سؤالات آزمون مهندسی برق و مکانیک ـ سراسری ۹۸

۱ـ مسئله موج دوبعدی زیر را درون دایره واحد در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} u_{tt}(r,\theta,t)=۹\nabla^۲u(r,\theta,t)\ ,\ ۰<r<۱,۰<\theta<۲\pi,t>۰ \\ u(r,\theta,۰)=۱\ ,\ ۰\le r\le ۱,۰\le\theta<۲\pi \\ u_t(r,\theta,۰)=۰\ ,\ ۰\le r\le ۱,۰\le\theta<۲\pi \\ u(۱,\theta,t)=۰\ ,\ ۰\le\theta<۲\pi \end{cases}$$

اگر $u(r,\theta,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)J_۰(\alpha_n r)$ جواب مسئله باشد، a_n و b_n کدام‌اند؟

۱) $b_n=۰\ ,\ a_n=\dfrac{۲}{J_۰^۲(\alpha_n)}\int_۰^۱ rJ_۱(\alpha_n r)dr$

۲) $b_n=۰\ ,\ a_n=\dfrac{۲}{J_۱^۲(\alpha_n)}\int_۰^۱ rJ_۰(\alpha_n r)dr$

۳) $b_n=\dfrac{۲}{۳\alpha_n J_۰^۲(\alpha_n)}\int_۰^۱ rJ_۱(\alpha_n r)dr\ ,\ a_n=۰$

۴) $b_n=\dfrac{۲}{۳\alpha_n J_۱^۲(\alpha_n)}\int_۰^۱ rJ_۰(\alpha_n r)dr\ ,\ a_n=۰$

۲ـ با استفاده از مقدار $\oint_{|z|=۱}\dfrac{e^{az}}{z}dz$ ، حاصل $\int_۰^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta$ ، کدام است؟

۱) $\dfrac{۳\pi}{۴}$

۲) π

۳) $\dfrac{\pi}{۸}$

۴) $\dfrac{\pi}{۲}$

۳ـ فرض کنید $e^{-۲\omega}$ ضریب انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۲+۴}$ باشد.حاصل انتگرال $\int_۰^{\infty}\dfrac{x^۲}{(x^۲+۴)^۲}dx$ ، کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{۲}$

۲) ۲π

۳) $\dfrac{۱}{۲\pi}$

۴) $\dfrac{۲}{\pi}$

۴ـ نقش تصویر ناحیه $D=\{(x,y)\,|\,۱\le x\le ۲\ ,\ y\le ۲\}$ توسط نگاشت $\omega=e^{-\pi(iz+۲-i)}$ ، کدام است؟

۱) $\{\omega\,\big|\,|\omega|\ge ۱\ ,\ \mathrm{Re}(\omega)\ge ۰\}$

۲) $\{\omega\,\big|\,|\omega|\ge ۱\ ,\ \mathrm{Im}(\omega)\le ۰\}$

۳) $\{\omega\,\big|\,|\omega|\le ۱\ ,\ \mathrm{Re}(\omega)\ge ۰\}$

۴) $\{\omega\,\big|\,|\omega|\le ۱\ ,\ \mathrm{Im}(\omega)\le ۰\}$

۵ـ جواب مسئله گرمای زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t(x,t)=۴u_{xx}(x,t)+۲u(x,t),۰<x<\pi,t>۰ \\ u(x,۰)=f(x)\ ,\ ۰\le x\le\pi \\ u(۰,t)=u_x(\pi,t)=۰ \end{cases}$$

۱) $u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n e^{-(۴n^۲-۴n-۱)t}\sin(\dfrac{۲n-۱}{۲})x,a_n=\dfrac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}f(x)\sin(\dfrac{۲n-۱}{۲})xdx$

۲) $u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n e^{-(۴n^۲-۴n-۱)t}\cos(\dfrac{۲n-۱}{۲})x,a_n=\dfrac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}f(x)\cos(\dfrac{۲n-۱}{۲})xdx$

۳) $u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n e^{-(۴n^۲-۴n+۳)t}\cos(\dfrac{۲n-۱}{۲})x,a_n=\dfrac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}f(x)\cos(\dfrac{۲n-۱}{۲})xdx$

۴) $u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n e^{-(۴n^۲-۴n+۳)t}\sin(\dfrac{۲n-۱}{۲})x,a_n=\dfrac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}f(x)\sin(\dfrac{۲n-۱}{۲})xdx$

پاسخنامه آزمون مهندسی برق و مکانیک ـ سراسری ۹۸

۱ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} u_{tt}(r,\theta,t) = 9\nabla^2 u(r,\theta,t), 0<r<1, 0<\theta<2\pi \\ u(1,\theta,t)=0 \quad , 0\le\theta<2\pi \\ u(r,\theta,0)=f(r)=1 \quad , \quad 0\le r\le 1 \\ u_t(r,\theta,0)=g(r)=0 \quad , \quad 0\le r\le 1 \end{cases}$$

می‌دانیم که در مختصات قطبی، عملگر لاپلاس به‌صورت زیر است:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

در مسأله داده شده، ارتعاش دایره به زاویه θ بستگی ندارد. برای حل از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم؛ یعنی $u(r,t)=R(r)T(t)$ را در معادله قرار می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R} = \frac{T''}{9T} = \sigma \Rightarrow \text{یک ثابت}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} R''+\frac{1}{r}R'-\sigma R=0 \\ R(1)=0 \ \text{و} \ R(0) \ \text{کراندار} \end{cases} \qquad (I)$$

$$T''-9\sigma T=0 \qquad (II)$$

با توجه به شرط مرزی $u(1,\theta,t)=0$ داریم $R(1)=0$، همچنین چون $r=0$ یک نقطه منفرد برای معادله (I) می‌باشد، شرط متناهی بودن $R(r)$ وقتی $r\to 0^+$ را داریم.

