فصل اول

«مبانی شمارش»

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال۱: در چه تعداد از زیرمجموعه‌های مجموعه اعداد $\{1,2,3,...,20\}$ حاصل‌ضرب همه اعضای زیرمجموعه مضرب ۱۰ نیست؟ (مجموعه تهی شرط مساله را دارد.)

۱) $2^{16}+2^{10}$ ۲) $2^{18}+7\times 2^{12}$ ۳) $2^{16}+3\times 2^{8}$ ۴) $2^{10}+2^{8}$

پاسخ: گزینه «۳» زیرمجموعه‌هایی که حاصل‌ضرب همه اعضای آن‌ها مضرب ۱۰ نیستند هیچ‌یک از دو عضو $\{10,20\}$ را ندارند. همچنین زیرمجموعه‌ها نمی‌توانند از هر دو مجموعه $\{2,4,6,8,12,14,16,18\}$ و $\{5,15\}$ عضو بگیرند. با توجه به اینکه هر عضو برای حضور یا عدم حضور در زیرمجموعه‌ها ۲ حالت دارد، 2^8 حالت برای انتخاب اعضای مجموعه اول و انتخاب نکردن اعضای مجموعه دوم داریم. همچنین 2^2 حالت نیز برای انتخاب اعضای مجموعه اول و انتخاب نکردن اعضای مجموعه دوم خواهیم داشت. این حالت‌ها باهم رخ نمی‌دهند و می‌بایست مقادیر آن‌ها را باهم جمع کنیم. همچنین ۱ حالت اشتراک که هیچ عضوی از این دو مجموعه انتخاب نشود دارند. ۸ عضو دیگر مجموعه اعداد ۱ تا ۲۰ که مضرب ۲ و ۵ نیستند هریک ۲ حالت انتخاب خواهند داشت. جواب مساله برابر است با: $(2^2+2^8-1)(2^8)=2^{16}+3\times 2^8$

مثال۲: در چه تعداد از دنباله‌های ۵ عضوی از اعداد $\{1,2,3,...,12\}$ که تکرار اعضا مجاز است، عضو بیشینه این دنباله برابر ۱۰ است؟

۱) 10^5 ۲) $\sum_{i=1}^{5} 11^i$ ۳) 10^5-9^5 ۴) 12×10^4

پاسخ: گزینه «۳» تعداد کل دنباله‌های به‌طول ۵ از اعداد ۱ تا n با شرط مجاز بودن تکرار برابر n^5 است. برای محاسبه تعداد دنباله‌های ۵ عضوی که عضو بیشینه آن‌ها ۱۰ است کافی‌است تعداد دنباله‌های ۵ عضوی اعداد ۱ تا ۱۰ را محاسبه کرده و (با توجه به اینکه در این دنباله‌ها، عضو بیشینه کوچکتر مساوی ۱۰ است) این تعداد را منهای تعداد دنباله‌های ۵ عضوی از اعداد ۱ تا ۹ نمائیم. با این کار مطمئن خواهیم بود یکی از اعضای دنباله برابر ۱۰ می‌باشد. جواب مساله برابر خواهد بود با 10^5-9^5.

مثال۳: تعداد راه‌های رسیدن از خانه $(3,2)$ به خانه $(30,28)$ به شرطی که فقط دو نوع حرکت «سه گام به بالا و یک گام به راست» و «یک گام به بالا و چهار گام به راست» مجاز باشد، چه مقدار خواهد بود؟

۱) $\frac{23!}{18!5!}$ ۲) $\frac{15!}{10!5!}$ ۳) $\frac{43!}{26!27!}$ ۴) $\frac{12!}{7!5!}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید تعداد حرکات را محاسبه کنیم. برای این کار نیاز به حل معادله زیر داریم:

در رابطه زیر مقدار a بیانگر تعداد حرکات شامل «سه گام به بالا و یک گام به راست» و مقدار b بیانگر تعداد حرکات شامل «یک گام به بالا و چهار گام به راست» است. در نظر بگیرید که به ازای هر حرکت a، ۳ گام به سمت بالا و به ازای هر حرکت b، یک گام به سمت بالا حرکت خواهیم کرد. تعداد کل گام‌های به سمت بالا نیز برابر $28-2=26$ خواهد بود. مشابه همین رابطه را برای حرکت به سمت راست نیز داریم.

$$\begin{cases} 3a+b=28-2=26 \\ a+4b=30-3=27 \end{cases} \Rightarrow b=26-3a \Rightarrow 11a=77 \Rightarrow a=7, b=5$$

حال کافی است تعداد راه‌های متشکل از ۷ حرف a و ۵ حرف b را محاسبه کنیم که برابر خواهد بود با $\frac{12!}{7!5!}$.

مثال۴: ضریب جمله x^2 در عبارت $(2x^4+3)^4(3x-\frac{2}{x}+5)^4$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) ۶۶۵ ۲) ۱۲۵ ۳) -725 ۴) -225

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عبارت $(2x^4+3)^4(3x-\frac{2}{x}+5)^4$ را می‌توان به صورت $2x^4(3x-\frac{2}{x}+5)^4+3(3x-\frac{2}{x}+5)^4$ بازنویسی کرد. کافی است ضریب x^2 در هر دو عبارت را محاسبه نمائیم و ضرایب را با هم جمع کنیم. برای رسیدن به عبارت x^2 در رابطه $2x^4(3x-\frac{2}{x}+5)^4$ می‌بایست توان $3x$ برابر ۰ یا ۱ و به تبع آن توان $-\frac{2}{x}$ برابر ۲ یا ۳ و توان ۵ برابر ۲ یا ۰ باشد. در واقع تنها در دو حالت عامل x^2 در عبارت $(3x-\frac{2}{x}+5)^4$ تشکیل می‌شود. ضریب x^2 در این حالت برابر است با:

$$2((3)^0(-2)^2(5)^2+(3)^1(-2)^3(5)^0)=2(100-24)=152$$

برای رسیدن به توان x^2 در عبارت $3(3x-\frac{2}{x}+5)^4$ نیز می‌بایست توان $3x$ را برابر ۲ یا ۳ و به تبع آن توان $-\frac{2}{x}$ را برابر ۰ یا ۱ و توان ۵ را برابر ۰ یا ۲ در نظر بگیریم. ضریب x^2 در این حالت برابر است با:

$$3((3)^2(-2)^0(5^0)^2+(3)^3(-2)^1(5)^0)=3(225-54)=513$$

بنابراین ضریب x^2 در عبارت $(2x^4+3)^4(3x-\frac{2}{x}+5)^4$ برابر است با:

$$152+513=665$$

مثال۵: به چند طریق می‌توان ۱۵ نفر را به تیم A، B و C تقسیم کرد، به‌طوری‌که تیم A تعداد زوج و تیم B تعداد فرد عضو داشته باشد؟

۱) $\frac{3^{15}-3}{4}$ ۲) $\frac{3^{15}+1}{4}$ ۳) $\frac{3^{10}-1}{2}$ ۴) $\frac{3^{15}+1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا می‌خواهیم تشخیص دهیم در چه تعداد حالت، تعداد اعضای تیم B فرد است. برای این کار از بسط سه‌جمله‌ای کمک می‌گیریم. با توجه به اینکه هر فرد عضو یکی از تیم‌های A یا B یا C است، می‌توان نوشت جواب مسأله مجموع ضرایب جملاتی از $(a+b+c)^{15}$ به صورت $a^pb^qc^r$ است که $p+q+r=15$ و p زوج و q فرد باشند. توجه نمائید که زمانی این جملات را به‌صورت یک رشته در نظر می‌گیریم، هر یک از حالت‌هایی که این ۱۵ نفر در سه تیم مشخص شده قرار می‌گیرند را به شکل یک رشته ۱۵ حرفی می‌بینیم. در صورتی که آن را به‌صورت عبارت ریاضی در نظر بگیریم، تعداد حالت‌هایی که p نفر در تیم A، q نفر در تیم B و r نفر در تیم C قرار می‌گیرند در ضریب عبارت $a^pb^qc^r$ قرار می‌گیرد.

در صورتی‌که $b=-1$ و $a=c=1$ باشد، وقتی q زوج باشد مقدار $a^pb^qc^r$، برابر ۱ و وقتی q فرد باشد، برابر ۱- خواهد شد. از عبارت $(a+b+c)^{15}=(1+(-1)+1)^{15}=1$ می‌توان نتیجه گرفت تعداد حالاتی که اعضای B فرد باشند یکی کمتر از تعداد حالاتی است که اعضای B زوج باشند (جملات فرد باعث کاهش یک واحدی و جملات زوج باعث افزایش یک واحدی حاصل جمع می‌شوند). حال با دانستن مجموع کل حالات می‌توانیم تعداد حالات فرد بودن اعضای B را حساب کنیم. مجموع کل حالات از قرار دادن $a=b=c=1$ قابل محاسبه است.

$$\text{کل حالات}=(a+b+c)^{15}=(1+1+1)^{15}=3^{15}$$

می‌دانیم تعداد اعضای تیم B یا زوج است یا فرد. با دانستن مجموع و اختلاف آن‌ها، تعداد حالات زوج یا فرد بودن قابل محاسبه است.

$$\begin{cases} n_{\text{زوج}}+n_{\text{فرد}}=3^{15} \\ n_{\text{زوج}}-n_{\text{فرد}}=1 \end{cases} \Rightarrow n_{\text{فرد}}=\frac{3^{15}-1}{2}$$

حال باید تعداد حالات زوج بودن اعضای A را بررسی کنیم. با دانستن اینکه اعضای B فرد هستند، می‌دانیم مجموع اعضای A و C نیز زوج خواهد بود. از بسط دوجمله‌ای کمک می‌گیریم. کل حالات زوج بودن مجموع اعضای A و C برابر است با $\frac{3^{15}-1}{2}$. اختلاف تعداد حالاتی که اعضای A زوج باشند منهای حالاتی که اعضای A فرد باشند برابر است با:

$$(a+c)^{2k}=((-1)+1)^{2k}=0$$

این عبارت به ازای $k > \circ$ درست است و به ازای $k = \circ$ مبهم است. برای استفاده از این رابطه حالتی که همه اعضاء عضو گروه B هستند و A و C عضوی ندارند را باید جدا کنیم. یعنی کل حالات زوج بودن مجموع A و C به شرطی که حداقل یکی از آن‌ها بدون عضو نباشد، برابر است با $\frac{۳^{۱۵}-۱}{۲}-۱$.
در نتیجه تعداد حالات زوج بودن اعضای A با تعداد حالات فرد بودن اعضای A برابر است. بنابراین:

$$\begin{cases} m_{\text{زوج}} + m_{\text{فرد}} = \frac{۳^{۱۵}-۱}{۲} - ۱ = \frac{۳^{۱۵}-۳}{۲} \\ m_{\text{زوج}} - m_{\text{فرد}} = \circ \end{cases} \Rightarrow m_{\text{زوج}} = \frac{۳^{۱۵}-۳}{۴}$$

حال مقداری را که از معادله جدا کردیم، به عبارت اضافه می‌کنیم. جواب مسأله برابر خواهد بود با:

$$\frac{۳^{۱۵}-۳}{۴}+۱=\frac{۳^{۱۵}+۱}{۴}$$

مثال ۶: **با استفاده از ۹ نگین هم‌اندازه شامل دو نگین قرمز، سه نگین زرد، سه نگین آبی و یک نگین سبز چند گردنبند متمایز می‌توان ساخت؟**

۱) $\frac{۸!}{۱۴۴}$ ۲) $\frac{۸!}{۷۲}$ ۳) $\frac{۸!}{۳۶}$ ۴) $\frac{۹!}{۷۲}$

پاسخ: گزینه «۱» مسأله گردنبند مشابه مسأله میزگرد است با این تفاوت که به‌دلیل قابلیت چرخش گردنبند، جواب نهایی می‌بایست بر ۲ تقسیم شود. کافی است نگین سبزرنگ را مبدأ قرار دهیم و بقیه نگین‌ها را در اطراف آن بچینیم. $\binom{۸}{۳}$ حالت برای انتخاب جایگاه‌های نگین‌های آبی، $\binom{۵}{۳}$ حالت برای انتخاب جایگاه‌های نگین‌های زرد و $\binom{۲}{۲}$ حالت نیز برای انتخاب جایگاه‌های نگین‌های قرمز خواهیم داشت. با تقسیم نمودن حاصل‌ضرب این مقادیر بر ۲، جواب مسأله برابر است با $\frac{۸!}{۱۴۴}$.

مثال ۷: **در چه تعداد از حالات قرار گرفتن ۱۰ نفر دور یک میز گرد، فرد شماره ۱ در کنار افراد با شماره‌های ۲ تا ۵ نمی‌نشیند؟**

۱) $۲۰\times۷!$ ۲) $۵\times۸!$ ۳) $۵\times۷!$ ۴) $۱۲\times۷!$

پاسخ: گزینه «۱» کافی‌است فرد شماره ۱ را روی یک صندلی بنشانیم و وضعیت نشستن بقیه را با توجه به فاصله‌اش از او بسنجیم. از ۹ صندلی باقی‌مانده افراد با شماره‌های ۲ تا ۵ نمی‌توانند در دو جایگاه مجاور فرد شماره ۱ قرار گیرند. این افراد به ترتیب از ۷ تا ۴ جایگاه برای نشستن می‌توانند انتخاب نمایند. سایر افراد می‌توانند با !۵ حالت بر روی ۵ صندلی باقی‌مانده بنشینند. جواب مسأله برابر خواهد بود با:

$$\frac{۷!}{۳!}\times۵!=۲۰\times۷!$$

مثال ۸: **به چند طریق می‌توان ۱۰ استاد که یکی از آن‌ها مدیرگروه است و ۵ دانشجو را دور یک میز نشاند بطوری که هیچ دو دانشجویی در کنار هم ننشینند و هیچ دانشجویی مجاور مدیرگروه نباشد؟**

۱) $\frac{۹!(۱۰!-۸!)}{۵!}$ ۲) $\frac{۹!۱۰!}{۵!}$ ۳) $\frac{۹!۸!}{۳!}$ ۴) $۹!۵!$

پاسخ: گزینه «۳» کافی‌است ابتدا ۱۰ استاد را به !۹ روش دور میز بنشانیم. سپس از بین ۱۰ جایگاه بین این اساتید، بجز دو جایگاهی که در دو طرف مدیرگروه قرار دارد، ۵ جایگاه را برای دانشجویان انتخاب نموده و آن‌ها را به !۵ حالت روی صندلی‌ها بنشانیم. جواب مسأله برابر خواهد بود با:

$$۹!\times\binom{۸}{۵}\times۵!=\frac{۹!۸!}{۳!}$$

مثال۹: در چه تعداد از جایگشت‌های حروف کلمه MATHEMATICS دقیقاً دو جفت حرف تکراری متوالی وجود دارد؟ به بیان دیگر، چه تعداد از جایگشت‌ها، دقیقاً دوتا از زیررشته‌های $\{AA, TT, MM\}$ را دارند؟

۱) $۳\times ۸!$ ۲) $۲۱\times ۸!$ ۳) $۸۴\times ۷!$ ۴) $۲۸\times ۷!$

پاسخ: گزینه «۳» در این کلمه، سه حرف، دو مرتبه و پنج حرف، یک مرتبه آمده‌اند. می‌توان ۲ جفت حرف از ۳ جفت حرف با تکرار را با $\binom{۳}{۲}$ حالت انتخاب نموده و هر کدام را به عنوان یک گروه درنظر بگیریم. در این صورت، تعداد جایگشت‌های با ۵ حرف و ۲ گروه را محاسبه می‌کنیم. این جایگشت‌ها، رشته‌های حاوی ۷ شیء متمایز را تشکیل می‌دهند که تعداد آن‌ها برابر !۷ است. از بین ۸ جایگاه تشکیل شده در بین و اطراف این ۷ شیء، ۲ جایگاه را برای یک جفت حرف باقی‌مانده انتخاب می‌نمائیم تا این دو حرف باهم مجاور نباشند. این کار به $\binom{۸}{۲}$ حالت ممکن است. جواب مسأله برابر با حاصل‌ضرب موارد محاسبه شده است. یعنی:

$$\text{جواب} = \binom{۳}{۲}\times ۷!\times\binom{۸}{۲} = ۸۴\times ۷!$$

مثال۱۰: چه تعداد از رشته‌های باینری ۹ بیتی شامل زیررشته ۰۰۱۰ هستند؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۷۴ ۳) ۱۹۲ ۴) ۱۸۶

پاسخ: گزینه «۲» این رشته‌ها می‌توانند یک یا دو زیررشته ۰۰۱۰ مجزا داشته باشند و یا زیررشته ۰۰۱۰۰۱۰ در آن وجود داشته باشد. می‌بایست رشته‌هایی که حداقل ۱ زیررشته ۰۰۱۰ دارند را محاسبه نمائیم و سپس تعداد رشته‌هایی که دو زیررشته از این رشته بصورت جدا و پیوسته دارند را (به دلیل شمارش تکراری) از آن کم کنیم.

