



فصل اول

«سیستم‌ها و مبناهای عددی»

تست‌های تألیفی فصل اول

کج مثال ۱: اگر $A = (284/54)_{10}$ باشد ($r = 10$) در این صورت جدول مقابل در مورد ارقام و ارزش مکانی هر رقم برقرار خواهد بود.

پاسخ: ☒

رقم	a_2	a_1	$a_0.a_{-1}$	a_{-2}
ارزش مکانی	10^2	10^1	$10^0.10^{-1}$	10^{-2}
عدد	۲	۸	۴ / ۵	۴

در این عدد باتوجه به اندیس گذاری ذکر شده $a_0 = 4, a_1 = 8, a_2 = 2$ است. همچنین $a_{-1} = 5$ و $a_{-2} = 4$ است. ارزش مکانی a_0 برابر 10^0 یا $1, a_1$ برابر 10^1 یا 10 ، a_2 برابر 10^2 یا 100 است. ارزش مکانی a_{-1} برابر 10^{-1} یا $0/1$ و ارزش مکانی a_{-2} برابر 10^{-2} یا $0/01$ است.

$(A3F40A2)_{16}$, $(A5015)_{Hex}$

کج مثال ۲: اعداد زیر اعداد معتبری در مبنا ۱۶ هستند:

جدول زیر نشان دهنده مبناهای متعارف و محدوده ارقام هر مبنا می‌باشد.

مبنا (r)	محدوده رقم
۲	$0 \leq a \leq 1$
۸	$0 \leq a \leq 7$
۱۰	$0 \leq a \leq 9$
۱۶	$0 \leq a \leq 15$

کج مثال ۳: اگر $x = (3F5/A2)_H$ آنگاه معادل مبنا ۱۰ عدد x کدام گزینه است؟

$$9055/1(4)$$

$$2103/3(3)$$

$$1013/63(2)$$

$$1024(1)$$

پاسخ: گزینه «۲» در این مثال رقم $a_2 = 3$ با ارزش مکانی $16^2 = 256$ ، رقم $a_1 = F = 15$ با ارزش مکانی $16^1 = 16$ ، $a_0 = 5$ با ارزش مکانی $16^0 = 1$ و $a_{-1} = A = 10$ با ارزش مکانی $16^{-1} = \frac{1}{16}$ ، رقم $a_{-2} = 2$ با ارزش مکانی $16^{-2} = \frac{1}{256}$ است. حال باید هر رقم در ارزش مکانی‌اش ضرب

شده و حاصل این ضرب‌ها با هم جمع گردد. بنابراین:

$$x = 3 \times 16^2 + 15 \times 16 + 5 \times 16^0 + 10 \times 16^{-1} + 2 \times 16^{-2} = 1013/63$$

کج مثال ۴: اگر $A = (3672)_8$ آنگاه $A = (?)_{10}$.

$$2000(4)$$

$$1978(3)$$

$$1984(2)$$

$$1900(1)$$

پاسخ: گزینه «۳» در این مثال رقم $a_3 = 3$ با ارزش مکانی $8^3 = 512$ ، رقم $a_2 = 6$ با ارزش مکانی $8^2 = 64$ ، رقم $a_1 = 7$ با ارزش مکانی $8^1 = 8$ و

رقم $a_0 = 2$ با ارزش مکانی $8^0 = 1$ است. در نهایت باید هر رقم در ارزش مکانی‌اش ضرب شده و حاصل این ضرب‌ها با هم جمع شود.

$$A = (3672)_8 = 3 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 1978$$



مثال ۵: اگر $A = (101/011)_2$ آنگاه معادل مبنای ۱۰ این عدد کدام گزینه است؟

$$21/2 \quad (4)$$

$$6/25 \quad (3)$$

$$43 \quad (2)$$

$$5/375 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» در این مثال رقم ۱ با ارزش مکانی $2^2 = 4$ ، رقم ۰ با ارزش مکانی $2^1 = 2$ ، رقم ۱ با ارزش مکانی $2^0 = 1$ ، رقم $a_{-1} = 0$ با ارزش مکانی $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ، رقم ۱ با ارزش مکانی $2^{-2} = \frac{1}{4}$ ، رقم ۰ با ارزش مکانی $2^{-3} = \frac{1}{8}$ است. در نهایت باید هر رقم در ارزش مکانی‌اش ضرب شده و حاصل این ضرب‌ها با هم جمع شود.

$$A = (101/011)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 5/375$$

مثال ۶: معادل عدد ۷۸۶ در مبنای ۲ کدام گزینه است؟

$$1100010010 \quad (4)$$

$$1000111010 \quad (3)$$

$$1101110101 \quad (2)$$

$$1000010110 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r} 786 \quad 2 \\ \hline 786 \quad 393 \\ \hline 393 \quad 2 \\ \hline 393 \quad 196 \\ \hline 196 \quad 2 \\ \hline 196 \quad 98 \\ \hline 98 \quad 2 \\ \hline 98 \quad 49 \\ \hline 49 \quad 2 \\ \hline 49 \quad 24 \\ \hline 24 \quad 2 \\ \hline 24 \quad 12 \\ \hline 12 \quad 2 \\ \hline 12 \quad 6 \\ \hline 6 \quad 2 \\ \hline 6 \quad 3 \\ \hline 3 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

پاسخ: گزینه «۴» در زیر، مقدار اولیه به دو تقسیم شده است که خارج قسمت آن برابر ۳۹۳ و باقیمانده آن صفر شده است. مجدداً خارج قسمت ۳۹۳ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و این عمل تقسیم آن قدر تکرار می‌شود تا خارج قسمت بدست آمده دیگر به دو قابل تقسیم نباشد (از دو کوچکتر شود). حال از آخرین تقسیم شروع کرده و آخرین خارج قسمت و تمامی باقی‌مانده‌ها را می‌نویسیم.

$$(786)_{10} = (1100010010)_2$$

مثال ۷: معادل عدد $(1345)_{10}$ در مبنای ۸ کدام گزینه است؟

$$1345 \quad (4)$$

$$2501 \quad (3)$$

$$2250 \quad (2)$$

$$51001 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: در این مثال، مقدار اولیه یعنی ۱۳۴۵ بر هشت تقسیم شده است که خارج قسمت آن برابر ۱۶۸ و باقی‌مانده آن برابر یک شده است. مجدداً خارج قسمت یعنی ۱۶۸ را بر ۸ تقسیم می‌کنیم و این عمل تقسیم آن قدر تکرار می‌شود تا خارج قسمت بدست آمده دیگر به هشت قابل تقسیم نباشد (از هشت کوچکتر شود). در نهایت آخرین خارج قسمت و تمامی باقی‌مانده‌ها را از آخر به اول می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r} 1345 \quad 8 \\ \hline 1345 \quad 168 \\ \hline 168 \quad 8 \\ \hline 168 \quad 21 \\ \hline 21 \quad 8 \\ \hline 21 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 8 \\ \hline 2 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow (1345)_{10} = (2501)_8$$

روش دوم: برای تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۸ از همان روش گفته شده برای تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ استفاده می‌کنیم، ولی این بار توان‌های متوالی ۸ را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال معادل عدد ۱۳۴۵ در مبنای ۸ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{array}{c|cccc} \text{توان‌های متوالی ۸} & 8^3 & 8^2 & 8^1 & 8^0 \\ \hline \text{رقم انتخاب شده} & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \quad (1345)_{10} = 2 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 1 \times 8^0$$

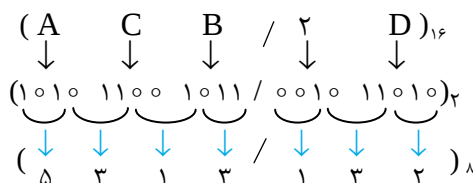
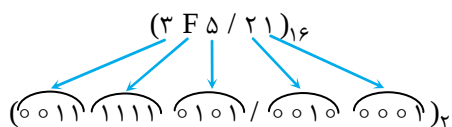
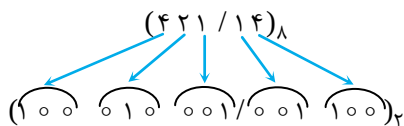
در اینجا بزرگترین توانی از ۸ را انتخاب می‌کنیم که کوچکتر از ۱۳۴۵ باشد. 8^3 برابر ۵۱۲ بزرگترین توانی از ۸ است که از ۱۳۴۵ کوچکتر است. چون دو تا ۵۱۲ تا می‌توان درون ۱۳۴۵ یافت، زیر 8^3 رقم ۲ گذاشته و سپس به اندازه 2×512 یا ۱۰۲۴ از ۱۳۴۵ کم می‌کنیم. حاصل برابر ۳۲۱ خواهد شد. چون ۵ تا ۶۴ تا می‌توان در ۳۲۱ یافت پس زیر 8^2 رقم ۵ می‌گذاریم و به اندازه 5×64 یا ۳۲۰ از آن کم می‌کنیم. باقی‌مانده ۱ است که چون 8^1 از آن بزرگتر است زیر آن صفر می‌گذاریم و در نهایت با گذاشتن یک زیر 8^0 تبدیل کامل می‌شود. روش سوم: ابتدا عدد را از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ تبدیل کرده و سپس از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم.

مثال ۸: معادل عدد $010110/011100$ در مبنای ۸ را بدست آورید.

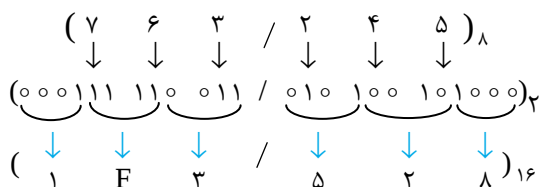
$$\begin{array}{cccc} 421 & 421 & 421 & 421 \\ (010 & 110 & 011 & 100)_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 6/3 & 4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow (010110/011100)_2 = (26/34)_8$$

پاسخ: در این مثال قسمت صحیح را از راست به چپ سه‌بیت سه‌بیت جدا می‌کنیم. سه‌بیتی اول برابر $(110)_2$ یا ۶ و سه‌بیتی دوم برابر $(010)_2$ یا ۲ است. قسمت اعشار را از چپ به راست سه‌بیت، سه‌بیت جدا می‌کنیم. سه‌بیتی اول برابر $(011)_2$ یا ۳ و سه‌بیتی دوم برابر $(100)_2$ یا ۴ خواهد شد. حال این ارقام را به همان ترتیب در کنار هم می‌گذاریم. بنابراین داریم: $(26/34)_8$



نکته ۱: جداسازی ارقام قبل از اعشار، از سمت راست به چپ ولی جداسازی ارقام بعد از اعشار، از سمت چپ به راست می‌باشد.



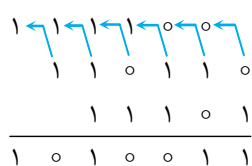
مثال ۱۳: اگر $A = (110110)_2$ و $B = (11101)_2$ آنگاه $A+B$ کدام گزینه است؟

۱۰۱۰۱۰۱ (۴)

۱۱۰۰۰۱۱ (۳)

۱۰۰۱۰۰۱ (۲)

۱۰۱۰۰۱۱ (۱)



مثال ۱۴: اگر $A = (1753)_8$ و $B = (632)_8$ آنگاه $A+B$ کدام گزینه است؟

پاسخ: گزینه «۲» در این مثال مبنای ۸ برابر $8 = 10$ است. بنابراین در اولین طبقه جمع ۳ با ۲ جمع می‌شود که باقی‌مانده تقسیم $(3+2)$ بر ۸ برابر ۵ و خارج‌قسمت آن برابر صفر خواهد شد. پس رقم حاصل جمع برابر ۵ و رقم نقلی برابر صفر خواهد شد. در طبقه دوم سه رقم ۵ و ۳ و ۰ با هم جمع می‌شوند که باقی‌مانده تقسیم $(0+3+5)$ بر ۸ برابر صفر و خارج‌قسمت آن برابر یک خواهد شد. پس رقم حاصل جمع برابر صفر و رقم نقلی برابر یک می‌شود و همین عمل در طبقه‌های بعدی تکرار می‌شود.

۲۸۰۴ (۴)

۱۴۰۵ (۳)

۲۶۰۵ (۲)

۲۶۰۰ (۱)



۱۰۷۰۲۳۲ (۴)

۲۳۱۰۷۲ (۳)

۱۳۲۷/۲۰ (۲)

۱۳۲۷۲۰ (۱)



مثال ۱۵: اگر $A = (742/25)_8$ و $B = (364/73)_8$ آنگاه $A+B$ کدام گزینه است؟

پاسخ: گزینه «۲» روش انجام عمل جمع دقیقاً همانند مثال ۱۴ است. توجه نمایید که وجود یا عدم وجود ممیز هیچ تأثیری در روش عمل جمع ندارد.



مثال ۱۶: اگر $A = (1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ)_2$ و $B = (1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 \circ)_2$ آنگاه $9 \circ 55 / 1$ کدام گزینه است؟

$$110001/10(4)$$

$$110101/01(3)$$

$$100110/01(2)$$

$$111001/01(1)$$

$$\begin{array}{cccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & / & 1 & 0 \\ \circ & \circ & 1 & 1 & 0 & 1 & / & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & / & 0 & 1 \end{array}$$

پاسخ: گزینه «۱» روش انجام عمل جمع دقیقاً همانند مثال ۱۷ است. توجه نمایید که وجود یا عدم وجود ممیز هیچ تأثیری در روش عمل جمع ندارد.

مثال ۱۷: در این مثال در اولین عدد یعنی $(1 \circ 1 \circ)_2$ چون مبنای $r = 2$ است اولین رقم غیر صفر از سمت راست از ۲ و بقیه ارقام بعدی از یک کم می‌شود. در دومین عدد یعنی $(5 \circ 1 \circ)_8$ چون مبنای $r = 8$ است، اولین رقم غیر صفر از سمت راست از ۸ و بقیه ارقام بعدی از هفت کم می‌شود. در سومین عدد یعنی $(BE \circ)_\text{Hex}$ چون مبنای $r = 16$ است، اولین رقم غیر صفر از سمت راست از ۱۶ و بقیه ارقام بعدی از ۱۵ کم می‌شوند. پس در یک جمله می‌توان گفت برای گرفتن مکمل r باید اولین رقم غیر صفر از سمت راست از r و بقیه ارقام از $r - 1$ کم شود. یادآوری می‌نماییم که اگر در سمت راست عدد صفر

وجود داشته باشد، این صفرها بدون تغییر باید نوشته شوند.

$$A = (1 \circ 1 \circ)_2, \quad r = 2 \Rightarrow A^{r'scom} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0 \circ 1 \circ)_2$$

$$A = (5 \circ 1 \circ)_8, \quad r = 8 \Rightarrow A^{r'scom} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -8 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (2 \circ 7 \circ)_8$$

$$A = (BE \circ)_\text{Hex}, \quad r = 16 \Rightarrow A^{r'scom} = \begin{pmatrix} -15 & -15 & -16 \\ B & E & 2 \end{pmatrix} = (4 \circ 1 \circ)_\text{Hex}$$

(ب) مکمل $(r - 1)$: برای اینکه از یک عدد مانند A در مبنای r ، مکمل $r - 1$ بگیریم $(A^{(r-1)'scom})$ باید تک‌تک ارقام را از $r - 1$ کم کنیم.

$$A = (1 \circ 1 \circ)_2, \quad r = 2 \Rightarrow A^{r'scom} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0 \circ 1 \circ \circ)_2$$

مثال ۱۸:

$$A = (5 \circ 1 \circ)_8, \quad r = 8 \Rightarrow A^{r'scom} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (2 \circ 6 \circ)_8$$

$$A = (BE \circ)_\text{Hex}, \quad r = 16 \Rightarrow A^{r'scom} = \begin{pmatrix} -15 & -15 & -15 \\ B & E & 2 \end{pmatrix} = (4 \circ 1 \circ)_\text{Hex}$$

در این مثال در اولین عدد یعنی $(1 \circ 1 \circ)_2$ چون مبنای $r = 2$ است باید تک‌تک ارقام بصورت جداگانه از یک کم شوند. در دومین عدد یعنی $(5 \circ 1 \circ)_8$ چون مبنای $r = 8$ است باید تک‌تک ارقام بصورت جداگانه از هفت کم شوند. در سومین عدد یعنی $(BE \circ)_\text{Hex}$ چون مبنای $r = 16$ است باید تک‌تک ارقام بصورت جداگانه از پانزده کم شوند. پس در یک جمله می‌توان گفت برای گرفتن مکمل $(r - 1)$ باید تک‌تک ارقام را از $r - 1$ کم کرد.