می‌دانیم که فرم عمومی معادله بسل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\mu^2)y=0 \qquad x>0 \qquad (III)$$

معادلهٔ ما به صورت زیر است:

$$R''+\frac{1}{r}R'-\sigma R=0 \Rightarrow r^2R''+rR'-r^2\sigma R=0 \qquad (IV)$$

معادله‌ی (III)، حلش به توابع بسل ختم می‌شود و با استفاده از سری‌ها اثبات می‌گردد.

با حل معادله (III) به پاسخ توابع بسل به صورت زیر می‌توان رسید:

به‌ازای $\mu_m=m$، $y(x)=AJ_m(\lambda x)+BY_m(\lambda x)$

با مقایسه معادله (IV) با معادله اصلی و کامل بسل (معادله III) می‌توان فهمید که در حقیقت در این معادله $\mu=0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$R(r)=AJ_0(\lambda r)+BY_0(\lambda r)$$

چون $R(r)$ در صفر کراندار است پس باید $B=0$ باشد و لذا:

$$R(r)=AJ_0(\lambda r)$$

چون $R(1)=0$ می‌باشد، $R(r)=AJ_0(\lambda r) \Rightarrow R(1)=AJ_0(\lambda)=0$

بنابراین λ_nها ریشه‌های تابع بسل J_0 می‌باشند. بنابراین در حالت کلی خواهیم داشت:

$$R(r)=AJ_0(\lambda_n r)$$

در حقیقت فرض کنید که α_n، n امین صفر J_0 باشد. یعنی $J_0(\lambda)$ به ازای λ_nهای خاصی برابر صفر است که همان λها مقادیر ویژه معادله مورد نظر می‌باشند و توابع ویژه هم $J_0(\lambda_n r)$ می‌باشند.

مقادیر و توابع ویژه رابطه (I) عبارت است از:

$$\sigma_n=-\lambda_n^2=\frac{\alpha_n}{1}\quad ,J_0(\lambda_n r),n=1,2,3,...$$

که در آن، n,α_n امین صفر J_0 می‌باشد.

متناظر λ_n جواب‌های مستقل خطی معادله (II) عبارتند از:

$$\cos 3\lambda_n t\quad ,\quad \sin 3\lambda_n t\quad ,\quad n=1,2,3,...$$

در نتیجه داریم:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 3\lambda_n t+b_n\sin 3\lambda_n t)J_0(\lambda_n r)$$

در صورت سؤال داشتیم که شرایط اولیه به صورت زیر می‌باشند:

$$u(r,\theta,0)=f(r)=1\ ,\ u_t(r,\theta,0)=g(r)=0$$

بنابراین با اعمال این شرایط اولیه جواب $u(r,\theta,t)$ به‌دست آمده:

$$u(r,\theta,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\lambda_n r)=1$$

$$u_t(r,\theta,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(+3\lambda_n b_n)J_0(\lambda_n r)=0$$

در حقیقت با استفاده از شرایط اولیه می‌خواهیم a_n و b_n را پیدا کنیم.

بنابراین واضح است که ضریب b_n برابر صفر است. برای ضریب a_n نیز می‌توان از خاصیت تعامد توابع بسل استفاده کرد.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\lambda_n r)=1\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } rJ_0(\lambda_m r)} rJ_0(\lambda_m r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\lambda_n r)rJ_0(\lambda_m r)$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم تا از خاصیت تعامد توابع بسل بهره بگیریم:

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_m r)dr=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\lambda_m r)J_0(\lambda_n r)rdr$$

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)dr=a_n\int_0^1(J_0(\lambda_n r))^2 rdr\ \Rightarrow a_n=\frac{\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)dr}{\frac{1}{2}J_1^2(\lambda_n)}=\frac{2}{J_1^2(\lambda_n)}\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)dr$$

راه‌حل تستی و کوتاه و هوشی:

$$u_t(r,\theta,0)=0\ \Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(-a_n\sin\lambda_n t+b_n\cos\lambda_n t)J_0(\alpha_n r)=0\ \Rightarrow b_n=0$$

گزینه (۳) و (۴) رد می‌شوند.

$$u_t(r,\theta,0)=0\ \Rightarrow\boxed{b_n=0}\ \Rightarrow u(1,\theta,t)=0\ \Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t)J_0(\alpha_n)=0$$

تساوی بالا ایجاب می‌کند که $J_0(\alpha_n)=0$ باشد. می‌باید به این نکته توجه کنیم که اگر $J_0(\alpha_n)=0$ باشد، نمی‌تواند در مخرج باشد! پس به راحتی می‌توان گزینه (۱) را حذف کرده و تنها گزینه (۲) باقی می‌ماند!

۲ـ گزینه «۲» می‌دانیم که تابع $f(z)=e^{kz}$ همه جا تحلیلی است. بنابراین از فرمول انتگرال کوشی برای نقطه‌ی $z_0=0$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{e^{kz}}{z}dz=2\pi i f(0)=2\pi i$$

از طرفی با تغییر متغیر $(-\pi<\theta\le\pi) z=e^{i\theta}$ روی دایره‌ی ۱ $=|z|$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{e^{kz}}{z}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ke^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}e^{ik\sin\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}(\cos(k\sin\theta)+i\sin(k\sin\theta))d\theta$$

$$=-\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\sin(k\sin\theta)d\theta}_{I_1}+i\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta}_{I_2}$$

بنابراین تساوی $I=-I_1+iI_2=2\pi i$ را داریم.

