots - V_{C_n}(0^-)\right] + V_{C_i}(0^-) \quad , \quad C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

برای حالت خاصی که تنها دو خازن در حلقه موجود باشد، داریم:

$$\begin{cases} V_{C_1}(0^+) = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}\left[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-)\right] + V_{C_1}(0^-) \\ V_{C_2}(0^+) = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}\left[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-)\right] + V_{C_2}(0^-) \end{cases}$$

این روابط را می‌توان با استفاده از قانون بقای بار اثبات نمود.

مثال ۹۲: در مدار مقابل معادله تغییرات V_o بر حسب زمان کدام است؟

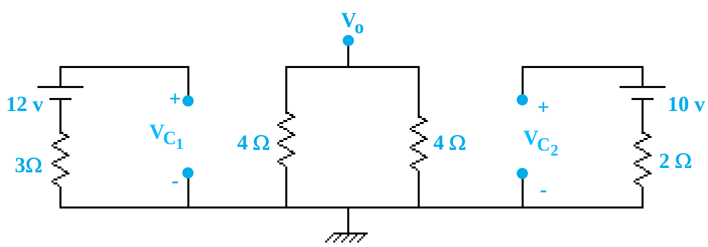


۱) $11/5e^{-\frac{t}{4}}$ ۲) $6/5e^{-\frac{t}{4}}$

۳) $11/5e^{-\frac{t}{8}}$ ۴) $6/5e^{-\frac{t}{8}}$

پاسخ: گزینـه «۳» ابتـدا مـدار را در $t = 0^-$ تحلیـل می‌کنیم. در این زمان S_1 و S_4 بسته و S_2 و S_3 باز هستند.

با توجه به اینکه خازن‌ها مدار باز شده‌اند، لذا داریم:

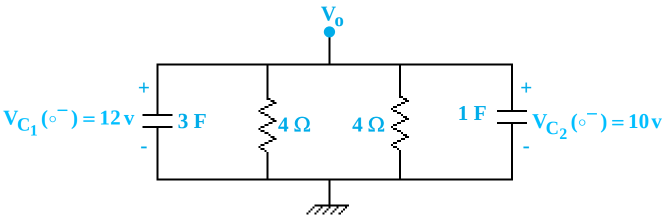


$$V_{C_1}(0^-) = 12v \quad , \quad V_{C_2}(0^-) = 10v$$

حالا مدار را در $t>0$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان کلید S_1 و S_4 باز شده و کلید S_3 و S_2 وصل می‌شوند. با توجه بـه اینکـه دو خـازن بـا ولتاژهـای اولیـه متفاوت با هم موازی می‌شوند، لذا معادله ولتاژ نهایی آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$V_o(0^+)=\frac{V_{C_1}(0^-)\times C_1+V_{C_2}(0^-)\times C_2}{C_1+C_2}=\frac{3\times 12+1\times 10}{3+1}=11/5\,v$$

حال مقادیر R_{eq} و C_{eq} را محاسبه می‌کنیم:



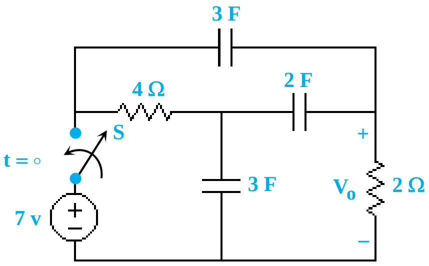
$$R_{eq}=4\,||\,4=2\Omega\;,\;C_{eq}=3F\,||\,1F=4F$$

$$\tau=R_{eq}.C_{eq}\;\Rightarrow\;\tau=2\times 4=8\sec$$

$$V_o(t)=V_o(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}\;\Rightarrow\;V_o(t)=11/5e^{-\frac{t}{8}}$$

توجه کنید که در بینهایت هیچ منبعی به مدار متصل نیست، لذا $V_o(\infty)=0$ است.

مثال ۹۳: **در مدار شکل زیر کلید S در $t=0$ بسته می‌شود. مقدار $V_o(0^+)$ بر حسب ولت کدام است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) ۳

۲) ۴/۵

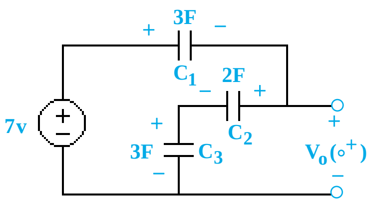
۳) ۵

۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳»

نکته مهم: دقت شود که در اینجا قبل از کلیدزنی، ولتاژ خازن‌ها صفر بوده ولی بعد از کلیدزنی مجموعشان **7v** شده است، پس به ناچار ولتاژ خازن‌ها تغییر می‌کند و این یعنی این که طبق رابطه $I_C=C\frac{dV_C}{dt}$، از خازن‌ها در لحظه‌ی تغییر ولتاژشان، جریان بینهایت بزرگی عبور می‌کند (جریان ضربه‌ای)؛ اما این جریان از مقاومت‌ها عبور نمی‌کند چون رابطه جریان مقاومت به صورت $I_R=\frac{V_R}{R}$ است و با توجه به شکل، ولتاژ هر یک از مقاومت‌ها به صورت مجمـوعی از ولتاژ خازن‌ها (که محدود است) قابل بیان است؛ لذا V_R محدود و I_R هم محدود است. با استدلال دیگر چون جریان ضربه‌ای از خازن‌ها عبـور مـی‌کنـد، خازن‌ها مثل اتصال کوتاه عمل کرده و مقاومت‌ها را بی‌اثر می‌کنند و نتیجتاً اجازه تزریق جریان ضربه‌ای به مقاومت‌ها را نمی‌دهند.

نتیجه: این جریان ضربه‌ای در لحظه‌ی تغییر ولتاژ خازن‌ها تنها از خازن‌ها می‌گذرد و از مقاومت‌ها نمی‌گذرد؛ لـذا **خازن‌ها از دید این جریان بزرگ با هم سری‌اند**. با نوشتن رابطه KVL در حلقه مدار داریم:

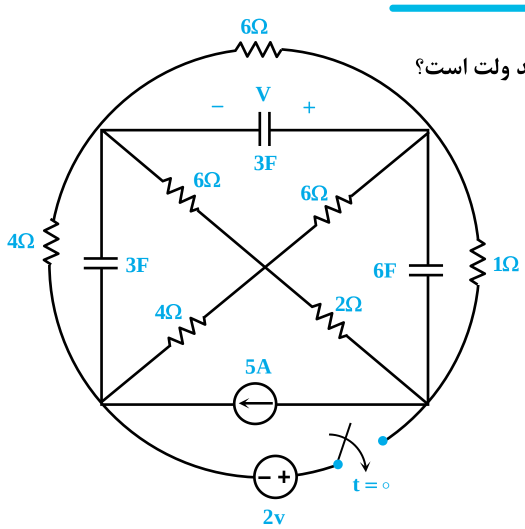


$$7=V_{C_1}+V_{C_2}+V_{C_3}\;\Rightarrow\;7=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}+\frac{q}{C_3}\;\Rightarrow\;7=\frac{q}{3}+\frac{q}{2}+\frac{q}{3}\;\Rightarrow\;q=6C$$

$$V_o(0^+)=V_{C_2}+V_{C_3}=\frac{q}{C_2}+\frac{q}{C_3}=\frac{6}{2}+\frac{6}{3}=5\,v$$

لازم به ذکر است که ولتاژ V_o را می‌توان با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ روی خازن‌های سری و یا استفاده از رابطه‌ی آماده‌ی ارائه شده نیز بدست آورد.

مثال ۹۴: **در مدار مقابل کلید در زمان $t=0$ بسته می‌شود. مقدار V در لحظه $t=0^+$ چند ولت است؟**



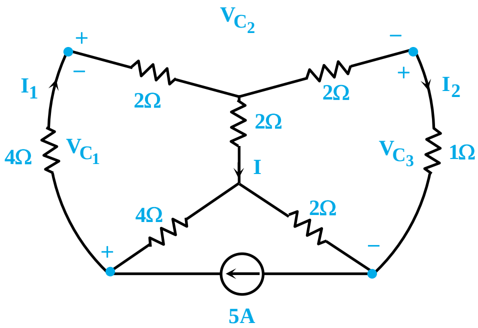
۱) صفر

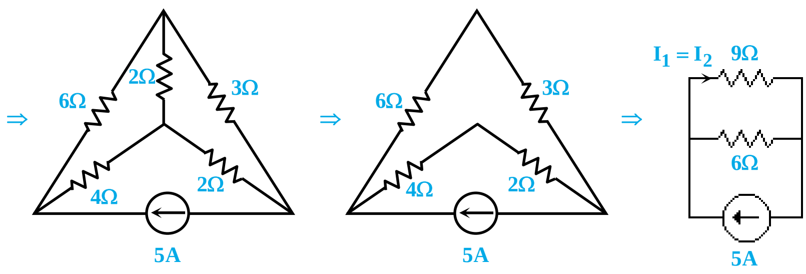
۲) ۱/۶-

۳) ۴-

۴) ۸-

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم. جهت تحلیل ساده‌تر مدار، می‌توانیم اتصال مثلث با مقاومت‌های ۶ اهمی در بالای مدار را به اتصال ستاره تبدیل کنیم:





پل وتستون متعادل $\rightarrow 6\times 2 = 4\times 3$

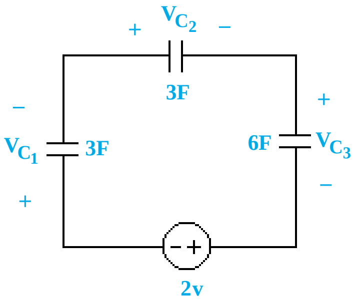
حال با توجه به شکل بالا و برقراری حالت تعادل در پل وتستون موجود در مدار داریم:

$$I = 0 \quad , \quad I_1 = I_2 = 5\times\frac{6}{6+9} = 2A$$

$$\begin{cases} V_{C_1}(0^-) = 4I_1 = 4\times 2 = 8v \\ V_{C_2}(0^-) = 2\times I_1 + 2\times I_2 = 2\times 2 + 2\times 2 = 8v \\ V_{C_3}(0^-) = 1\times I_2 = 1\times 2 = 2v \end{cases}$$

اکنون مدار را در زمان $t=0^+$ تحلیل می‌کنیم. پس از کلیدزنی مشاهده می‌شود که سه خازن موجود در مدار با منبع ولتاژ ۲ ولتی، تشکیل یک حلقه داده و بنابراین لزوماً شاهد تغییرات ناگهانی در ولتاژ خازن‌ها خواهیم بود. حال با استفاده از رابطه بیان شده، ولتاژ خازن‌ها را در لحظه $t=0^+$ محاسبه می‌کنیم.

(دقت کنید که مدار مقاومتی به همراه منبع جریان، در میزان تغییرات ولتاژ خازن‌ها در لحظه‌ی $t=0$ بی‌تأثیر هستند، از این رو در تحلیل مدار در لحظه $t=0^+$ نادیده گرفته می‌شوند)



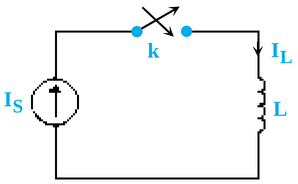
$$V_{C_2}(0^+) = \frac{C_{eq}}{C_2}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-) - V_{C_3}(0^-)] + V_{C_2}(0^-)$$

$$V_S = -2v \quad , \quad C_2 = 3F \quad , \quad C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}F$$

$$\Rightarrow V_{C_2}(0^+) = \frac{\frac{6}{5}}{3}[-2-8-8-2]+8 = 0.4\times(-20)+8 = 0v \Rightarrow V = -V_{C_2}(0^+) = 0v$$

۴ـ اتصال سری یک سلف به یک منبع مستقل جریان با یک کلید:

در صورتی که یک سلف با یک منبع جریان توسط یک کلید سری شود، جریان سلف برابر I_S شده و این جریان در همه زمان‌ها ثابت خواهد بود. لذا جریان به صورت آنی از صفر به I_S تغییر می‌کند. در این حالت ولتاژ دو سر سلف شامل تابع ضربه خواهد بود.

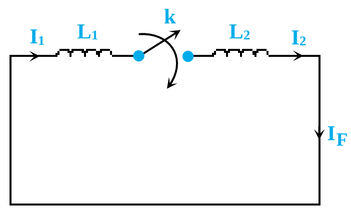


$$I_L(0^-) = 0 \quad , \quad I_L(0^+) = I_S$$

$$\Rightarrow I_L(0^-) \neq I_L(0^+)$$

۵ـ اتصال سری دو سلف با جریان‌های اولیه مختلف:

در واقع شبیه حالت دوم می‌باشد. در این حالت جریان نهایی مدار با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود. در صورتی که جریان‌های اولیه سلف‌ها، هم‌جهت با I_F باشند، با علامت مثبت در معادله وارد می‌شوند و در غیر این صورت با علامت منفی در فرمول لحاظ می‌شوند.



$$I_F = \frac{\pm L_1 I_1 \pm L_2 I_2}{L_1 + L_2} = \frac{\pm\varphi_1 \pm \varphi_2}{L_{eq}}$$

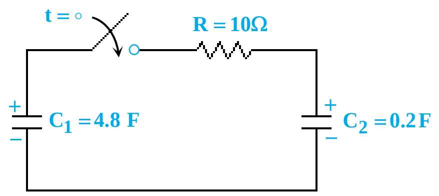
۶ـ تشکیل یک کاتست توسط سلف‌ها و منابع جریان (کاتست سلفی) بعد از کلیدزنی:

اگر کلیدزنی در مدار موجب تشکیل یک کاتست سلفی شود، یعنی کاتستی که شامل یک یا چند سلف و یک یا چند منبع جریان مستقل است، سلف‌های مدار، جهش جریان خواهند داشت.

حال باید گفت که انرژی مدار در دو لحظه $t=0^-$ و $t=0^+$ متفاوت بوده و به طور قطع می‌توان گفت که $W_T(0^-) \ge W_T(0^+)$. این اختلاف انرژی صرف تغییر شار در سلف‌ها می‌شود.

تحلیل مشابهی نیز برای حالتی که بعد از کلیدزنی کاتست سلفی در مدار تشکیل شود، قابل بیان است؛ با این حال اگر در کاتست سلفی، منبع جریان نیز موجود باشد، دیگر نمی‌توان گفت $W_T(0^-) \ge W_T(0^+)$، زیرا منبع جریان در لحظه $t=0$ به سلف‌ها انرژی می‌دهد.

مثال ۱۱۶: در مدار شکل زیر ولتاژ اولیه خازن C_1 برابر ۱۰ ولت و ولتاژ اولیه خازن C_2 برابر صفر است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) نسبت انرژی نهایی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۲۴ می‌باشد و این نسبت به مقاومت R بستگی ندارد.

۲) نسبت انرژی نهایی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۲۴ می‌باشد و این نسبت به مقاومت R بستگی دارد.

۳) انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۹/۶ ژول می‌باشد و به اندازه‌ی مقاومت R بستگی دارد.

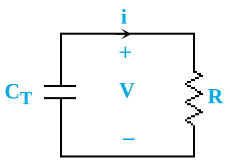
۴) انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۴/۸ ژول می‌باشد و به اندازه‌ی مقاومت R بستگی ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» **روش اول:** انرژی اولیه ذخیره شده در مدار برابر است با:

$$\text{انرژی اولیه} = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲(۰) = \frac{۱}{۲}\times ۴/۸ \times ۱۰^۲ = ۲۴۰J$$

بعد از بسته شدن کلید، خازن معادل مدار با ولتاژ اولیه ۱۰ ولت از طریق مقاومت دشارژ می‌شود:

در این حالت انرژی تلف شده در مقاومت برابر انرژی از دست رفته خازن معادل می‌باشد:



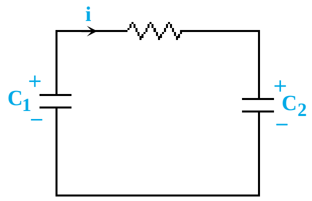
$$C_T = \frac{۴/۸\times ۰/۲}{۴/۸+۰/۲} = \frac{۴/۸}{۲۵}F \quad \text{و} \quad V_T = V_{C_۱} - V_{C_۲} = ۱۰-۰ = ۱۰v$$

$$\text{انرژی تلف شده در مقاومت} = \text{انرژی اولیه خازن معادل} = \frac{۱}{۲}\times C_T \times V_T^۲ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴/۸}{۲۵}\times ۱۰^۲ = ۹/۶J$$

$$\Rightarrow \text{انرژی نهایی ذخیره شده} = ۲۴۰-۹/۶ = ۲۳۰/۴J \Rightarrow \frac{\text{انرژی نهایی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در مدار}} = \frac{۲۳۰/۴}{۹/۶} = ۲۴$$

روش دوم: بعد از این که مدار به حالت پایدار رسید، ولتاژ دو خازن باید با هم برابر باشند.

به عبارتی پس از این‌که مدار شروع به کار کرد، جریان i در مدار برقرار می‌شود و خازن $C_۲$ شارژ و خازن $C_۱$ دشارژ می‌شود و به عبارتی ولتاژ خازن $C_۱$ کاهش و ولتاژ خازن $C_۲$ افزایش می‌یابد تا زمانی که این دو ولتاژ با هم برابر شوند.



