مدرسان شریف

فصل اول

«بردارها»

درسنامه (۱): مفاهیم اولیه

در این بخش، به بررسی بردارها و دستگاه‌های مختصات می‌پردازیم که تقریباً در تمامی شاخه‌های فیزیک ظاهر می‌شوند و در برخی از شاخه‌ها مانند الکترومغناطیس نقش اساسی ایفا می‌کنند.

تعریف دقیق بردار: ارائه‌ی تعریف دقیقی از بردارها امکان تعمیم به تانسورها را نیز در بردارد. از نظر فیزیکی انتظار می‌رود که توصیف ارائه شده ربطی به انتخاب دستگاه مختصات نداشته باشد. لذا انتظار داریم با فرض **همسانگردی فضا** پیش می‌رویم. با حالت دو بعدی شروع می‌کنیم. اگر محورهای مختصات را به اندازه‌ی φ و در جهت پادساعتگرد حول محور z دوران دهیم، مؤلفه‌های یک بردار به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$A'_x = A_x \mathrm{Cos}\varphi + A_y \mathrm{Sin}\varphi \qquad A'_y = -A_x \mathrm{Sin}\varphi + A_y \mathrm{Cos}\varphi$$

مؤلفه‌های تبدیل یافته در دستگاه مختصات جدید

این تبدیل را می‌توان از روی شکل هندسی به دست آورد، اما یک قدم مهم را در اینجا برمی‌داریم و این دو رابطه را به عنوان **تعریف یک بردار** در نظر می‌گیریم.

بعد از دوران دستگاه مختصات می‌توان نوشت:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$
$$\vec{A'} = A'_x \hat{i} + A'_y \hat{j}$$

بزرگی یک بردار یعنی، $\sqrt{A_x^{۲} + A_y^{۲}}$ تحت چرخش دستگاه، **ناوردا** باقی می‌ماند؛ یعنی مقدارش تغییر نمی‌کند. در یک فضای N بعدی، کمیت V_j را مؤلفه‌های یک بردار N بعدی می‌نامیم اگر و فقط اگر مقدار آنها نسبت به محورهای چرخیده به کمک رابطه‌ی زیر داده شود:

$$V'_i = \sum_{j=۱}^{N} a_{ij} V_j \ ، \ a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

α: زاویه $\vec{A}$ با محور x ، β: زاویه $\vec{A}$ با محور y ، γ: زاویه $\vec{A}$ با محور Z.

$$\vec{A}: \begin{cases} A_x = A\cos\alpha \\ A_y = A\cos\beta \\ A_z = A\cos\gamma \end{cases}$$

$\mathrm{Cos}\alpha$، $\mathrm{Cos}\beta$ و $\mathrm{Cos}\gamma$ را کسینوس‌های هادی می‌گوییم.

به یاد داشته باشید که فقط و فقط در دستگاه مختصات دکارتی خواهیم داشت:

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

$$a_{ij} = \cos(x'_i \ , \ x_j) = \cos(\theta_{ij}) \qquad ; \qquad \theta_{ij} : x'_i \ , \ x_j \ \text{زاویه بین}$$

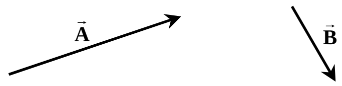
به a_{ij} ها **کسینوس‌های هادی** می‌گوییم و در رابطه‌ی تعامد $\sum_i a_{ij}\,a_{ik} = \delta_{jk}$ صدق می‌کنند که $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$ دلتای کرونکر است.

به عنوان مثال در فضای دو بعدی، مؤلفه‌های تبدیل یافته از روابط: $A'_x = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi \quad , \quad A'_y = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$

به دست می‌آیند: $a_{11} = \cos\varphi \quad a_{12} = \sin\varphi \quad a_{21} = -\sin\varphi \quad a_{22} = \cos\varphi$

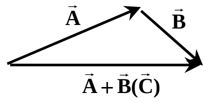
و از رابطه‌ی تعامد، با $j = k = 2$ خواهیم داشت: $\sum_{i=1}^{2} a_{i2}a_{i2} = 1 \;\Rightarrow\; a_{12}^2 + a_{22}^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

تعریف شهودی بردارها: بیان یک تعریف هندسی و شهودی می‌تواند درک بردارها را ساده‌تر کند. می‌توان گفت هر کمیت دارای **اندازه** و **جهت**، بردار است. یک بردار را در مفهوم ساده و شهودی می‌توان با یک پیکان نمایش داد.



جهت این پیکان، جهت بردار و طول آن، اندازه بردار را نمایش می‌دهد.

جمع بردارها



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

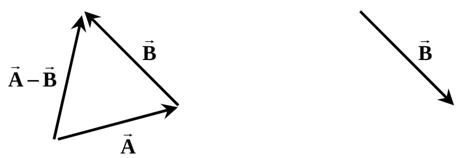
جمع بردارها دارای خواص جابه‌جایی و شرکت‌پذیری است:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \qquad \vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}$$

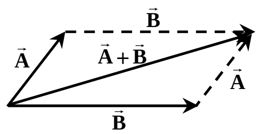
تفریق بردارها: برای تفریق بردارها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$

یعنی $\vec{A}$ را با $-\vec{B}$ جمع می‌کنیم. برای رسم $-\vec{B}$ برداری موازی و هم‌اندازه ولی در خلاف جهت $\vec{B}$ رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:

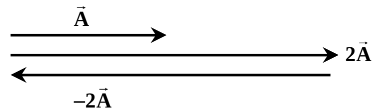


روش متوازی‌الاضلاع: متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهیم. قطری از متوازی الاضلاع که ابتدایش منطبق بر ابتدای دو بردار اولیه است مجموع دو بردار است.



روش متوازی الاضلاع: در مورد تفریق بردارها در روش متوازی‌الاضلاع، قطری که دو انتهای بردارها را به هم وصل می‌کند و ابتدایش منطبق بر انتهای $\vec{B}$ است بردار تفریق است.

ضرب اسکالر در بردار: می‌توان هر عدد حقیقی را در یک بردار ضرب کرد. حاصل، برداری است با طولی که برابر با حاصل‌ضرب آن عدد در طول اولیه بردار است. اگر عدد مثبت باشد، حاصل، برداری هم‌جهت با بردار اولیه است و اگر منفی باشد جهت برعکس می‌شود. به عنوان مثال:



در یک دستگاه مختصات اگر انتهای بردار، دارای مختصات $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ باشد، آنگاه آن بردار را با مختصات نقطه‌ی انتهایی‌اش یعنی، $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ نمایش دهیم. به این سه عدد، مؤلفه‌های بردار نیز می‌گویند. اگر این بردار با سه محور x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ را بسازد و مؤلفه‌هایش $\left(A_x, A_y, A_z\right)$ باشد، طول آن را با A نمایش دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$A_x = A\text{Cos}\alpha \qquad A_y = A\text{Cos}\beta \qquad A_z = A\text{Cos}\gamma$$

برای این سه زاویه داریم: $\text{Cos}^2\alpha+\text{Cos}^2\beta+\text{Cos}^2\gamma=1$. به این کسینوس‌ها، **کسینوس‌های هادی** می‌گوییم. با توجه به اینکه طول بردار A در رابطه‌ی $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$ صدق می‌کند، پس خواهیم داشت:

$$A=[A^2\cos^2\alpha+A^2\cos^2\beta+A^2\cos^2\gamma]^{\frac{1}{2}}=A[\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma]^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین قانون کسینوس‌ها، نتیجه‌ی رابطه‌ی طول بردار است.

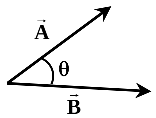
بردار $\vec{A}$ را به صورت زیر بر حسب بردارهای یکه سه‌بعدی می نویسیم (در دستگاه دکارتی): $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

پس خواص زیر را خواهیم داشت:

جمع: $\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}\quad,\quad \alpha\vec{A}=\alpha A_x\hat{i}+\alpha A_y\hat{j}+\alpha A_z\hat{k}$

تفریق: $\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}$

ضرب اسکالر یا نقطه‌ای: این ضرب از نظر هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\text{Cos}\theta$$

که $|\vec{A}|$ اندازه‌ی $\vec{A}$ است و θ زاویه‌ی بین دو بردار است هنگامی که ابتدای هر دو بر هم منطبق باشند. همچنین می‌توان برحسب مؤلفه‌ها این ضرب را بازنویسی کرد: $\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

برای بردارهای یکه‌ی $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ با استفاده از تعریف هندسی خواهیم داشت: $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$

باقی حاصل‌ضرب‌ها صفر است.

ضرب اسکالر دارای خواص مقابل است: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}\qquad \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

اگر ضرب اسکالر دو بردار غیر صفر، برابر با صفر باشد، می‌گوییم آن دو بردار **متعامد** هستند و $\text{Cos}\theta=0$ است و به این معناست که $\theta=\frac{\pi}{2}$.

تذکر۱: در حالت کلی $\vec{A}.\vec{B}=0$ نتیجه نمی‌دهد که یا $|\vec{A}|=0$ یا $|\vec{B}|=0$.

ضرب اسکالر، یک کمیت **ناوردا** است. یعنی مقدار آن تحت دوران یکسان باقی می‌ماند. برای بررسی بهتر، این رابطه را اثبات می‌کنیم. بنابراین داریم:

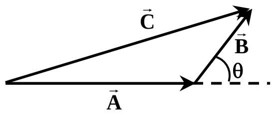
$$\sum_k A'_kB'_k=\sum_\ell\sum_i\sum_j a_{\ell i}a_{\ell j}A_iB_j=\sum_j\sum_i\left(\overbrace{\sum_\ell a_{\ell i}a_{\ell j}}^{\delta_{ij}}\right)A_iB_j=\sum_{i,j}\delta_{ij}A_iB_j=\sum_i A_iB_i$$

ضرب اسکالر یک کمیت اسکالر یا ناوردا است.

بردار $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ را در نظر می‌گیریم و در خودش ضرب نقطه‌ای می‌کنیم: $\vec{C}.\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2\vec{A}.\vec{B}$

برای ضرب داخلی داریم: $\vec{A}.\vec{B}=\frac{1}{2}(|\vec{C}|^2-|\vec{A}|^2-|\vec{B}|^2)$

با ارائه‌ی یک تعبیر هندسی از این رابطه به **قانون کسینوس‌ها** می‌رسیم:

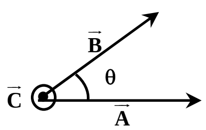


$$C^2=A^2+B^2+2AB\text{Cos}\theta$$

ضرب برداری: این ضرب به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}\Rightarrow|\vec{C}|=|\vec{A}||\vec{B}|\text{Sin}\theta$

θ زاویه‌ی بین دو بردار است هنگامی که ابتدایشان بر هم منطبق باشد.

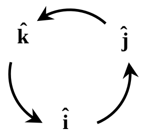
$\vec{C}$ بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است و جهت آن از قانون دست راست معلوم می‌گردد. در این مثال بردار $\vec{C}$ برونسو است. یعنی از صفحه به سوی خواننده است!



با استفاده از این تعریف برای بردارهای یکه خواهیم داشت: $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

ضرب برداری دارای خواص روبرو است: $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}\qquad \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

تذکر۲: برای بردارهای یکه می‌توان دیاگرام روبرو را رسم کرد:



با حرکت در جهت پیکان‌ها، حاصل‌ضرب مثبت و در خلاف آنها منفی است. به عنوان مثال:

$$\begin{cases} i\times\hat{j}=\hat{k} \\ \hat{j}\times\hat{k}=i \\ \hat{k}\times\hat{j}=\hat{j} \end{cases}$$

می‌توان حاصل ضرب خارجی در سه بعد را با پاسخ یک دترمینان، معادل گرفت، اگر $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$.

$$\vec{C}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=\hat{i}\left(A_yB_z-A_zB_y\right)+\hat{j}\left(A_zB_x-A_xB_z\right)+\hat{k}\left(A_xB_y-A_yB_x\right)$$

به عنوان مثال برای $\vec{A}=۲\hat{i}-۲\hat{j}\ ,\ \vec{B}=\hat{j}+\hat{k}$ داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=\hat{i}(-۲)-\hat{j}(۲)+\hat{k}(۲)=-۲\hat{i}-۲\hat{j}+۲\hat{k}$$

به طور کلی چون $|\vec{A}\times\vec{B}|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\mathrm{Sin}\theta$ است، خواهیم داشت:

$$\left|\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right|^{۲}=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=|A|^{۲}|B|^{۲}\mathrm{Sin}^{۲}\theta\mathrm{Cos}۰=|A|^{۲}|B|^{۲}\left(۱-\mathrm{Cos}^{۲}\theta\right)=|A|^{۲}|B|^{۲}-|A|^{۲}|B|^{۲}\mathrm{Cos}^{۲}\theta=|A|^{۲}|B|^{۲}-\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^{۲}$$

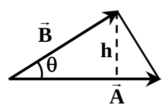
دقت کنید در تساوی اول در رابطه‌ی فوق، عامل $\sin^{۲}\theta$ از ضرب خارجی $\vec{A}\times\vec{B}$ و فاکتور $\cos\theta$، از ضرب داخلی دو بردار یکسان به دست می‌آید.
$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})$

و یا می‌توان نوشت: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^{۲}+\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^{۲}=|A|^{۲}|B|^{۲}$

و همچنین برای هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ داریم: $\vec{A}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=۰=\vec{B}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

زیرا از نقطه‌نظر هندسی، $\vec{A}\times\vec{B}$ بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است، بنابراین حاصل‌ضرب داخلی آن در هر یک از بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر با صفر می‌شود.