مثال ۱۹: اگر $(2 \circ)_8 = (1 \circ 1 \circ \circ)_2$ آنگاه $2 \circ - 2 \circ$ به روش مکمل ۱ و مکمل ۲ بصورت زیر خواهد شد.

$$-2 \circ = (0 \circ 1 \circ 1 \circ)_2^{1'scom} \quad (-2 \circ)_8 \xrightarrow{1'Scom} (0 \circ 1 \circ 1 \circ)_2$$

به روش مکمل ۱:

$$-2 \circ = (0 \circ 1 \circ 1 \circ)_2^{2'scom} \quad (-2 \circ)_8 \xrightarrow{2'Scom} (0 \circ 1 \circ 0 \circ)_2$$

به روش مکمل ۲:

مثال ۲۰: اگر اعداد ۵ بیتی فرض شوند حاصل $(6)_8 + (8)_8 + (6)_8 + (13)_8$ را بدست می‌آوریم:

پاسخ: توجه نمایید که چون هر دو عدد مثبت هستند بیت علامت هر دو عدد ۰ است. بنابراین:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 01000 \\ + (8)_8 & = & + (1000)_2 & = & (01000)_{2cns} & \Rightarrow & + \\ + (6)_8 & = & + (0110)_2 & = & (00110)_{2ns} & & 00110 \\ & & & & & & 01110 \end{array}$$

$$(01110)_{2cns} = + (1110)_2 = + (14)_8$$

چون بیت علامت حاصل صفر است حاصل جمع درست است یعنی:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 00110 \\ + (6)_8 & = & + (0110)_2 & = & (00110)_{2cns} & \Rightarrow & + \\ + (13)_8 & = & + (1101)_2 & = & (01101)_{2ns} & & 01101 \\ & & & & & & 10011 \end{array}$$

و اما در مورد دوم:

$$(10011)_{2cns} = - (1101)_2 = - (13)_8$$

نتیجه حاصل به این صورت تعبیر می‌شود:

یعنی جمع دو عدد مثبت برابر با عددی منفی شده است، که این مسئله معنی ندارد. دلیل این مسئله وقوع سرریز است یعنی حاصل درست برابر ۱۹ خواهد شد ولی چنین عددی با یک محدوده ۵ بیتی قابل نمایش نیست، یادآوری کنیم که بزرگترین عدد مثبت قابل نمایش با ۵ بیت ۱۵ یا ۰۱۱۱۱ است.

مثال ۲۱: اگر اعداد ۵ بیتی باشند حاصل $(5)_{10} - (12)_{10}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 10100 \\ -(12)_{10} = -(1100)_2 = (10100)_{2\text{CNS}} \Rightarrow + \\ -(5)_{10} = -(0101)_2 = (11011)_{2\text{CNS}} \\ \hline 101111 \end{array}$$

رقم نقلی ←

پاسخ: ☒

با دور انداختن رقم نقلی نتیجه‌ای نادرست بدست می‌آید یعنی:

$$(01111)_{2\text{CNS}} = +(1111)_2 = +(15)_{10}$$

دلیل این اتفاق این است که سرریز رخ داده است و حاصل تفریق یعنی $-12 - 5 = -17$ با ۵ بیت قابل نمایش نیست، چون کمترین مقدار منفی که می‌توان با ۵ بیت نمایش داد -16 می‌باشد. در واقع حاصل X بصورت $-2^{n-1} < X$ شده است.

مثال ۲۲: اگر $A = (10100)_2$ و $B = (101)_2$ باشد، آنگاه $(A - B)_2$ کدام گزینه است؟

$11001 (4)$ $10010 (3)$ $1111 (2)$ $101110 (1)$

پاسخ: گزینه «۲» ☒

$$\begin{array}{r} 10100 \Rightarrow B^{1's\text{com}} = 11010 \Rightarrow + \\ B = 00101 \Rightarrow B^{1's\text{com}} = 11010 \\ \hline 10100 \\ + 11010 \\ \hline 101110 \end{array}$$

بیت نقلی خروجی = آخرین نقلی تولید شده

چون $C = 1$ است، آن را نادیده گرفته و جواب بدست آمده را با یک جمع می‌کنیم.

مثال ۲۳: اگر $A = (1010100)_2$ و $B = (1000011)_2$ باشد، حاصل $(A - B)_2$ کدام است؟

$101010 (4)$ $1101101 (3)$ $10001 (2)$ $10010001 (1)$

پاسخ: گزینه «۲» ☒

$$\begin{array}{r} 1010100 \Rightarrow B^{2's\text{com}} = 0111101 \Rightarrow + \\ B = 1000011 \Rightarrow B^{2's\text{com}} = 0111101 \\ \hline 1010100 \\ + 0111101 \\ \hline 10100101 \end{array}$$

بیت نقلی خروجی = آخرین نقلی تولید شده

چون $C = 1$ است، آن را نادیده گرفته و حاصل مثبت است.

مثال ۲۴: اگر داشته باشیم عدد $A = (101101/101)_2$ باشد و بخواهیم این عدد را بصورت نرمال شده با نمای ۵ بیتی ($e = 5$) بنویسیم در این صورت

باید نما را بصورت ۱۶ افزا بنویسیم و داریم:

$$A = (101101/101)_2 = (0/101101101) \times 2^6 \Rightarrow E = 6 + 16 = 10110$$

پاسخ: ☒

$$A = 0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{علامت مانتیس} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{نما} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{مانتیس} \end{array}$$

مثال ۲۵:

$$\begin{array}{l} (4/375)_{10} \longrightarrow (?)_2 \\ \downarrow \\ (100/011)_2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 0/375 \times 2 = 0/75 \\ 0/75 \times 2 = 1/5 \\ 0/5 \times 2 = 1/0 \end{array} \right\} \Rightarrow (011)_2$$

مثال ۲۶:

$$\begin{array}{l} (0/513)_{10} = (?)_8 \\ \text{تا ۴ رقم اعشار} \\ (0/4065)_8 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 0/513 \times 8 = 4/104 \\ 0/104 \times 8 = 0/832 \\ 0/832 \times 8 = 6/656 \\ 0/656 \times 8 = 5/248 \end{array} \right\} \Rightarrow (4065)_8$$



مثال ۲۷: معادل عدد ۳۵۷ در کد BCD با وزن ۱-۲-۸۴ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{array}{r|rrrr} & ۸ & ۴ & -۲ & -۱ \\ \hline ۳ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۷ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array} \Rightarrow (۳۵۷)_{۱۰} = (۰۱۰۱۱۰۱۱۰۰۱)_{۸۴-۲-۱}$$

در این مثال چون عدد داده شده ۳ رقمی است باید ابتدا تک‌تک ارقام را به BCD با وزن ۱-۲-۸۴ تبدیل نماییم و سپس حاصل این تبدیل‌ها را کنار هم بگذاریم.

مثال ۲۸: در جمع ۵ و ۷ چون حاصل از ۹ بزرگتر می‌شود باید حاصل با $(۶)_{۱۰} = (۰۱۱۰)_۲$ جمع شده تا حاصل نهایی بصورت NBCD معتبر باشد.

$$\begin{array}{r|rrrr} ۵ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ +۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \hline ۹ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} ۷ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ +۵ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ \hline ۱۲ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{array}$$

در این مثال ۵ و ۷ بصورت باینری با یکدیگر جمع می‌شوند و حاصل ۱۲ یا $(۱۱۰۰)_۲$ بدست می‌آید. در مرحله بعد چون این مقدار از ۹ بزرگتر شده است با عدد $(۰۱۱۰)_۲$ جمع می‌شود.

مثال ۲۹: معادل عدد $(۷۸۴)_{۱۰}$ در کد Excess-3 بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{array}{ccc} ۷ & ۸ & ۴ \\ \downarrow +۳ & \downarrow +۳ & \downarrow +۳ \\ ۱۰ & ۱۱ & ۷ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$(۱۰۱۰ \ ۱۰۱۱ \ ۰۱۱۱)_{\text{Excess-3}}$$

ابتدا به تک‌تک ارقام ۳ واحد اضافه می‌کنیم، پس ۷ به ۱۰، ۸ به ۱۱ و ۴ به ۷ تبدیل می‌شود. در مرحله بعد هر رقم بدست آمده را بصورت جداگانه در مبنای دو به صورت ۴ بیت با وزن (۸۴۲۱) می‌نویسیم. در نهایت تبدیلات بدست آمده را کنار هم می‌گذاریم.

مثال ۳۰: عدد باینری $B = ۱۰۱۱۰۱۰$ را به گری تبدیل کنید.

پاسخ: بیت سمت چپ عیناً منتقل شده و بیت‌های کنار هم با یکدیگر XOR می‌شوند. بنابراین داریم:

$$B = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ G = 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow G = ۱۱۱۰۱۱۱$$

برای به دست آوردن باینری یک عدد از عدد گری، سمت چپ ترین بیت را عیناً نوشته سپس آن را با بیت بعدی XOR کرده حاصل XOR، بیت جدید می‌شود و همین عمل را تکرار می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccccc} \text{Gray} & G_5 & G_4 & G_3 & G_2 & G_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Binary} & B_5 & B_4 & B_3 & B_2 & B_1 \end{array}$$

بنابراین اگر عدد گری اولیه را برابر $G = (g_n g_{n-1} \dots g_2 g_1)$ و عدد باینری حاصل را برابر $B = (b_n b_{n-1} \dots b_1)$ فرض کنیم روابط روبرو برای تبدیل گری به باینری وجود دارد:

$$B: \begin{cases} b_n = g_n \\ b_k = \text{XOR}(g_i) = \sum_{i=k}^n g_i \bmod 2 \end{cases}$$

مثال ۳۱: عدد گری $G = ۱۱۱۰۱۱۱$ را به باینری تبدیل کنید.

پاسخ: سمت چپ‌ترین بیت عیناً منتقل شده و سپس هر بیت باینری را با بیت بعدی گری XOR کرده تا بیت بعدی باینری حاصل شود.

بنابراین داریم:

$$G = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B = 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow B = ۱۰۱۱۰۱۰$$



آزمون فصل اول

۱- اگر $X = (417)_{oct}$ آنگاه معادل X در مبنای Hex کدام گزینه است؟

- (۱) ۸۷۱ (۲) $10F$ (۳) $F01$ (۴) ۱۷۸

۲- حاصل عبارت $(?)_{16} = (24)_8 + (37)_{16}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $4B$ (۲) $8B$ (۳) $D7$ (۴) $C5$

۳- معادل باینری کد گری 101101 کدام گزینه است؟

- (۱) 101010 (۲) 111011 (۳) 110110 (۴) 111111

۴- معادل گری برای عدد باینری 1000101 کدام گزینه است؟

- (۱) 1011010 (۲) 1101101 (۳) 1111001 (۴) 1100111

۵- اگر $A = (101)_2$ و $B = (10101)_2$ آنگاه معادل مبنای ده $B-A$ کدام گزینه است؟

- (۱) ۱۶ (۲) -۱۶ (۳) ۱۵ (۴) -۱۵

۶- معادل عدد سه رقمی ۸۵ در BCD با وزن ۱-۲-۸۴ کدام گزینه است.

- (۱) 10001011 (۲) 10000101 (۳) 01011000 (۴) 10111000

۷- اگر کد مازاد سه بصورت 11001001 باشد آنگاه معادل BCD آن کدام گزینه است؟

- (۱) 10001110 (۲) 10101101 (۳) 10010110 (۴) 11111100

۸- اگر $X = (0/375)_{10}$ آنگاه معادل مبنای ۲ عدد X کدام است؟

- (۱) $(0/011)_2$ (۲) $(0/10111011)_2$ (۳) $(11010/10)_2$ (۴) $(0/10110)_2$

۹- کدام یک از کدهای زیر بدون وزن است؟

- (۱) Gray (۲) Exsecc-3 (۳) BCD (۴) ۱ و ۲

۱۰- معادل مبنای ۱۰ عدد $(37)_8$ کدام گزینه است؟

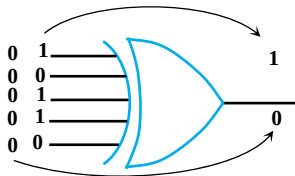
- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۳



فصل دوم

«مدارهای منطقی»

تست‌های تألیفی فصل دوم



🔗 مثال ۱: گیت XOR مقابل با توجه به تعداد ۱‌ها خروجی را تولید می‌کند.

✓ پاسخ: همانگونه که مشاهده می‌شود هر گاه تعداد ۱ ورودی فرد باشد خروجی برابر یک و هرگاه تعداد یک ورودی زوج باشد خروجی برابر صفر است.

🔗 مثال ۲: اگر $xy = 0$ حاصل عبارت $x \oplus y$ کدام گزینه است؟

(۴) $\bar{x} + \bar{y}$

(۳) $\bar{x}\bar{y}$

(۲) $x + y$

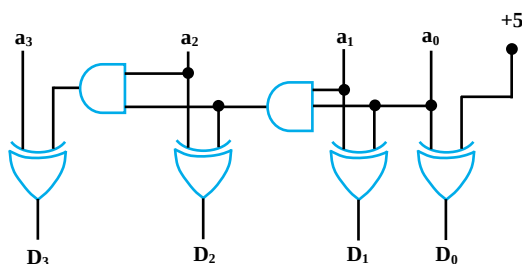
(۱) xy

✓ پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن جواب از طرفین رابطه فرض NOT می‌گیریم. داریم: $xy = 0$ پس $\bar{xy} = \bar{0} = 1$ یعنی $\bar{x} + \bar{y} = 1$ خواهد شد. حال اگر رابطه XOR را بنویسیم داریم: $x \oplus y = (x + y)(\bar{x} + \bar{y})$ که در این رابطه پرانتز دوم برابر یک خواهد شد که در ضرب (AND) بی‌تأثیر است. پس $x \oplus y = x + y$ خواهد شد. خلاصه این عملیات در مقابل آمده است.

$$xy = 0 \Rightarrow \bar{xy} = \bar{x} + \bar{y} = 1$$

$$x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = (\bar{x} + \bar{y})(x + y) = x + y$$

🔗 مثال ۳: اگر ورودی مدار زیر به صورت $A = a_3a_2a_1a_0$ باشد، خروجی کدام گزینه است؟



(۱) $A + 1$

(۲) $A - 1$

(۳) $\frac{A}{2}$

(۴) $2A$

✓ پاسخ: گزینه «۱» با جایگذاری یک مقدار دلخواه برای A مثلاً $A = 1010$ مقدار خروجی به صورت 1011 به دست می‌آید که برابر $A + 1$ است. گزینه ۲ نادرست است زیرا مقدار $A - 1$ برابر 1001 خواهد شد. گزینه ۳ نادرست است زیرا مقدار $\frac{A}{2}$ برابر 0101 خواهد شد. گزینه ۴ نادرست است زیرا مقدار $2A$ برابر 10100 یا 20 خواهد شد.

🔗 مثال ۴: در روبه‌رو مثال‌هایی از توابع منطقی آورده شده است.

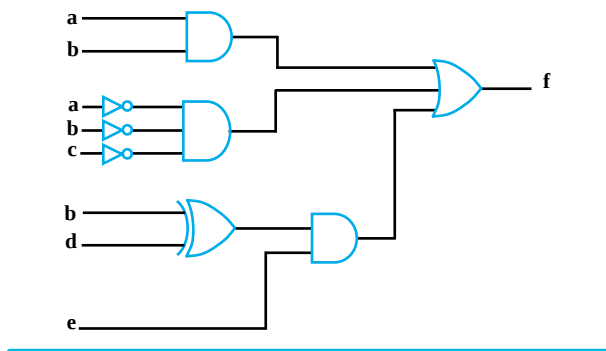
$$f(a, b, c) = ab + (b \oplus c)$$

$$f(a, b, c, d) = ab + a\bar{b}\bar{c} + (b \oplus d)$$

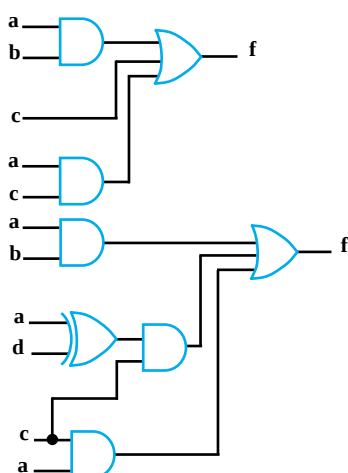
$$f(a,b,c,d,e) = ab + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + (b \oplus d)e$$

مثال ۵: مدار معادل تابع مقابل را رسم نمایید.