ولتاژ خازن‌ها در حالت پایدار از قانون بقای بار الکتریکی به دست می‌آید:

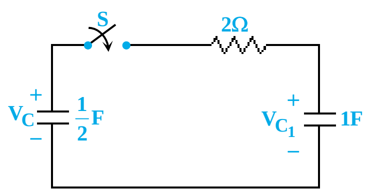
$$\underbrace{C_۱V_۱ + C_۲V_۲}_{\text{قبل از بسته شدن کلید}} = \underbrace{C_۱V + C_۲V}_{\text{در حالت پایدار}} \Rightarrow ۱۰\times ۴/۸ + ۰/۲\times ۰ = ۵V \Rightarrow V = ۹/۶v$$

$$\text{انرژی اولیه مدار} = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲ = ۲۴۰J \quad \text{و} \quad \text{انرژی نهایی مدار} = \frac{۱}{۲}(C_۱+C_۲)V^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۹/۶^۲ = ۲۳۰/۴J$$

$$\text{انرژی تلف شده} = ۹/۶J \Rightarrow \frac{\text{انرژی نهایی}}{\text{انرژی تلف شده}} = \frac{۲۳۰/۴}{۹/۶} = ۲۴$$

مثال ۱۱۷: در مدار زیر، کلید S در $t=0$ بسته می‌شود. انرژی باقی‌مانده در مدار پس از گذشت زمان طولانی، چند ژول است؟ $(V_C(0^-)=4V, V_{C_1}(0^-)=0)$

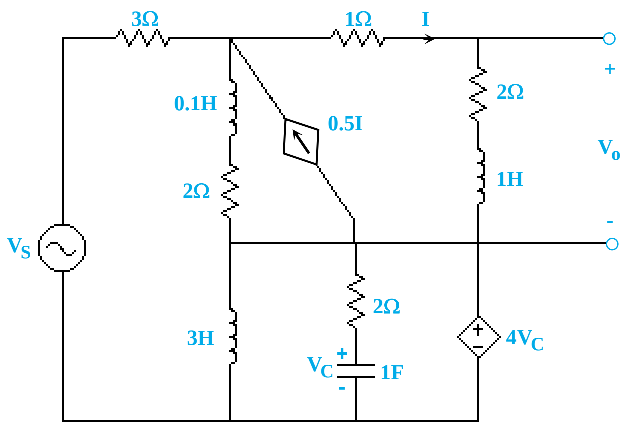
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) ۰

نکته ۲: در صورتی که یک منبع ولتاژ یا جریانِ متناوب به مداری اعمال شود، می‌توان برای بدست آوردن مقدار متوسط هر مجهول در مدار، ابتدا از منبع ورودی مدار، مقدار متوسط گرفت و سپس منبع متناوب ورودی را با یک منبع DC به اندازه مقدار متوسط بدست آمده جایگزین کرده و مدار را تحلیل کرد. بدیهی است که در حالت DC، خازن‌ها با مدار باز و سلف‌ها با اتصال کوتاه مدل می‌شوند.

مثال ۳۷: در مدار زیر در صورتی که مقدار متوسط سیگنال $V_S(t)$ برابر ۳ ولت باشد، مقدار متوسط سیگنال خروجی کدام است؟



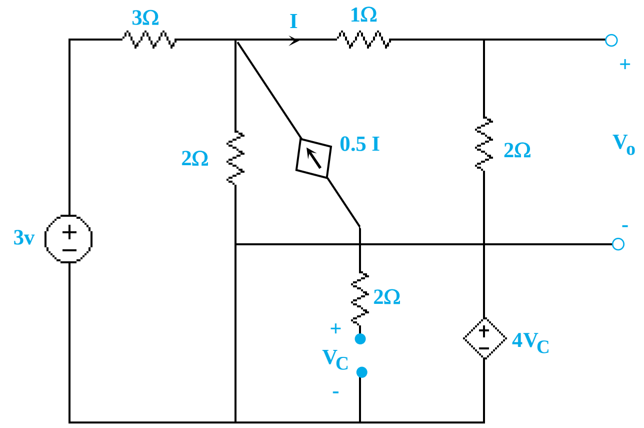
۱) ۱V

۲) ۰/۳۳V

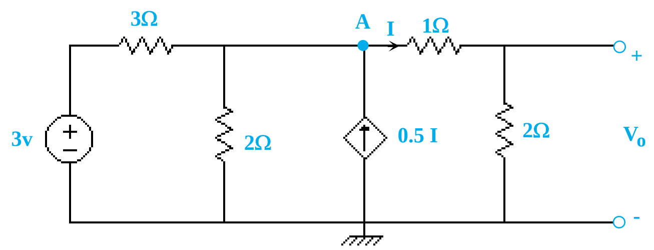
۳) ۰/۶۶V

۴) ۱/۳۳V

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته گفته شده در قبل، مقدار متوسط سیگنال $V_S(t)$ را به عنوان ورودی به مدار اعمال می‌کنیم و مدار را در حالت DC تحلیل می‌کنیم. در این حالت سلف‌ها با اتصال کوتاه و خازن‌ها با مدار باز مدل می‌شوند. حال با توجه به صفر شدن V_C در پایین مدار، منبع وابسته $۴V_C$ نیز صفر و اتصال کوتاه می‌شود.



$\Rightarrow$



برای حل مدار فوق در گره A، KCL نوشته می‌شود.

$$\frac{V_A-۳}{۳}+\frac{V_A}{۲}+\frac{V_A}{۳}=\frac{۱}{۲}I \quad , \quad I=\frac{V_A}{۳} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A-۳}{۳}+\frac{V_A}{۲}+\frac{V_A}{۳}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{V_A}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow \quad ۲V_A-۶+۳V_A+۲V_A=V_A \quad \Rightarrow \quad V_A=۱v$$

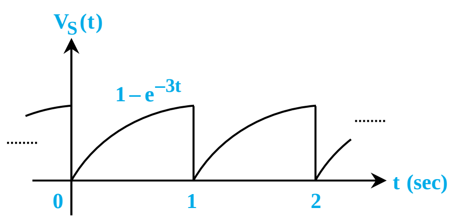
با اعمال تقسیم ولتاژ داریم:

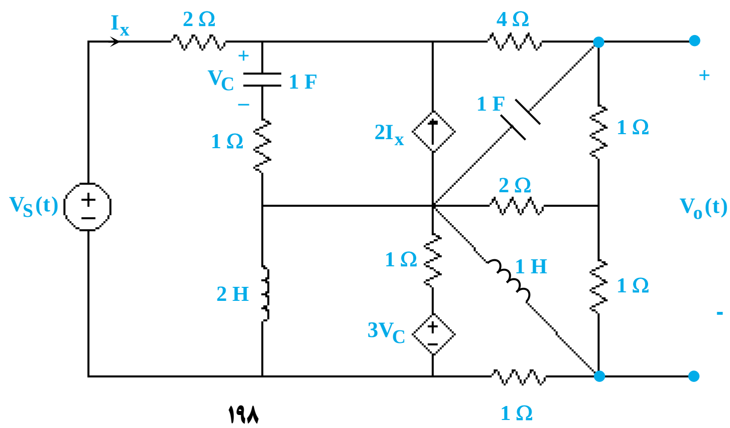
$$V_o=\frac{V_A\times ۲}{۲+۱}=\frac{۱\times ۲}{۳}=۰/۶۶v$$

با توجه به موارد فوق مقدار متوسط ولتاژ خروجی برابر ۰/۶۶V است.

مثال ۳۸: در مدار شکل زیر، منبع V_S مطابق شکل، یک ولتاژ متناوب است. مقدار متوسط $V_o(t)$ در حالت دائمی (Steady State) (با صرف‌نظر از پاسخ گذرا) کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)





۱) ۰/۱۰۲V

۲) ۰/۲۰۵V

۳) ۰/۰۳۴V

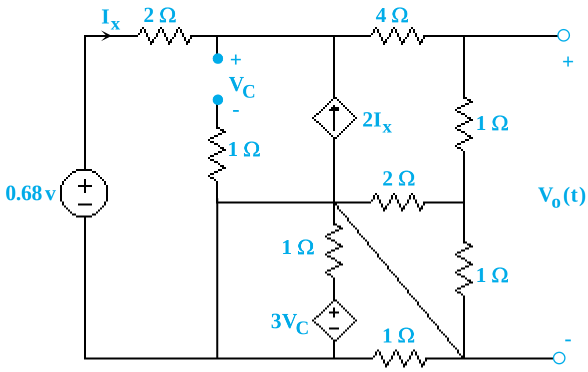
۴) ۰/۰۶۸V

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای بدست آوردن $V_o(t)$ در حالت متوسط باید به جای $V_S(t)$ مقدار متوسط آن را قرار داده و شرایط تحلیل DC را در مدار برقرار کرد. لذا داریم:

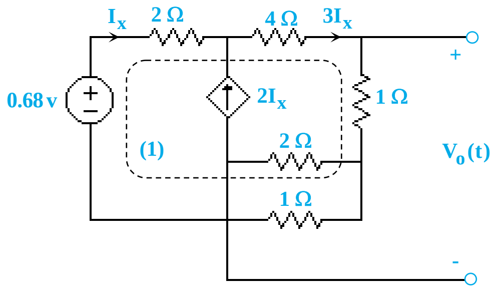
$$V_S(t)=k_1-k_2e^{-at} \Rightarrow \text{متوسط}\ (V_S(t))=\frac{1}{T}\int_0^T(k_1-k_2e^{-at})dt=k_1-\frac{k_2}{aT}(1-e^{-aT})$$

$$k_1=1\ ,\ k_2=1\ ,\ a=3\ ,\ T=1 \Rightarrow \text{متوسط}(V_S(t))=1-\frac{1}{3}(1-e^{-3})=0/68$$

در حالت DC، خازن‌ها مدار باز و سلف‌ها اتصال کوتاه هستند. با حذف قسمت‌های موازی اتصال کوتاه و سری با مدار باز، مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



⇒



با نوشتن KVL در حلقه (۱) داریم:

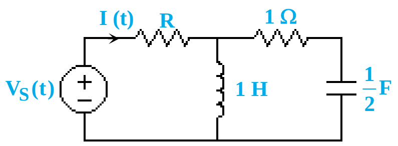
$$2I_x+3I_x(4+1+2\|1)=0/68 \Rightarrow 2I_x+3I_x(5+\frac{2}{3})=0/68 \Rightarrow I_x=0/035A$$

$$V_o=3I_x.(1+\frac{2}{3})=0/175v$$

نکته ۳: همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، در صورتی که در مدار منابع شامل تابع ضربه وجود داشته باشد، برای محاسبه $V_C(0^+)$ و $I_L(0^+)$ می‌توان از روابط زیر استفاده کرد. این روابط برای مدارهای RLC از هر مرتبه‌ای برقرار است. جهت استفاده از این روابط، توابع ورودی غیرضربه‌ای را غیرفعال کرده و در مدار فقط توابع ضربه‌ای را فعال نگه می‌داریم. در این حالت سلف‌ها را با مدار باز و خازن‌ها را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم و مقادیر $V_C(0^+)$ و $I_L(0^+)$ را از فرمول‌های زیر محاسبه می‌کنیم. (در واقع به نحوی داریم جمع آثار استفاده می‌کنیم. وقتی فقط اثر ضربه را می‌خواهیم ببینیم، تمام منابع دیگر صفر می‌شود و لذا جریان سلف و ولتاژ خازن هم صفر در نظر گرفته می‌شود تا ببینیم V_L و I_C چه می‌شوند.)

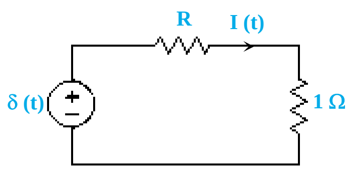
$$I_L(0^+)=I_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}V_L(t)dt \qquad V_C(0^+)=V_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}I_C(t)dt$$

مثال ۳۹: در مدار شکل زیر مقدار R چند اهم باشد تا برای ورودی ضربه $V_S(t)=\delta(t)$، جریان $I(t)$ گذرنده از R جمله‌ای به صورت $\frac{2}{3}\delta(t)$ داشته باشد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)



۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{3}$

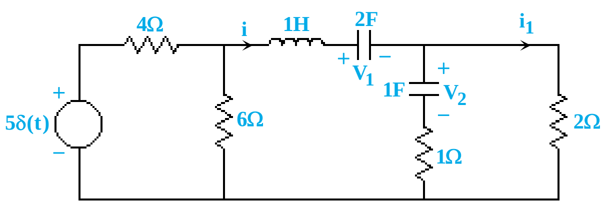
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل مسأله باید به این نکته دقت شود که در حالتی که ورودی، تابع ضربه باشد، می‌توان در $t=0$ به جای سلف، مدار باز و به جای خازن، اتصال کوتاه قرار داد. حال با اعمال شرایط فوق به مدار داریم:



$$I(t)=\frac{\delta(t)}{R+1}$$

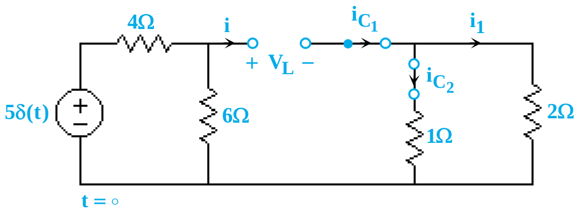
$$I(t=0)=\frac{2}{3}\delta(t) \Rightarrow \frac{\delta(t)}{R+1}=\frac{2\delta(t)}{3} \Rightarrow \frac{1}{R+1}=\frac{2}{3} \Rightarrow R=\frac{1}{2}\Omega$$

مثال ۴۰: در مدار زیر شرایط اولیه به‌صورت $v_1(0^-)=2V$، $v_2(0^-)=4V$ و $i(0^-)=2A$ است. $i_1(0^+)$ چند آمپر است؟ (مهندسی برق ـ دکتری ۹۷)



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه $i_۱$ در لحظه‌ی $t=۰^+$، نیازمند مقادیر $i(۰^+)$ و $V_۲(۰^+)$ هستیم. مقدار متغیرهای i و $V_۲$ در لحظه‌ی $t=۰^-$ در صورت سؤال داده شده است، اما با توجه به وجود منبع ضربه‌ای در مدار، مقدار این متغیرها در لحظات ۰^- و ۰^+ لزوماً یکسان نیست. برای محاسبه مقادیر $i(۰^+)$ و $V_۲(۰^+)$، ولتاژ سلف و جریان خازن یک فارادی را در لحظه‌ی $t=۰^+$ به‌دست می‌آوریم.



می‌دانیم که برای این کار می‌توانیم خازن‌های مدار را اتصال کوتاه و سلف مدار را مدار باز فرض کنیم. حال مطابق شکل داریم:

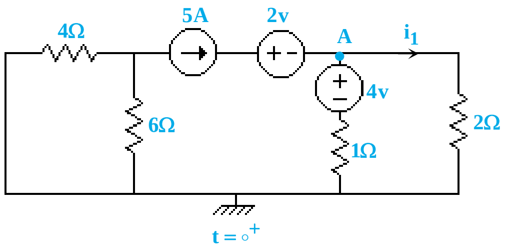
$$V_L=\frac{۶}{۶+۴}\times ۵\delta(t)=۳\delta(t), i_{C_۱}=i_{C_۲}=۰$$

در ادامه می‌توان مقدار متغیرها را در لحظه $t=۰^+$ محاسبه کرد:

$$i_L(۰^+)=\frac{۱}{L}\int_{۰^-}^{۰^+}V_L(t)dt+i_L(۰^-)=۱\int_{۰^-}^{۰^+}۳\delta(t)dt+۲=۳+۲=۵A$$

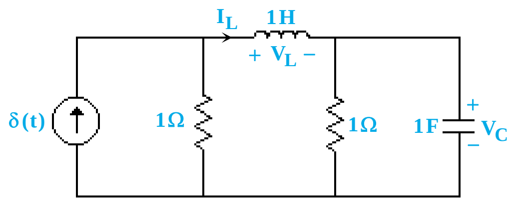
$$V_۱(۰^+)=V_۱(۰^-)=۲v\ ,\ V_۲(۰^+)=V_۲(۰^-)=۴v$$

برای محاسبه مقدار $i_۱(۰^+)$ می‌توان خازن‌ها و سلف مدار را با منابع ولتاژ و جریان مدل کرد.



$$KCL\ A: ۵=i_۱+\frac{۲i_۱-۴}{۱}\Rightarrow ۳i_۱=۹\Rightarrow i_۱(۰^+)=۳A$$

مثال ۴۱: با توجه به مدار شکل زیر، با فرض $V_C(۰^-)=۱v$ و $I_L(۰^-)=۱A$ کدام گزینه درست است؟



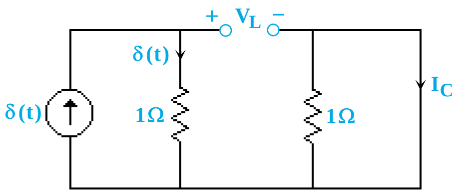
۱) منبع ضربه در مدار، اثر خود را روی I_L می‌گذارد و $I_L(۰^+)=۲A$ می‌شود، ولی روی ولتاژ خازن اثری ندارد و لذا $V_C(۰^+)=۱v$ باقی می‌ماند.

۲) منبع ضربه در مدار روی ولتاژ خازن اثر می‌گذارد و $V_C(۰^+)=۲v$ می‌شود، ولی روی جریان سلف اثری ندارد و لذا $I_L(۰^+)=۱A$ باقی می‌ماند.

۳) منبع ضربه در مدار، اثر خود را روی I_L می‌گذارد و $I_L(۰^+)=۲A$ می‌شود و به همین ترتیب بر روی ولتاژ خازن نیز اثر دارد و $V_C(۰^+)=۲v$ می‌شود.