تذکر۳: مساحت مثلث که با بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ساخته می‌شود برابر است با: $S_{\Delta}=\dfrac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{۲}$



ضرب‌های سه‌گانه: $\vec{A}\times\vec{B}$ یک بردار است، لذا می‌توان ضربی مثل $\vec{C}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ تعریف کرد که حاصل آن عدد است. همچنین می‌توان ضربی مثل $\vec{C}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ که حاصل آن بردار است، تعریف کرد. به ضرب اول، ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر و به ضرب دوم، ضرب سه‌گانه‌ی برداری می‌گوییم.

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر را می‌توان به صورت مقابل نمایش داد:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

از جمله خواص دترمینان این است که با تعویض سطر و یا ستون علامت منفی می‌گیرد، لذا خواهیم داشت:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=-\vec{A}.(\vec{C}\times\vec{B})=-\vec{C}.(\vec{B}\times\vec{A})=-\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})$$

ضرب سه‌گانه با ترتیب دوره‌ای تغییر نمی‌کند، یعنی می‌توان جای ضرب . و × را عوض کرد: $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$

به عنوان مثال: $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=-\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})=\vec{B}.(-\vec{A}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})$

حاصل این ضرب برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که سه بردار $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ تشکیل می‌دهند.

فصل دوم

«تانسور و ماتریس»

درسنامه (۱): ماتریس

ماتریس‌ها ابزارهایی پرقدرت برای حل مسائل خطی هستند. یک ماتریس، یک عملگر خطی است که روی یک فضای n بعدی اثر می‌کند و بطور کلی یک ماتریس $n\times m$ یک نگاشت از یک فضای خطی n بعدی، به یک فضای خطی m بعدی است. ماتریس را به صورت درایه‌ی زیر نمایش می‌دهیم. اگر تعداد سطرها را با n و تعداد ستون‌ها را با m نمایش دهیم، آنگاه می‌گوییم ماتریس A از مرتبه‌ی $n\times m$ است. به a_{ij} درایه‌ی روی سطر iام و ستون jام می‌گوییم.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

تساوی: دو ماتریس A و B را به شرطی برابر می‌دانیم و با $A=B$ نمایش می‌دهیم که هم‌مرتبه باشند و درایه به درایه با هم برابر باشند، یعنی به ازای هر ij داشته باشیم: $a_{ij}=b_{ij}$

اعمال اصلی روی ماتریس‌ها: دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی A و B را می‌توان درایه به درایه با هم جمع کرد که حاصل ماتریس C خواهد بود.

$$C=A+B\ ,\ C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

تذکر۱: ماتریس C نیز هم‌مرتبه با A و B است و جمع ماتریس تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیر است. همچنین عضو خنثی در جمع ماتریس‌ها، ماتریس صفر است. $A+B=B+A$

$$A+O=A\ ,\ A+(B+C)=(A+B)+C$$

ضرب اسکالر در ماتریس: می‌توان هر عدد دلخواه را در یک ماتریس ضرب کرد؛ بنابراین حاصل، ماتریسی با همان مرتبه است که تمام درایه‌هایش، در آن عدد ضرب شده است. در حالی‌که ضریب دترمینان فقط در یک سطر یا ستون آن ضرب می‌شد و خاصیت تعویض‌پذیری دارد.

ضرب ماتریس‌ها: یک ماتریس A با مرتبه $m\times n$ را می‌توان در ماتریس B با مرتبه $n\times k$ ضرب کرد که حاصل ماتریس C با مرتبه $m\times k$ است که $C_{ij}=\sum_{\ell=1}^{n}a_{i\ell}b_{\ell j}$ و این ضرب، به صورت $C=AB$ نمایش داده می‌شود.

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد یعنی: $AB\neq BA$

ضرب ماتریس‌ها خاصیت پخشی نسبت به جمع دارد یعنی: $A(B+C)=AB+AC$.

عضو خنثی در ضرب ماتریس‌ها فقط در ماتریس‌های مربعی و ماتریس یکانی وجود دارد.

نکته۱: اگر $AB=0$ باشد لزوماً A یا B صفر نیستند.

اگر $f(x)$ یک تابع باشد و A یک ماتریس، حاصل $f(A)$ را می‌توان به کمک بسط تیلور به دست آورد بسط‌های مهم عبارت‌اند از:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots \qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\dots \qquad \sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\exp(x)=\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

بسط کلی سه بعدی تیلور به صورت مقابل است:

$$f(\vec{x}+\vec{a})=e^{\vec{a}.\vec{\nabla}}f(\vec{x})=\sum\frac{(\vec{a}.\vec{\nabla})^n}{n!}f(\vec{x})$$

که در یک بعد می‌توان نوشت:

$$f(x+a)=e^{a_x\frac{d}{dx}}f(x)=\sum\frac{(a\frac{d}{dx})^n}{n!}f(x)$$

و می‌توان بسط‌های بالا را از این رابطه استخراج کرد.

مثال۱: حاصل $\exp\left[\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}\right]$ برابر است با:

۱) $\begin{pmatrix}\cos۱&\sin۱\\\sin۱&\cos۱\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}\sinh۱&\cosh۱\\\cosh۱&\sinh۱\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}\cosh۱&\sinh۱\\\sinh۱&\cosh۱\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}\sin۱&\cos۱\\\cos۱&\sin۱\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که:

$$e^A=۱+A+\frac{A^۲}{۲!}+\frac{A^۳}{۳!}+\cdots$$

بنابراین اگر $A=\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}$ باشد، داریم:

$$A^۲=\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{pmatrix}\quad,\quad A^۳=\begin{pmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}=A$$

$$A^۴=A^۲A^۲=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\quad,\quad A^۵=AA^۴=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$e^A=(۱+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۵!}+\cdots)\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}+(۱+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۴!}+\cdots)\begin{pmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\sinh z=z+\frac{z^۳}{۳!}+\frac{z^۵}{۵!}+\cdots\\\cosh z=۱+\frac{z^۲}{۲!}+\frac{z^۴}{۴!}+\cdots\end{cases}$$

با استفاده از تعریف توابع هذلولوی خواهیم داشت:

$$e^A=\begin{pmatrix}۰&\sinh۱\\\sinh۱&۰\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cosh۱&۰\\۰&\cosh۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh۱&\sinh۱\\\sinh۱&\cosh۱\end{pmatrix}$$

◆ ◆ ◆ ◆

ضرب مستقیم (یا ضرب تانسوری): برای دو ماتریس مربعی $A_{m\times m}$ و $B_{n\times n}$، می‌توان ضرب مستقیم $C=A\otimes B$ را تعریف کرد که $mn\times mn$ است.

با یک مثال این مسأله روشن می‌شود. اگر $A=\begin{pmatrix}۱&-۱\\۲&۳\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}$ باشد، آنگاه داریم:

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}۱B&(-۱)B\\۲B&۳B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}&(-۱)\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}\\۲\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}&۳\begin{pmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰&۱&۰&-۱\\۱&۰&-۱&۰\\۰&۲&۰&۳\\۲&۰&۳&۰\end{pmatrix}$$

ضرب مستقیم دو ماتریس شرکت‌پذیر است اما دارای ویژگی جابه‌جایی نیست.

ضرب معمولی دو ماتریس نیز مانند ضرب مستقیم شرکت‌پذیر است، اما جابجاپذیر نیست.

ماتریس‌های خاص: بعضی از ماتریس‌ها مهم هستند و نام‌های خاصی دارند، لذا بهتر است آنها را بشناسیم. اگر ماتریس یک ستون و n سطر داشته باشد آن را **بردار ستونی** می‌خوانند و با $|x>$ نمایش می‌دهند. به همین ترتیب اگر ماتریس n ستون و یک سطر داشته باشد، آن را **بردار سطری** می‌خوانند و با $<x|$ نمایش می‌دهند.

واضح است که اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد و $|x>$ یک ماتریس $n\times ۱$ و $<x'|$ یک ماتریس $۱\times n$ باشد، ضرب‌های زیر معنی دارند.

$$A|x>\qquad <x|A\qquad |x><x'|\qquad <x'|x>$$

ماتریس واحد: ماتریسی است که درایه‌های آن δ_{ij} هستند $I=\begin{pmatrix}\ddots & O\\ O & \ddots\end{pmatrix}$ و دارای خاصیت مهم مقابل است: $AI=IA=A$

اگر همه‌ی عناصر ماتریس صفر باشند، آن را **ماتریس صفر** می‌نامیم و با O نمایش می‌دهیم: $AO=OA=O$

به درایه‌های a_{ii}، عناصر روی **قطر اصلی** می‌گوییم و یک ماتریس مربعی که تمام عناصر غیر قطری آن صفر است، ماتریس قطری می‌گویند. اگر A و B هر دو قطری باشند آنگاه $AB=BA$ است.

رد (trace): مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس را رد ماتریس می‌نامند.

رد حاصل‌ضرب دو ماتریس از ترتیب آن حاصل‌ضرب، مستقل است؛ رد را با Tr نمایش می‌دهیم: $Tr(AB)=Tr(BA)$

به طور کلی برای هر تعداد ماتریس، رد با ترتیب دوره‌ای عوض نمی‌شود به عنوان مثال: $Tr(ABC)=Tr(BCA)=Tr(CAB)$

رد یک عملگر خطی است به این معنا که اگر A و B ماتریس و α و β عدد باشند خواهیم داشت: $Tr(\alpha A+\beta B)=\alpha Tr(A)+\beta Tr(B)$

ماتریس متقارن و پادمتقارن: یک ماتریس مربعی را متقارن می‌نامیم، هرگاه با تعویض جای سطر و ستون، تغییر نکند یعنی: $A_{ij}=A_{ji}$.

یک ماتریس مربعی را پادمتقارن می‌نامیم، اگر با تعویض سطر و ستون، قرینه شود یعنی: $A_{ij}=-A_{ji}$.

هر ماتریس دلخواه را می‌توان بر حسب یک جزء متقارن و یک جزء پادمتقارن نوشت:

$$B_{ij}=\underbrace{\frac{۱}{۲}(B_{ij}+B_{ji})}_{\text{متقارن}}+\underbrace{\frac{۱}{۲}(B_{ij}-B_{ji})}_{\text{پاد متقارن}}$$

وارون یک ماتریس: یک ماتریس مربعی دارای وارون است به شرطی که دترمینان آن غیرصفر باشد. وارون ماتریس A را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند که $A^{-۱}A=AA^{-۱}=1$.

نکته۲: برای یک ماتریس ۲×۲ داریم:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

برای وارون ماتریس ویژگی‌های روبه‌رو را داریم:

$$\begin{cases}۱\to (A^{-۱})^{-۱}=A\\ ۲\to (CA^{-۱})=C^{-۱}A^{-۱} \qquad C\in \not{C}\end{cases}$$

علامت ~ به معنای ترانهاده می‌باشد که در زیر توضیح داده می‌شود.

$$۳\to (\tilde{A})^{-۱}=\widetilde{(A^{-۱})}$$

$$۴\to \det(A^{-۱})=\det(A)^{-۱}$$

مثال۲: حاصل $Tr(A^{-۱}BA)$، اگر A و B به صورت زیر باشند برابر است با:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}۱ & ۴ & ۲\\ -۱ & ۵ & ۲\\ ۲ & ۳ & -۴\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}۰ & -۱ & ۴\\ ۱ & ۳ & ۵\\ ۰ & ۱ & -۲\end{pmatrix}$$

۱) ۲
۲) ۱-
۳) صفر
۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه نیاز به محاسبه‌ی $A^{-۱}$ نیست. از خواص رد داریم:

$$Tr(A^{-۱}BA)=Tr(AA^{-۱}B)=Tr(IB)=Tr(B)=Tr\begin{pmatrix}۰ & -۱ & ۴\\ ۱ & ۳ & ۵\\ ۰ & ۱ & -۲\end{pmatrix}=۰+۳-۲=۱$$

ترانهاده ماتریس: اگر سطرها و ستون‌های ماتریس را با هم جابه‌جا کنیم ترانهاده ماتریس به دست می‌آید. ترانهاده A را با $\tilde{A}$ نشان می‌دهند.

$$\tilde{A}_{ij}=A_{ji}$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow \tilde{A}=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$$

همان‌طور که دیده می‌شود عناصر روی قطر اصلی هر ماتریس پس از ترانهاده کردن بدون تغییر باقی می‌مانند. $\tilde{A}_{ii}=A_{ii}$

ماتریس‌های متعامد: هرگاه ترانهاده یک ماتریس با معکوس آن برابر باشد به آن ماتریس متعامد می‌گوییم.