قسمت‌های موهومی و حقیقی در دو سمت تساوی با هم برابرند بنابراین داریم:

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta=2\pi$$

و همچنین داریم:

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\sin(k\sin\theta)d\theta=0$$

از طرفی در I_2 انتگرالده زوج است، زیرا ترکیب یک تابع زوج با تابع فرد، زوج خواهد بود. پس داریم:

$$\int_0^{\pi}e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2}I_2=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

روش اول: سؤال نسبتاً ساده‌ای است که مبتنی بر یکی از اصول و اتحادهای مهم در ریاضیات مهندسی می‌باشد. این اتحاد، اتحاد پارسوال در انتگرال فوریه می‌باشد و بیان می‌دارد:

اگر $A(\omega)$ و $B(\omega)$ ضرایب انتگرال فوریه تابع $f(x)$ باشند، آن‌گاه رابطه پارسوال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)dx=\int_0^{\infty}[A^2(\omega)+B^2(\omega)]d\omega$$

حال اگر این اتحاد را بر اساس انتگرال فوریه کسینوسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty}[A(\omega)]^2d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f^2(x)dx$$

و برای انتگرال فوریه سینوسی داریم:

$$\int_0^{\infty}[B(\omega)]^2d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f^2(x)dx$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}\Rightarrow f^2(x)=\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$$

با توجه به اینکه برای انتگرال فوریه سینوسی $\frac{x}{x^2+4}$، برابر $B(\omega)=e^{-2\omega}$ داده شده است، خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}e^{-4\omega}d\omega=[\frac{\pi}{2}\times(\frac{-1}{4})e^{-4\omega}]_0^{\infty}=\frac{\pi}{8}(0+1)=\frac{\pi}{8}$$

متأسفانه جواب در گزینه‌ها نیست.

روش دوم: البته می‌توان به فرض سؤال توجه نکرد و کلاً سؤال را یک سؤال انتگرال مختلط تلقی کرده و انتگرال را حل کنیم!

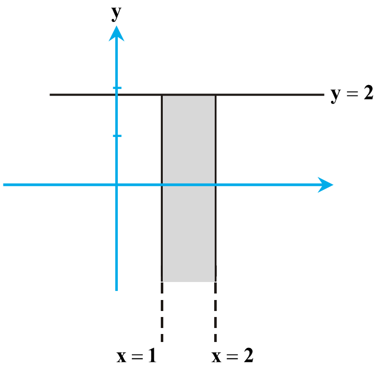
$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx=\frac{1}{2}\times2\pi i$$ (مجموع مانده‌های $\frac{z^2}{(z^2+4)^2}$ که بالای محور حقیقی قرار دارد.)

قطب‌های تابع برابر با $z=\pm2i$ هستند که فقط $z=2i$ بالای محور حقیقی قرار دارد. ابتدا می‌نویسیم $f(z)=\frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$ پس داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}f(z)=\lim_{z\to2i}[\frac{z^2}{(z+2i)^2}]'=\lim_{z\to2i}[\frac{2z(z+2i)^2-2(z+2i)z^2}{(z+2i)^4}]=\lim_{z\to2i}\frac{2z(z+2i)-2z^2}{(z+2i)^3}=\frac{2\times2i(2i+2i)-2(2i)^2}{(2i+2i)^3}=\frac{-16+8}{-64i}=\frac{1}{8i}$$

بنابراین حاصل انتگرال با استفاده از این روش هم برابر با $\pi i\times\frac{1}{8i}=\frac{\pi}{8}$ است.

۴ـ گزینه «۴» سؤال را به سه روش حل می‌کنیم. ناحیه در نظر گرفته شده به‌صورت مقابل می‌باشد:



$$-\pi(iz+2-i)=-\pi(i(x+iy)+2-i)=-\pi(ix-y+2-i)=-\pi((x-1)i+(2-y))$$

$$\Rightarrow -\pi(iz+2-i)=-\pi(2-y)+\pi(1-x)i$$

پس می‌توان نوشت:

$$\omega=e^{\pi(y-2)+\pi(1-x)i}=e^{\pi(y-2)}.e^{\pi(1-x)i}$$

می‌توان گفت که عبارت $e^{\pi(y-2)}$ همواره مثبت است؛ از طرفی می‌توان نوشت:

$$e^{\pi(1-x)i}=\cos\pi(1-x)+i\sin\pi(1-x)$$

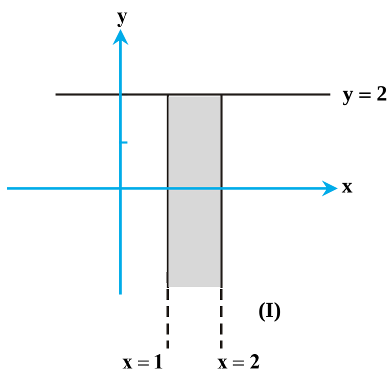
$$1\le x\le 2\Rightarrow -1\le 1-x\le 0\Rightarrow -\pi\le\pi(1-x)\le 0$$

با توجه به بازه به دست آمده برای $\pi(1-x)$، در مورد $\cos\pi(1-x)$ نمی‌توان قضاوت قطعی کرد. ولی مشخص است که $\sin\pi(1-x)$ همواره منفی است.

از طرفی چون اندازه ω برابر با $|e^{\pi(y-2)}|$ می‌باشد و چون $y\le 2$ لذا $0<e^{\pi(y-2)}\le 1$ است، بنابراین $|\omega|\le 1$ خواهد بود.

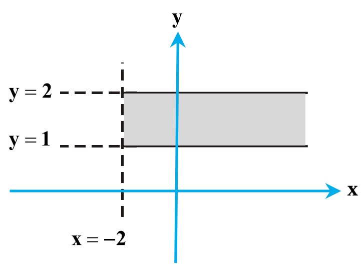
روش دوم: می‌توانیم از خاصیت نگاشت به‌صورت مرحله به مرحله استفاده کنیم؛ بدین صورت که باید توجه کنیم کـه در نگاشـت کلـی $\omega=e^{-\pi(iz+2-i)}$ نگاشت انتقالی، نگاشت انقباضی یا انبساطی و نگاشت $\omega_3=e^z$ موجود می‌باشد.