۴) با توجه به توپولوژی مدار، منبع ضربه در مدار روی ولتاژ خازن و جریان سلف اثر نمی‌گذارد و $V_C(۰^+)=۱v$ و $I_L(۰^+)=۱A$ خواهد بود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه $V_C(۰^+)$ و $I_L(۰^+)$، ابتدا سلف را مدار باز و خازن را اتصال کوتاه می‌کنیم. علاوه بر این، منابع مستقل غیرضربه‌ای را نیز غیرفعال می‌کنیم. حال داریم:



$$V_C(۰^+)=V_C(۰^-)+\frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+}I_C\,dt$$

$$I_L(۰^+)=I_L(۰^-)+\frac{۱}{L}\int_{۰^-}^{۰^+}V_L\,dt$$

$$I_C=۰\ \Rightarrow\ V_C(۰^+)=V_C(۰^-)+\frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+}I_C\,dt=۱+\frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+}۰dt=۱v$$

$$V_L=\delta(t)\ \Rightarrow\ I_L(۰^+)=I_L(۰^-)+\frac{۱}{L}\int_{۰^-}^{۰^+}V_L\,dt\ \Rightarrow\ I_L(۰^+)=۱+\frac{۱}{۱}\int_{۰^-}^{۰^+}\delta(t)dt=۲A$$

با توجه به مقادیر بدست آمده برای $I_L(۰^+)$ و $V_C(۰^+)$، دیده می‌شود که مقدار $I_L(۰^+)$ با تأثیر تابع ضربه ورودی برابر با $۲A$ و $V_C(۰^+)$ بدون تأثیر تابع ضربه ورودی برابر با $۱v$ است. لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

درسنامه (۲): مشخصات و پارامترهای ذاتی مدارهای مرتبه دوم

هر مدار مرتبه ۲ (و مرتبه بالاتر)، فارغ از نحوه‌ی تحریک، دارای یکسری مشخصات و پارامترهای ذاتی می‌باشد که نحوه محاسبه یا تعیین وضعیت آنها در این درسنامه بیان می‌گردد.

معادله مشخصه و محاسبه آن

هر مدار الکتریکی از مرتبه n دارای معادله مشخصه‌ای به شکل روبرو می‌باشد: $F(S)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+a_{n-2}S^{n-2}+\cdots+a_1S+a_0=0$

در این رابطه $F(S)$ را چندجمله‌ای مشخصه مدار می‌نامند. ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه که تعداد آنها برابر n یعنی مرتبه مدار است، فرکانس‌های طبیعی مدار نامیده می‌شوند. فرکانس‌های طبیعی، تعیین‌کننده نوع پایداری مدار و شکل پاسخ گذرای آن بوده و از این لحاظ مقدار آنها بسیار مهم است. در واقع هر فرکانس طبیعی با مقدار S_0، جمله‌ای به شکل e^{S_0t} در پاسخ ورودی صفر و پاسخ عمومی مدار بوجود می‌آورد. پس اگر ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $\{S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n\}$ باشد، پاسخ ورودی صفر مدار به شکل مقابل خواهد بود: $h(t)=k_1e^{S_1t}+k_2e^{S_2t}+\ldots+k_ne^{S_nt}$

معادله مشخصه مدارهای RLC سری و موازی به راحتی با استفاده از روابط بیان شده در ابتدای فصل قابل محاسبه می‌باشد؛ اما در مورد سایر مدارهای RLC شیوه محاسبه معادله مشخصه متفاوت است. در این مدارها باید معادله مشخصه را با استفاده از روش‌های زیر تعیین کرد:

۱ـ برای بدست آوردن معادله مشخصه در یک مدار می‌توان ابتدا معادلات KCL در گره‌ها و یا معادلات KVL در حلقه‌های مدار را نوشته و سپس با جایگذاری $D=\frac{d}{dt}$ در معادلات بدست آمده، ماتریس امپدانس یا ادمیتانس را محاسبه کرد. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس‌های امپدانس یا ادمیتانس و با جایگزین کردن D با S، معادله مشخصه بدست می‌آید. در حالت خاصی که ماتریس امپدانس حلقه یا ماتریس ادمیتانس گره مدار دارای دترمینان صفر باشد، مدار در یکی از دو حالت خاص زیر قرار داشته و فاقد معادله مشخصه می‌باشد:

۱) اگر بردار منابع ورودی (بردار $[E_S]$ در مورد ماتریس امپدانس حلقه و بردار $[I_S]$ در مورد ماتریس ادمیتانس گره) هم‌راستا با هر یک از بردارهای ستونی ماتریس امپدانس یا ادمیتانس و یا به صورت ترکیبی خطی از آنها باشد، مدار دارای بی‌شمار پاسخ خواهد بود. دقت کنید در این حالت اگر به جای هر یک از بردارهای ستونی ماتریس امپدانس یا ادمیتانس، بردار منابع قرار داده شود، دترمینان ماتریس همچنان صفر باقی خواهد ماند.

۲) در صورت عدم برقراری حالت فوق، مدار بدون پاسخ می‌باشد.

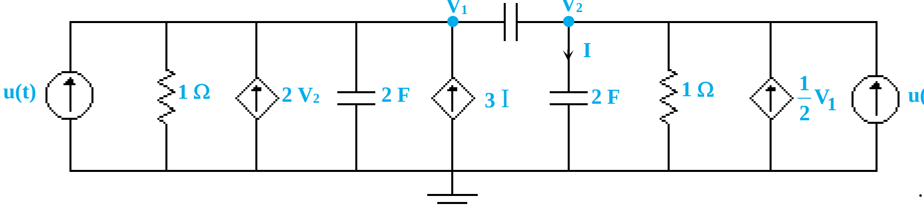
۲ـ در روش دیگر محاسبه معادله مشخصه، می‌توانیم منابع مستقل مدار را غیرفعال کرده و سپس با نوشتن روابط KVL و KCL، معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده یک متغیر دلخواه از شبکه را بدست آورده و در نهایت با جایگذاری S به جای $\frac{d}{dt}$ در معادله دیفرانسیل بدست آمده، به معادله مشخصه مدار برسیم:

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0x(t)=0 \;\Rightarrow\; (S^n+a_{n-1}S^{n-1}+a_{n-2}S^{n-2}+\cdots+a_1S+a_0)X(s)=0$$

معادله مشخصه : $S^n+a_{n-1}S^{n-1}+a_{n-2}S^{n-2}+\cdots+a_1S+a_0=0$

دقت کنید که در این حالت ممکن است چندجمله‌ای مشخصه بدست آمده تنها فاکتوری از چندجمله‌ای مشخصه اصلی مدار باشد و ریشه‌های آن به طور کامل فرکانس‌های طبیعی مدار را در بر نگیرد؛ با این حال اگر مرتبه معادله دیفرانسیل بدست آمده برابر با مرتبه مدار باشد، مطمئن خواهیم بود که جواب نهایی همان معادله مشخصه مدار است.

مثال ۴۳: ولتاژ $V_1(t)$ در مدار شکل زیر برابر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)



۱) $(1-2t-e^{-\frac{t}{4}})u(t)$

۲) $(1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{4}})$

۳) جواب‌های بیشماری برای $V_1(t)$ وجود دارد.

۴) هیچ جوابی نمی‌توان در این مدار برای $V_1(t)$ بدست آورد.

پاسخ: گزینه «۴» با نوشتن KCL در گره‌های مدار و با جایگذاری $I=\frac{2dV_2}{dt}$ و $D=\frac{d}{dt}$ داریم:

$$\begin{cases}-u(t)+\frac{V_1}{1}-2V_2+2\frac{dV_1}{dt}-3I+2\frac{d(V_1-V_2)}{dt}=0\\ 2\frac{d(V_2-V_1)}{dt}+I+\frac{V_2}{1}-\frac{1}{2}V_1-u(t)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_1+4\frac{dV_1}{dt}-2V_2-8\frac{dV_2}{dt}=u(t)\\ -\frac{1}{2}V_1-2\frac{dV_1}{dt}+V_2+4\frac{dV_2}{dt}=u(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4D+1 & -8D-2\\ -2D-\frac{1}{2} & 4D+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(t)\\u(t)\end{bmatrix}\quad,\quad\begin{vmatrix}4D+1 & -8D-2\\ -2D-\frac{1}{2} & 4D+1\end{vmatrix}=0$$

نکته۱: اگر تابع به صورت سینوسی یعنی $V(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ بیان شود، آنگاه با کم کردن مقدار $90°$ آن را به صورت کسینوسی یعنی $V(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi - 90°)$ می‌نویسیم و سپس با استفاده از مطالب بیان شده فرم فازوری آن را به راحتی بیان می‌کنیم.

نکته۲: به صورت استاندارد، تابع کسینوسی به فازور تبدیل می‌شود و به عنوان مرجع در مسأله استفاده می‌شود که این مسأله در همه تست‌های کنکور سراسری کارشناسی ارشد رشته برق رعایت می‌شود. ولی در برخی از تست‌های کنکور کارشناسی ارشد کامپیوتر به ویژه تست‌هایی که منابع ورودی تماماً به شکل توابع سینوس هستند، همان سینوس به عنوان مرجع در نظر گرفته می‌شود. لذا به دانشجویان توصیه می‌شود در این گونه تست‌ها ابتدا تست را با فرض وجود تابع کسینوس به عنوان مرجع حل نموده و در صورت عدم وجود جواب در گزینه‌ها، تابع سینوس را به عنوان مرجع انتخاب کنند. قابل ذکر است زمانی‌که ورودی مدار به شکل تابع $\sin(\omega t)$ بوده و پاسخ زمانی مدار مورد سؤال است، می‌توان برای راحتی حل مسئله، $\sin(\omega t)$ را به‌عنوان مرجع در نظر گرفت که در این صورت داریم: $\sin\omega t = 1 \quad , \quad \cos\omega t = j$

مثال۲: فرم فازوری توابع زیر که برحسب زمان بیان شده‌اند را بنویسید.

$$1)\ V(t) = 2\cos 4t \Rightarrow V = 2\angle 0°$$

$$2)\ V(t) = 3\cos(2t + 45°) \Rightarrow V = 3\angle 45°$$

$$3)\ V(t) = 5\sin 10t = 5\cos(10t - 90°) \Rightarrow V = 5\angle -90°$$

$$4)\ V(t) = 5\sin(377t + 150°) = 5\cos(377t + 150° - 90°) = 5\cos(377t + 60°) \Rightarrow V = 5\angle 60°$$

جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس

برای جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس می‌توانیم معادلات را به صورت فازوری نمایش داده و سپس فرم دکارتی آنها را نوشته (چون جمع دو عدد مختلط در فرم دکارتی به راحتی صورت می‌گیرد) و جمع را به راحتی انجام دهیم. در نهایت مجدداً با استفاده از تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی و سپس نوشتن آن در حوزه زمان جواب نهایی را بدست آوریم. دقت کنید برای جمع دو فازور، باید فرکانس دو فازور با یکدیگر برابر باشد. (می‌توانیم آن‌ها را در دستگاه مختصات قطبی هم رسم کنیم و سپس بردارها را با هم جمع برداری کنیم.)

مثال۳: اگر $I_1(t) = 25\sin(\omega t)$ و $I_2(t) = 25\cos(\omega t - 30°)$ و $I_3(t) = 25\cos(\omega t + 30°)$ باشد، حاصل $I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$ را بدست آورید.

پاسخ: چون یکی از موج‌ها سینوسی می‌باشد، لذا لازم است آن را به فرم کسینوسی تبدیل کنیم:

$$I_1(t) = 25\sin(\omega t) = 25\cos(\omega t - 90°) \Rightarrow \vec{I}_1 = 25\angle -90°$$

$$\vec{I}_2 = 25\angle -30° \quad , \quad \vec{I}_3 = 25\angle +30°$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = -j25 + 25\cos(-30°) + j25\sin(-30°) + 25\cos(+30°) + j25\sin(+30°)$$

$$= -j25 + 25\times\frac{\sqrt{3}}{2} - j25\times\frac{1}{2} + 25\times\frac{\sqrt{3}}{2} + j25\times\frac{1}{2} = -j25 + 25\sqrt{3} = 25\sqrt{3} - j25$$

$$\text{اندازه } I = \sqrt{(25)^2 + (25\sqrt{3})^2} = \sqrt{25^2 + 25^2\times 3} = \sqrt{4\times 25^2} = 2\times 25 = 50\,A$$

$$\text{زاویه فاز } I = \text{Arctg}\left(\frac{-25}{25\sqrt{3}}\right) = \text{Arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30° \Rightarrow I = 50\angle -30° \Rightarrow I(t) = 50\cos(\omega t - 30°)$$

نکته۳: جمع تعدادی تابع سینوسی با فرکانس‌های یکسان و هر تعدادی از مشتق‌های آنها در انتها یک تابع سینوسی با همان فرکانس اولیه خواهد شد. همچنین روابط زیر نیز برقرار خواهد بود.

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\omega t - \theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\angle -\theta$$

$$tg\theta = \frac{b}{a}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

چکیده مطالب محاسبات فازوری

۱) برای نوشتن فازوری به شکل $k=|k|\angle\varphi$ به فرم مختلط داریم: $k=|k|\angle\varphi=k(\cos\varphi+j\sin\varphi)$

و بر عکس برای نوشتن یک عدد مختلط به صورت $A=a+jb$ به صورت فازور $A=|A|\angle\varphi$ از روابط زیر کمک می‌گیریم:

A اندازه $=|A|=\sqrt{a^۲+b^۲}$ و A زاویه فاز $=\varphi=\mathrm{Arctg}\dfrac{b}{a}$

۲) رابطه ضرب دو فازور $k_۱\angle\varphi_۱$ و $k_۲\angle\varphi_۲$ به صورت مقابل است: $(k_۱\angle\varphi_۱)\times(k_۲\angle\varphi_۲)=k_۱.k_۲\angle(\varphi_۱+\varphi_۲)$

۳) رابطه تقسیم فازور $k_۱\angle\varphi_۱$ بر فازور $k_۲\angle\varphi_۲$، به شکل مقابل است: $\dfrac{k_۱\angle\varphi_۱}{k_۲\angle\varphi_۲}=\dfrac{k_۱}{k_۲}\angle(\varphi_۱-\varphi_۲)$

۴) در محاسبات زاویه فاز، هر زاویه‌ای مثل α را می‌توانیم به صورت $\alpha=\pm۳۶۰^\circ+\beta$ بنویسیم و در نهایت مقدار β را به جای α در محاسبات قرار دهیم. (با توجه به این که چرخش $۲k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ در دستگاه مثلثاتی تغییری ایجاد نمی‌کند، در محاسبات تأثیری نمی‌گذارد.)

$$+۲۴۰^\circ=۳۶۰^\circ-۱۲۰^\circ=-۱۲۰^\circ\quad,\quad -۲۴۰^\circ=-۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

دقت شود که عموماً زاویه را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ بیان می‌کنند.

۵) برای نوشتن معادلات جریان و ولتاژ که به فرم مختلط دکارتی هستند، در حوزه زمان، ابتدا فرم قطبی (فازوری) آنها را نوشته و سپس به راحتی معادله زمانی آنها را می‌نویسیم. برای مثال برای یک ولتاژ مختلط که مرجع آن به **فرم سینوسی** در نظر گرفته شده داریم:

$$V=a+jb\xrightarrow{\text{فازور}}V_m\angle\varphi_V\xrightarrow{\text{معادله زمانی}}V(t)=V_m\sin(\omega t+\varphi_V)$$

یادآوری چند رابطه مفید:

$$\sin(۳۰^\circ)=\cos(۶۰^\circ)=۰/۵\qquad \cos(۳۰^\circ)=\sin(۶۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰/۸۶۶$$

$$\sin(۳۷^\circ)=\cos(۵۳^\circ)=۰/۶\qquad \cos(۳۷^\circ)=\sin(۵۳^\circ)=۰/۸$$

$$\cos(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t+\varphi+۹۰^\circ)\qquad \sin(\omega t+\varphi)=\cos(\omega t+\varphi-۹۰^\circ)$$

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b\qquad \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

$$\cos a+\cos b=۲\cos(\frac{a+b}{۲})\cos(\frac{a-b}{۲})\qquad \cos a-\cos b=۲\sin(\frac{a+b}{۲})\sin(\frac{b-a}{۲})$$

$$\sin a\pm\sin b=۲\sin(\frac{a\pm b}{۲})\cos(\frac{a\mp b}{۲})$$

$$A\sin x+B\cos x=\sqrt{A^۲+B^۲}\cos(x+\theta)\ ,\ \theta=-\mathrm{tg}^{-۱}(\frac{A}{B})$$

$$A\sin(\omega t+\varphi_۱)+B\sin(\omega t+\varphi_۲)=\sqrt{A^۲+B^۲+۲AB\cos(\varphi_۱-\varphi_۲)}\sin(\omega t+\varphi_۳)$$

$$A\cos(\omega t+\varphi_۱)+B\cos(\omega t+\varphi_۲)=\sqrt{A^۲+B^۲+۲AB\cos(\varphi_۱-\varphi_۲)}\cos(\omega t+\varphi_۳)$$

چند نکته برای بالا بردن سرعت در محاسبات:

$۱)A=A\angle ۰^\circ$ $\quad ۲)-A=A\angle ۱۸۰^\circ$ $\quad ۳)jA=A\angle ۹۰^\circ$

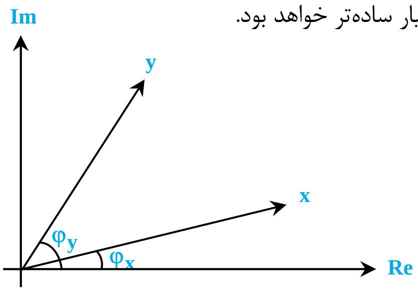
$۴)-jA=A\angle -۹۰^\circ$ $\quad ۵)A+jA=A\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ$ $\quad ۶)A-jA=A\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ$

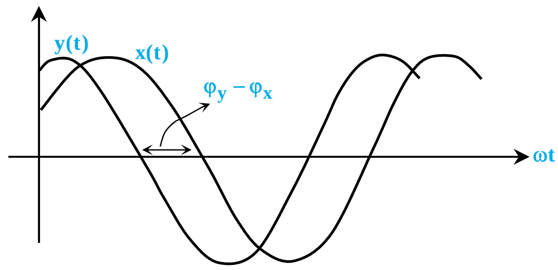
درسنامه (۲): تحلیل فازوری مدارهای با تحریک سینوسی

زمانی که یک مدار با منابع سینوسی تحریک می‌شود، می‌توان برای محاسبه‌ی **پاسخ دائمی** آن از روش تحلیل فازوری استفاده کرد. برای باز کردن بحث فـازور، ابتدا مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز را تعریف کرده، سپس امپدانس و ادمیتانس را معرفی می‌کنیم.

مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز

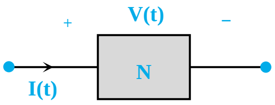
دو سیگنال سینوسی هم‌فرکانس $x(t)=\cos(\omega t+\varphi_x)$ و $y(t)=\cos(\omega t+\varphi_y)$ را با فرض $|\varphi_y-\varphi_x|<\pi$ در نظر بگیرید. اگر $\varphi_y>\varphi_x$ باشد، اصـطلاحاً می‌گوییم سیگنال $y(t)$ نسبت به سیگنال $x(t)$ به اندازه $\varphi_y-\varphi_x$ رادیان، پیش‌فـاز اسـت، و یـا در بیـان دیگـر سـیگنال $x(t)$ نسـبت بـه سـیگنال $y(t)$ بـه اندازه $\varphi_y-\varphi_x$ رادیان، پس‌فاز است. درک مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز از طریق نمودارهای زیر بسیار ساده‌تر خواهد بود.





تعریف امپدانس، ادمیتانس و راکتانس

در صورتی‌که یک شبکه تک‌قطبی با اجزای خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر باشد، آنگاه امپدانس و ادمیتانس شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود.



$$\begin{cases}V=V_m\angle\theta_V\\ I=I_m\angle\theta_I\end{cases}\Rightarrow\ Z=\frac{V}{I}=\frac{V_m\angle\theta_V}{I_m\angle\theta_I}=\frac{V_m}{I_m}\angle\theta_V-\theta_I$$

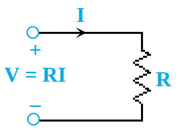
$$Y=\frac{I}{V}=\frac{I_m\angle\theta_I}{V_m\angle\theta_V}=\frac{I_m}{V_m}\angle\theta_I-\theta_V\quad,\quad Y=\frac{۱}{Z}\quad,\quad \cos\theta=\cos(\theta_V-\theta_I)$$

در روابط بالا Z امپدانس و Y ادمیتانس سیستم می‌باشد و $\frac{V_m}{I_m}$ اندازه امپدانس و $\theta=\theta_V-\theta_I$ را زاویه امپدانس می‌نامنـد و $\cos\theta$ ضـریب تـوان یـا ضـریب قدرت سیستم است. همچنین لازم به ذکر است که برای اندازه امپدانس ظاهری سلف و خازن یا همان X_L و X_C عبارت راکتانس نیـز بـه کـار مـی‌رود. در واقع راکتانس اندازه قسمت موهومی امپدانس است.

« مقاومت در حالت دائمی سینوسی»

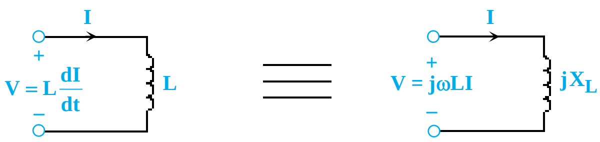
رابطه ولتاژ ـ جریان مقاومت در حالت فازوری مانند رابطه ولتاژ ـ جریان مقاومت در حوزه زمان است.

لازم به ذکر است که ولتاژ و جریان یک مقاومت همیشه هم‌فاز هستند.



« سلف در حالت دائمی سینوسی»

رابطه‌ی ولتاژ ـ جریان سلف در حالت فازوری به‌صورت $V_L=jX_LI_L=j\omega LI_L$ می‌باشد و با توجه به این رابطه ملاحظه می‌گردد که ولتاژ به اندازه ۹۰° نسبت به جریان پیش‌فاز است. $\quad X_L=L.\omega\ ,$



اثبات: $I(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ و $V(t)=L\frac{dI}{dt}=-L\omega A\sin(\omega t+\varphi)=L\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{۲})$

$$\Rightarrow I=A\angle\varphi\ \text{و}\ V=L\omega A\angle(\varphi+\frac{\pi}{۲})=j\omega LA\angle\varphi=j\omega LI$$

اگر رابطه فازوری جریان به صورت $\mathbf{I}=I_m\angle\varphi$ بیان گردد، چون $j=۱\angle۹۰^\circ$ است، آنگاه رابطه ولتاژ آن به صورت زیر است:

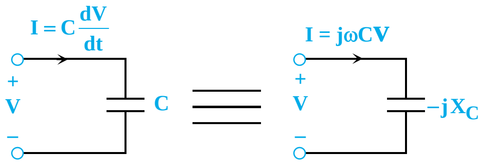
$$V=jX_LI_m\angle\varphi=۱\angle۹۰^\circ\times\omega LI_m\angle\varphi=\omega L\,I_m\angle(\varphi+۹۰^\circ)$$

« خازن در حالت دائمی سینوسی»

رابطه‌ی ولتاژ ـ جریان خازن در حالت فازوری به‌صورت $V_C=-jX_CI_C=-j\frac{۱}{\omega C}I_C$ می‌باشد و با توجه به این رابطه ملاحظه می‌گردد که جریان خازن به اندازه ۹۰° نسبت به ولتاژ دو سر خازن پیش‌فاز است.

پس اگر فازور ولتاژ خازن به صورت $V = V_m\angle\varphi$ بیان گردد، آنگاه داریم:

$$I=\frac{V_m\angle\varphi}{-jX_C}=\frac{V_m\angle\varphi}{X_C\angle-90^\circ}=\frac{V_m\angle\varphi}{\frac{1}{C\omega}\angle-90^\circ}=V_mC\omega\angle\varphi+90^\circ$$

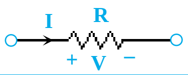
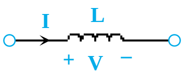
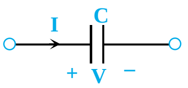


اثبات:

$$V(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \quad \text{و} \quad I(t)=C\frac{dV}{dt}=-C\omega A\sin(\omega t+\varphi)=C\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow V=A\angle\varphi \quad \text{و} \quad I=C\omega A\angle(\varphi+\frac{\pi}{2})=j\omega CA\angle\varphi=j\omega CV\Rightarrow V=\frac{1}{j\omega C}I$$

در جدول زیر رابطه بین ولتاژ و جریان سه عنصر در حوزه‌های زمان و فرکانس به طور خلاصه بیان گردیده است:

امپدانس	در حالت فازوری	در حوزه زمان	عنصر
R	$V = RI$	$V = RI$	
$j\omega L$	$V = jX_L.I$	$V = L\frac{dI}{dt}$	
$\frac{1}{j\omega C}$	$V = -jX_C.I$	$I = C\frac{dV}{dt}$	

نکته ۴: ادمیتانس عناصر C و L و R که عکس امپدانس‌های آنها می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$Y_R=\frac{1}{R} \quad , \quad Y_L=\frac{1}{j\omega L} \quad , \quad Y_C=j\omega C$$

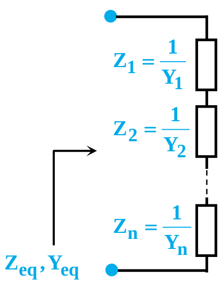
نکته ۵: با توجه به اینکه $\omega=2\pi f$ می‌باشد، لذا در فرکانس‌های خیلی زیاد $Z_L=\infty$ و $Z_C=0$ می‌باشد، یعنی سلف در فرکانس‌های خیلی زیاد (مثلاً تحریک ضربه‌ای) مدار باز و خازن در فرکانس‌های خیلی زیاد اتصال کوتاه می‌باشد و در فرکانس‌های خیلی پایین (مثلاً تحریک DC)، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.

نکته ۶: در مدارهای ترکیبی، امپدانس مدار معمولاً خود یک عدد مختلط می‌شود و لذا امپدانس را در اینگونه مدارها به صورت $Z=|Z|\angle\varphi$ و یا $Z=R+jX$ نمایش می‌دهیم که $|Z|=\sqrt{R^2+X^2}$ و $\varphi=tg^{-1}\frac{X}{R}$ می‌باشد. توجه شود R مقاومت اهمی مدار و X راکتانس مدار می‌باشد (که ممکن است خاصیت القائی و یا خاصیت خازنی داشته باشد). بحث مشابهی نیز در مورد ادمیتانس مدار قابل طرح است، یعنی ادمیتانس مدار در حالت کلی به شکل $Y=G+jB$ یا $Y=|Y|\angle\theta$ نمایش داده می‌شود که البته داریم:

$$|Y|=\frac{1}{|Z|} \quad , \quad \theta=-\varphi$$

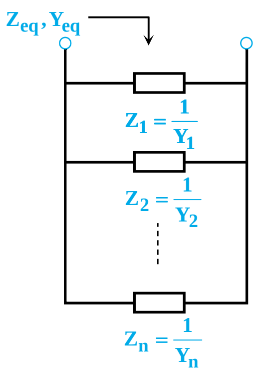
لازم به ذکر است در شکل نمایش دکارتی Y، G یا بخش حقیقی Y، **کندوکتانس** و B در بخش موهومی Y، **سوسپتانس** نامیده می‌شود. واحد اندازه‌گیری ادمیتانس، کندوکتانس و سوسپتانس، مهو (℧) می‌باشد.

نکته ۷: توجه شود وقتی تمامی عناصر در یک مدار برحسب امپدانس‌های خود بیان شده باشند، آنگاه برای محاسبه امپدانس کل می‌توانیم اینگونه فرض کنیم که هر یک از امپدانس‌ها مانند یک مقاومت هستند و با استفاده از روابط سری و موازی بودن مقاومت‌های اهمی، مقدار امپدانس کل را با در نظر گرفتن روابط فازوری بدست آوریم. (در واقع با استفاده از مفهوم فازور، مدار را از حالت پیچیده‌ی سلفی و خازنی به حالت ساده‌ی مقاومتی (شبیه به مقاومتی) تبدیل می‌کنیم.) برای محاسبه ادمیتانس کل نیز می‌توانیم عیناً از روش‌هایی استفاده کنیم که برای محاسبه رسانایی معادل در مدارهای مقاومتی استفاده می‌کردیم.



$$Z_{eq}=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$$

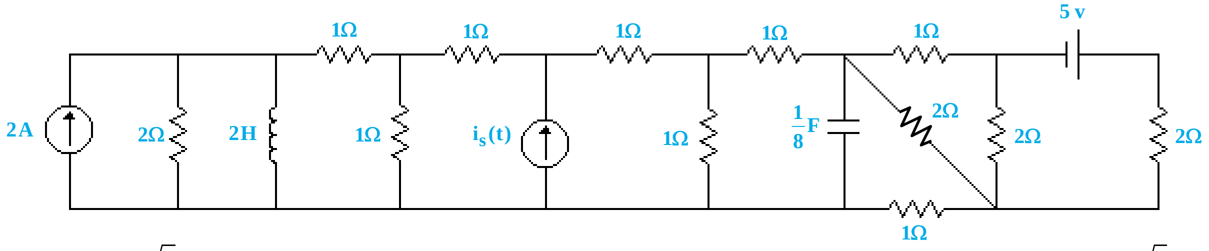
$$Y_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{Y_1}+\frac{1}{Y_2}+\cdots+\frac{1}{Y_n}}$$



$$Z_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\cdots+\frac{1}{Z_n}}$$

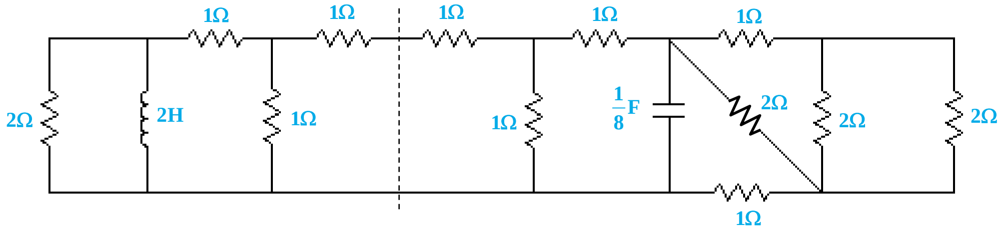
$$Y_{eq}=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$$

مثال ۷۲: در مدار شکل زیر، خازن توان راکتیو $-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{VAR}$ مصرف می‌کند. توان راکتیو مصرفی سلف برابر با کدام گزینه است؟ $(i_s(t) = A\sin 2t)$

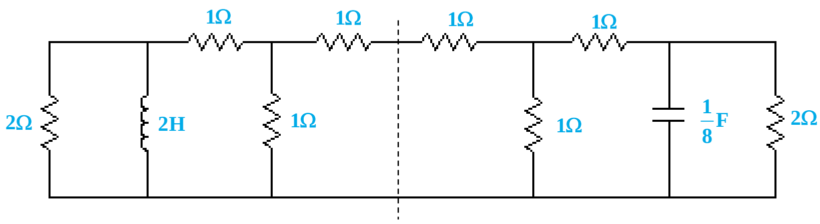


۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{VAR}$
۲) $\sqrt{2}\,\mathrm{VAR}$
۳) $\sqrt{3}\,\mathrm{VAR}$
۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}\,\mathrm{VAR}$

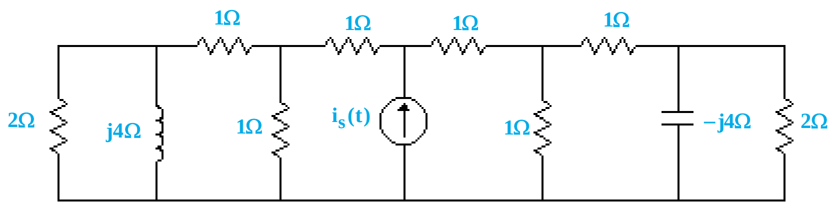
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در حل این مسأله باید از خاصیت تقارن مدار کمک گرفت. اگر منابع را صفر کنیم به مدار شکل زیر می‌رسیم:



و اگر مقاومت‌های سمت راست خازن را ساده کنیم، به یک مدار متقارن نسبت به خطچین دست خواهیم یافت (بدون توجه به سلف و خازن):



اکنون دقت کنید که منابع DC تأثیری در توان راکتیو خازن و سلف ندارند و امپدانس سلف و خازن نیز در فرکانس $\omega = 2$ به ترتیب $j4$ و $-j4$ می‌باشد. لذا از دید منبع سینوسی، قسمت راست مدار، مزدوج قسمت سمت چپ مدار است. لذا امپدانس دو سر منبع، حقیقی است و توان راکتیو مصرفی کل مدار صفر خواهد بود. بنابراین توان راکتیو مصرفی در سلف باید منفی توان راکتیو مصرفی خازن باشد.



محاسبه مقدار RMS

اگر موجی، ترکیبی از چند موج مختلف با فرکانس‌های متفاوت (و یا اشکال مختلف) باشد، آنگاه مقدار مؤثر کل آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_{rms} = \sqrt{(y_{rms_1})^2 + (y_{rms_2})^2 + (y_{rms_3})^2 + \cdots}$$

برای معادله موجی به شکل مقابل: $f(t) = a_0 + a_1\cos\omega_1 t + a_2\cos 2\omega_1 t + \cdots + a_n\cos(n\omega_1 t) + b_1\sin\omega_2 t + b_2\sin 2\omega_2 t + \cdots + b_n\sin n\omega_2 t$

مقدار مؤثر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_{rms} = \sqrt{a_0^2 + (\frac{a_1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a_2}{\sqrt{2}})^2 + \cdots + (\frac{a_n}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b_1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b_2}{\sqrt{2}})^2 + \cdots + (\frac{b_n}{\sqrt{2}})^2}$$

توجه شود که a_0 عدد ثابت می‌باشد.

هرگاه دو موج کسینوسی (یا سینوسی) هم‌فرکانس داشته باشیم، ابتدا باید آنها را به صورت یک موج بنویسیم و آنگاه از رابطه فوق استفاده کنیم، کـه بـرای این کار ابتدا موجها را به صورت فازوری می‌نویسیم؛ سپس با تبدیل به فرم دکارتی، آنها را با هم جمع کرده و در نهایت با تبـدیل مجـدد بـه فـرم قطبـی و نوشتن معادله در حوزه زمان مقدار مؤثر را حساب می‌کنیم.

نکته ۱۳: طبق مطالب بیان شده در این بخش می‌توان نتیجه گرفت که برای محاسبه توان مصرفی یک عنصر مدار اگر فرکانس تمام منابع ورودی مدار متفاوت باشد، می‌توان از قضیه جمع آثار به شکل مقابل استفاده کرد: $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$

در این رابطه P_i توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تنها منبع iام فعال باشد و P_T توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تمامی n منبع موجود در مدار فعال باشند. لازم به ذکر است در یک حالت خاص می‌توان در مدارهای با منابع ورودی هم‌فرکانس از قضیه جمع آثار برای محاسبه توان استفاده کرد. اگر مدار تنها دارای دو منبع ورودی هم‌فرکانس باشد و جریان‌های ناشی شده از این دو منبع در عنصر موردنظر، دارای اختلاف فاز ۹۰ درجه باشند، در این صورت خواهیم داشت: $P_T = P_1 + P_2$

این نکته را می‌توان با بکارگیری رابطه $|a\angle\theta^\circ + b\angle(\theta+90)^\circ| = \sqrt{a^2+b^2}$ اثبات نمود.