تعداد رشته‌هایی که حداقل یک زیررشته ۰۰۱۰ دارند برابرند با $\binom{۶}{۱}\times ۲^{۵}$ که انتخاب ۱ از ۶ بخاطر یافتن محل قرار گرفتن زیررشته در رشته بطول ۹ و ۲ به توان ۵ برای ۲ حالت انتخاب ۵ رقم باقی‌مانده است. رشته‌هایی که دو زیررشته ۰۰۱۰ و یک زیررشته ۰۰۱۰۰۱۰ دارند نیز به همین روش قابل محاسبه هستند و تعدادشان به ترتیب برابر $\binom{۳}{۲}\times ۲^{۱}$ و $\binom{۳}{۱}\times ۲^{۲}$ خواهد بود. جواب مسأله برابر است با:

$$\binom{۶}{۱}\times ۲^{۵} - \binom{۳}{۲}\times ۲^{۱} - \binom{۳}{۱}\times ۲^{۲} = ۶\times(۳۲-۳) = ۱۷۴$$

مثال۱۱: چه تعداد از رشته‌های ۸ کاراکتری تشکیل شده با حروف $\{x,y,z\}$ شامل زیررشته xyz هستند؟

۱) ۱۴۴۰ ۲) ۱۴۵۸ ۳) ۱۵۱۲ ۴) ۱۴۱۶

پاسخ: گزینه «۴» رشته‌های ۸ حرفی که زیررشته xyz دارند ممکن است دو الگو از این زیررشته داشته باشند و در این صورت، نباید شمارش تکراری داشته باشیم. کافی‌است رشته‌هایی که حداقل ۱ زیررشته xyz دارند را محاسبه نمائیم و این تعداد را منهای تعداد رشته‌هایی که دو زیررشته xyz دارند نمائیم. تعداد رشته‌هایی که حداقل یک زیررشته xyz دارند را می‌توان با درنظر گرفتن کاراکتر u=xyz و ساخت رشته‌های ۶ کاراکتری محاسبه نمود. ۶ جایگاه برای u=xyz داریم و ۵ جایگاه باقی‌مانده هریک با یکی از ۳ حرف مجموعه حروف پر خواهد شد. تعداد این حالات برابر است با $\binom{۶}{۱}\times ۳^{۵}$.
رشته‌هایی که دقیقاً دو زیررشته xyz دارند (بیشتر از دو زیررشته xyz با توجه به محدودیت طول ممکن نیست.) نیز با قرار دادن دو کاراکتر u و انتخاب ۲ جایگاه از ۴ جایگاه برای این حرف و پر نمودن ۲ جایگاه باقی‌مانده با حروف مجموعه ۳ حرفی قابل محاسبه است. تعداد این رشته‌ها برابر است با $\binom{۴}{۲}\times ۳^{۲}$. در نتیجه جواب مسأله برابر است با:

$$\binom{۶}{۱}\times ۳^{۵} - \binom{۴}{۲}\times ۳^{۲} = ۶\times(۲۴۳-۹) = ۱۴۱۶$$

مثال۱۲: ضریب $x^{۳}y^{۲}$ در بسط $(۳x-۲y+۶z+۲)^{۱۰}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{۱۰!}{۵!}\times ۳^{۷}\times ۲^{۵}$ ۲) $\frac{۱۰!}{۵!}\times ۳^{۳}\times ۲^{۲}$ ۳) $\frac{۱۰!}{۵!}\times ۳^{۳}\times ۲^{۷}$ ۴) $\frac{۱۰!}{۵!}\times ۳^{۲}\times ۲^{۵}$

پاسخ: گزینه «۴» ضریب $x^{۳}y^{۲}$ در بسط $(۳x-۲y+۶z+۲)^{۱۰}$ برابر است با تعداد حالات انتخاب ۳ جمله $۳x$، ۲ جمله $-۲y$، صفر جمله $۶z$ و ۵ جمله ۲ از مجموعه ۱۰ پرانتز. در نتیجه ضریب این جمله برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۳}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۰}\binom{۵}{۵}۳^{۳}\times ۲^{۲}\times ۶^{۰}\times ۲^{۵} = \frac{۱۰!}{۵!}\times ۳^{۳}\times ۲^{۵}$$

مثال ۱۳: **یک بستنی‌فروشی شش نوع بستنی و چهار نوع نوشیدنی به مقدار کافی در مغازه دارد. ۱۲ نفر وارد مغازه می‌شوند و ۵ نفر از آن‌ها بستنی و ۷ نفر نوشیدنی سفارش می‌دهند. چند حالت برای فیش سفارشات دریافتی به مسئول صندوق بستنی‌فروشی می‌رسد؟**

۱) $\binom{۲۰}{۸}-\binom{۲۰}{۲}$ ۲) $\binom{۲۰}{۸}-\binom{۱۰}{۵}$ ۳) $\binom{۲۰}{۸}$ ۴) $\binom{۱۰}{۵}\binom{۱۰}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که برای مسئولان صندوق فرقی نمی‌کند چه کسی چه نوع نوشیدنی یا بستنی را سفارش داده است. فیشی که به دست او می‌رسد نشان‌دهنده ۵ بستنی و ۷ نوشیدنی است که ۱۲ فرد مشابه سفارش داده‌اند. تعداد حالت‌های فیش سفارشات برابر با تعداد حالت‌های ترکیب با تکرار ۵ بستنی از ۶ نوع ضرب در ترکیب با تکرار ۷ نوشیدنی از ۴ نوع است.

$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۵$ برای بستنی‌ها

$y_۱+y_۲+y_۳+y_۴=۷$ برای نوشیدنی‌ها

$\Rightarrow$ جواب $=\binom{۱۰}{۵}\times\binom{۱۰}{۳}$

مثال ۱۴: **تعداد اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰۰۰۰ را محاسبه کنید که مجموع ارقام آن‌ها برابر ۸ است.**

۱) $\binom{۸}{۵}$ ۲) $\binom{۱۲}{۴}$ ۳) $\binom{۱۳}{۵}$ ۴) $\binom{۹}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه«۲» کافی است اعداد به صورت $x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵$ را پیدا کنیم که x_i ها ارقام عدد هستند و مجموعشان برابر ۸ است.

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۸ \qquad x_i\geq ۰ \quad (۱\leq i\leq ۵)\Rightarrow \qquad \text{پاسخ}=\binom{۱۲}{۴}$$

توجه کنید که در این مثال محدودیت x_i ها در حقیقت به صورت مقابل است: $۰\leq x_i\leq ۹$

اما با توجه به اینکه حاصل‌جمع x_i ها برابر ۸ می‌شود بنابراین محدودیت $x_i\leq ۹$ نادیده گرفته شده است.

مثال ۱۵: **تعداد اعداد ۲۰ رقمی متشکل از ۴ رقم ۱، ۳ رقم ۲، ۳ رقم ۳، ۲ رقم ۴، ۵ رقم ۵، ۳ رقم ۶ را محاسبه نمایید که بین هر دو رقم ۱، حداقل ۲ رقم قرار داشته باشد.**

۱) $\frac{۱۶!۱۴!}{۴!}$ ۲) $۱۶!\times\binom{۱۴}{۴}$ ۳) $\frac{۱۶!}{۵!(۳!)^۳۲!}$ ۴) $\frac{۱۶!}{۵!(۳!)^۳۲!}\times\binom{۱۴}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه«۴» ابتدا ۱۶ رقم غیر از ۱ را به $\frac{۱۶!}{۳!۳!۲!۵!۳!}$ آرایش می‌دهیم. سپس از بین ۱۷ مکان بین این ارقام، ۴ مکان را به نحوی انتخاب می‌کنیم که فاصله هر دو مکان حداقل برابر ۲ باشد. اگر $x_۴$ ، $x_۳$ ، $x_۲$ و $x_۱$ مکان‌های انتخاب شده رقم ۱ باشند، داریم:

$$x_۱\geq ۱\Rightarrow c_۱=x_۱-۱\geq ۰$$

$$x_۲\geq x_۱+۲\Rightarrow c_۲=x_۲-x_۱-۲\geq ۰$$

$$x_۳\geq x_۲+۲\Rightarrow c_۳=x_۳-x_۲-۲\geq ۰$$

$$x_۴\geq x_۳+۲\Rightarrow c_۴=x_۴-x_۳-۲\geq ۰$$

$$۱۷\geq x_۴\Rightarrow c_۵=۱۷-x_۴\geq ۰$$

$$\Rightarrow c_۱+c_۲+c_۳+c_۴+c_۵=۱۷-۱-۳\times ۲=۱۰\ ,c_i\geq ۰(۱\leq i\leq ۵)$$

تعداد حالات قابل قبول برای c_i ها برابر با تعداد حالات قابل قبول برای مکان یک‌ها است.

جواب = تعداد محل‌های مجاز برای ۱ها × تعداد آرایش‌های بقیه ارقام $=\frac{۱۶!}{(۳!)^۳۵!۲!}\times\binom{۱۴}{۴}$

مثال ۱۶: اتوبوسی در شروع حرکتش ۲۰ نفر را سوار می‌کند. در صورتی که این اتوبوس دقیقاً در ۱۲ ایستگاه توقف کند و در هیچ ایستگاهی مسافر جدیدی وارد اتوبوس نشود و با فرض اینکه این امکان وجود دارد که در یک یا چند ایستگاه مسافری از اتوبوس خارج نشود، احتمال اینکه در ایستگاه چهارم دقیقاً ۵ نفر از مسافرین پیاده شوند را محاسبه نمائید (منظور از احتمال، حاصل تقسیم تعداد حالات خواسته شده بر کل حالات است).

۱) $\dfrac{\binom{20}{11}}{\binom{31}{11}}$	۲) $\dfrac{\binom{20}{10}}{\binom{31}{10}}$	۳) $\dfrac{\binom{20}{10}}{\binom{25}{15}}$	۴) $\dfrac{\binom{25}{10}}{\binom{31}{11}}$

پاسخ: گزینه «۴» در صورتی که x_i به ازای $1 \le i \le 12$ برابر با تعداد مسافرین پیاده شده در ایستگاه iام باشد، تعداد کل حالات مسأله برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله مقابل خواهد بود:
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 20$$

تعداد این حالات برابر است با $\binom{31}{11}$. تعداد حالاتی که در ایستگاه چهارم دقیقاً ۵ مسافر پیاده شوند، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله فوق به ازای $x_4 = 5$. یعنی:
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \cdots + x_{12} = 20 - 5 = 15$$

تعداد حالت‌های این معادله برابر است با $\binom{25}{10}$.

حاصل احتمال برابر با تعداد حالات قابل قبول معادله دوم تقسیم بر تعداد حالات قابل قبول معادله اول می‌باشد. یعنی: $\dfrac{\binom{25}{10}}{\binom{31}{11}}$

مثال ۱۷: شخصی یک شانه حاوی ۳۰ عدد تخم‌مرغ در دست دارد و قصد دارد از ۱۵ پله بالا رود. پس از بالا رفتن از این پله‌ها متوجه می‌شود ۲۰ عدد از این تخم‌مرغ‌ها روی پله‌ها افتاده‌اند و شکسته شده‌اند. با فرض اینکه افتادن تخم‌مرغ‌ها تصادفی و مستقل از یکدیگر باشد، احتمال اینکه در پله دوم و پنجم تخم‌مرغی نیفتاده باشد چقدر است؟

۱) $\dfrac{\binom{15}{2}\binom{18}{12}}{\binom{20}{14}}$	۲) $\dfrac{15!\binom{32}{12}}{\binom{34}{12}}$	۳) $\dfrac{\binom{32}{20}}{\binom{34}{20}}$	۴) $\dfrac{\binom{18}{12}}{\binom{20}{14}}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه تخم مرغ‌ها مشابه و پله‌ها متمایز هستند، این مساله به روش ترکیب با تکرار حل می‌شود. کل حالات برابر است با تعداد راه‌ها قرار گرفتن ۲۰ تخم‌مرغ روی ۱۵ پله یعنی $\binom{34}{20}$ و تعداد حالاتی که تخم‌مرغی روی پله دوم و پنجم قرار نگرفته برابر است با تعداد راه‌ها قرار گرفتن ۲۰ تخم‌مرغ روی ۱۳ پله یعنی $\binom{32}{20}$. در نتیجه جواب مسأله برابر است با $\dfrac{\binom{32}{20}}{\binom{34}{20}}$.

مثال۱۸: به چند طریق می‌توان ۲۰ توپ مشابه را در ۵ سبد متمایز قرار داد به‌طوری که تعداد توپ‌های سبد اول یک عدد بیشتر از تعداد توپ‌های سبد دوم و همچنین تعداد توپ‌های سبد سوم ۳ عدد بیشتر از تعداد توپ‌های سبد چهارم باشد؟

۱) ۱۳۶ ‏ ‏ ۲) ۷۸ ‏ ‏ ۳) ۴۵ ‏ ‏ ۴) ۹۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر c_i را تعداد توپ‌های قرار گرفته در سبد i به‌ازای $i \in \{1,2,3,4,5\}$ درنظر بگیریم، تعداد جواب‌های مسأله برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر است:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 20 \Rightarrow c_1 + (c_1 + 1) + c_3 + (c_3 + 3) + c_5 = 20 \Rightarrow 2c_1 + 2c_3 + c_5 = 16$$

در این رابطه مقدار c_5 همواره زوج است. با فرض $c_5 = 2c_6$ خواهیم داشت: $2c_1 + 2c_3 + 2c_6 = 16 \Rightarrow c_1 + c_3 + c_6 = 8$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی رابطه فوق برابر $\binom{10}{2} = 45$ خواهد بود.

مثال۱۹: ۱۷ پاکت آبمیوه با طعم‌های سیب، پرتقال، هلو و آناناس را از یک فروشگاه تهیه کرده‌ایم. تعداد حالاتی که تعداد آبمیوه‌های با طعم سیب زوج باشد و اختلاف تعداد آبمیوه‌های هلو و آناناس برابر ۱ باشد چقدر است؟

۱) ۹۰ ‏ ‏ ۲) ۴۵ ‏ ‏ ۳) ۱۱۰ ‏ ‏ ۴) ۵۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تعداد آبمیوه‌های سیب زوج است و مجموع تعداد آبمیوه‌های هلو و آناناس عددی فرد است. در نتیجه با توجه به موارد ذکر شده و اینکه مجموع تعداد کل آبمیوه‌ها برابر ۱۷ است، تعداد آبمیوه‌های با طعم پرتقال زوج خواهد بود. فرض کنید مجموع تعداد آبمیوه‌های هلو و آناناس برابر $2p+1$ باشد که p یک عدد صحیح نامنفی است. در این صورت تعداد آبمیوهای هلو می‌تواند برابر p یا $p+1$ باشد. (به ازای هر مقدار قابل قبول p، دو حالت داریم.) تعداد آبمیوه‌های با طعم سیب را نیز برابر $2q$ درنظر می‌گیریم که q نیز عددی صحیح و نامنفی است. تعداد آبمیوه‌های با طعم پرتقال را با $2r$ نمایش می‌دهیم که r عددی صحیح و نامنفی است. خواهیم داشت: $2p + 1 + 2q + 2r = 17 \Rightarrow p + q + r = 8$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی رابطه فوق برابر $\binom{10}{2} = 45$ است. جواب‌های مسأله برابر با دو برابر جواب‌های رابطه فوق است. زیرا به ازای هر مقدار از جواب فوق، دو حالت برای آبمیوه‌های هلو و آناناس داریم. جواب مسأله برابر ۹۰ خواهد بود.

مثال۲۰: مقدار c پس از خروج از حلقه‌ها برابر چه مقداری خواهد بود؟

```
c = 0
for i = 1:20
   for j = i+2:20
      for k = j+3:20
         c = c+1
```

۱) $\binom{17}{4}$ ‏ ‏ ۲) $\binom{15}{3}$ ‏ ‏ ۳) $\binom{15}{2}$ ‏ ‏ ۴) $\binom{17}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» جواب برابر با تعداد سه‌تایی‌های مجاز از (i, j, k) است. خواهیم داشت:

$$1 \le i \le 20 \qquad i + 2 \le j \le 20 \qquad j + 3 \le k \le 20$$

تعریف می‌کنیم:

$$c_1 = i - 1 \ge 0 \qquad c_2 = j - i \ge 2 \qquad c_3 = k - j \ge 3 \qquad c_4 = 20 - k \ge 0$$

حال به ازای هر مقدار قابل قبول (c_1, c_2, c_3, c_4) یک مقدار قابل قبول (i, j, k) خواهیم داشت:

$$i = c_1 + 1 \qquad j = c_2 + i \qquad k = c_3 + j$$

c_4 نیز وظیفه تعیین محدوده مقادیر c_1, c_2, c_3 را خواهد داشت: $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = (\cancel{i} - 1) + (\cancel{j} - \cancel{i}) + (\cancel{k} - \cancel{j}) + (20 - \cancel{k}) = 19$

مقادیر c_2 و c_3 را باید به فرم اعداد بزرگ‌تر مساوی صفر درآوریم: $c_1 + (c_2 - 2) + (c_3 - 3) + c_4 = 19 \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 14$

تعداد سه‌تایی‌های قابل قبول (i, j, k) برابر با تعداد چهارتایی‌های قابل قبول $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$ خواهد بود که برابر است با $\binom{17}{3}$.