$1)\ \omega_1=iz\quad ;\ \text{if}\ z=x+iy\Rightarrow \boxed{\omega_1=ix-y}$



(I)

$\overset{\omega_1}{\Rightarrow}$

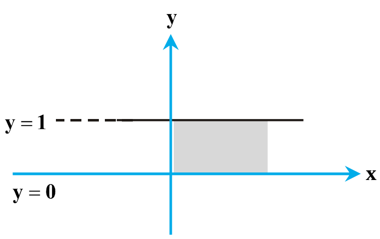


(II)

یعنی ناحیه (II) باید یکی پایین بیاید، دو تا سمت راست برود.

$2)\ \omega_2=iz+2-i=ix-y+2-i=\boxed{i(x-1)+2-y}$

$\overset{\omega_2}{\Rightarrow}$

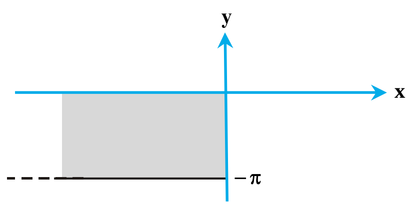


(III)

$3)\ \omega_3=-\pi(iz+2-i)=-\pi\omega_2$

یعنی ناحیه (III) هم نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود و هم ضربدر π شده و منبسط می‌گردد.

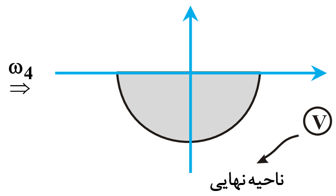
$\overset{\omega_3}{\Rightarrow}$



(IV)

$4)\ \omega_4=e^{-\pi(ix+2-i)}=e^{\omega_3}$

فرض کنیم که $\omega_۳ = u + iv$ باشد. با توجه به ناحیه (IV) معلوم است که $-\infty < u \le ۰$ و $-\pi \le v \le ۰$ می‌باشد. بنابراین نگاشت نهایی $\omega_۴ = e^{\omega_۳}$ که بر ناحیه (IV) اعمال می‌شود، این ناحیه را به‌صورت نیم‌دایره‌ای با شعاع یک تبدیل می‌کند:



روش رد گزینه: ابتدا توجه کنید که $\omega = e^{-\pi(iz+۲-i)} = e^{-\pi(ix-y+۲-i)}$. خُب، حالا با توجه به ناحیه D فرض می‌کنیم $x = ۱$ و $y = ۰$ باشه، در این صورت $\omega = e^{-۲\pi}$ و این یعنی $|\omega| = |e^{-۲\pi}| = |\frac{۱}{e^{۲\pi}}|$ که قطعاً از یک کوچیک‌تره، پس تا اینجا با گزینه‌های (۱) و (۲) خداحافظی می‌کنیم، فرق گزینه‌های (۳) و (۴) در اینه که (۳) میگه قطعاً قسمت حقیقی w بزرگ‌تر یا مساوی صفره و (۴) میگه قطعاً قسمت موهومی ω کوچک‌تر یا مساوی صفر میشه باید ببینم کدوم راست میگه!

اگه فرض کنیم $x = ۲$ و $y = ۲$ اونوقت داریم:

$$\omega = e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -۱$$

پس میشه نتیجه گرفت:گزینه (۳) غلطه و قطعاً گزینه‌ی (۴) جوابه!! (چون $\operatorname{Re}\omega = -۱$ شد).

۵ــ گزینه «۱» با روش جداسازی متغیرها مسأله را حل می‌کنیم:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \Rightarrow F(x)G'(t) = ۴F''(x)G(t) + ۲F(x)G(t)$$

با تقسیم طرفین بر $F(x)G(t)$ و جداسازی متغیرها داریم:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{۴F''(x)}{F(x)} + ۲ = -\lambda$$

با حل معادله مربوط به x خواهیم داشت:

$$۴F''(x) + ۲F(x) = -\lambda F(x) \Rightarrow F''(x) + \frac{۲+\lambda}{۴}F(x) = ۰$$

معادله‌ی مشخصه آن به صورت $r^۲ + \frac{۲+\lambda}{۴} = ۰$ می‌باشد. اکنون با توجه به علامت $\frac{۲+\lambda}{۴}$ سه حالت داریم:

۱) اگر $\frac{۲+\lambda}{۴} = -p^۲ < ۰$ باشد:

$$r^۲ - p^۲ = ۰ \Rightarrow r = \pm p \Rightarrow F(x) = c_۱ \sinh px + c_۲ \cosh px$$

که در نهایت با توجه به شرایط مرزی داده شده $u(۰,t) = u_x(\pi,t) = ۰$ به جواب بدیهی $F(x) = ۰$ می‌رسیم.

۲) اگر $\frac{۲+\lambda}{۴} = p^۲ > ۰$ باشد، معادله مشخصه به فرم $r^۲ + p^۲ = ۰$ خواهد بود و داریم:

$$F(x) = c_۱ \cos px + c_۲ \sin px$$

$$u(۰,t) = ۰ \Rightarrow c_۱ = ۰ \Rightarrow F(x) = c_۲ \sin px$$

$$u_x(\pi,t) = ۰ \Rightarrow c_۲ \cos p\pi = ۰ \Rightarrow c_۲ \ne ۰ \;,\; \cos p\pi = ۰ \Rightarrow p_n = \frac{۲n-۱}{۲} \;,\; n = ۱,۲,\ldots$$

۳) اگر $\frac{۲+\lambda}{۴} = ۰$ باشد:

$$F''(x) = ۰ \Rightarrow F(x) = a + bx$$
$$u(۰,t) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \Rightarrow F(x) = bx$$
$$u_x(\pi,t) = ۰ \Rightarrow F_x(x=\pi) = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

پس باز هم به جواب بدیهی $F(x) = ۰$ می‌رسیم.