مثال ۷۳: معادله ولتاژ دو سر یک مقاومت به صورت $V(t)$ می‌باشد. توان مصرفی مقاومت تقریباً کدام است؟

$$V(t) = 6 + 3\sin t + 4\cos t + 12\cos 2t \quad , \quad R = 6\Omega$$

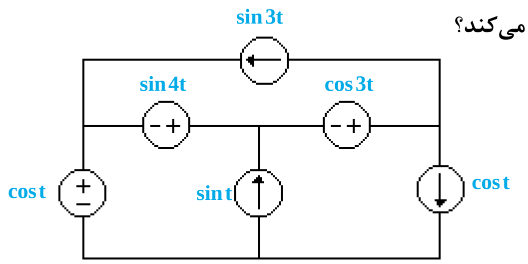
۱) ۵w ۲) ۱۰w ۳) ۲۰w ۴) ۳۰w

پاسخ: گزینه «۳» برای بدست آوردن توان، باید ابتدا مقدار مؤثر سیگنال ولتاژ بدست آید. با دقت در معادله $V(t)$ دیده می‌شود که دو موج هم‌فرکانس در تابع $V(t)$ موجود است. یکی دیگر از روش‌های ترکیب دو موج هم‌فرکانس استفاده از فرمول زیر می‌باشد. حال داریم:

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t+\theta) \Rightarrow 3\sin t + 4\cos t = \sqrt{3^2+4^2}\sin(t+\theta) \Rightarrow V(t) = 5\sin(t+\theta) + 6 + 12\cos 2t$$

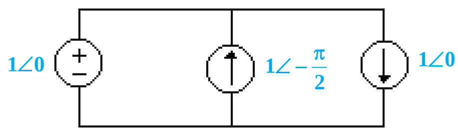
$$\text{rms}[V(t)] = \sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{120/5}\,\text{v} \Rightarrow P = \frac{[V_{rms}]^2}{R} = \frac{120/5}{6} \simeq 20\,\text{w}$$

مثال ۷۴: در مدار مقابل در حالت دائمی سینوسی منبع ولتاژ $\cos t$ چه توان اکتیوی تولید می‌کند؟



۱) $\frac{1}{2}$W ۲) $-\frac{1}{2}$W ۳) ۱W ۴) −۱W

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که تنها منابع با فرکانس $\omega = 1$ در توان شاخه فوق نقش دارند، با حذف منابع با فرکانس‌های $\omega \neq 1$ مدار به فرم روبرو تبدیل می‌شود، حال می‌توان توان مختلط و توان اکتیو تولیدی منبع ولتاژ $\cos t$ را محاسبه کرد:

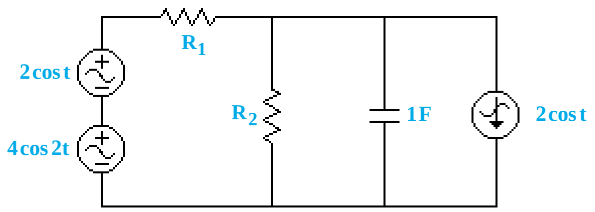


$$S = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}(1\angle 0)(1\angle -\frac{\pi}{2} - 1\angle 0)^* = \frac{1}{2}(-j-1)^* = \frac{1}{2}(-1+j) \rightarrow P_{\text{تولیدی}} = \frac{1}{2}\text{W}$$

دقت داشته باشید که توان مصرفی منبع $-\frac{1}{2}$ وات (معادل با توان تولیدی $\frac{1}{2}$ وات) می‌باشد و این یعنی منبع ولتاژ در حال تولید توان است.

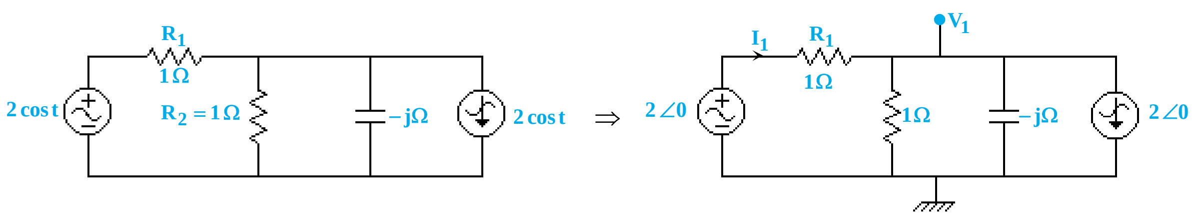
مثال ۷۵: در مدار شکل زیر با در نظر گرفتن $R_1 = 1\Omega$ و $R_2 = 1\Omega$، توان متوسط مصرفی (P_{avr}) در مقاومت R_1 چند وات است؟

(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری کامپیوتر» ـ سراسری ۹۲)

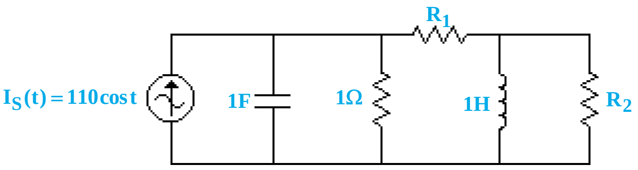


۱) ۱۶/۴ ۲) ۸/۲ ۳) ۱۴ ۴) ۷

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به وجود چند منبع با فرکانس‌های مختلف، براساس قضیه جمع آثار، توان مصرفی مقاومت R_1 را در حالات زیر محاسبه می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم که منابع دارای فرکانس $\omega = 1$ در مدار وجود داشته باشند و منبع دارای فرکانس $\omega = 2$ غیرفعال (اتصال کوتاه) باشد.



مثال ۹۹: در مدار شکل زیر، توان متوسط (یا توان مصرفی) مقاومت R_1 برابر P_1 وات و توان متوسط (یا توان مصرفی) مقاومت R_2 برابر P_2 وات است. مقاومت‌های R_1 و R_2 به ترتیب چند اهمی باشند تا P_1+P_2 حداکثر باشد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)



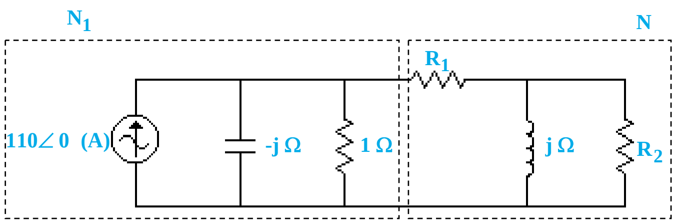
۱) $R_2=\frac{1}{2}$ و $R_1=\frac{1}{2}$

۲) $R_2=0$ و $R_1=1$

۳) $R_2=1$ و $R_1=0$

۴) $R_2=2$ و $R_1=2$

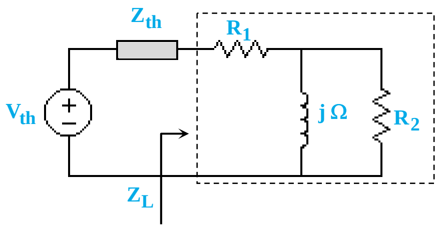
پاسخ: گزینه «۳» برای اینکه توان (P_1+P_2) حداکثر شود، باید توان مصرفی شبکه N حداکثر شود. با قرار دادن مدار معادل تونن برای شبکه N_1 در سمت چپ مدار داریم:



$$Z_{th}(N_1)=1\Omega\,||\,(-j\Omega)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j)\Omega$$

$$V_{th}(N_1)=110\times Z_{th}=110(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j)=55\sqrt{2}\angle-45^\circ(v)$$

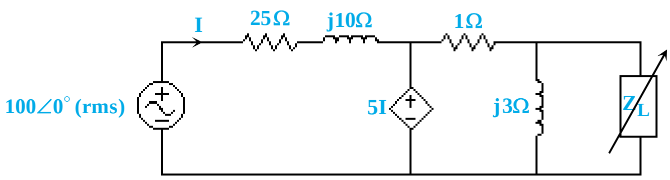
برای انتقال توان حداکثر به شبکه N، لازم است که Z_L برابر Z_{th}^* (مزدوج مختلط Z_{th}) شود.



$$Z_L=R_1+j\Omega\,||\,R_2=R_1+\frac{jR_2}{R_2+j}=R_1+\frac{R_2}{1+R_2^2}+j\frac{R_2^2}{1+R_2^2}$$

$$Z_L=Z_{th}^*\Rightarrow(R_1+\frac{R_2}{1+R_2^2})+j(\frac{R_2^2}{1+R_2^2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\Rightarrow\begin{cases}R_1+\frac{R_2}{1+R_2^2}=\frac{1}{2}\\ \frac{R_2^2}{1+R_2^2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{R_1=0}\\ \mathbf{R_2=1\Omega}\end{cases}$$

مثال ۱۰۰: در مدار شکل زیر Z_L را طوری تنظیم می‌کنیم که حداکثر توان متوسط به آن برسد. در این صورت حدوداً چند درصد از توان تولیدی مدار به Z_L می‌رسد؟



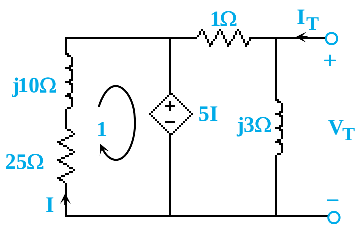
۱) ۳۳/۳

۲) ۱۶/۶

۳) ۲۵/۵

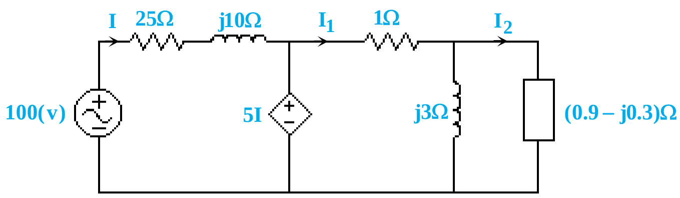
۴) ۱۳/۳

پاسخ: گزینه «۲» حل این تست را با پیدا کردن امپدانس معادل مدار از دید Z_L شروع می‌کنیم تا بتوانیم مقدار بهینه Z_L را پیدا کنیم. بدین منظور مدار معادل روبرو را در نظر می‌گیریم:



با یک KVL ساده در حلقه (۱) مشخص است که $I=0$ خواهد بود. پس امپدانسی که از دید Z_L دیده می‌شود برابر است با: $\frac{1\times j3}{1+j3}=0/9+j0/3$

بنابراین Z_L باید برابر $0/9-j0/3$ باشد تا توان حداکثر به آن برسد. اکنون می‌خواهیم ببینیم با فرض $Z_L=0/9-j0/3$، چند درصد از توان متوسط مدار روی Z_L مصرف می‌شود. می‌دانیم که توان متوسط یا توان اکتیو تنها روی مقاومت‌های مدار مصرف می‌شود و مقدار این توان را می‌توان با داشتن مقدار مقاومت و جریان آن محاسبه کرد؛ پس به سراغ محاسبه جریان سه مقاومت موجود در مدار می‌رویم. بار دیگر شکل مدار را با تعریف جریان‌های I_1 و I_2 در نظر بگیرید:



می‌خواهیم جریان‌های I_1 و I_2 را بر حسب جریان I بدست آوریم. امپدانسی که منبع 5I در سمت راست خود می‌بیند برابر ۲ اهم است؛ پس داریم:

$$I_1=\frac{5I}{2}=2/5I$$

حالا با تکنیک تقسیم جریان می‌توان نوشت:

$$I_2=\frac{j3}{j3+0/9-j0/3}\times2/5I=(2/5+j\frac{5}{6})I$$

اکنون می‌توان توان مصرفی روی سه مقاومت $R_۱$ (مقاومت ۲۵ اهمی)، $R_۲$ (مقاومت ۱ اهمی) و R_L را بصورت مقابل بیان کرد:

$$\begin{cases} W_۱ = ۲۵I^۲ \\ W_۲ = ۱\times ۲/۵^۲ \times I^۲ = ۶/۲۵I^۲ \\ W_L = ۰/۹\times \left|۲/۵ + j\frac{۵}{۶}\right|^۲ \times I^۲ = ۶/۲۵I^۲ \end{cases}$$

در نهایت می‌توان نسبت توان مصرف شده در Z_L را به توان مصرفی کل مدار بدست آورد:

$$\frac{W_L}{W_t} = \frac{۶/۲۵I^۲}{۲۵\times I^۲ + ۶/۲۵I^۲ + ۶/۲۵I^۲} = \frac{۱}{۶} = \%۱۶/۶$$

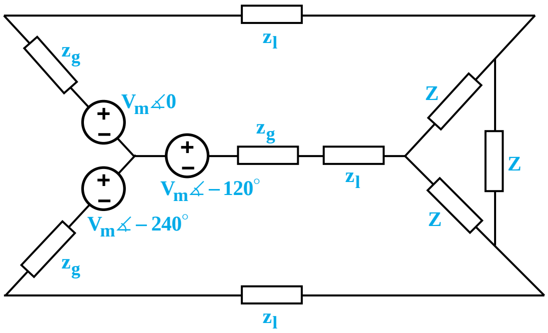
دقت کنید که در عمل نیازی به محاسبه جریان $I_۲$ نیز نداشتیم، چرا که با تطبیق امپدانسی که انجام داده بودیم مشخص بود توانی که مقاومت $R_۲$ مصرف می‌کند برابر توانی است که مقاومت R_L مصرف می‌کند.

مثال ۱۰۱: در مدار زیر، Z چقدر باشد تا ماکزیمم توان دریافتی را داشته باشد؟ (مهندسی برق ـ دکتری ۹۸)

$z_g = ۰/۲ + j۰/۵$

$z_l = ۰/۸ + j۰/۱$

$Z = R + jX$



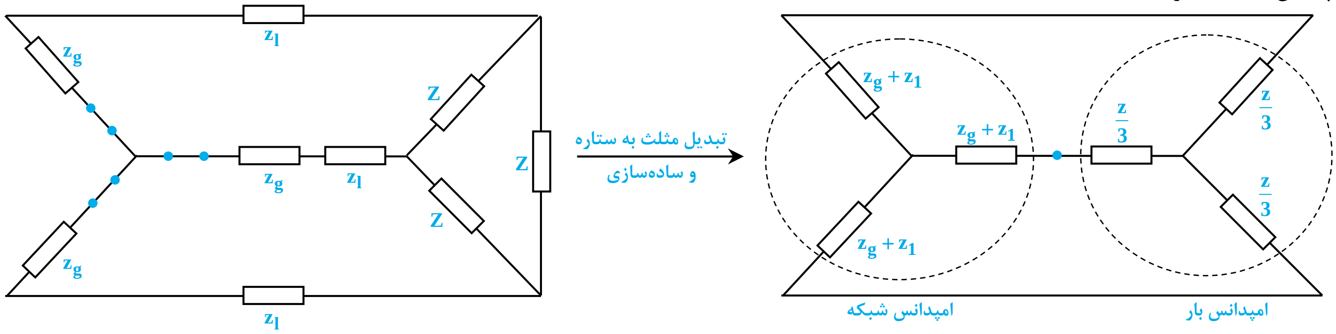
۱) $z = ۰/۶ - j$

۲) $z = ۱ - j۰/۶$

۳) $z = ۱/۸ - j۳$

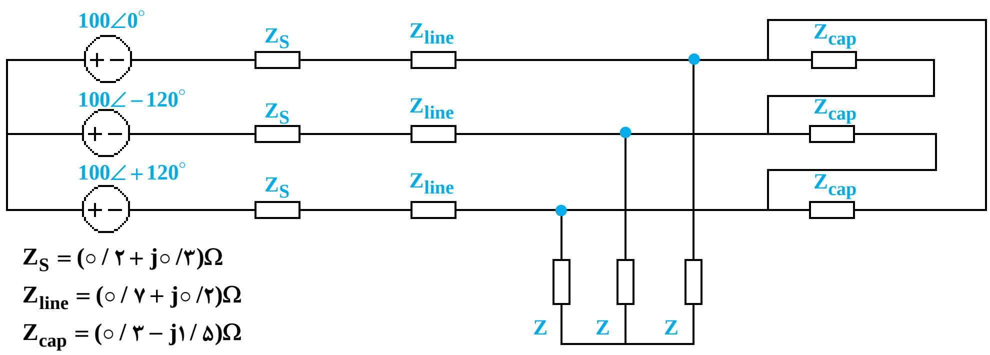
۴) $z = ۳ - j۱/۸$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این مدار یک مدار سه‌فاز متعادل است. برای تحلیل مدار همچون مدارهای معمول می‌توان منابع مدار را خاموش کرد و امپدانس معادل مدار را به‌دست آورده و سپس با استفاده از تکنیک تطبیق امپدانس مقدار Z را محاسبه کرد. منتها با توجه به سه‌فاز بودن مدار، امپدانس معادل مدار به شکل یک امپدانس ستاره‌ای‌شکل به‌دست می‌آید. لذا امپدانس بار نیز باید از ساختار مثلثی به ساختار ستاره‌ای تبدیل شود تا بتوان از قضیه تطبیق امپدانس استفاده کرد:



$$\frac{Z}{۳} = (Z_g + Z_۱)^* \Rightarrow Z = ۳\times(۰/۲ + j۰/۵ + ۰/۸ + j۰/۱)^* = ۳\times(۱ + j۰/۶)^* = (۳ - j۱/۸)\Omega$$

