مدرسان شریف

فصل اول

«جبر گزاره‌ها و مبانی منطق»

مقدمه

ارسطو اولین کسی بود که به طور نظام‌مند روی استدلال منطقی کارکرد. بعد از آن لایبنیتس بسط منطق نمادی را بعنوان زبان علمی جهانی بررسی نمود. بعدها جرج بول و شرودر روی مفاهیم حساب استنتاج و منطق سوری کار کردند، این نتایج به صورت درسهایی در جبر منطق معروف شدند. در سده اخیر بزرگانی چون برتراند راسل، استنت، مک‌آلیستر، راس و رایت روی منطق کار کردند و نتایج فلسفی آن را بررسی نمودند.

در منطق، برهان از اهمیت خاصی برخوردار است. در واقع برهان مرجعیت‌بخش چیزی است که اگر آن چیز بعنوان یک عقیده محض (یعنی بدون برهان) بیان شود، ممکن است مورد قبول قرار نگیرد. مفهوم برهان همراه با مفهوم قضیه به کارمی‌رود. قضیه، گزاره‌ای است که درستی آن براساس اصول موضوع است. درباره عدم امکان نادیده گرفتن اهمیت منطق و قاعده‌های استنتاج جمله حکیمانه زیر از آخلیس در کتاب لویس کارول قابل ذکر است. سنگ پشت به آخلیس گفت:

"آنگاه منطق گلوی تو را خواهد فشرد و تو را مجبور به انجام آن خواهد کرد."

منطق به مطالعه و بررسی استدلال و استنتاج گفته می‌شود و به ویژه، به این مساله می‌پردازد که آیا یک استدلال درست است یا خیر و همچنین روی رابطه بین جملات تاکید دارد که در تضاد با محتوای هیچ گزاره‌ای نباشد. به عنوان مثال جملات زیر را در نظر بگیرید:

ـ تمام ریاضیدانان، کلاه می‌پوشند.

ـ هر کس که کلاه بپوشد یک جبردان است.

ـ بنابراین تمام ریاضیدانان جبردان هستند.

از دیدگاه عملی، منطق هیچ تلاشی برای تعیین آن که کدام یک از این گزاره‌ها درست است انجام نمی‌دهد؛ اما اگر دو گزاره اول درست باشد منطق حکم می‌کند گزاره سوم نیز صحیح است.

از روش‌های منطقی در ریاضیات گسسته برای اثبات قضایا و در علوم کامپیوتر برای اثبات اینکه برنامه‌ای به درستی کار کند، استفاده می‌شود.

در این فصل برخی از روش‌های کلی اثبات را مورد بررسی قرار می‌دهیم که یکی از آن‌ها، استقراء ریاضی می‌باشد. از این روش در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده بسیاری می‌شود.

❖ **تعریف ۱: منطق** به دنباله‌ای از قوانین که یک استدلال را مشخص می‌کنند، منطق گویند. در منطق دودویی همواره صحبت از درستی یا نادرستی عبارات می‌باشد و متغیرهای دودویی روی دامنه $\{0,1\}$ یا $\{T,F\}$ تعریف می‌شوند.

کاربرد منطق دودویی تنها در علوم کامپیوتر نیست، بلکه در زندگی روزمره نیز از آن استفاده می‌شود. هنگامی که در رابطه با علت رخداد یک واقعه بحث می‌کنیم، بطور ناخودآگاه درباره منطقی بودن استدلال‌های انجام شده فکر می‌کنیم و اصولاً کسی را انسان منطقی می‌دانیم که بتواند این استدلال‌ها را بهتر درک کند. بنابراین آنچه که در این درس مطرح می‌شود را می‌توان با منطقی که همواره با آن سر و کار داریم در کنار هم قرار داد.

❖ **تعریف ۲: گزاره** جمله‌ای خبری است که بتوان درستی یا نادرستی آن را مشخص نمود.

به عبارت دیگر، به کلیه جملاتی که در طول روز برای بیان اخبار، وقایع و رخدادها استفاده می‌کنیم، در صورتی که تمامی افراد نسبت به صحت آنها تفکر یکسان داشته باشند، یا اینکه بتوان به طریقی به طور قطع درستی آن را مشخص کرد، گزاره گفته می‌شود. به عنوان مثال این جمله «تعداد سیارات کل هستی هفتاد و پنج میلیارد است» یک گزاره است ولی درستی یا نادرستی آن را نمی‌توان مشخص نمود.

مثال۱: عبارات زیر را درنظر بگیرید. چند تا از این عبارات گزاره می‌باشند؟

الف) اگر $2\times 2=5$ آنگاه $1=0$ **ب) این جمله دارای ارزش false است.**

ج) $7+7=16$ **د) این جمله دارای ارزش false است یا $2\times 2=5$**

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تنها عبارت الف یک گزاره می‌باشد. عبارت ب و د گزاره نمی‌باشند: زیرا نمی‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد. عبارت ج نیز از آنجایی که در مبناهای مختلف دارای ارزش‌های متفاوتی می‌باشد، گزاره نیست.

یکی از پارادوکس‌های جالب گزاره‌ها، جمله زیر می‌باشد:

A : «این جمله نادرست است»

در اینجا منظور از این جمله همان جمله A می‌باشد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت اول: اگر A درست باشد آنگاه طبق گفته خودش، A نادرست خواهد بود. بنابراین به تناقض رسیدیم.

حالت دوم: اگر A نادرست باشد آنگاه گفته آن غلط خواهد بود بنابراین A نادرست نیست که این یک تناقض است.

با توجه به دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم که A نه درست و نه نادرست است. بنابراین A یک گزاره نمی‌باشد.

مثال ۲: کدام‌یک از جملات زیر یک گزاره نمی‌باشد؟

۱) تنها عدد صحیح مثبت که ۷ را می‌شمارد، خود ۷ است.

۲) برای هر عدد صحیح مثبت n، یک عدد اول بزرگتر از n وجود دارد.

۳) زمین تنها سیاره منظومه شمسی است که حیات در آن جریان دارد.

۴) روز جمعه برای رفتن به تئاتر شهر برای تماشای «بینوایان» دو بلیط بخر.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» جمله گزینه ۱ جمله‌ای نادرست است، بنابراین درستی یا نادرستی آن به طور قطع قابل تشخیص است و یک گزاره می‌باشد. همچنین جمله ۲ یک جمله درست است بنابراین یک گزاره می‌باشد. درباره درستی یا نادرستی جمله ۳ باید گفت که هنوز کسی به طور قطع این موضوع را نمی‌داند ولی این جمله بالاخره یا درست و یا نادرست است. جمله گزینه ۴ نه درست است و نه نادرست، این جمله یک جمله دستوری است و نمی‌تواند یک گزاره باشد.

همانگونه که در تعریف گزاره بیان شد، بایستی تمام افراد نظر مشابهی را نسبت به درستی یک گزاره داشته باشند. عبارت «این کفش گران قیمت است» را در نظر بگیرید، از آنجائیکه با توجه به وضع اقتصادی، افراد مختلف نظرهای متفاوتی نسبت به درستی این عبارت دارند، این عبارت یک گزاره نمی‌باشد. همچنین عبارت «این کفش زیباست» نیز با توجه به آنکه سلیقه افراد متفاوت است، نمی‌تواند یک گزاره باشد.

تابع ارزش

همانگونه که یک رابطه ریاضی ممکن است تابع باشد، رابطه ارزش‌های دو گزاره نیز ممکن است در حالت‌هایی تابع باشند. اگر بتوان ارزش یک گزاره q را از روی ارزش گزاره p معلوم کرد گزاره q را تابع ارزش گزاره p می‌نامند. در حالت کلی اگر گزاره‌ای چون p به ارزش گزاره‌های دیگر چون q، r، w و ... بستگی داشته باشد و برحسب آنها به دست آید، p را تابع ارزش گزاره‌های مزبور می‌نامند. اگر دو گزاره تابع ارزش یکدیگر باشند دارای رابطه ارزشی نیز هستند، اما ممکن است ارزش‌های دو گزاره در رابطه باشند ولی آن دو گزاره تابع ارزش یکدیگر نباشند. دو گزاره ساده که تابع ارزش یکدیگر باشند، نسبت به هم یکی از سه حالت برابری هم ارزی یا غیر هم‌ارزی را خواهند داشت. که در ادامه هر یک از سه حالت را توضیح خواهیم داد:

حالت اول: همانی یا برابری : اگر دو گزاره p ، q چنان باشند که p همان q باشد می‌گوییم p با q معادل یا برابر است و می‌نویسیم $p = q$. در ضمن دو گزاره برابر، تابع ارزش یکدیگر نیز هستند. به عنوان مثال دو گزاره «علی دانشجو است» و «علی محصل دانشگاه است» با هم برابرند.

حالت دوم: هم‌ارزی: اگر دو گزاره چنان باشند که هنگامی که یکی از آنها درست است دیگری هم درست باشد و بالعکس اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست ارزیابی شود، هم‌ارز نامیده می‌شوند. بنابراین برای گزاره‌ها هنگامی هم‌ارزی را داریم که اگر مثلاً گزاره p درست باشد، گزاره q نیز درست باشد و اگر نادرست است q نیز نادرست باشد. بنابراین گزاره‌های هم ارز همواره در ارتباط و در تماس با یکدیگر و از یکدیگر تاثیر دقیقاً مشابهی می‌گیرند.

مجموعه زوج‌های مجموعه‌های هم‌ارز یا همگی یک هستند و یا همگی صفر هستند که این نشان دهنده یک تابع می‌باشد. بنابراین اگر دو گزاره هم‌ارز باشند تابع ارزش یکدیگرند. هم‌ارزی دو گزاره p و q را با $p \equiv q$ یا $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند. به عنوان مثال دو گزاره زیر هم‌ارز هستند.

p: حسن برادر تنی حسین است. q : حسن فرزند پدر و مادر حسین است.

حالت سوم: ناهم‌ارزی (تباین): دو گزاره که هم‌ارز نباشند غیر هم‌ارز نامیده می‌شوند. دو گزاره هم‌ارز نسبت به هم یکی از حالت‌های غیر هم‌ارزی، ناسازگاری، سازش‌پذیری و درون ارزی را دارند.

ناارزی (نفی = تناقض) : اگر دو گزاره چنان باشند که در صورتی که یکی از آنها درست باشد دیگری نادرست باشد و بالعکس هنگامی که یکی از آنها نادرست باشد دیگری درست باشد غیر هم‌ارز یکدیگر یا نقیض یکدیگرند. دو گزاره که غیر هم‌ارز یکدیگر باشند تابع ارزش یکدیگرند.

ناسازگاری (تضاد): به دو گزاره که نتوانند با هم درست باشند، ناسازگار یا متضاد گویند. بنابراین از دو گزاره ناسازگار یکی از آنها یا هردوی آنها نادرست است. منظور از سازگاری بین دو گزاره این است که هر دو گزاره با هم درست باشند.

سازش‌پذیری (تداخل تحت تضاد): به دو گزاره‌ای که هر دو با هم نادرست نباشند سازش‌پذیر گفته می‌شود. بنابراین از دو گزاره سازش پذیر یکی از آنها یا هر دوی آنها درست است.

درون ارزی یا تداخل: هرگاه دو گزاره چنان باشند که چون اولی درست است دومی نیز درست باشد و چون دومی نادرست است پس اولی نیز نادرست است، گفته می‌شود که گزاره اول، نسبت به گزاره دوم درون ارز یا متداخل است. در چنین وضعی اگر گزاره اول نادرست باشد، دومی ممکن است یا نادرست باشد یا بالعکس.

❖ **تعریف ۳: گزاره ساده یا اتمی** گزاره‌ای است که قابل تجزیه به گزاره‌های دیگر نباشد. گزاره مرکب گزاره‌ای است که از ترکیب چند گزاره ساده تشکیل شده است.

گزاره‌هایی مانند «هوا بارانی است» و «سینما می‌روم» گزاره‌های ساده اتمی می‌باشند. در گفتار و نوشتار روزمره گزاره‌ها را با استفاده از رابطه‌هایی مانند (and) و یا (or) با هم ترکیب کرده و به گزاره‌های مرکب می‌رسیم. به چنین رابطه‌هایی عملگر گفته می‌شود که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

ـ **عملگر نقیض (NOT):** این عملگر یک عملگر یکتایی می‌باشد یعنی تنها روی یک عملوند عمل می‌کند و مقدار ورودی خود را تغییر می‌دهد؛ اگر ارزش ورودی False باشد آن را True می‌کند و اگر ارزش ورودی True باشد آن را False می‌کند. به عبارت دیگر اگر گزاره‌ای راست (دروغ) باشد، نقیض آن دروغ (راست) است، اگر P یک گزاره باشد، آنگاه «چنین نیست که» را نقیض P گوئیم و با علامت $\sim P$ نمایش می‌دهیم.

➢ **توجه:** در صحبت‌های روزمره از این عملگر برای منفی ساختن فعل جمله استفاده می‌شود. مثلاً اگر عملگر نقیض روی گزاره «من الان غذا می‌خورم» عمل کند حاصل جمله «من الان غذا نمی‌خورم» خواهد بود.

ـ **عملگر ترکیب عطفی $\wedge$ (یا AND):** این عملگر یک عملگر دوتایی است یعنی دو ورودی یا دو عملوند را دریافت کرده و آنها را با هم ترکیب عطفی می‌کند.

ترکیب عطفی p و q که به صورت $p \wedge q$ یا pq یا p.q نشان داده می‌شود، گزاره روبه‌رو است: p and q

گزاره $p \wedge q$ در صورتی راست است که p و q هر دو راست باشند.

➢ **توجه:** در صحبت‌های روزمره برای ترکیب عطفی دو جمله از حرف «و» استفاده می‌کنیم. مثلاً دو گزاره «امروز یکشنبه است» و «امروز هوا بارانی است» را در نظر بگیرید. گزاره ترکیبی «امروز یکشنبه است و امروز هوا بارانی است» تنها در صورتی درست است که هر دو گزاره‌ی اولیه بطور همزمان درست باشند.