پس در یک جمع‌بندی می‌توان گفت که $F_n(x) = a_n \sin\frac{۲n-۱}{۲}x$ می‌باشد و این یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

اکنون به حل معادله مربوط به $G(t)$ می‌پردازیم:

$$\frac{G'(t)}{G(t)}=-\lambda \Rightarrow \ln G(t)=-\lambda t+\ln c \Rightarrow G(t)=ce^{-\lambda t}$$

از قبل داشتیم:

$$\frac{2+\lambda}{4}=p^2=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda_n=4n^2-4n-1 \Rightarrow G(t)=ce^{-(4n^2-4n-1)t}$$

پس جواب کلی به صورت مقابل خواهد بود:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n-1)t}\sin\frac{2n-1}{2}x$$

و با توجه به شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$ خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\,dx$$

روش تستی و ساده‌تر: سؤال ساده‌ایه و با حذف گزینه‌های (۲) و (۳) تا حدودی می‌تونیم جواب رو تا اواسط پیش ببریم.

با توجه به سؤال، $u(0,t)=0$ میشه در نتیجه گزینه‌ای می‌تونه جواب باشه که اگه به جای x صفر بذاریم، حاصل صفر بشه. پس گزینه‌های (۱) و (۴)، می‌تونن جواب باشن و گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شن. حالا با توجه به فرم جواب‌های گزینه‌های (۱) و (۴) می‌تونیم $u(x,t)$ رو به‌صورت زیر در نظر بگیریم که تو اون k یک مقدار ثابته و باید اون رو پیدا کنیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n+k)t}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x$$

پس داریم:

$$u_t(x,t)=-(4n^2-4n+k)\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n+k)t}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x$$

$$4u_{xx}(x,t)=-4\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n+k)t}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x$$

حالا می‌تونیم روابط محاسبه شده رو بذاریم تو معادله اصلی و بنویسیم:

$$u_t(x,t)=4u_{xx}(x,t)+2u(x,t) \Rightarrow -(4n^2-4n+k)=-4\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+2 \Rightarrow \cancel{4n^2}-\cancel{4n}+k=-2+\cancel{4n^2}+1-\cancel{4n} \Rightarrow \boxed{k=-1}$$

سؤالات آزمون مهندسی برق و مکانیک ـ سراسری ۱۳۹۹

۱ـ فرض کنید $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin nx+n\cos nx}{n^۳+۱}$ باشد، حاصل $\int_۰^{۲\pi} f(x)\cos^۴ x\,dx$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳۹\pi}{۱۱۷۰}$ ۲) $\frac{۱۳۹\pi}{۵۸۵}$ ۳) $\frac{۲۷۸\pi}{۵۸۵}$ ۴) $\frac{۲۷۸\pi}{۲۳۴۰}$

۲ـ تابع $g(x)=e^{-|x|}\cos x$ را در نظر بگیرید. اگر $a(\omega)$, $b(\omega)$ ضرایب انتگرال فوریه تابع فوق و $\omega \gg ۱$ باشد، آنگاه مقدار تقریبی $\frac{a(۲\omega)}{a(۴\omega)}$، برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲π

۳ـ فرض کنید هدف تعیین توزیع دمای حالت پایدار در یک صفحه تخت نازک است که ربع اول صفحه مختصات را اشغال کرده است. فرض کنید مرز $x=۰$ در دمای صفر درجه نگه داشته شده و مرز $y=۰$ برای $۰\le x\le ۲$ در یک دمای ثابت ۴ و برای $x>۲$ صفر است. اگر $u(x,y)=\frac{۸}{\pi}\int_۰^{\infty} c_k \sin kx\, e^{-ky}dk$ جواب مسئله موردنظر باشد، c_k کدام است؟

۱) $\frac{۱+\cos ۲k}{۲k}$ ۲) $\frac{۱-\cos ۲k}{۲k}$ ۳) $\frac{۱+\cos ۲k}{k}$ ۴) $\frac{۱-\cos ۲k}{k}$

۴ـ فرض کنید $f(\alpha)=\oint_{|z|=۳}\frac{z^۴dz}{(z-\alpha)^۲(z-۲\alpha)}$ است. مقدار $f'(i)$ کدام است؟

۱) -۲۲π ۲) $-۴۴\pi i$ ۳) -۴۴π ۴) $-۲۲\pi i$

۵ـ اگر مساحت ناحیه تبدیل‌یافته $|z|=\rho$ با نگاشت $w=z+\frac{۱}{z}$ برابر $\frac{۱۵\pi}{۴}$ باشد، آنگاه ρ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخنامه آزمون مهندسی برق و مکانیک ـ سراسری ۱۳۹۹

۱ـ گزینه «۱ و ۴» از سؤالات پرتکرار آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری می‌باشد. مهمترین نکته دانستن فرمول $\cos^۴ x$ است و البته اگر کسی فرمول را نداند، فرمول طلایی $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos x}{۲}$ می‌تواند فرمول را بازنویسی کند.

$$\cos^۴ x=(\cos^۲ x)(\cos^۲ x)=(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}(۱+\cos^۲ ۲x+۲\cos ۲x)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x+\frac{۱}{۲}\cos ۲x$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}(\frac{۱+\cos ۴x}{۲})+\frac{۱}{۲}\cos ۲x=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}\cos ۴x+\frac{۱}{۲}\cos ۲x=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x+\frac{۱}{۸}\cos ۴x$$

انتگرال خواسته شده به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_۰^{۲\pi} f(x)\cos^۴ x dx=\int_۰^{۲\pi}(\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x+\frac{۱}{۸}\cos ۴x)f(x)dx \Rightarrow I=\frac{۱}{۴}\int_۰^{۲\pi} f(x)dx+\frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}\cos ۲x f(x)dx+\frac{۱}{۸}\int_۰^{۲\pi} f(x)\cos ۴x dx$$

حالا خوب دقت کنید که $I_۱$ همان ضریب $a_۰$، $I_۲$ همان $\pi a_۲$ و $I_۳$ همان $\pi a_۴$ است. حالا با توجه به سری فوریه تابع $f(x)$ باید این ضرایب حساب شود.