مثال ۱۰۲: در مدار زیر مقدار Z چقدر باشد تا توان ماکزیمم را دریافت نماید؟



$Z_S = (۰/۲ + j۰/۳)\Omega$

$Z_{line} = (۰/۷ + j۰/۲)\Omega$

$Z_{cap} = (۰/۳ - j۱/۵)\Omega$

۱) $(۱/۱۵ - j۰/۴)\Omega$

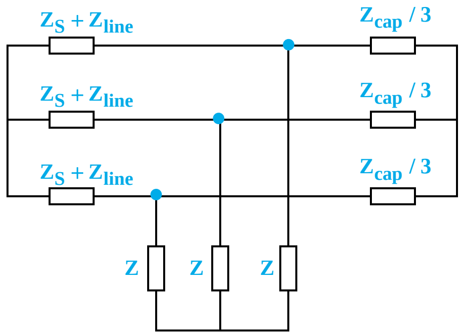
۲) $(۰/۶۵ + j۰/۴)\Omega$

۳) $(۰/۳۴ - j۰/۴)\Omega$

۴) $(۰/۳۴ + j۰/۴)\Omega$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این تست با یک مدار سه فاز متعادل سروکار داریم. در این مدارها همچون مدارهای تک‌فاز می‌توان از قاعده‌ی تطبیق امپدانس استفاده کرد. ابتدا منابع ولتاژ را خاموش کرده و مدار با اتصال مثلث در سمت راست را به اتصال ستاره تبدیل می‌کنیم:

در نتیجه مدار به شکل زیر درمی‌آید:



حال مطابق قاعده‌ی تطبیق امپدانس داریم:

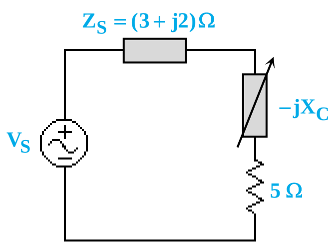
$$Z = Z_N^* = \left[(Z_s + Z_{line}) \Big\| \frac{Z_{cap}}{۳}\right]^* = \left[(۰/۲ + j۰/۳ + ۰/۷ + j۰/۲) \| (۰/۳ - j۱/۵)/۳\right]^* = \left[(۰/۹ + j۰/۵) \| (۰/۱ - j۰/۵)\right]^*$$

$$= \left[\frac{(۰/۹ + j۰/۵)(۰/۱ - j۰/۵)}{۱}\right]^* = \left[۰/۳۴ - j۰/۴\right]^* = (۰/۳۴ + j۰/۴)\Omega$$

نکته ۱۵: برای اینکه حداکثر توان به بار منتقل شود، به طور کلی می‌توان گفت اگر در قسمت بار راکتانس **قابل تغییر** وجود داشته باشد، باید این راکتانس خنثی شود؛ به این شکل که اگر در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود نداشته باشد، باید مقدار راکتانس بار برابر صفر باشد و اگر در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود داشته باشد، باید راکتانس بار از لحاظ عددی با راکتانس مدار برابر ولی از لحاظ علامت مخالف آن باشد.

نکته ۱۶: دقت کنید که تطبیق امپدانس در یک مدار به معنای حداکثر نمودن توان تولیدی منبع ورودی مدار نیست؛ در واقع برای این که توان تولیدی یک منبع ولتاژ در مدار بیشینه گردد، باید راکتانس دیده شده از دو سر منبع کمینه گردد (در صورت ممکن برابر صفر شود)؛ در این حالت مقدار بهینه برای مقاومت مدار از دید منبع برابر اندازه راکتانس دیده شده از دو سر منبع خواهد بود. برای منابع جریان نیز باید سوسپتانس (بخش موهومی ادمیتانس) دیده شده از دو سر منبع کمینه بوده و رسانایی یا کندوکتانس مدار (بخش حقیقی ادمیتانس) از دید منبع برابر اندازه سوسپتانس مدار باشد.

مثال ۱۰۳: **به ازای چه مقدار از X_C برحسب اهم، منبع V_S حداکثر توان را به شبکه تحویل می‌دهد؟**



۱) صفر

۲) ۱

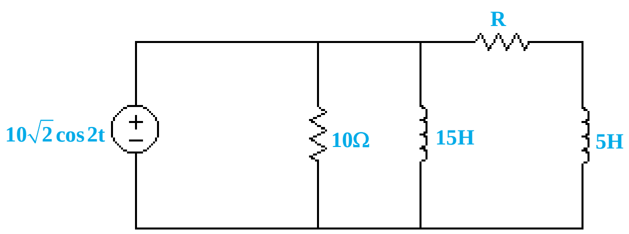
۳) ۲

۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این تست عنوان شده منبع حداکثر توان را تحویل شبکه دهد و این در شرایطی اتفاق می‌افتد که اثری از قسمت‌های موهومی نباشد؛ لذا داریم:

$$j۲ - jX_C = ۰ \Rightarrow j(۲ - X_C) = ۰ \Rightarrow X_C = ۲\Omega$$

مثال ۱۰۴: **در مدار زیر، مقدار بیشینه‌ی توان منبع در حالت دائمی سینوسی، چند وات است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۹۵)

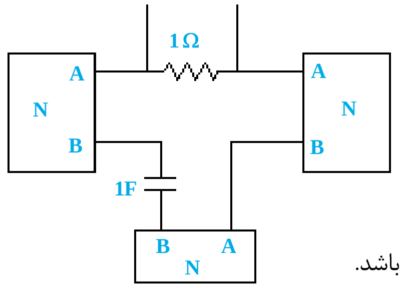


۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۱۵

۴) ۳۰



مثال ۱۲۶: شبکه N دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است که آن را ω_r می‌نامیم. در مورد فرکانس یا فرکانس‌های تشدید مدار روبرو چه می‌توان گفت؟

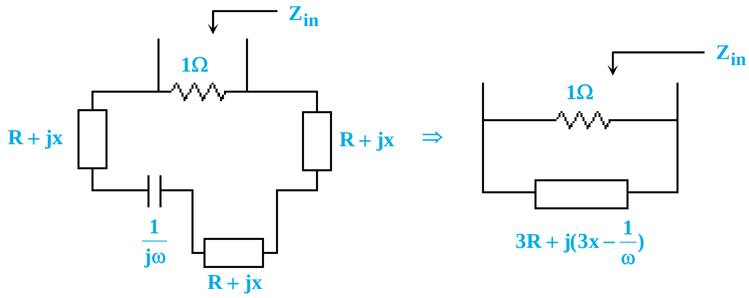
۱) دقیقاً یک فرکانس تشدید دارد.

۲) به علت وجود خازن تعداد فرکانس‌های تشدید آن از یک بیشتر است.

۳) می‌تواند صفر، یک و یا تعداد بیشتری فرکانس تشدید داشته باشد و با هر مقدار دلخواهی بدون توجه به ω_r.

۴) اگر فرکانس تشدیدی کوچکتر از ω_r داشته باشد، نمی‌تواند فرکانس تشدیدی بزرگتر از ω_r داشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر امپدانس دیده شده از دو سر A و B را $Z = R + jx$ در نظر بگیریم، مدار به شکل زیر درمی‌آید:

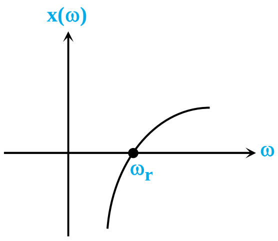


$$Y_{in} = 1 + \frac{1}{3R + j(3x - \frac{1}{\omega})} = 1 + \frac{3R + j(\frac{1}{\omega} - 3x)}{9R^2 + (3x - \frac{1}{\omega})^2}$$

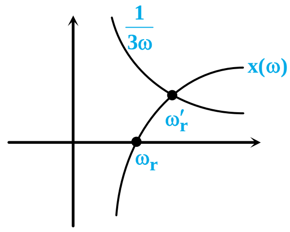
در حالت تشدید $Im\{Y_{in}\}$ باید مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\frac{1}{\omega} = 3x(\omega) \Rightarrow x(\omega) = \frac{1}{3\omega}$$

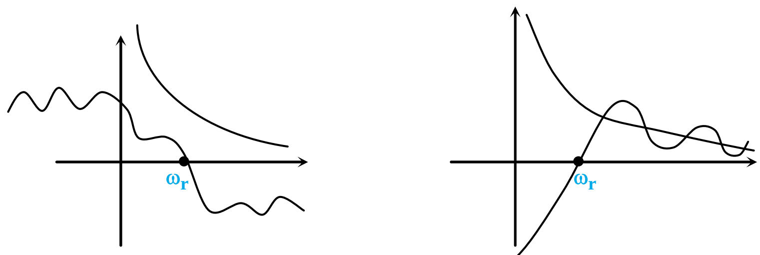
اکنون از اطلاعات داده شده در صورت سؤال استفاده می‌کنیم. از آنجا که N دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است، معادله $x(\omega) = 0$ تنها دارای یک جواب است؛ لذا $x(\omega)$ تنها یک بار محور ω را قطع خواهد کرد. فرض کنید نمودار $x(\omega)$ به صورت شکل روبرو باشد:



برای اینکه فرکانس تشدید شبکه کلی را بیابیم، باید این نمودار را با نمودار تابع $\frac{1}{3\omega}$ تقاطع دهیم.



اما بسته به اینکه $x(\omega)$ چه نموداری داشته باشد، جواب‌های متفاوتی حاصل خواهد شد:



بدون جواب　　　　بی‌نهایت جواب

لذا به ازای هر $N \in \{0,1,2,...\}$، می‌توان $x(\omega)$ای را یافت که شبکه دارای N فرکانس تشدید باشد. اما در عین حال یک محدودیت روی تمام این فرکانس‌ها خواهد بود و آن اینکه یا همه از ω_r کوچکترند و یا همه از ω_r بزرگتر. در غیر این صورت با موجود بودن تنها یک فرکانس تشدید برای N منافات خواهد داشت.

ضریب کیفیت (Q)

در فصل قبل، تعریف خاصی از ضریب کیفیت که معمولاً در سؤالات کنکور مدنظر است، ارائه گردید و روند ریاضیاتی محاسبه آن نیز بیان شد. در اینجا تعریف دیگری از ضریب کیفیت ارائه می‌گردد که گاهی ممکن است در سؤالات کنکور مورد توجه قرار گیرد. در این تعریف که مشخصاً نمودی از وضعیت میرایی یک مدار الکتریکی نوسانی می‌باشد، بر انرژی ذخیره شده و انرژی تلف شده در دوره نوسانات مدار، در یک مدار در حال رزونانس تمرکز می‌شود:

$$Q = 2\pi \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در هر سیکل در حال رزونانس}} = \omega_r \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده}}{\text{تلفات توان در حال رزونانس}}$$

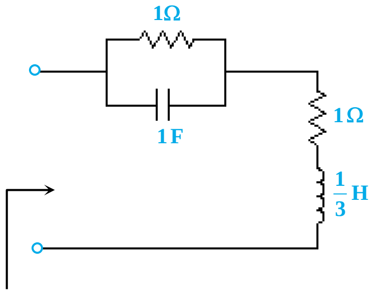
ماکزیمم انرژی ذخیره شده در یک مدار مرتبه دوم شامل سلف و خازن مثلاً یک مدار RLC ساده با استفاده از رابطه $E_S = \frac{1}{2}LI_L^2 = \frac{1}{2}CV_C^2$ (پیک انرژی ذخیره شده در خازن یا سلف) و یا $E_S = \frac{1}{4}LI_L^2 + \frac{1}{4}CV_C^2$ (مجموع متوسط انرژی‌های ذخیره شده در سلف و خازن) قابل محاسبه می‌باشد که در این

روابط V_C و I_L به ترتیب پیک ولتاژ خازن و پیک جریان سلف هستند. برای توجیه این روابط دقت کنید که در یک مدار RLC در حال رزونانس، پیک جریان سلف زمانی رخ می‌دهد که ولتاژ خازن برابر صفر است و همینطور پیک ولتاژ خازن زمانی رخ می‌دهد که جریان سلف برابر صفر است و از طرفی پیک انرژی سلف برابر پیک انرژی خازن است. مشخص است که طبق تعریف صورت گرفته، انتظار می‌رود پاسخ ورودی صفر یک سیستم نوسانی با ضریب کیفیت بالاتر نسبت به سیستمی مشابه با ضریب کیفیت پایین‌تر، دوام بیشتری داشته باشد.

طبق این تعریف همچون تعریف اول در فصل قبل، نوسان‌سازهای ایده‌آل (مثلاً مدارهای LC)، دارای ضریب کیفیت بینهایت هستند. دقت کنید که در تعریف ارائه شده برای ضریب کیفیت، فرکانس تحریک مدار تأثیرگذار نیست و مهم فرکانس رزونانس مدار است.

مثال ۱۲۷: ضریب کیفیت مدار روبرو کدام است اگر ضریب کیفیت (Q) به صورت زیر برای مدار در حال رزونانس تعریف شود؟

$$Q = ۲\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}}$$



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) به فرکانس بستگی دارد.

پاسخ: گزینه «۲» این مدار یک مدار RLC ساده سری یا موازی نیست و استفاده از روابط ضریب کیفیت آن‌ها، در اینجا کاربرد ندارد. طبق صورت سؤال در اینجا ضریب کیفیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = ۲\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}} = \omega_r \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}}$$

$$Z_{in} = \frac{۱}{۱+j\omega} + ۱ + \frac{j\omega}{۳} = \frac{۱-j\omega}{۱+\omega^۲} + ۱ + \frac{j\omega}{۳} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{۲} \ \text{فرکانس تشدید}$$

در مورد متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار، باید دانست که در حالت دائمی، انرژی ذخیره شده در سلف $\frac{۱}{۴}LI_m^۲$ و در خازن $\frac{۱}{۴}CV_m^۲$ است و همچنین باید این نکته را به خاطر داشت که در فرکانس تشدید این دو با هم برابر هستند. به عبارتی متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار با $۲\varepsilon_M$ یا $۲\varepsilon_E$ برابر است که ε_M و ε_E به ترتیب متوسط انرژی ذخیره شده در المان‌های سلفی و خازنی مدار هستند. لذا $Q = \omega_r \frac{۲\varepsilon_M}{P_{av}}$.

$$P_{av} = \text{توان متوسط اتلافی مقاومت‌ها} = \frac{۱}{۲}RI_m^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+\omega^۲}+۱\right)\Bigg|_{\omega=\sqrt{۲}} I_m^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+۲}+۱\right)I_m^۲ = \frac{۲}{۳}I_m^۲$$

$$\varepsilon_M = \frac{۱}{۴}LI_m^۲ = \frac{۱}{۱۲}I_m^۲ \qquad \text{و} \qquad Q = \sqrt{۲} \times \frac{۲\times\frac{۱}{۱۲}I_m^۲}{\frac{۲}{۳}I_m^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از فازورها

در صورتی که یک مدار توسط یک تابع سینوسی تحریک شود، می‌توان معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از روش فازورها حل کرده و جواب خصوصی معادله را بدست آورد. برای توضیح مطلب فوق، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$b_n \frac{d^n(X)}{dt^n} + b_{n-۱}\frac{d^{n-۱}(X)}{dt^{n-۱}} + \dots + b_۱\frac{d(X)}{dt} + b_۰ X = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

درصورتی که ضرایب b_n و θ اعداد حقیقی باشند، برای حل معادله فوق می‌توان به جای $\frac{d^n}{dt^n}$ عبارت $(j\omega)^n$ را به صورت زیر جایگزین کرد. (چنانچه با فوریه آشنا باشید این نکته را بهتر متوجه خواهید شد.) حال داریم:

$$b_n.(j\omega)^n . X + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} . X + \cdots + b_۱(j\omega) . X + b_۰ . X = V_m \angle\theta$$

$$X.[b_n(j\omega)^n + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} + \dots + b_۱(j\omega) + b_۰] = V_m\angle\theta \Rightarrow \boxed{X = \frac{V_m\angle\theta}{b_n(j\omega)^n + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} + \cdots + b_۱(j\omega) + b_۰}}$$

نکته ۲۲: در صورت جایگزینی $j\omega$ در معادله دیفرانسیل و صفر شدن معادله به ازای $j\omega$، می‌توان چنین نتیجه گرفت که $j\omega$ فرکانس طبیعی سیستم بوده و پاسخ خصوصی مدار به صورت $X(t) = V_m t\sin(\omega t + \theta)$ یا به صورت $X(t) = V_m t\cos(\omega t + \alpha)$ خواهد بود.

مدرسان شریف

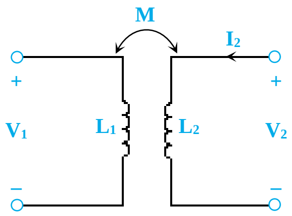
فصل پنجم

«القاکنایی متقابل»

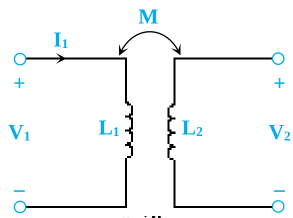
درسنامه (۱): سلف‌های تزویج‌شده و القاکنایی

تعریف ضریب خودالقایی و القاکنایی متقابل

جریانی که از یک سیم‌پیچ عبور می‌کند، میدانی مغناطیسی در اطراف سیم‌پیچ ایجاد می‌کند. حال اگر سیم‌پیچ دیگری در کنار این سیم‌پیچ باشد، شار مغناطیسی ایجاد شده از آن سیم‌پیچ هم می‌گذرد. این شار مغناطیسی روی پایانه‌های سیم‌پیچ دوم، ولتاژی القا می‌کند که با آهنگ تغییرات جریانی که از سیم‌پیچ اول می‌گذرد، متناسب است.