ـ **عملگر ترکیب فصلی ($\vee$ یا OR):** این عملگر نیز یک عملگر دوتایی است. ترکیب فصلی p و q که به صورت $p \vee q$ یا $p + q$ نشان داده می‌شود گزاره روبه‌رو است: p or q

گزاره‌هایی مانند $p \wedge q$ و $p \vee q$ که از ترکیب گزاره‌ها به دست می‌آیند، گزاره های مرکب نامیده می‌شوند. در این کتاب برای نمایش گزاره‌ها از حروف کوچک انگلیسی استفاده شده است. علاوه بر این برای تعریف گزاره p که به صورت $۲ + ۳ = ۱۰$ می‌باشد، از نمادگذاری مقابل استفاده می‌کنیم: $p : ۲ + ۳ = ۱۰$

گزاره $p \vee q$ در صورتی دروغ است که هم p و هم q دروغ باشد.

➢ **توجه:** در صحبت‌های روزمره برای ترکیب فصلی دو جمله از حرف «یا» استفاده می‌کنیم. بعنوان مثال دو گزاره «امروز یکشنبه است» و «امروز به استخر می‌روم» را در نظر بگیرید. گزاره ترکیبی «امروز یکشنبه است یا امروز به استخر می‌روم» تنها در صورتی نادرست خواهد بود که هر دو گزاره‌ی اولیه به طور همزمان، نادرست باشند.

به عنوان مثال فرض کنید که دو گزاره p و q به صورت مقابل تعریف شده باشد: $p : ۲ + ۳ = ۱۰$ q: یک قرن صد سال است

در این صورت ترکیب عطفی دو گزاره p و q به صورت مقابل می‌باشد: $p \wedge q : ۲ + ۳ = ۱۰$ و یک قرن صد سال است.

ترکیب فصلی p و q نیز به صورت مقابل می‌باشد: $p \vee q : ۲ + ۳ = ۱۰$ یا یک قرن صد سال است.

مثال ۳: گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

p: بلز پاسکال چندین ماشین‌حساب مختلف را اختراع کرد.

q: اولین کامپیوتر تمام الکترونیکی در قرن بیستم ساخته شد.

r: عدد π در سال ۱۹۵۴ تا یک میلیون رقم بعد از اعشار محاسبه شد.

گزاره‌های فوق را می‌توان بصورت مرکب زیر در نظر گرفت:

بلز پاسکال چند ماشین‌حساب مختلف اختراع کرد و چنین نیست که اولین کامپیوتر تمام الکترونیکی در قرن بیستم ساخته شد یا عدد π در سال ۱۹۵۴ تا یک میلیون رقم بعد از اعشار محاسبه شد.

درباره گزاره فوق با توجه به اینکه p و q صحیح و r نادرست است، چه می‌توان گفت؟

۱) گزاره مرکب بیان شده همواره نادرست است.
۲) گزاره مرکب بیان شده همواره صحیح است.
۳) ترکیب‌های موجود در گزاره مرکب غیرمجاز هستند.
۴) گزاره مرکب فوق گاهی اوقات نادرست و گاهی اوقات درست می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزاره مرکب بیان شده را می‌توان به صورت $(p \wedge \overline{q}) \vee r$ نمایش داد که بصورت زیر درستی یا نادرستی آن را بررسی می‌کنیم:

$$(p \wedge \overline{q}) \vee r \equiv (T \wedge \overline{T}) \vee F \equiv (T \wedge F) \vee F \equiv F \vee F \equiv F$$

بنابراین این گزاره همواره نادرست است.

جدول ارزش درستی

ارزش درستی گزاره‌هایی مانند ترکیب عطفی و فصلی را می‌توان با جداول درستی آن‌ها توصیف کرد.

جدول صحت یک گزاره منطقی، جدولی است که در آن تمام حالات مختلف تک‌تک گزاره‌های اتمی تشکیل دهنده آن گزاره ذکر شده است و در هر یک از حالات ارزش گزاره مرکب بیان شده باشد. از آنجایی که در منطقی دودویی، هر گزاره می‌تواند دارای یکی از دو ارزش True یا False باشد.

p	q	$\overline{p}$	$p+q$	$p.q$	$p\oplus q$
۰	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰

جدول درستی گزاره‌ی مرکب p که از گزاره‌های $p_1, p_2, \cdots, p_n$ تشکیل شده است، شامل لیستی از تمام ترکیب‌های ممکن ارزش درستی گزاره‌ها می‌باشد. در این جدول از T برای نمایش درست و از F برای نمایش نادرست استفاده می‌شود. بنابراین اگر یک گزاره، مرکب از n گزاره اتمی تشکیل شده باشد آنگاه جدول صحت دارای 2^n سطر خواهد بود.

از or در ترکیب فصلی $p\vee q$ به مفهوم شمول، یعنی شامل هر دو، استفاده می‌شود. یعنی $p\vee q$ درست است اگر p یا q یا هر دو درست باشند و $p\vee q$ تنها در صورتی نادرست است که هم p وهم q نادرست باشند. در ادامه با یای مانع جمع (یای عدم شمول) آشنا خواهیم شد.

ـ **عملگر ترکیب‌یای مانع جمع $\oplus$ (یاXOR)**: این عملگر یک عملگر دوتایی است. ارزش این گزاره در صورتی درست خواهد بود که فقط یکی از گزاره‌های اولیه صحیح باشند.

توجه: در صحبت‌های روزمره برای ترکیب‌یای مانع جمع دو جمله از اصطلاح «و/ یا» استفاده می‌کنیم. بعنوان مثال دو گزاره «امروز یکشنبه است» و «امروز دوشنبه است» را در نظر بگیرید. گزاره ترکیبی «امروز یکشنبه است و/یا امروز دوشنبه است» برای ترکیب این دو گزاره استفاده می‌شود.

عملگرهای پایه‌ای منطق عبارتند از AND، OR و NOT . بقیه عملگرها را می‌توان با ترکیب این عملگرها بدست آورد. به عنوان مثال عملگر یای انحصاری را می‌توان از رابطه روبرو بدست آورد: $p\oplus q\equiv p\overline{q}+\overline{p}q$

نکته ۱: عملگرد یای انحصاری در مواقعی کاربرد دارد که امکان برقراری هر دو گزاره با هم وجود ندارد ولی می‌خواهیم آنها را با هم جمع کنیم. به عنوان مثال فرض کنید که نمی‌دانیم امروز ۱۷ام یا ۱۸ام ماه است و بخواهیم تاریخ امروز را به طور تقریبی ذکر کنیم.

دلیل این امر این است که هیچ روزی در دنیا وجود ندارد که هم ۱۷ام و هم ۱۸ام باشد و بکاربردن یای انحصاری بر این موضوع دلالت دارد.

عملگر نقیض یای انحصاری ($\odot$ یا XNOR)

این عملگر عکس عملگر XOR عمل می‌کند. به عبارت دیگر هنگامی خروجی True است که هر دو ورودی آن مقداری برابر داشته باشند. این عملگر را می‌توان با استفاده از عملگرهای مقدماتی به صورت روبرو نوشت: $p\odot q\equiv\overline{p}\,\overline{q}+pq$

ـ **عملگر NOR ($\downarrow$)**: این عملگر عکس عملگر OR می‌باشد یعنی هنگامی خروجی آن True است که هر دو ورودی برابر False باشند. با استفاده از ترکیب عملگرهای OR و NOT این عملگر را می‌توان به صورت روبرو نوشت: $p\downarrow q\equiv\overline{(p+q)}\equiv\overline{p}.\overline{q}$

ـ **عملگر NAND ($\uparrow$)**: این عملگر عکس عملگر AND عمل می‌کند، یعنی اگر دو ورودی برابر True باشند، خروجی False می‌شود. با استفاده از ترکیب عملگرهای AND و NOT این عملگر را می‌توان به صورت روبرو نوشت: $p\uparrow q\equiv\overline{(p.q)}\equiv(\overline{p}+\overline{q})$

ـ **عملگر ترکیب شرطی یا ایجاب ($p\to q$)**: اگر p وq دو گزاره باشند گزاره «اگر p آنگاه q» را ترکیب شرطی p با q می‌نامیم. حاصل این گزاره تنها در صورتی نادرست است که p (مقدم) درست و q (تالی) نادرست باشد. بنابراین رابطه آن بصورت روبرو است: $p\to q\equiv\overline{p}+q$

ـ **عملگر ترکیب دوشرطی یا هم‌ارزی ($p\leftrightarrow q$)**: اگر p وq دو گزاره باشند، آنگاه گزاره «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p» که ترکیب عطفیِ دو گزاره شرطی $p\to q$ و $q\to p$ می‌باشد را ترکیب دو شرطی دو گزاره p وq می‌نامیم. تنها در صورتی حاصل این عملگر درست است که دو گزاره p و q دارای ارزش یکسانی باشند، عبارت آن بصورت روبرو می‌باشد: $p\leftrightarrow q\equiv pq+\overline{p}\overline{q}$

مثال ۴: در کدام‌یک از زوج گزاره‌های P و Q داریم: $P\leftrightarrow Q$ ؟

۱) $P=p\wedge(\overline{q}\vee r), Q=p\vee(q\wedge\overline{r})$

۲) $P=p\to q, Q=p\leftrightarrow q$

۳) $P=(p\to q)\wedge(q\to r), Q=p\to r$

۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۴» گزینه ۱ به صورت زیر می‌باشد.

همانطور که ملاحظه می‌کنید، در اینجا برای خلاصه‌نویسی، جدول صحت را براساس متغیرهای p و q نوشتیم ولی واضح است که دو عبارت مفروض در همه نقاط با هم برابر نمی‌باشند. بنابراین هم‌ارز نیستند. به همین ترتیب عدم هم‌ارزی بقیه گزینه‌ها را بررسی کنید.

p	q	$p\wedge(\overline{q}\vee r)$	$p\vee(q\wedge\overline{r})$
F	F	F	F
F	T	F	$\overline{r}$
T	F	T	T
T	T	r	T

تبدیل یا جایگشت

به بیان غیررسمی، منظور از جایگشت، جابجایی اجسام می‌باشد و به بیان دقیق جایگشت یک تابع جابجایی می‌باشد که در آن مکان هرشیء مشخص شده است. به عبارت دیگر ترتیب قرار گرفتن اشیاء، در مکان‌های مشخصی را جایگشت نامند. به عنوان مثال فرض کنید چهارجسم A و B و C و D داشته باشیم. در این صورت $(1,2,3,4)$ جایگشتی از این چهار شیء است که در آن هر شیء در جای خود قرار دارد و جایگشت $(2,1,4,3)$ جایگشتی از این چهارشیء است که در آن شیء ۱ با شیء ۲ و شیء ۳ با شیء ۴ جایگاه‌شان را عوض کرده‌اند. اگر n شیء داشته باشیم، آنگاه تعداد جایگشت‌های به‌صورت زیر بدست می‌آید:

ـ شیء اول می‌تواند در هر یک از n جایگاه قرار بگیرد و

ـ شیء دوم می‌تواند در هر یک از $n-1$ جایگاه قرار بگیرد و

⋮

ـ شی n ام می‌تواند در یک جایگاه باقی مانده قرار بگیرد.

بنابراین تعداد جایگشت‌های n شیء برابر است با: $n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times 1=n!$

حال اگر بخواهیم تنها m شیء از این n شیء را در کنار هم قرار دهیم باز هم می‌توان از رابطه جایگشت بدین صورت استفاده کرد که:

ـ m شیء از n شیء را به $\binom{n}{m}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

ـ m شیء انتخاب شده را جایگشت می‌دهید $(m!)$

بنابراین تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $\binom{n}{m}\times m!$

راه دیگر بررسی این مسأله این است که m جایگاه برای قرار دادن m نفر انتخاب شده در نظر بگیریم و سپس آنها را به ترتیب زیر پر کنیم:

ـ در جایگاه اول یکی از n نفر می‌توانند قرار بگیرند.

ـ در جایگاه دوم یکی از $n-1$ نفر می‌توانند قرار بگیرند.

⋮

ـ در جایگاه mام یکی از $(n-(m-1))$ نفر می‌توانند قرار بگیرند.

بنابراین تعداد راه‌های تشکیل این جایگشت برابر است با: $n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}=\binom{n}{m}\times m!$

راه‌حل اول به دلیل منطق ساده‌تری که دارد بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. به طور کلی تعداد جایگشت‌های m شیء از n شیء را با $p(n,m)$ نشان می‌دهند و با توجه به توضیحات فوق داریم:

$$p(n,m)=n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

در بحث فوق فرض بر این بود که اشیاء داده شده متمایز بودند. حال حالتی را در نظر بگیرید که اشیاء داده شده متمایز نباشند، به عنوان مثال فرض کنید که بخواهیم تعداد جایگشت‌های سه شیء B, A_2, A_1 را حساب کنیم که A_2, A_1 اشیاء یکسانی هستند. با توجه به آنچه که در مبحث قبل دیدیم، تعداد جایگشت‌های این سه شیء برابر است با $3!=6$ ولی با توجه به تکراری بودن اشیاء در این ۶ جایگشت، جایگشت‌های تکراری نیز وجود دارد.

به عنوان مثال جایگشت A_1BA_2 و جایگشت A_2BA_1 یکسان هستند. باید به طریقی تعیین کنیم که چه تعداد از این جایگشت‌ها تکراری می‌باشند. با کمی تفکر متوجه می‌شویم که از آنجایی که A_2, A_1 یکسان هستند، بنابراین هر جایگشت بین این دو شیء هیچ تاثیری در جایگشت کلی ندارد. بنابراین با وجود جایگشت این‌ها، تعداد جایگشت‌های کلی !۲ برابر می‌شود. بنابراین کل تعداد جایگشت‌های سه شیء A_2, B, A_1 برابر است با $3=\frac{3!}{2!}$.

در حالت کلی اگر بخواهیم تعداد جایگشت‌های n شیء را حساب کنیم که:

ـ n_1 شیء آنها از نوع اول

ـ n_2 شیء آنها از نوع دوم

⋮

ـ n_k شیء آنها از نوع kام

باشند آنگاه داریم: $\text{تعداد جایگشت‌های متمایز}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

مثال۷: می‌خواهیم از بین ۱۰ دانشجو ۵ نفر را انتخاب کنیم و آنها را در یک ردیف برای عکس گرفتن کنار هم بچینیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۳۰۲۴۰ ۲) ۷۵۶۸۰ ۳) ۳۲۰۴۵ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این سوال مکان‌ها و تعداد ممکن افرادی که در هر یک از این مکان‌ها می‌توانند قرار گیرند را در نظر می‌گیریم و این حالات را در هم ضرب می‌کنیم.