دقت کنید در سری فوریه $f(x)$، $a_۰$ برابر صفر در نظر گرفته شده است.

$$a_n=\frac{n}{n^۳+۱}\Rightarrow\begin{cases}a_۲=\frac{۲}{۲^۳+۱}=\frac{۲}{۹}\\ a_۴=\frac{۴}{۴^۳+۱}=\frac{۴}{۶۵}\end{cases}$$

پس داریم:

$$I=\pi\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۹}+\pi\times\frac{۱}{۸}\times\frac{۴}{۶۵}=\pi(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۳۰})=\pi(\frac{۱۳۹}{۱۱۷۰})$$

۲ـ گزینه «۲»

$$g(x)=e^{-|x|}\cos x\xrightarrow{\text{تابع زوج}}a(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty}e^{-x}\cos x\cos\omega x dx , b(\omega)=۰$$

$$a(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty}e^{-x}\frac{۱}{۲}[\cos(۱+\omega)x+\cos(۱-\omega)x]dx=\frac{۱}{\pi}\left[\underbrace{\int_۰^{\infty}e^{-x}\cos(۱+\omega)xdx}_{I}+\underbrace{\int_۰^{\infty}e^{-x}\cos(۱-\omega)dx}_{II}\right]$$

$$\begin{array}{c|c} e^{-x} & \oplus \quad \cos(1+\omega)x \\ \hline -e^{-x} & \ominus \quad \frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x \\ e^{-x} & \oplus \quad \frac{-1}{(1+\omega)^2}\cos(1+\omega)x \end{array}$$

$$I=\frac{e^{-x}}{(1+\omega)}\sin(1+\omega)x-\frac{e^{-x}}{(1+\omega)^2}\cos(1+\omega)x\Big]_0^\infty-\frac{1}{(1+\omega)^2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-x}\cos(1+\omega)x\,dx}_{I}$$

$$\Rightarrow\left[1+\frac{1}{(1+\omega)^2}\right]I=\frac{e^{-x}}{1+\omega}\sin(1+\omega)x-\frac{e^{-x}}{(1+\omega)^2}\cos(1+\omega)x\Big]_0^\infty\Rightarrow I=\frac{(1+\omega)^2}{1+(1+\omega)^2}\left[\frac{e^{-x}}{1+\omega}\sin(1+\omega)x-\frac{e^{-x}}{(1+\omega)^2}\cos(1+\omega)x\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{1+(1+\omega)^2}\overset{\omega\gg 1}{=\!=\!=}\frac{1}{\omega^2}$$

به روش مشابه:

$$II=\frac{1}{\omega^2}\Rightarrow a(\omega)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\right]=\frac{4}{\pi\omega^2}\Rightarrow a(\omega)\propto\frac{1}{\omega^2}\Rightarrow\frac{a(2\omega)}{a(4\omega)}=\frac{\frac{1}{(2\omega)^2}}{\frac{1}{(4\omega)^2}}=\frac{16\omega^2}{4\omega^2}=4$$

۳ـ گزینه «۴» در واقع داده‌های سؤال به‌صورت مقابل است:

$$u(x,y)=\frac{8}{\pi}\int_0^\infty c_k\sin(kx)e^{-ky}dk$$

$$\begin{cases}u(0,y)=0\\ u(x,0)=\begin{cases}4\,;\ 0\le x<2\\ 0\,;\ x>2\end{cases}\end{cases}$$

به راحتی ابتدا با کنترل شرط $u(x,0)$ داریم:

$$u(x,0)=\frac{8}{\pi}\int_0^\infty c_k\sin kx\,dk\Rightarrow 4=\frac{8}{\pi}\int_0^2 c_k\sin(kx)dk\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\int_0^2 c_k\sin(kx)\,dk$$

$$\Rightarrow c_k=\frac{2}{\pi}\int_0^2\frac{\pi}{2}\sin(kx)dx=\frac{1}{k}[-\cos kx]_0^2=\frac{1}{k}(-\cos 2k+1)$$

توضیح: در پاسخنامه سازمان سنجش به این دلیل گزینه (۲) اعلام شده که در هنگام حل، طراح متوجه نبوده تابع فرد است، با توجه به انتگرال فوریه داده شده در صورت تست، $\int_0^\infty c_k\sin kxe^{-ky}dk$ یک انتگرال فوریه فرد است، لذا $\frac{8}{\pi}dk$ در اصل همان $B(\omega)$ می‌باشد و در ضریب $B(\omega)-$ ضریب $\frac{2}{\pi}$ام باید وجود داشته باشد و به جای ضریب $\frac{2}{\pi}$ام از $\frac{1}{\pi}$ام استفاده کرده است.

۴ـ گزینه «۳» سؤال سابقه طرح در آزمون‌های کارشناسی ارشد سال‌های گذشته را دارد. نمونه آن کارشناسی ارشد برق سال ۱۳۸۹ می‌باشد. طبق قضیه مانده‌ها داریم:

$$f(\alpha)=2\pi i[z=\alpha \text{ در } \frac{z^4}{(z-2)^2(z-2\alpha)} \text{ مانده تابع } + z=2\alpha \text{ در } \frac{z^4}{(z-\alpha)^2(z-2\alpha)} \text{ مانده تابع }]$$

$$z=\alpha \text{ مانده در } =\left(\frac{z^4}{z-2\alpha}\right)'\Big|_{z=\alpha}=\frac{4z^3\times(-2\alpha)-z^4}{(z-2\alpha)^2}\Big|_{z=\alpha}=\frac{4(\alpha^3)(\alpha-2\alpha)-\alpha^4}{(\alpha-2\alpha)^2}=\frac{-\alpha^4}{\alpha^2}=-3\alpha^2$$

$$z=2\alpha \text{ مانده تابع در } =\frac{z^4}{(z-\alpha)^2}\Big|_{z=2\alpha}=\frac{(2\alpha)^4}{(2\alpha-\alpha)^2}=16\alpha^2$$

$$\Rightarrow f(\alpha)=2\pi i(16\alpha^2-5\alpha^2)=(22\pi\alpha^2)i\Rightarrow f'(\alpha)=44\pi\alpha i\Rightarrow f'(i)=44\pi(i)(i)=-44\pi$$

