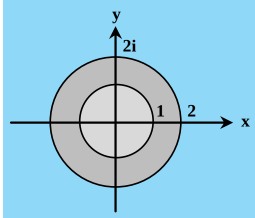
قضیه لوران (لورانت)

تابع $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2i)}$ را در نظر بگیرید. این تابع به ازای تمام z ها به جز دو نقطه تکین $z=1$ و $z=2i$ تحلیلی است. اگر بسط تیلور را حول $z=0$ محاسبه کنیم، این بسط برای ناحیه $|z|<1$ معتبر است.



با بسط تیلور حول $z=0$، ناحیه $|z|\geq 1$ در دسترس ما نیست و برای همین نمایش کلی‌تری معروف بـه **سری لــوران** وجـود دارد که امکان بسط در هر طوق که تابع در آن تحلیلی است را به ما می‌دهد. مثلاً برای تابع $f(z)$ سه حالت ممکن برای بسط لوران حول $z=0$ وجود دارد. یکی ناحیه $|z|>2$، یکی طوق $1<|z|<2$ و دیگری ناحیـه $|z|<1$ (کـه بسـط لـوران در ایـن ناحیه در واقع همان سری تیلور تابع $f(z)$ است) پس ما با سری لوران می‌توانیم بسط تابع را حول نقطه تکین آن بنویسیم.

هرگاه $f(z)$ در ناحیه D (مثلاً طوق $R_1<|z-z_0|<R_2$ یا دیسک $|z-z_0|<R_1$) به جز نقطه z_0 واقع در D تحلیلی باشد، آنگاه تابع $f(z)$ را می‌توان با سری لوران زیر نمایش داد:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

در واقع با استفاده از سری لوران می‌توانیم تابع را حول نقاط تکین آن بسط دهیم کاری که با استفاده از سری تیلور ممکن نبود.

در رابطه فوق به عبارت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$، **مقدار اصلی سری لوران** گفته می‌شود. (چون تفاوت بسط لوران با بسط تیلور تابع f است.)

به عبارت دیگر سری لوران یک سری مرکب از توان‌های صحیح مثبت و منفی $z-z_0$ است که تـوان‌هـای مثبـت همـان سـری تیلـور حـول نقطـه $z=z_0$ می‌باشند. ضرایب سری لوران فوق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad(n=0,1,2,\dots)\ ,\qquad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{(z-z_0)^{-n+1}}f(z)dz\quad(n=1,2,3,\dots)$$

البته سری لوران $f(z)$ را معمولاً به شکل زیر نیز نمایش می‌دهند:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

که C_n از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad,\quad(n=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$$

البته در بیشتر سؤالات از روش‌های دیگری برای محاسبه ضرایب سری لوران استفاده می‌شود.

مثال ۲۹: عبارت $\frac{1}{1-z}$ در دو حالت، یک بار بر حسب توان‌های مثبت z و بار دیگر بر حسب توان‌های منفی z بسط دهید.

پاسخ: در حالت اول چون در ناحیه $|z|<1$ تابع تحلیلی می‌باشد، پس همان بسط تیلور تابع نوشته می‌شود. می‌دانیم بسط تیلور $\frac{1}{1-z}$ به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ می‌باشد، ولی یادتان نرود در این بسط باید شرط $|z|<1$ برقرار باشد. خب حالا اگر بخواهیم بسط تابع را برای ناحیه $|z|>1$ بنویسیم، چون نقطه $z=1$ داخل منحنی بسته ما می‌افتد و به دلیل این‌که تابع در $z=1$ تحلیلی نیست، مجبور به استفاده از بسط لوران می‌شویم.

برای نوشتن توان‌های منفی z به این شکل عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\cdot(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})$$

دقت کنید چون در این حالت $|z|>1$ است، پس $\frac{1}{|z|}<1$ و این یعنی می‌توانیم بسط $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{z}}=(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)$$

با ضرب $-\frac{1}{z}$ در سری داریم:

$$-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

پس در ناحیه‌ای که تابع تحلیلی می‌باشد، همان بسط تیلور تابع را می‌نویسیم و در قسمت‌هایی که تابع تحلیلی نیست باید از بسط لوران استفاده کنیم.