پاسخ: در رابطه $ab + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + (b \oplus d)e$ ، اگر رابطه را از چپ به راست بررسی نماییم، باید ابتدا مقدار دو متغیر a و b با هم AND شود که این کار توسط گیت AND قرار داده شده انجام می‌شود. در جمله بعدی یعنی $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ باید ابتدا تک‌تک متغیرهای a و b و c متمم یا NOT شود که بوسیله قرار دادن سه عدد گیت NOT این کار را انجام می‌دهیم. جمله سوم از دو قسمت تشکیل شده است. ابتدا باید مقدار b با d XOR شود. با قراردادن یک گیت XOR و اتصال متغیرهای b و d به ورودی آن مقدار $b \oplus d$ را بدست می‌آوریم. سپس باید این مقدار با e ضرب یا AND شود که گیت AND قرار داده شده در شکل این کار را انجام می‌دهد. در نهایت باید مقدار ۳ جمله بدست آمده را با هم OR نماییم. گیت OR قرار داده شده در طبقه خروجی مدار وظیفه انجام این کار را بر عهده دارد.



مثال ۶: کدام مدار معادل تابع $f(a,b,c,d) = ab + c(a \oplus d) + ac$ می‌باشد؟



(۲)

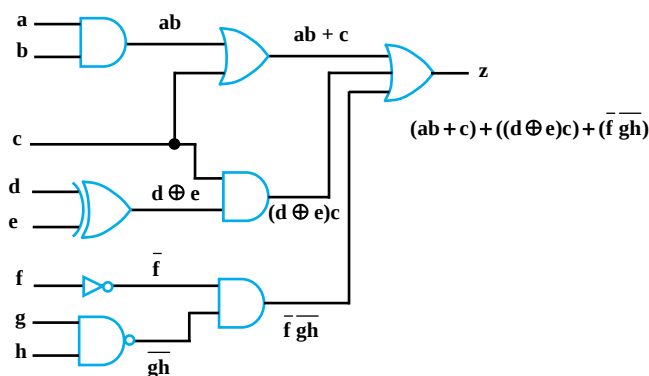
(۱)

(۴)

(۳)

پاسخ: گزینه «۴» در رابطه $ab + c(a \oplus d) + ac$ ، باید مقدار a و b با هم AND شوند که این کار با قرار دادن یک گیت AND و اتصال ورودیهای آن به a و b انجام می‌شود. در جمله دوم باید ابتدا مقدار متغیرهای a و d با هم XOR شود و حاصل این عمل با متغیر c AND شود. پس باید یک گیت XOR بین a و d گذاشت و یک گیت AND را به C و حاصل گیت XOR قبلی متصل نمود. در نهایت باید مقدار متغیرهای a و c با هم AND شوند که با قراردادن یک گیت AND و اتصال a و c به ورودیهای آن این عمل انجام می‌شود. در پایان حاصل سه جمله قبلی باید با هم OR شود. مراحل گفته شده منطبق با گزینه ۴ است.

مثال ۷: در شکل زیر تابع z را بدست آورید.



پاسخ: با توجه به روال گفته شده اگر از سمت چپ (ورودی)

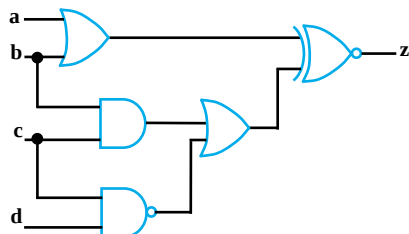
شروع کنیم در ابتدا یک گیت AND با ورودیهای a و b می‌بینیم که خروجی آن ab خواهد شد. سپس یک گیت XOR با ورودیهای d و e وجود دارد که خروجی آن $d \oplus e$ خواهد شد. بعد از آن گیت NOT با ورودی f قرار دارد که خروجی آن $\bar{f}$ خواهد شد. در پایان گیت NAND با ورودیهای g و h وجود دارد که خروجی آن $\bar{g}\bar{h}$ خواهد شد. در طبقه دوم مدار گیت OR مقدار ab را با c ، می‌کند که حاصل $ab+c$ را تولید می‌کند. همچنین گیت AND مقدار C را با $d \oplus e$ AND کرده و حاصل $c(d \oplus e)$ را تولید می‌کند.



گیت AND دیگری مقدار $\bar{f}$ را با $\bar{gh}$ AND کرده و مقدار $\bar{f}gh$ را تولید می‌کند. در نهایت در طبقه خروجی مدار گیت OR وجود دارد که با OR کردن خروجی‌های گیت‌های قبلی مقدار $(ab+c) + ((d \oplus e)c) + \bar{f}gh$ را تولید می‌کند.

$$f = (ab + c) + ((d \oplus e)c) + (\bar{f} \cdot gh)$$

مثال ۸: در شکل مقابل تابع z معادل کدام گزینه است؟

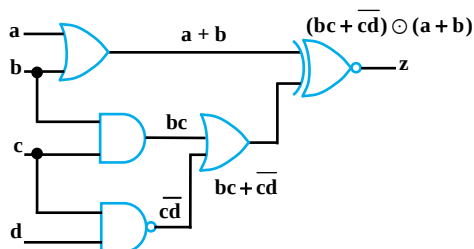


$$(b+c)(\bar{c}+d) \oplus (a+b) \quad (۱)$$

$$(bc + \bar{cd}) \odot (a+b) \quad (۲)$$

$$\overline{(bc + \bar{cd})} \oplus (a+b) \quad (۳)$$

(۴) گزینه ۲ و ۳



پاسخ: گزینه «۴» از سمت ورودی به خروجی حرکت کرده و به ترتیب خروجی گیت‌ها را نوشته و این کار را تا رسیدن به z تکرار می‌نماییم.

مثال ۹: ساده شده تابع $f(A,B,C,D) = \bar{A}B(\bar{D} + \bar{C}D) + B(A + \bar{A}CD)$ کدام گزینه است؟

$$\bar{A}B(\bar{C} + \bar{D}) + B(A + CD) \quad (۲)$$

B (۱)

$$B(A + \bar{C}D + CD) \quad (۴)$$

$$AB + \bar{A}BC \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طبق اتحاد $a + \bar{a}b = a + b$ اگر $\bar{D}$ را معادل a و D را معادل $\bar{a}$ فرض کنیم، پرانتز $\bar{D} + \bar{C}D$ به $\bar{D} + \bar{C}$ تبدیل می‌شود. به طریق مشابه در پرانتز دوم طبق اتحاد $a + \bar{a}b = a + b$ اگر A را معادل a و $\bar{A}$ را معادل $\bar{a}$ و CD را معادل b فرض کنیم، پرانتز دوم به $A + \bar{A}b$ (یعنی $a + b$) تبدیل خواهد شد. سپس از B که متغیر مشترک در دو جمله است فاکتور می‌گیریم تا پرانتز $(A + \bar{C} + \bar{D} + CD)$ بدست آید. در این پرانتز نیز $\bar{D} + CD$ به $\bar{D} + C$ تبدیل می‌شود. پس داخل پرانتز داریم $(A + \bar{C} + \bar{D} + C)$ که $\bar{C} + C$ برابر یک است و $A + \bar{D} + 1 = 1$ خواهد شد. بنابراین مقدار نهایی برابر $B \cdot 1 = B$ خواهد شد.

$$\bar{A}B(\bar{D} + \bar{C}D) + B(A + \bar{A}CD) = \bar{A}B(\bar{C} + \bar{D}) + B(A + CD) = B(\bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{D} + A + CD)$$

طبق اتحاد $a + \bar{a}b = a + b$ طبق اتحاد $a + \bar{a}b = a + b$

$$= B(A + \bar{C} + \bar{D} + CD) = B(A + \underbrace{\bar{C} + \bar{D} + C}_1) = B(1) = B$$

مثال ۱۰: ساده شده تابع $f(A,B,C,D) = (\bar{A} + C)(\bar{A} + \bar{C})(A + B + \bar{C}D)$ کدام گزینه است؟

$$AB + AC + BC \quad (۲)$$

$$\bar{A}(A + B + \bar{C}D) \quad (۱)$$

$$\bar{A}B + \bar{D} \quad (۴)$$

$$\bar{A}(B + \bar{C}D) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دو پرانتز $(\bar{A} + C)(\bar{A} + \bar{C})$ طبق رابطه توزیع OR روی AND به صورت $(\bar{A} + C\bar{C})$ تبدیل می‌شوند. حاصل $C\bar{C}$ برابر صفر خواهد شد. پس مقدار $\bar{A}$ در پرانتز دوم ضرب می‌شود. مقدار $\bar{A}\bar{A}$ برابر صفر می‌شود و جواب نهایی برابر $\bar{A}(B + \bar{C}D)$ خواهد شد.

$$(\bar{A} + C)(\bar{A} + \bar{C})(A + B + \bar{C}D) = (\bar{A} + \underbrace{C\bar{C}}_0)(A + B + \bar{C}D) = \bar{A}(A + B + \bar{C}D) = \underbrace{\bar{A}A}_0 + \bar{A}(B + \bar{C}D) = \bar{A}(B + \bar{C}D)$$

 مثال ۱۱: متمم عبارت $(a+b)(c+d)$ را بدست آورید.

✓ پاسخ: در مرحله اول عملگر NOT روی دو پرانتز عمل می‌کند یعنی $\overline{(a+b)(c+d)}$ را به $\overline{(a+b)} + \overline{(c+d)}$ تبدیل می‌کند. توجه نمایید که عملگر بین دو پرانتز از AND به OR تغییر می‌کند. در مرحله دوم عملگر NOT روی درون هر پرانتز عمل می‌کند. که در نتیجه آن تک تک متغیرها NOT شده و عملگر بین متغیرها از OR به AND تبدیل می‌شود. بنابراین حاصل نهایی به صورت $\overline{a}\overline{b} + \overline{c}\overline{d}$ خواهد شد.

$$\begin{array}{c} \overline{(a+b)(c+d)} \\ \downarrow B \\ \overline{(a+b)} + \overline{(c+d)} \\ \downarrow A \quad \downarrow A \\ \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} \end{array}$$

 مثال ۱۲: ساده شده توابع زیر را بدست آورید.

طبق اتحاد $a + ab$ دو جمله $x + xyz$ به x تبدیل می‌شوند. سپس با همین اتحاد $x + wx$ و $\overline{w}x$ نیز به x تبدیل می‌شوند. بر اساس همین اتحاد $\overline{x}y + \overline{x}yz$ به $\overline{x}y$ تبدیل می‌شوند. در نهایت دو جمله $x + \overline{x}y$ باقی می‌ماند که طبق اتحاد $a + b = a + \overline{a}b$ به $x + y$ تبدیل می‌شوند.

الف) $f(w, x, y, z) = \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \frac{y}{b} z + \frac{a}{x} y + \frac{w}{b} \frac{x}{a} + \frac{w}{b} \frac{x}{a} + \frac{a}{x} y z$

$a + ab = a$

$a + ab = a$

$\frac{x}{a} + \frac{x}{a} y = \frac{x}{a} (1 + y) = \frac{x}{a} (x + y)$

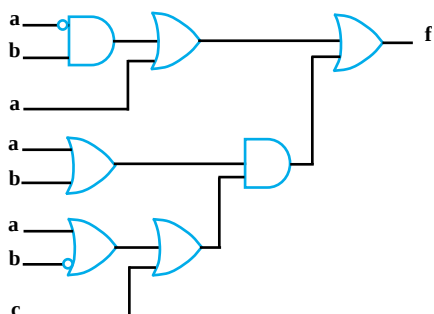
$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(A, B, C, D, E) &= (AB + C + D)(\overline{C} + \overline{D})(\overline{C} + \overline{D} + \overline{E}) \\ &\quad \begin{array}{c} \underbrace{\overline{C} + \overline{D}}_a \quad \underbrace{\overline{C} + \overline{D} + \overline{E}}_b \\ \searrow \quad \swarrow \\ a(a+b) = a \end{array} \\ &= (\underbrace{AB + C + D}_c)(\underbrace{\overline{C} + \overline{D}}_a) \\ &\quad \begin{array}{c} \underbrace{c}_c \quad \underbrace{\overline{C} + \overline{D}}_a \\ \searrow \quad \swarrow \\ (a+b)(a+\overline{b}+c) = (a+b)(a+c) \end{array} \\ &= (\underbrace{D + \overline{C}}_a)(\underbrace{D + \overline{AB}}_c) = D + ABC\overline{C} \\ &\quad \begin{array}{c} \underbrace{D + \overline{C}}_a \quad \underbrace{D + \overline{AB}}_c \\ \searrow \quad \swarrow \\ (a+b)(a+c) = a+bc \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{c)} \quad y\bar{z}(\underbrace{\bar{z} + \bar{z}}_a \underbrace{x}_b) + (\bar{x} + \bar{z})(\bar{x}y + \bar{x}z) \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad a + ab = a \\
 \quad \quad \quad y\bar{z}.\bar{z} + (\underbrace{\bar{x}}_a + \underbrace{\bar{z}}_b) \underbrace{\bar{x}}_a (y + z) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a(a + b) = a \\
 \quad \quad \quad y\bar{z} + \bar{x}(y + z) = y\bar{z} + \bar{x}y + \bar{x}z
 \end{array}$$

ابتدا در پرازنز دوم و سوم اگر $\bar{C} + D$ را برابر a و E را برابر b بگیریم طبق اتحاد $a(a + b) = a$ حاصل این دو پرازنز برابر $\bar{C} + D$ خواهد شد. در مرحله دوم طبق اتحاد $(a + b)(a + \bar{b} + c) = (a + b)(a + c)$ به دو جمله‌ای $(D + \bar{C})(D + AB)$ می‌رسیم. در نهایت طبق رابطه توزیع OR روی AND ، $(a + bc = (a + b)(a + c))$ ، اگر D را معادل a ، $\bar{c}$ را معادل b و AB را معادل C بگیریم جواب نهایی برابر $D + ABC\bar{C}$ خواهد شد.

ابتدا طبق اتحاد $a + ab = a$ پرانتز $\bar{z} + \bar{z}x$ به $\bar{z}$ تبدیل می‌شود. اگر $\bar{z}$ در $y\bar{z}$ ضرب شود مقدار $y\bar{z}\bar{z}$ بدست می‌آید که برابر $y\bar{z}$ است. از $\bar{x}$ پرانتز سوم فاکتورگیری انجام می‌شود که $\bar{x}$ به همراه پرانتز دوم یعنی $(\bar{x} + \bar{z})\bar{x}$ به $\bar{x}$ تبدیل خواهد شد (طبق اتحاد $a(a + b) = a$). در نهایت به دو جمله‌ای $y\bar{z} + \bar{x}(y + z)$ می‌رسیم که با ضرب $\bar{x}$ در پرانتز به جواب نهایی می‌رسیم.