۵ـ گزینه «۲» طبق توضیحات کتاب در مورد نگاشت زوکوفسکی، تمام دایره‌های به شعاع $|z|=\rho$ به بیضی با معادله مقابل نگاشته می‌شوند:

$$\frac{u^2}{(\rho+\frac{1}{\rho})^2}+\frac{v^2}{(\rho-\frac{1}{\rho})^2}=1$$

از طرفی می‌دانیم مساحت بیضی به معادله $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$ برابر با πab است، لذا مساحت این بیضی به صورت زیر است:

$$\text{مساحت بیضی}=\pi(\rho+\frac{1}{\rho})(\rho-\frac{1}{\rho})=\pi(\rho^2-\frac{1}{\rho^2})$$

طراح سؤال گفته این مساحت برابر با $\frac{15\pi}{4}$ است، لذا داریم:

$$\frac{15}{4}\pi=(\rho^2-\frac{1}{\rho^2})\pi\Rightarrow\rho^2-\frac{1}{\rho^2}=\frac{15}{4}$$

با توجه به گزینه $\rho=2$ است.

سؤالات آزمون مهندسی برق و مکانیک ــ سراسری ۱۴۰۰

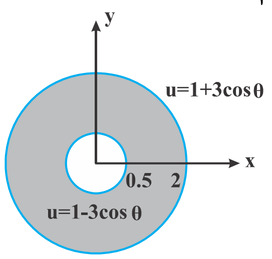
۱ــ فرض کنید f و f' توابع تکه‌ای پیوسته بر روی $[-L,L]$ باشند، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx\,,\,n\in\mathbb{N}$ کدام است؟

۱) π
۲) صفر
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) مقدار حد وجود ندارد.

۲ــ اگر y و y' مطلقاً انتگرال‌پذیر باشند، جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y''+6y'+5y=4\delta(t-3)$، به ازای $t=4$، کدام است؟(δ تابع دلتای دیراک است.)

۱) $e^{-1}+e^{-5}$
۲) $e^{-1}+e^{-3}$
۳) $e^{-1}-e^{-3}$
۴) $e^{-1}-e^{-5}$

۳ــ مسئله الکترواستاتیک $\nabla^2 u(r,\theta)=0$ را مطابق شکل زیر در مختصات قطبی، در نظر بگیرید. مقدار $u(\frac{4}{3},\pi)-u(\frac{2}{3},\frac{\pi}{3})$، کدام است؟



۱) $-\frac{1}{6}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{3}$

۴ــ حاصل $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta$ به ازای $0<r<1$، کدام است؟(راهنمایی از بسط مکلورن تابع $\frac{1}{1-z}$ به ازای $|z|<1$ استفاده کنید.)

۱) $\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$
۲) $\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$
۳) $\frac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$
۴) $\frac{r\cos\theta-r^2}{1+2r\cos\theta+r^2}$

۵ــ حاصل $\oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\bar{z}\,d\bar{z}$، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi i}{3}$
۲) $-\frac{\pi i}{6}$
۳) $-\frac{\pi i}{12}$
۴) $-\frac{\pi i}{18}$

پاسخنامه آزمون مهندسی برق و مکانیک ــ سراسری ۱۴۰۰

۱ــ گزینه «۲» چون تابع در فاصله $[-L,L]$ تکه‌ای پیوسته است، لذا حتماً دارای سری فوریه خواهد بود که ضرایب کسینوسی سری فوریه از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$I=\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\lim_{n\to\infty}\pi a_n=0$$

ضرایب سینوسی و کسینوسی در سری فوریه حتماً در $n\to\infty$ به صفر میل می‌کنند.

۲ــ گزینه «۴» از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم:
$$y''+6y'+5y=4\delta(t-3)\ \Rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+6(sY(s)-y(0))+5Y(s)=4e^{-3s}$$
$$\Rightarrow Y(s)(s^2+6s+5)=4e^{-3s}\Rightarrow Y(s)=4e^{-3s}[\frac{1}{(s+1)(s+5)}]=4e^{-3s}[\frac{\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{s+5}]$$
$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t)=u_3(t)[e^{-(t-3)}-e^{-5(t-3)}]\xrightarrow{t=4} y(4)=1(e^{-1}-e^{-5})=e^{-1}-e^{-5}$$

۳ــ گزینه «۲» طبق فرم کلی جواب معادله لاپلاس در مختصات قطبی در کتاب ریاضی مهندسی می‌توان جواب کلی مسأله را به صورت زیر نوشت:
$$u(r,\theta)=a_0+b_0\operatorname{Ln} r+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\theta+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}\theta)(A_n r^{\sqrt{\lambda_n}}+B_n r^{-\sqrt{\lambda_n}})$$

از طرفی شروط مقابل را در صورت سؤال با توجه به شکل داریم:
$$\begin{cases}u(0/5,\theta)=1-3\cos\theta\\ u(2,\theta)=1+3\cos\theta\end{cases}$$

حال با توجه به اینکه مسأله یک فرم متقارن است و شرط مرزی در $\theta=0$ و $\theta=2\pi$ یا در $\theta=\pi$ و $\theta=-\pi$ یکی است، لذا داریم: $\sqrt{\lambda_n}=n$

$$u(r,\theta)=a_0+b_0\operatorname{Ln} r+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)(A_n r^n+B_n r^{-n})$$