مثال ۳۰: تمام سری‌های لوران تابع $\frac{1}{z^3-z^4}$ را به مرکز صفر بنویسید.

پاسخ : در این مسئله فرقی نمی‌کند که $|z|<1$ و یا $|z|>1$ باشد، چون در هر دو حالت نقطه $z=0$ که نقطه غیر تحلیلی تابع می‌باشد، داخل ناحیه قرار می‌گیرد، پس باید در هر دو حالت توان‌های منفی z را ایجاد کنیم. می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$، لذا از ضرب طرفین آن در $\frac{1}{z^3}$ (برای $|z|<1$) داریم:

$$\frac{1}{z^3-z^4}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\cdots$$

اما برای $|z|>1$ و $|\frac{1}{z}|<1$ باید بر حسب توان‌های منفی بسط را بنویسیم:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

با ضرب طرفین سری فوق در $\frac{1}{z^3}$ داریم:

$$\frac{1}{z^3-z^4}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+4}}=-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}-\cdots$$

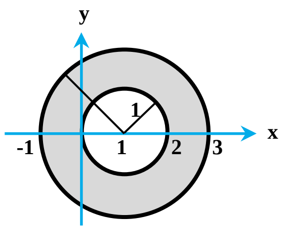
نکته۸: در نوشتن بسط لوران (حول نقطه z_0) ایجاد جمله‌هایی به صورت $z-z_0$ لازم است. برای توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها به صورت چند جمله‌ای می‌باشد، باید سعی کنیم توان‌های $(z-z_0)$ را در مخرج کسر ایجاد کنیم. در این‌گونه مسائل استفاده از دو بسط زیر کلید حل مسئله می‌باشد:

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n=1+u+u^2+\cdots \quad , \quad \frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n=1-u+u^2-u^3+\cdots$$

پس ما باید سعی کنیم توابعی به صورت $\frac{1}{1\pm u}$ ایجاد کنیم و چون این سری‌ها به شرط $|u|<1$ برقرار هستند، با استفاده از ناحیه‌های داده شده در صورت تست باید بسط را در ناحیه همگرایی بنویسیم. حل چند مثال این موضوع را برای ما روشن‌تر می‌کند.

مثال ۳۱: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$، در طوق $1<|z-1|<2$ را بنویسید.

پاسخ: نقاط غیر تحلیلی تابع $z=1$ و $z=3$ می‌باشد. با توجه به طوق داده شده دقت کنید، نقطه $z=1$ داخل طوق نیست. ولی چون بسط حول $z=1$ خواسته شده و تابع در این نقطه، غیر تحلیلی است، باید بسط لوران را بنویسیم. پس لازم است توان‌های $(z-1)$ را ایجاد کنیم. ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم.



$$\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3}\Rightarrow A(z-3)+B(z-1)=z\Rightarrow (A+B)z-3A-B=z$$

$$\Rightarrow A+B=1\ ,\ -3A-B=0\Rightarrow A=\frac{-1}{2}\ ,\ B=\frac{3}{2}$$

پس $f(z)$ به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{3}{2}}{z-3}=\frac{3}{2(z-3)}-\frac{1}{2(z-1)}$$

حال باید توان‌های $z-1$ را ایجاد کنیم. جمله دوم که خود به خود این شکل را دارد، پس سراغ تغییر قیافه‌ی جمله‌ی اول یعنی $\frac{3}{2(z-3)}$ می‌رویم!

$$\frac{3}{2(z-3)}=\frac{3}{2(z-1-2)}=\frac{3}{2[(z-1)-2]}=\frac{3}{-4(1-\frac{z-1}{2})}=-\frac{3}{4}(\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}})$$

الان می‌خواهیم از همان بسط معروف استفاده کنیم. چون شرط $1<|z-1|<2$ داده شده، پس داریم:

$$|z-1|<2 \Rightarrow |\frac{z-1}{2}|<1 \Rightarrow -\frac{3}{4}(\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}})=-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n$$