مثال۲۱: مقدار نهایی sum در کد زیر را محاسبه نمائید.

```
sum = 0;
for(i = 1;i <= 5;i++)
  for(j = 1;j <= i;j++)
    sum = sum + i * j;
```

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۴۰

۳) ۶۵ ۴) ۷۰

پاسخ: گزینه «۲» به ازای هر مقدار از i، مقدار k(i) به مقدار sum اضافه می‌شود:

$$k(i) = i + ۲i + ۳i + \cdots + i^۲$$

مقدار نهایی sum برابر است با مجموع مقادیر k(i) یعنی:

$$sum = \sum_{i=۱}^{n} k(i) = \sum_{i=۱}^{n} i \sum_{j=۱}^{n} j = \sum_{i=۱}^{n} i \times \frac{i(i+۱)}{۲} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{(i^۳ + i^۲)}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}((\frac{n(n+۱)}{۲})^۲ + \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}) = \frac{n(n+۱)(۳n^۲ + ۳n + ۴n + ۲)}{۲۴} = \frac{n(n+۱)(n+۲)(۳n+۱)}{۲۴}$$

به ازای $n = ۵$ جواب برابر خواهد شد با:

$$sum = \frac{۵ \times ۶ \times ۷ \times ۱۶}{۲۴} = ۱۴۰$$

مثال۲۲: حاصل‌جمع تمام اعضای زیرمجموعه‌های مجموعه اعداد $A = \{۱, ۴, ۷, \cdots, ۴۹\}$ چه مقدار خواهد بود؟

۱) $۴۹ \times ۱۷ \times ۲^{۱۵}$ ۲) $۲۵ \times ۱۷ \times ۲^{۱۶}$ ۳) ۴۹×۲^{۱۹} ۴) ۲۵×۲^{۲۰}

پاسخ: گزینه «۲» تعداد اعضای مجموعه A برابر ۱۷ است. می‌بایست تعداد حالاتی که عدد i $(i \in A)$ در یکی از زیرمجموعه‌های مجموعه A قرار می‌گیرد را محاسبه نمائیم. جواب مساله برابر با مجموع حاصل‌ضرب هر عدد در تعداد دفعات قرار گرفتن عدد در زیرمجموعه‌ها به ازای تمام اعداد مجموعه A است. عدد i را عضوی از زیرمجموعه درنظر می‌گیریم. هریک از ۱۶ عدد دیگر می‌توانند عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند. در نتیجه هر یک ۲ حالت خواهند داشت و عدد i در $۲^{۱۶}$ زیرمجموعه قرار خواهد گرفت. جواب مساله برابر است با:

$$\sum_{i \in A} i \times ۲^{۱۶} = ۲^{۱۶} \sum_{i \in A} i = \frac{۲^{۱۶}(۱+۴۹) \times ۱۷}{۲} = ۲۵ \times ۱۷ \times ۲^{۱۶}$$

آزمون فصل اول

۱ـ مجموع ضرایب در بسط $(2x-3y+5z)^{12}$ چه مقدار است؟

۱) 2^{12}　　۲) 2^{24}　　۳) 10^{12}　　۴) 9^{6}

۲ـ چند عدد ۵رقمی با مجموع ارقام ۱۵ وجود دارد؟

۱) $\binom{19}{4}$　　۲) $\binom{19}{4}-5\binom{9}{4}$　　۳) $\binom{18}{4}-5\binom{8}{4}$　　۴) $\binom{18}{4}-4\binom{8}{4}-\binom{9}{4}$

۳ـ چند زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه اعداد $\{1,2,\ldots,30\}$ وجود دارد که اختلاف هر دو عضو متوالی در آنها حداقل ۳ باشد؟

۱) $\binom{22}{5}$　　۲) $\binom{26}{5}$　　۳) $\binom{30}{5}$　　۴) $\binom{34}{5}$

۴ـ به چند طریق می‌توان ۲۰ فرد متمایز را سوار ۴ اتوبوس متمایز نمود؟

۱) 20^{4}　　۲) $\binom{19}{3}$　　۳) $\binom{23}{3}$　　۴) 4^{20}

۵ـ ضریب $x^3y^5z^2$ در بسط $(2x+2y-3z+5)^{15}$ چه مقدار است؟

۱) $2^{12}\times(-3)^{3}$　　۲) $2^{8}\times(-3)^{2}$　　۳) $2^{8}\times3^{2}\times5^{5}$　　۴) 0

۶ـ در چه تعداد از حروف کلمه Counting حروف صدادار و بی‌صدا به ترتیب الفبا قرار می‌گیرند؟

۱) $\binom{8}{3}$　　۲) $\frac{8!}{3!}$　　۳) $\frac{8!}{5!}$　　۴) 1

۷ـ به چند طریق می‌توان ۸ نفر را دور یک میز نشاند به طوری که دو شخص A و B کنار هم قرار نگیرند؟

۱) $6\times6!$　　۲) $5\times6!$　　۳) $4\times6!$　　۴) $8\times6!$

۸ـ تعداد مسیرهای با طول حداقل از خانه $(4,5)$ به خانه $(14,12)$ را بیابید.

۱) $\binom{10}{7}$　　۲) 70　　۳) $\binom{17}{10}$　　۴) $\frac{10!}{7!}$

۹ـ چند عدد چهار رقمی با مجموع ارقام ۷ می‌توان نوشت؟

۱) $\binom{9}{3}$　　۲) $\binom{10}{4}$　　۳) $\binom{7}{4}$　　۴) $\binom{10}{7}$

۱۰ـ در چه تعداد از آرایش‌های کلمه SCORPION حرف S بعد از دو حرف O ظاهر شده است؟

۱) $3\times6!$　　۲) $6!$　　۳) $\frac{8!}{2\times2!}$　　۴) $\frac{8!}{3!}$

فصل دوم

«مبانی منطق»

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال ۱: کدام عبارت نادرست است؟

۱) $p\vee(\sim q\wedge r)\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\vee r)$
۲) $p\vee\sim(q\wedge r)\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\vee\sim r)$
۳) $\sim p\vee(q\wedge r)\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee r)$
۴) $\sim p\vee\sim(q\wedge r)\equiv\sim p\vee\sim q\vee\sim r$

پاسخ: گزینه «۲» گزینه‌های (۱) و (۳) قانون توزیع‌پذیری را نشان می‌دهند و گزینه (۴) نمایش قانون دمورگان است.

مثال ۲: اگر v تابع ارزش باشد که به‌ازای هر گزاره، خروجی ۰ یا ۱ می‌دهد، ارزش گزاره A در کدام گزینه آمده است؟

$$A\equiv\sim s\to(p\wedge r)\vee(p\wedge\sim q\wedge r)$$

۱) $\max\{v(s),v(p)v(r)\}$
۲) $(1-v(s))(\max\{(v(p),v(r)\})$
۳) $v(s)(v(q)-v(p)v(r))$
۴) $v(q)(\max\{v(s),v(r)\})$

پاسخ: گزینه «۱» مقدار ارزش یک گزاره به ازای مقادیری از متغیرها که به‌ازای آن‌ها، گزاره همارز با True باشد برابر ۱ خواهد بود. ابتدا گزاره $\sim s\to(p\wedge r)\vee(p\wedge\sim q\wedge r)$ را ساده می‌کنیم. با فرض $m\equiv p\wedge r$ می‌توان عبارت $m\vee(m\wedge\sim q)$ را به‌صورت m ساده نمود. خواهیم داشت:

$$\sim s\to(p\wedge r)\vee(p\wedge\sim q\wedge r)\equiv\sim s\to(p\wedge r)\equiv s\vee(p\wedge r)$$

با توجه به اینکه ارزش عبارت $\sim a$ برابر $1-v(a)$، ارزش عبارت $a\wedge b$ برابر $v(a)v(b)$ و همچنین ارزش عبارت $a\vee b$ برابر $\max\{v(a),v(b)\}$ می‌باشد، ارزش عبارت صورت سؤال برابر $\max\{v(s),v(p)v(r)\}$ خواهد بود.

مثال ۳: با توجه به فرضیات زیر کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر منطقی نیست؟

$p\to q$
$p\wedge(\sim r\vee\sim q)$
$r\to s$

۱) $q\to s$
۲) $s\to\sim r$
۳) $q\wedge p$
۴) $\sim p\to s$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرض $p\wedge(\sim r\vee\sim q)$ ارزش p باید True باشد. از فرض $p\to q$ نیز می‌توان نتیجه گرفت ارزش q و r به‌ترتیب True و False خواهد بود. با توجه به False بودن r، از فرض $r\to s$ نمی‌توان نتیجه‌ای از ارزش s گرفت. این گزاره می‌تواند True یا False باشد. در نتیجه نمی‌توان $q\to s$ را نتیجه گرفت.

مثال ۴: کدام گزینه نتیجه منطقی فرضیات زیر است؟

$p\wedge q$
$r\leftrightarrow\sim s$
$r\to p$
$q\to s$

۱) $p\to r$
۲) $q\wedge s$
۳) $q\to r$
۴) $r\wedge s$

پاسخ: گزینه «۲» نتیجه منطقی مجموعه‌ای از فرضیات، گزاره‌ای است که درصورت درست بودن ترکیب عطفی همه فرضیات درست باشد. ارزش ترکیب عطفی گزاره‌های فوق زمانی درست است که p، q و s همارز با درست و ارزش r نادرست باشد. در این شرایط تنها ارزش گزاره گزینه ۲ درست است.

مثال ۵: عبارت $p \vee q$ نتیجه کدام گروه از فرضیات است؟

۱) $p \to r$ ، $q \to s$ ، $r \leftrightarrow s$

۲) $p \vee r$ ، $q \vee s$ ، $r \vee s$

۳) $r \to p$ ، $q \to s$ ، $r \wedge s$

۴) $r \to p$ ، $s \to q$ ، $r \to s$

پاسخ: گزینه «۳» از روش غیرمستقیم (برهان خلف) برای یافتن گزینه صحیح استفاده می‌نمائیم. فرض می‌کنیم حکم مساله یعنی $p \vee q$ نادرست است. درصورتی که با این فرض، ترکیب عطفی گزاره‌های یک گزینه «نادرست» باشد، حکم مساله نتیجه آن فرضیات خواهد بود. با فرض اینکه $p \vee q$ نادرست است، ارزش دو گزاره p و q نادرست خواهد بود. در گزاره‌های گزینه ۳ با توجه به درست بودن $r \to p$ ارزش گزاره r می‌بایست نادرست باشد. در این صورت ارزش گزاره $r \wedge s$ نادرست خواهد بود. برای بقیه گزاره‌ها با نادرست بودن ارزش گزاره‌های r و s، ارزش ترکیب عطفی آن‌ها درست خواهد شد.

مثال ۶: کدام استنتاج معتبر نیست؟

۱) $\exists x(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$

۲) $\exists x(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$

۳) $\exists! x \forall y p(x,y) \Rightarrow \forall y \exists! x p(x,y)$

۴) $\exists x(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x(p(x) \Rightarrow q(x))$

پاسخ: گزینه «۳» گزاره‌نمای $p(x,y): x \le y$ روی اعداد طبیعی، مثال نقضی برای نامعتبر نشان دادن عبارت گزینه (۳) است.

مثال ۷: کدام نتیجه‌گیری معتبر است؟

۱) $\forall x \exists y\, p(x,y) \Rightarrow p(x_0, y_0)$

۲) $\exists x \forall y\, p(x,y) \Rightarrow p(x_0, y_0)$

۳) $p(x_0, y_0) \Rightarrow \exists x \exists y\, p(x,y)$

۴) $p(x_0, y_0) \Rightarrow \forall x \exists y\, p(x,y)$

پاسخ: گزینه «۳» اگر x_0 مقداری از حوزه سخن متغیر اول و y_0 مقداری از حوزه سخن متغیر دوم p باشند. با درست بودن $p(x_0, y_0)$ می‌توان نتیجه گرفت مقداری برای x و y یافت می‌شود که $p(x,y)$ درست باشد. سایر گزینه‌ها قابل قبول نیستند.

آزمون فصل دوم

۱ـ کدام عبارت یک گزاره همواره درست نیست؟

۱) $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	۲) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	۳) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	۴) $p \Rightarrow (q \Rightarrow q)$

۲ـ کدام عبارت معادل عبارت «عدد فردی وجود دارد که از تمام اعداد زوج کوچکتر است» می‌باشد؟

۱) $\forall x\, Odd(x)(\exists y Even(y) \wedge (x < y))$

۲) $\exists x \exists y\, Odd(x) \wedge Even(y) \wedge (x < y)$

۳) $\forall y\, Even(y)(\exists x\, Odd(x) \wedge (x < y))$

۴) $\exists x\, Odd(x)(\forall y Even(y) \Rightarrow (x < y))$

۳ـ ارزش کدام گزاره با گزاره $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge r)$ برابر است؟

۱) $p \wedge q \wedge r \wedge s$	۲) $p \wedge r$	۳) True	۴) $q \vee s$

۴ـ نتیجه استلزام مقابل چیست؟

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ r \vee s \to \sim q \\ \underline{\sim s \to p \wedge t} \\ \therefore\ ? \end{array}$$

۱) $q \to r$

۲) $\sim r \wedge t$

۳) $s \wedge t$

۴) $r \vee s$

۵ـ اگر V تابع ارزش باشد، مقدار ارزش $V((p \wedge (p \vee q)) \vee r)$ با کدام یک از مقادیر زیر برابر است؟

۱) $1-(1-V(p))(1-V(r))$	۲) $(V(p)-1)(V(r)-1)$	۳) $V(p)+V(r)-1$	۴) $1-V(p)V(r)$

۶ـ کدام مجموعه کامل تابعی نیست؟

۱) $\{\sim, \to\}$	۲) $\{\downarrow\}$	۳) $\{\sim, \leftrightarrow\}$	۴) $\{\sim, \downarrow\}$

۷ـ کدام استنتاج معتبر است؟

۱) $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{p \to q} \\ q \to p \end{array}$$

۲) $$\begin{array}{l} p \vee q \\ r \wedge s \\ \underline{p \to \sim r} \\ q \to p \end{array}$$

۳) $$\begin{array}{l} p \to \sim q \\ q \to \sim r \\ \underline{r \wedge s} \\ p \wedge q \end{array}$$

۴) $$\begin{array}{l} p \to r \\ q \to r \\ \underline{r \wedge s} \\ p \wedge q \end{array}$$

۸ـ کدام عبارت با عبارت $(p \leftrightarrow q) \to p$ معادل است؟

۱) $\sum m(1,2,3)$	۲) $\sum m(0,1,2)$	۳) $\sum m(1,3)$	۴) $\sum m(0,2)$

۹ـ نقیض عبارت $\forall x \exists y ((|x-y| < 2) \vee (|x-y| > 4))$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\forall y \exists x ((|x-y| \geq 2) \wedge (|x-y| \leq 4))$

۲) $\exists x \forall y ((|x-y| \geq 2) \wedge (|x-y| \leq 4))$

۳) $\exists x \forall y ((|x-y| \geq 2) \vee (|x-y| \leq 4))$

۴) $\forall x \exists y ((|x-y| \geq 2) \vee (|x-y| \leq 4))$

۱۰ـ کدام نتیجه گیری معتبر نیست؟

۱) $p(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y p(x,y)$	۲) $p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$

۳) $\exists! x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$	۴) $\forall y \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y\, p(x,y)$

فصل سوم

«رابطه‌های بازگشتی»

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال ۱: تعداد رشته‌های به طول n روی الفبای {a, b, c} که شامل زیررشته aa نمی‌باشند، از کدام یک از روابط بازگشتی زیر قابل محاسبه است؟

۱) $S_n = 2S_{n-1} + 2S_{n-2}$ ۲) $S_n = 2S_{n-1} - S_{n-2}$ ۳) $S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$ ۴) $S_n = S_{n-1} + 3S_{n-2}$

پاسخ: گزینه «۱» رشته‌های به طول n است که در شرایط مسأله صدق می‌کند و شامل هیچ زیررشته aa نیست به یکی از چهار صورت زیر خواهد بود:

۱ـ رشته‌های صحیح به طول $n-1$ که به b ختم می‌شوند (S_{n-1}) ۲ـ رشته‌های صحیح به طول $n-1$ که به c ختم می‌شوند. (S_{n-1})

۳ـ رشته‌های صحیح به طول $n-2$ که به ba ختم می‌شوند. (S_{n-2}) ۴ـ رشته‌های صحیح به طول $n-2$ که به ca ختم می‌شوند. (S_{n-2})

تمام رشته‌های قابل قبول دقیقاً به یکی از چهار روش فوق تشکیل می‌شوند. رابطه بازگشتی رشته‌های مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$S_n = 2S_{n-1} + 2S_{n-2} \qquad S_0 = 1 \qquad S_1 = 3$$

مثال ۲: رابطه بازگشتی تعداد رشته‌های به طول n از حروف a و b را که زیررشته aaaa و bbbb ندارند، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $c_n = c_{n-2} + c_{n-3} + c_{n-4}$ ۲) $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-3}$

۳) $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-3} + c_{n-4}$ ۴) $c_n = 2c_{n-1} + 2c_{n-2}$

پاسخ: گزینه «۱» اگر c_n تعداد رشته‌های صورت سؤال با طول n باشد، d_n را تعداد رشته‌هایی از c_n در نظر می‌گیریم که به a ختم می‌شوند. با توجه به اینکه تعداد رشته‌هایی که به a ختم می‌شوند با تعداد رشته‌هایی که به b ختم می‌شوند برابرند، داریم: $c_n = 2d_n$. رابطه بازگشتی برای d_n از جمع موارد زیر حاصل می‌شود:

۱ـ رشته‌های d_{n-2} که در انتهای آن ba قرار دهیم. ۲ـ رشته‌های d_{n-3} که در انتهای آن bba قرار دهیم.

۳ـ رشته‌های d_{n-4} که در انتهای آن bbba قرار دهیم.

خواهیم داشت:

$$d_n = d_{n-2} + d_{n-3} + d_{n-4}$$

$$d_1 = 1 \qquad d_2 = 2 \qquad d_3 = 4 \qquad d_4 = 7$$

در نتیجه:

$$c_n = c_{n-2} + c_{n-3} + c_{n-4}$$

$$c_1 = 2 \qquad c_2 = 4 \qquad c_3 = 8 \qquad c_4 = 14$$

به عنوان مثال به ازای $n = 6$ رشته‌های {bbba , abba} از جمله رشته‌های ۴ حرفی هستند که زیرمجموعه d_4 خواهند بود و با اضافه شدن رشته ba به انتهای آن‌ها به رشته‌های {bbbabaa , abbaba} تبدیل می‌شوند. مجموعه {aba , aaa} نیز جزء مجموعه d_3 هستند که با قرار دادن زیررشته bba در انتهای آنها به رشته‌های {ababba , aaabba} که عضو d_6 هستند تبدیل می‌شوند. در صورتی که تمام این مجموعه‌ها را به ازای حالت‌های متفاوت و قابل قبول d_{n-2}، d_{n-3} و d_{n-4} در نظر بگیریم، هیچ دو مجموعه‌ای با هم اشتراک ندارند و اجتماعشان برابر مجموعه d_n خواهد شد.