«ب»

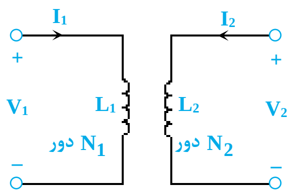


«الف»

مطابق شکل «الف» ملاحظه می‌گردد که جریان I_1 که از سیم‌پیچ L_1 عبور می‌کند، ولتاژ V_2 را روی L_2 ایجاد می‌کند و مطابق شکل «ب» جریان I_2 که از سیم‌پیچ L_2 می‌گذرد، ولتاژ V_1 را روی L_1 ایجاد می‌کند که این ولتاژها با القاکنایی متقابل بین دو سیم‌پیچ و جریان سیم‌پیچ مقابل ارتباط دارند.

القاکنایی متقابل آنها را با M نمایش می‌دهند و واحد القاکنایی متقابل هانری (H) می‌باشد.

M برای دو سیم‌پیچ L_1 و L_2 به صورت $M=\frac{N_2\phi_{12}}{I_1}$ یا $M=\frac{N_1\phi_{21}}{I_2}$ تعریف می‌شود. می‌دانیم ضریب خودالقایی L بر حسب جریان و شار عبوری و تعداد دورهای سیم‌پیچ به صورت $L=\frac{N\phi}{I}$ است. برای دو سلف، روابط زیر را داریم:



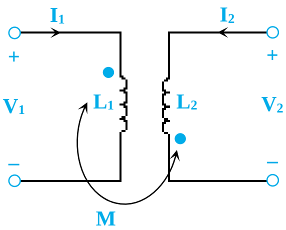
$$\begin{cases} L_1=\frac{N_1.\phi_1}{I_1} \\ L_2=\frac{N_2.\phi_2}{I_2} \end{cases}$$

ϕ_1 در واقع شاری است که در اثر جریان I_1 ایجاد می‌شود و ولتاژی برابر $L_1\frac{dI_1}{dt}$ روی سلف L_1 القاء می‌کند و بخشی از این شار که سیم‌پیچ دوم را قطع می‌کند، ϕ_{12} نامیده می‌شود و ولتاژی برابر $M\frac{dI_1}{dt}$ روی سلف L_2 ایجاد می‌کند. به همین ترتیب در اثر جریان I_2، شار ϕ_2 ایجاد می‌شود که ولتاژ $L_2\frac{dI_2}{dt}$ را روی سلف L_2 ایجاد می‌کند و بخشی از این شار که سیم‌پیچ اول را قطع می‌کند، ϕ_{21} است که از سیم‌پیچ L_1 عبور می‌کند و باعث ایجاد ولتاژ $M\frac{dI_2}{dt}$ روی سلف L_1 می‌شود.

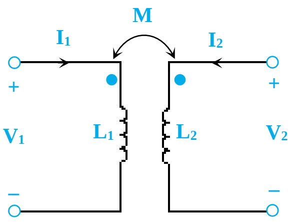
نوشتن معادله ولتاژ برای دو سلف تزویج شده

به طور کلی ولتاژ روی هر سلف تزویج شده شامل دو بخش است؛ قسمت اول ولتاژ، ناشی از خودالقاکایی است. می‌دانیم که هر سلف با توجه به جریانی که از آن عبور می‌کند، ولتاژی به صورت $V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt}$ در دو سرش ایجاد می‌شود. قسمت دوم ولتاژ ناشی از القاکایی متقابل می‌باشد و مقدار آن برابر $\pm M \frac{dI_2}{dt}$ می‌باشد که علامت پشت M به صورتی که گفته می‌شود، تعیین خواهد شد.

$$V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$
$$V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$



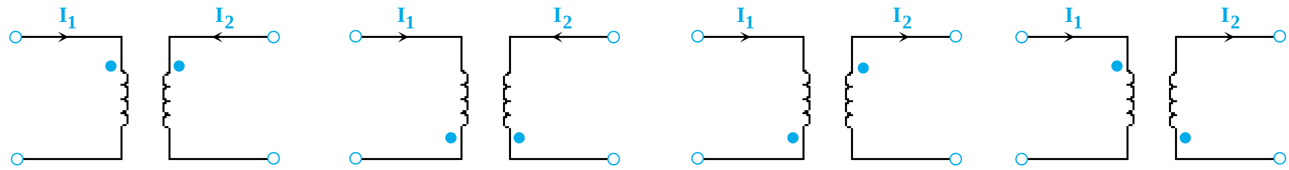
$$V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$
$$V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$



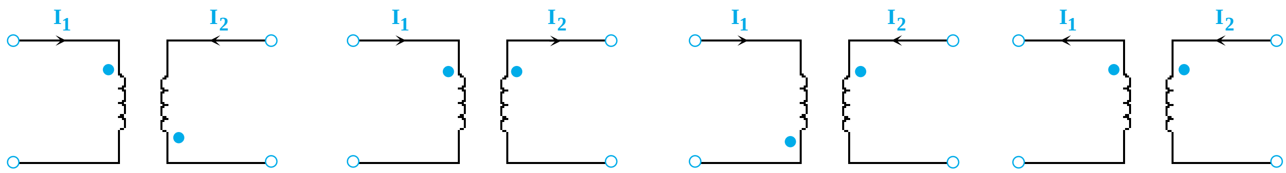
تعیین علامت پشت M

برای تعیین علامت پشت M به **جهت جریان‌ها** و **محل نقطه‌ها** در مدار خوب دقت کنید:

۱) اگر جریان در هر دو سیم‌پیچ، ابتدا به نقطه، بعد به سیم‌پیچ و یا در هر دو سیم‌پیچ، ابتدا به سیم‌پیچ، بعد به نقطه وارد شود، علامت پشت M مثبت است. به شکل‌های زیر برای درک بهتر دقت کنید:

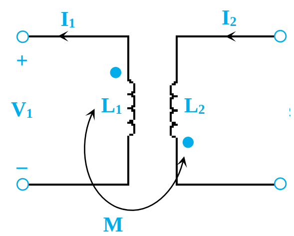


۲) اگر جریان یکی از سیم‌پیچ‌ها، ابتدا به نقطه، بعد به سلف ولی در سیم‌پیچ دیگر ابتدا به سلف، بعد به نقطه وارد شود، آنگاه علامت پشت M منفی در نظر گرفته می‌شود. به شکل‌های زیر برای درک بیشتر دقت کنید:



تذکر: همان‌طور که می‌بینید، جهت جریان‌ها و محل قرار گرفتن نقطه‌ها باید هر دو با هم مورد توجه قرار گیرند.

مثال۱: **معادله ولتاژ $V_1(t)$ برای سلف‌های تزویج شده زیر کدام است؟**



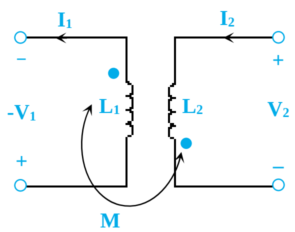
۱) $V_1(t) = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$

۲) $V_1(t) = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$

۳) $V_1(t) = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$

۴) $V_1(t) = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$

پاسخ: گزینه «۴»



روش اول: اولاً با توجه به جهت جریان‌ها علامت پشت M حتماً مثبت است. اما با توجه به جهت جریان و پلاریته ولتاژ در سمت چپ که جریان از سر مثبت خارج نشده باید پلاریته را تغییر داده و ولتاژ را در یک عدد منفی ضرب کنیم. حالا معادله ولتاژ را برای $-V_1$ می‌نویسیم:

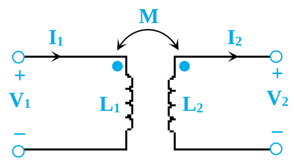
$$-V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow V_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

روش دوم: می‌توانیم فرض کنیم که جریان $-I_1$ از سر مثبت V_1 وارد می‌شود:

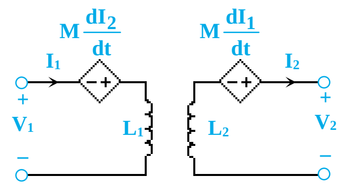
$$\Rightarrow V_1 = L_1 \frac{d}{dt}(-I_1) - M \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

لازم به ذکر است که همیشه M را مثبت فرض کرده و علامت پشت M را مطابق با روش ذکر شده در بالا تعیین می‌کنیم.

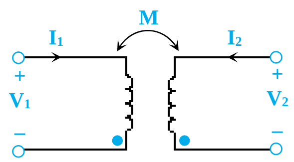
برای بهتر مشخص شدن موارد مذکور، چند مثال در جدول زیر آورده شده است. در این جدول دیده می‌شود که می‌توان به جای دو سلف با القای متقابل، از مدارهای معادل آنها که شامل دو سلف بدون القای متقابل و دو منبع وابسته است، استفاده نمود.



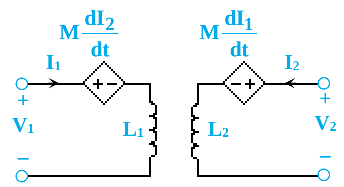
$\Leftrightarrow$



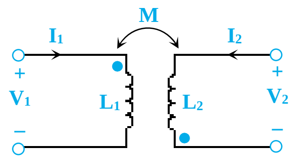
$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = -M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = M\dfrac{dI_1}{dt} - L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$$



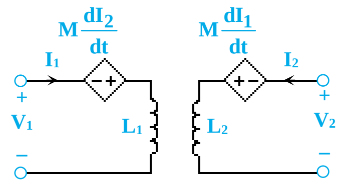
$\Leftrightarrow$



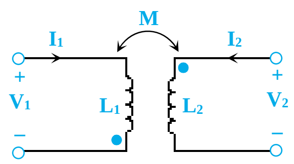
$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = L_1\dfrac{dI_1}{dt} + M\dfrac{dI_2}{dt} \\ V_2 = L_2\dfrac{dI_2}{dt} + M\dfrac{dI_1}{dt} \end{cases}$$



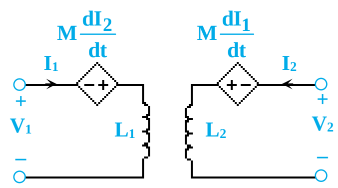
$\Leftrightarrow$



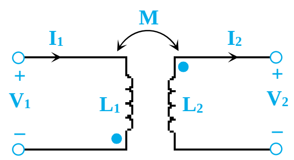
$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = -M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$$



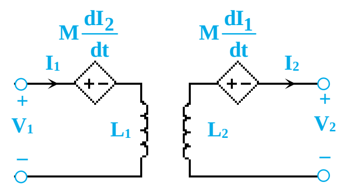
$\Leftrightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = -M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$$



$\Leftrightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt} - L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

نوشتن روابط فازوری برای سلف‌های تزویج شده

اگر در روابط گفته شده در قبل، به جای $L\dfrac{dI}{dt}$، عبارت $j\omega LI$ و به جای $M\dfrac{dI}{dt}$، عبارت $j\omega MI$ را قرار دهیم، معادلات فازوری ولتاژ به شکل زیر بدست می‌آید: $(\dfrac{d}{dt} \to j\omega)$

$$\begin{cases} V_1(t) = L_1\dfrac{dI_1(t)}{dt} \pm M\dfrac{dI_2(t)}{dt} \\ V_2(t) = L_2\dfrac{dI_2(t)}{dt} \pm M\dfrac{dI_1(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1 \end{cases}$$

نوشتن روابط سلف‌های تزویج شده در حوزه فرکانس

اگر در روابط گفته شده در بالا به جای $L\dfrac{dI}{dt}$ عبارت LSI و به جای عبارت $M\dfrac{dI}{dt}$، عبارت MSI را قرار دهیم، معادلات ولتاژ به صورت زیر خواهد بود: $(\dfrac{d}{dt} \to S)$

$$\begin{cases} V_1 = L_1\dfrac{dI_1}{dt} \pm M\dfrac{dI_2}{dt} \\ V_2 = L_2\dfrac{dI_2}{dt} \pm M\dfrac{dI_1}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = L_1SI_1 \pm MSI_2 \\ V_2 = L_2SI_2 \pm MSI_1 \end{cases}$$

لازم به ذکر است که کاربرد فرمول‌های بالا در فصل لاپلاس و فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

روش دوم: می‌توان ابتدا مقدار L_{eq} را در مدار محاسبه نموده و سپس مقدار انرژی ذخیره شده در L_{eq} را محاسبه کرد.

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + 2M = 4+5+6+2\times 3 = 21H$$

$$W = \frac{1}{2}L_{eq}.I_1^2 = \frac{1}{2}\times 21\times(2\cos 500t)^2 = 42\cos^2 500t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W_{(Max)} = 42J}$$

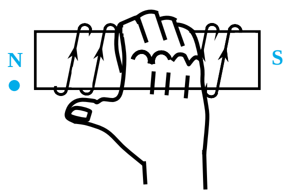
روش سوم: از همان اول می‌توانستیم بگوییم با توجه به سری بودن سلف‌ها زمانی انرژی آن‌ها ماکزیمم می‌شود که جریان عبوری از آن‌ها ماکزیمم باشد، یعنی در لحظهٔ $t = 0$.

$$I_1 = 2A \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}L_{eq}I^2 = \frac{1}{2}\times 21\times 2^2 = 42J$$

رسم مدار معادل نقطه‌دار

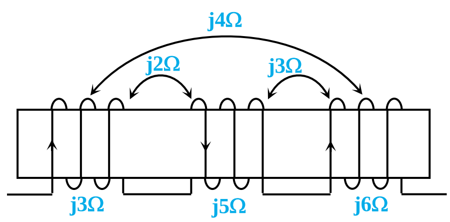
در بعضی مسائل جای نقطه روی شکل‌ها مشخص نیست و ما باید مکان این نقاط را تعیین کنیم. نقاط با استفاده از تعیین قطب N در سیم‌پیچ مشخص می‌شود.

«تعیین قطب‌های N و S و سوی میدان در یک سیم‌لوله »

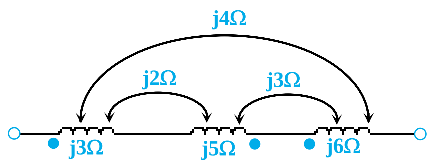


اگر مطابق شکل، چهار انگشت دست راست را در سوی جریان به دور تیغه (یا استوانه) قرار دهیم، انگشت شست جهت میدان را نشان خواهد داد و چون می‌دانیم میدان مغناطیسی از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شود، لذا سوی میدان را می‌توان قطب N دانست و دقیقاً نقطه را باید در جایی که N قرار دارد، گذاشت.

به عنوان مثال، مدار زیر را در نظر بگیرید که مدار معادل نقطه‌ای آن ترسیم شده است.

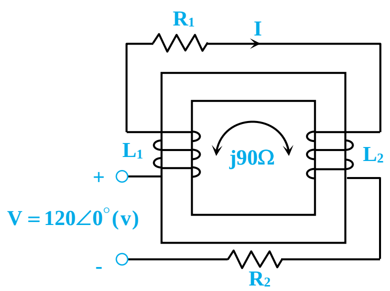


$\Rightarrow$



«مدار معادل نقطه‌ای»

مثال ۴۱: جریان I در مدار شکل مقابل تقریباً چند آمپر است؟



$$\begin{cases} R_1 = 20\Omega \ , \ L_1 = 2H \\ R_2 = 2\Omega \ , \ L_2 = 0/2H \\ \omega = 400(\frac{rad}{sec}) \end{cases}$$

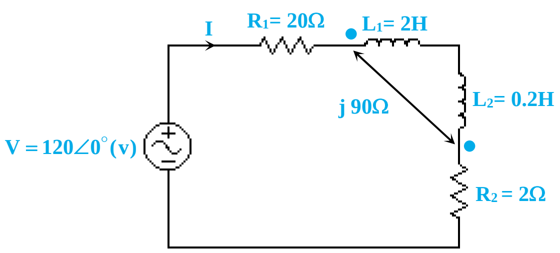
۱) ۰/۱۱

۲) ۰/۱۷

۳) ۱/۷

۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید مدار معادل نقطه‌دار شکل را رسم کنیم. برای این منظور، چهار انگشت دست راست را در جهت جریان روی هسته آهنی قرار می‌دهیم. جهت انگشت شست، همان جایی است که باید نقطه را قرار دهیم.

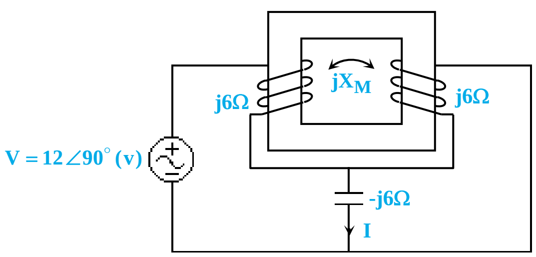


$$\begin{cases} Z_{L_1} = j\omega L_1 = j\times 400\times 2 = j800\Omega \\ Z_{L_2} = j\omega L_2 = j\times 400\times 0/2 = j80\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = j800 + j80 - 2\times j90 + 22 = 22 + j700$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{120\angle 0^\circ}{22 + j700} \quad \Rightarrow \quad |I| = \frac{120}{\sqrt{(700)^2 + (22)^2}} \cong \frac{120}{700} = 0/17A$$

مثال ۴۲: در مدار مقابل جریان $I = 4A$ است. اندازه X_M چقدر است؟

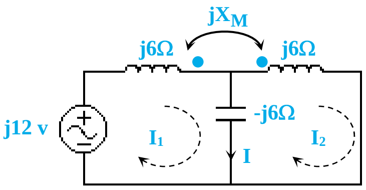


۱) ۶

۲) ۹

۳) ۳

۴) جریان I نمی‌تواند برابر با 4A در مدار باشد.