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I\Rightarrow (AA^{-1})_{ij}=(A\tilde{A})_{ij}=\sum_k A_{ik}\,\tilde{A}_{kj}=\sum_k A_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}$$

۱ـ اثبات: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $\quad (AB)^{-1}AB=B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}B=1$

۲ـ اثبات: $\widetilde{AB}=\tilde{B}\tilde{A}$ $\quad (\widetilde{AB})_{ij}=(AB)_{ji}=\sum_k A_{jk}B_{ki}=\sum_k \tilde{B}_{ik}\tilde{A}_{kj}=(\tilde{B}\tilde{A})_{ij}$

۳ـ ماتریس A را متقارن می‌خوانیم، اگر $A=\tilde{A}$ باشد و آن را پادمتقارن می‌خوانیم، اگر $\tilde{A}=-A$، زیرا واضح است که طبق تعریف ماتریس متقارن خواهیم داشت:

$$A_{ij}=\tilde{A}_{ji}=A_{ji}\Rightarrow \tilde{A}=A$$

$$A_{ij}=\tilde{A}_{ji}=-A_{ji}\Rightarrow \tilde{A}=-A$$

۴ـ حاصل‌ضرب دو ماتریس متعامد، متعامد است اگر A و B متعامد باشند. $(\widetilde{AB})=\tilde{B}\tilde{A}=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$

۵ـ اگر A متعامد باشد، قدرمطلق دترمینان آن یک است؛ زیرا $|\tilde{A}|=|A|$ و $\left|A\tilde{A}\right|=|1|=\left|A^2\right|\Rightarrow \|A\|=1$

مثال ۳: برای ماتریس $A=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$، حاصل عبارت $\exp(\frac{i}{2}bA)$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\begin{pmatrix}\cos\frac{b}{2}&\sin\frac{b}{2}\\ \sin\frac{b}{2}&\cos\frac{b}{2}\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}\cos\frac{b}{2}&i\sin\frac{b}{2}\\ i\sin\frac{b}{2}&\cos\frac{b}{2}\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}\cos\frac{b}{2}&\sin\frac{b}{2}\\ -\sin\frac{b}{2}&\cos\frac{b}{2}\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}\cos\frac{b}{2}&i\sin\frac{b}{2}\\ -i\sin\frac{b}{2}&\cos\frac{b}{2}\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم $z=a+ib$ هم ریخت $\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ می‌باشد، در این تست $a=0$ و $b=-i$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت: $A=0+i(-i)=1$

$$e^{\frac{i}{2}bA}=e^{i\frac{b}{2}}=\cos\frac{b}{2}+i\sin\frac{b}{2}$$

که ماتریس هم ریخت آن $\begin{pmatrix}\cos\frac{b}{2}&\sin\frac{b}{2}\\ -\sin\frac{b}{2}&\cos\frac{b}{2}\end{pmatrix}$ است.

مثال ۴: اگر وارون ماتریس $A-\lambda B$ را که در آن λ عددی ثابت و A و B ماتریس‌های $N\times N$ هستند به صورت بسط $(A-\lambda B)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m L_m$ نوشته شود، کدام رابطه درست است؟ (سراسری ۹۳)

۱) $L_m=(A^{-1}B)^m$ و $L_0=A^{-1}$ ۲) $L_m=(A^{-1}B)^m A^{-1}$ و $L_0=A$

۳) $L_m=(A^{-1}B)^m$ و $L_0=1$ ۴) $L_m=(A^{-1}B)^m A^{-1}$ و $L_0=A^{-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» رابطه‌ی روبه‌رو بدیهی است: $I=(\lambda BA^{-1})^0+\{(\lambda BA^{-1})+(\lambda BA^{-1})^2+\ldots-(\lambda BA^{-1})-(\lambda BA^{-1})^2-\ldots\}$

چرا که داخل $\{\}$ دو عبارت مساوی کم می‌شوند و تنها عبارت بالا که باقی می‌ماند $(\lambda BA^{-1})^0$ است که آن هم I است. حالا عبارت بالا را به فرم سری می‌نویسیم:

$$I=\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda BA^{-1})^m-\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda BA^{-1})^{m+1}=\sum_{m=0}^{\infty}[(\lambda BA^{-1})^m-(\lambda BA^{-1})^{m+1}]=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m[(BA^{-1})^m-\lambda(BA^{-1})^{m+1}]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m[\underbrace{(BA^{-1})(BA^{-1})\ldots(BA^{-1})}_{m}-\lambda\underbrace{(BA^{-1})\ldots(BA^{-1})}_{m+1}]$$

در بالا $(BA^{-1})^m$ را به صورت حاصل‌ضرب m تا (BA^{-1}) نوشتیم و همین‌طور $(BA^{-1})^{m+1}$. حالا در جمله اول یک B از سمت چپ و یک A^{-1} از سمت راست جدا می‌کنیم. برای جمله دوم هم همین‌طور $I=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m[B\underbrace{(A^{-1}B)\ldots(A^{-1}B)}_{m-1}A^{-1}-\lambda B\underbrace{(A^{-1}B)\ldots(A^{-1}B)}_{m}A^{-1}]$.

مدرسان شریف

فصل سوم

«دنباله و سری»

درسنامه (۱): سری

سری‌های نامتناهی: سری‌های نامتناهی در ریاضیات و فیزیک، کاربردهای چشم‌گیری دارند؛ مفهوم مجموع بی‌نهایت جمله به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش داده می‌شود.

مجموع جزئی i جمله به این صورت تعریف می‌شود: $S_i = \sum_{n=1}^{i} a_i$

اگر مجموع جزئی S_i در حد $i \to \infty$ همگرا شود، یعنی $\lim_{i\to\infty} S_i = S$ آنگاه سری را **همگرا** می‌نامیم و می‌گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به S همگرا می‌شود.

شرط لازم برای همگرایی آن است که برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ شود؛ اما این شرط کافی نیست، یعنی هر سری که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ شود الزاماً همگرا نیست. به عنوان مثال سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست در حالی که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

یک معیار مهم برای همگرایی، استفاده از **آزمون کوشی** است. دقت کنید که S_iها تشکیل یک دنباله می‌دهند و شرط لازم و کافی برای همگرایی این دنباله آن است که به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد معین نظیر $N > 0$ وجود داشته باشد که به ازای $i, j > N$ داشته باشیم: $\left|S_i - S_j\right| < \varepsilon$

هرگاه دنباله‌ی مجموع‌های جزئی به $\pm\infty$ نزدیک شود یا نوسانی باشد، آن را **واگرا** می‌گوییم. به عنوان مثال سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ نوسانی و واگراست.

سری هندسی: جمله عمومی یک تصاعد هندسی به صورت $a_n = ar^n$ است. (r قدر نسبت هندسی) سری هندسی به صورت زیر است:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{n} a\, r^n = \frac{(r^n - 1)a}{r - 1}$$

$$n \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1 - r} & |r| < 1 \\ \infty & r > 1 \end{cases}$$

مثال۱: حد سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ برابر است؟

۱) سری واگراست. ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» سری به صورت $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ است که یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{2}{3}$ است. در نتیجه جمله‌ی اول آن برابر با یک است و چون $\frac{2}{3} < 1$ است، این سری همگرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

آزمون‌های همگرایی

۱ـ آزمون مقایسه: اگر دو سری $\sum_n a_n$ و $\sum_n b_n$ را داشته باشیم به طوری که، $|a_n| \le |b_n|$ آنگاه:

اگر $\sum_n b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_n a_n$ نیز همگرا است.

اگر $\sum_n a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_n b_n$ نیز واگرا است.

می‌دانیم سری $\sum_n \frac{۱}{n}$ واگرا است. پس سری $\sum_n n^{-p}$ به ازای $P \le ۱$ واگرا است؛ زیرا برای $P \le ۱$، $\frac{۱}{n} \le n^{-P}$.

۲ـ آزمون ریشه: اگر به ازای همه مقادیر به اندازه‌ی کافی بزرگ n، داشته باشیم $(a_n)^{\frac{۱}{n}} \le r < ۱$ که r باید مستقل از n باشد، در این صورت $\sum_n a_n$ همگراست و اگر $(a_n)^{\frac{۱}{n}} \ge ۱$ باشد در این صورت $\sum_n a_n$ واگراست.

۳ـ آزمون نسبت: اگر به ازای همه‌ی مقادیر به حد کافی بزرگ n، داشته باشیم $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \le r < ۱$ که r مستقل از n است، در این صورت $\sum_n a_n$ همگراست و اگر $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \ge ۱$ باشد، آنگاه $\sum_n a_n$ واگراست.

نکته۱: این آزمون را می‌توان به صورت حدی نیز بیان کرد: اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} < ۱$ باشد، سری همگراست؛ اگر بزرگ‌تر از یک باشد، سری واگرا است و اگر برابر با یک باشد، آزمون، نتیجه‌بخش نیست.

مثال۲: کدام سری همگراست؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n+۱۰}$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} e^n$ ۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \sqrt{n}$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n}$

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌ی یک واگراست؛ زیرا هر جمله‌ی عمومی، غیر صفر است: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+۱۰} = ۱$. گزینه‌ی ۲ واگراست، زیرا یک سری هندسی با قدر نسبت $e > ۱$ است. گزینه‌ی ۳ نیز واگراست، زیرا یک سری به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-p}$ است که $p = -\frac{۱}{۲}$ است ولی گزینه‌ی ۴ همگراست. زیرا یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲} < ۱$ است. اما راه‌حل بهتر برای حل سؤال این است که شرط لازم سری‌ها را داشته باشد. که گزینه‌های ۱، ۲و۳ $\lim_{n\to\infty} n \ne ۰$ پس شرط لازم را ندارند.

۴ـ آزمون انتگرال: سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ همگراست، اگر $\int_۱^{\infty} dx f(x)$ متناهی باشد و واگراست، اگر این انتگرال نامتناهی باشد.

۵ـ آزمون کومر: یک سری از جملات مثبت a_i و دنباله‌ای از ثوابت متناهی مثبت، چون b_i را در نظر می‌گیریم. اگر برای یک عدد معین N، به ازای همه مقادیر $n \ge N$، داشته باشیم:

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+۱}} - b_{n+۱} \ge C > ۰$$

آنگاه $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ همگراست و اگر داشته باشیم: $b_n \frac{a_n}{a_{n+۱}} - b_{n+۱} \le ۰$ و همچنین $\sum b_i^{-۱}$ واگرا باشد، $\sum_{i=۱}^{n} a_i$ نیز واگراست.

۶ـ آزمون رابه: این آزمون همان آزمون کومر با $b_n = n$ است. اگر $a_n > ۰$ باشد، به ازای همه مقادیر n که $n \ge N$ و در آن N یک عدد صحیح مثبت مستقل از n است، داشته باشیم:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱\right) \ge p > ۱$$

آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست و اگر $n\left(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱\right) \le ۱$ باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

۷ـ آزمون گاوس: اگر به ازای همه مقادیر متناهی n داشته باشیم $a_n > 0$ و $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}$ که $B(n)$ به ازای $n \to \infty$ تابع کرانداری از n باشد، آنگاه $\sum a_n$ به ازای $h > 1$ همگرا و به ازای $h \le 1$ واگراست.

از آزمون گاوس می‌توان نتیجه گرفت که: اگر نسبت $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ به صورت مقابل باشد: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0}$ به ازای $a_1 > b_1 + 1$ همگرایی و به ازای $a_1 \le b_1 + 1$ واگرایی داریم. زیرا داریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0} = \frac{n^2 + b_1 n + b_0 + (a_1 - b_1)n + a_0 - b_0}{n^2 + b_1 n + b_0}$$

رابطه بالا در nهای بزرگ به صورت مقابل در می‌آید:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{(a_1 - b_1)}{n} + \frac{a_0 - b_0}{n^2}$$

همچنین به طور واضح از آزمون گاوس داریم: که اگر $a_1 - b_1 > 1$ باشد همگرا و اگر $a_1 - b_1 \le 1$ باشد، واگراست.

به عنوان یک مثال از این آزمون می‌توانیم همگرایی سری لژاندار را امتحان کنیم. نسبت دو جمله در این سری به این صورت است:

$$\frac{a_{2j}}{a_{2j+2}} = \frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1) - l(l+1)}$$

برای j های بزرگ به صورت مقابل در می‌آید:

$$\frac{a_{2j}}{a_{2j+2}} = \frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1)} = 1 + \frac{1}{j}$$

چون در آزمون گاوس $h = 1$ است، این سری واگراست. یک راه رفع واگرایی، آن است که l طول انتخاب شود تا سری از یک جمله به بعد قطع شود.

نکته۲: سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (Lnn)^q}$ دارای شرایط زیر است:

واگراست $\begin{cases} p < 1 & \text{همه q ها} \\ p = 1 & q \le 1 \end{cases}$ همگراست $\begin{cases} p > 1 & \text{همه q ها} \\ p = 1 & q > 1 \end{cases}$

نکته۳: آزمون کومر و رابه را می‌توان به صورت حدی نیز به کار برد؛ اما باید توجه داشت که:

برای آزمون کومر، $\lim_{n\to\infty} b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - b_{n+1} = \begin{cases} > 0 & \text{همگرا} \\ = 1 & \text{نامعلوم} \\ \le 0 & \text{واگرا} \end{cases}$ و برای آزمون رابه، $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \begin{cases} > 1 & \text{همگرا} \\ = 1 & \text{نامعلوم} \\ < 1 & \text{واگرا} \end{cases}$ را داریم:

سری‌های متناوب

به یک سری که علامت جملات آن یکی در میان عوض می‌شود، سری متناوب می‌گوییم. در سری متناوب به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ اگر $a_n > 0$ باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ شود؛ آنگاه سری مذکور همگراست. به عنوان مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ یک سری همگراست.

$$\sum_n a_n \begin{cases} \text{اگر} \to \sum |a_n| \text{ همگرا باشد} \to \sum a_n \to \text{مطلقاً همگرا است} \\ \text{اگر} \to \sum a_n \text{ همگرا باشد اما } \sum |a_n| \text{ واگرا باشد} \to \text{همگرایی مشروط} \end{cases}$$

جبر سری‌ها: اگر یک سری نامتناهی همگرای مطلق باشد، حاصل جمع سری، به ترتیب جملات آن وابسته نیست و یک سری همگرای مطلق را می‌توان در یک سری همگرای مطلق دیگر ضرب کرد و یک سری دوگانه به دست آورد که حاصل آن، به حاصل‌ضرب حد هر یک از سری‌ها همگراست. این مسأله به ما کمک می‌کند یک سری مطلقاً همگرا را به هر نحو بازآرایی کنیم.