مثال ۳: چه تعداد رشته ۶ حرفی با حروف {a,b,c} می‌توان نوشت که زیررشته‌های abc، bca و cab نداشته باشند؟

۱) ۳۸۴ ۲) ۷۶۸ ۳) ۴۹۲ ۴) ۲۵۵

پاسخ: گزینه «۳» هر رشته ۶ حرفی با یکی از سه حرف a، b یا c شروع می‌شود. حرف $k+1$ام، یا تکرار حرف قبلی است (این حالت را با r نشان می‌دهیم) یا حرف بعد از حرف k ام است (این حالت را با n نشان می‌دهیم) یا حرف قبل از حرف k ام است (این حالت را با p نشان می‌دهیم). منظور از حرف قبلی و حرف بعدی، ترتیب حروف در الفبا است. در واقع حرف بعدی حروف a، b و c را به ترتیب b، c و a درنظر می‌گیریم. در این صورت می‌توان

هر رشته ۶ حرفی را با یکی از سه حرف {a.b.c} و رشته‌ای ۵ حرفی شامل حروف r، n و p در ادامه آن نمایش داد. به عنوان مثال رشته aabccb به شکل arnnrp نشان داد. با توجه به اینکه نباید زیررشته‌های abc، bca و cab داشته باشیم، در این رشته ۵ حرفی نیز نباید زیررشته nn داشته باشیم. زیرا دو مرحله تغییر به حرف بعدی، متناظر با یکی از سه زیررشته غیرقابل‌قبول است. رشته m حرفی قابل قبول می‌تواند از قرار گرفتن زیررشته r یا p در انتهای رشته به طول $m-1$ و قرار گرفتن زیررشته rn یا pn در انتهای رشته به طول $m-2$ تشکیل شود. رابطه بازگشتی رشته‌های m بیتی مجاز به شکل زیر خواهد بود:

$$a_m = 2(a_{m-1}+a_{m-2})\ ;\ a_1 = 3\ ,\ a_2 = 9\ \Rightarrow a_3 = 24, a_4 = 66, a_5 = 180, a_6 = 492$$

مثال ۴: فرم صریح رابطه بازگشتی $a_n = \sum_{i=1}^{n}(\frac{3}{2})^i a_{n-i} + (\frac{3}{2})^n n$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{2})^n$
۲) $a_n = 2^n((\frac{3}{2})^n - 1)$
۳) $a_n = 2\times(\frac{3}{2})^n$
۴) $a_n = 2\times 3^n - (\frac{3}{2})^n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عبارت a_n را در $(\frac{3}{2})^{-n}$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$a_n(\frac{3}{2})^{-n} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{3}{2})^i\ a_{n-i}(\frac{3}{2})^{-n} + (\frac{3}{2})^n n(\frac{3}{2})^{-n} \Rightarrow a_n(\frac{3}{2})^{-n} = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}(\frac{3}{2})^{n-i} + n$$

تعریف می‌کنیم $b_n = a_n(\frac{3}{2})^{-n}$ و خواهیم داشت:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} b_{n-i} + n$$

$$b_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i-1} + n - 1 \Rightarrow b_n - b_{n-1} = b_{n-1} + 1 \Rightarrow\ b_n = 2b_{n-1} + 1$$

جواب عمومی رابطه بازگشتی b_n به فرم $b_n^{(h)} = c_1 2^n$ و جواب خصوصی آن به فرم $b_n^{(p)} = c_2(1)^n$ خواهد بود. مقدار جواب خصوصی و سپس مقدار c_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$b_n^{(p)} = 2b_{n-1}^{(p)} + 1\ \Rightarrow c_2 = 2c_2 + 1\ \Rightarrow c_2 = -1$$

$$b_n = b_n^{(h)} + b_n^{p} = c_1 2^n + c_2 = c_1 2^n - 1$$

$$b_0 = c_1 - 1 = a_0(\frac{3}{2})^0 = 1 \Rightarrow c_2 = 2\ \Rightarrow b_n = 2^{n+1} - 1$$

حال مقدار a_n را از b_n محاسبه می‌نماییم:

$$a_n = b_n(\frac{3}{2})^n = (\frac{3}{2})^n(2^{n+1} - 1) = 2\times 3^n - (\frac{3}{2})^n$$

آزمون فصل سوم

۱ـ تعداد رشته‌های باینری به طول ۶ که زیررشته ۰۰۰ ندارند، چقدر است؟

۱) ۵۸ ۲) ۴۴ ۳) ۳۶ ۴) ۲۴

۲ـ در مسأله فیبوناچی با فرض اینکه خرگوش‌ها به جای ۱ ماه پس از دو ماه بالغ شوند، رابطه بازگشتی تعداد خرگوش‌های ماه nام را بیابید:

۱) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ ۲) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

۳) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ۴) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

۳ـ تعداد مسیرهای بالای قطر اصلی در صفحه شطرنجی از نقطه $(0,0)$ به نقطه $(4,4)$ چه مقدار است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۴

۴ـ فرم صریح رابطه بازگشتی $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ به چه شکل است؟

۱) $a_n = c_1(-1)^n + c_2(4)^n$ ۲) $a_n = c_1(4)^n + c_2$ ۳) $a_n = c_1(-4)^n + c_2$ ۴) $a_n = c_1(-4)^n + c_2(-1)^n$

۵ـ رابطه بازگشتی مربوط به تعداد راه‌های رسیدن از خانه $(0,0)$ به خانه (m,n) از صفحه مختصات با طول حداقل را بیابید.

۱) $A_{m,n} = A_{m-1,n-1} + A_{m-2,n-2}$ ۲) $A_{m,n} = A_{m-1,n} + A_{m,n-1} + A_{m-1,n-1}$

۳) $A_{m,n} = A_{m-1,n} + A_{m,n-1}$ ۴) $A_{m,n} = 2A_{m-1,n-1}$

۶ـ مقدار a_{20} از رابطه بازگشتی $a_n = \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2}$ به ازای $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) 2^{n-1} ۲) 2^{2^n-1} ۳) $2^n - 1$ ۴) $2^{2^n} - 1$

۷ـ یک ستون 1×10 را به چند طریق می‌توان با بلوک‌های $1\times1, 2\times1\times3$ ایجاد نمود؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

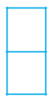
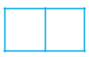
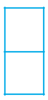
۸ـ فرم صریح رابطه بازگشتی $a_n = 2na_{n-1} - n(n-1)a_{n-2}$ با فرض $a_0 = 2$ و $a_1 = 4$ در کدام گزینه آمده است؟

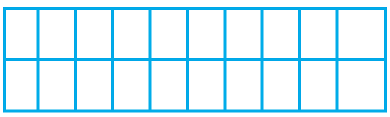
۱) 2^{n+1} ۲) $4n!$ ۳) $2(n+1)!$ ۴) $2^{n+1}n!$

۹ـ رابطه بازگشتی معادل با رابطه صریح $a_n = 5(2)^n + n^2 + 3n$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $a_n = 5a_{n-1} + a_{n-3}$ ۲) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$

۳) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ ۴) $a_n = 5a_{n-1} - 9a_{n-2} + 7a_{n-3} - 2a_{n-4}$

۱۰ـ تعداد راه‌های پر کردن صفحه زیر با مهره‌های( و ) را بیابید به شرطی که سه مهره () کنار هم قرار نگیرند.

2×10: 

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

فصل چهارم

«نظریه مجموعه‌ها»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال۱: مجموعه $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ را درنظر بگیرید. در چه تعداد از زیرمجموعه‌های زوج‌عضوی از این مجموعه، عضو کمینه برابر ۴ است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۳ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۷

☑ **پاسخ:** اعداد $\{1,2,3\}$ نباید و عدد ۴ باید در این زیرمجموعه قرار داشته باشند. هر یک از اعداد $\{5,6,7,8,9\}$ می‌توانند در زیرمجموعه قرار گیرند و برای هریک از این اعداد ۲ حالت خواهیم داشت. قرار گرفتن عدد ۱۰ در هر زیرمجموعه به تعداد اعدادی که در آن مجموعه قرار دارند بستگی دارد. اگر تعداد اعدادی که در زیرمجموعه قرار گرفته‌اند عددی زوج باشد، عدد ۱۰ در زیرمجموعه قرار نمی‌گیرد و در غیر این صورت این عدد در زیرمجموعه قرار نخواهد گرفت. در نتیجه عدد ۱۰ فقط یک حالت خواهد داشت. جواب مسأله برابر است با: $2^5=32$.

مثال۲: با فرض $I=\{1,2,3,\dots,10\}$، چند رابطه پادتقارنی از مجموعه I به I وجود دارد بطوری که عدد ۳ با تمام اعداد زوج و عدد ۶ با تمام اعداد فرد رابطه داشته باشد؟

۱) $2^{8}\times 3^{28}$ ۲) ۰ ۳) $2^{10}\times 3^{43}$ ۴) 3^{36}

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر عدد ۳ با تمام اعداد زوج رابطه داشته باشد، عضو $(3,6)$ در رابطه قرار دارد. عدد ۶ نیز با تمام اعداد فرد رابطه دارد و عضو $(6,3)$ در رابطه وجود خواهد داشت. با توجه به اینکه دو عضو قرینه در رابطه قرار دارند، این رابطه نمی‌تواند پادمتقارن باشد.

مثال۳: روی یک مجموعه n عضوی حداکثر چند رابطه وجود دارد که متقارن نیستند و با حذف دقیقاً یک عنصر از آن، به متقارن تبدیل می‌شوند؟

۱) $n(n-1)3^{n}2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ۲) $n(n-1)2^{n-1}3^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}$

۳) $n(n-1)2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ۴) $n(n-1)2^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» یک رابطه غیر است اگر و تنها اگر عضوی مانند (i,j) در آن وجود داشته باشد و عضو قرینه آن یعنی (j,i) در آن وجود نداشته باشد. کافی است در ماتریس معادل با رابطه، ابتدا مقدار یکی از عناصر که بر قطر اصلی واقع نیست را برابر ۱ و عنصر قرینه آن را برابر ۰ قرار دهیم. انتخاب این عضو به $n(n-1)$ حالت ممکن است. برای سایر جفت عناصر قرینه و همچنین هریک از عناصر واقع بر قطر اصلی ۲ حالت خواهیم داشت. جواب مسأله برابر خواهد بود با:

$$n(n-1)\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}-1}=n(n-1)2^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$$

مثال۴: چه تعداد رابطه هم‌ارزی می‌توان روی یک مجموعه ۸ عضوی تعریف نمود که هر عضو حداقل با ۳ عضو غیر از خود رابطه داشته باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۱ ۳) ۳۵ ۴) ۷۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در یک رابطه هم‌ارزی، سه شرط بازتابی، تقارنی و ترایایی وجود دارد و اگر عضوی مانند (i,j) در رابطه وجود داشته باشد، عضو i با تمام اعضایی که j با آن‌ها رابطه دارد و اعضایی که با j رابطه دارند، رابطه خواهد داشت. اگر هر عضو با حداقل ۳ عضو دیگر رابطه داشته باشد، یا دقیقاً با ۳ عضو دیگر رابطه دارد، یا با همه عناصر رابطه دارد. زیرا اگر یک کلاس از رابطه هم‌ارزی بیشتر از ۴ عضو داشته باشد، با توجه به اینکه مجموعه اولیه ۸ عضوی است، کلاس دیگر نمی‌تواند ۴ عضو داشته باشد و اعضای آن کلاس با کمتر از ۳ عضو غیر از خود رابطه دارند. تعداد راه‌های افراز نمودن این مجموعه به دو کلاس ۴ عضوی برابر است با $\dfrac{\binom{8}{4}}{2}$.

توجه داشته باشید که کلاس‌های هم‌ارزی مشابه هستند و حالتی که ۴ عضو خاص انتخاب می‌شود با حالتی که آن ۴ عضو خاص انتخاب نمی‌شوند، نتیجه مشابهی دارند. تعداد راه‌های افراز نمودن ابن مجموعه به ۱ کلاس نیز برابر ۱ است. جواب مسأله برابر است با:

$$\frac{\binom{8}{4}}{2}+1=36$$

مثال ۵: صحت دو گزاره زیر را تعیین نمائید:

الف: رابطه بخش‌پذیری روی اعداد صحیح یک رابطه ترتیب جزئی است.

ب: هر رابطه روی مجموعه $\{a,b\}$ که عضو (a,b) در مجموعه قرار نداشته باشد، یک رابطه ترتیب جزئی است.

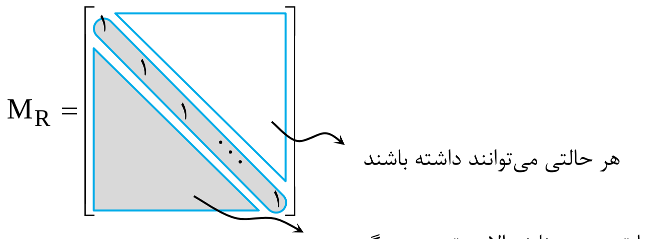
۱) الف: درست. ب: درست
۲) الف: درست. ب: نادرست
۳) الف: نادرست. ب: درست
۴) الف: نادرست. ب: نادرست

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عبارت «الف» نادرست است؛ زیرا رابطه بخش‌پذیری روی اعداد صحیح برقرار نیست. زیرا برای $(a,-a)$ و $(-a,a)$ که اعضای قرینه هستند به ازای تمام مقادیر a در رابطه حضور دارند. در نتیجه این رابطه خاصیت پادتقارنی را ندارد. عبارت «ب» نیز نادرست است؛ زیرا این رابطه لزوماً خاصیت بازتابی را ندارد.

مثال ۶: تعداد روابطی بر روی مجموعه A که هم متقارن و هم بازتابی می‌باشند، کدام است؟ (با فرض این که $|A|=n$)

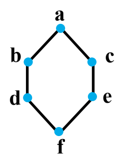
۱) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
۲) 2^{n^2-n}
۳) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
۴) $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر R یک رابطه متقارن و بازتابی بر روی مجموعه A باشد، آنگاه در ماتریس M_R باید تمام عناصر قطر اصلی برابر ۱ باشند و با توجه به متقارن بودن، کافیست یکی از مثلث‌های بالا یا پایین قطر اصلی را تعیین نمود و دیگری را با توجه به آن بدست آورد:

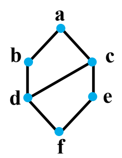


بنابراین تعداد کل روابط ممکن، برابر $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ خواهد بود.

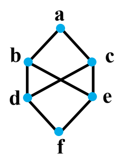
مثال ۷: در بین نمودارهای زیر، چند شبکه وجود دارد؟



(الف)



(ب)

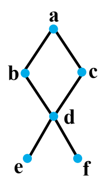


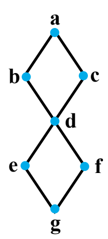
(ج)

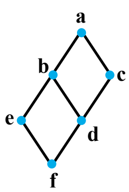
۱) ۱
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در نمودار شکل (ج) اگر مجموعه e و d را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که این مجموعه دارای کران‌های بالای c و b می‌باشد؛ اما LUB وجود ندارد.

مثال ۸: کدام‌یک از نمودارهای هاسه داده شده یک شبکه می‌باشد؟

الف)


ب)


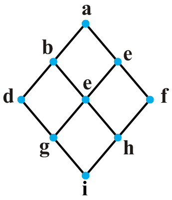
ج)


۱) ب
۲) الف و ج
۳) ب و ج
۴) ج

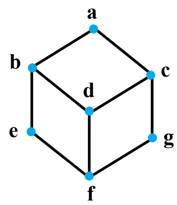
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر نمودار HD داده شده در شکل (الف) را در نظر بگیریم، آنگاه مجموعه $\{e,f\}$ دارای GLB نمی‌باشد.

مثال۹: از بین نمودارهای هاسه (Hasse Diagram) زیر کدام‌یک شبکه نمی‌باشند؟

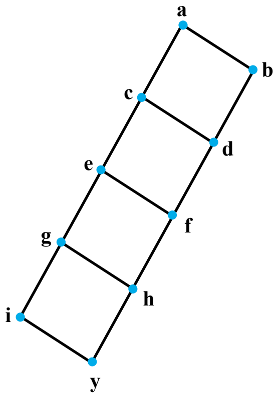
الف)



ب)



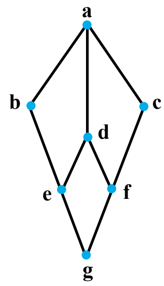
ج)



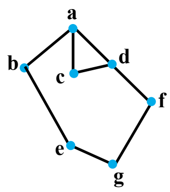
۱) الف و ج
۲) الف و ب
۳) ب
۴) تمام HD های داده شده شبکه می‌باشند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» هر سه شکل شبکه هستند.

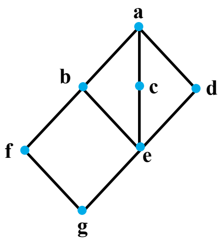
مثال۱۰: از بین نمودارهای هاسه داده شده در زیر چند شبکه وجود دارد؟



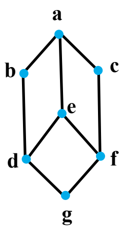
(الف)



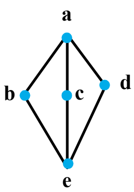
(ب)



(ج)



(د)



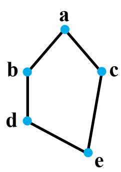
(هـ)

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

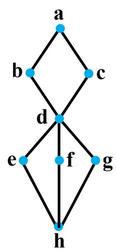
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تمام نمودارهای هاسه (Hasse Diagram) داده شده، شبکه می‌باشند.

مثال۱۱: کدام‌یک از نمودارهای هاسه زیر یک شبکه است؟

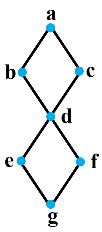
الف)



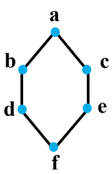
ب)



ج)



د)



۱) الف، ج و د
۲) الف، ج و د
۳) الف، ب، ج و د
۴) ج و د

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هر چهار شکل، شبکه هستند.

مثال۱۲: چه تعداد توابع ترکیبی پوشا از مجموعه $\{p,q,r\}$ به مجموعه $\{x,y,z\}$ به شکل gof (یا g(f)) می‌توان تعریف نمود به شرطی که g تابعی از مجموعه $\{a,b,c,d\}$ به مجموعه $\{x,y,z\}$ و f تابعی از مجموعه $\{p,q,r\}$ به مجموعه $\{a,b,c,d\}$باشد؟ (توابع همه‌جا تعریف هستند.)

۱) ۱۰۸ ۲) ۲۱۶ ۳) ۳۲۴ ۴) ۴۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{3}{i}(3-i)^4 = 3^4 - 3\times 2^4 + 3\times 1^4 = 36$$

مقدار فوق را می‌توان به روشی دیگر نیز محاسبه نمود که استفاده از این روش، در ادامه حل مسأله کمک خواهد کرد. با توجه به اینکه اندازه دامنه برابر ۴ و اندازه برد برابر ۳ است، عنصری از مجموعه برد وجود دارد که خروجی ۲ عضو از دامنه باشد. برای یک عضو از مجموعه برد ۳ حالت و برای ۲ عضو از مجموعه دامنه، ۶ حالت خواهیم داشت. برای عضو دوم و سوم مجموعه برد، به ترتیب ۲ و ۱ انتخاب داریم. حاصل‌ضرب این مقادیر برابر ۳۶ خواهد بود. در نتیجه تعداد توابع g قابل تعریف برابر ۳۶ است.