 مثال ۱۳: ساده شده مدار مقابل کدام گزیننه است؟



- $$\begin{array}{l} a + c \text{ (1)} \\ b + c \text{ (2)} \\ a + b \text{ (3)} \\ ab \text{ (4)} \end{array}$$



✓ پاسخ: گزینه «۳» ابتدا تابع خروجی مدار را بدست می‌آوریم. در مرحله اول عبارت $a + \bar{a}b$ به مقدار $a + b$ تبدیل می‌شود. همچنین $(a + b)(a + \bar{b} + c) = (a + b)(a + c)$ خواهد شد. بنابراین به دو جمله‌ای $(a + b) + (a + b)(a + c)$ می‌رسیم. طبق اتحاد $x + xy = x$ اگر $(a + b)$ را معادل x و $(a + c)$ را معادل y بگیریم جواب نهایی برابر x یا $(a + b)$ خواهد شد.

$$f = \underbrace{\bar{a}b + a}_{a + b} + \underbrace{(a + b)(a + \bar{b} + c)}_{(a + b)(a + c)} = \underbrace{(a + b) + (a + b)(a + c)}_{a + b} = a + b$$

طبق اتحاد: $x + xy = x$

✓ مثال ۱۴: ساده شده عبارت $x\bar{y} + x(\bar{x} + z) + xy + x\bar{y}z + (x\bar{y} + z)(z + \bar{x} + y + \bar{x}\bar{z})$ کدام گزینه است؟

(۴) $y + z$

(۳) $x + z$

(۲) $\bar{x} + \bar{y}$

(۱) $x + y$

✓ پاسخ: گزینه «۳» طبق اتحاد $a(\bar{a} + b) = ab$ اگر $x = a$ و $\bar{x} = \bar{a}$ و $z = b$ فرض شود، پرانتز $x(\bar{x} + z)$ برابر xz خواهد شد. دو جمله بعدی یعنی $xy + x\bar{y}z$ طبق اتحاد $ab + \bar{a}bc = ab + ac$ اگر $x = a$ ، $y = b$ و $z = c$ فرض شود برابر $xy + xz$ خواهند شد. در دو جمله بعدی اگر $\bar{x}\bar{z} = c$ و $x\bar{y} = b$ ، $z = a$ فرض شود طبق اتحاد $(a + b)(a + c) = (a + b)(a + \bar{b} + c)$ به مقدار $(z + x\bar{y})(z + \bar{x}\bar{z})$ می‌رسیم. این دو پرانتز طبق اتحاد $(a + b)(a + c) = a + bc$ برابر $z + x\bar{y}\bar{x}\bar{z}$ می‌شود که $x\bar{y}\bar{x}\bar{z}$ برابر صفر خواهد شد. همچنین $xz + z$ برابر z خواهد شد. در نهایت به مقدار $x\bar{y} + xy + z$ می‌رسیم که با فاکتورگیری از y جواب بدست می‌آید.

$$\underbrace{\bar{x}\bar{y}}_{xz} + \underbrace{x(\bar{x} + z)}_{xy + xz} + \underbrace{(z + x\bar{y})(z + \bar{x}\bar{z})}_{(z + x\bar{y})(z + \bar{x}\bar{z})} = \bar{x}\bar{y} + xz + xy + xz + z = x\bar{y} + xy + z = x(\bar{y} + y) + z = x + z$$

✓ مثال ۱۵: ساده شده تابع $f(A, B, C) = \overline{ABC} + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{AC} + \overline{ABC}$ کدام گزینه است؟

(۴) ABC

(۳) $\bar{A} + ABC$

(۲) $A + \overline{ABC}$

(۱) $\bar{A}$

✓ پاسخ: گزینه «۱» ابتدا دو جمله $\overline{ABC} + \overline{ABC}$ به مقدار $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ تبدیل می‌شود (طبق اتحاد). همچنین دو جمله $\overline{AB} + \overline{AC}$ به مقدار $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ تبدیل می‌شود. در مرحله سوم با اعمال قانون دمرگان $\overline{ABC}$ به $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ تبدیل خواهد شد. در مرحله چهارم $\bar{C} + \bar{A}$ طبق اتحاد $a + \bar{a}b = a + b$ به $\bar{C} + A$ تبدیل می‌شود. حال چون در زیر NOT اصلی عبارت $A + \bar{A}$ وجود آمده است که برابر ۱ خواهد شد و OR شدن ۱ با سایر مقادیر نیز برابر یک خواهد شد، بنابراین مقدار زیر NOT اصلی برابر یک می‌شود. در نهایت جواب برابر ۰ می‌شود.

$$f(A, B, C) = \overline{\overline{ABC} + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{AC} + \overline{ABC}} = \overline{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{C} + \bar{A}} = \overline{\overline{AB} + \overline{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{A}} = \overline{\overline{AB} + 1 + \bar{B} + \bar{C} + \bar{A}} = \overline{1} = 0$$

✓ مثال ۱۶: کدام عبارت برای ۴ متغیر a, b, c, d یک مین ترم محسوب می‌شود؟

(۴) abd

(۳) $(a + \bar{b} + c)$

(۲) $\bar{a}\bar{b}cd$

(۱) $(a + \bar{b} + c + \bar{d})$

✓ پاسخ: گزینه «۲» چون یک مین ترم باید شامل همه متغیرها و بصورت جمله ضربی باشد.

✓ مثال ۱۷: کدام عبارت برای ۴ متغیر a, b, c, d یک ماکسترم محسوب می‌شود؟

(۴) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

(۳) $(\bar{a} + \bar{b} + c + d)$

(۲) $abcd$

(۱) $(a + \bar{b} + \bar{c})$

✓ پاسخ: گزینه «۳» چون یک ماکسترم باید شامل همه متغیرها و بصورت جمله جمعی باشد.



مثال ۱۸: برای تابع $f(a, b, c) = ab + ac + bc$ جدول صحت زیر بدست می‌آید.

اگر مقدار موجود در هر سطر را به ترتیب به جای متغیرهای a و b و c بگذاریم، مقدار ستون f بدست می‌آید.

a	b	c	f
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

مثال ۱۹: توابع زیر به صورت SOP هستند.

توابع مقابل از چند جمله تشکیل شده‌اند که هر جمله بصورت AND چند حرف است. و در نهایت جمله‌ها با هم OR شده‌اند بنابراین به فرم SOP هستند.

$$f(a, b, c) = ab + ac + bc$$

$$f(a, b, c, d) = \bar{a}bc + abd + \bar{b}\bar{c}d$$

مثال ۲۰: اگر تابع f بصورت $f(a, b, c, d) = ab + ac + bc$ باشد، SOP متعارف آن بصورت زیر است.

تابع داده شده، همان مثال ۱۹ است. در جدول مثال ۱۹، تک تک ورودی‌ها در تابع قرار داده شده‌اند و خروجی تابع بدست آمده است. حاصل همانطور که مشاهده می‌شود، خروجی تابع در ردیف‌های شماره ۳، ۵، ۶ و ۷ برابر یک شده است که بر اساس همین ردیف‌ها مین ترم‌های تابع بدست می‌آیند. کافی است به جای یک خود متغیر و به جای صفر متمم متغیر گذاشته شود یعنی: $\bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + abc$ که معادل همان مین ترم‌های ۳، ۵، ۶، ۷ است.

$$f(a, b, c) = m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

$$f(a, b, c) = ab + \bar{a}c + bc$$

مثال ۲۱: تابع روبرو را به صورت SOP متعارف بنویسید.

☒ پاسخ: در جمله اول یعنی ab ، به جای a و b عدد یک می‌گذاریم. متغیر c غایب است که یکبار صفر و یک بار یک برای آن در نظر می‌گیریم، در نتیجه شماره‌های ۷ و ۳ بدست می‌آید. در جمله $\bar{a}c$ ، به جای $\bar{a}$ ، ۰ و به جای c یک می‌گذاریم. متغیر b که غایب است دو حالت ۰ و یک دارد. پس دو شماره ۳ و ۱ بدست می‌آید. به طریق مشابه از جمله سوم شماره‌های ۷ و ۳ بدست می‌آید. اجتماع آنها یعنی شماره‌های ۷ و ۵ و ۳ جواب این مثال است.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \Rightarrow 6, 7 \\ & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{a} & b & c \\ 0 & 0 & 1 \Rightarrow 1, 3 \\ & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \Rightarrow 3, 7 \\ & & 1 \end{array} \Rightarrow f(a, b, c) = \sum m(1, 3, 6, 7)$$

$$f(a, b, c) = (\bar{a} + b + \bar{c})(a + c)\bar{a}b + \bar{b}\bar{c} = \bar{a}bc + \bar{b}\bar{c}$$

مثال ۲۲: تابع روبرو را به صورت SOP متعارف بنویسید.

☒ پاسخ: ابتدا با ضرب پرانتزها در یکدیگر، تابع را به صورت SOP تبدیل می‌کنیم. سپس در جمله $\bar{a}bc$ به جای $\bar{a}$ ، ۰ و به جای b و c ۱، قرار می‌دهیم که عدد حاصل برابر ۱۱ یا سه است. در جمله $\bar{b}\bar{c}$ به جای b و c ، ۰ می‌گذاریم و a که غایب است دو حالت ۰ و ۱ دارد پس شماره‌های ۰ و ۴ بدست می‌آید. اجتماع این شماره‌ها یعنی ۳، ۴ و ۰ جواب این مثال است.

$$\begin{array}{ccc} \bar{a} & b & c \\ 0 & 1 & 1 \Rightarrow 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & 0 & 0 \Rightarrow 0, 4 \end{array} \Rightarrow f(a, b, c) = \sum m(0, 3, 4)$$

مثال ۲۳: اگر $f(a, b, c, d) = ac + bd$ باشد آنگاه کدام گزینه مین ترم‌های f را نشان می‌دهد؟

$$f = \sum m(4, 6, 10, 11, 12, 14, 15) \quad (2)$$

(۴) گزینه ۲ و ۱

$$f = \sum m(0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 13) \quad (1)$$

$$f = \sum m(4, 6, 10, 12, 13, 14, 15) \quad (3)$$



✓ پاسخ: گزینه «۲» روش حل این تست همانند مثال‌های قبل است. تنها نکته قابل توجه این است که هر گاه تعداد متغیرهای غایب دو عدد باشد تعداد ترکیبات آنها چهار ترکیب یعنی ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱ خواهد شد.

متغیرهای غایب					متغیرهای غایب				
a	b	c	d	شماره	a	b	c	d	شماره
۱	۰	۱	۰	۱۰	۰	۱	۰	۰	۴
۰	۰	۱	۱	۱۱	۰	۱	۱	۰	۶
۱	۰	۰	۱	۱۴	۱	۰	۰	۱	۱۲
۱	۱	۱	۱	۱۵	۱	۱	۱	۱	۱۴

ac جمله $\Rightarrow f(a,b,c,d) = \sum m(4,6,10,11,12,14,15)$

bd جمله

$$f(a,b,c) = (a+b)(\bar{a}+\bar{c})(b+c)$$

✓ مثال ۲۴: تابع روبه‌رو را به صورت POS متعارف بنویسید.

✓ پاسخ: در جمله $a+b$ به جای متغیر a و b صفر می‌گذاریم. متغیر c غایب است که دو حالت صفر و یک دارد. پس دو حالت ۰۰۱ و ۰۰۰ یعنی ماکستریم‌های ۰ و ۱ را تولید می‌کند. در جمله وسط به جای متغیرهای $\bar{a}$ و $\bar{c}$ یک می‌گذاریم. متغیر b که غایب است دو حالت ۱ و ۰ دارد. پس دو حالت ۱۰۱ و ۱۰۰ یعنی شماره‌های ۵ و ۷ تولید می‌شوند. به طریق مشابه از جمله سوم ترکیبات ۰۰۰ و ۱۰۰ یعنی شماره‌های ۰ و ۴ بدست می‌آید. پس در نهایت اجتماع این شماره‌ها یعنی ۰ و ۴ و ۵ و ۷ و ۱ و ۰ شماره‌های ماکستریمی این تابع هستند.

$$\begin{array}{ccc}
 a + b & \bar{a} + \bar{c} & b + c \\
 \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow 0,1 & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow 5,7 & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow 0,4
 \end{array}
 \Rightarrow f(a,b,c) = \Pi M(0,1,4,5,7)$$

✓ مثال ۲۵: اگر $f(a,b,c,d) = (\bar{a}+c+d)(\bar{b}+d)$ باشد آنگاه کدام گزینه ماکستریم‌های f را نشان می‌دهد؟

$$\begin{array}{ll}
 f = \Pi M(0,1,4,5,6,8,11) \quad (2) & f = \Pi M(4,6,8,12,14) \quad (1) \\
 f = \Pi M(0,1,2,3,4,6,8,12) \quad (4) & f = \Pi M(0,1,3,5,7,9,11) \quad (3)
 \end{array}$$

✓ پاسخ: گزینه «۱» روش حل این تست مشابه به روش حل مثال قبل می‌باشد. نکته قابل توجه در حل این تست این است که وقتی متغیرهای غایب دو عدد می‌شوند تعداد ترکیبات آنها ۴ ترکیب یعنی ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱ می‌باشد.

متغیرهای غایب					متغیرهای غایب				
a	b	c	d	شماره	a	b	c	d	شماره
۱	۰	۰	۰	۸	۰	۱	۰	۰	۴
۱	۰	۰	۱	۱۲	۰	۱	۱	۰	۶
۱	۱	۰	۰	۱۰	۱	۰	۰	۱	۱۲
۱	۱	۱	۱	۱۵	۱	۱	۱	۱	۱۴

$(\bar{a}+c+d)$ جمله $\Rightarrow f(a,b,c,d) = \Pi M(4,6,8,12,14)$

$(\bar{b}+d)$ جمله

✓ مثال ۲۶: اگر $f(a,b,c,d) = ab + bd + \bar{a}\bar{c}$ آنگاه pos متعارف f کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{ll}
 f(a,b,c,d) = \Pi M(2,3,6,12,14) \quad (2) & f(a,b,c,d) = \Pi M(0,1,4,5,7,8,9,10,11,13,15) \quad (1) \\
 f(a,b,c,d) = \Pi M(2,10) \quad (4) & f(a,b,c,d) = \Pi M(0,1,2,3,7,8,10,11,12,14) \quad (3)
 \end{array}$$

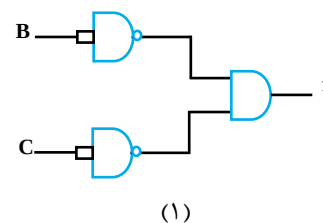
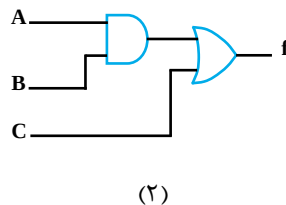
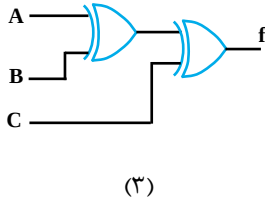
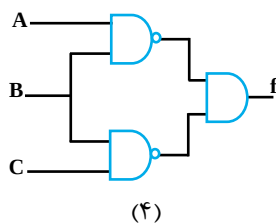
✓ پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مین‌ترمهای f را استخراج می‌نمایم. بعد از استخراج شماره‌های مین‌ترم و با توجه به اینکه بین شماره‌های مین‌ترم و ماکستریمی هیچ اشتراکی وجود ندارد، با توجه به اینکه برای یک تابع ۴ متغیره شماره‌ها از ۰ تا ۱۵ است، تمام شماره‌های در بازه ۰ تا ۱۵ که در شماره‌های مین‌ترم نباشد به عنوان شماره‌های ماکستریمی تابع محسوب می‌شوند.

a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	9	0	1	1	7	0	1	1	1
1	0	1	10	1	0	1	13	1	0	0	4
1	1	1	11	1	1	1	15	1	1	1	5

$$\Rightarrow f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,4,5,7,8,9,10,11,13,15) = \Pi M(2,3,6,12,14)$$



🔗 مثال ۲۷: کدام مدار معادل تابع $f(A, B, C) = (B + \bar{A})(AB + C) + AB\bar{A} + \bar{A}\bar{B}C + (A + B)(\bar{A} + C)$ است؟



✅ پاسخ: گزینه «۱» در اولین قدم پرانتزهای کنار هم در زیر NOT اصلی را در یکدیگر ضرب می‌کنیم. در مرحله بعدی جاییکه یک متغیر در خودش ضرب شود، فقط یکبار را در نظر می‌گیریم. همچنین اگر یک متغیر در NOT خودش ضرب شود حاصلش برابر صفر خواهد شد. در قدم سوم $\bar{A}\bar{B}C + BC$ طبق اتحاد $ab + a\bar{b}c = ab + ac$ به $BC + \bar{A}C$ تبدیل خواهد شد. در مرحله چهارم از B و C فاکتور می‌گیریم که پرانتزهایی که به صورت ضرائب آنها بدست می‌آیند برابر یک خواهند شد. در نهایت مقدار $\bar{B} + C$ بدست می‌آید که طبق قانون دمرگان برابر $\bar{B}C$ است.