پس بسط $f(z)$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$f(z)=-\frac{1}{2(z-1)}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n$$

تذکر ۳: سؤال مهمی که معمولاً دانشجویان می‌پرسند، این است که چه وقت دنبال ایجاد $\frac{k}{z-z_0}$ و چه وقت دنبال ایجاد $\frac{z-z_0}{k}$ باشیم؟

جواب این است: باید به ناحیه‌ی داده شده در صورت سؤال دقت کنید. اگر در آن ناحیه k بزرگتر از $|z-z_0|$ باشد از k فاکتور بگیرید و $\frac{z-z_0}{k}$ را ایجاد کنید و اگر در آن ناحیه $|z-z_0|$ بزرگتر از k باشد. از $(z-z_0)$ فاکتور بگیرید و $\frac{k}{z-z_0}$ را ایجاد کنید.

مثال ۳۲: سری لوران تابع $f(z)=\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ در ناحیه $1<|z|<2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا با استفاده از روش تجزیه کسرها $f(z)$ را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{-1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}$$

با توجه به ناحیه‌ی داده شده، یعنی $1<|z|<2$ در کسر $\frac{1}{1-z}$ باید از z فاکتور بگیریم و $\frac{1}{z}$ ایجاد کنیم و در کسر $\frac{1}{z-2}$ باید از ۲ فاکتور بگیریم و $\frac{z}{2}$ ایجاد کنیم.

$$f(z)=\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{2(\frac{z}{2}-1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

دقت کنید با توجه به شرط صورت سؤال، چون $|z|>1$ می‌باشد پس $\frac{1}{|z|}<1$، و می‌توانیم بسط عبارت داخل پرانتز را بنویسیم:

$$\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

به همین ترتیب چون $|z|<2$، پس $|\frac{z}{2}|<1$ به راحتی مجوز استفاده از بسط معروف را برای خود صادر می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2\times 2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

پس تابع $f(z)$ در طوق $1<|z|<2$ به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

که البته اگر بخواهیم نمایش به صورت سری لوران با اندیس یک در بیاید با قرار دادن $n-1$ به جای n داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

مثال ۳۳: سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-z}$، حول نقطه‌ی $z_0=-1$ در ناحیه $1<|z+1|<2$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

۲) $-\frac{1}{2(z+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

۳) $+\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

۴) $-\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا تغییر متغیر $w = z+1$ را اعمال می‌کنیم تا بتوان تابع را حول $w=0$ بسط داد:

از بسط کسری استفاده می‌کنیم:

$$f(w) = \frac{1}{(w-1)(w^2-2w)} = \frac{1}{w}\left(\frac{A}{w-1}+\frac{B}{w-2}\right)$$

$$A(w-2)+B(w-1)=1 \Rightarrow \begin{cases} w=2 \Rightarrow B(2-1)=1 \Rightarrow B=1 \\ w=1 \Rightarrow A(1-2)=1 \Rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$$f(w)=\frac{1}{w}\left(\frac{-1}{w-1}+\frac{1}{w-2}\right)$$

ناحیه $1<|z+1|<2$ بر حسب w به صورت $1<|w|<2$ خواهد بود. پس در اولین کسر باید از w فاکتور بگیریم و $\frac{1}{w}$ ایجاد کنیم و در دومی از ۲ فاکتور می‌گیریم و $\frac{w}{2}$ را ایجاد خواهیم کرد:

$$f(w)=\frac{1}{w}\left(\frac{-1}{w}\frac{1}{1-\frac{1}{w}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{w}{2}}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{w^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

توضیح: حل مسئله در این قسمت کامل می‌شود ولی با توجه به گزینه‌ها، سری دوم را از $n=1$ شروع کرده و مقدار $n=0$ را جداگانه می‌نویسیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{2^{n+1}} \xrightarrow{n=0} \frac{-1}{2w}$$

در نتیجه داریم:

$$f(w)=-\frac{1}{2w}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{w^{n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