تابع زتای ریمان: دانستیم که برای $p > 1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ همگراست و به حاصل و حد این سری، تابع زتای ریمان مرتبه‌ی p می‌گویند.

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

سری توابع

سری تابع یعنی اینکه جملات یک سری تابعی از یک متغیر حقیقی همچون x باشند؛ مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. رفتار این سری تحت متغیر x به مفاهیم دیگری نظیر **همگرایی یکنواخت** نیازمند است.

همگرایی یکنواخت:

اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N در بازه‌ی $[a,b]$ که $a \le x \le b$ مستقل از x است، وجود داشته باشد، به ازای هر $n \ge N$ ، $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ باشد، آنگاه می‌گوییم سری در بازه‌ی $[a,b]$ همگرای یکنواخت است. برای بررسی همگرایی یکنواخت، آزمون‌هایی وجود دارد، که دو تا از مهم‌ترین‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱ـ آزمون M وایراشتراوس: اگر بتوانیم یک سری از اعداد $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ را تشکیل دهیم که به ازای هر x در بازه $[a,b]$، $M_i \ge |u_i(x)|$ باشد و $\sum_i M_i$ همگرا باشد، سری $\sum u_i(x)$ در $[a,b]$ همگرای یکنواخت است و همچنین همگرای مطلق نیز می‌باشد.

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ را در نظر می‌گیریم. در بازه‌ی $[-1,1]$. به طور واضح به ازای $n > 1$ برای هر عدد در این بازه، $|x^n| < 1$ است.

بنابراین $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ می‌باشد. ولی می‌دانیم که $\sum \frac{1}{n^2}$ یک سری همگراست. لذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ همگرا می‌باشد. در دو نقطه‌ی انتهایی بازه نیز سری به $\sum \frac{1}{n^2}$ و $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ تبدیل می‌شود که هر دو همگرا هستند. لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ همگرای یکنواخت است (در بازه‌ی $[-1,1]$).

۲ـ آزمون آبل: اگر $u_n(x) = a_n f_n(x)$ و $\sum a_n = A$ بوده و همگرا باشد و توابع $f_n(x)$ به ازای هر x درون $[a,b]$ یکنوای نزولی باشند $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ و همچنین کراندار نیز باشند $0 \le f_n(x) \le M$، آنگاه سری در $[a,b]$ همگرای یکنواخت است.

سری‌های همگرای یکنواخت سه خاصیت بسیار مهم دارند:

الف) اگر تک‌تک جملات $u_n(x)$ پیوسته باشند، جمع سری نیز پیوسته است.

ب) اگر تک‌تک جملات $u_n(x)$ پیوسته باشند، می‌توان از سری، جمله به جمله انتگرال گرفت. بنابراین مجموع انتگرال‌ها، برابر است با انتگرال مجموع.

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b dx u_n(x)$$

ج) مشتق مجموع جملات سری، برابر است با مجموع مشتقات. یعنی $\frac{df}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$ به شرطی که $u_n(x)$ و $\frac{du_n(x)}{dx}$ در $[a,b]$ هر دو پیوسته باشند و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$ در $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد.

تذکر: همگرایی یکنواخت و همگرایی مطلق می‌توانند از هم مستقل باشند و وجود یکی بر دیگری دلالت نمی‌کند.

نکته۴: هر سری مثل $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ در بازه‌ای که شامل یک ناپیوستگی $f(x)$ باشد، نمی‌تواند همگرای یکنواخت باشد.

مدرسان شریف

فصل چهارم

«فضاهای برداری»

درسنامه (۱): گروه و فضای برداری

تعریف گروه: یک ساختار جبری روی یک مجموعه زمانی ناتهی است که نسبت به عمل دوتایی * دارای ویژگی‌های زیر باشد.

اگر G یک مجموعه ناتهی و * یک عمل دوتایی باشد، آنگاه G تحت عمل، ستاره‌ی گروه است هرگاه ویژگی‌های زیر را برآورده سازد:

بسته بودن نسبت به عمل * : اگر a و b عضو G باشند، آنگاه $a*b$ نیز عضو G باشد، در نتیجه: $\forall\ a, b\in G\ \to a*b\in G$

۱ـ ویژگی جابه‌جایی: $\forall\ a, b\in G\ \Rightarrow\ a*b=b*a$ که در این صورت معمولاً «*» را با «×» نشان می‌دهند.

۲ـ ویژگی شرکت‌پذیری:

$$\forall\ a, b, c\in G\ \Rightarrow\ a*(b*c)=(a*b)*c$$

$$|a>+(|b>+|c>)=(|a>+|b>)+|c>$$

۳ـ وجود عضو خنثی: عضو خنثی نسبت به عمل * در گروه موجود باشد:

$$\text{if}\ \ a\in G\ \&\ e*a=a*e=a\Rightarrow\ e\in G$$

۴ـ عضو وارون جمع: به ازای هر بردار $|a>$ در یک V، یک بردار $-|a>$ در V وجود دارد که $|a>+(-|a>)=|o>$

۵ـ وجود عضو وارون: $\forall a\in G\ \ \exists b\in G: a*b=b*a=e$

مثال از گروه‌ها:

۱ـ مجموعه اعداد صحیح نسبت به عمل جمع، تشکیل یک گروه را می‌دهند.

۲ـ مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع تشکیل یک گروه را نمی‌دهند.

۳ـ مجموعه‌ی بردارها نسبت به عمل ضرب اسکالر تشکیل گروه نمی‌دهند.

۴ـ مجموعه‌ی ماتریس‌ها نسبت به عمل جمع تشکیل گروه می‌دهند. اما نسبت به عمل ضرب ماتریسی، تشکیل گروه نمی‌دهند؛ زیرا عضو خنثی (همانی) و عضو وارون ضرب ماتریس‌های غیرمربعی، ممکن است وجود نداشته باشد.

۵ـ همه‌ی ماتریس‌های مربعی به همراه عمل ضرب تشکیل گروه نمی‌دهند.

۶ـ همه‌ی ماتریس‌های مربعی با دترمینان غیرصفر، نسبت به عمل ضرب، تشکیل گروه می‌دهند، زیرا عضو خنثی (همانی) ماتریس یکانی است. عضو وارون هر ماتریس نیز وجود دارد.

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{\det(A)}\qquad AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

۶ـ توزیع‌پذیری: حاصل‌ضرب‌هایی که شامل بردار در اسکالر باشند، توزیع‌پذیر هستند:

۱ـ ضرب در اعداد (اسکالرها) نسبت به جمع برداری، توزیع‌پذیر است. $\alpha(|a>+|b>)=\alpha|a>+\alpha|b>$

۲ـ ضرب در بردارها، نسبت به اسکالر توزیع‌پذیر است. $(\alpha+\beta)|a>=\alpha|a>+\beta|a>$

خاصیت فضای برداری

یک فضای برداری حقیقی مجموعه‌ای است که دو عمل **ضرب عدد حقیقی در اعضاء** و **جمع اعضاء** در آن با خواص زیر وجود دارد:

۱ـ جمع برداری قابل جابه‌جایی است: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

۲ـ جمع برداری خاصیت شرکت‌پذیری دارد. $\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}$

۳ـ عنصری مانند $\vec{O}$ وجود دارد که: $\vec{A}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{A}=\vec{O}$

۴ـ برای هر عضو $\vec{A}$، عضوی مانند $-\vec{A}$ وجود دارد که: $\vec{A}+\left(-\vec{A}\right)=\vec{O}$

۵ـ ضرب اسکالر در بردار، خاصیت پخش نسبت به جمع دارد: $\alpha\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$

۶ـ ضرب اسکالر خاصیت شرکت‌پذیری دارد: $\left(\alpha\beta\right)\vec{A}=\alpha\left(\beta\vec{A}\right)$

۷ـ ضرب واحد در بردار: $۱\vec{A}=\vec{A}$

۸ـ جمع اسکالرها خاصیت پخشی دارد: $\left(\alpha+\beta\right)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$

فضاهای برداری معروف عبارتند از:

الف) C مجموعه اعداد حقیقی یک فضای برداری است.

ب) اگر $V=\mathbb{C}$ باشد و مجموعه اسکالرها $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت $\mathbb{C}$ یک فضای برداری روی میدان حقیقی است.

پ) اگر $V=\mathbb{C}$ باشد و مجموعه اسکالرها نیز $\mathbb{C}$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{C}$ یک فضای برداری مختلط روی میدان حقیقی است.

ت) مجموعه پیکان‌ها در صفحه، تحت جمع هندسی معمول بردارها، یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

ث) مجموعه پیکان‌ها در فضا، تحت جمع معمولی بردارها، یک فضای بردار روی $\mathbb{R}$ است.

ج) فرض کنید p^c مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب مختلط بر حسب متغیر t باشد. در این صورت p^c تحت جمع معمول چندجمله‌ای‌ها و تحت ضرب یک چندجمله‌ای در یک عدد مختلط، یک فضای برداری است که بردار صفر در آن، همان چند جمله‌ای صفر است.

د) اگر $\mathbb{C}^n$ مجموعه‌ی همه‌ی n تایی‌های مختلط باشد، یعنی $|a>=(\alpha_۱,...\alpha_n)$, $|b>=(\beta_۱,...\beta_n)$ عناصر $\mathbb{C}^n$ باشند. $\mathbb{C}^n$، یک فضای برداری روی میدان مختلط است.

ح) اگر $M^{m\times n}$ مجموعه‌ی تمامی ماتریس‌های $m\times n$ باشد که عناصر آن مختلط هستند، تحت جمع معمولی و ضرب معمولی اسکالر در ماتریس $M^{m\times n}$، یک فضای برداری است.

هـ) به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، اگر p_n^c تمامی چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی کوچک‌تر یا مساوی $n-۱$ باشد، p_n^c تحت جمع معمول چندجمله‌ای‌ها و ضرب آن‌ها دراسکالر بسته است و لذا p_n^c نیز یک فضای برداری است.

و) اگر $C[a,b]$ مجموع تمامی توابع یک متغیره‌ی مختلط مقدار باشد که در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته هستند، $C[a,b]$ فضای برداری است.

ی) اگر $C^{\infty}(a,b)$ نمایان‌گر مجموعه‌ی تمامی توابع یک متغیره‌ی حقیقی مقدار باشد، که تا تمامی مراتب مشتق دارند، در این صورت $C^{\infty}(a,b)$ روی میدان حقیقی، یک فضای برداری است.

استقلال خطی و وابستگی خطی: بردارهای $|a_۱>...|a_n>$ مستقل خطی هستند، اگر $\sum_{i=۱}^{n}\alpha_i|a_i>=۰$ که در آن $\alpha_i\in C$ است، **به عبارت دیگر دو بردار مستقل خطی‌اند، اگر ضرب داخلی آن‌ها برابر صفر باشد.**

اگر مجموعه‌ای از اسکالرهای غیرصفر وجود داشته باشند، آن‌گاه هر بردار را می‌توان به صورت ترکیب خطی از دیگر بردارها نوشت. $|\alpha>=\sum_{i=۱}^{n}\alpha_i|\alpha_i>$

مجموعه بردارهای $\{|\alpha_i>\}$، وابسته خطی نامیده می‌شوند.

یک پایه در فضای برداری V یک مجموعه مانند $\vec{B}$ است که متشکل از بردارهای مستقل خطی می‌باشد، به طوری که هر بردار V یک ترکیب خطی از عناصر $\vec{B}$ است. فضای برداری **متناهی (بعد)** است، اگر دارای یک پایه محدود باشد، در غیر این‌صورت **نامتناهی (بعد)** است.

تمام پایه‌های یک فضای برداری متناهی، دارای تعداد مساوی از بردارهای مستقل هستند. این عدد همان **بعد فضای برداری** است.

فصل پنجم

«اعداد و توابع مختلط و نگاشت»

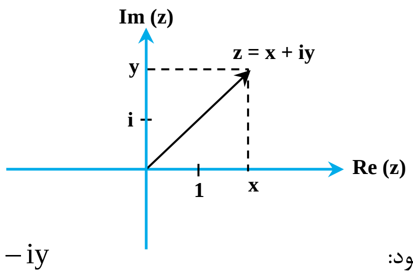
درسنامه (۱): اعداد مختلط

❖ **تعریف۱:** هر عدد مختلط به فرم $z = x + iy$ نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم: $x = \operatorname{Re} z \;,\; y = \operatorname{Im} z$

پس به طور کلی مجموعه اعداد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

مجموعه اعداد مختلط$= C = \{x + iy \mid x, y \in R \;,\; i^2 = -1\}$

❖ **تعریف۲:** به صفحه‌ای که درآن دو محور عمود بر هم به صورت افقی و عمودی بر صفحه رسم شوند، و واحد محور افقی ۱ و واحد محور قائم i باشد، صفحه مختلط می‌گوییم.



❖ **تعریف۳:** مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را با $\bar{z}$ نشان می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\bar{z} = x - iy$

❖ **تعریف۴:** قدر مطلق (اندازه) عدد مختلط $z = x + iy$ به صورت مقابل تعریف می‌شود: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

تذکر۱: قدر مطلق یک عدد مختلط، عددی حقیقی و مثبت است و فاصله تا مبدأ مختصات را نشان می‌دهد.