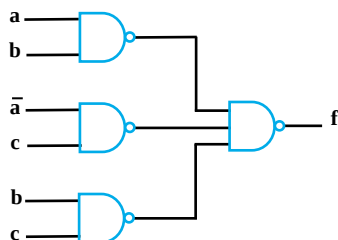
$$(B + \bar{A})(AB + C) + AB\bar{A} + \bar{A}\bar{B}C + (A + B)(\bar{A} + C)$$

$$= \underbrace{A\bar{B}B}_{\text{B}} + \underbrace{BC}_{\text{B}} + \underbrace{\bar{A}\bar{A}B}_{\text{A}} + \underbrace{\bar{A}C}_{\text{A}} + \underbrace{AB\bar{A}}_{\text{A}} + \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{\text{A}} + \underbrace{\bar{A}\bar{A}}_{\text{A}} + \underbrace{AC}_{\text{A}} + \underbrace{\bar{A}B}_{\text{A}} + \underbrace{BC}_{\text{A}}$$

$$= \underbrace{AB + BC + \bar{A}C + \bar{A}\bar{B}C}_{\text{ab + a\bar{b}c = ab + ac طبق اتحاد}} + \underbrace{AC + \bar{A}B + BC}_{\text{ab + a\bar{b}c = ab + ac طبق اتحاد}} = \underbrace{AB + BC + \bar{A}B + \bar{A}C + AC}_{\text{ab + a\bar{b}c = ab + ac طبق اتحاد}} = \underbrace{B(A + \bar{A} + C)}_1 + \underbrace{C(A + \bar{A})}_1 = \bar{B} + C = \bar{B}C$$

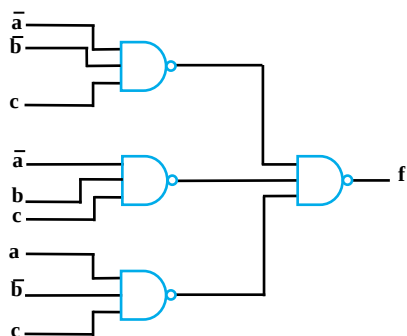
🔗 مثال ۲۸: تابع زیر را بصورت تمام NAND پیاده‌سازی کنید.

$$f(a, b, c) = ab + \bar{a}c + bc \Rightarrow \bar{f} = \bar{f} = \overline{ab + \bar{a}c + bc} = \overline{ab} \cdot \overline{\bar{a}c} \cdot \overline{bc}$$



✅ پاسخ: چون تابع داده شده به صورت SOP است می‌توانیم به جای تمام گیت‌های AND و OR گیت NAND قرار دهیم که معادل دو بار NOT کردن تابع است. یعنی $\overline{ab + \bar{a}c + bc}$ که اگر NOT پایینی را اثر دهیم به $\overline{ab} \cdot \overline{\bar{a}c} \cdot \overline{bc}$ تبدیل می‌شود. حال $\overline{ab}$ معادل یک NAND و $\overline{\bar{a}c}$ و $\overline{bc}$ به ترتیب معادل دو NAND دیگر هستند. در نهایت این سه جمله نیز با یکدیگر NAND شده‌اند.

🔗 مثال ۲۹: $f = \sum m(1, 3, 5)$ را بصورت تمام NAND پیاده‌سازی کنید.



✅ پاسخ: در این مسأله، ساده شده تابع مورد نظر نیست. بنابراین بر اساس همان مین ترم‌ها تابع را می‌نویسیم. همانطور که می‌دانیم نوشتن تابع بر اساس مین ترم‌ها، تابع را بصورت SOP تولید می‌کند. پس کافی است دوبار از طرف راست NOT بگیریم. یعنی $\overline{m_1 + m_3 + m_5}$ برابر $\overline{m_1} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_5}$ خواهد شد. هر جمله $\overline{m_1}$ ، $\overline{m_3}$ و $\overline{m_5}$ معادل یک گیت NAND خواهد شد. در نهایت سه جمله با هم NAND می‌شوند.

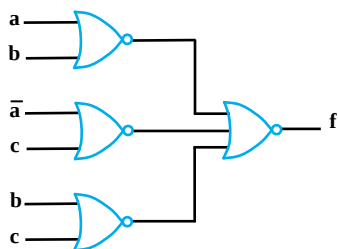
$$f(a, b, c) = \sum m(1, 3, 5) = m_1 + m_3 + m_5$$

$$\bar{f} = \bar{f} = \overline{m_1 + m_3 + m_5} = \overline{m_1} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_5}$$



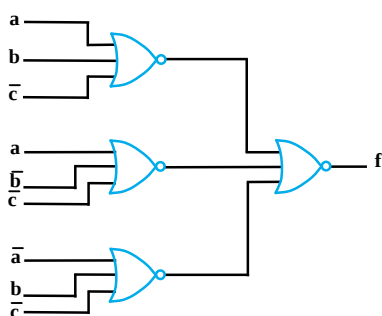
🔗 مثال ۳۰: تابع زیر را بصورت تمام NOR پیاده‌سازی کنید.

$$f(a,b,c) = (a+b)(\bar{a}+c)(b+c) \Rightarrow \bar{f} = \bar{f} = \overline{(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)} = \overline{(a+b)} + \overline{(\bar{a}+c)} + \overline{(b+c)}$$



✓ پاسخ: چون تابع داده شده بصورت POS است می‌توانیم بجای تمام گیت‌های AND، OR، گیت NOR قرار دهیم که معادل دوبار NOT کردن تابع است. یعنی $\overline{(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)} = \overline{(a+b)} + \overline{(\bar{a}+c)} + \overline{(b+c)}$ که NOT پایینی اثر داده شده است ولی NOT بالائی اثر داده نشده است. حال هر یک از جملات $(a+b)$ ، $(\bar{a}+c)$ و $(b+c)$ معادل یک گیت NOR هستند. در نهایت سه جمله هم با یکدیگر NOR شده‌اند.

🔗 مثال ۳۱: $f(a,b,c) = \Pi M(1,3,5)$ را بصورت تمام NOR پیاده‌سازی کنید.



✓ پاسخ: در این مسأله، هدف ساده کردن تابع داده شده نیست. تابع را بر اساس ماکسترم‌ها می‌نویسیم. نوشتن تابع بر اساس ضرب ماکسترم‌ها، تابع را بصورت POS تبدیل می‌کند. حال با دوبار NOT گرفتن از طرف راست داریم:

$\overline{M_1.M_3.M_5} = \overline{M_1} + \overline{M_3} + \overline{M_5}$ هر یک از جملات $\overline{M_1}$ ، $\overline{M_3}$ و $\overline{M_5}$ معادل یک گیت NOR هستند و در نهایت سه جمله با هم NOR می‌شوند.

$$f(a,b,c) = \Pi M(1,3,5) = M_1.M_3.M_5$$

$$\bar{f} = \bar{f} = \overline{M_1.M_3.M_5} = \overline{M_1} + \overline{M_3} + \overline{M_5}$$

🔗 مثال ۳۲: در مقایسه مدارهای منطقی خانواده CMOS و TTL کدام عبارت صحیح است؟

- (۱) توان مصرفی گیت‌های منطقی CMOS کمتر است.
- (۲) حداکثر سطح ولتاژ منبع تغذیه برای گیت‌های CMOS، ۵V است.
- (۳) سرعت انتقال سیگنال از ورودی به خروجی در مدارهای CMOS بیشتر است.
- (۴) مصونیت نویز برای گیت‌های منطقی نوع TTL بیشتر است.

✓ پاسخ: گزینه «۱» است و سایر گزینه‌ها طبق خواص مطرح شده برای این دو خانواده نادرستند.



آزمون فصل دوم

۱- ساده شده تابع $f(x, A, B, C) = \bar{x} + xABC + BC$ کدام گزینه است؟

$$\bar{x} + \bar{BC} \quad (۳)$$

$$x + BC \quad (۳)$$

$$\bar{x} + BC \quad (۲)$$

$$\bar{x}(B + \bar{C}) \quad (۱)$$

۲- ساده شده تابع $f(x, y, z) = \bar{x}yz + z(\bar{x} + y)$ کدام گزینه است؟

$$\bar{y}z + z\bar{x} \quad (۴)$$

$$xz + zy \quad (۳)$$

$$\bar{z}\bar{x} + \bar{z}\bar{y} \quad (۲)$$

$$z\bar{x} + zy \quad (۱)$$

۳- اگر $f(w, x, Q) = (Q + \bar{w})(x + \bar{Q})(\bar{w} + x + Q)(\bar{w} + \bar{x})$ آنگاه f بر حسب ضرب ماکسترم‌ها برابر کدام گزینه است؟

$$f = \prod M(۲, ۴, ۶) \quad (۴)$$

$$f = \prod M(۱, ۴, ۵, ۶, ۷) \quad (۳)$$

$$f = \prod M(۰, ۱, ۲, ۷) \quad (۲)$$

$$f = \prod M(۰, ۲, ۳) \quad (۱)$$

۴- اگر $f(A, B, C, D) = \bar{BCD} + \bar{ABD} + \bar{BCD} + \bar{BD}$ آنگاه f بر حسب جمع مین‌ترم‌ها برابر کدام گزینه است؟

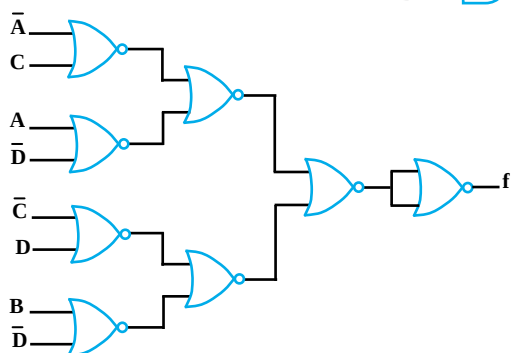
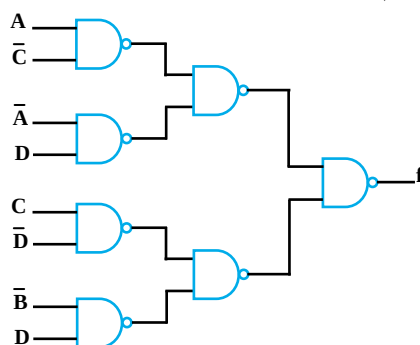
$$f = \sum m(۰, ۱, ۲, ۵, ۷, ۱۱, ۱۲, ۱۴) \quad (۲)$$

$$f = \sum m(۰, ۱, ۲, ۵, ۸, ۹, ۱۰, ۱۳) \quad (۱)$$

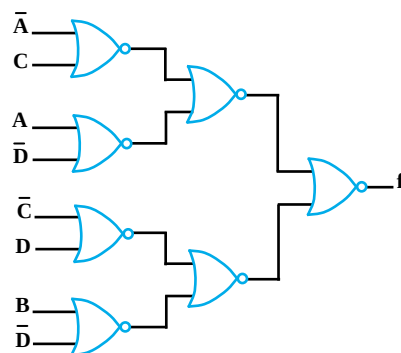
$$f = \sum m(۰, ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱) \quad (۴)$$

$$f = \sum m(۳, ۴, ۶, ۷, ۹, ۱۰, ۱۳) \quad (۳)$$

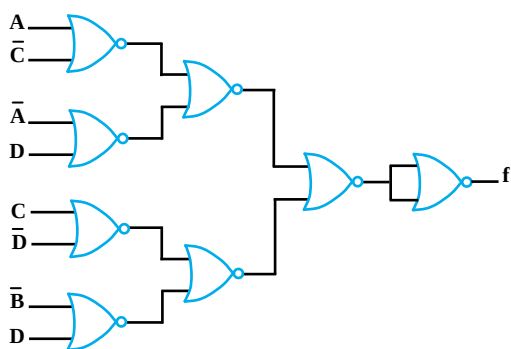
۵- مدار معادل تمام NOR برای مدار شکل زیر کدام است؟



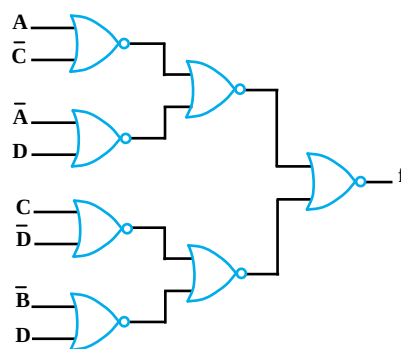
(۲)



(۱)



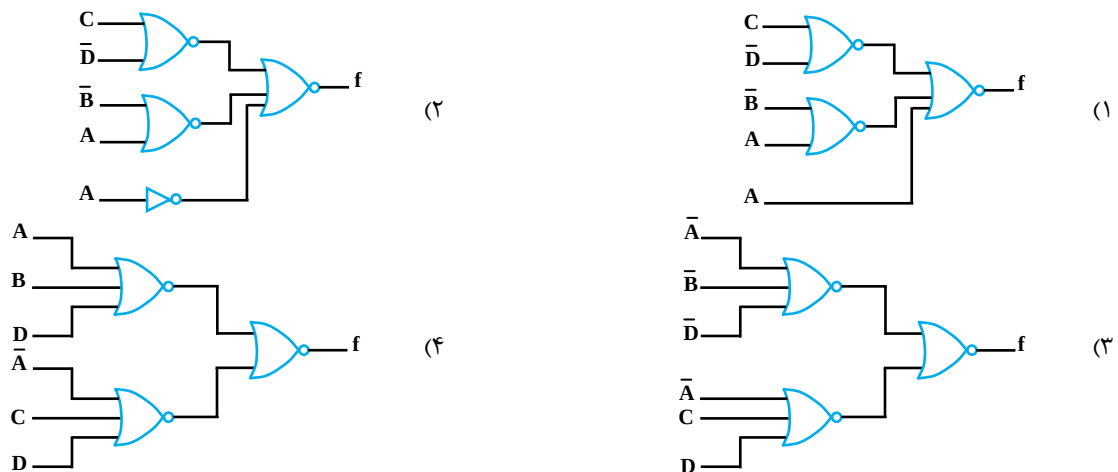
(۴)



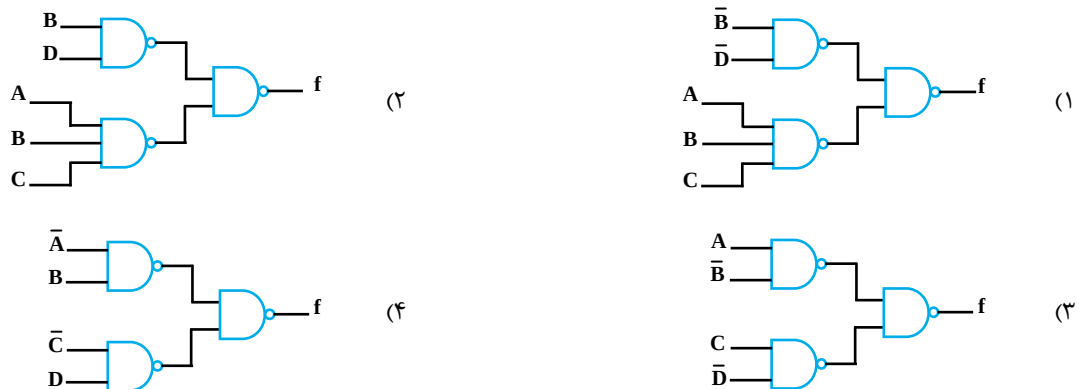
(۳)



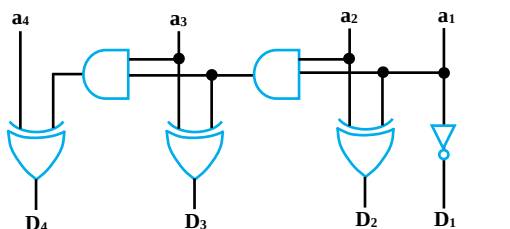
۶- مدار ساده شده تمام NOR برای تابع $f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 7)$ کدام گزینه است؟



۷- مدار ساده شده تمام NAND برای تابع $f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 8, 10, 14, 15)$ کدام گزینه است؟



۸- اگر ورودی مدار زیر $A = a_4 a_3 a_2 a_1$ باشد، خروجی آن کدام گزینه است؟



- (۱) $A + 1$
- (۲) $A - 1$
- (۳) $\bar{A}$
- (۴) A^{com}

۹- اگر $f(x, y, z) = \bar{x}y + x(z + y)$ آنگاه f بر حسب جمع مین ترم‌ها و ضرب ماکسترم‌ها برابر است با:

$$f = \sum m(4, 5, 6, 7) = \prod M(0, 1, 2, 3) \quad (۲)$$

$$f = \sum m(2, 3, 5, 6, 7) = \prod M(0, 1, 4) \quad (۴)$$

$$f = \sum m(0, 1, 4) = \prod M(2, 3, 5, 6, 7) \quad (۱)$$

$$f = \sum m(0, 1, 2, 3) = \prod M(4, 5, 6, 7) \quad (۳)$$

۱۰- جدول درستی تابع $f(a, b, c) = ab + \bar{a}c$ کدام گزینه است؟

a	b	c	f
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱ (۴)
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱

a	b	c	f
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱ (۳)
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

a	b	c	f
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰ (۲)
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

a	b	c	f
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱ (۱)
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

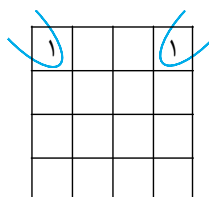
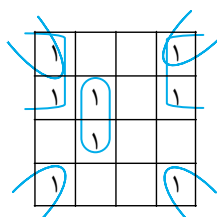
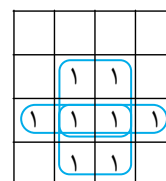
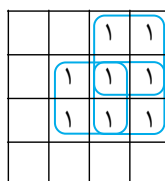
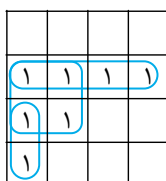
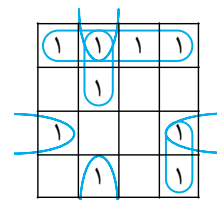
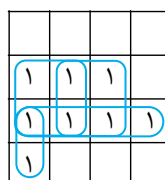
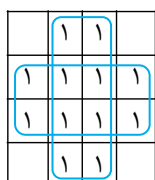
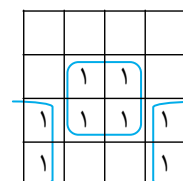
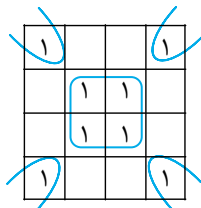
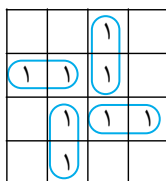
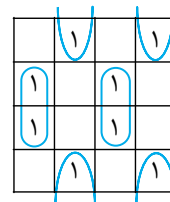
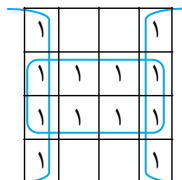
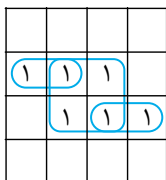


فصل سوم

«ساده‌سازی توابع منطقی»

تست‌های تألیفی فصل سوم

کلمه مثال ۱: جدول‌های زیر دسته‌بندی‌های درست را نشان می‌دهند.