اولین مکان		دومین مکان		سومین مکان		چهارمین مکان		پنجمین مکان	
۱۰	$\times$	۹	$\times$	۸	$\times$	۷	$\times$	۶	$=$ ۳۰۲۴۰

توجه کنید که در اینجا اگر این مکان‌ها به هر ترتیبی پر شوند باز هم نتیجه همین تعداد خواهد بود. مکان اول به ۱۰ طریق پر خواهد شد، زیرا که یکی از دانشجو درون آن قرار خواهند گرفت. مکان دوم به ۹ طریق پر خواهد شد زیرا یکی از ۹ دانشجوی باقیمانده (بجز دانشجویی که در مکان اول قرار گرفته است) در اینجا قرار خواهد گرفت و به همین ترتیب بقیه مکان‌ها پر خواهند شد.

مثال۸: تعداد مسیرهای واقع در صفحه xy از (۲ و ۱) به (۵ و ۶) در کدام گزینه آمده است. فرض بر این است که در هر حرکت تنها می‌توان یک خانه به سمت راست یا یک خانه به بالا برویم.

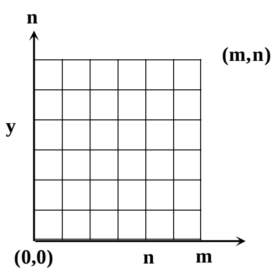
۱) $\frac{5!}{3!2!}$ ۲) $\frac{8!}{5!3!}$ ۳) $\frac{6!}{3!3!}$ ۴) $\frac{8!}{4!4!}$

پاسخ: گزینه «۲» در اینجا یکی از مسیرهای ممکن به صورت U, R, R, U, U, R, U, U می‌باشد.

که U بیانگر حرکت به بالا و R حرکت به راست را نشان می‌دهیم. بنابراین تعداد این راه‌ها برابر تعداد آرایش‌های مختلف از ۵ تا U و ۳ تا R می‌باشد. ولی از آنجا که ۵ تا U مانند هم هستند و همچنین ۳ تا R نیز مانند هم هستند نمی‌توان از فرمول معمولی جایگشت استفاده کرد، زیرا در این حالت همه داده‌ها از هم متمایز نمی‌باشند، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد راه‌های ممکن} = \frac{8!}{3!5!}$$

قضیه ۲: در یک مستطیل شبکه‌بندی شده‌ی $m \times n$ (مطابق شکل) تعداد مسیرهای بین $(0,0)$ و (m,n) به طور که فقط از دو نوع حرکت $(x,y) \to (x+1,y)$ و $(x,y) \to (x,y+1)$ بتوان استفاده نمود، برابر است با: $\frac{(m+n)!}{m!n!}$



تذکر۴: مشابه این قضیه را برای مکعب‌های ۳ بعدی نیز می‌توان در نظر گرفت، در واقع تعداد مسیرهای بین $(0,0,0)$ و (m,n,p) در یک مکعب به ابعاد m و n و p به طوری که فقط ۳ نوع حرکت $(x,y,z) \to (x,y,z+1)$ و $(x,y,z) \to (x,y+1,z)$ و $(x,y,z) \to (x+1,y,z)$ را بتوان انجام داد برابر است با: $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$

مثال۹: به چند طریق می‌توان از کیسه‌ای که شامل ۵۲ مهره در چهار رنگ است که برای هر رنگ از مهره‌ها،از شماره‌ی ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند. پنج مهره بیرون کشید، به طوری که؛ دو جفت مهره هم شماره داشته باشیم؟

۱) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{50}{1}$ ۲) $\binom{4}{2}\binom{13}{2}^2\binom{50}{1}$ ۳) $\binom{4}{2}\binom{13}{2}\binom{48}{1}$ ۴) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{48}{1}$

پاسخ: گزینه «۴» دو جفت مهره هم شماره داریم. ابتدا به $\binom{13}{2}$ طریق آن دو مهره را انتخاب می‌کنیم حال برای هر مهره انتخاب شده، ۴ رنگ داریم پس برای هر مهره به $\binom{4}{2}$ طریق حالت ۲ رنگ انتخاب می‌کنیم، و این که برای مهره پنجم دقت لازم را به کار می‌بریم.

زیرا مهره پنجم را از این ۴ مهره نمی‌توان انتخاب کرد زیرا جفت مهره‌های انتخاب شده، ۴ مهره از ۵۲ مهره است. پس مهره پنجم را به $\binom{48}{1}$ طریق می‌توان انتخاب کرد.

بنابراین جواب مورد نظر برابر است با: $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{48}{1}$

در زیر فرمول کلی هنگامی که اشیاء متمایز نباشند ارائه شده است.

نکته۲: در حالت کلی اگر شخصی در مثال ۸ بخواهد n واحد به جلو **(R)** و **m** واحد بالا **(U)** برود تعداد حالات برابر است با: $\frac{(n+m)!}{n!m!}$

در محاسبه جایگشت اشیاء حالات خاصی وجود دارد که می‌خواهیم تعدادی از اشیاء کنار هم نباشند یا بالعکس می‌خواهیم حتماً کنار هم باشند. اگر بخواهیم اشیاء خاصی کنار هم نباشند، رویکرد کلی این است که بقیه اشیاء را بجز این اشیاء خاص کنار هم می‌چینیم و سپس از بین جایگاه‌های بین و خارج این اشیاء مکان‌هایی را انتخاب کرد و این اشیاء خاص را درون آن‌ها قرار می‌دهیم. بدین ترتیب دیگر این اشیاء کنار هم قرار نخواهند گرفت. همچنین اگر بخواهیم اشیاء خاصی کنار هم باشند باید آنها را توسط یک طناب به هم بندیم و فرض کنیم که کل آنها یک شیء هستند. در این صورت اگر جایگشت این یک شیء را با بقیه اشیاء حساب کنیم، همواره آن اشیاء خاص کنار هم قرار خواهند گرفت.

مثال۱۰: به چند طریق می‌توان حروف a, b, c, d, e, e, e, e, e را آرایش داد به قسمی که هیچ e ی مجاور e ی دیگر نباشد؟

پاسخ: برای اینکار ابتدا حروف a, b, c, d را به !۴ حالت در کنار هم می‌چینیم، حال هر یک از e ها را درون یکی از ۵ مکان ایجاد شده در بین و خارج آنها قرار می‌دهیم. بنابراین تعداد کل حالات با توجه به یکسان بودن e ها همان !۴ خواهد بود.

مثال۱۱: حروف واژه‌ی VISITING را به چند راه می‌توان آرایش داد بطوریکه ۳ تا I کنار هم قرار بگیرند؟

۱) $\frac{8!}{3!}$　　۲) !۵　　۳) !۶　　۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» در این واژه حرف I سه بار تکرار شده است، بنابراین تعداد کل آرایش‌های ممکن عبارت است از: $\frac{8!}{3!}$ = جواب

حال برای آنکه ۳ تا Iها کنار هم باشند می‌توان تصور کرد که Iها با هم یک گروه را در کنار ۵ گروه دیگر تشکیل می‌دهند بنابراین در مجموع ۶ گروه داریم که می‌توانند به !۶ حالت آرایش مختلف داشته باشند.

مثال۱۲:

الف) برای همه حرف‌های SOCIOLOGICAL چند آرایش وجود دارد؟

ب) در چند تا از این آرایش‌ها A و G مجاورند.

ج) در چند تا از آرایش‌های قسمت الف حرف‌های صدادار مجاور هم هستند.

د) در چند تا از آرایش‌های قسمت ج حرفهای صدادار به ترتیب حروف الفبایی هستند؟ در چند تا از آرایش‌های قسمت الف اینگونه است؟

پاسخ: الف) در مجموعه حروف SOCIOLOGICAL دو حرف I، سه حرف O، دو حرف C و دو حرف L، یک حرف S، یک حرف G و یک حرف A وجود دارند بنابراین تعداد آرایش‌ها برابر است با: $\frac{12!}{2!3!2!2!1!1!1!}$ = تعداد آرایش‌ها

ب) حال فرض می‌کنیم که G, A تشکیل یک گروه دهند. بنابراین داریم:

که !۲ آخر به خاطر تعداد حالات ممکن در گروه G, A می‌باشد. $\frac{11!}{2!3!2!2!}\times 2!$ = تعداد آرایش‌ها

ج) حروف صدادار عبارتند از I, O, A با در نظر گرفتن همه اینها در یک گروه داریم. $\frac{7!}{2!\times 2!}\times\frac{6!}{2!\times 3!}$ = تعداد آرایش‌ها

که عبارت ضربی دوم تعداد جایگشت‌های I, O, A در گروه جدید است.

د) اگر در قسمت ج حروف صدادار به ترتیب حروف الفبایی باشند بنابراین تعداد جایگشت‌های آنها یکی بیشتر نخواهد بود و داریم: $\frac{7!}{2!\times 2!}$ = تعداد آرایش

اگر در قسمت الف حروف صدادار بخواهند به ترتیب حروف الفبایی رخ دهند، می‌توان این مسأله را اینگونه حل کرد که ابتدا همه‌ی حروف غیرصدادار را به $\frac{6!}{2!\times 2!}$ حالات آرایش می‌دهیم. حال A را مجاور G به !۲ حالت قرار می‌دهیم. حال ۷ شی قرار گرفته شده‌اند که بین آنها و خارج آنها ۸ جایگاه وجود دارد که برای قرار دادن مابقی ۵ حرف باقی مانند ۵۰ جایگاه از میان آنها انتخاب کرده و آنها را به ترتیب درون آنها قرار می‌دهیم.

$\frac{6!}{2!2!}\times 2!\times\binom{8}{5}$ = تعداد آرایش‌ها

ترکیب

ترکیب r شیء از n شیء را با $C(n,r)$ نشان می‌دهیم و هدف در آن انتخاب r شیء از n شیء می‌باشد. برای این کار ابتدا اشیاء را کنار هم قرار می‌دهیم سپس r شیء را بدین گونه انتخاب می‌کنیم که روی r شیء انتخاب شده برچسب یک و روی $(n-r)$ شیء انتخاب نشده برچسب صفر می‌گذاریم. بنابراین مسأله انتخاب r شیء از n شیء مشابه مسأله جایگشت‌هایی از r یک و $(n-r)$ صفر می‌باشد. با توجه به مسأله جایگشت با تکرار که در قبل بررسی کردیم، داریم:

$$C(n,r)=C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال۱۳: فردی می‌خواهد از ۳۶ دختر اول دبیرستان، چهار تیم والیبال ۹ نفره تشکیل دهد. به چند طریق می‌تواند تیم‌ها را تشکیل دهد و نام آنها را D, C, B, A بگذارد.

۱) $\frac{۳۶!}{۲۷!۱۸!۹!۱!}$ ۲) $\binom{۳۶}{۹}\binom{۱۸}{۹}$ ۳) $\frac{۳۶!}{۱۸!۱۸!}$ ۴) $\frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** برای تشکیل تیم A، ۹ دختر از ۳۶ دختر را به $\binom{۳۶}{۹}$ راه انتخاب می‌کنیم. سپس برای تشکیل تیم B ۹ دختر از ۲۷ دختر باقیمانده را به $\binom{۲۷}{۹}$ راه انتخاب می‌کنیم و به همین ترتیب برای تشکیل تیم‌های D,C به ترتیب $\binom{۱۸}{۹}$ و $\binom{۹}{۹}$ راه امکان‌پذیر است. طبق اصل ضرب تعداد راه‌های ممکن برابر است با: $\binom{۳۶}{۹}\times\binom{۲۷}{۹}\times\binom{۱۸}{۹}\times\binom{۹}{۹}=$

روش دوم: فرض کنید دانش‌آموزان در صفی قرار گرفته‌اند. برای انتخاب تیم‌ها برگه‌هایی که روی آنها D,C,B,A نوشته شده است، به دانش‌آموزان می‌دهیم. بنابراین تعداد راه‌هایی که می‌توان ۹ برگ A، ۹برگ B و ۹برگ C و ۹برگ D را در صفی قرار داد، برابر تعداد تیم‌های ممکن است که این برابر است با: $\frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!}$

مثال۱۴: تعداد آرایش‌های حرفهای واژه‌ی TALLAHASSEE برابر است با: $\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۱!۱!}=۸۳۱۶۰۰$

در چند تای اینها A ها کنار هم نیستند؟

۱) ۲۱۱۸×۲۳ ۲) ۲۳۰۱×۹۵ ۳) ۱۸۳۶×۶۰۰ ۴) ۵۰۴۰×۸۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $\frac{۸!}{۲!۲!۲!۱!۱!}\times\binom{۹}{۳}=۵۰۴۰\times۸۴=۴۲۳۳۶۰$

در این راه‌حل ابتدا A ها را کنار گذاشتیم و سپس از ۹ مکان ایجاد شده در بین و خارج از حروف سه مکان را انتخاب کرده‌ایم و A ها را درون آنها قرار داده‌ایم.

قضیه ۳: (قضیه دو جمله‌ای): بسط دوجمله‌ای به توان n را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$(x+y)^n=\binom{n}{۰}x^۰y^n+\binom{n}{۱}x^۱y^{n-۱}+\binom{n}{۲}x^۲y^{n-۲}+\cdots+\binom{n}{n}x^ny^۰=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

از آنجائی‌که اثبات این قضیه راه‌حل ترکیبیاتی دارد، آن را در اینجا ذکرکرده‌ایم.

اثبات: داریم:

$$(x+y)^n=\underbrace{(x+y)}_{\text{اولین عامل}}\times\underbrace{(x+y)}_{\text{دومین عامل}}\times\cdots\times\underbrace{(x+y)}_{n\text{امین عامل}}$$

ضریب $x^k\ y^{n-k}\ (۰\le k\le n)$ در عبارت حاصل، تعداد راه‌هایی است که می‌توانیم k تا x (در نتیجه n−k تا y) از این n عامل را انتخاب کنیم که برابر است $\binom{n}{k}$.

طبق تعریفِ انتخابِ k از n داریم: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

و به دلیل وجود چنین قضیه‌ای به $\binom{n}{k}$ اغلب، ضریب دوجمله‌ای گویند.