اعمال حسابی در اعداد مختلط

جمع: مجموع دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

تفریق: تفاضل دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

ضرب: برای ضرب دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ کافی است دو عدد را بطور معمولی جمله به جمله در هم ضرب کنیم و بجای i^2 مقدار ۱− را قرار دهیم.

$$z_1.z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

تقسیم: برای بدست آوردن خارج قسمت دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج، ضرب می‌کنیم.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

خواص اعداد مختلط

فرض کنید $z_۱$ و $z_۲$ دو عدد مختلط باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند:

۱) $\overline{z_۱ \pm z_۲} = \bar{z}_۱ \pm \bar{z}_۲$

۲) $|z| = |\bar{z}|$

۳) $\overline{z_۱ z_۲} = \bar{z}_۱ \bar{z}_۲$

۴) $\overline{(\frac{z_۱}{z_۲})} = \frac{\bar{z}_۱}{\bar{z}_۲}$

۵) $z\bar{z} = |z|^۲$

۶) $|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$

۷) $|\frac{z_۱}{z_۲}| = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}$

۸) $|z_۱ + z_۲| \le |z_۱| + |z_۲|$

شکل قطبی و نمایی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به شکل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نوشت. این نوع نمایش را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند. در رابطـه فـوق r و θ از فرمول‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\boxed{r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \ , \ \theta = \mathrm{Arctg}\frac{y}{x}}$$

θ را آرگومان یا آوند عدد مختلط z و r را قدر مطلق، مدول و یا اندازه عدد مختلط z می‌گویند.

$z = -۲i \Rightarrow$

با استفاده از فرمول $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$، هر عدد مختلط به شکل قطبی $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را می‌توان به فرم $z = re^{i\theta}$ نوشت که به آن فـرم نمائی یک عدد مختلط می‌گویند. عدد $z = re^{i\theta}$ را به شکل $z = r\measuredangle\theta$ نیز می‌توان نمایش داد.

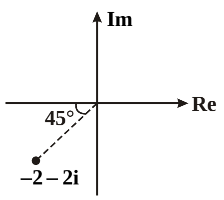
مثال ۱: مقدار فاز (مقدار آرگومان) عدد مختلط $z = \frac{i}{-۲-۲i}$ ، کدام است؟ (k عدد صحیح است) (سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲} + ۲k\pi$ ۴) $\frac{۵\pi}{۴} + ۲k\pi$

پاسخ: گزینه «۴» مقدار فاز z را می‌توان از کسر فاز صورت از مخرج به‌دست آورد. بنابراین داریم:

$$z = \frac{i}{-۲-۲i} \Rightarrow \arg(z) = \arg(i) - \arg(-۲-۲i)$$

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{۲} - (\pi + \underset{\text{یا}\ \frac{-۳\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۴}}) = -\frac{۳\pi}{۴} \ \text{یا}\ \frac{۵\pi}{۴}$$



$۲k\pi$ را می‌توان برای هر آرگومانی اضافه کرد، بدون اینکه مسأله تغییر کند. توجه کنید که $-۲-۲i$، یک زاویه ۴۵° در ربع سوم می‌سازد.

فاز $(\arg(z)) = ۵\frac{\pi}{۴} + ۲k\pi$

مثال ۲: مقدار عبارت $\sin(\frac{\pi}{۲} + i\ln۲)$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه «۳» طبق تعریف sin برحسب تابع نمایی داریم:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲i}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲} + i\ln۲) = \frac{e^{\frac{i\pi}{۲} - \ln۲} - e^{-\frac{i\pi}{۲} + \ln۲}}{۲i} = \frac{e^{\frac{i\pi}{۲}}e^{-\ln۲} - e^{-\frac{i\pi}{۲}}e^{\ln۲}}{۲i} \quad (*)$$

کافی است به جای آرگومان سینوسی، یعنی x، $\frac{\pi}{۲} + i\ln۲$ را جایگذاری کنیم. اما $e^{\frac{i\pi}{۲}}$، $e^{-\frac{i\pi}{۲}}$، $e^{\ln۲}$ و $e^{-\ln۲}$ را به سادگی می‌توان حساب کرد:

$$e^{\frac{i\pi}{۲}} = \cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲} = i \quad , \quad e^{-\frac{i\pi}{۲}} = -i \quad , \quad e^{\ln۲} = ۲ \quad , \quad e^{-\ln۲} = e^{\ln\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

با جایگذاری اعداد بالا در رابطه (*) به جواب نهایی می‌رسیم.

$$\sin(\frac{\pi}{۲} + i\ln۲) = \frac{۲i + \frac{۱}{۲}i}{۲i} = ۱/۲۵$$

ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی

برای جمع یا تفریق دو عدد مختلط استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از فرم قطبی یا نمایی می‌باشد ولی برای محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد مختلط استفاده از فرم‌نمایی ساده‌تر از فرم دکارتی می‌باشد.

اگر $z_۱ = r_۱e^{i\theta_۱}$ و $z_۲ = r_۲e^{i\theta_۲}$ آنگاه خواهیم داشت:

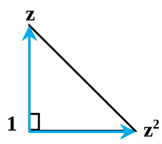
$$۱)\ \frac{z_۱}{z_۲} = \frac{r_۱}{r_۲}e^{i(\theta_۱-\theta_۲)} \quad \text{و} \quad ۲)\ z_۱z_۲ = r_۱r_۲e^{i(\theta_۱+\theta_۲)}$$

نکته۱: هرگاه دو بردار $z_۱$ و $z_۲$ از نظر اندازه با هم برابر باشند و ابتدای هر دو بردار یک نقطه باشد و با هم زاویه θ بسازند آنگاه: $z_۱ = z_۲e^{i\theta}$.

مثال۳: برای اینکه اعداد مختلط ۱، z و $z^۲$ رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه با رأس قائمه در نقطه ۱ باشند، کدام شرط کافی است؟

۱) $z = i-۱$
۲) $z = ۲i$
۳) $z = \frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $z = \frac{-۱+i\sqrt{۵}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید چون مثلث قائم‌الزاویه است، لذا بردارهای $z^۲-۱$ و $z-۱$ بر هم عمود هستند. یعنی اختلاف زاویه این دو بردار باید برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد، اما چون در صورت تست گفته شده مثلث متساوی‌الساقین است، پس داریم:



$$|z^۲-۱| = |z-۱| \xrightarrow[\text{هم زاویه } \pm\frac{\pi}{۲} \text{ می‌سازند}]{\text{اندازه با هم برابر است و با}} (z^۲-۱) = (z-۱)e^{\pm\frac{\pi}{۲}i} \Rightarrow z^۲-۱ = \pm i(z-۱)$$

$$\Rightarrow (z-۱)(z+۱) = \pm i(z-۱) \Rightarrow z+۱ = \pm i \Rightarrow z = -۱\pm i$$

توان یک عدد مختلط

فرض کنید $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ باشد، در این صورت:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^ne^{i(n\theta)} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

فرمول فوق فرمول **دموآور** نام دارد که در آن n عددی طبیعی است.

مثال۴: حاصل $A = (۱+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ کدام است؟

۱) $۲^{n+۱}\cos^n\frac{\alpha}{۲}[\cos\frac{n\alpha}{۲} + i\sin\frac{n\alpha}{۲}]$
۲) $۲^n\cos^n\frac{\alpha}{۲}[\cos\frac{n\alpha}{۲} - i\sin\frac{n\alpha}{۲}]$
۳) $۲^{n+۱}\cos^n\frac{\alpha}{۲}[\cos\frac{n\alpha}{۲} - i\sin\frac{n\alpha}{۲}]$
۴) $۲^n\cos^n\frac{\alpha}{۲}[\cos\frac{n\alpha}{۲} + i\sin\frac{n\alpha}{۲}]$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $۱+\cos\alpha = ۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$، و همچنین $\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$ با جایگذاری این مقادیر در رابطه داریم:

$$A = (۱+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲} + ۲i\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲})^n$$

با فاکتورگیری از عبارت $۲\cos\frac{\alpha}{۲}$ داریم:

$$A = [۲\cos\frac{\alpha}{۲}(\cos\frac{\alpha}{۲} + i\sin\frac{\alpha}{۲})]^n = ۲^n\cos^n\frac{\alpha}{۲}[\cos\frac{n\alpha}{۲} + i\sin\frac{n\alpha}{۲}]$$

مثال۵: اگر $z+\frac{۱}{z} = ۲\cos\theta$ آنگاه حاصل $z^n + \frac{۱}{z^n}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $۲\sin n\theta$
۲) $۲\cos n\theta$
۳) $(۲\cos\theta)^n$
۴) $(۲\sin\theta)^n$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به فرض، مقدار z را حساب می‌کنیم:

$$z+\frac{۱}{z} = ۲\cos\theta \Rightarrow z^۲ - ۲z\cos\theta + ۱ = ۰ \Rightarrow z = \frac{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^۲\theta - ۱}}{۱} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^۲\theta}$$

$$z = \cos\theta \pm i\sqrt{\sin^۲\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

اگر $z=e^{i\theta}$، آنگاه $\frac{۱}{z}=e^{-i\theta}$، لذا داریم: $z^n+\frac{۱}{z^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=۲\cos n\theta$

اگر $z=e^{-i\theta}$ آنگاه $\frac{۱}{z}=e^{i\theta}$، لذا داریم: $z^n+\frac{۱}{z^n}=e^{-in\theta}+e^{in\theta}=(\cos n\theta-i\sin n\theta)+(\cos n\theta+i\sin n\theta)=۲\cos n\theta$

همان‌طور که ملاحظه کردید در هر دو حالت مقدار عبارت برابر $۲\cos n\theta$ به دست آمد.

نکته۲: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه همواره داریم :

۱) $(۱+i)^n=۲^{\frac{n}{۲}}[\cos(\frac{n\pi}{۴})+i\sin(\frac{n\pi}{۴})]$, ۲) $(\sqrt{۳}-i)^n=۲^n[\cos(\frac{n\pi}{۶})-i\sin(\frac{n\pi}{۶})]$

نکته۳: مقدار عبارت $(۱+i)^n$ با توجه به مقدار n به صورت زیر نیز قابل محاسبه است:

برای nهای فرد: $(۱+i)^n=(۲i)^{\frac{n-۱}{۲}}(۱+i)$ برای nهای زوج: $(۱+i)^n=(۲i)^{\frac{n}{۲}}$

مثال۶: حاصل $z=۱+i+i^۲+\cdots+i^{۱۳۹۲}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{i+۱}{i-۱}$ ۴) $-\frac{i+۱}{i-۱}$

پاسخ: گزینه «۲» با شرط $k\neq ۱$، به ازای هر k رابطه‌ی مقابل را همواره داریم: $۱+k+k^۲+\cdots+k^{n-۱}=\frac{k^n-۱}{k-۱}$

با توجه به صورت سؤال خواهیم داشت: $z=\frac{i^{۱۳۹۳}-۱}{i-۱}=\frac{i(i)^{۱۳۹۲}-۱}{i-۱}=\frac{i(i^۲)^{۶۹۶}-۱}{i-۱}=\frac{i(-۱)^{۶۹۶}-۱}{i-۱}=\frac{i-۱}{i-۱}=۱$

مثال۷: اگر $۱+i$ ریشه‌ی معادله $z^۵+az^۳+b=۰$ باشد، آنگاه مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۴+

پاسخ: گزینه «۳» چون $۱+i$ ریشه معادله می‌باشد، لذا در معادله صدق می‌کند: $(۱+i)^۵+a(۱+i)^۳+b=۰$

طبق نکته (۳) حاصل $(۱+i)^n$ برای nهای فرد برابر $(۲i)^{\frac{n-۱}{۲}}(۱+i)$ می‌باشد، لذا با توجه به اینکه در این تست $n=۳$ و $n=۵$ است، داریم:

$$(۲i)^{\frac{۵-۱}{۲}}(۱+i)+a(۲i)^{\frac{۳-۱}{۲}}(۱+i)+b=۰\Rightarrow(۲i)^۲(۱+i)+a(۲i)(۱+i)+b=۰\Rightarrow ۴i^۲(۱+i)+a(۲i+۲i^۲)+b=۰$$

$$\Rightarrow -۴-۴i+۲ai-۲a+b=۰\Rightarrow(-۴+۲a)i-۴-۲a+b=۰\Rightarrow\begin{cases}-۴+۲a=۰\\ -۴-۲a+b=۰\end{cases}\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۸\Rightarrow a-b=۲-۸=-۶$$

توضیح: لازم به ذکر است، حفظ کردن قسمت (۱) از نکته (۲) مفید است. معمولاً در تست‌ها زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد، حل مثال ۲۰ بـا اسـتفاده از قسمت (۱) نکته (۲) نیز به راحتی ممکن است.

ریشه‌ی یک عدد مختلط

برای محاسبه ریشه‌ی یک عدد مختلط، ابتدا آن را به فرم نمایی یا قطبی می‌نویسیم، در این‌صورت $\sqrt[n]{z}$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta+۲k\pi}{n})}=\sqrt[n]{r}[\cos(\frac{۲k\pi+\theta}{n})+i\sin(\frac{\theta+۲k\pi}{n})]\quad,\quad k=۰,۱,\ldots,n-۱}$$

با توجه به مقادیر مختلف k نتیجه می‌شود $\sqrt[n]{z}$ دارای n جواب متمایز است که به ازای مقادیر مختلف k بدست می‌آیند.

مدرسان شریف

فصل ششم

«سری‌ها، بسط تیلور و لوران و محاسبه مانده و انتگرال‌گیری از توابع مختلط»

درسنامه (۱): سری‌ها و دنباله‌های مختلط

دنباله‌های مختلط

اگر به هر عدد طبیعی n، عدد مختلط z_n را نسبت دهیم، آنگاه اعداد $z_1, z_2, \dots, z_n$ یک دنباله مختلط را تشکیل می‌دهند.