توابع f از مجموعه $\{p,q,r\}$ به دقیقاً ۳ عضو از اعضای مجموعه $\{a,b,c,d\}$ اشاره می‌کنند. به شرطی که عضوی که از این مجموعه حذف می‌شود، یکی از دو عضوی باشد که با یک عضو از مجموعه $\{x,y,z\}$ ارتباط داشته است. به عنوان مثال اگر خروجی دو عنصر a و b، عنصر x باشد، باید یکی از دو عنصر a یا b را حذف نمائیم. تابع fog پوشا خواهد شد. ۲ حالت برای حذف آن عنصر خاص خواهیم داشت و حاصل را می‌بایست در تعداد توابع پوشای مجموعه ۳ عضوی به ۳ عضوی ضرب نمائیم. با توجه به اینکه تعداد توابع پوشای مجموعه ۳ عضوی به ۳ عضوی برابر $3!=6$ است، تعداد توابع قابل قبول f برابر با $2\times 6=12$ خواهد بود. پاسخ مسأله برابر است با حاصل‌ضرب تعداد توابع قابل قبول برای f و g یعنی $36\times 12=432$ خواهد بود.

آزمون فصل چهارم

۱ـ چند رابطه روی مجموعه $\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان نوشت که پادمتقارنی باشد ولی انعکاسی نباشد؟

۱) $۳^{۶}$ ۲) ۵×۳^{۷} ۳) ۴×۳^{۶} ۴) $۲^{۱۶}-۱$

۲ـ رابطه‌ای روی مجموعه $\{a,b,c,d,e\}$ نوشته‌ایم که انعکاسی است و دارای ۱۷ عضو می‌باشد. در مورد تقارنی و پادتقارنی بودن آن کدام درست است؟

۱) تقارنی است و پادتقارنی نیست.
۲) تقارنی و پادتقارنی می‌باشد.
۳) پادتقارنی نیست ولی شاید تقارنی باشد.
۴) شاید تقارنی یا پادتقارنی باشد.

۳ـ رابطه R روی مجموعه X به صورت مقابل تعریف شده است: $\forall a,b\in X: aRb \Leftrightarrow a\cap b=b\cap c$

در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) R یک رابطه هم‌ارزی است.
۲) R خاصیت تقارنی و تعدی دارد.
۳) R خاصیت بازتابی و تقارنی دارد.
۴) R خاصیت بازتابی و تعدی دارد.

۴ـ تعداد توابع پوشا از مجموعه A به مجموعه‌ی B که به ترتیب دارای m و n عضو می‌باشند، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m$
۲) $\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m$
۳) $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{m-i}(m-i)^n$
۴) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{m}{m-i}(m-i)^n$

۵ـ اگر $A=\varnothing$، $B=\{\varnothing\}$ $C=\{\ \}$ و $D=\{\{\varnothing\},۲,۰\}$ و داشته باشیم $E=A\cup B\cup C\cup D$، آنگاه مجموعه توانی E چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۶ـ در حالت کلی کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (A و B مجموعه‌های دلخواه می‌باشند):

الف) $A\times B=B\times A$ ب) $B\Delta A=A\Delta B$ ج) $A-B=B-A$ د) $A-B=A-(A\cap B)$

۱) الف و ب و د ۲) الف و ب و ج ۳) ب و ج ۴) ب و د

۷ـ اگر مجموعه $A=\{۱,۲,۴\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه رابطه عاد کردن روی این مجموعه چند تا از خاصیت‌های زیر را دارا می‌باشد؟

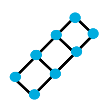
الف) تقارنی ب) تعدی ج) بازتابی د) هم‌ارزی

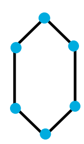
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۰

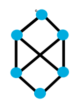
۸ـ فرض کنید M ماتریس متناظر با رابطه‌ای روی مجموعه‌ی پنج عضوی A باشد، به طوری که دو عضو از عناصر بالای قطر اصلی و ۲ عنصر ابتدایی قطر اصلی برابر یک می‌باشند. به چند روش می‌توان این ماتریس را کامل کرد، به طوری که رابطه‌ی متناظر تقارنی و بازتابی باشد؟

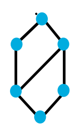
۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۲^{۸}$ ۳) $۲^{۲۰}$ ۴) $۲^{۲۵}$

۹ـ کدام‌یک از نمودارهای هاسه‌ی زیر یک شبکه نمی‌باشد؟


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

۱۰ـ از بین گزینه‌های زیر کدام‌یک نادرست می‌باشد؟

۱) اگر R یک رابطه‌ی مرتب جزئی روی مجموعه‌ی S باشد، آنگاه R^{-1} نیز روی S مرتب جزئی خواهد بود.
۲) اگر $(A,\le)$ و $(B,\le)$ دو مجموعه‌ی مرتب جزئی باشند، آنگاه $(A\times B,\le)$ نیز این‌گونه است.
۳) اگر S یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، آنگاه ممکن است عضو مینیمم یا ماکزیمم نداشته باشد.
۴) هیچ‌کدام

فصل پنجم

«دستگاه‌های جبری»

آزمون فصل پنجم

۱ـ اگر $f:G\to H$ یک هومورفیسم باشد و G یک گروه آبلی باشد، آنگاه کدام درست است؟

۱) در صورتی که f پوشا باشد، H نیز آبلی است.
۲) H حتماً آبلی خواهد بود.
۳) H نمی‌تواند آبلی باشد.
۴) اگر f پوشا نباشد، H آبلی است.

۲ـ عمل $+_۴$ روی مجموعه‌ی $Z_۴$ طبق جدول زیر تعریف شده است. کدام گزینه نادرست است؟(توجه: $Z_4=\{[۰],[1],[2],[3]\}$)

$+_۴$	[۰]	[۱]	[۲]	[۳]
[۰]	[۰]	[۱]	[۲]	[۳]
[۱]	[۱]	[۲]	[۳]	[۰]
[۲]	[۲]	[۳]	[۰]	[۱]
[۳]	[۳]	[۰]	[۱]	[۲]

۱) [۰] عضو خنثی برای $+_۴$ می‌باشد.
۲) $<Z_۴,+_۴>$ دارای خاصیت جابه‌جایی‌پذیری نیست.
۳) $<Z_۴,+_۴>$ یک ساختمان جبری است.
۴) برخی از عناصر $Z_۴$ وارون ندارند.

۳ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) هر گروه آبلی مونوئید است.
۲) هر مونوئید یک گروه است.
۳) هر گروه یک نیم‌گروه است.
۴) هر مونوئید یک نیم‌گروه است.

۴ـ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر G یک گروه از مرتبه‌ی زوج باشد، آنگاه یک عنصر غیرهمانی در G وجود دارد که وارون آن با خودش برابر است.
۲) اگر G یک گروه باشد که برای هر عضو آن مانند g داشته باشیم $g^z=e$، آنگاه G آبلی است.
۳) اگر $f:G\to H$ یک هومورفیسم پوشا و G یک گروه دوری باشد، آنگاه H نیز دوری است.
۴) همه‌ی موارد

۵ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\mathbb{Z}$ با عمل جمع و ضرب معمولی یک حلقه‌ی یک‌دار و جابه‌جایی است.
۲) $۲\mathbb{Z}$ با عمل جمع و ضرب معمولی یک حلقه‌ی یک‌دار و جابه‌جایی است.
۳) $\mathbb{R}$ با عمل جمع و ضرب معمولی یک حلقه‌ی یک‌دار و جابه‌جایی است.
۴) هیچ‌کدام

۶ـ فرض کنیم G یک گروه با عمل ضرب باشد و H یک زیرمجموعه‌ی G باشد. اگر a و b دو عضو دلخواه H باشند، کدام‌یک از شرایط زیر نشان می‌دهد که H زیرگروه G می‌باشد؟

۱) $a^{-۱}\in H$ یا $b^{-۱}\in H$
۲) $a^{-۱}\in H$ و $b^{-۱}\in H$
۳) $ab\in H$
۴) $ab^{-۱}\in H$

۷ـ چه تعداد از عمل‌های « $+,-,\times,/$ » روی مجموعه اعداد طبیعی منهای اعداد اول، عمل دوتایی محسوب می‌شوند؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۸ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) یک حلقه حداقل یکی از دو عضو همانی جمع و همانی ضرب را دارد.
۲) اگر یک حلقه عضو همانی جمع نداشته باشد، ممکن است عضو همانی ضرب را هم نداشته باشد.
۳) در صورتی که یک حلقه عضو همانی ضرب نداشته باشد، ممکن است عضو همانی جمع نیز نداشته باشد.
۴) در صورتی که یک حلقه عضو همانی ضرب داشته باشد، عضو همانی جمع نیز دارد.

۹ـ مجموعه $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ به همراه عمل R که با ماتریس مقابل تعریف می‌شود:

$$R=\begin{array}{c|cccc} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴\\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴\end{array}$$

۱) نیم‌گروه است ولی مونوئید نیست.
۲) گروه است.
۳) نیم گروه نیست.
۴) مونوئید است ولی گروه نیست.

۱۰ـ تعداد عمل‌های جابه‌جایی‌پذیر روی مجموعه ۲n عضوی چند برابر تعداد عمل‌های جابه‌جایی‌پذیر روی مجموعه n عضوی است؟

۱) $۲^{n(۲n+۱)}\times n^{\frac{n(۳n+۱)}{۲}}$
۲) $۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}}\times n^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$
۳) $۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}\times n^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$
۴) $(۲n)^{\frac{n(۳n+۱)}{۲}}$

فصل ششم

«مفاهیم پیشرفته در شمارش»

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال۱: به چند طریق می‌توان ۱۰ شیرینی متمایز را بین ۴ کودک تقسیم نمود، به‌طوری که به حداقل سه کودک شیرینی برسد؟

۱) $\sum_{i=0}^{4}(4-i)^{10}(-1)^i\binom{4}{i}$
۲) $4^{10}-\binom{4}{2}2^{10}+\binom{4}{1}$
۳) $4^{10}-6\times 2^{10}+8$
۴) $\binom{4}{2}4^{10}$

پاسخ: گزینه «۳» در این سؤال باید تعداد کل حالات تقسیم را محاسبه کرده و سپس حالاتی را که دقیقاً به ۲ نفر شیرینی نمی‌رسد، کم کنیم؛ سپس حالاتی را که در آن‌ها به سه کودک شیرینی نمی‌رسد، کم کنیم.

$$N=4^{10}-\binom{4}{2}(2^{10}-2)-\binom{4}{1}(1^{10})=4^{10}-6\times 2^{10}+8$$

در رابطه فوق 4^{10} نشان دهنده تعداد حالات توزیع شیرینی‌ها بین ۴ کودک بدون توجه به محدودیت است. از این مقدار، مقادیر $\binom{4}{2}(2^{10}-2)$ و $\binom{4}{1}(1)^{10}$ را کم می‌کنیم که به ترتیب نشان دهنده تعداد توزیع شیرینی به دقیقاً ۲ کودک و دقیقاً یک کودک است. در نتیجه تنها تعداد حالاتی که به حداقل سه کودک شیرینی برسد باقی می‌ماند. می‌توان با استفاده از شمول و طرد تعداد حالاتی که به دقیقاً ۴ و به دقیقاً ۳ کودک شیرینی می‌رسد را محاسبه کرده و با هم جمع نمود. خواهیم داشت:

$$N=\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{4}{i}(4-i)^{10}+\binom{4}{3}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{3}{i}(3-i)^{10}$$
$$=4^{10}(1)+3^{10}\left(-\binom{4}{1}+\binom{4}{3}\right)+2^{10}\left(\binom{4}{2}-\binom{4}{3}\binom{3}{1}\right)+1^{10}\left(-\binom{4}{3}+\binom{4}{3}\binom{3}{2}\right)=4^{10}-6\times 2^{10}-8$$

مثال۲: اگر $f(x)$ تابع مولد دنباله $\langle a_0,a_1,a_2,\ldots\rangle$ باشد، تابع مولد دنباله مقابل چه خواهد بود؟ $\langle 0,a_0,a_0+a_1+1,a_1+a_2+2,a_2+a_3+3,\ldots\rangle$

۱) $x(1+x)f(x)+\frac{x^2}{(1-x)^2}$
۲) $x(1-x)f(x)+\frac{x^2}{(1-x)^2}$
۳) $\frac{x(1+x)f(x)+x^2}{(1-x)^2}$
۴) $\frac{x(1-x)f(x)+x^2}{(1-x)^2}$

پاسخ: گزینه«۱» اگر $g(x)$ تابع مولد دنباله $\langle b_0,b_1,\ldots\rangle$ باشد، تابع مولد دنباله $\langle a_0+b_0,a_1+b_1,\ldots\rangle$ به‌صورت $f(x)+g(x)$ خواهد بود. خواهیم داشت:

$$\langle 0,a_0,a_1,\ldots\rangle\equiv xf(x)$$
$$\langle 0,0,a_0,a_1,\ldots\rangle\equiv x^2f(x)$$
$$\langle 0,0,1,2,3,\ldots\rangle\equiv\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

دنباله $\langle 0,a_0,a_0+a_1+1,a_1+a_2+2,a_2+a_3+3,\ldots\rangle$ متناظر با حاصل‌جمع سه دنباله فوق است. در نتیجه تابع مولد آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$xf(x)+x^2f(x)+\frac{x^2}{(1-x)^2}=x(1+x)f(x)+\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

مثال ۳: احتمال اینکه در یک رشته ۱۰ حرفی تشکیل شده از حروف $\{a,b,c,d\}$، تعداد حروف b زوج باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲^{۹}}$　　۲) $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲^{۱۱}}$　　۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۹}}$　　۴) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۱۱}}$

پاسخ: گزینه«۴» تابع مولد نمایی متناظر با مسأله را به‌دست می‌آوریم. تابع مولد نمایی متناظر با حروف a، c و d به‌صورت e^x و برای حرف b به‌صورت $\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ است. تعداد رشته‌های ۱۰ حرفی با تعداد زوج حرف b برابر با ضریب $\frac{x^{۱۰}}{۱۰!}$ از تابع مولد g(x) که حاصل از ضرب توابع مولد فوق است می‌باشد. خواهیم داشت:

$$g(x)=\frac{e^{۳x}(e^x+e^{-x})}{۲}=\frac{e^{۴x}+e^{۲x}}{۲}$$

ضریب $\frac{x^{۱۰}}{۱۰!}$ در این عبارت برابر است با:

$$q=\frac{۴^{۱۰}+۲^{۱۰}}{۲}=۲^{۱۹}+۲^{۹}$$

تعداد کل رشته‌های به‌طول ۱۰ هم برابر است با $p=۴^{۱۰}=۲^{۲۰}$. احتمال اینکه تعداد حروف b در این رشته زوج باشد برابر است با:

$$\frac{q}{p}=\frac{۲^{۱۹}+۲^{۹}}{۲^{۲۰}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۱۱}}$$

آزمون فصل ششم

۱ـ n جفت کفش متمایز را در n جعبه مشابه به صورتی قرار می‌دهیم که در هر جعبه یک لنگه کفش پای چپ و یک لنگه کفش پای راست قرار گیرد. در چند حالت، محتوای حداقل یک جعبه، دو لنگه کفش مربوط به یک جفت است؟

۱) $\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{k+۱}\binom{n}{k}(n-k)!$
۲) $\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{k}\binom{n}{k}(n-k)!$
۳) $\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^{k+۱}\binom{n}{k}(n-k)!$
۴) $n!-\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^{k}\binom{n}{k}(n-k)!$

۲ـ چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که حداقل بر یکی از اعداد ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۳۶۰
۲) ۵۳۳
۳) ۴۲۰
۴) ۴۶۷

۳ـ تابع مولد معادل با رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$ به ازای $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $g(x)=\frac{۱+x}{۱-x-۲x^۲}$
۲) $g(x)=\frac{x}{۱-x-۲x^۲}$
۳) $g(x)=\frac{۱}{۱-x-x^۲}$
۴) $g(x)=\frac{۱-x}{۱-x-۲x^۲}$

۴ـ در بسط تابع $(۱+x^۲+x^۴+x^۶+x^۸)^۵$ ضریب $x^{۲۰}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\binom{۱۴}{۴}-\binom{۵}{۱}\binom{۹}{۴}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۴}$
۲) $\binom{۱۴}{۴}+\binom{۹}{۴}$
۳) $\binom{۱۴}{۴}+\binom{۵}{۱}\binom{۹}{۴}$
۴) $\binom{۱۴}{۴}\left(\binom{۹}{۸}-\binom{۹}{۴}\right)$

۵ـ چه تعداد مسیر از $(۰,۰)$ به $(۱۰,۱۷)$ دقیقاً از یکی از دو نقطه $(۳,۸)$ و $(۷,۱۲)$ عبور می‌کند؟

۱) $\binom{۲۷}{۱۰}-\binom{۱۱}{۳}\binom{۱۶}{۷}-\binom{۲۱}{۷}\binom{۸}{۳}+۲\binom{۱۱}{۳}\binom{۸}{۴}\binom{۸}{۳}$
۲) $\binom{۲۷}{۱۰}-\binom{۱۱}{۳}\binom{۱۶}{۷}-\binom{۲۱}{۷}\binom{۸}{۳}$
۳) $\binom{۲۷}{۱۰}-\binom{۱۱}{۳}\binom{۱۶}{۷}-\binom{۲۱}{۷}\binom{۸}{۳}+\binom{۱۱}{۳}\binom{۸}{۴}\binom{۸}{۳}$
۴) $\binom{۲۷}{۱۰}-\binom{۱۱}{۳}\binom{۸}{۴}\binom{۸}{۳}$

۶ـ ضریب $x^{۱۰}$ از $\frac{۱}{(x-۱)(۳x-۱)}$ را بیابید؟

۱) $\frac{۳^{۱۰}+۳}{۲}$
۲) $\frac{۳^{۱۱}+۱}{۲}$
۳) $\frac{۳^{۱۰}-۳}{۲}$
۴) $\frac{۳^{۱۱}-۱}{۲}$

۷ـ چند حالت برای قرار دادن ۶ وسیله متمایز در ۳ کیف مشابه وجود دارد، به طوری که هیچ کیفی خالی نماند؟

۱) $\binom{۸}{۲}-۳\binom{۸}{۱}$
۲) $\binom{۸}{۲}$
۳) ۹۰
۴) $۶^۳-۶^۲$

۸ـ پنج نفر هر کدام نامه‌ای می‌نویسند و در جعبه‌ای قرار می‌دهند؛ سپس هر نفر یک نامه از جعبه خارج می‌کند. در چند حالت هر پنج نفر نامه شخص دیگری را خارج می‌نمایند؟

۱) $۵!\sum_{i=۰}^{۵}(-۱)^{i}\binom{۵}{i}(۵-i)!$
۲) $\frac{۵!}{۲^۵}\sum_{i=۰}^{۵}(-۱)^{i}\binom{۵}{i}(۵-i)!$
۳) $\frac{۱}{۲^۵}\sum_{i=۰}^{۵}(-۱)^{i}\binom{۵}{i}(۵-i)!$
۴) $\sum_{i=۰}^{۵}(-۱)^{i}\binom{۵}{i}(۵-i)!$

۹ـ روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه مشخص می‌کنیم که فاصله تمام نقاط مجاور برابر باشد. تعداد کل مثلث‌هایی را که متساوی‌الساقین نیستند و رئوس آن‌ها روی محیط دایره قرار دارد، بیابید.