۴) نوشتن عبارت هر دسته: برای هر دسته، برای هر متغیر چنانچه در تمامی خانه‌های آن دسته مقدار ۰ داشته باشد متمم متغیر و چنانچه در تمامی خانه‌ها مقدار یک داشته باشد خود متغیر نوشته می‌شود. چنانچه در بعضی خانه‌ها مقدار صفر و در بعضی دیگر مقدار یک داشته باشد متغیر حذف می‌شود. بین متغیرها AND و بین عبارت دسته‌ها OR قرار می‌گیرد.



مثال ۲: ساده شده تابع $f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$ کدام گزینه است؟

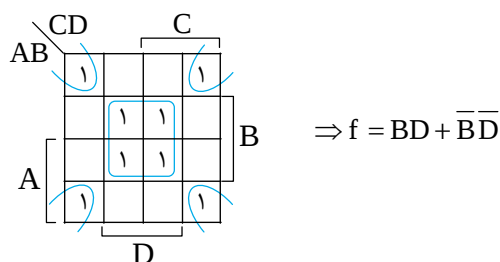
$$BCD + \overline{B}\overline{D} \quad (۴)$$

$$\overline{B}D + \overline{B}\overline{D} \quad (۳)$$

$$BD + \overline{B}\overline{D} \quad (۲)$$

$$(B + D)(\overline{B} + \overline{D}) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا در خانه‌های متناظر با شماره‌های مین ترمی تابع روی جدول «۱» می‌گذاریم. سپس دسته‌بندی انجام شده که سعی می‌شود تا حد ممکن دسته‌ها بزرگ‌تر و تعداد دسته‌ها کمتر باشد. در نهایت عبارت هر دسته را می‌نویسیم.



مثال ۳: ساده شده تابع $f(a, b, c, d, e) = \sum m(0, 4, 6, 11, 15, 20, 22, 24, 26, 27, 31)$ کدام گزینه است؟

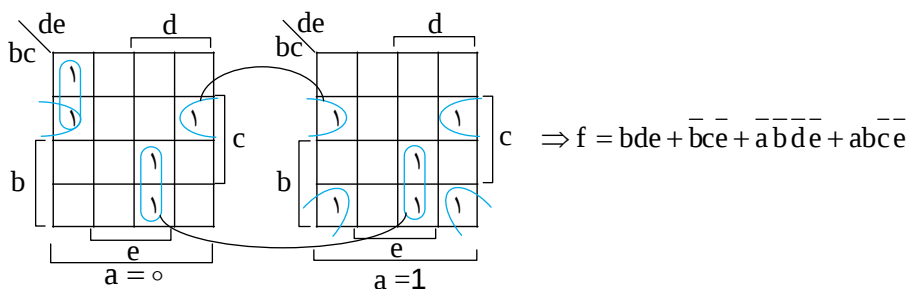
$$bde + bce + \overline{b}\overline{d}e + ab\overline{c}e \quad (۲)$$

$$\overline{a}bde + abce + a\overline{b}\overline{d}e + ab\overline{c}e \quad (۱)$$

$$bde + \overline{b}ce + a\overline{b}\overline{d}e + ab\overline{c}e \quad (۴)$$

$$abde + a\overline{b}ce + a\overline{b}\overline{d}e + ab\overline{c}e \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» در دسته‌بندی جدول پنج متغیره، اگر خانه‌های هم موقعیت در دو جدول حاوی «۱» باشند می‌توان آن‌ها را در یک دسته قرار داد. همچنین می‌توان هر جدول را به صورت جداگانه دسته‌بندی نمود و سپس اگر در دو جدول دسته‌هایی با موقعیت یکسان وجود داشت، آن دسته‌ها را با هم ترکیب کرده و یک دسته بزرگ‌تر تولید کرد.



مثال ۴: ساده شده تابع $f(A, B, C, D) = \sum m(6, 7, 10, 11, 12, 13, 22, 23, 26, 27, 28, 29)$ کدام گزینه است؟

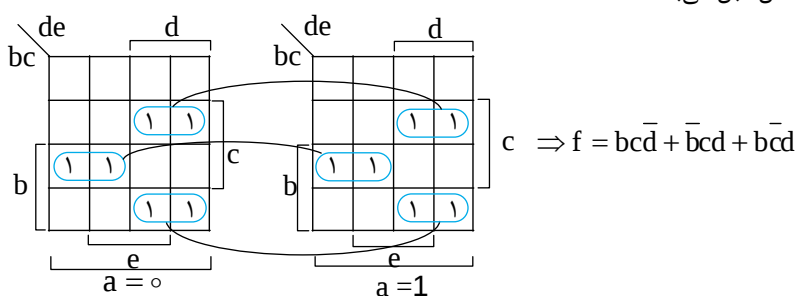
$$bcd + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{b}\overline{c}d \quad (۲)$$

$$bcd + \overline{b}cd + \overline{b}\overline{c}d \quad (۱)$$

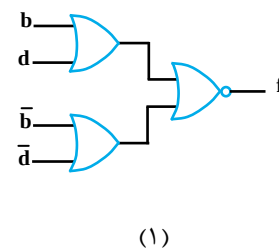
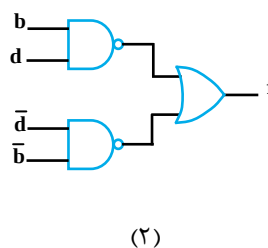
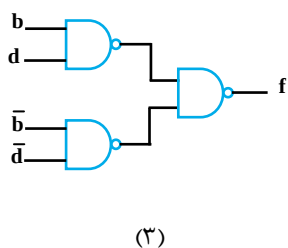
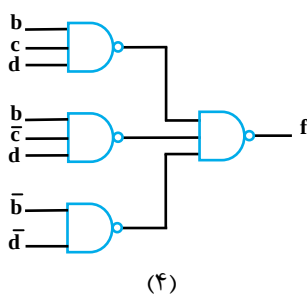
$$\overline{a}bcd + \overline{b}cd + \overline{b}\overline{c}d \quad (۴)$$

$$bcd + \overline{b}cd + ab\overline{c}d \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۱» روش حل این تست دقیقاً مشابه با مثال قبل می‌باشد.

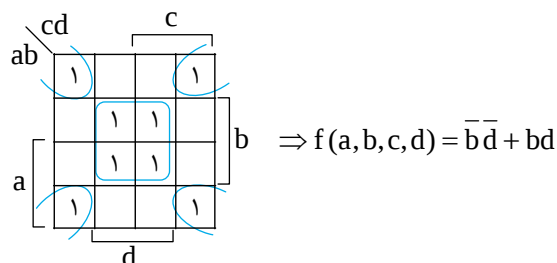


مثال ۵: معادل ساده شده تمام NAND تابع $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$ کدام گزینه است؟

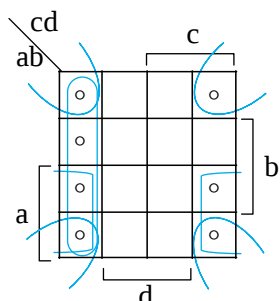




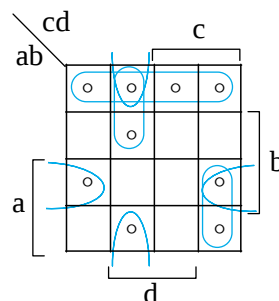
✓ پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید تابع را ساده نمود چون ساده شده خود بصورت SOP است، کفایت بجای همه گیت‌های OR و AND، گیت NAND قرار داد. در واقع این کار معادل این است که از تابع دو مرتبه NOT گرفته شده باشد. که NOT اولی را اثر داده و NOT دومی را اثر نمی‌دهیم. یعنی $\overline{\overline{b\bar{d} + bd}}$ که برابر $\overline{\overline{b\bar{d}.bd}}$ خواهد شد. حال معادل یک گیت NAND و $\overline{bd}$ معادل یک گیت NAND دیگر است. در نهایت این دو جمله نیز با یکدیگر NAND می‌شوند.



🔗 مثال ۶: عبارت ساده شده هر یک از جدول‌های زیر را به دست آورید.



$$\overline{\overline{cd} + \overline{ad} + \overline{bd}} = (c+d)(\bar{a}+d)(b+d)$$



$$\overline{\overline{cd} + \overline{ad} + \overline{bd}} = (c+d)(\bar{a}+d)(b+d)$$

↓ Not

$$(a+b)(a+c+\bar{d})(b+c+\bar{d})(\bar{a}+\bar{b}+d)(\bar{a}+\bar{c}+d)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، همانند ساده‌سازی SOP در کل شماره‌های ماکسترمی روی جدول صفر می‌گذاریم و دسته‌بندی صفرها هم از قواعد گفته شده برای یک‌ها پیروی می‌کند. برای نوشتن عبارت هر دسته از روش گفته شده برای SOP استفاده شده است و از عبارت به دست آمده NOT گرفته شده است.

🔗 مثال ۷: ساده شده تابع $f(A,B,C,D,E) = \prod M(1,2,5,6,13,15,18,22,29,31)$ کدام گزینه است؟

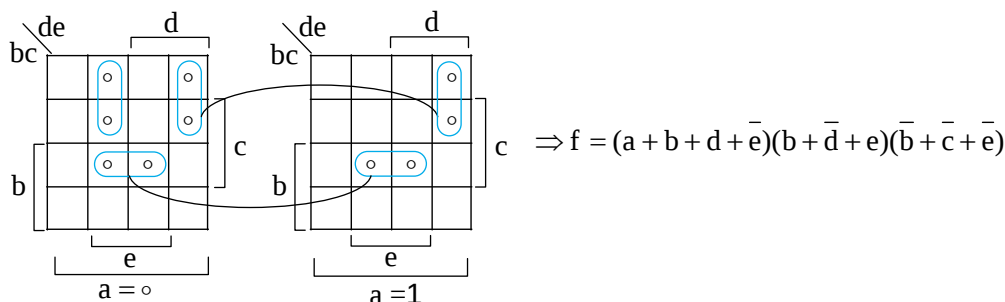
$$(a+b+d+\bar{e})(b+\bar{d}+e)(\bar{a}+c+e) \quad (۲)$$

$$(b+d+\bar{e})(b+\bar{d}+e)(\bar{b}+\bar{c}+\bar{e}) \quad (۱)$$

$$(a+b+d+\bar{e})(b+\bar{d}+e)(\bar{b}+\bar{c}+\bar{e}) \quad (۴)$$

$$(a+b+d+\bar{e})(a+b+\bar{d}+c)(\bar{b}+\bar{c}+\bar{e}) \quad (۳)$$

✓ پاسخ: گزینه «۴»



در اینجا بعد از نمایش تابع و عمل دسته‌بندی، برای نوشتن عبارت هر دسته به این صورت عمل شده است که اگر مقدار متغیری در تمام خانه‌های دسته برابر یک باشد NOT آن متغیر، اگر برابر صفر باشد خود متغیر نوشته می‌شود. بین متغیرها OR و بین عبارات دسته‌ها AND قرار داده می‌شود. همچنین اگر مقدار متغیری در محدوده یک دسته هم صفر هم یک باشد، آن متغیر حذف خواهد شد.



مثال ۸: ساده شده تابع $f(A, B, C, D, E) = \prod M(0, 2, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 29, 31)$ کدام گزینه است؟

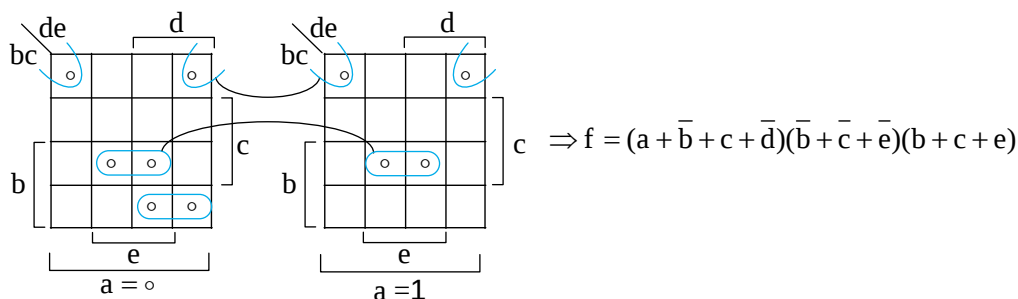
$$(a + \bar{b} + c + \bar{d})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{e})(b + c + e) \quad (۲)$$

$$(\bar{b} + c + \bar{d})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{e})(b + c + e) \quad (۴)$$

$$(a + \bar{b} + c + \bar{d})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{e})(a + b + c + e) \quad (۱)$$

$$(a + \bar{b} + c + \bar{d})(a + c + e)(b + c + e) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۲» ☒



مثال ۹: ساده شده تابع $f(A, B, C, D) = \prod M(4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$ کدام گزینه است؟

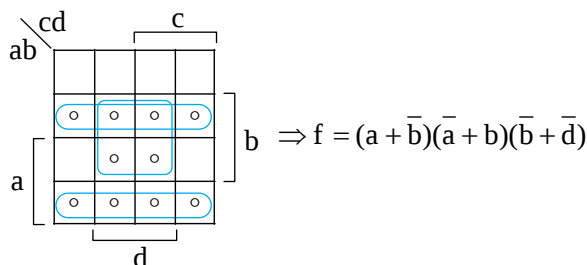
$$(a + b)(\bar{a} + b)(\bar{b} + \bar{d}) \quad (۴)$$

$$a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{b}\bar{d} \quad (۳)$$

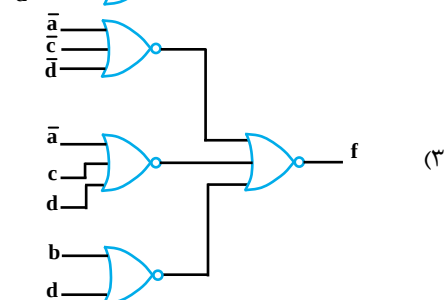
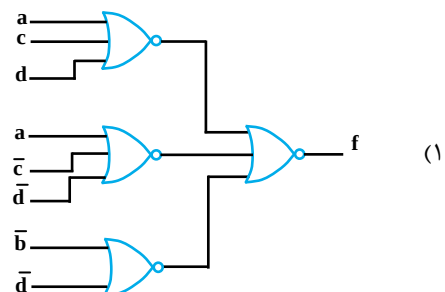
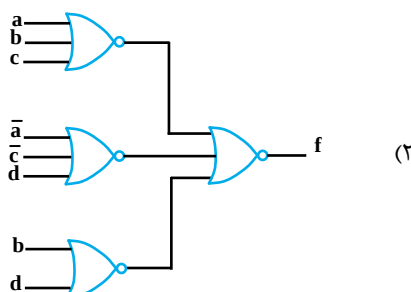
$$(a + \bar{b})(a + c)(\bar{b} + \bar{d}) \quad (۲)$$

$$(a + \bar{b})(\bar{a} + b)(\bar{b} + \bar{d}) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» ☒