قضیه: دنباله $z_n = x_n + iy_n$ همگرا به $z_\circ = x_\circ + iy_\circ$ است، اگر و فقط اگر دنباله‌های حقیقی x_n به $x_\circ$ و y_n به $y_\circ$ همگرا باشد. در واقع اگر یکی از این دو شرط برقرار نباشد آنگاه دنباله واگرا خواهد بود. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_\circ$

برای مثال دنباله $z_n = (-1)^n + i(\frac{2}{3})^n$ واگرا است چون $x_n = (-1)^n$ واگراست.

مثال۱: دنباله‌ی همگرای $\dots, z_1, z_2$ را که در آن $z_n = \frac{1}{4}(1-\frac{5}{n}) + 3i(1+\frac{1}{n})$، در نظر می‌گیریم. اگر c حد دنباله باشد، تعداد جملات دنباله که خارج ناحیه $|z_n - c| < 0/01$ می‌باشند، چند تاست؟

۱) ۳۲۶ ۲) ۳۰۱ ۳) ۳۲۵ ۴) ۳۰۰

پاسخ: گزینه «۳» حد دنباله به راحتی برابر مقدار مقابل است: $c = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{4} + 3i$

$$|z_n - c| \le 0/01 \Rightarrow |\frac{-5}{4n} + i\frac{3}{n}| < 0/01 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{16n^2} + \frac{9}{n^2}} < 0/01 \Rightarrow \frac{13}{4n} < 0/01 \Rightarrow n > 325$$

مثال۲: دنباله $z_n = \frac{1}{2}\pi + \frac{e^{\frac{in\pi}{4}}}{n\pi}$ .... است.

۱) واگرا و بی‌کران ۲) همگرا و کراندار ۳) واگرا و کراندار ۴) همگرا و بی‌کران

پاسخ: گزینه «۲» دنباله z_n همگراست اگر $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ وجود داشته باشد. برای این منظور در دنباله $z_n = u_n + iv_n$ باید هر دو حد $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ وجود داشته باشد.

$$z_n = \frac{1}{2}\pi + \frac{e^{in\frac{\pi}{4}}}{n\pi} = (\frac{1}{2}\pi + \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n\pi}) + i\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi} = u_n + iv_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} u_n + i\lim_{n\to\infty} v_n$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2}\pi + \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n\pi}) + i\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi} = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow$$ بنابراین دنباله z_n همگراست.

بررسی کرانداری دیگر لزومی ندارد، چون هر دنباله همگرا حتماً کران‌دار است.

سری‌های مختلط

اگر $\{z_n\}$ یک دنباله مختلط باشد، آنگاه مجموع جملات نامتناهی این دنباله را سری می‌گوئیم و آن را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ نمایش می‌دهیم.

قضیه: سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ که $z_n = x_n + iy_n$ می‌باشد را به $z_0 = x_0 + iy_0$ همگرا می‌نامیم اگر و فقط اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ به ترتیب به x_0 و y_0 همگرا باشند.

تعریف همگرایی مطلق و مشروط

سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ را همگرای مطلق می‌گوئیم هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد و سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ را همگرای مشروط می‌گوئیم هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ واگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ همگرا باشد.

نکته۱: شرط لازم (اما نه کافی) برای همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ آن است که $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ باشد. واضح است که صفر بودن حد دنباله z_n وقتی $n \to \infty$ فقط شرط لازم برای همگرائی سری است و همگرائی خود سری باید بررسی شود ولی اگر حد دنباله صفر نبود، می‌توان نتیجه گرفت سری واگراست.

آزمون M وایراشتراس

اگر سری با جملات ثابت $\sum_{m=1}^{\infty} M_m$ همگرا باشد و به ازای تمام m های صحیح مثبت و به ازای تمام z ها، رابطه $|f_m(z)| \le M_m$ برقرار باشد. آنگاه سری $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ همگرای یکنواخت است.

مثال۳: آیا سری $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|}$ در قرص $|z| \le 1$ همگرای یکنواخت است؟

پاسخ: با توجه به آزمون M وایراشتراس و همگرایی سری عددی $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم این سری همگرای یکنواخت است، زیرا داریم:

$$\left|\frac{z^m+1}{m^2+\cosh m|z|}\right| \le \frac{|z|^m+1}{m^2} \xrightarrow{|z|\le 1} \left|\frac{z^m+1}{m^2+\cosh m|z|}\right| \le \frac{2}{m^2}$$

نکته۲: هیچ ارتباطی بین همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت سری‌ها نیست. ممکن است یک سری همگرای یکنواخت باشد ولی همگرای مطلق نباشد و یا اینکه همگرای مطلق باشد ولی همگرای یکنواخت نباشد.

سری‌های توانی و به دست آوردن شعاع همگرایی آنها

یک سری توانی برحسب توانهای $z - z_0$ یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ که درآن z_0 یک عدد مختلط و n عددی طبیعی و دنباله C_n یک دنباله مختلط است، سری توانی نامیده می‌شود. سری توانی همواره در قرص $|z - z_0| < R$ همگراست و این قرص را قرص همگرائی، R را شعاع همگرائی و دایره $|z - z_0| = R$ را دایره همگرائی سری می‌گوییم.

برای به دست آوردن شعاع همگرائی **از یکی از دو رابطه زیر استفاده می‌کنیم:**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \frac{1}{R} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \frac{1}{R}}$$

اگر $R=\infty$ باشد، سری برای همه مقادیر z همگرا می‌باشد و اگر $R=0$ سری فقط در z_0 همگرا و اگر $0<R<\infty$ آنگاه سری فقط برای مقادیر z که در نامساوی $|z-z_0|<R$ صدق می‌کنند، همگراست.

مثال۴: شعاع همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}z^n$ کدام است؟

۱) e^{-1} ۲) e ۳) 0 ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲» برای محاسبه شعاع همگرایی از رابطه دوم کادر بالا استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(1-\frac{1}{n})^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} \Rightarrow R = e$$

مثال۵: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲» شعاع همگرایی به صورت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \frac{1}{R}$ می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2}{(2n)!(n+1)^2(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2}{n^2}\right| = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

نکته۳: اگر $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد و بسط تابع $f(z)$ حول نقطه $z=z_0$ نوشته شود به فاصله نزدیکترین نقطه غیر تحلیلی تا z_0 شعاع همگرایی گفته می‌شود. (در واقع این مطلب تعریف شعاع همگرایی به زبانی دیگر است.)

مثال۶: شعاع همگرایی تابع $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}$، حول نقطه $z_0=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» اول نقاط غیر تحلیلی $f(z)$ را حساب می‌کنیم:

$$z^2+4z-5=0 \Rightarrow (z-1)(z+5)=0 \Rightarrow z=1\ ,\ z=-5$$

کمترین فاصله نقطه $z_0=0$ از این دو نقطه شعاع همگرایی محسوب می‌شود. واضح است $|z-z_0|=|1-0|=1$ کمترین فاصله است، پس شعاع همگرایی برابر عدد یک است.

مثال۷: شعاع همگرایی بسط تابع $f(z)=\frac{1}{(z-i)(z+1)(z+2i)}$ حول نقطه $z_0=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» شعاع همگرایی برای این تست را از رابطه مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\min_{z=i,-1,-2i}|z-z_0| = \min\{\sqrt{2},2,\sqrt{5}\} = \sqrt{2}$$

توضیح اینکه $z_0=1$ می‌باشد و کوتاه‌ترین فاصله این نقطه از نقاط غیر تحلیلی i، -1 و $-2i$ شعاع همگرایی محسوب می‌گردد.

سری‌های تابعی و به دست آوردن ناحیه همگرایی آن‌ها

در نوع دیگری از سؤالات با سری‌های تابعی به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} f(n,z)$ روبه‌رو هستیم و نمی‌توان آن‌ها را به طور صریح مانند سری‌های توانی نوشت. برخلاف سری‌های توانی ممکن است ناحیه همگرایی در این نوع سری‌ها متقارن نباشد. برای پیدا کردن ناحیه‌ی همگرایی این نوع سری‌ها باید از یکی از روابط زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| < 1 \qquad \text{یا} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} < 1}$$

در واقع در این حالت شعاع همگرایی و ناحیه همگرایی با هم حساب می‌شود.

تذکر ۱: نامساوی‌های فوق یک روش کلی برای محاسبه ناحیه همگرایی تمام سری‌ها هستند. برای محاسبه‌ی ناحیه‌ی همگرایی سری‌های تابعی، روش گفته شده برای سری‌های **توانی** کارساز نیست. بهتر است شعاع و ناحیه‌ی همگرایی تمام سری‌ها را با روش گفته شده برای سری‌های تابعی محاسبه کنید، زیرا سری‌های توانی یک مورد خاص از سری‌های تابعی هستند.

نکته ۴: اگر $C_n = k$ (k عددی حقیقی است) شعاع همگرایی برابر ۱ می‌شود.

مثال ۸: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} [2+i(-1)^n]^n z^n$ کدام است؟

۱) 0

۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۴) به ازای مقادیر مختلف (nهای زوج و nهای فرد) مقدار $(-1)^n$ فرق می‌کند و شعاع همگرایی تعریف دقیقی ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2+i(-1)^n|^n} = \lim_{n\to\infty} |2+i(-1)^n|$$

در این‌جا باید اندازه را حساب کنیم، پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2^2+((-1)^n)^2} = \sqrt{4+(-1)^{2n}} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

مثال ۹: ناحیه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $|z+1-i|>1$ ۲) $|z+1-i|<1$ ۳) $|z+1-i|>\frac{1}{2}$ ۴) $|z+1-i|<\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به توان $\mathbf{-n}$ در بالای پرانتز شامل z، سری توانی محسوب نمی‌شود و باید از روش گفته شده برای سری‌های تابعی به تست پاسخ دهیم:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(z+1-i)^{-(n+1)}}{n+1+i}}{\frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+i)(z+1-i)^{-n} \times (z+1-i)^{-1}}{(n+1+i)(z+1-i)^{-n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+i}{n+1+i}\right| . |(z+1-i)^{-1}| = 1 \times |(z+1-i)^{-1}| = \left|\frac{1}{z+1-i}\right|$$

عبارت فوق را باید کوچک‌تر از ۱ قرار دهیم:

$$\left|\frac{1}{z+1-i}\right| < 1 \Rightarrow \mathbf{|z+1-i| > 1}$$

مدرسان شریف

فصل هفتم

«سری فوریه، انتگرال و تبدیل فوریه»

درسنامه (۱): توابع متناوب

یادآوری

تابع f را با دامنه D_f در نظر بگیرید، هرگاه عددی مانند $T > 0$ وجود داشته باشد به شکلی که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱)\ \forall x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f \qquad \text{و} \qquad ۲)\ \forall x \in D_f \Rightarrow f(x \pm T) = f(x)$$

در این صورت تابع f را متناوب می‌گوییم و T را دوره تناوب تابع می نامیم.

در حالت کلی می‌توان گفت دوره تناوب توابع مثلثاتی $\cos^n ax$ و $\sin^n ax$ اگر توان آنها زوج باشد برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد و اگر توان آنها فرد باشد برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد. برای مثال دوره تناوب تابع $y = \sin^4 3x$ برابر $T = \frac{\pi}{3}$ و دوره تناوب تابع $y = \cos 2x$ برابر π می‌باشد.

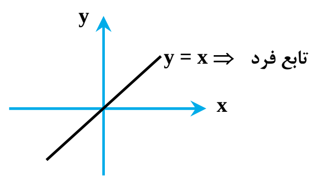
نکته۱: تابع $f(x) = a$ (تابع ثابت) متناوب است. ولی دارای کوچکترین دوره تناوب نیست.

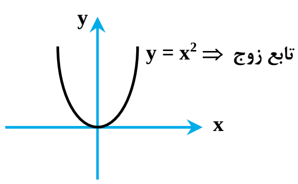
نکته۲: اگر تابعی متناوب باشد و دورهٔ تناوب آن T باشد، اگر داخل قدر مطلق قرار گیرد، دوره تناوب آن معمولاً یا همان مقدار T، $\frac{T}{2}$ و یا $\frac{T}{4}$ و به‌طور کلی کسری از دوره تناوب اصلی خواهد شد.

توابع زوج و فرد :

$$\begin{cases} f(-x) - f(x) = 0 \rightarrow \text{در توابع زوج} \\ f(-x) + f(x) = 0 \rightarrow \text{در توابع فرد} \end{cases} \qquad f(x): \begin{cases} f(x) = f(-x) \rightarrow \text{زوج} \\ f(x) = -f(-x) \rightarrow \text{فرد} \end{cases}$$

نکته۳: نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات و نمودار توابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است.





- تابع با ضابطه $f(x) = c$ همواره زوج است.
- تابع با ضابطه $f(x) = 0$ تابعی هم زوج و هم فرد است.
- حاصلضرب دو تابع فرد، تابعی زوج و حاصلضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.
- حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج، تابعی فرد است.
- مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است.
- تابع علامت $Sgn(x)$ تابعی فرد می‌باشد.