۱) $\binom{۱۲}{۳}-۶۰$
۲) $\binom{۱۲}{۳}-۴۸$
۳) $\binom{۱۲}{۳}-۲$
۴) $\binom{۱۲}{۳}-\binom{۱۲}{۲}$

۱۰ـ چه تابع مولدی دنباله $\langle ۱,۱,-۱,-۱,۳,۳,-۵,-۵,۱۱,۱۱,-۲۱,-۲۱,\dots\rangle$ را تولید می‌کند؟

۱) $\frac{۱-x}{۱+x^۲}$
۲) $\frac{۱+x}{۱+x^۲}$
۳) $\frac{۱}{(۱+x^۲)(۱-x)}$
۴) $\frac{۱}{(۱+x)(۱+x^۲)}$

فصل هفتم

«نظریه گراف»

تست‌های تألیفی فصل هفتم

مثال ۱: با داشتن ۲۰ رأس چند گراف ساده متفاوت می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۱۹۰　　۲) 2^{190}　　۳) 2^{210}　　۴) ۲۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر فرض کنیم n رأس داشته باشیم، آنگاه تعداد گراف‌های متفاوت برابر است با $2^{\binom{n}{2}}$؛ بنابراین در اینجا می‌توانیم $2^{\binom{20}{2}}$ گراف متفاوت داشته باشیم.

مثال ۲: تعداد یال‌های گرافی که رئوس آن زیرمجموعه‌های مجموعه ۱۰ عضوی $\{a_1,a_2,\dots,a_{10}\}$ هستند و یال‌های آن بین رئوسی از گراف وجود دارد که دو زیرمجموعه در حداکثر دو عضو اختلاف دارند، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\binom{10}{2}\times 2^9$　　۲) $(\binom{10}{2}-\binom{10}{1})\times 2^9$　　۳) $(\binom{10}{2}-\binom{10}{1})\times 2^{10}$　　۴) $(\binom{10}{2}+\binom{10}{1})\times 2^9$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» گراف صورت سؤال 2^{10} رأسی دارد که هر رأس آن با $55=\binom{10}{2}+\binom{10}{1}$ رأس دیگر مجاور است. تعداد رئوس این گراف برابر خواهد بود با:

$$(\binom{10}{2}+\binom{10}{1})\times 2^{10}\times\frac{1}{2}=(\binom{10}{2}+\binom{10}{1})\times 2^9$$

مثال ۳: چند دور متمایز به طول ۵ در گراف k_{10} فاقد یال بین دو رأس v_1 و v_2 هستند؟

۱) $\binom{10}{5}(\frac{4!}{2}-\frac{3!}{2})$　　۲) $\binom{10}{5}\times\frac{4!}{2}-\binom{8}{3}\times\frac{3!}{2}$　　۳) $\binom{10}{5}\times 4!-\binom{8}{3}\times 3!$　　۴) $\binom{10}{5}\times\frac{4!}{2}-\binom{8}{3}\times 3!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» کافیست تعداد کل دورهای به طول ۵ را محاسبه کنیم و این تعداد را منهای تعداد دورهایی به طول ۵ کنیم که یال (v_1,v_2) در آن‌ها وجود دارد. برای محاسبه تعداد دورهای به طول ۵ کافیست ۵ رأس از ۱۰ رأس گراف را به $\binom{10}{5}$ حالت انتخاب کنیم و با این رئوس، $\frac{(5-1)!}{2}$ دور متمایز (مشابه با تعداد راه‌های ساخت گردنبند با ۵ مهره متمایز) تشکیل دهیم. تعداد دورهایی که در آن‌ها یال (v_1,v_2) وجود دارد، برابر است با تعداد حالات انتخاب ۳ رأس از ۸ رأس به غیر از رئوس v_1 و v_2 به $\binom{8}{3}$ حالت (دو رأس v_1 و v_2 باید انتخاب شوند)، ضرب در تعداد حالت‌های چیدن ۳ رأس انتخاب شده در کنار رئوس v_1 و v_2 برای تشکیل دور به طول ۵ به $1\times2\times3$ حالت. پاسخ مسأله برابر است با:

$$\binom{10}{5}\times\frac{4!}{2}-\binom{8}{3}\times 3! = \text{جواب}$$

مثال ۴: تعداد یال‌های گرافی که رئوس آن زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه n عضوی هستند و یال‌های آن بین رئوسی قرار دارد که در دو عضو با هم اشتراک دارند چندتاست؟

۱) $\frac{n!}{4(n-4)!}$　　۲) $\frac{n!}{3(n-3)!}$　　۳) $\binom{n}{3}\binom{n-3}{1}$　　۴) $\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه تعداد یال‌های گراف کافیست مجموع درجات رئوس گراف را بر ۲ تقسیم کنیم. این گراف $\binom{n}{3}$ رأس دارد و هر رأس آن با $\binom{n-3}{1}\binom{3}{1}$ رأس دیگر مجاور است (فرض کنید می‌خواهیم تعداد رئوس مجاور رأس $(v_{a_1}, v_{a_2}, v_{a_3})$ را انتخاب کنیم که a_1، a_2 و a_3

۳ عدد متمایز از اعداد ۱ تا n هستند. به $\binom{3}{1}$ حالت، یکی از رئوس این مجموعه را حذف می‌کنیم و به $\binom{n-3}{1}$ حالت یک عضو جدید بـه غیـر از ایـن ۳ عضو، به مجموعه اضافه می‌کنیم). در نتیجه تعداد یال‌های این گراف برابر است با:

$$\text{جواب}=\frac{1}{2}\times\binom{n}{3}\times\binom{3}{1}\binom{n-3}{1}=\frac{1}{2}\times\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3!}\times 3\times(n-3)=\frac{n!}{4\times(n-4)!}$$

مثال ۵: گراف $k_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ یک گراف کامل m بخشی است که رئوس آن به m مجموعه $V_1,V_2,\cdots,V_m$ افراز شده باشد که $|V_i|=n_i$ و دو رأس به یکدیگر متصل می‌باشند، اگر و تنها اگر در یک مجموعه قرار نداشته باشند. در این صورت کـدام رابطـه در مـورد تعـداد یـال‌هـا و تعـداد رئـوس ایـن گـراف درست است؟

۱) $|V|=n_1\times n_2\times\cdots n_m \ ,\ |E|=\sum_{i=1}^{m}n_i$

۲) $|V|=\sum_{i=1}^{m}n_i \ ,\ |E|=\sum_{i<j}n_in_j$

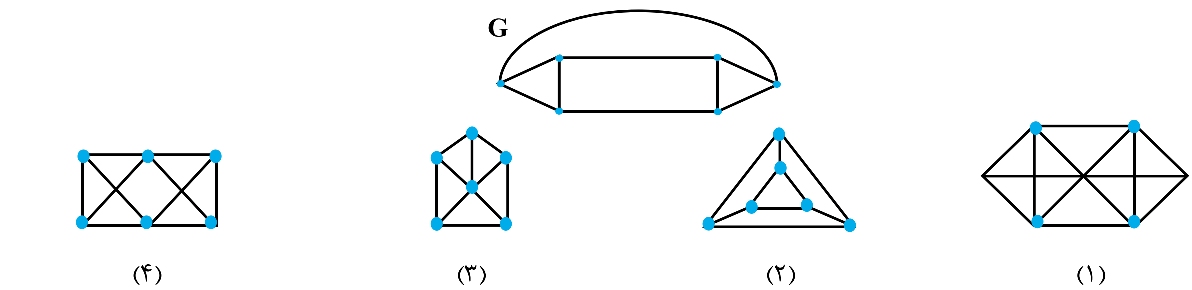
۳) $|V|=\sum_{i<j}n_in_j \ ,\ |E|=\sum_{i=1}^{m}n_i$

۴) $|V|=\sum_{i=1}^{n}n_i \ ,\ |E|=\sum_{i=j}n_in_j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تعداد رئوس برابر حاصل‌جمع تعداد رئوس مجموعه‌های $V_1,\cdots,V_m$ می‌باشد و برای تعیین تعداد یال‌ها کافیست دقت کنیم کـه رئوس $|V_1|$ به تمام رئوس مجموعه‌های دیگر متصل است و رئوس V_2 به تمام رئوس مجموعه‌های دیگر متصل است که یال‌های آن با $|V_1|$ قبلاً شـمرده شده‌اند و ...؛ بنابراین تعداد یال‌ها را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\left.\begin{array}{l} n_1\times n_2+n_1\times n_3+n_1\times n_4\cdots n_1\times n_m \\ +\ n_2\times n_3+n_2\times n_4+\cdots n_2\times n_m \\ +\ n_3\times n_4+n_3\times n_5+\cdots+n_3\times n_m \\ \vdots \\ +\ n_{m-1}\times n_m \end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{i<j}n_in_j$$

مثال ۶: گراف G با کدام‌یک از گراف‌های زیر ایزومورف است؟



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تنها گزینه‌ای که با G از لحاظ ساختار، تعداد رئوس و درجه رئوس یکسان است، گراف گزینه (۲) می‌باشد.

مثال ۷: تعداد دورهای هامیلتونی گراف $k_{6,6}$ کدام است؟

۱) ۴۳۲۰۰ ۲) ۱۴۴۰۰ ۳) ۵۱۸۴۰۰ ۴) ۲۵۹۲۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تعداد دورهای هامیلتونی گراف $k_{6,6}$ برابر است با:

$$\frac{6!\times 5!}{2}=\frac{720\times 120}{2}=43200$$

مثال ۸: فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف ساده غیرجهت‌دار و بدون حلقه باشد که در آن $|V|=n$. کدام‌یک از عبارات زیر در مورد G صادق است؟

۱) گراف G همبند است، اگر و تنها اگر رابطه $\deg(v_i)+\deg(v_j)\ge n-۱$ برای هر $v_i, v_j, i\ne j$ برقرار باشد.

۲) اگر گراف G دارای مسیر هامیلتونی باشد، رابطه $\deg(v_j)+\deg(v_i)\ge n-۱$ به ازای هر $v_i, v_j, i\ne j$ برقرار است.

۳) اگر به ازای $v_i, v_j, i\ne j$، $\deg(v_i)+\deg(v_j)\ge n-۱$، در این صورت G دارای دور هامیلتونی است.

۴) گراف G دارای مسیر هامیلتونی است، اگر و تنها اگر رابطه $\deg(v_i)+\deg(v_j)\ge n-۱$ برای هر $v_i, v_j, i\ne j$ برقرار باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» گراف دور با ۶ رأس مثال نقضی برای عبارت‌های گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) است. عبارت گزینه (۳)، شرط کافی برای وجود دور هامیلتونی است.

مثال ۹: کدام عبارت صحیح است؟

۱) گراف n رأسی با $\binom{n-۱}{۲}+۱$ رأس حتماً هامیلتونی است.

۲) نمی‌توان گراف n رأسی با $۲n+۱$ یال یافت که اویلری باشد.

۳) گراف n رأسی با $۲n$ یال حتماً اویلری است.

۴) گراف n رأسی با مجموع درجات $۲n+۲$ نمی‌تواند هامیلتونی و اویلری باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» شرط هامیلتونی و اویلری بودن گراف این است که درجه تمام رئوس زوج و بزرگ‌تر مساوی ۲ بوده و یک دور به‌طول n در گراف موجود باشد. در این صورت گراف گزینه (۴) باید یک رأس از درجه ۴ و $n-۱$ رأس از درجه ۲ داشته باشد. این گراف شکلی مانند 8 دارد. در واقع از دو دور که طول مجموعشان برابر n است، تشکیل شده است.

گراف گزینه (۱) می‌تواند از اتصال ۱ رأسی با درجه ۱ به یک گراف $K_{n-۱}$ ایجاد شود که هامیلتونی نیست. گراف گزینه (۲) می‌تواند یک $K_۷$ به همراه ۳ رأس با درجه ۰ باشد. گراف گزینه (۳) ممکن است همبند نباشد.

مثال ۱۰: برای اینکه مکمل گراف دوبخشی G، دو بخشی باشد، حداکثر تعداد رئوس G چه مقدار خواهد بود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یک گراف دوبخشی مؤلفه $k_۳$ یا به عبارتی دور به طول ۳ (طول فرد) ندارد. در صورتی که اگر یک بخش از گراف دوبخشی G بیشتر از ۲ رأس داشته باشد، در مکمل گراف شاهد دور به طول ۳ بین رئوس متناظر با آن بخش گراف G هستیم. در نتیجه، در هر بخش از گراف حداکثر ۲ رأس و در مجموع حداکثر ۴ رأس داریم.

مثال ۱۱: اختلاف تعداد مسیرهای به طول زوج و به طول فرد در گراف $k_{۵,۱۲}$ از رأس a به b را که رأس a متعلق به بخش ۵ رأسه و رأس b متعلق به بخش ۱۲ رأسه است، محاسبه کنید.

۱) ۳۱۶۸۰ ۲) ۲۲۱۸۰۵ ۳) ۱۹۰۰۸۰ ۴) ۱۶۶۳۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تمام مسیرها از a به b با توجه به دوبخشی بودن گراف، طول فرد دارد. طول این مسیرها برابر یکی از حالت‌های زیر است (تعداد مسیرها به ازای طول مسیرهای متفاوت در مقابل طول مسیر نوشته شده است).

طول ۱: ۱ مسیر

طول ۳: $\binom{۴}{۱}\times\binom{۱۱}{۱}=۴۴$ مسیر

طول ۵: $\binom{۴}{۲}\times\binom{۱۱}{۲}\times ۲!\times ۲!=۷۹۲۰$ مسیر

طول ۷: $\binom{۴}{۳}\times\binom{۱۱}{۳}\times ۳!\times ۳!=۲۳۷۶۰$ مسیر

طول ۹: $\binom{۴}{۴}\times\binom{۱۱}{۴}\times ۴!\times ۴!=۱۹۰۰۸۰$ مسیر

تعداد کل مسیرها $=۱+۴۴+۷۹۲۰+۲۳۷۶۰+۱۹۰۰۸۰=۲۲۱۸۰۵$

مثال ۱۲: چند گراف جهت‌دار ۸ رأسی بدون دور داریم؟

۱) $۳^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ ۲) $۲^n\,۳^{\frac{n(n-۱)}{۴}}$ ۳) $۳^{\frac{n(n-۱)}{۴}}$ ۴) $۳^{\frac{(n-۱)(n-۲)}{۴}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ماتریس مجاورت گراف باید پادمتقارن باشد. هیچ درایه‌ای در قطر اصلی نیز نباید مقدار ۱ بگیرد.

تعداد ماتریس‌های پادمتقارن با قطر اصلی برابر ۰ $=۳^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$

مثال ۱۳: کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) به ازای هر $n > 3$ می‌توان یک گراف n رأسی رسم کرد که هم هامیلتونی و هم اویلری باشد.

۲) به ازای هر $n > 3$ می‌توان یک گراف n رأسی رسم کرد که هم دوبخشی و هم هامیلتونی باشد.

۳) به ازای هر $n > 3$ می‌توان یک گراف n رأسی همبند رسم کرد که هم دوبخشی و هم اویلری باشد.

۴) به ازای بعضی از nها با فرض $n > 3$ نمی‌توان یک گراف n رأسی رسم کرد که هم دوبخشی، هم هامیلتونی و هم اویلری باشد.

پاسخ: گزینه «۲» یک گراف با تعداد فرد رأس، با داشتن دور هامیلتونی، دور به طول فرد دارد و نمی‌تواند دوبخشی باشد. برای رسم گراف‌های گزینه (۱) و (۳) می‌توان گراف دور و گراف خطمانند را رسم نمود.

مثال ۱۴: در مورد گراف ۱۰رأسی که رئوسش زیرمجموعه‌های مجموعه ۸ عضوی $A = \{a_1, a_2, ..., a_8\}$ است و یال‌ها بین زیرمجموعه‌هایی قرار دارند که دقیقاً دو عضو متفاوت دارند و این دو عضو دقیقاً در یکی از دو زیرمجموعه قرار دارند، کدام گزینه درست است؟ (به عنوان مثال، $\{a_1\}$ با $\{a_1, a_2, a_3\}$ مجاور است ولی با $\{a_2\}$ مجاور نیست).

۱) این گراف همبند است.

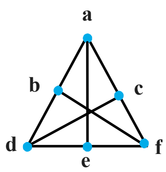
۲) این گراف هامیلتونی است.

۳) تعداد دورهای به طول ۳ این گراف برابر $\binom{2^8}{3}$ است.