به عنوان مثال ضریب x^5y^2 در $(x+y)^7$ برابر است با: $\binom{7}{5}=21$

مثال ۱۵: مقدار ثابت در بسط عبارت $(3x^2-\frac{2}{x})^{15}$ کدام است؟

۱) $\binom{15}{10}3^5(-2)^{10}$ ۲) $\binom{10}{5}3^7(-2)^8$ ۳) $\binom{15}{10}3^{10}(-2)^5$ ۴) $\binom{10}{5}3^8(-2)^7$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$(3x^2-\frac{2}{x})^{15}=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}(3x^2)^{15-k}(-\frac{2}{x})^k=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}3^{15-k}(-2)^k x^{30-3k}$$

$$30-3k=0 \Rightarrow k=10 \Rightarrow \text{مقدار ثابت}=\binom{15}{10}3^{15-10}(-2)^{10}$$

مثال ۱۶: ضریب a^5b^2 در $(2a-3b)^7$ برابر است با:

۱) $\binom{7}{5}\times 288$ ۲) $\binom{7}{5}$ ۳) $-288\binom{7}{5}$ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در اینجا داریم: $y=-3b\,,\ x=2a$

بنابراین ضریب a^5b^2 به‌صورت زیر به دست می‌آید: $(2)^5(-3)^2\binom{7}{5}=288\binom{7}{5}$

نکته ۳: با قرار دادن $x=y=1$ در بسط دو جمله‌ای داریم:

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

و با قرار دادن $x=-1$ و $y=1$ در قضیه‌ی دو جمله‌ای داریم:

$$(-1+1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{0}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

که این دو رابطه روابط مهمی می‌باشند.

قضیه ۴: ضریب $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_t^{n_t}$ در $(x_1+x_2+\dots+x_t)^n$ برابر است با: $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}$

که در آن $n_1+n_2+\dots+n_t=n$ ، n_i ها $t\,,n\,,$ اعداد صحیح هستند.
اثبات این قضیه به‌صورت ترکیبیاتی می‌باشد که آن را در اینجا ذکر خواهیم کرد.

$$(x_1,x_2,\dots+x_t)^n=\underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_t)}_{\text{عامل اول}}\times\underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_t)}_{\text{عامل دوم}}\times\dots\times\underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_t)}_{\text{عامل } n \text{ام}}$$

بنابراین ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\dots x_t^{n_t}$ برابر است با انتخاب n_1 تا از این n عامل و سپس انتخاب n_2 تا از $n-n_1$ عامل باقیمانده و سپس انتخاب n_3 تا از $n-n_1-n_2$ عامل باقیمانده و به همین ترتیب داریم:

$$\text{ضریب}=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2\dots\dots-n_{t-1}}{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}$$

این ضریب را بصورت $\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_t}$ نیز نشان می دهند.

مثال ۱۷: حاصل $\sum_{i=0}^{15}\frac{1}{i+1}\binom{15}{i}$ کدام است؟

۱) 2^{10} ۲) 2^{12} ۳) 2^{14} ۴) 2^{16}

پاسخ: گزینه «۲»

$$\sum_{i=0}^{15}\frac{1}{i+1}\binom{15}{i}=\sum_{i=0}^{15}\frac{1}{i+1}\times\frac{15!}{i!\times(15-i)!}=\sum_{i=0}^{15}\frac{15!}{(i+1)\times i!\times(16-(i+1))!}$$

با قراردادن j به جای $i+1$ داریم:

$$=\sum_{i=0}^{15}\frac{15!\times 16}{(i+1)!\times(16-(i+1))!\times 16}=\frac{1}{16}\sum_{j=1}^{16}\frac{16!}{j!\times(16-j)!}$$

طبق نکته قبل:

$$=\frac{1}{16}\sum_{j=1}^{16}\binom{16}{j}=\frac{2^{16}}{16}=2^{12}$$

مثال۱۸: ضریب $x_1x_2x_3^2$ در بسط چند جمله‌ای $(x_1-2x_2+3x_3-4x_4)^4$ کدام است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲- ۴) ۲۱۶-

پاسخ: گزینه «۴»

$$1\times(-2)(3)^2\times\frac{4!}{1!\times1!\times2!}=-216$$

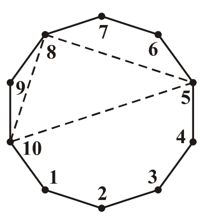
مثال۱۹: ضریب $a\,b^2\,c^4$ را در بسط عبارت $(2a+b-4c)^7$ حساب کنید.

پاسخ:

$$\text{ضریب}=(2)^1\,(1)^2\,(-4)^4\;\frac{7!}{1!\,2!\,4!}$$

مثال۲۰: با رئوس یک ۱۰ ضلعی منتظم، در صورتی که هیچ‌یک از اضلاع چندضلعی، ضلع مثلث نباشد، چند مثلث مشخص می‌شود؟

۱) ۷۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۵۰



پاسخ: گزینه «۳» ابتدا یکی از رئوس ۱۰ ضلعی را به $\binom{10}{1}$ طریق انتخاب می‌کنیم، سپس از ۹ رأس باقیمانده ۲ رأس را چنان انتخاب می‌کنیم که به این رأس و به یکدیگر مجاور نباشند. مثلاً اگر در ۱۰ ضلعی منتظم مقابل رأس ۱ را انتخاب کرده باشیم، از بین رئوس ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ باید ۲ رأس غیرمجاور انتخاب کنیم. که این کار به $\binom{7}{2}-6$ روش ممکن است.

لذا جواب مسأله باید برابر $\binom{10}{1}\left(\binom{7}{2}-6\right)$ باشد، اما این جواب باید بر ۳ تقسیم شود زیرا هر مثلث ۳ بار شمرده می‌شود مثلاً مثلث (۵ و ۸ و ۱۰) بستگی به این که ۵ یا ۸ یا ۱۰ اول انتخاب شود ۳ بار شمرده می‌شود. پس جواب مسأله برابر است با: $\dfrac{\binom{10}{1}\left(\binom{7}{2}-6\right)}{3}$ و این برابر است با: ۵۰.

ترکیب با تکرار

به یاد دارید که در مسأله ترتیب‌ها (جایگشت‌ها) اگر تکرار مجاز باشد، آنگاه جایگشت‌های r شی از n شی متمایز با تکرار برابر n^r خواهد بود. حال می‌خواهیم به بررسی مسأله مشابه در ترکیب با تکرار بپردازیم.

در اینجا می‌خواهیم r شیء یکسان را درون n ظرف متمایز توزیع کنیم. ایده انجام کار این است که ابتدا r شیء را کنار هم در یک صف قرار می‌دهیم سپس از $n-1$ جدا کننده برای افراز این r شیء به n دسته استفاده می‌کنیم. در اینجا هر طریقه قرار گرفتن این $(n-1)$ جدا کننده یک راه‌حل مساله می‌باشد. فرض کنید r شیء متناظر r صفر می‌باشند و $(n-1)$ جدا کننده متناظر $(n-1)$ یک می‌باشند. بنابراین مسأله توزیع r شیء یکسان درون n ظرف متمایز، مشابه مسأله جایگشت‌های r صفر و $(n-1)$ یک می‌باشد که برابر است با:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}=\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}$$

مثال۲۱: به چند طریق می‌توان ۱۰ مهره سفید (یکسان) را بین ۶ ظرف متمایز توزیع کرد.

۱) ۱۰۰۰　　۲) ۳۰۵۰　　۳) ۱۰۵۰　　۴) ۳۰۰۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌توان اینگونه تصور کرد که این ده مهره را در کنار یکدیگر در یک ردیف قرار می‌دهیم و برای انتخاب آنها از ۵ جدا کننده استفاده می‌کنیم. جدا کننده‌ها می‌توانند در هرجایی بین مهره یا قبل و بعد از آنها قرار گیرند. این جداکننده‌ها یکسان هستند و مهره‌هایی که قبل از جداکننده‌ی اول قرار دارند متعلق به ظرف اول و مهره‌هایی که بین جداکننده اول و دوم قرار دارند متعلق به ظرف دوم و به همین ترتیب این جداکننده‌ها، مهره‌ها را بین ۶ ظرف متمایز تقسیم خواهند کرد. اگر مهره‌ها را با ۰ و جداکننده‌ها را با ۱ نمایش دهیم، تعداد راههای توزیع ۱۰ مهره یکسان بین ۶ ظرف متمایز برابر تعداد آرایش‌هایی از ده تا صفر و پنج تا یک است که برابر است با: $\frac{۱۵!}{۱۰!۵!}=۳۰۰۳$

مثال۲۲: یک مغازه بستنی‌فروشی ۱۵ نوع مختلف بستنی دارد. فرض کنید وقتی وارد مغازه می‌شویم حداقل ۷ بستنی از هر نوع وجود دارد. در این صورت به چند طریق می‌توان ۷ بستنی از این بستنی‌ها را خرید؟

☑ **پاسخ:** با کمی تفکر به برابری این مسئله و تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n ظرف متمایز پی می‌بریم. در اینجا فرض می‌کنیم که بازای هر نوع بستنی ظرفی وجود دارد که با انداختن پول درون آن در واقع یک بستنی از آن نوع خریده‌ایم. بنابراین ۷ پول (یکسان) برای خرید ۷ بستنی درون ظرف آنها می‌اندازیم. بنابراین این تعداد برابر است با: $\binom{۷+۱۵-۱}{۷}$

مثال۲۳: تعداد تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادله مقابل چندتاست؟ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰$

☑ **پاسخ:** در اینجا ۴ ظرف متمایز $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ وجود دارند. ۱۰را بصورت ۱۰ تا یک در نظر بگیرید. هر جوابی از این معادله در واقع توزیع این ۱۰ تا یک یکسان بین $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ می‌باشد. بنابراین داریم: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی$=\binom{۱۰+۴-۱}{۱۰}$

مثال۲۴: به چند طریق می‌توان ۸ مهره سفید (یکسان) را درون ۵ ظرف متمایز توزیع کرد؟

۱) $\binom{۱۲}{۸}$　　۲) $\binom{۱۲}{۵}$　　۳) $\binom{۱۲}{۳}$　　۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» حل این مسأله هم‌ارز با یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۸$ می‌باشد که برابر است با: $C(۵+۸-۱,۸)$

آماره بوز ـ انیشتین

تعداد طرقی که می‌توان n شیء مشابه را به k دسته‌ی $x_۱, x_۲, \dots, x_k$ تقسیم کرد به نحوی که سهم هر دسته در شرایط $۰ \le x_i \le m$ صدق کند برابر است با:

$$N=\sum_{s=۰}^{k}(-۱)^s\binom{k}{s}\binom{n+k-(m+۱)s-۱}{k-۱}$$

➢ **توجه:** محاسبات جملات سیگما را تا جایی ادامه می‌دهیم که ترکیب $\binom{n+k-(m+۱)s-۱}{k-۱}$ معنی‌دار باشد.

➢ **توجه:** در حالتی که $m \ge n$، یعنی بتوان همه‌ی اشیاء را درون یک دسته قرار داد، داریم: $N=\binom{n+k-۱}{k-۱}$

که به آن آماره‌ی کوچک گفته می‌شود.

نکته۴: در حالتی که $m \ge n$، یعنی بتوان تمام اشیاء را به یک دسته اختصاص داده داریم: $N=\binom{n+k+۱}{k-۱}$

مثال۲۵: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادلهٔ مقابل کدام است؟ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۱$

$۱ \le x_۱ \le ۸$, $۱ \le x_۲ \le ۸$, $۲ \le x_۳ \le ۹$, $۳ \le x_۴ \le ۱۰$

۱) ۴۵۰　　۲) ۲۴۶　　۳) ۱۳۳۰　　۴) هیچکدام

فصل پنجم

«رابطه‌های بازگشتی»

در این فصل با رابطه‌های بازگشتی و توابع بازگشتی آشنا می‌شویم که در برخی از مسائل شمارش می‌توان از آنها استفاده نمود. یک رابطه‌ی بازگشتی، ارتباط عضو nام یک دنباله را با اعضای ما قبل آن بیان می‌کند. الگوریتم‌های بازگشتی ارتباط بسیار نزدیکی با رابطه‌های بازگشتی دارند و همواره در تجزیه و تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی به یک رابطه‌ی بازگشتی می‌رسیم که دانستن چگونگی حل آنها ما را به جواب تحلیل الگوریتم می‌رساند.

❖ **تعریف ۱:** به تابع‌های عددی $a(n)$ (که در اینجا آنها را با a_n نشان می‌دهیم) و در آنها a_n به جمله‌های قبلی $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ بستگی دارد، **رابطه‌های بازگشتی** یا **معادلات تفاضلی** می‌گویند و همتای گسسته مفاهیمی هستند که در معادلات دیفرانسیل معمولی کاربرد دارند. فرم کلی یک رابطه بازگشتی بصورت مقابل می‌باشد:
$$f(n) = c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \ldots + c_1 a_1 + c_0 a_0$$
که در آن $f(n)$ یک تابع برحسب n می‌باشد. اگر $f(n) = 0$، آنگاه این رابطه را رابطه بازگشتی همگن نامند و در غیر این صورت آن را ناهمگن گویند. به عنوان مثال رابطه بازگشتی زیر به همراه دو مقدار معلوم را در نظر بگیرید. به این مقادیر معلوم شرایط اولیه نیز می‌گویند.
$$a_n = na_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$$
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{شرایط اولیه}$$
با توجه به رابطه فوق می‌توان a_n را برای nهای دلخواه محاسبه نمود. بعنوان مثال:
$$a_2 = 2a_1 + 2a_0 + 1 = 7 \quad \text{و} \quad a_3 = 3a_2 + 2a_1 + 1 = 26$$
به عنوان مثال دیگر، رابطه بازگشتی دنبالهٔ فیبوناتچی بصورت $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 3)$ می‌باشد و شرایط اولیهٔ این رابطه به‌صورت زیر می‌باشند:
$$f_0 = 1 \quad , \quad f_1 = 1$$
منظور از حل یک رابطه بازگشتی، به دست آوردن یک رابطه صریح برای جمله nام (a_n) می‌باشد که بدون نیاز به دانستن جملات قبل بتوان بطور مستقیم مقدار a_n را برحسب n حساب نمود.