از طرفی با توجه به اینکه شرایط مرزی تا کمان $n=1$ ارائه شده است ($1-3\cos\theta$ و $1+3\cos\theta$)، پس فرم کلی جواب نقطه به ازای $n=0$ و $n=1$ مقدار دارد و بقیه a_n ها و b_n ها صفر است. لذا جواب به شکل مقابل است:
$$u(r,\theta)=a_0+b_0 Ln\, r+(a_1\cos\theta)(A_1 r+B_1 r^{-1})$$
و در نهایت با توجه به اینکه سری فوریه‌ای زوج تابع جواب مدنظر است، بنابراین باید $b_0=0$ باشد تا شرط تناوبی مرزی در $\theta=\pi$, $\theta=-\pi$ برقرار باشد:
$$u(r,\theta)=a_0+a_1\cos\theta(A_1 r+B_1 r^{-1})$$
و در حالت کامل داریم:
$$u(r,\theta)=a_0+\cos\theta(Cr+\frac{D}{r}) \quad \text{و} \quad \begin{cases}C=A_1\times a_1\\ D=B_1\times a_1\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\overset{1-3\cos\theta}{\cancel{u(\frac{1}{2},\theta)}}=a_0+\cos\theta(\frac{1}{2}C+2D)\\ \overset{1+3\cos\theta}{\cancel{u(2,\theta)}}=a_0+\cos\theta(2C+\frac{1}{2}D)\end{cases}$$
حال با حل دستگاه و معادله‌سازی طرفین داریم:
$$\Rightarrow\begin{cases}a_0=1\\ \frac{1}{2}C+2D=-3\\ 2C+\frac{1}{2}D=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=1\\ C=2\\ D=-2\end{cases}$$
پس فرم کلی جواب به صورت مقابل است:
$$u(r,\theta)=1+\cos\theta(2r-\frac{2}{r})$$
$$\begin{cases}u(\frac{4}{3},\pi)=1+\cos\pi\times(\frac{8}{3}-\frac{3}{2})=1-\frac{7}{6}=-\frac{1}{6}\\ u(\frac{2}{3},\frac{\pi}{3})=1+\cos\frac{\pi}{3}\times(\frac{4}{3}-3)=\frac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow u(\frac{4}{3},\pi)-u(\frac{2}{3},\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

۴ـ گزینه «۱» از راهنمایی سؤال استفاده می‌کنیم، می‌دانیم بسط مک لوران $\frac{1}{1-z}$ به شکل مقابل است:
$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots$$
با جایگذاری $z=re^{i\theta}$:
$$\frac{1}{1-re^{i\theta}}=1+re^{i\theta}+r^2e^{2i\theta}+r^3e^{3i\theta}+\cdots=1+r\cos\theta+ir\sin\theta+r^2\cos2\theta+ir^2\sin2\theta+\cdots$$
$$=(1+r\cos\theta+r^2\cos2\theta+\cdots)+i(r\sin\theta+r^2\sin2\theta+\cdots)$$
از طرفی خواسته سؤال $\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin(n\theta)$ است که برابر است با:
$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\theta=r\sin\theta+r^2\sin2\theta+\cdots$$
یعنی قسمت موهومی $\frac{1}{1-re^{i\theta}}$ خواسته سؤال است.
$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin\theta=Im(\frac{1}{1-re^{i\theta}})$$
$$\frac{1}{1-re^{i\theta}}=\frac{1}{1-r\cos\theta-ir\sin\theta}\times\frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}=\frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}=\frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\Rightarrow Im(\frac{1}{1-re^{i\theta}})=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

۵ـ گزینه «۳» می‌دانیم در این‌گونه سؤالات باید از جایگزین $\bar{z}=\frac{1}{z}$ و $d\bar{z}=\frac{-dz}{z^2}$ و $\cos(\bar{z})=\cos(\frac{1}{z})$ استفاده کنیم. اگر یادتان رفته نحوه رسیدن به این تساوی‌ها به شکل زیر است:
$$\begin{cases}\cos(\bar{z})=\cos(\frac{z\bar{z}}{z})=\cos(\frac{|z|^2}{z})=\cos(\frac{1}{z})\\ d\bar{z}=d(\frac{z\bar{z}}{z})=d(\frac{|z|^2}{z})=d(\frac{1}{z})=-\frac{dz}{z^2}\end{cases}$$
اکنون مقادیر را در انتگرال جایگذاری می‌کنیم:
$$\oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos(\frac{1}{z})\times\frac{-dz}{z^2}=-\oint_{|z|=1}\frac{(z+1)^5}{z^2}\cos(\frac{1}{z})\,dz$$
اکنون مانده تابع $f(z)=\frac{(z+1)^5}{z^2}\cos\frac{1}{z}$ را در $z=0$ به‌دست می‌آوریم:
$$f(z)=\frac{(z+1)^5}{z^2}\cos(\frac{1}{z})=\frac{z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1}{z^2}\cos(\frac{1}{z})=(z^3+5z^2+10z+10+\frac{5}{z}+\frac{1}{z^2})\times(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}\cdots)$$
اکنون به دنبال ضریب $\frac{1}{z}$ می‌گردیم:
$$\cdots+(\frac{1}{4!}-\frac{10}{2!}+5)\frac{1}{z}+\cdots\Rightarrow Res\,f(z))_{z=0}=\frac{1}{4!}-\cancel{5}+\cancel{5}=\frac{1}{24}\Rightarrow-\oint\frac{(z+1)^5}{z^2}\cos(\frac{1}{z})\,dz=-2\pi i\,Res\,f(z))_{z=0}=-2\pi i\times\frac{1}{24}=-\frac{\pi i}{12}$$