انتگرال sin و cos با توان زوج:

با استفاده از فرمول‌های توان شکن (طلائی) توان آنها را کاهش می‌دهیم و سپس حاصل انتگرال را بدست می‌آوریم:

$$\boxed{\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲} \quad \text{و} \quad \cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}}$$

مثال۱: حاصل $\int \cos^۴ x dx$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** عبارت $\cos^۴ x$ را به‌صورت $(\cos^۲ x)^۲$ می‌نویسیم و از روابط بالا برای $\cos^۲ x$ استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$I=\int \cos^۴ x dx= \int (\frac{۱+\cos ۲x}{۲})^۲ dx=\frac{۱}{۴}\int (۱+\cos ۲x)^۲ dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\int [۱+۲\cos ۲x+\cos^۲ ۲x].dx=\frac{۱}{۴}\int [۱+۲\cos ۲x+\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۴x)].dx$$

و جواب نهایی به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$=\frac{۱}{۴}(x+\sin ۲x)+\frac{۱}{۸}(x+\frac{\sin ۴x}{۴})+c=\frac{۳x}{۸}+\frac{\sin ۲x}{۴}+\frac{\sin ۴x}{۳۲}+c$$

روش انتگرال‌گیری جزء به جزء:

از این روش معمولاً در محاسبه انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int f(x).g(x)dx$ استفاده می‌شود. حل اینگونه انتگرالها در حالت کلی به این صورت است که ابتدا یکی از توابع را U در نظر گرفته و بقیه عبارت زیر انتگرال را برابر dV در نظر می‌گیریم و با استفاده از فرمول $\int UdV = UV-\int VdU$ انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

مثال۲: حاصل $I=\int x\sin x\, dx$ کدام است؟

۱) $\sin x - x\cos x + c$ ۲) $\cos x - x\sin x + c$ ۳) $\sin x + x\cos x + c$ ۴) $\cos x + x\sin x + c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از روش جزءبه‌جزء و انتخاب u و v به‌صورت زیر:

$$\begin{cases} x=u \Rightarrow dx=du \\ \sin x dx=dv \Rightarrow v=-\cos x \end{cases} \Rightarrow \int x\sin x dx=-x\cos x-\int -\cos x\, dx \Rightarrow$$

در نتیجه جواب انتگرال به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$\Rightarrow I=-x\cos x+\int \cos x\, dx=-x\cos x+\sin x+c$$

انتگرال‌گیری جزء به جزء به کمک تشکیل جدول:

در این روش ابتدا در یک جدول، تابع $f(x)$ و مشتق‌هایش را در سمت چپ و تابع $g(x)$ و انتگرال‌هایش را در سمت راست قرار می‌دهیم و تا وقتی که مشتق تابع $f(x)$ صفر شود از تابع $g(x)$ انتگرال می‌گیریم و در نهایت مطابق پیکانهای مشخص شده توابعی که با پیکان به هم وصل شده‌اند را در هم ضرب و آنها را با توجه به علامت روی آنها با جمله بعد جمع یا تفریق می‌نماییم که البته این علامتها از بالا به پائین یک در میان مثبت و منفی هستند.

مثال۳: حاصل انتگرال $I=\int xe^{۲x}dx$ را تعیین کنید.

$f(x)$ و مشتقاتش		$g(x)$ و انتگرال‌هایش
x		$e^{۲x}$
	$\oplus$	
۱		$\frac{e^{۲x}}{۲}$
	$\ominus$	
۰		$\frac{e^{۲x}}{۴}$

$$\begin{cases} f(x)=x \ , \ g(x)=e^{۲x} \\ I=x(\frac{e^{۲x}}{۲})-(۱\times\frac{e^{۲x}}{۴})+c \end{cases}$$

نکته۴: به ازای هر عدد صحیح n، همواره سه تساوی مقابل برقرار است:

$$۱)\ \cos n\pi=(-۱)^n \ , \ ۲)\ \sin n\pi=۰ \ , \ ۳)\sin(۲n-۱)\frac{\pi}{۲}=(-۱)^{n-۱}$$

فصل هشتم

«تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن»

درسنامه (۱): تبدیل لاپلاس

یکی از روش‌های مؤثر در حل مسأله مقدار اولیه، به خصوص اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر، یک معادله با ضرایب ثابت باشد، و یا در قسمت غیرهمگن آن تابع ناپیوسته باشد، استفاده از تبدیل لاپلاس است.

❖ **تعریف.** (تبدیل لاپلاس) فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $0 \le t < \infty$ تعریف شده و s یک متغیر حقیقی دلخواه است. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که با نماد $L[f(t)]$ و یا $F(s)$ نمایش داده می‌شود به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

مثال ۱: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 1$ را به دست آورید.

پاسخ: با جایگذاری $f(t) = 1$ در تعریف لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L[f(t)]=\int_0^{\infty} e^{-sT} f(t)dt;\ f(t)=1} L[1] = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^T = \underbrace{\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sT}\right.}_{0} + \left.\frac{1}{s}\right)\Big|_0^T$$

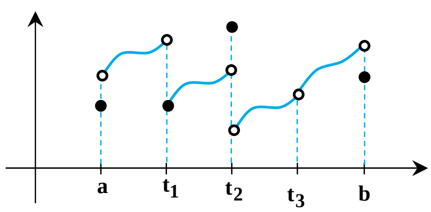
با توجه به تساوی $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$، حد فوق زمانی وجود دارد که $s > 0$ باشد. در این صورت داریم:

$$L[1] = \frac{1}{s} \quad ; s > 0$$

❖ **تعریف.** تابع $f(t)$ در بازه بسته $[a,b]$، قطعه‌ای پیوسته خوانده می‌شود، اگر:

۱) تابع مفروض در تمامی نقاط بازه باز (a,b)، به استثنای متناهی نقطه $t_1, t_2, \dots, t_n$ پیوسته باشد.

۲) در نقاط ناپیوستگی $t_1, t_2, \dots, t_n$، تابع $f(t)$ دارای حدود چپ و راست موجود و متناهی باشد، و هم چنین در $t = a$ دارای حد راست و در $t = b$ نیز دارای حد چپ موجود و متناهی باشد.



و تابع $f(t)$ را در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته گوییم، هرگاه به ازای هر $T > 0$، تابع $f(t)$ در فاصله $[0,T]$ قطعه‌ای پیوسته باشد.

❖ **تعریف.** تابع $f(t)$ را در فاصله $[0,\infty)$ از مرتبه نمایی $a > 0$ می‌گوییم، هرگاه اعداد حقیقی ثابتی چون a، M و t_0 موجود باشند به طوری که به ازای $t \ge t_0$ نامساوی $|f(t)| \le Me^{at}$، برقرار باشد. به عبارت دیگر: $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{e^{at}} = 0$.

قضیه. (وجود تبدیل لاپلاس) فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته و هم‌چنین از مرتبه نمایی a باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس $F(s) = L[f(t)]$ برای هر $s > a$ موجود است و داریم: $|F(s)| \le \frac{M}{s-a}$.

نتیجه (مقدار انتهایی تبدیل لاپلاس): اگر $f(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی a و $F(s)$ تبدیل لاپلاس آن باشد، داریم:

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$$

به‌عنوان مثال؛

۱ـ تابع $\frac{1-\cos t}{t^2}$ و در فاصله $[0,\infty)$ دارای تبدیل لاپلاس است. چرا که:

الف ـ در فاصله $(0,\infty)$ پیوسته است و حد راست آن در صفر موجود و متناهی است:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2e^{at}}(1-\cos t)=0$$

ب ـ تابع مفروض در فاصله مورد نظر از مرتبه نمایی $a>0$ است:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t^2}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t}{2t}=+\infty$$

از طرف دیگر؛

۲ـ تابع $\frac{\sin t}{t^2}$ در فاصله $[0,\infty)$ دارای تبدیل لاپلاس نیست. چرا که:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}=+\infty$$

معمولاً از حروف کوچک مانند f و g برای نامیدن توابع و از حروف بزرگ مانند F و G برای نامیدن تبدیل لاپلاس توابع مذکور استفاده می‌شود.

در جدول زیر تبدیل لاپلاس برخی توابع مقدماتی ارائه شده است:

$f(t)$	$\xrightarrow{L}$ $F(s)$		$F(s)$	$\xrightarrow{L^{-1}}$ $f(t)$
$t^\alpha\ ;\alpha\neq -1,-2,\dots$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}};$	$s>0$	$\frac{1}{s^{\alpha+1}}$	$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$
$t^n\ ;n\in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}};$	$s>0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a};$	$s>a$	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2};$	$s>0$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2};$	$s>0$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin at$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2};$	$s>\|a\|$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2};$	$s>\|a\|$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$

مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت $\int_0^\infty dt e^{-st}f(t)=\frac{2}{s^3+s^2+s+1}$ است. تابع $f(t)$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $e^{+t}+\sin t+\cos t$ ۲) $e^{-t}-\sin t+\cos t$ ۳) $e^{-t}+\sin t-\cos t$ ۴) $e^{+t}-\sin t-\cos t$

پاسخ: گزینه «۳» برای کسر داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{2}{s^3+s^2+s+1}=\frac{2}{(s^2+1)(s+1)}=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{c}{s+1}=\frac{(a+c)s^2+(a+b)s+b+c}{(s^2+1)(s+1)}$$

که در آن از روش تجزیه‌ی کسرها استفاده شده است. ثابت‌های a و b و c به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&a+c=0 && b=1\\ &b+a=0 \Rightarrow && c=1\\ &b+c=2 && a=-1\end{aligned}$$

با جایگذاری ثابت‌ها کسر به‌صورت مقابل ساده می‌شود:

$$\frac{2}{s^3+s^2+s+1}=-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s+1}$$

با توجه به روابط ذیل برای تبدیل معکوس لاپلاس نتیجه را به‌دست می‌آوریم:

$$l[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}L[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$$

$$l\left[e^{kt}\right]=\frac{1}{s-k}\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{2}{s^3+s^2+s+1}\right]=-\cos t+\sin t+e^{-t}$$

مدرسان شریف

فصل نهم

« آشنایی با مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی»

درسنامه (۱): تعاریف و جواب

❖ **تعریف.** هر معادله که در ضابطه آن علاوه بر متغیر مستقل و متغیر وابسته، مشتقات مراتب مختلف متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل نیز موجود باشد، **معادله دیفرانسیل معمولی** نامیده می‌شود.

❖ **تعریف.** بالاترین مرتبه مشتق‌گیری حاضر در ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را **مرتبه** آن **معادله دیفرانسیل** گویند.

به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل مرتبه n، با متغیر مستقل x و متغیر وابسته y دارای نمایش عمومی $f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ است.

❖ **تعریف.** اگر بتوان ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را نسبت به مرتبه مشتق‌گیری به صورت یک چند جمله‌ای نوشت، بزرگترین توان حاضر در" جملات تعیین‌کننده مرتبه " را **درجه** آن **معادله دیفرانسیل** گویند. به عنوان مثال؛

ـ معادله دیفرانسیل $xy'+y=\sec x$ ، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۱، با درجه ۱ و نسبت به y برحسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $u''+u=\sec x$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲، با درجه ۱ و نسبت به u بر حسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $v''+2v'+v=t$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲، با درجه ۱ و نسبت به v بر حسب t است.

ـ معادله دیفرانسیل $y'''^{2}-y'''+y''-y-e^{x}=0$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۳، با درجه ۲ و نسبت به y بر حسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $(\frac{d^4x}{dy^4})^3-x\frac{d^2x}{dy^2}=\sin x$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۴، با درجه ۳ و نسبت به x بر حسب y است.

مفهوم جواب در معادلات دیفرانسیل

❖ **تعریف.** هر تابع که در ضابطه یک معادله دیفرانسیل مفروض صدق کند، **جواب** آن **معادله دیفرانسیل** خوانده می‌شود. لازم به ذکر است، تابع جواب می‌تواند به هر سه صورت صریح، ضمنی و پارامتری بیان شود.

جواب یک معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر محاسبه کرد:

ـ اگر جواب معادله دیفرانسیل، توسط یک رابطه با ثابت‌های دلخواه بیان شود، **جواب عمومی** آن معادله نامیده می‌شود. در واقع، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به صورت یک دسته منحنی nـ پارامتری با نمایش عمومی $g(x,y,c_1,\dots,c_n)=0$ ارائه می‌گردد.

ـ اگر جواب معادله دیفرانسیل، فاقد هرگونه ثابت دلخواه بوده و با اِعمال شرایط اولیه بر جواب عمومی به دست آید، **جواب خصوصی** یا به تعبیر هندسی، **خم انتگرال** نامیده می‌شود.

شرایط موجود در یک معادله دیفرانسیل، که منجر به تعیین ثابت‌های موجود در جواب عمومی می‌شود، **شرایط اولیه** و هم چنین یک معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را، **مسأله با مقدار اولیه** می‌نامیم.

ـ اگر جواب معادله دیفرانسیل، به ازای هیچ شرایط اولیه‌ای، از جواب عمومی محاسبه نگردد، **جواب غیرعادی** نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد، منحنی نمایش یک جواب غیرعادی، بر تمام منحنی‌های جواب عمومی در یک و فقط یک نقطه مماس است.

تذکر ۱:

۱ــ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n، یک دسته منحنی با حداقل nــ پارامتر است، بنابراین هر گروه از جواب‌ها، با کمتر از n ثابت دلخواه، دسته‌ای از جواب‌های غیرعادی معادله است. همچنین لزومی ندارد که تعداد ثابت‌های دلخواه جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مرتبه آن برابر باشد.

۲ــ هر معادله دیفرانسیل با نمایش $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n، نامیده می‌شود. این دسته از معادلات فقط دارای جواب عمومی بوده و جواب غیرعادی ندارند.

۳ــ یک معادله دیفرانسیل می‌تواند بدون جواب، با تعداد معینی جواب، دارای یک جواب عمومی یا نامتناهی جواب عمومی و غیرعادی باشد.