✍ **مثال۱: شخصی $1000 \$$ در بانک با سود ۱۲ درصد سرمایه‌گذاری می‌کند، اگر A_n مقدار سرمایه در پایان سال nام باشد، برای A_n یک رابطه‌ی بازگشتی به دست آورید.**

۱) $A_n = A_{n-1} + 0/12 A_{n-2}$ ۲) $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ ۳) $A_n = 1/12 A_{n-2}$ ۴) $A_2 = 1/12 A_{n-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در پایان سال $n-1$ مقدار سرمایه برابر A_{n-1} است. با گذشت یک سال، مقدار سرمایه برابر A_{n-1} و سود سرمایه در این یک سال است. بنابراین داریم:
$$A_n = A_{n-1} + (0/12) A_{n-1} = 1/12 A_{n-1}$$
$$A_0 = 1000$$
به کمک شرط اولیه و رابطه‌ی بازگشتی می‌توان به ازای هر مقدار n مقدار A_n را محاسبه نمود. به عنوان مثال داریم:
$$A_3 = (1/12) A_2 = (1/12)(1/12) A_1 = (1/12)(1/12)(1/12) A_0 = (1/12)^3 (1000)$$
به همین ترتیب می‌توان به ازای مقدار دلخواه n، رابطه صریح زیر را برای مقدار سرمایه در پایان سال nام به دست آورد:
$$A_n = (1/12)^n 1000$$
همانطور که ملاحظه کردید، از یک رابطه‌ی بازگشتی و شرایط اولیه می‌توان فرمول صریحی به دست آورد. در ادامه روش حل روابط بازگشتی همگن و ناهمگن به تفکیک آمده است.

روش حل روابط بازگشتی همگن

فرم کلی یک رابطه بازگشتی همگن مرتبه k ام بصورت مقابل می‌باشد:
$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \ldots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$$
روشی که در اینجا برای حل معادلات همگن مطرح می‌کنیم، استفاده از معادله مشخصه است. برای به دست آوردن معادله مشخصه کافیست در رابطه بازگشتی فوق جای a_n، x^n قرار دهیم.

در این حالت معادله بازگشتی تبدیل به یک چند جمله‌ای مرتبه kام می‌شود که ابتدا آن را حل می‌کنیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم و سپس با توجه به اینکه این ریشه‌ها متمایزند یا نه، رابطه بازگشتی همگن را حل می‌کنیم.

رابطه بازگشتی همگن خطی مرتبه اول و حل آن

به دنباله نامتناهی از اعداد همگن مانند $۳,۹,۲۷,۸۱,...$ یک سری هندسی گفته می‌شود، هرگاه خارج قسمت هرجمله (به غیر از جمله اول) برجمله بلافاصله قبل از آن مقدار ثابتی باشد. این مقدار ثابت قدرنسبت گفته می‌شود. در دنباله بیان شده قدر نسبت برابر ۳ می‌باشد و داریم:

$$۹ = ۳(۳)$$
$$۲۷ = ۳(۹)$$

اگر $a_۰, a_۱, a_۲, ...$ یک سری هندسی باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{a_۱}{a_۰} = \frac{a_۲}{a_۱} = ... = \frac{a_{n+۱}}{a_n} = r$$

که r همان قدر نسبت است. در این سری هندسی خاص داریم: $n \ge ۰, a_{n+۱} = ۳a_n$ و $a_۰ = ۳$.

رابطه بازگشتی $a_{n+۱} = ۳a_n$ یک سری هندسی یکتا را تعریف نمی‌کند. به عنوان مثال دنباله $۶,۱۸,۵۴,۱۶۲,...$ نیز در این رابطه صدق می‌کند. برای تعیین دقیق دنباله خاصی که با $a_{n+۱} = ۳a_n$ مشخص می‌شود به یکی از جمله‌های آن دنباله نیاز داریم. بنابراین دنباله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_{n+۱} = ۳a_n \quad , \quad n \ge ۰ \qquad a_۰ = ۳$$

معادله $a_{n+۱} = ۳a_n$, $n \ge ۰$ را رابطه بازگشتی خطی مرتبه اول گویند، زیرا مقدار $a_{n+۱}$ تنها به مقدار پیشین یعنی a_n وابسته است. هر کجا که $a_{n+۱}$ تنها به جمله بلافاصله قبل از خود وابسته باشد، رابطه را از مرتبه اول گویند. صورت کلی معادلات خطی مرتبه اول به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a_{n+۱} = ca_n \quad , \quad n \ge ۰$$

که در روابط فوق c یک عدد ثابت می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌گردد توان جملات دنباله در رابطه بازگشتی خطی، یک می‌باشد.

به مقادیر داده شده مانند $a_۰$ یا $a_۱$ مقادیر مرزی گفته می‌شوند. عبارت $a_۰ = k$ را که در آن k مقدار ثابت است، شرایط اولیه می‌نامند.

حال به رابطه بازگشتی بیان شده در ابتدا می‌پردازیم، داشتیم:

$$a_{n+۱} = ۳a_n \quad , \quad n \ge ۰ \quad , \quad a_۰ = ۳$$

با نوشتن چهار جمله اول، این دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_۰ = ۳$$
$$a_۱ = ۳a_۰ = ۳(۳)$$
$$a_۲ = ۳a_۱ = ۳(۳a_۰) = ۳^۲(۳)$$
$$a_۳ = ۳a_۲ = ۳(۳a_۱) = ۳^۳(۳)$$

با توجه به این محاسبات این نتیجه‌گیری به ذهن القا می‌شود که به ازای هر $n \ge ۰$ داریم $a_n = ۳^n(۳)$. به این جواب، جواب عمومی رابطه بازگشتی مفروض گفته می‌شود. در جواب عمومی مقدار a_n تنها به n بستگی دارد و دیگر هیچ وابستگی به جملات قبلی دنباله ندارد. به عنوان مثال اگر بخواهیم $a_{۱۰}$ را حساب کنیم، صرفاً مقدار $۳(۳)^{۱۰}$ را حساب می‌کنیم و دیگر لزومی ندارد که با $a_۰$ شروع کرده و برای به دست آوردن $a_{۱۰}$، ابتدا $a_۹$ را حساب کنیم.

با توجه به مثال بیان شده به نتیجه‌گیری زیر می‌رسیم:

مثال ۲: جواب رابطه بازگشتی $a_{n+۱} = ۳a_n \; (n \ge ۰)$ با شرط اولیه $a_۰ = ۵$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $a_n = ۵ \times ۳^n$ ۲) $a_n = ۳ \times ۵^n$ ۳) $a_n = ۲ \times ۷^n$ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۱» **راه‌حل اول:** برای حل این رابطه ابتدا a_n را با x^n جایگزین می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$x^{n+۱} = ۳x^n \Rightarrow x = ۳$$

حال با توجه به تنها ریشه این معادله مشخصه، جواب این معادله به فرم کلی مقابل خواهد بود:

$$a_n = c(۳)^n$$

راه‌حل دوم: با استفاده از نکته فوق داریم:

$$\begin{cases} a_۰ = ۵ \\ c = ۳ \end{cases} \Rightarrow a_n = ۵ \times ۳^n$$

که در آن c عدد حقیقی ثابتی می‌باشد و از شرط اولیه $a_۰ = ۵$ می‌توان مقدار آن را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$a_۰ = ۵ = c(۳^۰) \Rightarrow c = ۵$$

بنابراین جواب نهایی رابطه بازگشتی به صورت $a_n = ۵ \times ۳^n$ خواهد بود.

نکته ۱: جواب عمومی رابطه بازگشتی $a_{n+۱} = ca_n$, $n \ge ۰$ که در آن c ثابت است، یکتاست و به‌صورت $a_n = a_۰c^n$, $n \ge ۰$ محاسبه می‌شود.

مثال ۳: جواب رابطه بازگشتی $a_n = ۷a_{n-۱}$ را که در آن $a_۲ = ۹۸, n \ge ۱$ کدام است؟

۱) $۳(۷)^n$ ۲) $۲(۷)^n$ ۳) $۲(۷)^{n-۱}$ ۴) $۳(۷)^{n-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» رابطه $a_n = 7a_{n-1}$ را می‌توان به طور معادل به فرم $a_{n+1} = 7a_n$ نوشت. با توجه به نکته بیان شده، جواب این معادله برابر $a_n = a_0(7)^n$ می‌باشد. حال مقدار a_0 را به‌صورت مقابل به دست می‌آوریم: $a_2 = 98 = a_0(7)^2 \Rightarrow a_0 = 2$

نکته ۲: رابطه بازگشتی $a_{n+1} - ca_n = 0$ را خطی می‌نامند، زیرا در آن هر جمله اندیس‌دار با توان یک ظاهر شده است. گاهی اوقات یک رابطه بازگشتی غیرخطی را می‌توان با جایگذاری‌های خطی به یک رابطه خطی تبدیل نمود.

مثال۴: جواب عمومی رابطه بازگشتی غیرخطی $a_{n+1}^2 = 5a_n^2$ که در آن به‌ازای $n \geq 0$ داریم $a_n > 0$ و $a_0 = 2$ کدام است؟

۱) $2(5)^n$　　۲) $3(5)^{n+1}$　　۳) $2(\sqrt{5})^{n+1}$　　۴) $2(\sqrt{5})^n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» رابطه داده شده خطی نیست، ولی با تغییر متغیر $b_n = a_n^2$ به رابطه جدید $b_{n+1} = 5b_n$ می‌رسیم که در آن داریم $b_0 = 4$. با توجه به نکته بیان شده، این رابطه دارای جواب $b_n = 4(5)^n$ می‌باشد. بنابراین به ازای $n \geq 0$ داریم: $a_n = 2(\sqrt{5})^n$

در حالت کلی یک رابطه بازگشتی خطی مرتبه اول به‌صورت مقابل می‌باشد: $a_{n+1} + ca_n = f(n)\,,\ n \geq 0$

که در آن c یک مقدار ثابت و $f(n)$ تابعی از n می‌باشد. اگر $f(n) = 0$، رابطه بازگشتی را همگن و در غیر این صورت آن را ناهمگن می‌نامند. حل روابط بازگشتی ناهمگن را در قسمت‌های بعدی بررسی می‌کنیم.

رابطه بازگشتی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت

اگر k یک عدد صحیح نامنفی باشد و $c_n (\neq 0)$، c_{n-1}، $c_{n-k}, \dots, c_{n-2}$، $(C_{n-k} \neq 0)$ اعدادی حقیقی باشند، آنگاه $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \dots + c_{n-k}a_{n-k} = f(n) \quad n \geq k$ رابطه بازگشتی مرتبه kام با ضرایب ثابت گفته می‌شود. حال اگر $f(n) = 0$، رابطه را همگن گویند و در غیر این صورت به آن ناهمگن گفته می‌شود.

ابتدا رابطه بازگشتی همگن مرتبه دوم را بررسی می‌کنیم. معادله کلی این رابطه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = 0\,,\ n \geq 2$$

در بخش قبل جوابی به‌صورت $a_n = cr^n$ به دست آوردیم که c و r مخالف صفر بودند. در اینجا نیز دنبال جوابی به فرم $a_n = cr^n$ هستیم، لذا با قرار دادن این جواب در معادله فوق داریم:

$$c_n cr^n + c_{n-1}cr^{n-1} + c_{n-2}cr^{n-2} = 0\,,\ c, r \neq 0$$

که به معادله درجه دوم $c_n r^2 + c_{n-1}r + c_{n-2} = 0$ تبدیل می‌شود. به این معادله، معادله مشخصه گفته می‌شود. ریشه‌های r_1, r_2 این معادله می‌توانند به یکی از سه حالت زیر باشند:

الف ـ r_1, r_2 اعداد حقیقی متمایزند.　　ب ـ r_1, r_2 یک جفت عدد مختلط مزدوج‌اند.　　ج ـ r_1, r_2 حقیقی‌اند، اما $r_1 = r_2$.

در تمام حالات فوق به r_1, r_2 ریشه‌های معادله مشخصه گفته می‌شود.

حالت الف: ریشه‌های حقیقی متمایز : به عنوان مثال رابطه بازگشتی $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ را که در آن $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ را بررسی می‌کنیم. اگر $a_n = cr^n$ معادله مشخصه به‌صورت $cr^n + cr^{n-1} - 6cr^{n-2} = 0$ به دست می‌آید. با ساده کردن این معادله، معادله مشخصه $r^2 + r - 6 = 0$ به دست می‌آید که دارای دو ریشه مشخصه ۲ و ۳- می‌باشد.

از آنجایی که دو ریشه حقیقی و متمایزند، بنابراین $a_n = 2^n\,,\ a_n = (-3)^n$ هر دو جواب هستند. اینها جواب‌های خطی مستقل هستند، زیرا مضربی از یکدیگر نمی‌باشند. بنابراین رابطه $a_n = c_1(2)^n + c_2(-3)^n$ معرف جواب کلی معادله می‌باشد که c_1, c_2 ثابت‌های دلخواه می‌باشند. با توجه به شرایط مرزی بیان شده، c_1, c_2 را به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$1 = a_0 = c_1(2)^0 + c_2(-3)^0 = c_1 + c_2 \qquad 2 = a_1 = c_1(2)^1 + c_2(-3)^1 = 2c_1 - 3c_2$$

با حل این دستگاه معادلات داریم $c_1 = 1, c_2 = 0$. بنابراین $a_n = 2^n$ جواب یکتای رابطه بازگشتی بیان شده می‌باشد.

نکته ۳: اگر معادله مشخصه یک رابطه بازگشتی مرتبه k دارای k ریشه متمایز r_1، r_2، ... و r_k باشد، آنگاه جواب رابطه بازگشتی بصورت زیر خواهد بود: $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n$

که در این معادله مجهولات c_1، c_2، ... و c_k را می‌توان از شرایط اولیه گفته شده به دست آورد.

پس در حالت کلی اگر r_1 و r_2 دو ریشه حقیقی متمایز باشد، جواب عمومی (کلی) رابطه به‌صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ می‌باشد و با در نظر گرفتن شرایط اولیه ثابت‌های c_1 و c_2 را مطابق مثال فوق به دست می‌آوریم.

حالت ب : ریشه‌های مختلط:

یادآوری: قضیه دموآور بیان می‌کند که : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \ , \quad n \geq ۰$

همانطور که از اعداد مختلط به یاد دارید، اگر $z = x + iy$ یک عدد مختلط باشد، آنگاه می‌توان آن را به‌صورت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نوشت که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$. بنابر قضیه دموآور داریم: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \ , \quad n \geq ۰$

که بیان می‌کند، اگر عدد مختلطی با اندازه واحد $|r| = ۱$ و زاویه θ به توان n رسانیم، توان حذف و زاویه n برابر $(n\theta)$ می‌شود.