حال با جایگذاری $w=z+1$ در معادله فوق به گزینه ۴ می‌رسیم.

$$w=z+1 \Rightarrow f(z)=\frac{-1}{2(z+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}} \Rightarrow f(z)=\frac{-1}{2(z+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$$

مثال ۳۴: سری لوران تابع $f(z)=\frac{3}{z^2-z-2}$ در ناحیه $|z|>2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^n}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^n}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^{n+1}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» $f(z)$ را با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان به صورت $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}$ نوشت. از طرفی در ناحیه $|z|>2$ داریم:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}.\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

برای بسط $-\frac{1}{z+1}$ نیز با توجه به این که در ناحیه‌ی $|z|>2$ هستیم پس $|z|>1$ هم هست. بنابراین $\frac{1}{z}$ را ایجاد می‌کنیم:

$$\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\times(-1)^n}{z\times z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

لذا داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

مثال ۳۵: اگر تمام سری‌های لوران $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ را حول $z_0=0$ بنویسیم، کدام‌یک از سری‌های زیر بسط (تیلور یا لوران) تابع $f(z)$ <u>نمی‌تواند</u> باشد؟

۱) $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\cdots$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$

۳) $\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\cdots$

۴) $-\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}-\frac{7}{z^3}+-\cdots$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این مسئله یک مثال بسیار خوب و کامل برای آموزش مطلب می‌باشد. هر چند ممکن است به عنوان یک تست کمی سنگین باشد.
تابع $f(z)$ دارای دو نقطه تکین $z=-2$ و $z=1$ می‌باشد. با توجه به این که بسط حول $z_0=0$ خواسته شده لذا باید سه طوق به مرکز صفر وجود داشته باشد. این سه طوق به شکل زیر است که $f(z)$ در هر یک از آن‌ها تحلیلی است:

۱) دایره $|z|<1$

۲) طوق $1<|z|<2$

۳) $|z|>2$ (در واقع این ناحیه بیرون دایره $|z|\le 2$ می‌باشد.)

ابتدا $f(z)$ را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)} \Rightarrow \mathbf{f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}}$$

حالا بسط لوران را در سه ناحیه گفته شده می‌نویسیم:

۱) دایره $|z|<1$: با توجه به این که $f(z)$ در این ناحیه هیچ نقطه‌ی تکینی ندارد به راحتی معلوم است با یک بسط تیلور روبه‌رو خواهیم بود. در واقع وقتی $|z|<1$ باشد به وضوح $|z|<2$ هم هست پس باید $\frac{z}{1}$ و $\frac{z}{2}$ ایجاد کنیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{z-1} = -(\frac{1}{1-z}) = -(1+z+z^2+z^3+\cdots) \\ \frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{z}{2}}) = \frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots)\end{cases}$$

بنابراین می‌توان $f(z)$ در ناحیه $|z|<1$ به صورت زیر نمایش داد:

$$f(z) = (\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}) - (1+z+z^2+z^3+\cdots) \Rightarrow \mathbf{f(z) = -\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\cdots}$$

۲) طوق $1<|z|<2$: برای کسر $\frac{1}{z+2}$ با توجه به آن که $|z|<2$ است، باید به دنبال تولید $\frac{z}{2}$ باشیم و برای کسر $\frac{1}{z-1}$، چون $1<|z|$ است، لازم است به دنبال تولید $\frac{1}{z}$ باشیم، پس داریم:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{z}{2}}) = \frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots) \quad \text{و} \quad \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}) = \frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots)$$

بنابراین $f(z)$ در طوق $1<|z|<2$ به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8})+(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots) \Rightarrow \mathbf{f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}}$$

۳) ناحیه $|z|>2$: وقتی $|z|>2$ باشد به وضوح $|z|>1$ هم هست. بنابراین در این ناحیه باید $\frac{2}{z}$ و $\frac{1}{z}$ ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}(\frac{1}{1+\frac{2}{z}})=\frac{1}{z}(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\cdots) \quad ; \quad \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})=\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots)$$

بنابراین $f(z)$ در ناحیه $|z|>2$ به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\frac{8}{z^4})+(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots)\Rightarrow \mathbf{f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\cdots}$$

با توجه به سه ناحیه‌ی فوق و سه بسط مربوط به آن‌ها واضح است، گزینه (۴) نمی‌تواند بسط $f(z)$ باشد.