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را با جهت دلخواه در شکل در نظر می‌گیریم. در ادامه با توجه به جهت سیم‌پیچی‌ها می‌توانیم مدار معادل نقطه‌گذاری شده را به صورت شکل مقابل ترسیم کنیم:

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$j۶I_۱ - jX_M I_۲ - j۶(I_۱ - I_۲) = j۱۲ \Rightarrow (-jX_M + j۶)I_۲ = j۱۲ \Rightarrow I_۲ = \frac{j۱۲}{-jX_M + j۶} \Rightarrow I_۲ = \frac{۱۲}{۶ - X_M} \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

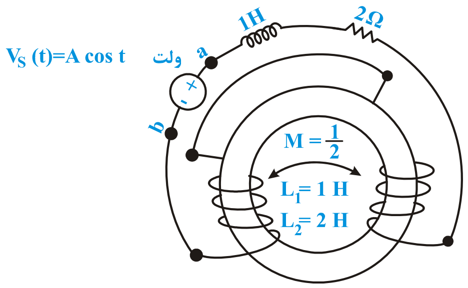
$$-j۶(I_۲ - I_۱) + j۶(I_۲) - jX_M I_۱ = ۰ \Rightarrow (j۶ - jX_M)I_۱ = ۰ \Rightarrow I_۱ = ۰ \text{ یا } X_M = ۶$$

$X_M = ۶$ با توجه به رابطه (۱) درست نمی‌باشد (متعلق به دامنه نیست) پس $I_۱ = ۰$. از طرفی داریم:

$$I = I_۱ - I_۲ \Rightarrow ۴ = ۰ - I_۲ \Rightarrow I_۲ = -۴(A) \Rightarrow \frac{۱۲}{۶ - X_M} = -۴ \Rightarrow ۱۲ = -۲۴ + ۴X_M \Rightarrow ۳۶ = ۴X_M \Rightarrow X_M = ۹\Omega$$

در ادامه با توجه به این که $X_M = K\sqrt{X_{L_۱}X_{L_۲}}$ و $K \le ۱$ است، مقدار $X_M = ۹\Omega$ در رابطه صادق نمی‌باشد؛ بنابراین هیچ مقداری برای X_M بدست نمی‌آید و جریان I نمی‌تواند ۴A باشد.

مثال ۴۳: در مدار زیر امپدانس ورودی از a و b در حالت دائمی سینوسی، برابرکدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۶)



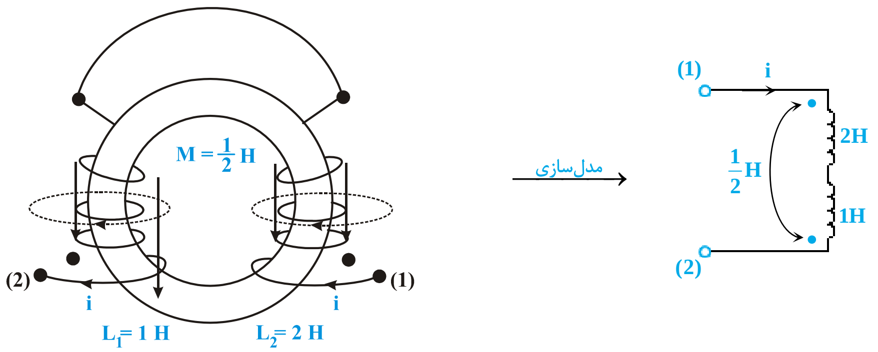
۱) $۲+۴j$

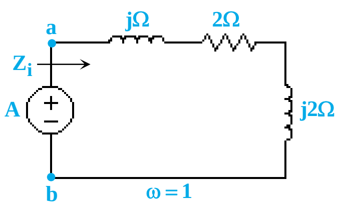
۲) $۲+۳j$

۳) $۲+۴/۵j$

۴) $۲+۳/۵j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این تست ابتدا باید هسته و سیم‌پیچ‌های روی آن در مدار را به شکل دو سلف تزویج‌شده سری مدل کنیم. در این مدل‌سازی مکان نقطه‌ها را با استفاده از قاعده دست راست مشخص می‌کنیم. مطابق شکل با در نظر گرفتن جریان فرضی i و مشخص نمودن جهت عبور آن از سیم‌پیچ‌ها، می‌توان جهت میدان و مکان نقطه‌ها را به راحتی مشخص کرد.





سلف‌های تزویج‌شده سری فوق را می‌توان با یک سلف جایگزین کرد که مقدار آن برابر است با:

$$L_{eq} = L_۱ + L_۲ - ۲M = ۲ + ۱ - ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲H$$

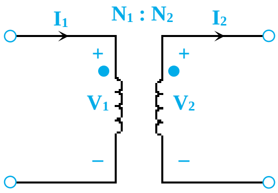
اکنون مدار را در حالت فازوری مدل کرده و امپدانس ورودی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_i = j + ۲ + j۲ = (۲ + j۳)\Omega$$

درسنامه (۲): ترانسفورماتور

ترانسفورماتور یا ترانسفورمر برای تغییر سطح ولتاژ و جریان در مدارهای جریان متناوب به کار می‌رود. ساختمان ترانسفورماتور متشکل از یک هسته آهنی و دو سیم‌پیچ با تعداد دورهای عمدتاً متفاوت است که روی هسته آهنی پیچیده شده‌اند. هسته آهنی از ورقه‌های نازکی که روی هم قرار گرفته‌اند، تشکیل شده است و دلیل ورقه ورقه بودن هسته، کاهش جریان گردابی و کاهش تلفات در هسته ترانس می‌باشد.

اگر سیم‌پیچ اولیه N_1 دور و سیم‌پیچ ثانویه N_2 دور داشته باشد، بین ولتاژ و جریان‌های ثانویه و اولیه یک ترانس ایده‌آل (بدون تلفات) روابط زیر برقرار است:

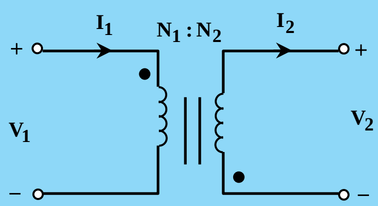


$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}=\frac{I_1}{I_2}$$

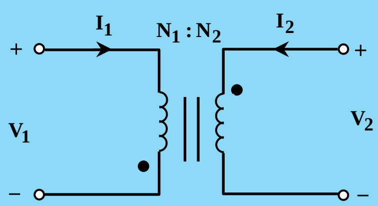
$$V_1I_1=V_2I_2$$

ملاحظه می‌شود که با انتخاب تعداد دور مناسب سیم‌پیچ‌ها و تعیین عدد $\frac{N_2}{N_1}$ به اندازه مناسب می‌توانیم به ازای ولتاژ معین اولیه، ولتاژ دلخواه در ثانویه را بدست آوریم. برطبق رابطه $V_2=(\frac{N_2}{N_1})V_1$ اگر $\frac{N_2}{N_1}<1$ باشد، آنگاه ولتاژ ثانویه ترانسفورماتور کمتر از ولتاژ اولیه آن خواهد بود و ترانسفورماتور را **کاهنده** و اگر $\frac{N_2}{N_1}>1$ باشد، آنگاه ولتاژ ثانویه بیشتر از ولتاژ اولیه خواهد بود و ترانسفورماتور را **افزاینده** می‌نامند.

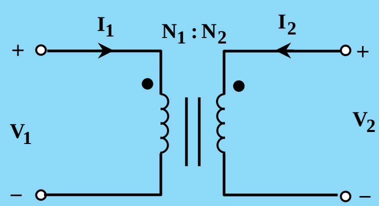
تذکر ۳: اگر جهت هر کدام از جریان‌ها عوض شود و یا جای یکی از نقطه‌ها به تنهایی عوض شود، روابط به صورت زیر بیان خواهد شد:



$$\begin{cases}\frac{V_2}{V_1}=-\frac{N_2}{N_1}\\[4pt]\frac{I_2}{I_1}=-\frac{N_1}{N_2}\end{cases}$$

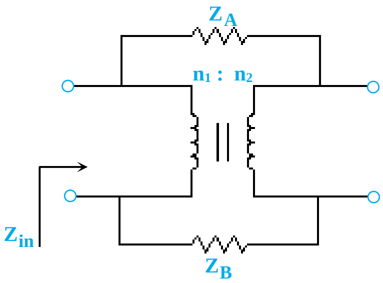


$$\begin{cases}\frac{V_2}{V_1}=-\frac{N_2}{N_1}\\[4pt]\frac{I_2}{I_1}=\frac{N_1}{N_2}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}\\[4pt]\frac{I_2}{I_1}=-\frac{N_1}{N_2}\end{cases}$$

قانون انعکاس امپدانس در چند مورد خاص

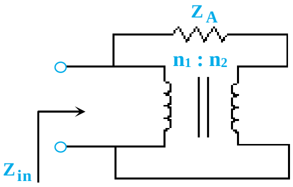


در صورتی که امپدانس‌هایی در بالا و پایین یک ترانسفورمر قرار گیرد، قانون انعکاس امپدانس برای امپدانس دیده شده از ورودی ترانسفورمر به صورت زیر است:

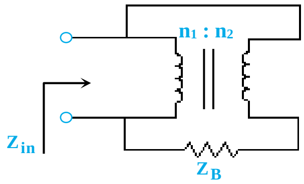
$$\boxed{Z_{in}=\frac{Z_A+Z_B}{(1\pm\frac{n_2}{n_1})^2}}$$

لازم به ذکر است که در رابطه فوق، در صورتی که نقاط مربوط به القای متقابل در سیم‌پیچ‌های ترانس همانند هم باشند (هر دو در بالا و یا هر دو در پایین)، از علامت منفی و در صورتی که یک نقطه در بالا و یک نقطه در پایین باشد، از علامت مثبت استفاده می‌کنیم.

همچنین در صورتی که یکی از المان‌های Z_A و یا Z_B اتصال کوتاه شود، به جای آن در رابطه Z_{in}، مقدار صفر را لحاظ می‌کنیم. به بیان دیگر داریم:

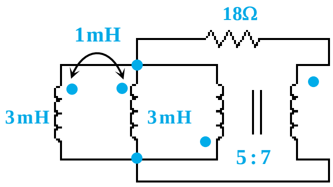


$$\boxed{Z_{in}=\frac{Z_A}{(1\pm\frac{n_2}{n_1})^2}}$$



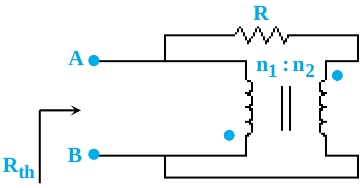
$$\boxed{Z_{in}=\frac{Z_B}{(1\pm\frac{n_2}{n_1})^2}}$$

مثال ۶۸: ثابت زمانی مدار زیر بر حسب میلی‌ثانیه کدام است؟



۱) ۰/۶۴
۲) ۰/۳۲
۳) ۰/۰۱۸
۴) ۰/۰۰۹

پاسخ: گزینه «۱» برای بدست آوردن ثابت زمانی در این مدار، باید از دو سر سلف‌ها مقاومت تونن دیده شود. لذا داریم:

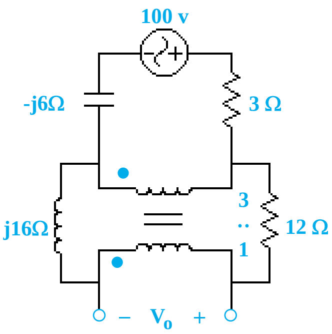


$$R_{th}=\frac{R}{(1+\frac{n_2}{n_1})^2}\Rightarrow R_{th}=\frac{18}{(1+\frac{7}{5})^2}=\frac{25}{8}\Omega$$

برای بدست آوردن مقدار L_{eq}، دو سلف $3\,mH$ را با توجه به تزویج بین آن‌ها موازی می‌کنیم.

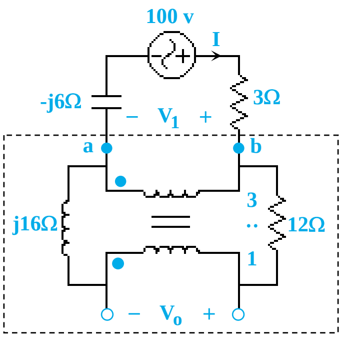
$$L_{eq}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=\frac{3\times3-1^2}{3+3-2}=2\,mH\quad\Rightarrow\quad\tau=\frac{L_{eq}}{R_{th}}=\frac{2mH}{\frac{25}{8}\Omega}=0/64\,m\sec$$

مثال ۶۹: در مدار مقابل مقدار V_o بر حسب ولت کدام است؟



۱) ۲۵∠۸°
۲) ۲۵∠−۸°
۳) ۳۵∠۸°
۴) ۳۵∠−۸°

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکات ذکر شده در جدول موجود در صفحات قبل، برای امپدانس دیده شده از b و a داریم:



$$Z(a,b)=\frac{12+j16}{(1-\frac{n_2}{n_1})^2}\quad,\quad n_2=1\quad,\quad n_1=3$$

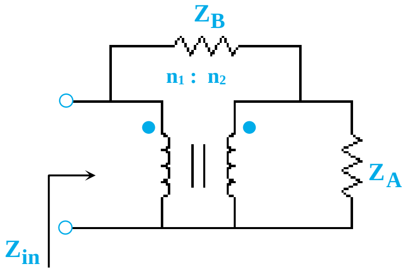
$$\Rightarrow\quad Z(a,b)=\frac{12+j16}{(1-\frac{1}{3})^2}=\frac{9}{4}\times(12+j16)=(27+j36)\Omega$$

$$\Rightarrow\quad I=\frac{100}{27+j36+3-j6}=\frac{100}{30+j30}(A)$$

$$\Rightarrow V_1 = I \times Z_{ab} = \frac{100}{30+j30} \times (27+j36) = \frac{10(9+j12)}{1+j}\ (v)$$

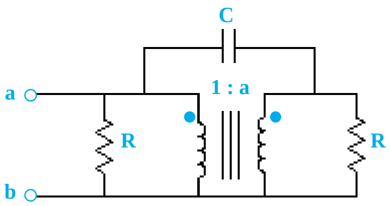
$$V_o = \frac{V_1}{3} = \frac{10(3+j4)}{1+j} = \frac{10 \times 5\angle 53^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{50}{\sqrt{2}}\angle 8^\circ \simeq 35\angle 8^\circ\ (v)$$

نکته۵: در صورتی که امپدانس‌های Z_A و Z_B در بالا و خروجی یک ترانسفورمر قرار گیرد، رابطه Z_{in} یا همان امپدانس دیده شده از اولیه ترانسفورمر به صورت زیر است:



$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{a^2}{Z_A} + \frac{(a-1)^2}{Z_B}} \quad , \quad a = \frac{n_2}{n_1}$$

مثال۷۰: در مدار شکل زیر اگر امپدانس دیده شده از سرهای a و b برابر با $\frac{R}{2}$ باشد، مقدار a برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)



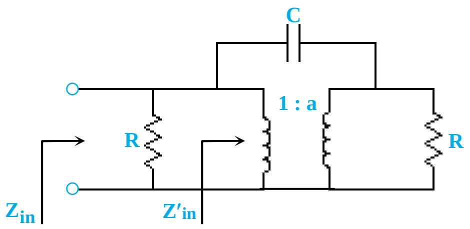
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{2}C$

۳) ۱

۴) $2C$

پاسخ: گزینه «۳» **روش اول:** مطابق نکته گفته شده داریم:

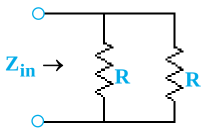


$$Z_{in} = R \| Z'_{in} = \frac{R}{2} \qquad Z'_{in} = \frac{1}{\frac{a^2}{R} + \frac{(a-1)^2}{-jX_C}}$$

با توجه به اینکه امپدانس Z_{in} در صورت سؤال ارتباطی با مقدار ظرفیت خازن ندارد، لذا در رابطه Z'_{in}، باید ضریب X_C صفر باشد. بنابراین $a = 1$ خواهد شد. حال داریم:

$$Z'_{in} = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R \quad \Rightarrow \quad Z_{in} = R \| R = \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

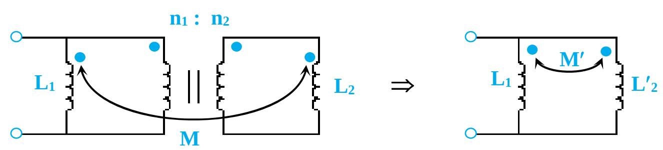
روش دوم: در صورتی که $Z_{in} = \frac{R}{2}$ باشد، باید a برابر یک باشد تا جریان خازن صفر شده (زیرا ولتاژ دو سر آن صفر می‌شود) و داشته باشیم:



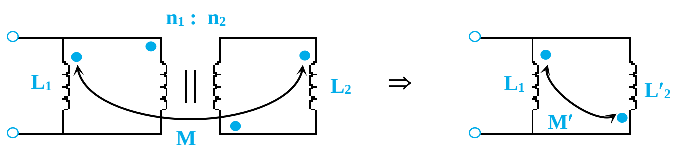
$$Z_{in} = \frac{R}{2}$$

قانون انعکاس امپدانس برای سلف‌های دارای تزویج

در صورتی که در مدار دو سلف با القای متقابل وجود داشته باشد و یکی از آنها در اولیه ترانسفورمر و دیگری در ثانویه ترانسفورمر باشد، با استفاده از روابط موجود در جدول زیر می‌توان ترانسفورمر را حذف کرد و مدار را ساده نمود.



$$M' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot M \qquad L'_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot L_2$$



$$M' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot M \qquad L'_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot L_2$$