به عنوان مثال رابطه بازگشتی $a_n = ۲a_{n-۱} - ۲a_{n-۲}$ را در نظر بگیرید که در آن $n \geq ۲$ و $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$. با قرار دادن $a_n = cr^n$ معادله مشخصه این معادله به‌صورت ساده شده $r^۲ - ۲r + ۲ = ۰$ بدست می‌آید که ریشه‌های آن $۱ \pm i$ هستند. بنابراین جواب عمومی این رابطه بازگشتی به‌صورت $c_۱(۱+i)^n + c_۲(۱-i)^n$ خواهد بود، داریم:

$$۱ + i = \sqrt{۲}(\cos(\frac{\pi}{۴}) + i\sin(\frac{\pi}{۴}))$$

$$۱ - i = \sqrt{۲}(\cos(\frac{\pi}{۴}) - i\sin(\frac{\pi}{۴}))$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله جواب و استفاده از قضیه دموآور داریم:

$$a_n = c_۱(۱+i)^n + c_۲(۱-i)^n = c_۱(\sqrt{۲})^n(\cos(\frac{n\pi}{۴}) + i\sin(\frac{n\pi}{۴})) + c_۲(\sqrt{۲})^n(\cos(\frac{n\pi}{۴}) - i\sin(\frac{n\pi}{۴}))$$

$$= (\sqrt{۲})^n[k_۱\cos(\frac{n\pi}{۴}) + k_۲\sin(\frac{n\pi}{۴})]$$

که در آن $k_۱ = c_۱ + c_۲$ و $k_۲ = (c_۱ - c_۲)i$، داریم:

$$۱ = a_۰ = [k_۱\cos ۰ + k_۲\sin ۰] = k_۱$$

$$۲ = a_۱ = \sqrt{۲}[۱.\cos(\frac{\pi}{۴}) + k_۲\sin(\frac{\pi}{۴})] = ۱ + k_۲ \Rightarrow K_۲ = ۱$$

بنابراین، جواب با توجه به مفروضات داده شده به‌صورت روبرو خواهد بود: $a_n = (\sqrt{۲})^n[\cos(\frac{n\pi}{۴}) + \sin(\frac{n\pi}{۴})] \ , \ n \geq ۰$

حالت ج: ریشه‌های حقیقی تکراری: در حالتی که ریشه‌های حقیقی یکسان باشند، باید سعی شود که جواب مستقل دیگری ساخته شود. به عنوان مثال رابطه بازگشتی $a_{n+۲} = ۴a_{n+۱} - ۴a_n$ را در نظر بگیرید که در آن $n \geq ۰$, $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۳$. مانند دو حالت قبل قرار می‌دهیم $a_n = cr^n$ که در آن r, c مخالف صفر بوده و $n \geq ۰$. با ساده‌سازی معادله، معادله مشخصه به‌صورت $r^۲ - ۴r + ۴ = ۰$ خواهد بود. بنابراین هر دو ریشه معادله مشخصه برابر $r = ۲$ هستند. (به $r = ۲$ ریشه با چند گانگی (۲ گانه) گفته می‌شود.) متاسفانه دیگر دو جواب مستقل نیستند، زیرا $۲^n, ۲^n$ قطعاً مضربی از یکدیگر می‌باشند. بنابراین به جواب مستقل دیگری نیاز داریم. $n(۲^n)$ را آزمایش می‌کنیم. با قرار دادن $a_n = n(۲^n)$ در رابطه مفروض نتیجه می‌شود که:

$$۴a_{n+۱} - ۴a_n = ۴[(n+۱)۲^{n+۱} - n۲^n] = ۲(n+۱)۲^{n+۲} - n۲^{n+۲} = [۲n + ۲ - n]۲^{n+۲} = (n+۲)۲^{n+۲} = a_{n+۲}$$

بنابراین $n(۲)^n$ دومین جواب مستقل می‌باشد. واضح است که این دو جواب مستقل می‌باشد. بنابراین جواب عمومی بصورت زیر خواهد بود:

$$a_n = c_۱(۲^n) + c_۲n(۲^n)$$

نکته ۴: به طور کلی اگر رابطه $c_n a_n + c_{n-۱}a_{n-۱} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k} = ۰$ با ثابت‌های حقیقی $c_n (\neq ۰)$ و $c_{n-۱}, \ldots, c_{n-k}$ $(c_{n-k} \neq ۰)$ و ریشه مشخصه r با چندگانگی m که در آن $۲ \leq m \leq k$ برقرار باشند، آن قسمت از جواب عمومی که متضمن ریشه r است، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_۰ r^n + A_۱ n r^n + A_۲ n^۲ r^n + \ldots + A_{m-۱} n^{m-۱} r^n = (A_۰ + A_۱ n + \ldots + A_{m-۱} n^{m-۱}) \times r^n$$

که در آن $A_۰, A_۱, A_۲, \ldots, A_{m-۱}$ ثابت‌های دلخواه می‌باشد.

مثال۵: جواب رابطه بازگشتی مقابل در کدام گزینه آمده است؟

$$a_{n+۲} = ۳a_{n+۱} - ۲a_n$$
$$a_۰ = ۰$$
$$a_۱ = ۱$$

۱) $a_n = -۱ + ۲^n$ ۲) $a_n = ۱ - ۲^n$

۳) $a_n = ۱ + ۲^n$ ۴) $a_n = -۱ - ۲^n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

معادله مشخصه: $X^{۲}-۳X+۲=۰ \Rightarrow r_۱=۱\,,\,r_۲=۲$

$$\left.\begin{array}{l} a_n=C_۱(۱)^n+C_۲(۲)^n \\ a_۰=۰ \\ a_۱=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_۱+C_۲=۰ \\ C_۱+۲C_۲=۱ \end{cases} \Rightarrow C_۱=-۱\ ,\ C_۲=۱$$

جواب نهایی: $\boxed{a_n=-۱+۲^n}$

مثال۶: اگر F_n جمله n ام دنباله فیبوناتچی باشد و داشته باشیم: $F_n=C_۱(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n+C_۲(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n$

آنگاه $C_۱$ و $C_۲$ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟

۱) $C_۱=C_۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$　　۲) $C_۱=-C_۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$　　۳) $C_۱=\frac{۱}{\sqrt{۵}},C_۲=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$　　۴) $C_۱=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\,,\,C_۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$F_n=C_۱(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n+C_۲(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n$$

با قرار دادن شرایط اولیه معادله فوق مقادیر $C_۲,C_۱$ بصورت مقابل به دست خواهند آمد: $C_۱=-C_۲=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

حل معادله نهایی $=F_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}[(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n-(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n]$

مثال۷: رابطه بازگشتی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{۲a_{n+۳}=a_{n+۲}+۲a_{n+۱}-a_n\ ,\ n\ge ۰}$$
$$\mathbf{a_۰=۰\qquad a_۱=۱\qquad a_۲=۲}$$

با توجه به این رابطه بازگشتی، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح می‌باشد؟

۱) $a_n=\frac{۵}{۲}+\frac{(-۱)^n}{۶}-\frac{۸}{۳}(\frac{۱}{۲})^n$　　۲) $a_n=\frac{(-۱)^n}{۶}-\frac{۸}{۳}(\frac{۱}{۲})^n+\frac{۵}{۶}$

۳) $a_n=\frac{۸}{۵}(\frac{۱}{۲})^n+\frac{۶}{۵}(\frac{۷}{۲})^n+\frac{۸}{۵}$　　۴) $a_n=(\frac{۶}{۸})^n+\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۶})^n+\frac{۷}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

معادله مشخصه: $۲X^{n+۳}=X^{n+۲}+۲X^{n+۱}-X^n \Rightarrow ۲X^۳-X^۲-۲X+۱=۰ \Rightarrow (۲X-۱)(X-۱)(X+۱)=۰$

$$\Rightarrow X_۱=+۱\quad,\quad X_۲=-۱\quad,\quad X_۳=\frac{۱}{۲}\quad;\quad a_n=C_۱(۱)^n+C_۲(-۱)^n+C_۳(\frac{۱}{۲})^n$$

با قرار دادن شرایط اولیه در معادله فوق مقادیر $C_۳,C_۲,C_۱$ به صورت مقابل به دست می‌آید: $C_۱=\frac{۵}{۲}\quad,\quad C_۲=\frac{۱}{۶}\quad,\quad C_۳=-\frac{۸}{۳}$

مثال۸: با توجه به رابطه بازگشتی زیر کدام‌یک از گزاره‌ها صحیح می‌باشد؟

$$\mathbf{a_{n+۲}=۴a_{n+۱}-۴a_n\ \ ,\ \ n\ge ۰}$$
$$\mathbf{a_۰=۱}$$
$$\mathbf{a_۱=۱}$$

۱) $a_n=(۲-n)۲^{n-۱}$　　۲) $a_n=(۲+n)۲^{n-۱}$

۳) $a_n=۲^{n-۱}+n$　　۴) $a_n=n+۲^n$

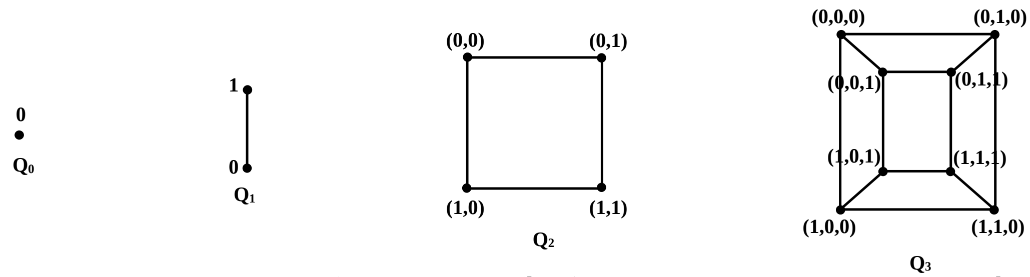
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این رابطه داریم: معادله مشخصه: $X^{n+۲}-۴X^{n+۱}+۴X^n=۰ \Rightarrow X^۲-۴X+۴=۰ \Rightarrow (X-۲)^۲=۰$ در اینجا دو ریشه تکراری یا اصطلاحاً ریشه مکرر مرتبه ۲ یا ریشه با چند گانگی ۲ داریم. واضح است که از روش قبل (وقتی ریشه‌ها متمایز بودند) نمی‌توان بـه جـواب مناسبی رسید. برای حل این مشکل یکی از جواب‌ها را به صورت ۲^n و جواب دیگر را به صورت $n\times ۲^n$ می‌نویسیم واضح است که این جواب‌ها مستقل خطـی هستند. حال به ادامه حل مسأله می‌پردازیم.

$$a_n=C_۱(۲^n)+C_۲n(۲^n)$$
$$a_n=C_۱(۲^n)+C_۲n(۲^n)$$

گراف K – مکعب یا ابر مکعب

❖**تعریف ۱۸:** یک گراف k- مکعب دارای $k2^{k-1}$ یال و 2^k راس می‌باشد که در آن، رئوس با دنباله‌های k تایی از صفر و یک برچسب‌گذاری می‌شوند و دو رأس در صورتی به هم متصل می‌شوند که برچسب‌های آنها تنها در یک بیت متفاوت باشند.

در شکل زیر گراف k- مکعب به ازای $k=0$ تا $k=3$ رسم شده‌اند.



دقت کنید که هر گراف k- مکعب از اتصال نظیر به نظیر راس‌های دو گراف $(k-1)$– مکعب به دست می‌آید.

نکته۱۱: هر گراف k- مکعب یک گراف k منتظم است.

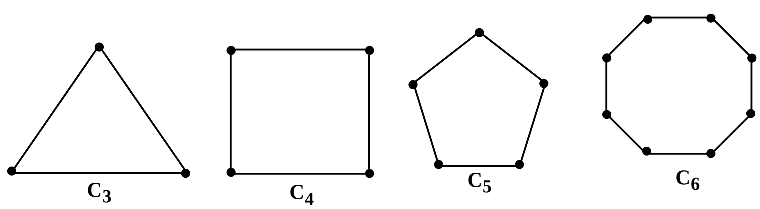
مثال۱۹: کدام گزینه در مورد یک گراف ۵ـ مکعب درست است؟

۱) این گراف دارای ۳۲ یال می‌باشد. ۲) این گراف دارای ۳۲ راس می‌باشد.

۳) این گراف دارای ۸ یال می‌باشد. ۴) این گراف دارای ۴۰ راس می‌باشد.

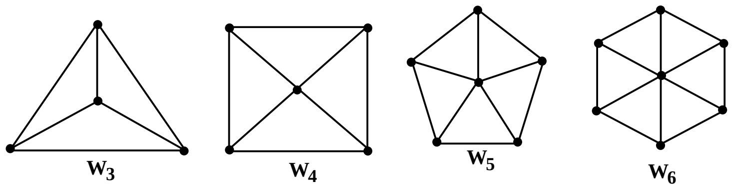
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یک گراف ۵ـ مکعب از اتصال دو گراف ۴ ـ مکعب به دست می‌آید که دارای $32 = 2^5$ راس می‌باشد.

❖**تعریف ۱۹: گراف دور:** منظور از گراف‌های دور گراف‌هایی می‌باشند که مجموعه رئوس آن به صورت $v=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ و مجموعه یال‌های آن به صورت $E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_{n-1},v_n),(v_n,v_1)\}$ می‌باشد، به عبارت دیگر، کل گراف یک دور به طول n است. در زیر چند گراف دور نشان داده شده است (در گراف‌های دور حداقل تعداد رئوس برابر ۳ می باشد).



دقت نمایید که در یک دور درجه تمام رئوس برابر ۲ می‌باشد.

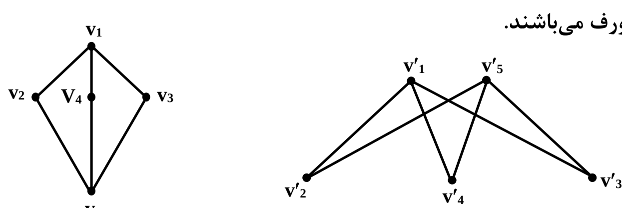
❖**تعریف ۲۰: چرخ:** اگر به یک گراف دور مانند C_n یک رأس اضافه شود و رأس موردنظر به تمام رئوس قبلی موجود در گراف C_n متصل گردد، آنگاه یک گراف چرخ W_n ایجاد خواهد شد، به شکل‌های روبرو دقت نمایید.



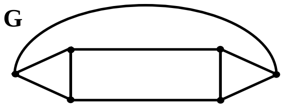
همان‌گونه که مشخص است در W_n درجه یک رأس n و درجه سایر رئوس ۳ می‌باشد.