مثال ۳۶: بسط تابع $f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}$، $0<|z|<1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{z}+1-z+z^2-\cdots$
۲) $1-z+z^2-z^3+\cdots$
۳) $1+z-z^2+\cdots$
۴) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم، جمله $\frac{1}{z}$ خود به خود وجود دارد و بسط جمله دوم را می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}+1-z+z^2-z^3+\cdots$$

مثال ۳۷: در سری لوران تابع $f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ روی ناحیه‌ی $0<|z|<1$، ضریب $\frac{1}{z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) -1
۲) $\frac{1}{2!}$
۳) 1
۴) $+\frac{1}{2!}$

پاسخ: گزینه «۳» بهتر است با توجه به وجود $1+2z^2$ در صورت کسر و $1+z^2$ در مخرج آن، از یک روش ابتکاری بهره ببریم:

$$f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3(1+z^2)}=\frac{1}{z^3}(\frac{1+z^2+z^2}{1+z^2})=\frac{1}{z^3}(1+\frac{z^2}{z^2+1})=\frac{1}{z^3}[1+z^2(\frac{1}{z^2+1})]$$

با استفاده از بسط $\frac{1}{1+u}$ داریم:

$$=\frac{1}{z^3}[1+z^2(1-z^2+\frac{z^4}{2!}-\frac{z^6}{3!}+-\cdots)]=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}-z+\frac{z^3}{2!}-+\cdots$$

همان‌طور که مشخص است، ضریب $\frac{1}{z}$، برابر **یک** است.

مثال ۳۸: سری لوران تابع $f(z)=Ln(\frac{z-1}{z-2})$ در ناحیه‌ی $|z|>2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2nz^n}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{nz^n}$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2nz^n}$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2^n-1)}{nz^n}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $Ln(\frac{z-1}{z-2}) = Ln(z-1) - Ln(z-2)$. از طرفی در ناحیه‌ی $|z| > 2$، خواهیم داشت: $|\frac{2}{z}| < 1$، پس $|\frac{1}{z}| < 1$ است. در نتیجه توان‌های $\frac{1}{z}$ و $\frac{2}{z}$ را در کسرهای زیر ایجاد می‌کنیم:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \quad , \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

حالا با انتگرال‌گیری از طرفین این معادلات خواهیم داشت:

$$Ln(z-1) = \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{dz}{z^{n+1}} = Lnz + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{nz^n} \quad , \quad Ln(z-2) = \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{2^n}{z^{n+1}}dz = Lnz + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^n}{nz^n}$$

توجه داشته باشید که در هر دو سری به ازای $n = 0$ داریم: $\int\frac{1}{z}dz = Lnz$

حال با کم کردن این دو تساوی از یکدیگر خواهیم داشت:

$$Ln(z-1) - Ln(z-2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{nz^n} + \frac{2^n}{nz^n}$$

به عبارتی داریم:

$$Ln(\frac{z-1}{z-2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n - 1}{nz^n}$$

نکته۹: برای به دست آوردن بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$، حول نقطه‌ی $z_0 (z_0 \neq a)$ ابتدا بسط لوران $\frac{1}{z-a}$ را با توجه به سری هندسی به دست می‌آوریم و سپس با مشتق‌گیری از طرفین بسط لوران $\frac{1}{z-a}$، به بسط لوران $\frac{1}{(z-a)^n}$ می‌رسیم.