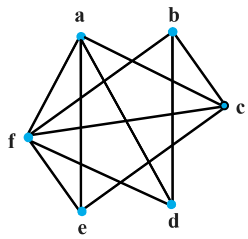
۴) این گراف هیچ دوری به طول ۵ ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه دو رأس مجاور در دقیقاً ۲ عضو با هم اختلاف دارند و ۲ عضو در یکی از این دو مجموعه قرار دارند، می‌توان نتیجه گرفت که زیرمجموعه‌های k عضوی فقط می‌توانند با زیرمجموعه‌های $k-2$ و $k+2$ عضوی مجاور باشند و زیرمجموعه‌های فردعضوی و زوج‌عضوی مجاور هم نیستند. در نتیجه، این گراف هم ناهمبند و هم دوبخشی خواهد بود (دلیل ناهمبندی، مجاور نبودن رئوس فردعضوی و زوج‌عضوی است و دلیل دوبخشی بودن محدودیت مجاور فقط بین رئوس با اختلاف اندازه ۲ واحد است). با توجه به اینکه گراف ناهمبند نمی‌تواند دور هامیلتونی داشته باشد، گزینه (۱) و (۲) نادرست خواهد بود. با توجه به دوبخشی بودن گراف می‌توان نتیجه گرفت که این گراف دور به طول فرد ندارد. در نتیجه گزینه (۳) نادرست و گزینه (۴) درست خواهد بود.

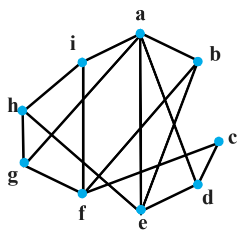
مثال ۱۵: از بین گراف‌های زیر کدام گراف‌ها مسطح می‌باشند؟



(1)



(2)



(3)

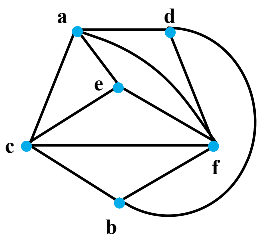
۱) ۱

۲) ۲

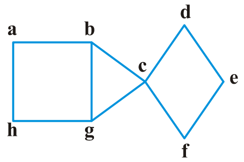
۳) ۱ و ۳

۴) ۲ و ۳

پاسخ: گزینه «۲» گراف‌های ۱و ۳ مسطح نمی‌باشند؛ اما گراف ۲ را می‌توان به صورت روبه‌رو رسم نمود. گراف ۱ یک گراف $k_{3,3}$ است و در گراف ۳، زیرگرافی وجود دارد که با $k_{3,3}$ هموموروف است. $\{a, e, f\}$ و $\{d, b, h\}$ دو بخش این گراف دوبخشی هستند.



مثال ۱۶: چند روش برای رنگ‌آمیزی گراف زیر با ۴ رنگ وجود دارد؟



۱) $۲^۴ \times ۳^۴$	۲) $۲^۵ \times ۳^۴$

۳) $۲^۳ \times ۳^۲ \times ۷^۲$	۴) $۲^۳ \times ۳^۶$

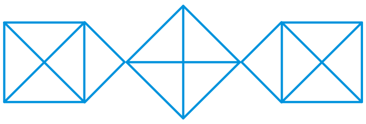
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» کافیست تعداد حالات رنگ‌آمیزی هر رأس را محاسبه کنیم و این تعداد را در هم ضرب کنیم. بهتر است از رئوس با درجه بالاتر برای اختصاص رنگ شروع کنیم. به رأس c می‌توان ۴ رنگ نسبت داد. به رأس b با توجه به مجاورتش با c می‌توان ۳ رنگ نسبت داد. رأس g نیز ۲ رنگ می‌تواند بگیرد. با توجه به تشکیل دور با مشاهده رئوس a و h شاهد محدودیتی برای رأسی هستیم که به عنوان آخرین رأس دور رنگ می‌شود. برای رفع این مشکل دو حالت برای رأس h در نظر می‌گیریم. حالت اول اینکه h با b همرنگ باشد (یک حالت داشته باشد)؛ در نتیجه به رأس a می‌توان ۳ رنگ نسبت داد. حالت دوم اینکه h با b همرنگ نباشد (دو حالت داشته باشد). در این صورت رأس a ، ۲ حالت برای رنگ‌آمیزی داد. به رأس d با توجه به مجاورتش با c می‌توان ۳ رنگ نسبت داد. بررسی رئوس e و f نشان‌دهنده محدودیتی مانند محدودیت در رنگ‌آمیزی h, a یکبار e را همرنگ با c می‌گیریم (یک حالت) که f سه حالت خواهد داشت و یک‌بار e را همرنگ با c نمی‌گیریم (دو حالت) که f دو حالت خواهد گرفت. حال با توجه به نتیجه زیر، تعداد حالات رنگ‌آمیزی را محاسبه می‌کنیم:

$g =$ ۲ حالت	$b =$ ۳ حالت	$c =$ ۴ حالت

$f, e =$ حالت $۱ \times ۳ + ۲ \times ۲$ با هم	$h, a =$ حالت $۱ \times ۳ + ۲ \times ۲$ با هم	$d =$ ۳ حالت

کل حالات $= ۴ \times ۳^۲ \times ۲ \times ۷^۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۷^۲$

مثال ۱۷: گراف زیر چند تطابق کامل دارد؟



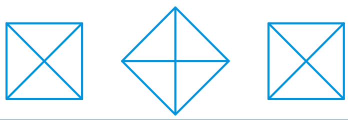
۱) ۸

۲) ۱۸

۳) ۲۷

۴) ۴۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این گراف را می‌توان به ۳ گراف مانند شکل زیر با تعداد رئوس زوج افراز کرد. تعداد تطابق‌های کامل هر کدام برابر ۳ است. در نتیجه، تعداد کل تطابق‌های کامل این گراف برابر است با $۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳$.



مثال ۱۸: کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموع درجات رئوس یک گراف ۱۰ رأسی و مکملش برابر ۹۰ است.

۲) گراف ۵ رأسی وجود دارد که با مکملش یکریخت باشد.

۳) در هر گراف حداقل ۲ رأس با درجه برابر وجود دارد.

۴) گراف ۱۰ رأسی و ۱۲ یالی همبند وجود دارد که مسطح نباشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مجموع درجات یک گراف n رأسی و مکملش برابر با دو برابر تعداد یال‌های گراف کامل n رأسی یعنی $n(n-۱)$ است که به‌ازای $n = ۱۰$ برابر ۹۰ خواهد بود. گراف دور ۵ رأسی، با مکملش یکریخت است. در گراف n رأسی، درصورتی که رأس از درجه ۰ نداشته باشیم، بزرگترین درجه برابر $n-۱$ و کوچکترین درجه برابر ۱ می‌باشد. درصورتی که رأس از درجه ۰ داشته باشیم، بزرگترین درجه برابر $n-۲$ و کوچکترین درجه برابر ۰ خواهد بود. طبق اصل لانه کبوتری، با توجه به اینکه تعداد رئوس از تعداد مقادیر درجات مجاز بیشتر است، حداقل دو رأس هم‌درجه خواهیم داشت. هر گراف همبند غیرمسطح، می‌بایست زیرگراف k_5 یا $k_{3,3}$ داشته باشد. گراف k_5، ۵ رأس و ۱۰ یال و گراف $k_{3,3}$، ۶ رأس و ۹ یال دارد. برای حفظ شرط همبندی گراف، با اضافه شدن هر رأس جدید، حداقل یک یال به گراف اضافه می‌گردد. در نتیجه اختلاف تعداد یال‌ها و رئوس در گراف‌های مسطح غیرهمبند، بزرگترمساوی حداقل اختلاف تعداد یال‌ها و رئوس دو گراف معرفی شده است که این حداقل برابر با ۳ خواهد بود. در نتیجه گراف‌های همبند و غیرمسطح ۱۰ رأسی، حداقل ۱۳ یال خواهند داشت.

مثال ۱۹: چه تعداد از گزینه‌های زیر صحیح هستند؟

الف: برای رنگ‌آمیزی هر گراف غیرمسطح، به منظور اینکه هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نداشته باشند، به حداقل ۳ رنگ نیاز خواهیم داشت.

ب: هیچ گراف ۸ رأسی با ۱۰ یال وجود ندارد که مسطح نباشد.

ج: گراف ۶ رأسی وجود دارد که خودش و مکملش یکریخت باشند.

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عبارت «الف» نادرست است. زیرا گراف‌های غیرمسطح دوبخشی مانند $k_{3,3}$ را می‌توان با دو رنگ رنگ‌آمیزی نمود. عبارت «ب» نادرست است. زیرا شرط همبندی ذکر نشده است. گراف k_5 را در نظر بگیرید و ۳ رأس با درجه ۰ به آن اضافه نمائید. این گراف، مثال نقضی برای عبارت «ب» خواهد بود. عبارت «ج» نیز نادرست است. مجموع درجات گراف n رأسی و مکملش برابر $n(n-1)$ است که به‌ازای $n=6$ برابر ۱۵ خواهد بود. با توجه به اینکه این مقدار، عددی فرد است، تعداد یال‌های این گراف و مکملش برابر نخواهد بود.

مثال ۲۰: کدام گزینه در مورد گراف همبند ۲۰ رأسی با ۲۰ یال نادرست است؟

۱) حداقل ۳ درخت فراگیر دارد.   ۲) حداکثر ۲۰ درخت فراگیر دارد.   ۳) حداقل یک یال برشی دارد.   ۴) مسطح است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» گراف همبند ۲۰ رأسی، دقیقاً یک دور خواهد داشت و مسطح خواهد بود. حداقل طول این دور برابر ۳ و حداکثر طول آن برابر ۲۰ است. با حذف یکی از یال‌های این دور، به یک درخت فراگیر خواهیم رسید. در نتیجه تعداد درختان فراگیر این گراف برابر با تعداد یال‌های تنها دور موجود در این گراف است. حداقل تعداد درختان فراگیر برابر ۳ و حداکثر برابر ۲۰ است. در صورتی که این گراف، یک دور به طول ۲۰ باشد، یال برشی نخواهد داشت.

مثال۲۱: چه تعداد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف: گراف ساده ۹ رأسی که با مکملش یکریخت است ۱۸ یال خواهد داشت.

ب: کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی گراف کامل ۵ رأسی که دو یال از آن حذف شده است ۴ است.

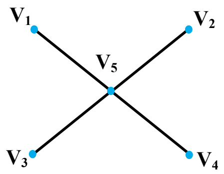
ج: گراف دو بخشی با ۹ رأس و ۱۵ یال، مسطح نیست.

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در صورتی که یک گراف با مکملش یکریخت باشد، به اندازه نصف یال‌های گراف کامل یعنی $\frac{n(n-1)}{4}$ یال خواهد داشت. به ازای $n=9$ تعداد یال‌ها برابر ۱۸ خواهد بود. در صورتی که دو یال غیر مجاور را حذف کنیم، گراف باقیمانده زیرگراف k_4 نخواهد داشت و آن را می‌توان با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی نمود. رابطه $e \le 2v-4$ در گراف‌های دوبخشی برقرار است. به ازای $v=9$ گراف دوبخشی که بیشتر از ۱۴ یال دارد مسطح نخواهد بود. در نتیجه تنها عبارت «ب» نادرست است.

آزمون فصل هفتم

۱ـ چندجمله‌ای رنگی گراف زیر کدام است؟



۱) $\lambda(\lambda-1)^4$

۲) $\lambda^4(\lambda-1)$

۳) $\lambda^4(\lambda-1)^4$

۴) $\lambda(\lambda^4-1)$

۲ـ تعداد یال‌های گراف ۵- مکعب کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۲۴۰

۳ـ تعداد دورهای به طول چهار در $k_{4,5}$ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۷۰

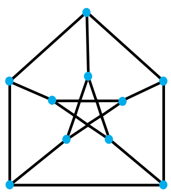
۴ـ تعداد دورهای هامیلتونی متفاوت در گراف k_6 چندتا است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۹۰

۵ـ کدام‌یک از دنباله درجات زیر می‌تواند نشان‌دهنده دنباله درجات رئوس یک گراف باشد؟

۱) ۷,۶,۲,۲,۲,۱,۰,۰ ۲) ۳,۳,۲,۲,۲,۲,۱ ۳) ۴,۴,۳,۲,۲,۱,۰ ۴) هیچ‌کدام

۶ـ گراف زیر (گراف پترسن) دارای کدام‌یک از خصوصیات ذکرشده می‌باشد؟



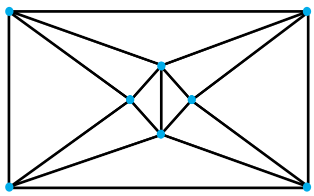
۱) دور هامیلتونی ندارد و مسیر هامیلتونی نیز ندارد.

۲) دور هامیلتونی دارد.

۳) دور هامیلتونی ندارد ولی مسیر هامیلتونی دارد.

۴) دور و مسیر هامیلتونی ندارد ولی اویلری است.

۷ـ گراف زیر را در نظر بگیرید. کدام‌یک از گزینه‌ها در مورد آن صادق است؟



۱) G هامیلتونی و اویلری است.

۲) G هامیلتونی است و گذر اویلری دارد ولی اویلری نیست.

۳) G اویلری نیست ولی گذر اویلری دارد و هامیلتونی نیست.

۴) G اویلری است و مسیر هامیلتونی دارد ولی هامیلتونی نیست.

۸ـ از گراف کامل K_n حداکثر چند یال می‌توان حذف کرد به طوری‌که گراف، همبند باقی بماند؟

۱) $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ۲) $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ۳) $\frac{(n-1)(n-2)}{4}$ ۴) $\frac{(n-2)(n-3)}{4}$

۹ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) یک گراف ۶- منتظم از مرتبه هر n به ازای $n \geq 7$ وجود دارد.

۲) یک گراف با تعداد ۷ رأس به صورت ۳- منتظم وجود دارد.

۳) یک گراف r- منتظم به ازای هر $0 \leq r \leq 11$ با ۱۲ رأس وجود دارد.

۴) گزینه‌های ۱ و ۳

۱۰ـ کدام‌یک از گراف‌های زیر اویلری هستند؟

a) $k_{4,4}$ b) k_{10} c) O_8 d) k_7

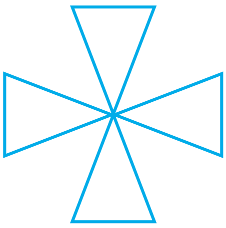
۱) a,b,d ۲) a,b,c ۳) b,c,d ۴) a, c, d

فصل هشتم

«درخت»

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال ۱: گراف مقابل چند درخت پوشا دارد؟



۱) 3^4

۲) 4^3

۳) 2^4

۴) 4^2

پاسخ: گزینه «۱» گراف مقابل را می‌توان به ۴ جزء که هر کدام‌یک مثلث هستند، تقسیم نمود. با توجه به اینکه تعداد درخت‌های پوشای یک دور به طول n برابر n است، هر مثلث دقیقاً ۳ درخت پوشا دارد، (می‌توان مثلث را گراف k_3 در نظر گرفت که ۳ درخت پوشـا دارد). تعـداد درخـت‌هـای پوشـای گراف فوق برابر خواهد بود با 3^4.

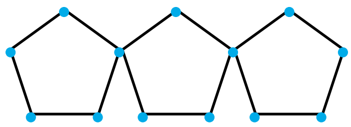
مثال ۲: دو گراف همبند A و B را به شکلی در نظر بگیرید که هر دو ۱۱ رأس و ۲۰ یال داشته باشند. از بین این یال‌ها، وزن ۱۰ یال برابر ۱ و وزن ۱۰ یال دیگر برابر ۲ است. اختلاف وزن درخت پوشای کمینه این دو گراف حداکثر چه مقدار است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۳» بیشترین اختلاف، زمانی وجود دارد که ۱۰ یال با وزن ۱، در یکی از گراف‌ها تشکیل یک درخت پوشا و در گراف دیگر تشکیل یک گراف K_5 دهند. در چنین شرایطی برای گراف دوم، ۶ یال با وزن ۱ را برای جلوگیری از تشکیل دور حذف خواهیم کرد. وزن درخت پوشای کمینه گراف اول برابر ۱۰ و وزن درخت پوشای کمینه گراف دوم برابر ۱۶ خواهد بود. مقدار اختلاف برابر ۶ خواهد بود.

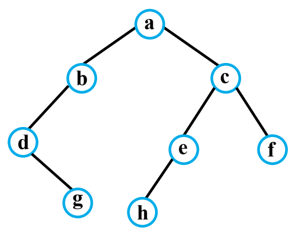
آزمون فصل هشتم

۱ـ گراف مقابل چند درخت فراگیر دارد؟



۱) ۶۴
۲) ۱۲۵
۳) ۲۱۶
۴) ۷۵

۲ـ پیمایش میانوندی درخت مقابل در کدام گزینه آمده است؟



۱) dgbhefca
۲) gdbhefca
۳) abcdefgh
۴) dgbahecf

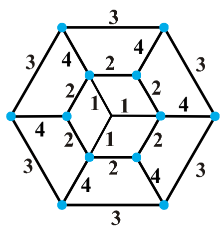
۳ـ مجموع درجات رئوس یک جنگل ۵ مؤلفه‌ای با ۲۰ رأس چه مقدار است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۹ ۳) ۳۵ ۴) ۳۸

۴ـ از گراف $k_{۵,۸}$ باید حداقل چند یال حذف کنیم تا مطمئن شویم گراف حاصل ناهمبند است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۵ـ کمترین وزن درخت فراگیر گراف معادل چقدر است؟

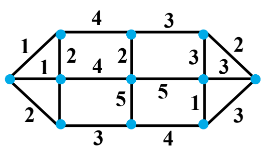


۱) ۲۵
۲) ۲۸
۳) ۳۱
۴) ۳۳

۶ـ با داشتن پیمایش پیش‌ترتیب و پس‌ترتیب یک درخت دودویی با n گره که m گره تک فرزندی دارد چند درخت متفاوت می‌توان رسم نمود؟

۱) ۲^{m} ۲) ۲^{n-m} ۳) ۱ ۴) $۲(n-m)$

۷ـ وزن درخت پوشای کمینه گراف مقابل چقدر است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۱
۳) ۲۲
۴) ۲۳

۸ـ اختلاف تعداد حالات رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ یک درخت n رأسی با یک درخت $n-۲$ رأسی چقدر است؟

۱) $۲^{n-۱}$ ۲) $۳\times ۲^{n-۲}$ ۳) $۳^{۲}\times ۲^{n-۳}$ ۴) $۵\times ۳\times ۲^{n-۴}$

۹ـ گراف n رأسی که ۴ رأس از درجه ۴، ۶ رأس از درجه ۳ دارد با استفاده از ۴ رنگ به چند طریق مقابل رنگ‌آمیزی است؟

۱) $۴\times ۳\times ۲^{n-۲}$ ۲) $۴\times ۳^{n-۱}$ ۳) $۴\times ۳^{۶}\times ۲^{n-۷}$ ۴) $۴\times ۳^{۴}\times ۲^{n-۵}$

۱۰ـ تعداد درختان آزاد با n گره چه مقدار است؟

۱) $\frac{n!}{n+۱}\binom{۲n}{n}$ ۲) $\frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$ ۳) $n^{n-۲}$ ۴) $\frac{۱}{n}\binom{۲n-۲}{n-۱}$

فصل نهم

«نظریه اعداد»

تست‌های تألیفی فصل نهم

مثال۱: چند عدد طبیعی مضرب ۲۱ مقسوم‌علیه عدد ۱۲۶۰ هستند؟

۱) ۹ ۲) ۲۰ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۴» داریم $1260 = 7^1 \times 5^1 \times 3^2 \times 2^2$ و $21 = 7^1 \times 5^0 \times 3^1 \times 2^0$. برای محاسبه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲۶۰که مضرب ۲۱ نیستند، کافیست تعداد اعداد به فرم $a = 7^{k_1} \times 5^{k_2} \times 3^{k_3} \times 2^{k_4}$ را بیابیم که توان‌های عامل‌های اول عدد a بین مقادیر توان‌های عامل‌های اول ۲۱ و ۱۲۶۰باشند. خواهیم داشت:

$1 \le k_1 \le 1$ یک حالت $0 \le k_2 \le 1$ دو حالت

$1 \le k_3 \le 2$ دو حالت $0 \le k_4 \le 2$ سه حالت

تعداد کل حالات برابر حالت‌های متفاوت توان‌های عامل‌های اول عدد a می‌باشد، یعنی $1 \times 2 \times 2 \times 3 = 12$.