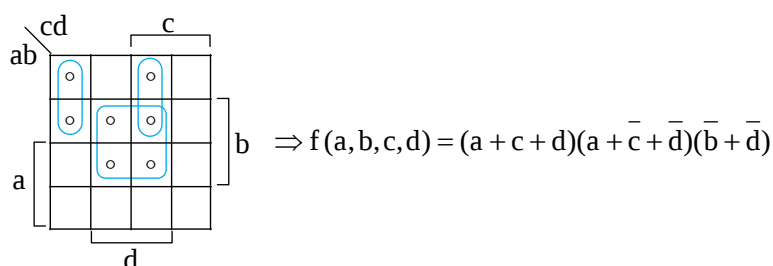


مثال ۱۰: معادل ساده شده تمام NOR تابع $f(a, b, c, d) = \prod M(0, 2, 4, 5, 7, 13, 15)$ کدام گزینه است؟



(۴) گزینه ۱ و ۳

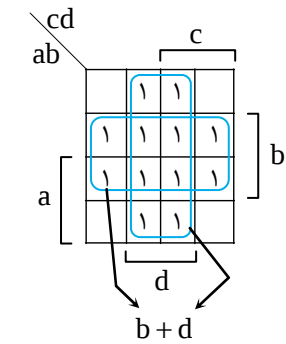
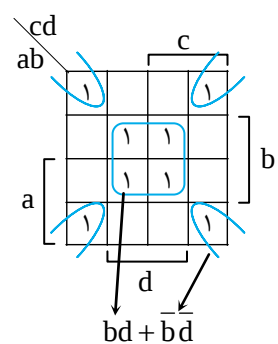
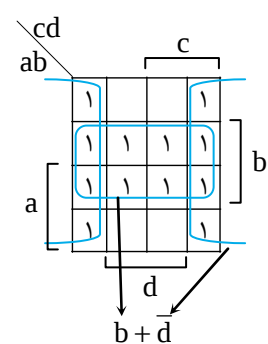
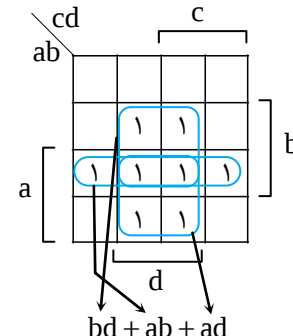
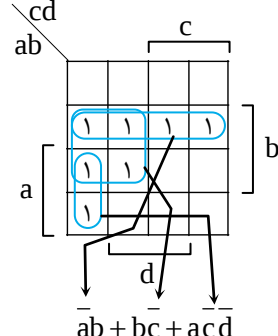
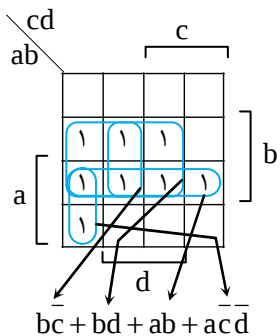
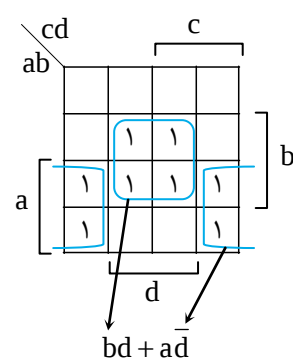
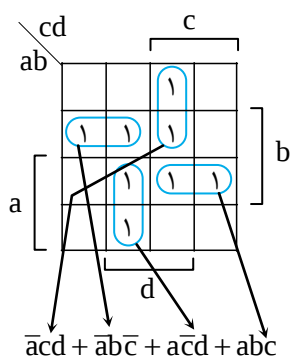
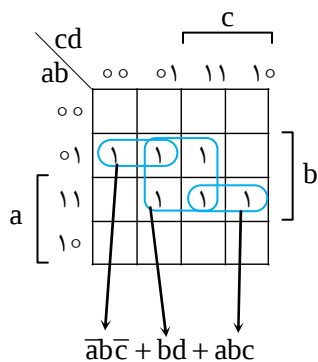
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید تابع را ساده نمود چون ساده شده بصورت POS است، می توان به جای همه گیت‌های تابع، گیت NOR قرار داد. ☒



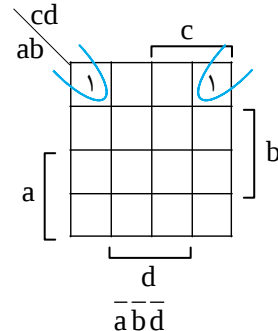
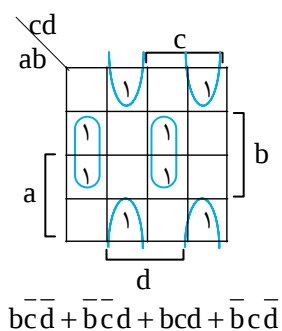
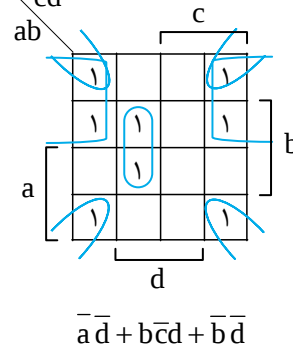
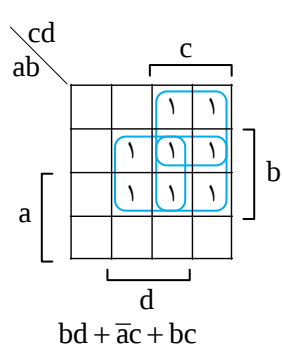
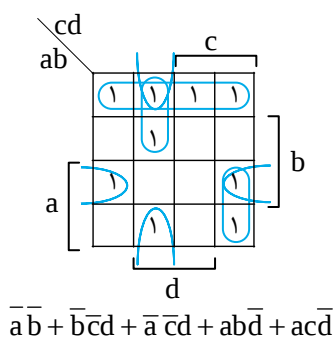


مثال ۱۱: برای هر جدول عبارت ساده شده معادل را بدست آورید.

پاسخ: در اینجا عبارت به دست آمده برای هر دسته با فلش به دسته مربوطه‌اش متصل شده است. ✓



برای این جدول‌ها نیز همین حالات وجود دارد.





مثال ۱۲: جدول‌های دارای حالات بی‌اهمیت زیر را دسته‌بندی نمایید.

0	0		
X			
X			
0	0		

		1	
	X		X
X	1	X	
	1		

		1	
X	1	X	X
	X	1	
	1		

X			
1	X		
	1		

مثال ۱۳: ساده شده تابع $f(a,b,c,d) = \sum m(2,9,10,12,13) + d(1,5,14)$ کدام گزینه است؟

$$\bar{c}d + abc + \bar{c}\bar{d} \quad (۴)$$

$$\bar{c}d + bc + \bar{b}\bar{c}d \quad (۳)$$

$$acd + abc + \bar{b}\bar{c}d \quad (۲)$$

$$\bar{c}d + abc + \bar{b}\bar{c}d \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» ☒

	cd	c
ab	X	1
	X	
a	1	1
	1	
d		X

$$b \Rightarrow f = \bar{c}d + abc + \bar{b}\bar{c}d$$

مثال ۱۴: تابع منطقی $ABCD + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{D}$ با حالت‌های تعریف نشده $\bar{B}\bar{C} + BD + B\bar{C}\bar{D}$ مفروض است، ساده‌ترین صورت تابع کدام است؟

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{D} + ABCD \quad (۴)$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \quad (۳)$$

$$B + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{D} \quad (۲)$$

$$AB + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{D} \quad (۱)$$

	CD	C
AB	1	1
	X	X
A	X	X
	X	1
D		

پاسخ: گزینه «۱» جمله $ABCD$ معادل خانه شماره ۱۴، جمله $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ معادل شماره‌های ۱ و ۰، جمله $\bar{A}\bar{B}\bar{D}$ معادل شماره‌های ۲ و ۰، جمله $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ معادل شماره‌های ۴ و ۱۲، جمله BD معادل شماره‌های ۵ و ۷ و ۱۳ و ۱۵ و جمله $B\bar{C}$ معادل شماره‌های ۴، ۵، ۱۲، ۱۳ خواهد شد. توجه

نمایید که حالت‌های تعریف نشده روی جدول با علامت X نشان داده می‌شوند.

$$\bar{A}\bar{C} + AB + \bar{A}\bar{B}\bar{D}$$

مثال ۱۵: ساده شده تابع $f(a,b,c,d) = \sum m(1,2,6,12,13) + d(4,15)$ کدام گزینه است؟

$$abc + \bar{a}\bar{b}d + \bar{b}d \quad (۴)$$

$$abc + \bar{a}\bar{b}d + \bar{a}bd \quad (۳)$$

$$abc + \bar{b}d + \bar{a}bd \quad (۲)$$

$$ab + \bar{a}\bar{b}d + \bar{a}bd \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» ☒

	cd	c
ab	1	1
	X	
a	1	1
	1	X
d		

$$b \Rightarrow f = abc + \bar{a}\bar{b}d + \bar{a}bd$$

$$f(w,x,y,z) = \sum m(0,2,3,6,7,8,9,10,13)$$

مثال ۱۶: تابع روبه‌رو را به روش جدول‌بندی کوبین مک کلاسیکی ساده نمایید.

پاسخ: گام اول: ابتدا مین ترم‌ها را بر اساس تعداد ۱‌های موجود در شماره مین ترمی دسته‌بندی می‌نماییم.

مین ترم	w	x	y	z	
0	0	0	0	0	گروه ۱ (۰ عدد ۱)
2	0	0	1	0	گروه ۲ (۱ عدد ۱)
8	1	0	0	0	
3	0	0	1	1	گروه ۳ (۲ عدد ۱)
6	0	1	1	0	
9	1	0	0	1	
10	1	0	1	0	
7	0	1	1	1	گروه ۴ (۳ عدد ۱)
13	1	1	0	1	



گام دوم:

فهرست (۱)	فهرست (۲)	فهرست (۳)
مین ترما w x y z	مین ترما w x y z	مین ترما w x y z
۰ ۰ ۰ ۰ ۰ √	۰, ۲ ۰ ۰ - ۰ √	۰, ۲, ۸, ۱۰ - ۰ - ۰ PI_1
۲ ۰ ۰ ۱ ۰ √	۰, ۸ - ۰ ۰ ۰ √	۰, ۲, ۸, ۱۰ - ۰ - ۰
۸ ۱ ۰ ۰ ۰ √	۲, ۳ ۰ ۰ ۱ - √	
۳ ۰ ۰ ۱ ۱ √	۲, ۶ ۰ - ۱ ۰ √	۲, ۶, ۳, ۷ ۰ - ۱ - PI_2
۶ ۰ ۱ ۱ ۰ √	۲, ۱۰ - ۰ ۱ ۰ √	۷, ۶, ۳, ۲ ۰ - ۱ -
۹ ۱ ۰ ۰ ۱ √	۸, ۹ ۱ ۰ ۰ - PI_3	
۱۰ ۱ ۰ ۱ ۰ √	۸, ۱۰ ۱ ۰ - ۰ √	
۷ ۰ ۱ ۱ ۱ √	۳, ۷ ۰ - ۱ ۱ √	
۱۳ ۱ ۱ ۰ ۱ √	۶, ۷ ۰ ۱ ۱ - √	
	۹, ۱۳ ۱ - ۰ ۱ PI_4	

گام سوم:

	۰	۲	۳	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۳
PI_1	√ ⊗	√				√		√ ⊗	
PI_2		√	√ ⊗	√ ⊗	√ ⊗				
PI_3						√	√		
PI_4							√		√ ⊗

گام چهارم: انتخاب شامل‌ها برای پوشش مین ترما

در گام ۳ مین ترم‌هایی که فقط توسط یک شامل پوشش داده می‌شوند توسط علامت ⊗ نشان داده شده‌اند. بنابراین شامل‌های پوشش دهنده آنها باید در جواب نهایی وجود داشته باشد. به این شامل‌ها، شامل‌های اول اصلی گویند. حال با انتخاب شامل‌های اول اصلی، بطور ضمنی ممکن است مین ترم‌های دیگر هم پوشش داده شوند. بنابراین:

با انتخاب PI_1 مین ترم ۸، ۲ هم بطور ضمنی پوشش داده می‌شود. با انتخاب PI_4 مین ترم ۹ هم بطور ضمنی پوشش داده می‌شود. بنابراین کل مین ترما پوشش داده می‌شوند.

$$f(w, x, y, z) = PI_1 + PI_2 + PI_4 = xz + wy + wyz$$

مثال ۱۷: تابع $f(A, B, C, D, E) = \sum m(2, 3, 7, 10, 12, 15, 27) + d(5, 18, 19, 21, 23)$

گام اول و دوم:

فهرست (۱)	فهرست (۲)	فهرست (۳)
مین ترما A B C D E	مین ترما A B C D E	مین ترما A B C D E
۲ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ √	۲, ۳ ۰ ۰ ۰ ۱ - √	۱۹, ۱۸, ۳, ۲ - ۰ ۰ ۱ - PI_5
۳ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ √	۲, ۱۰ ۰ - ۰ ۱ ۰ PI_2	۲۳, ۱۹, ۷, ۳ - ۰ - ۱ ۱ PI_6
۵ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱ √	۲, ۱۸ - ۰ ۰ ۱ ۰ √	۲۳, ۲۱, ۷, ۵ - ۰ ۱ - ۱ PI_7
۱۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ √	۳, ۷ ۰ ۰ - ۱ ۱ √	
۱۲ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ PI_1	۳, ۱۹ - ۰ ۰ ۱ ۱ √	
۱۸ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ √	۵, ۷ ۰ ۰ ۱ - ۱ √	
۷ ۰ ۰ ۱ ۱ ۱ √	۵, ۲۱ - ۰ ۱ ۰ ۱ √	
۱۹ ۱ ۰ ۰ ۱ ۱ √	۱۸, ۱۹ ۱ ۰ ۰ ۱ - √	
۲۱ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱ √	۷, ۱۵ ۰ - ۱ ۱ ۱ PI_3	
۱۵ ۰ ۱ ۱ ۱ ۱ √	۷, ۲۳ - ۰ ۱ ۱ ۱ √	
۲۳ ۱ ۰ ۱ ۱ ۱ √	۱۹, ۲۳ ۱ ۰ - ۱ ۱ √	
۲۷ ۱ ۱ ۰ ۱ ۱ √	۱۹, ۲۷ ۱ - ۰ ۱ ۱ PI_4	
	۲۳, ۲۱ ۱ ۰ ۱ - ۱ √	



گام سوم: در مرحله پوشش مین‌ترمها توسط شامل‌ها، فقط مین‌ترمها در جدول آورده می‌شوند و نیازی به پوشش حالات بی‌اهمیت نیست.

	۲	۳	۷	۱۰	۱۲	۱۵	۲۷
PI_1					✓⊗		
PI_2	✓			✓⊗			
PI_3			✓			✓⊗	
PI_4							✓⊗
PI_5	✓	✓					
PI_6		✓	✓				
PI_7			✓				

گام چهارم: شامل‌های PI_1, PI_2, PI_3, PI_4 شامل اول اصلی هستند که باید حتماً انتخاب شوند. با انتخاب آنها مین‌ترمهای ۲، ۷، ۱۵، ۲۷ پوشش داده می‌شوند. برای پوشش سایر مین‌ترمها یعنی مین‌ترم شماره ۳ هم از شامل PI_5 و هم از شامل PI_6 می‌توان استفاده نمود. بنابراین تابع فوق دو صورت ساده شده دارد که هر دو با یکدیگر برابر هستند.