مثال ۳۹: سری لوران $f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}$، در ناحیه $1 < |z| < 2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}z^n$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}z^n$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا $f(z)$ را به کسرهای جزئی تقسیم می‌کنیم:

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2}$$

در ناحیه‌ی داده شده داریم $|z| > 1$، بنابراین در کسر $\frac{1}{z-1}$ باید $\frac{1}{z}$ ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

حالا که بسط $\frac{1}{z-1}$ به دست آمده، با مشتق‌گیری از طرفین بسط فوق داریم:

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{d}{dz}(\frac{1}{z-1}) \Rightarrow \frac{1}{(z-1)^2} = -(-\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} - \frac{3}{z^4} + \cdots)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}$$

برای کسر $\frac{1}{z+2}$ دقت کنید که در ناحیه‌ی داده شده $|z| < 2$ است بنابراین باید $\frac{z}{2}$ ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{z}{2}}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$$

با جمع‌بندی مطالب بالا داریم:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$$

نکته۱۰: هرگاه در ضابطه‌ی $f(z)$، توابع نمایی، مثلثاتی یا معکوس مثلثاتی و نظایر آن وجود داشته باشد، برای نوشتن بسط لوران $f(z)$، مستقیماً از بسط‌های مک‌لورن این توابع استفاده خواهیم کرد. دقت کنید که این بسط‌ها برای هر عدد مختلط z معتبر هستند. به همین دلیل در چنین مسائلی دیگر نواحی مختلف داده نمی‌شود و یک سری لوران منحصر به فرد برای $f(z)$ خواهیم داشت.

مثال ۴۰: چند جمله اول سری لوران $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ به مرکز صفر کدام است؟

۱) $z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots$　۲) $z+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots$　۳) $z^2+z+\frac{1}{2}+\cdots$　۴) $z^2+z+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۳» این نوع تست‌ها چون از نوع چند جمله‌ای و کسری نیستند، با نوشتن بسط توابع به صورت مستقیم به جواب می‌رسند. با نوشتن بسط e^z و تبدیل z به $\frac{1}{z}$ در طرفین تساوی داریم:

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z^2})+\cdots$$

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z^2})+\cdots]=z^2+z+\frac{1}{2}+\cdots$$

مثال ۴۱: سه جمله اول بسط لوران تابع $f(z)=\frac{\sinh\pi z}{z^3}$ حول مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{z^2}+\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^2}{5!}$　۲) $\frac{\pi}{z^2}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^2}{5!}$　۳) $\frac{\pi}{z}+\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^3z^2}{5!}+\cdots$　۴) $\frac{\pi}{z}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^3}{5!}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{1}{z^3}(\sinh\pi z)=\frac{1}{z^3}(\pi z+\frac{\pi^3z^3}{3!}+\frac{\pi^5z^5}{5!}+\cdots)=\frac{\pi}{z^2}+\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^2}{5!}+\cdots$$

مثال ۴۲: سه جمله اول سری لوران تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$ حول مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}$　۲) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{z^2}{120}$　۳) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{z^2}{120}$　۴) $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{z^2}{120}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}-\cdots$$

مثال ۴۳: بسط لوران $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ در $z=1$ کدام یک از عبارات زیر است؟

۱) $\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots$

۲) $e^2\{\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}+\frac{2e^2}{3}+\frac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

۳) $\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{3e^2}{z-1}+\frac{3e^2}{4}+4e^2(z-1)+\cdots$

۴) $e^2\{\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{3}{z-1}+\frac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا بسط مک‌لورن e^z را می‌نویسیم:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

چون حول $z=1$ بسط خواسته شده لذا با تغییر متغیر $u=z-1$ داریم:

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2(u+1)}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}.e^{2u}=\frac{e^2}{u^3}[1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\frac{(2u)^4}{4!}+\cdots]$$

$$=\frac{e^2}{u^3}+\frac{2e^2}{u^2}+\frac{2e^2}{u}+\frac{8e^2}{6}+\frac{4ue^2}{6}+\cdots=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+\frac{4}{3}e^2+\frac{2}{3}(z-1)e^2+\cdots$$

مثال ۴۴: اگر بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z\sinh z}$ در بازه‌ی $0<|z|<\pi$ به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n$ تعریف شود، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $b_{-2}=1,b_{-1}=-\frac{1}{6},b_1=\frac{7}{360}$　۲) $b_4=\frac{7}{360},b_2=-\frac{1}{6},b_0=1$