مثال۲: عدد ۵۸۸۰ چند مقسوم‌علیه طبیعی مضرب ۳۶ دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱۲ ۳) ۴۸ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۱» خواهیم داشت $5880 = 7^1 \times 5^1 \times 3^1 \times 2^3$ و $36 = 3^2 \times 2^{12}$.

کافیست تعداد حالات نوشتن عدد a به صورت $a = 7^{k_1} \times 5^{k_2} \times 3^{k_3} \times 2^{k_4}$ را محاسبه کنیم.

$0 \le k_1 \le 2$ سه حالت $0 \le k_2 \le 1$ دو حالت

$2 \le k_3 \le 1$ غیرممکن (صفر حالت) $2 \le k_4 \le 3$ دو حالت

با توجه به اینکه نمی‌توان توانی برای عامل ۳ محاسبه نمود، در نتیجه پاسخ مسأله برابر ۰ خواهد بود.

مثال۳: عدد $a = 2^3 \times 3^5 \times 5^4 \times 13^2$ چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد که مضرب ۳۹ یا ۳۰۰ باشد؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۹۰ ۳) ۲۳۰ ۴) ۳۵۰

پاسخ: گزینه «۳» کافیست تعداد مقسوم علیه‌های مضرب ۳۹ و ۳۰۰ را به طور جداگانه محاسبه کنیم، سپس حاصل را منهای تعداد مقسوم‌علیه‌های $\text{lcm}(39,300)$ نماییم.

مضارب ۳۹ $= 4 \times 5 \times 5 \times 2 = 200$ مضارب ۳۰۰ $= 2 \times 5 \times 3 \times 3 = 90$

حال مقدار $\text{lcm}(39,300)$ و تعداد مضارب آن را محاسبه می‌کنیم.

$\text{lcm}(39,300) = 3900$ مضارب ۳۹۰۰ $= 2 \times 5 \times 3 \times 2 = 60$

پاسخ مسأله برابر مجموع مضارب ۳۹ و ۳۰۰ منهای مضارب ۳۹۰۰ خواهد بود.   پاسخ $= 200 + 90 - 60 = 230$

مثال ۴: چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف: عدد اول $k > 3$ وجود دارد به‌طوری که $k+2$ و $k+4$ اول باشد.

ب: هر عدد صحیح و فرد را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع دو عدد $k-4$ و $k+1$ نوشت به‌طوری که k عددی طبیعی باشد.

ج: هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به‌صورت یکتا به‌فرم $n = \prod a_i^{b_i}$ نوشت به شرطی که a_i ها اعداد اول باشند.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» عبارت اول نادرست است؛ زیرا درصورتی که k اول باشد، یکی از دو عدد $k+2$ و $k+4$ مضرب ۳ خواهد بود. عبارت دوم نیز نادرست است؛ زیرا عدد ۳− و اعداد فرد کوچکتر از آن را نمی‌توان به این فرم نوشت. عبارت سوم صحیح است.

مثال ۵: باقی‌مانده تقسیم عدد $۵^{۴۰} \times ۳^{۱۰۰}$ بر ۷ را بیابید.

۱) ۱   ۲) ۶   ۳) ۴   ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» طبق قوانین همنهشتی اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $c \overset{m}{\equiv} d$، آنگاه $ab \overset{m}{\equiv} cb$؛ پس اگر c و d باقی‌مانده‌های تقسیم $۳^{۱۰۰}$ و $۵^{۴۰}$ بر ۷ باشند، کافیست باقی‌مانده تقسیم cd بر ۷ را محاسبه کنیم. خواهیم داشت:

$$۵^{۴۰} \overset{۷}{\equiv} ۵ \times ۱۲۵^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} ۵ \times (-۱)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} -۵ \equiv ۲ \quad , \quad ۳^{۱۰۰} \overset{۷}{\equiv} ۹^{۵۰} \overset{۷}{\equiv} ۲^{۵۰} \overset{۷}{\equiv} ۲^{۲} \times ۸^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ۲^{۲} \times ۱ \equiv ۴$$

در نتیجه باقی‌مانده تقسیم $۵^{۴۰} \times ۳^{۱۰۰}$ بر ۷ برابر باقی‌مانده تقسیم ۴×۲ بر ۷ می‌باشد: $\Rightarrow ۳^{۱۰۰} \times ۵^{۴۰} \overset{۷}{\equiv} ۴ \times ۲ \overset{۷}{\equiv} ۱$

باقی‌مانده تقسیم $۵^{۴۰} \times ۳^{۱۰۰}$ بر ۷ برابر ۱ خواهد بود.

مثال ۶: بزرگترین عدد k که ۳^{k} عدد !۱۰۰ را عاد کند، در کدام گزینه آمده است؟

۱) ۳۸   ۲) ۴۲   ۳) ۴۸   ۴) ۵۲

پاسخ: گزینه «۳» کافیست تعداد عامل‌های ۳ در عدد !۱۰۰ را محاسبه نماییم، خواهیم داشت:

$$\text{تعداد عامل‌های ۳ در !۱۰۰} = \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۳^{۲}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۳^{۳}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۳^{۴}} \right\rfloor = ۳۳ + ۱۱ + ۳ + ۱ = ۴۸$$

مثال ۷: رقم یکان عدد $۱۳^{۱۵۰} \times ۷^{۳۰۰} \times ۵^{۵۰۰} \times ۳^{۷۰۰}$ را بیابید.

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۳» این عدد یک عدد فرد است که عامل ۵ دارد؛ در نتیجه رقم یکانش برابر ۵ خواهد شد. در صورت زوج بودن عدد، رقم یکان برابر صفر می‌شد.

مثال ۸: تعداد صفرهای سمت راست عدد !۱۰۰ را محاسبه نمایید.

۱) ۲۴   ۲) ۹۷   ۳) ۷۳   ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه تعداد صفرهای سمت راست یک عدد کافیست تعداد عامل‌های ۲ و ۵ عدد را محاسبه کنیم. مقدار کمینه این دو مقدار محاسبه شده برابر تعداد صفرهای سمت راست عدد است. در محاسبه تعداد عامل‌های عدد !k همواره تعداد عوامل ۲ بیشتر از تعداد عوامل ۵ خواهد بود. پس کافیست تعداد عوامل ۵ محاسبه شود. البته این به شرطی است که عدد k از حاصل‌ضرب یک یا چند عامل فاکتوریل در یک یا چند عدد به فرم غیرفاکتوریل تشکیل نشده باشد.

$$\text{تعداد عامل‌های ۲} = \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۴} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۸} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۱۶} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۳۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۶۴} \right\rfloor = ۵۰ + ۲۵ + ۱۲ + ۶ + ۳ + ۱ = ۹۷$$

$$\text{تعداد عامل‌های ۵} = \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۵} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۲۵} \right\rfloor = ۲۰ + ۴ = ۲۴$$

پس تعداد صفرهای سمت چپ این عدد برابر $\min(۲۴, ۹۷) = ۲۴$ خواهد بود.

مثال ۹: کوچکترین عدد طبیعی که نسبت به ۴، ۵ و ۶ باقی‌مانده به ترتیب ۱، ۲ و ۵ می‌دهد، در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱) $[15,19]$ ۲) $[20,24]$ ۳) $[25,29]$ ۴) $[30,34]$

پاسخ: گزینه «۱» در این مسأله شرط اینکه مقسوم‌علیه‌ها نسبت به هم اول باشند رعایت نشده است. بدون توجه به این مسأله به کارمان ادامه می‌دهیم. هدف یافتن کوچکترین عدد طبیعی a خواهد بود که شرایط زیر را داشته باشد:

$$a \overset{6}{\equiv} 5 \Rightarrow a = 6z + 5 \qquad a \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow a = 5y + 2 \qquad a \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow a = 4x + 1$$

$$\Rightarrow a = 4x + 1 = 4(5p + 4) + 1 = 20p + 17 \qquad \Rightarrow a = 4x + 1 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 5p + 4$$

$$\Rightarrow p = 3q \Rightarrow a = 20p + 17 = 20(3q) + 17 = 60q + 17 \qquad a = 20p + 17 \overset{6}{\equiv} 5 \Rightarrow 20p \overset{6}{\equiv} 0 \Rightarrow 10p \overset{3}{\equiv} 0$$

در نتیجه عدد ۱۷ کوچکترین عدد طبیعی با شرط باقی‌مانده‌ها می‌باشد.

مثال ۱۰: چه تعداد دانش‌آموز باید در یک آزمون تستی ۲۰ سؤالی با نمره منفی $\frac{1}{3}$ شرکت کنند تا حداقل نمره ۲ نفر برابر شود؟

۱) ۸۲ ۲) ۸۰ ۳) ۸۱ ۴) ۷۹

پاسخ: گزینه «۴» در صورتی که نمره هر سؤال صحیح را برابر ۳+ و نمره هر سؤال غلط را برابر ۱- بگیریم و با توجه به امکان نزده باقی گذاشتن جواب، نمره هر شخص یکی از اعداد مجموعه $R_n = \{-20, -19, -18, \ldots, 54, 56, 57, 60\}$ خواهد بود. دقت کنید که نمره‌های ۵۵، ۵۸ و ۵۹ قابل کسب نیست. در نتیجه ۷۸ نمره مجاز خواهیم داشت که آن‌ها را لانه کبوتری در نظر می‌گیریم. در صورتی که حداقل ۷۹ شرکت‌کننده داشته باشیم، مطمئن خواهیم بود که نمره ۲ نفر برابر خواهد شد.

مثال ۱۱: عدد ۲۱۰۰ را در نظر بگیرید. ابتدا از آن ۲ واحد کم می‌کنیم؛ سپس از عدد باقی‌مانده ۴ واحد کم می‌کنیم. به همین ترتیب از عدد باقی‌مانده ۸ واحد کم می‌کنیم و همین روال را ادامه می‌دهیم. کوچکترین عدد مثبت در این رشته عددی کدام عدد خواهد بود؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۶ ۳) ۵۴ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینه «۳» کوچکترین عدد به ازای کم کردن عدد 2^{10} از حاصل به دست می‌آید:

$$m = 2100 - \sum_{i=1}^{10} 2^i = 2100 - 2046 = 54$$

مثال ۱۲: یک رستوران تعداد ثابتی صندلی دارد. اگر این صندلی‌ها را دور میزهای ۷ نفره بچینید، هیچ صندلی اضافه نمی‌ماند. اگر دور میزهای ۴ نفره بچینید ۲ صندلی اضافه می‌ماند و اگر دور میزهای ۳ نفره بچینید یک صندلی اضافه می‌آید. چند عدد کوچکتر از ۱۰۰۰ وجود دارد که می‌تواند بیانگر ظرفیت رستوران باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۱» فرض می‌کنیم عدد a برابر تعداد صندلی‌های رستوران باشد. خواهیم داشت:

$$a = 3z + 1 \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow z = 4p + 3 \quad , \quad a \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow a = 3z + 1 \quad , \quad a \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow a = 4y + 2 \quad , \quad a \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow a = 7x$$

$$\Rightarrow a = 12p + 10 = 12(7q + 5) + 10 = 84q + 70 \quad , \quad a = 3z + 1 = 3(4p + 3) + 1 = 12p + 10 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow p = 7q + 5$$

مقدار a به ازای $q = 0$ برابر ۷۰ و به ازای $q = 11$ برابر با ۹۹۴ است. در نتیجه ۱۲ عدد می‌تواند بیانگر مقادیر قابل قبول برای a باشد.

مثال ۱۳: تعدادی دانشجو از پنج شهر مختلف در یک نشست دانشجویی شرکت کرده‌اند. از تهران ۹۱ نفر، از مشهد ۴۲ نفر، از اصفهان ۱۰۵ نفر، از تبریز ۱۳۳ نفر و از شیراز ۸۴ نفر. حداقل چه تعداد اتاق برای اسکان این دانشجویان لازم است، به‌طوری‌که تعداد افراد هر اتاق با هم برابر بوده و تمام افراد هر اتاق نیز همشهری باشند؟

۱) ۱۳ ۲) ۶۵ ۳) ۵۲ ۴) ۹۱

پاسخ: گزینه «۲» کافی است بزرگترین مضرب مشترک این اعداد را محاسبه کنیم و مقدار مجموعشان را تقسیم بر این ب.م.م کنیم. تعداد اعضای هر اتاق برابر مقدار ب.م.م است. $\gcd(91, 42, 105, 133, 84) = 7$

$$\text{تعداد اتاق‌ها} = \frac{91 + 42 + 105 + 133 + 84}{7} = 13 + 6 + 15 + 19 + 12 = 65$$

آزمون فصل نهم

۱ـ چه تعداد از اعداد طبیعی مضرب ۱۶۸ مقسوم‌علیه $۷^۴ \times ۵^۲ \times ۴^۳ \times ۳^۵$ هستند؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۱۴۴

۲ـ تعداد صفرهای سمت راست عدد $۵۰! \times ۵^{۱۰} + ۱۰۰!$ را بیابید.

۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۳۴

۳ـ اگر امروز دوشنبه باشد، ۱۷۰۰ روز بعد چه روزی خواهد بود؟

۱) یکشنبه ۲) دوشنبه ۳) چهارشنبه ۴) جمعه

۴ـ کوچکترین عدد طبیعی که در تقسیم بر ۴، ۵ و ۷ باقی‌مانده ۱، ۴ و ۲ می‌دهد، در چه بازه‌ای قرار دارد؟

۱) $[۶۴,۸۴]$ ۲) $[۴۳,۶۳]$ ۳) $[۲۲,۴۲]$ ۴) $[۱,۲۱]$

۵ـ تعداد k محصول را می‌خواهیم در تعدادی جعبه قرار دهیم. اگر ظرفیت جعبه برابر ۱۵ باشد، ۳ محصول در آخرین جعبه باقی می‌ماند. اگر ظرفیت جعبه برابر ۸ باشد، ۴ محصول در آخرین جعبه باقی می‌ماند. اگر ظرفیت جعبه برابر ۶ باشد، تمام جعبه‌ها پر خواهند شد. عدد k چند مقدار کوچکتر از ۱۰۰۰ می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۵

۶ـ اگر a_i ها به ازای $۱ \le i \le k$ اعداد اول باشند، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد $N = a_۱^{b_۱} a_۲^{b_۲} \dots a_k^{b_k}$ چقدر است؟

۱) $\prod_{i=۱}^{k}(b_i)$ ۲) $\prod_{i=۱}^{k}(۱-b_i)$ ۳) $\prod_{i=۱}^{k}(۱+b_i)$ ۴) $\prod_{i=۱}^{k}(۱+b_i^۲)$

۷ـ چند نفر باید در یک آزمون تستی ۲۰ سؤالی بدون نمره منفی شرکت کنند تا مطمئن شویم ۵ نفر نمره ۱۴ از ۲۰ را دریافت می‌کنند؟ (کمترین پاسخ صحیح مدنظر است)

۱) ۸۱ ۲) ۱۰۶ ۳) ۸۵ ۴) نمی‌توان مشخص کرد.

۸ـ حداقل چند مرتبه باید مسیر به طول حداقل (مسیر با حرکت به سمت راست یا بالا) از نقطه $(۰,۰)$ به نقطه $(۴,۳)$ را بپیماییم تا مطمئن شویم که حداقل یکی از مسیرها سه مرتبه پیموده شده است؟

۱) ۷۱ ۲) ۳۷ ۳) ۷۸ ۴) ۱۰۶

۹ـ ۲۰۰ نفر در یک آزمون تستی بدون نمره منفی با ۱۰ سؤال شرکت می‌کنند. در این صورت مطمئن خواهیم بود که حداقل نمره چند نفر برابر است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

۱۰ـ از بین ۱۴۳ نفر از ۳ تیم می‌توان گفت که حداقل چند هم‌تیمی در یک ماه متولد شده‌اند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: «مبانی شمارش»

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل دوم: «مبانی منطق»

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل سوم: «رابطه‌های بازگشتی»

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۳»

فصل چهارم: «نظریه مجموعه‌ها»

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل پنجم: «دستگاه‌های جبری»

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»

فصل ششم: «مفاهیم پیشرفته در شمارش»

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»

فصل هفتم: «نظریه گراف»

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل هشتم: «درخت»

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»

فصل نهم: «نظریه اعداد»

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»