❖**تعریف ۲۱: گراف‌های یکریخت یا ایزومورف** دو گراف G_1 , G_2 را ایزومورف یا یکریخت گوییم، در صورتی که، یک تابع یک به یک و پوشا مانند φ از $V(G_1)$ (مجموعه رئوس G_1) به $V(G_2)$ (مجموعه رئوس G_2) وجود داشته باشد، بطوریکه $(v_1,v_2)\in E(G_1)$ اگر و تنها اگر $(\varphi(v_1),\varphi(v_2))\in E(G_2)$ که در این حالت تابع φ یک ایزومورفیسم نامیده می‌شود. برای نشان دادن وجود رابطه ایزومورفیسم بین دو گراف از نماد $G_1\cong G_2$ استفاده می‌کنیم. گراف‌های ایزومورف دارای خصوصیات یکسانی می‌باشند.

مثال۲۰: دو گراف شکل زیر ایزومورف می‌باشند.



و تابع ایزومورفیسم عبارتست از $\varphi(v_i) = v_i'$



اگر گراف G_1 با گراف G_2 ایزومورف باشد، می‌توان گراف G_1 را طوری رسم کرد که دقیقاً شبیه به گراف G_2 شود.

تذکر۵: ممکن است رأس‌های دو گراف دارای درجات کاملاً یکسان باشند اما دو گراف ایزومورف نباشند.

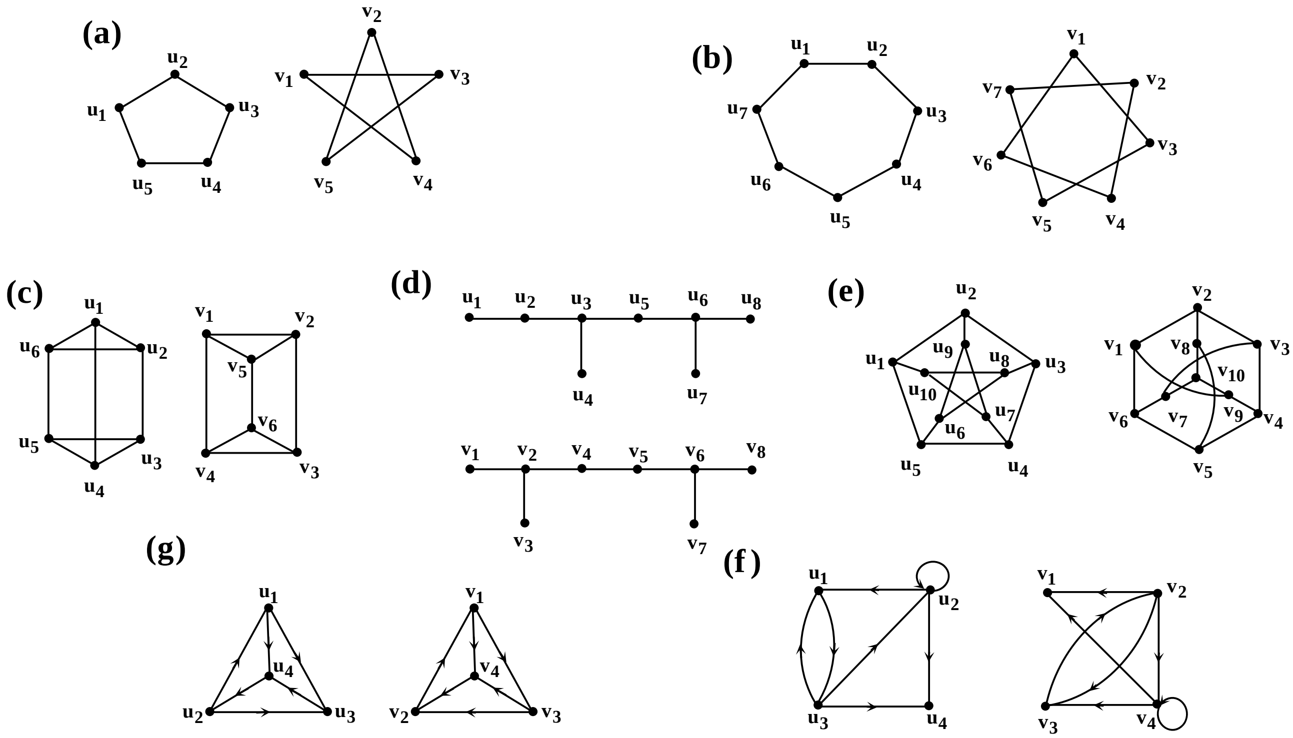
مثال۲۱: گراف G با کدام‌یک از گراف‌های زیر ایزومورف است؟

(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ: گزینه «۲» تنها گزینه‌ای که با G از لحاظ ساختار، تعداد رئوس و درجه رئوس یکسان است، گراف گزینه ۲ می‌باشد.

نکته۱۲: رابطه ایزومورف بودن، روی گراف‌ها، یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد.

مثال۲۲: از بین جفت گراف‌های زیر کدام موارد ایزومورف می‌باشند؟



۱) g,f,e,c,b,a ۲) g,d,c,b,a ۳) f,e,d,c,b,a ۴) f,e,b,a

پاسخ: گزینه «۱» زوج گراف‌های موجود در شکل‌های g,f,e,c,b,a در حقیقت یکسان می‌باشند و نوع ترسیم آن‌ها تغییر کرده است امـا در شـکل d فاصله رئوس درجه دو گراف اول برابر ۲ می‌باشد اما در گراف دوم برابر ۳ است و بنابراین دو گراف نمی‌توانند ایزومورف باشند.

نکته۱۳: هرگاه دو گراف G_1 و G_2 یکریخت باشند، آنگاه:

۱ـ $|V(G_1)| = |V(G_2)|$

۲ـ $|E(G_1)| = |E(G_2)|$

۳ـ دنباله درجات G_1 و G_2 یکسان‌اند.

۴ـ تناظری یک به یک بین دورهای G_1 و G_2 وجود دارد.

۵ـ $\overline{G_1}$ و $\overline{G_2}$ نیز یکریخت‌اند.

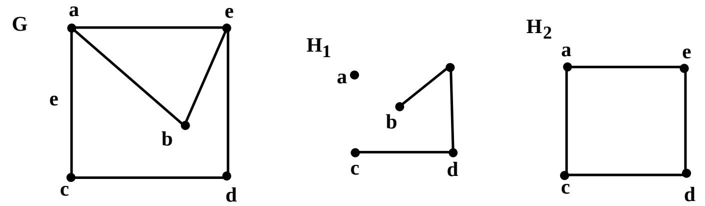
۶ـ هرگاه G_1 همبند باشد، G_2 نیز همبند است و بالعکس.

۷ـ $\Delta(G_1) = \Delta(G_2), \delta(G_1) = \delta(G_2)$

۸ـ G_1 دو بخشی است، اگر و تنها اگر G_2 دو بخشی باشد.

نکته۱۴: گزاره‌های فوق از آن جهت با ارزش‌اند که معیاری برای یکریخت نبودن دو گراف به دست می‌دهند، مثلاً اگر گرافی شامل دوری بـه طـول ۵ باشد ولی گرافی دیگر فاقد دور به طول ۵ باشد، آنگاه دو گراف قطعاً یکریخت نمی‌باشند.

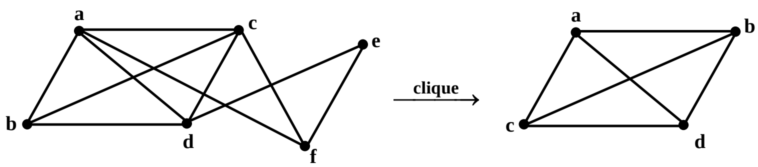
❖ **تعریف ۲۲: زیر گراف پوشا** یک زیر گراف مانند H از گراف G را زیر گراف پوشا گوییم، هرگاه رابطه $V(H) = V(G)$ برقرار باشد.



به عنوان مثال در شکل مقابل گراف H_1 یک زیرگراف پوشای گراف G می‌باشد اما گراف H_2 زیرگراف پوشای G نمی‌باشد (زیرا گراف H_2 شامل رأس b نمی‌باشد).

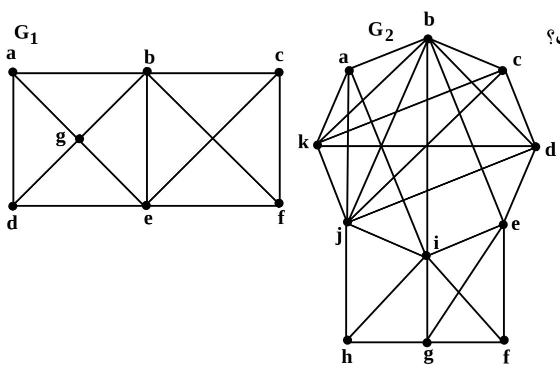
❖ **تعریف ۲۳:** یک **کلیک** یک زیرگراف کامل ماکسیمال در یک گراف می‌باشد (زیر گرافی که کامل باشد و خود در یک زیرگراف کامل بزرگ‌تر نباشد).

به عنوان مثال در گراف زیر یک کلیک مشخص شده است.



در این گراف مجموعه $\{a,b,c,d\}$ یک کلیک می‌باشد (یک زیرگراف کامل ماکسیمال است)، دقت کنید که زیرگراف $\{a,b,d\}$ نیز یک زیرگراف کامل است اما ماکسیمال نیست، زیرا زیرگراف $\{a,b,c,d\}$ کامل است و شامل آن می‌باشد.

مثال ۲۳: تعداد کلیک‌های دو گراف G_1 و G_2 به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



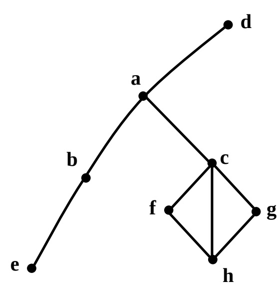
۱) ۱۰,۵
۲) ۱۰,۶
۳) ۹,۵
۴) ۹,۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» کلیک‌های گراف G_1 عبارتند از: $\{b,c,e,f\},\{a,d,g\},\{a,b,g\},\{d,e,g\},\{b,e,g\}$

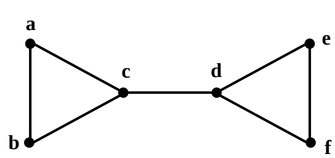
و کلیک‌های گراف G_2 عبارتند از: $\{b,c,d,j,k\},\{a,b,j,k\},\{e,f,g,i\},\{a,b,i\},\{a,i,j\},\{b,d,e\},\{b,e,i\},\{b,i,j\},\{g,h,i\},\{h,i,j\}$

❖ **تعریف ۲۴:** اگر $G = (V,E)$ یک گراف ساده باشد، آنگاه زیر مجموعه $V' \subseteq V$ یک **مجموعه غالب** نامیده می‌شود هرگاه، هر رأس گراف با حداقل یکی از رئوس V' همسایه باشد.

در برخی از کاربردها هدف یافتن کوچک‌ترین مجموعه غالب یعنی مجموعه غالب با کمترین تعداد رئوس می‌باشد؛ به عنوان مثال در گراف مقابل کوچک‌ترین مجموعه غالب، مجموعه $\{a,b,c\}$ می‌باشد.



مثال ۲۴: مجموعه غالب مینیمم در گراف زیر کدام است؟

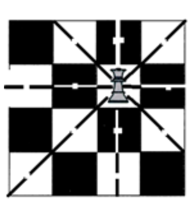


۱) $\{a,b,c\}$
۲) $\{a,c,d\}$
۳) $\{c,d,f\}$
۴) $\{c,d\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مجموعه $\{c,d\}$ کوچکترین زیر مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که با تمام رأس‌های دیگر گراف همسایه است.

مثال ۲۵: کمترین تعداد وزیر در یک صفحه شطرنج $m \times n$، چقدر باشد تا تمام خانه‌های صفحه را تهدید کنند؟

☑ **پاسخ:** در حالت کلی یک وزیر تمام خانه‌هایی که در سطر و ستون یکسانی با وزیر قرار دارند و خانه‌هایی که بر روی دو قطر شامل وزیر قرار دارند را تهدید می‌کند. شکل مقابل این مورد را نشان می‌دهد:



فصل هشتم

«طرح‌های بلوکی، مربع‌های لاتین، صفحات آفین»

این مبحث یکی از مباحث ترکیبیات می‌باشد که در آمار، زیست، اقتصاد و سایر علوم ظاهر می‌گردد.

در این مبحث میدان‌های متناهی و هندسه‌های متناهی به یکدیگر مرتبط می‌گردند و این ارتباط توسط مربع‌های لاتین نمایش داده می‌شود.

❖ **تعریف۱:** طرح بلوکی: هرگاه V مجموعه‌ای متناهی باشد که دارای v عضو است و A گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های V (به عبارت دیگر $A \subseteq p(V)$) باشد و A دارای b عضو باشد و λ, k, r سه عدد طبیعی باشند که در شرایط زیر صدق کنند، آنگاه V یک طرح بلوکی نامیده می‌شود.

۱) $\forall B \in A \qquad |B| = k \qquad , \quad k < v$

۲) $r \le b$ و هر عضو v دقیقاً در r عضو از A واقع شود.

۳) $\lambda \le b$ و هر دو عضو دلخواه v مثل v, v' با هم در دقیقاً λ زیرمجموعه‌ی A واقع شوند.

اعضای v را واریته گوییم و اعضای A را بلوک نامیم.

r را عدد تکرار و λ، هم ظرفیتی نامیده می‌شوند.

به عنوان مثال: هرگاه $V = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$, $b = ۱۰$, $r = ۵$, $k = ۳$, $\lambda = ۲$ و

$A = \{\{۱,۲,۴\},\{۱,۲,۶\},\{۱,۳,۴\},\{۱,۳,۵\},\{۱,۵,۶\},\{۲,۳,۵\},\{۲,۳,۶\},\{۲,۴,۵\},\{۳,۴,۶\},\{۴,۵,۶\}\}$ یک طرح بلوکی می‌باشد.

تذکر۱: از این به بعد برای مجموعه‌ی مفروض v یک طرح بلوکی را به صورت (v,b,r,k,λ) نمایش داده و یک (v,b,r,k,λ) طرح می‌نامیم.

قضیه۱: برای یک (v,b,r,k,λ) طرح داریم: $\lambda(v-۱) = r(k-۱), vr = bk$

نتیجه۱: همواره $r > \lambda$، زیرا:

$$\lambda(v-۱) = r(k-۱) \rightarrow \frac{r}{\lambda} = \frac{v-۱}{k-۱}$$

چون $k < v$، لذا $\frac{v-۱}{k-۱} > ۱$ پس $\frac{r}{\lambda} > ۱$ یا به طور معادل $r > \lambda$

مثال۱: چندتا از (v,b,r,k,λ) طرح‌های زیر موجودند؟

الف) $(۵,۴,۳,۲,۱)$ **ب) $(۵,۳,۴,۱,۲)$**   **پ) $(۵,۲,۲,۵,۱)$**

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

در مورد الف داریم: $vr = ۱۵$ و $bk = ۸$، لذا طرح الف وجود ندارد.