۳) $b_{-2}=0,b_0=-\frac{1}{6},b_2=\frac{7}{360}$　۴) $b_{-2}=1,b_0=\frac{-1}{6},b_2=\frac{7}{360}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از بسط مک‌لورن $\sinh z$ خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{1}{z\sinh z}=\frac{1}{z[z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots]}=\frac{1}{z^2(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)}=\frac{1}{z^2}(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{7z^4}{360}-\cdots)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{7z^2}{360}\cdots\Rightarrow\left|\begin{array}{l}b_{-2}=1\\ b_0=-\frac{1}{6}\\ b_2=\frac{7}{360}\end{array}\right.$$

توجه کنید که برای یافتن چندجمله‌ای اول بسط تابع $\frac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots}$ از تقسیم چندجمله‌ای‌ها استفاده کرده‌ایم. اگر به تقسیم انجام شده دقت کنید در آخرین تفاضل ضریب z^4 برابر است با:

$$\frac{1}{3!3!}-\frac{1}{5!}=\frac{1}{36}-\frac{1}{120}=\frac{1}{3\times12}-\frac{1}{10\times12}=\frac{10-3}{3\times10\times12}=\frac{7}{360}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots \\ \hline -(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots) & 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{7z^4}{360}-\cdots \\ -\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}-\cdots & \\ -(-\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{3!3!}-\cdots) & \\ \frac{7z^4}{360}+\cdots & \end{array}$$

توضیح: به عنوان یک روش دوم، برای کسر $\frac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots}$ می‌توانستیم فرض کنیم $u=\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$ و سپس بسط لوران $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-+\cdots$ را بنویسیم. اما محاسبه‌ی ضریب z^4 در این روش به دقت بیشتری نیاز دارد.

مثال ۴۵: اگر یک سری لوران تابع f به صورت $2<|z|<3$ ، $f(z)=\operatorname{tg}z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$ باشد، آنگاه مقدار b_2 چقدر است؟

۱) $-\pi$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) π

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $\operatorname{tg}z$ یک تابع فرد است، لذا فقط بر اساس توان‌های فرد z بسط می‌یابد و بنابراین ضریب توان‌های زوج z صفر می‌باشد، یعنی $b_2=0$.

مثال ۴۶: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{e^z-e^{2z}}$، حول نقطه‌ی $z=0$ در ناحیه $0<|z|<2\pi$، کدام است؟ (راهنمایی: $\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ و $b_0=1$)

۱) $-\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$

۲) $-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$

۳) $-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{2(n+1)!}]z^n$

۴) $-\frac{1}{2z}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به آن که بسط لوران $\frac{z}{e^z-1}$ در صورت سؤال داده شده است، سعی می‌کنیم ضابطه‌ی $f(z)$ را به آن ربط دهیم:

$$f(z)=\frac{1}{e^z(1-e^z)}=\frac{1}{e^z}+\frac{1}{1-e^z}=e^{-z}-\frac{1}{e^z-1}=e^{-z}-\frac{1}{z}(\frac{z}{e^z-1})$$

می‌دانیم بسط مک‌لورن e^{-z} به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^n}{n!}$ است و بسط $\frac{z}{e^z-1}$ نیز در صورت سؤال داده شده. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^n}{n!}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^{n-1}$$

از سری دوم جمله‌ی $n=0$ را خارج می‌کنیم. سپس با جایگزین کردن $n+1$ به جای n، از کران‌های آن یک واحد کم می‌کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n-\frac{b_0}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^{n-1}=-\frac{b_0}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}z^n=-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}]z^n$$

مثال ۴۷: اگر برای $|z|>0$، بسط لوران $\sinh(z+\frac{1}{z})$ به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nz^n$ نمایش داده شود، آن‌گاه C_n کدام است؟

۱) $C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh(\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

۲) $C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

۳) $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

۴) $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$

پاسخ: گزینه «۴» در بسط لوران حول نقطه $z_0=0$، ضرایب C_n به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\sinh(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz$$