مثال۱: جواب معادله $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$ برحسب سری فروبینوس کدام است؟ A و B اعداد ثابتی هستند. (سراسری ۹۱)

۱) $y=A(1+x+^2+x^3+...)+B\ln x(1+x+x^2+...)$

۲) $y=A(1+x+x^2+x^3+...)+B\ln x$

۳) $y=A(1-x+x^2-x^3+...)+B\ln x(1+x+x^2+...)$

۴) $y=A(1-x+x^2-x^3+...)+B\ln x(1-x+x^2-x^3+...)$

پاسخ: گزینه «۱» با جایگذاری $y(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}$ در معادله بدست می‌آوریم:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}(1+\lambda+r)^2-\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{\lambda+r}(\lambda+r)^2=0$$

معادله‌ی اندیس از کمترین توان x بدست می‌آید.

$$(r)^2=0\to r=0$$

که این معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، یک جواب از رابطه‌ی بازگشتی ذیل بدست می‌آید:

$$-a_{\lambda+1}(\lambda+1)^2+a_\lambda(\lambda+1)^2=0\Rightarrow a_{\lambda+1}=a_\lambda$$

لذا پاسخ اول به‌صورت مقابل است:

$$y(x)=A(1+x+x^2+...)$$

بنابراین با توجه به مضاعف بودن ریشه جواب دوم برابر است با $\text{Ln}x\times$ جواب اول پس:

$$y(x)=A(1+x+x^2+x^3+...)+B\text{Ln}x(1+x+x^2+...)$$

مثال۲: جواب معادله دیفرانسیل زیر عبارت است از:

$$xy''+3y'+4x^3y=0$$

۱) $\begin{cases}y_1=x^2\\ y_2=x^{-2}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}y_1=e^x\\ y_2=e^x\,\text{Ln}x\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}y_1=x^{-2}\sin x^2\\ y_2=x^{-2}\cos x^2\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}y_1=x\sin x\\ y_2=x\cos x\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه هیچ یک از جواب‌های y_1 و y_2 در چهار گزینه داده شده مشترک نیستند، بنابراین کافیست از هر گزینه تنها یک تابع y_1 یا y_2 ، بررسی شود:

گزینه (۱): $(y=x^2\Rightarrow y'=2x\quad\&\quad y''=2)$

حال این مقادیر را در معادله دیفرانسیل صورت سؤال جایگذاری می‌کنیم:

$$xy''+3y'+4x^3y=x\times2+3\times2x+4x^3\times x^2=8x+4x^5\neq0$$

گزینه (۲): $(y=e^x\Rightarrow y'=e^x\quad\&\quad y''=e^x)$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy''+3y'+4x^3y=xe^x+3e^x+4x^3e^x\neq0$$

گزینه (۳): $(y=x^{-2}\sin x^2\Rightarrow y'=-2x^{-3}\sin x^2+2x^{-1}\cos x^2\ \&\ y''=6x^{-4}\sin x^2-6x^{-2}\cos x^2-4\sin x^2)$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy''+3y'+4x^3y=6x^{-3}\sin x^2-6x^{-1}\cos x^2-4x\sin x^2-6x^{-3}\sin x^2+6x^{-1}\cos x^2+4x\sin x^2=0$$

فصل دهم

«معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی»

درسنامه (۱): معادلات دیفرانسیل

هر معادله شامل یک تابع مجهول (مانند u) که حداقل دارای دو متغیر مستقل (مانند x و y) و مشتقات جزئی u نسبت به x و y باشد را معادله با مشتق جزئی می‌نامیم. برای مثال هرکدام از معادلات زیر یک معادله با مشتق جزئی هستند:

$$1)\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2+1 \qquad\qquad 2)\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u_t=2$$

که معادله (۱) دارای دو متغیر و معادله (۲) شامل ۴ متغیر مستقل است. به مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله **مرتبه معادله مشتق جزئی** گفته می‌شود.

نکته۱: اگر u_1, u_2 دو جواب یک معادله‌ی خطی و همگن با مشتق‌های جزئی باشند، آنگاه $c_1u_1+c_2u_2$ (که c_1 و c_2 ضرایب ثابت هستند) نیز یک جواب معادله است.

معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی خطی

صورت کلی معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی **خطی** مرتبه دوم نسبت به دو متغیر به فرم زیر است:

$$\mathbf{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G}$$

که در آن A، B، ... و G ممکن است به x و y بستگی داشته باشند، ولی به u بستگی ندارند. هر معادله مرتبه دوم را که به فرم این معادله نیست را **غیرخطی** می‌نامیم.

البته اگر فقط ضرایب A، B و C به متغیرهای مستقل x و y وابسته بوده و به u وابسته نباشند، آن‌گاه معادله را **شبه خطی** می‌نامند. (فرق این حالت نسبت به حالت خطی این است که در این حالت ضرایب D، E، F و G علاوه بر x یا y ممکن است به u نیز بستگی داشته باشند.)

اگر $G=0$ معادله را **همگن** و اگر $G\neq 0$ آن را **ناهمگن** می‌نامیم. اگر $\mathbf{B^2-4AC}>0$ آنگاه معادله را **هذلولی‌گون**، اگر $\mathbf{B^2-4AC}=0$ آنگاه معادله را **سهمی‌گون** و بالاخره اگر $\mathbf{B^2-4AC}<0$ معادله را **بیضی‌گون** می‌نامیم.

معادله $u_{tt}=a^2u_{xx}$ (که موسوم به معادله موج است) با توجه به اینکه $A=a^2$، $B=0$ و $C=-1$ است، یک معادله هذلولی‌گون است. و معادله $u_t=a^2u_{xx}$ (که موسوم به معادله گرما است) با توجه به اینکه $A=a^2$، $B=0$ و $C=0$ است یک معادله سهموی و معادله $u_{xx}+u_{yy}=0$

(که موسوم به معادله لاپلاس است) با توجه به اینکه $A=1$، $B=0$ و $C=1$ است، یک معادله بیضی‌گون است.

تذکر۱: رفتار جواب معادله در حالتی که معادله همگن است $(G=0)$ نسبت به حالتی که معادله ناهمگن است $(G\neq 0)$ متفاوت است.

فرم کانونی معادلات در حالت‌های مختلف

ساده کردن این نوع معادلات به کانونیک کردن معروف است.

معادله کانونی از نوع هذلولی‌گون

$$u_{\zeta\eta} = H(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$$

معادله کانونی از نوع سهمی‌گون

$$u_{\zeta\zeta} \text{ یا } u_{\eta\eta} = H(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$$

معادله کانونی از نوع بیضی‌گون

$$u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = H(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$$

به دست آوردن تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک

برای کانونیک کردن فرم معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی مرتبه دوم، معادله مشخصه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\boxed{A\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = ۰}$$

پس از حل معادله فوق که یک معادله درجه دوم برای $\frac{dy}{dx}$ است، بر حسب نوع جواب‌ها شرایط زیر را داریم:

۱) **معادلات هذلولی‌گون:** اگر $B^۲ - ۴AC > ۰$ باشد، دو جواب به صورت $f(x, y) = c_۱$ و $g(x, y) = c_۲$ به دست می‌آیند که تغییر متغیرهای لازم $\zeta = f(x, y)$ و $\eta = g(x, y)$ می‌باشند.

۲) **معادلات سهمی‌گون:** اگر $B^۲ - ۴AC = ۰$ باشد، یک جواب به صورت $f(x, y) = c_۱$ و یک جواب می‌تواند دلخواه در نظر گرفته شود. که تغییر متغیرهای لازم می‌توانند به شکل زیر انتخاب شوند:

$$\begin{cases} \eta = f(x, y) \\ \zeta = x \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \zeta = f(x, y) \\ \eta = y \end{cases}$$

۳) **معادلات بیضوی:** در حالتی که $B^۲ - ۴AC < ۰$، آنگاه معادله دارای دو جواب مختلط است:

$$\begin{cases} \zeta = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\zeta + \eta}{۲} \\ \beta = \dfrac{\zeta - \eta}{۲i} \end{cases}$$

با استفاده از این تبدیلات، این نوع معادلات به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \text{(معادله‌ای مرتبه اول)}$$

مثال۱: معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی $u_{xx} + ۲u_{xy} + (\cos x)u_{yy} = f(x, y)$ (f تابع مفروض و پیوسته) با کدام تغییر متغیرها به صورت کانونیک (استاندارد) خودش در می‌آید؟

۱) $\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = y + x \pm ۲\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}$　　۲) $\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = y - x \pm ۲\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}$　　۳) $\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = y + x \pm ۲\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}$　　۴) $\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = y - x \pm ۲\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به معادله‌ی داده شده، $A = ۱, B = ۲, C = \cos x$، لذا داریم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ - ۲\left(\frac{dy}{dx}\right) + \cos x = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ - ۴\cos x = ۴(۱ - \cos x) > ۰$$

از حل معادله فوق دو جواب مقابل را داریم: $\frac{dy}{dx} = ۱ \pm \sqrt{۱ - \cos x} = ۱ \pm \sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲} \Rightarrow y = x + ۲\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲} + c_۱ \quad , \quad y = x - ۲\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲} + c_۲$

تغییر متغیرهای مناسب، جواب‌های ثابت معادلات فوق هستند و لذا داریم:

$$\eta = c_۱ = y - x - ۲\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲} \quad , \quad \xi = c_۲ = y - x + ۲\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}$$

مثال۲: فرم کانونی معادله $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ به کدام صورت است؟

۱) $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\beta}u_\beta$ ۲) $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\alpha}u_\beta$ ۳) $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{1}{2\beta}u_\alpha$ ۴) $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{1}{2\beta}u_\alpha$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که $B^2 - 4AC = -4x^2 < 0$، لذا معادله بیضوی است و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = ix \Rightarrow dy = ixdx \Rightarrow y = \frac{1}{2}ix^2 + k_1 \Rightarrow 2y - ix^2 = c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -ix \Rightarrow dy = (-ix)dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2}ix^2 + k_2 \Rightarrow 2y + ix^2 = c_2$$

c_1 و c_2 را به‌صورت مقابل می‌نویسیم و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}\zeta = 2y - ix^2 \\ \eta = 2y + ix^2\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{\zeta+\eta}{2} = 2y \\ \beta = \frac{\zeta-\eta}{2i} = -x^2\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\times(0) + \frac{\partial u}{\partial \beta}(-2x) = -2x\cdot\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-2x\frac{\partial u}{\partial \beta}) = -2(\frac{\partial u}{\partial \beta}) + [\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x}](-2x) = -2(\frac{\partial u}{\partial \beta}) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}(-2x)(-2x) = \mathbf{-2(\frac{\partial u}{\partial \beta}) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}(4x^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y} = 2(\frac{\partial u}{\partial \alpha}) + \frac{\partial u}{\partial \beta}\times(0) = 2(\frac{\partial u}{\partial \alpha})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}) = (\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y})\times 2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\times(2)\times 2 = \mathbf{4(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2})}$$

حالا در معادله جایگذاری می‌کنیم، دقت کنید $\beta = -x^2$ بنابراین به جای x^2 در معادله $-\beta$ قرار می‌دهیم:

$$-2u_\beta - (u_{\beta\beta})(4\beta) + (-\beta)(4u_{\alpha\alpha}) = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 4\beta} -\frac{1}{2\beta}(u_\beta) - u_{\beta\beta} - u_{\alpha\alpha} = 0 \Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\beta}u_\beta$$

مثال۳: نوع معادلهٔ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y$ و صورت نرمال آن کدام است؟

۱) سهموی، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}e^y$ ۲) سهموی، $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4}e^y$ ۳) بیضوی، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4}e^x$ ۴) بیضوی، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بنابراین معادله از نوع سهمی‌گون می‌باشد. $\Leftarrow \Delta = B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$

برای به دست آوردن تغییر متغیرهای مناسب برای تبدیل معادله فوق به فرم استاندارد داریم:

$$A = 1, B = -4, C = 4 \Rightarrow 1(\frac{dy}{dx})^2 - (-4)(\frac{dy}{dx}) + 4 = 0 \Rightarrow (\frac{dy}{dx} + 2)^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$$

$$dy = -2dx \Rightarrow \int dy = -2\int dx \Rightarrow y = -2x + c \Rightarrow y + 2x = c$$

یکی از تغییر متغیرها $r = y + 2x$ می‌باشد و چون معادله مشخصه ریشه مضاعف داشت، تغییر متغیر دیگر به صورت دلخواه $s = y$ انتخاب می‌شود:

$$\begin{cases}r = 2x + y \\ s = y\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}(2) + 0 = 2(\frac{\partial u}{\partial r})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(2\frac{\partial u}{\partial r}) = 2(\frac{\partial^2 u}{\partial r})(\frac{\partial r}{\partial x}) = \mathbf{4(\frac{\partial^2 u}{\partial r})}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}[(\frac{\partial u}{\partial y}).(\frac{\partial s}{\partial y}) + (\frac{\partial u}{\partial r}).(\frac{\partial r}{\partial y})] = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial s}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial r})$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}).(\frac{\partial s}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial s}).(\frac{\partial r}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial r}).(\frac{\partial r}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial r}).(\frac{\partial s}{\partial y}) = \mathbf{u_{rr} + u_{ss} + 2u_{rs}}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial y})\cdot(\frac{\partial r}{\partial x}) = 2\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial y}) = 2\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}) = 2\frac{\partial}{\partial r}(u_r + u_s) = \mathbf{2u_{rr} + 2u_{rs}}$$

$$\Rightarrow u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y \Rightarrow 4u_{rr} - 4(2u_{rr} + 2u_{rs}) + 4(u_{rr} + u_{ss} + 2u_{rs}) = e^y$$

$$\Rightarrow 4u_{ss} = e^y = e^s \Rightarrow u_{ss} = \frac{1}{4}e^s \Rightarrow \boxed{u_{yy} = \frac{1}{4}e^y}$$