در مورد ب داریم: $vr = ۲۰$ و $bk = ۳$، لذا طرح ب وجود ندارد.

در مورد پ داریم: $\lambda(v-۱) = ۴$ و $r(k-۱) = ۸$، لذا طرح پ وجود ندارد.

❖ **تعریف۲:** ماتریس برخورد دو به دو یک طرح به صورت زیر تعریف می‌شود و آن را با A نمایش می‌دهیم.

۱) تعداد سطرهای ماتریس برابر است با: $\frac{v(v-۱)}{۲}$

۲) تعداد ستون‌های ماتریس برابر است با: b

۳) هرگاه ۱ امین زوج از اعضای دوتایی v در بلوک باشند، $a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$، در غیر این صورت زوج‌ها را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ \vdots \\ x_1x_v \\ x_2x_3 \\ x_2x_4 \\ \vdots \\ x_2x_v \\ x_3x_4 \\ \vdots \\ x_{v-1}x_v \end{array}$$

مثال۲: برای طرح بلوکی صفحه‌ی قبل، ماتریس برخورد دو به دو را بیابید.

☑ **پاسخ:** چون $v=6$، لذا تعداد سطرهای A برابر است با: $15 = \frac{6\times 5}{2}$ و تعداد ستون‌ها برابر است با: $b=10$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 124 & 126 & 134 & 135 & 156 & 235 & 236 & 245 & 346 & 456 \end{array} \\ \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \\ 34 \\ 35 \\ 36 \\ 45 \\ 46 \\ 56 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

همانطور که مشاهده می‌شود تعداد یک‌ها در هر سطر برابر λ می‌باشد و تعداد یک‌ها در هر ستون برابر k می‌باشد.

تعداد یک‌ها درکل ماتریس عبارت است از: $\frac{v(v-1)}{2}\times\lambda$ (تعداد یک‌های هر سطر × تعداد سطرها)

همچنین تعداد یک‌ها را به روشی دیگر می‌توان محاسبه نمود: $b\times k$ (تعداد یک‌های هر ستون × تعداد ستون‌ها)

مثال۳: در یک (v,b,r,k,λ) طرح، اگر $v=13$ و $r=k=4$ ، $b+\lambda$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از روابط $vr=bk$ و $\lambda(v-1)=r(k-1)$ داریم:

$$\begin{cases} \lambda(13-1) = 4(4-1) \\ 13\times 4 = b\times 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ b = 13 \end{cases}$$

مربع‌های لاتین:

تعریف مربع لاتین $n\times n$: یک مربع لاتین $n\times n$ یک آرایش مربع از نمادهاست که هر نماد در هر سطر دقیقاً یک بار و در هر ستون نیز دقیقاً یکبار ظاهر می‌شود.

تذکر۲: از آنجایی که نمادها مهم نیستند و فقط مکان آنها مهم می‌باشد، لذا $\{1,2,...,n\}$ را به عنوان نمادها در نظر می‌گیریم.

مثال۴: یک مربع لاتین ۴×۴ رسم کنید.

پاسخ:

۴	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۴
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲

قضیه۲: همواره مربع لاتین از هر مرتبه‌ای وجود دارد.

مثال۵: هرگاه مربع لاتین $n\times n$ با اعضای مجموعه‌ی $\{1,2,...,n^2\}$ ساخته باشیم، مجموع عناصر روی سطر پنجم چند است؟

۱) n^2 ۲) $\frac{n^2(n^2-1)}{2}$ ۳) $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ ۴) $1^2+2^2+...+n^2$

پاسخ: گزینه «۳» چون هر عنصر در هر سطر ودر هر ستون دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود، لذا در هر سطر دقیقاً یک‌بار ۱ می‌آید. یک بار ۲ می‌آید و ... و یک‌بار n^2 می‌آید، لذا مجموع عناصر در هر سطر از جمله سطر پنجم، برابر است با: $1+2+...+n^2$ پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد، زیرا:

$$1+2+...+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

تعریف۳: هرگاه $L_1=(a_{ij})$, $L_2=(b_{ij})$ در مربع لاتین هم مرتبه باشند که عناصرشان از یک مجموعه‌ی معین مانند A بیاید. در صورتی که زوج‌های مرتب (a_{ij},b_{ij}) به ازای تمامی i,j ها متمایز باشند، L_1,L_2 را متعامد گوییم.

تعریف۴: یک گردایه از مربع‌های لاتین $n\times n$ را که دو به دو بر یکدیگر متعامد باشند، متعامد گوییم.

مثال۶: گردایه زیر از مربع‌های لاتین زیر متعامدند.

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲

۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴

تذکر۳: هر مربع لاتین لزوماً دارای متعامد نیست، مثلاً

۲	۱
۱	۲

، زیرا فقط یک مربع لاتین دیگر از مرتبه ۲ وجود دارد که به صورت

۱	۲
۲	۱

می‌باشد که به وضوح نامتعامدند.

قضیه۳: به ازای هر عدد طبیعی n، حداکثر $n-1$ مربع متعامد وجود دارد.

قضیه۴: به ازای هر عدد طبیعی n به شکل p^m که p عددی اول و m عددی طبیعی است، دقیقاً $n-1$ مربع لاتین دو به دو متعامد وجود دارد.

قضیه۵: به ازای هر عدد اول مانند p و هر عدد طبیعی مانند m، یک میدان p^m عضوی وجود دارد.

قضیه فوق یکی از مهم‌ترین قضایای جبر می‌باشد که گالوا در مسیر حل ناپذیری معادلات درجه ۵ توسط رادیکال‌ها و با ضرایب گویا بدان دست یافته است. در واقع این قضیه راهکاری برای ساختن مربع‌های لاتین متعامد ارائه می‌کند.

قضیه۶: هرگاه F یک میدان متناهی باشد $(|F|=p^m=n)$ و $F=\{i:1\le i\le n\}$، آنگاه گردایه $\{L_k\}_{1\le k\le n-1}$ با تعریف $a_{ij}^{(k)}=k.i+j$ که $\{1\le i,j\le n\}$ می‌باشد، یک خانواده متعامد از مربع‌های لاتین می‌باشد.

مثال۷: از مرتبه ۲۵ چند مربع لاتین می‌توان یافت که همگی متعامد بر یکدیگر باشند؟

۱) ۱۶ ۲) $(16)^2$ ۳) ۲۴ ۴) $(24)^2$

پاسخ: گزینه «۳» چون $5^2=25$ و ۵ عددی اول می‌باشد، لذا $25-1=24$ مربع لاتین دو به دو متعامد وجود دارد.

❖ **تعریف۵:** هرگاه L یک مربع لاتین باشد، گوییم L استاندارد است، هرگاه سطر اول آن به صورت

n	$n-1$	...	۲	۱

باشد.

تذکر۴: هر مربع لاتین را می‌توان به صورت استاندارد نوشت، مثلاً اگر L مربع لاتین $n\times n$ باشد که سطر اول آن به صورت

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1

باشد، توسط تابع f با تعریف زیر، L به صورت استاندارد در می‌آید و با L^* نمایش می‌دهیم.

$$f=\{a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n\}\to\{1,2,...,n\}$$
$$f(a_i)=i$$

مثال۸: مربع لاتین زیر را به صورت استاندارد بنویسید.

۳	۲	۴	۱
۱	۳	۲	۴
۴	۱	۳	۲
۲	۴	۱	۳

تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$f(4)=3, f(3)=1, f(2)=2, f(1)=4$ و خواهیم داشت:

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

قضیه۷: هرگاه خانواده $A=\{L_k\}$ خانواده‌ای از مربع‌های لاتین $n\times n$ متعامد باشد، آنگاه $\beta=\{L_k^*\}$ نیز خانواده‌ای از مربع‌های لاتین دو به دو متعامد $n\times n$ خواهد بود که در آن L_k^* می‌باشد.

صفحه‌های آفین (متناهی):

در این مبحث در پی آنیم که به یک میدان متناهی یک هندسه نسبت دهیم، به طوری که این هندسه مشابه هندسه اقلیدسی باشد.

هندسه اقلیدسی دارای دو اصل به صورت زیر می‌باشد (و اصول دیگر که در اینجا مورد بحث نمی‌باشد).

۱- از هر ۲ نقطه یک خط منحصر به فرد می‌گذرد (۲ نقطه باید متمایز باشند)

۲- هرگاه L خطی در صفحه باشد و $P\notin L$ و در همان صفحه L واقع باشد، در این صورت خطی چون L' در صفحه وجود دارد که $P\in L$ و $L'\|L$ $(L'\bigcap L=\varnothing)$

در هندسه اقلیدسی مجموعه نقاط و مجموعه خطوط نامتناهی است، اما اگر مجموعه نقاط را متناهی فرض کنیم، آنگاه هندسه‌ی جدیدی به دست می‌آید که آن را هندسه متناهی می‌نامیم و اولین بار چنین هندسه‌هایی را فانو بررسی نمود.

❖ **تعریف۶:** هرگاه A مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه $L\subseteq P(A)$ یک صفحه‌ی آفین متناهی ساختاری است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) به ازای هر ۲ عضو متمایز از A یک و فقط یک عضو از L وجود دارد، مانند l که شامل آن دو عضو است.

۲) به ازای هر عضو L از L و هر $P\in A$ که $P\notin L$ یک و فقط یک عضو از L مانند l' موجود است که $P\in l'$, $l\bigcap l'=\varnothing$

۳) چهار نقطه در A وجود دارد که هیچ ۳ تای آنها به طور هم‌زمان در عضوی از L واقع نیستند. مجموعه A را مجموعه‌ی نقاط و اعضای آن را نقطه گوییم.

مجموعه L را مجموعه خطوط و اعضای آن را خط گوییم.

نمادگذاری: هرگاه A متناهی و $L\subseteq P(A)$ و شرایط تعریف فوق برقرار باشند، صفحه آفین را با $AP(A)$ نمایش می‌دهیم.

هرگاه F میدانی متناهی باشد و به عنوان مجموعه نقاط در نظرگرفته شود با $AP(F)$ نمایش می‌دهیم.

همان‌گونه که در هندسه اقلیدسی، صفحه اقلیدسی را با $R\times R$ در تناظر یک به یک قرار می‌دهیم، در هندسه متناهی نیز صفحه آفین را با $A\times A$ (و در حالتی که مجموعه نقاط میدان باشد با $F\times F$) نمایش می‌دهیم.

بررسی خط‌ها در هندسه‌ای متناهی

همان‌طور که در هندسه اقلیدسی در نمایش R^2، دو نوع خط داریم که عبارت‌اند از: خطوط با شیب بی‌نهایت $(x=a\in R)$ و خطوط با شیب حقیقی $(y=mx+b, m,b\in R)$ در هندسه متناهی نیز خطوط دو دسته می‌باشند.

حال $AP(F)$ را بررسی می‌کنیم:

$AP(F)$، صفحه $F\times F$ می‌باشد، لذا اگر $|F|=n$، آنگاه $|F\times F|=n^2$

نکته۱: در $AP(F)$، $|F|^2$ نقطه وجود دارد.

خط‌های با شیب بی‌نهایت به صورت $x=a\in F$ می‌باشند و خط‌های با شیب خط حقیقی به صورت $(b,m\in F\ ,\ y=mx+b)$ می‌باشند.

نکته۲: در $AP(F)$ تعداد خطوط با شیب بی‌نهایت برابر $|F|$ و تعداد خطوط با شیب حقیقی $|F|^2$ می‌باشد.

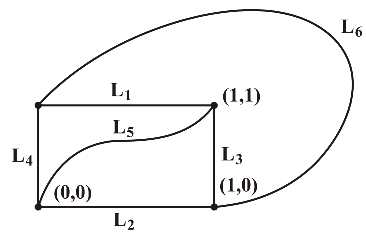
قضیه۸: تعداد خطوط در $AP(F)$ برابر است با $|F|^2+|F|$؛

همچنین دو قضیه زیر برقرارند:

قضیه۹: هر خط در $AP(F)$ شامل $|F|$ نقطه می‌باشد.

قضیه۱۰: هر نقطه در $AP(F)$ روی $|F|+1$ خط قرار دارد.

مثال۹: $AP(z_2)$ را بررسی کنید و نمودار آن را بکشید.



L_4,L_3 خطوط عمودی: $m_{L_3}=m_{L_4}=+\infty$

L_2,L_1 خطوط افقی: $m_{L_1}=m_{L_2}=0$

L_6,L_5 خطوط مایل: $m_{L_5},m_{L_6}=1$

$L_1:y=1\quad,\quad L_2:y=0\quad,\quad L_3:x=1\quad,\quad L_5:y=x$

$L_6:y=x+1\quad,\quad L_5:y=x$

توجه در Z_2 داریم $1+1=0$، لذا $-(1)=1$

مثال۱۰: تعداد خطوط $AP(Z_3)$ با شیب ۲ کدام است؟

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» کافی است خطوط $y=2x+b$ را در نظر بگیریم، چون $b\in z_3$، لذا برای b ۳ حالت موجود است. یا ۰ یا ۱ یا ۲، لذا ۳ خط موازی با شیب ۲ موجود است.

قضیه۱۱: هرگاه $|F|=n$ (در این حالت عدد اولی چون P و عددی طبیعی چون t موجود است که $n=p^t$)، آنگاه $AP(F)$ یک $(n^2,n^2+n,n+1,n,1)$ طرح ایجاد می‌کند.

قضیه۱۲: هرگاه n توانی از یک عدد اول باشد، آنگاه یک $(n^2+n+1,n^2+n+1,n+1,n+1,1)$ طرح موجود می‌باشد.

مثال۱۱: در طرح ایجاد شده توسط $AP(z_p)$ در صورتی که از هر نقطه ۲۰ خط بگذرد، r کدام است؟

۱) ۲۰　　۲) ۲۱　　۳) ۱۹　　۴) 20^2

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $AP(Z_p)$، $(p^2,p^2+p,p+1,p,1)$ طرح ایجاد می‌کند، از طرفی از هر $p+1$ نقطه یک خط می‌گذرد، لذا $p+1=20$ پس $p=19$ و می‌دانیم $r=p+1$، لذا $r=20$.