با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ خواهیم داشت؛ $z+\frac{1}{z}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ که می‌دانیم برابر $2\cos\theta$ می‌باشد، لذا داریم:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\sinh(2\cos\theta)ie^{i\theta}d\theta}{e^{i(n+1)\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(2\cos\theta)[\cos n\theta-i\sin n\theta]d\theta$$

قسمت موهومی انتگرال فوق تابعی فرد بوده و انتگرال آن صفر می‌شود، بنابراین داریم:

$$\mathbf{C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta}$$

مثال ۴۸: اگر بسط لوران تابع $f(z)=\cosh(z+\frac{1}{z})$ برای $|z|>0$ به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nz^n$ باشد، آن‌گاه C_n کدام است؟

(با کمی تغییر از سؤالات درس ریاضی مهندسی دانشگاه MIT)

۱) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cosh(2\cos\theta)d\theta$　　۲) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2n\theta)\cosh(\cos\theta)d\theta$

۳) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-\theta)\cosh(2\sin\theta)d\theta$　　۴) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cosh(2\sin(n\theta))d\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ضرایب C_n از رابطه انتگرالی مقابل به‌دست می‌آید: $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$

با توجه به گزینه‌ها که حدود انتگرال به صورت $\int_0^{2\pi}$ داده شده، با انتخاب مرز C_n به‌صورت دایره واحد، خواهیم داشت:

$$z=re^{i\theta}=1e^{i\theta}=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cosh(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}}(ie^{i\theta}d\theta)$$

با استفاده از روابط اویلر $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ ،$e^{in\theta}=\cos n\theta-i\sin n\theta$ خواهیم داشت:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)e^{-in\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)[\cos n\theta-i\sin n\theta]d\theta$$

قسمت موهومی انتگرال فوق به‌دلیل فرد بودن تابع زیر انتگرال و متقارن بودن بازه‌ی انتگرال‌گیری صفر می‌شود:

$$\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cosh(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta}_{\text{تابع فرد}}=0$$

بنابراین C_n برابر مقدار زیر است:

$$\mathbf{C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta}$$

مثال ۴۹: اگر بسط لوران $f(z)$ به صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z+1)^n$ تعریف شود، آن‌گاه مقدار C_{-2} در بسط لوران $f(z)=\sin(\frac{z}{z+1})$ کدام است؟

۱) 0　　۲) 1　　۳) $\cos 1$　　۴) $-\frac{1}{2}\sin 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای اینکه ضریب C_{-2} را در بسط $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z+1)^n$ بیابیم، می‌توانیم بسط لوران $f(z)$ را حول نقطه‌ی $z_0=-1$ بنویسیم. فرض کنیم $t=z+1$ و $f(z)$ را بر حسب t می‌نویسیم:

$$f(z)=\sin(\frac{z}{z+1})\Rightarrow f(t)=\sin(\frac{t-1}{t})=\sin(1-\frac{1}{t})$$

اکنون از فرمول مثلثاتی تفاضل دو کمان استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

با استفاده از این اتحاد داریم:

$$f(t)=\sin(1-\frac{1}{t})=\sin(1)\cos(\frac{1}{t})-\sin(\frac{1}{t})\cos(1)$$

حال از بسط‌های مک‌لورن سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$f(t)=\sin(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!t^{2n}}-\cos(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!t^{2n+1}}$$

حال با جایگذاری $t=z+1$ بسط $f(z)$ بدست می‌آید:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(1)}{(2n)!}(z+1)^{-2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(1)}{(2n+1)!}(z+1)^{-2n-1}$$

جمله‌ی $(z+1)^{-2}$ فقط در اولین مجموع و به ازای $n=1$ ظاهر می‌شود. در واقع با دقت به توانِ $(z+1)$ در اولـین مجمـوع داریـم $C_{-2n}=\frac{(-1)^n\sin(1)}{(2n)!}$.

پس خواهیم داشت:

$$\mathbf{C_{-2}=\frac{-\sin(1)}{2!}=-\frac{1}{2}\sin(1)}$$