یا:

$$f(A, B, C, D, E) = PI_1 + PI_2 + PI_3 + PI_4 + PI_5$$

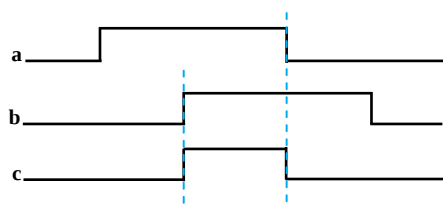
بنابراین:

$$f(A, B, C, D, E) = \overline{A}BCDE + \overline{A}CDE + \overline{A}CDE + \overline{A}CDE + \overline{B}CD$$

$$f(A, B, C, D, E) = \overline{A}BCDE + \overline{A}CDE + \overline{A}CDE + \overline{A}CDE + \overline{B}DE$$

یا:

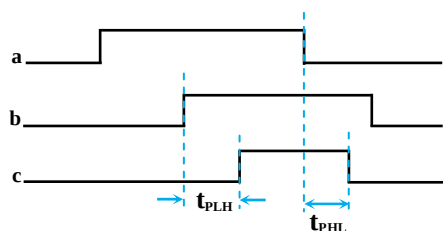
مثال ۱۸: گیت AND مقابل با تغییر ورودی‌ها، مطابق شکل‌ها خروجی را تولید می‌نماید.



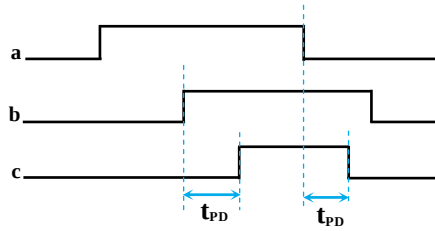
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

در شکل (۲) گیت ایده‌آل در نظر گرفته شده است. یعنی زمان تأخیر انتشار برابر صفر بوده و تغییر خروجی همزمان با تغییر ورودی است. در شکل (۳) $t_{PHL} = t_{PLH} = t_{PD}$ در نظر گرفته شده است و در شکل (۴) $t_{PHL} < t_{PLH}$ است.

مثال ۱۹: مداری طراحی کنید که یک عدد بین ۰ تا ۷ را دریافت کرده و سه واحد به آن اضافه نموده و به عنوان خروجی بدهد.



پاسخ: چون عدد ورودی بین ۰-۷ است بنابراین نیاز به ۳ بیت برای دریافت ورودی‌ها است. چون وقتی ۳ واحد به ورودی اضافه شود خروجی در محدوده ۱-۱۰ قرار می‌گیرد، بنابراین نیاز به ۴ بیت برای دریافت خروجی از مدار دارید. بعد از انتخاب ۳ بیت برای ورودی و ۴ بیت برای خروجی در یک جدول ۸ ردیفه تمامی ترکیبات ورودی از ۰ تا ۷ یعنی از ۰۰۰ تا ۱۱۱ را می‌نویسیم. سپس با توجه به تعریف صورت مسأله، که باید خروجی برابر ورودی به علاوه ۳ باشد، خروجی برای هر ردیف را می‌نویسیم. مثلاً برای ورودی صفر خروجی برابر سه، برای ورودی یک خروجی برابر چهار و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در پایان هر ستون از خروجی‌ها را معادل یک تابع فرض کرده که باید بر اساس ورودی‌ها ساده شود. بنابراین نیاز به ۴ عدد جدول کارنو (برای هر خروجی یک جدول) سه متغیره (به تعداد متغیرهای ورودی) داریم. در نهایت توابع ساده شده از جدول خارج شده و بر اساس آنها شکل مدار رسم می‌شود.



(۳) رابطه‌ی غیر مبهم : صورت مسئله

(۲) خروجی: w, x, y, z (۱) ورودی: a, b, c

$$w(a, b, c) = \Sigma(5, 6, 7)$$

$$x(a, b, c) = \Sigma(1, 2, 3, 4)$$

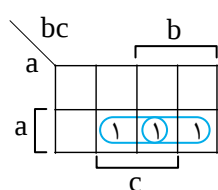
(۵)

$$y(a, b, c) = \Sigma(0, 3, 4, 7)$$

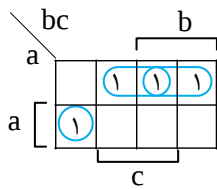
$$z(a, b, c) = \Sigma(0, 2, 4, 6)$$

a	b	c	w	x	y	z
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

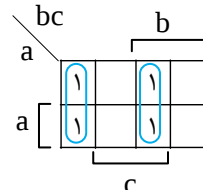
(۶)



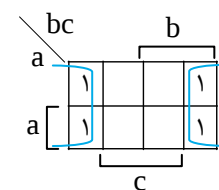
$$w = ab + ac$$



$$x = ab\bar{c} + \bar{a}\bar{c} + a\bar{b}$$

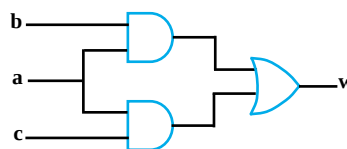
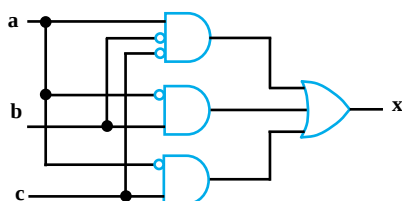


$$y = \bar{b}\bar{c} + bc = b \odot c$$



$$z = \bar{c}$$

(۷)



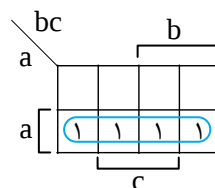
مثال ۲۰: مدار طراحی کنید که یک عدد بین ۰ تا ۷ را دریافت کرده و خارج قسمت صحیح آن بر عدد ۲ را به عنوان خروجی بدهد.

پاسخ: چون ورودی بین ۰ تا ۷ است پس ۳ بیت برای ورودی لازم داریم. چون خروجی خارج قسمت صحیح ورودی بر ۲ است، اگر حداکثر مقدار ورودی یعنی ۷ را بر ۲ تقسیم کنیم خارج قسمت صحیح آن عدد ۳ خواهد شد. پس دو بیت برای خروجی نیاز داریم. همچنین با توجه به تعریف مسأله خروجی خارج قسمت صحیح تقسیم ورودی بر دو است. یک جدول ۸ ردیفه رسم می‌کنیم و تمامی ترکیبات ورودی‌ها از صفر تا ۷ و خروجی را برای هر ردیف می‌نویسیم. در نهایت نیاز به دو عدد جدول کارنو ۳ متغیره داریم که هر خروجی را بصورت تابع مستقلى از ورودی‌ها به دست آورد. در پایان بر اساس توابع بدست آمده شکل مدار را رسم می‌کنیم.

a	b	c	x	y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$x(a, b, c) = \Sigma m(4, 5, 6, 7)$$

$$y(a, b, c) = \Sigma m(2, 3, 6, 7)$$

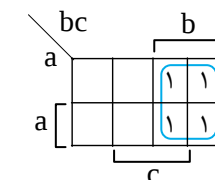


$$x = a$$

$$a \text{ — } x$$

$$b \text{ — } y$$

$$c$$



$$y = b$$

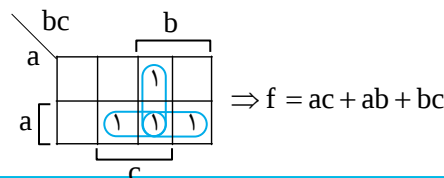
مثال ۲۱: اگر در یک راهرو سه در وجود داشته باشد که در هر در یک سوئیچ وجود دارد، مدار طراحی کنید که با باز شدن حداقل دو عدد از درب‌ها، یک لامپ درون راهرو را روشن کند.

پاسخ: چون سه در وجود دارد، هر در را معادل یک متغیر ورودی در نظر می‌گیریم، بنابراین سه بیت برای ورودی احتیاج است. چون در نهایت این متغیرها قرار است روشن و خاموش شدن یک چراغ را کنترل کنند پس یک تابع خروجی وجود دارد، یعنی خروجی یک بیتی است. اگر باز شدن هر در را معادل ۱ و بسته بودن آن را معادل صفر فرض کنیم آنگاه جدول زیر به دست می‌آید.



a	b	c	f
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

$$f(a, b, c) = \sum m(3, 5, 6, 7)$$



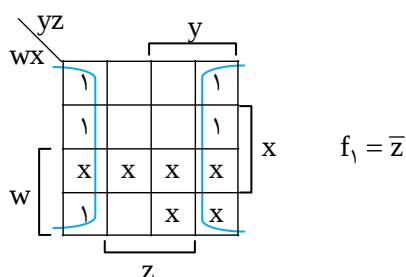
مثال ۲۲: سه نفر می‌خواهند تصمیم بگیرند که درس بخوانند یا به سینما بروند فرض کنید رأی هر نفر برای سینما، یک و برای درس خواندن صفر باشد. مدارای طراحی کنید که رأی افراد را دریافت کرده و نتیجه را اعلام کند.

پاسخ: راه حل این مسئله مشابه با مثال قبل می‌باشد. در این مسئله هر نفر یک رأی دارد که همانند یک متغیر منطقی عمل می‌کند. اگر موافق به سینما رفتن باشد رأی برابر یک و اگر موافق درس خواندن باشد رأی برابر صفر خواهد شد. ورودی مدار سه بیت است، چون سه نفر در رأی‌گیری شرکت می‌کنند و خروجی مدار یک بیت است چون در نهایت یک بیت خروجی داریم. ادامه حل کاملاً مشابه با حل مثال قبل می‌باشد.

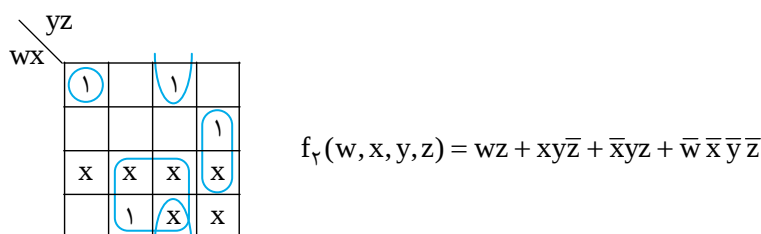
مثال ۲۳: یک مدار با ورودی‌های BCD و سه خروجی f_1 ، f_2 و f_3 طراحی کنید به گونه‌ای که $f_1 = 1$ است هرگاه عدد ورودی مضرب ۲ باشد. f_2 زمانی ۱ است که عدد ورودی مضرب ۳ و f_3 زمانی ۱ است که عدد ورودی مضرب ۴ باشد.

پاسخ: همانطور که می‌دانیم رقم‌های BCD، ۴ بیتی هستند. چون ورودی مدار یک رقم BCD است بنابراین ورودی مدار ۴ بیتی خواهد شد. طبق خواسته سؤال قرار است هرگاه که ورودی مضرب ۲ باشد $f_1 = 1$ ، هرگاه مضرب سه باشد $f_2 = 1$ و هرگاه مضرب چهار باشد $f_3 = 1$ بشود. بنابراین خروجی مدار سه بیتی خواهد شد. نکته قابل توجه و متفاوت با مثال‌های قبلی این است که رقم‌های BCD فقط درباره ۹ تا ۰ تعریف می‌شوند. بنابراین اگرچه با ورودی چهار بیتی می‌توان از ۰ تا ۱۵ (۱۶ حالت) را کد کرد ولی فقط ۰ تا ۹ (۱۰ حالت اول) به عنوان ورودی به این مدار محسوب می‌شوند. در نتیجه چون هیچگاه مقادیر ۱۰ تا ۱۵ به عنوان ورودی نخواهد بود در جدول درستی تابع در مقابل این ردیف‌ها X (حالت بی‌اهمیت) قرار داده شده است. هنگامی که قرار است خروجی‌ها را بوسیله جدول کارنو ساده کنیم نیز در خانه‌های ۱۰ تا ۱۵ علامت X (حالت بی‌اهمیت) قرار می‌گیرد. بقیه راه حل همانند توابع کامل است.

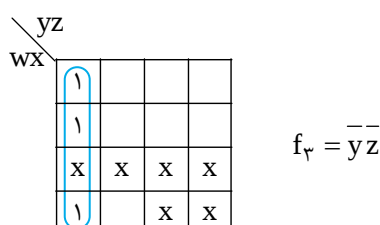
$$f_1(w, x, y, z) = \sum m(0, 2, 4, 6, 8) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$



$$f_2(w, x, y, z) = \sum m(0, 3, 6, 9) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$



$$f_3(w, x, y, z) = \sum m(0, 4, 8) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$



w	x	y	z	f_1	f_2	f_3
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	X	X	X
۱	۰	۱	۱	X	X	X
۱	۱	۰	۰	X	X	X
۱	۱	۰	۱	X	X	X
۱	۱	۱	۰	X	X	X
۱	۱	۱	۱	X	X	X



مثال ۲۴: تابعی طراحی کنید که عدد سه بیتی را دریافت کرده و باقیمانده آن عدد بر ۳ را به عنوان خروجی تولید کند.

a	b	c	w	x
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۱

✓ پاسخ: چون گفته خروجی باقیمانده هر عدد بر ۳، ۰ یا ۱ یا ۲ است، نیاز به دو بیت برای خروجی داریم.

W و X بصورت توابعی بر اساس a, b, c و بصورت جمع مین‌ترم‌ها بیان می‌شوند:

$$w(a,b,c) = \sum m(2,5) \quad , \quad x(a,b,c) = \sum m(1,4,7)$$

حال باید W و X را با استفاده از جدول کارنو ساده کنیم:

bc \ a	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰				۱
۱		۱		

$$w = \bar{a}bc + a\bar{b}c$$

bc \ a	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰		۱		
۱	۱		۱	

$$x = abc + \bar{a}bc + a\bar{b}c$$

البته در این مثال خاص، اتفاقاً خود توابع بصورت ساده شده هستند و با جدول کارنو قابل ساده‌تر شدن نیستند.

مثال ۲۵: تابعی طراحی کنید که یک ورودی BCD را گرفته و (+۵ ورودی) را به عنوان خروجی بدهد.

a	b	c	d	w	x	y	z
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	X	X	X	X
۱	۰	۱	۱	X	X	X	X
۱	۱	۰	۰	X	X	X	X
۱	۱	۰	۱	X	X	X	X
۱	۱	۱	۰	X	X	X	X
۱	۱	۱	۱	X	X	X	X

✓ پاسخ: چون گفته ورودی BCD پس ورودی ۴ بیتی و بین ۰-۹ است.

چون گفته خروجی = ورودی + ۵ باشد پس خروجی هم چهار بیتی است.

چون گفته ورودی BCD است پس ورودی‌های ۱۰-۱۵ هیچگاه در ورودی نمی‌آیند، پس خروجی تابع به ازای آنها نامشخص است. پس حالات بی‌اهمیت هستند.

$$w(a,b,c,d) = \sum m(3,4,5,6,7,8,9) + d(10,11,12,13,14,15)$$

$$x(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,7,8,9) + d(10,11,12,13,14,15)$$

$$y(a,b,c,d) = \sum m(1,2,5,6,9) + d(10,11,12,13,14,15)$$

$$z(a,b,c,d) = \sum m(0,2,4,6,8) + d(10,11,12,13,14,15)$$

حال تک‌تک توابع W, X, Y, Z باید با استفاده از جدول کارنو ساده شوند.

cd \ ab	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰			۱	
۰۱	۱	۱	۱	۱
۱۱	X	X	X	X
۱۰	۱	۱	X	X

$$w = a + b + cd$$

cd \ ab	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۱	۱		۱
۰۱			۱	
۱۱	X	X	X	X
۱۰	۱	۱	X	X

$$x = bcd + \bar{b}\bar{d} + \bar{b}c$$

cd \ ab	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰		۱		۱
۰۱				۱
۱۱	X	X	X	X
۱۰		۱	X	X

$$y = \bar{c}d + c\bar{d}$$

cd \ ab	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۱			۱
۰۱	۱			۱
۱۱	X	X	X	X
۱۰	۱		X	X

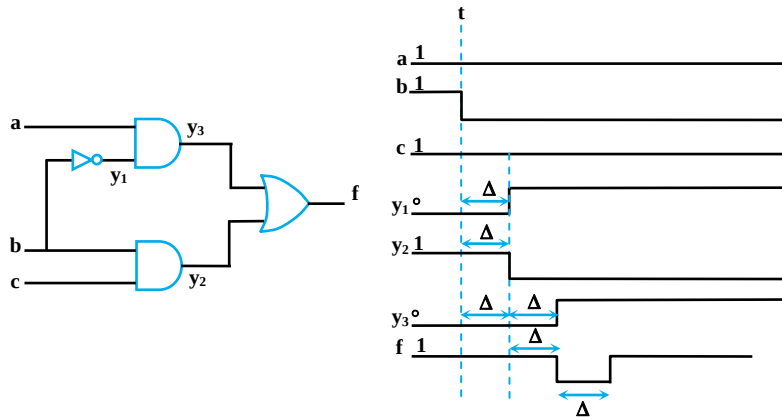
$$z = \bar{d}$$



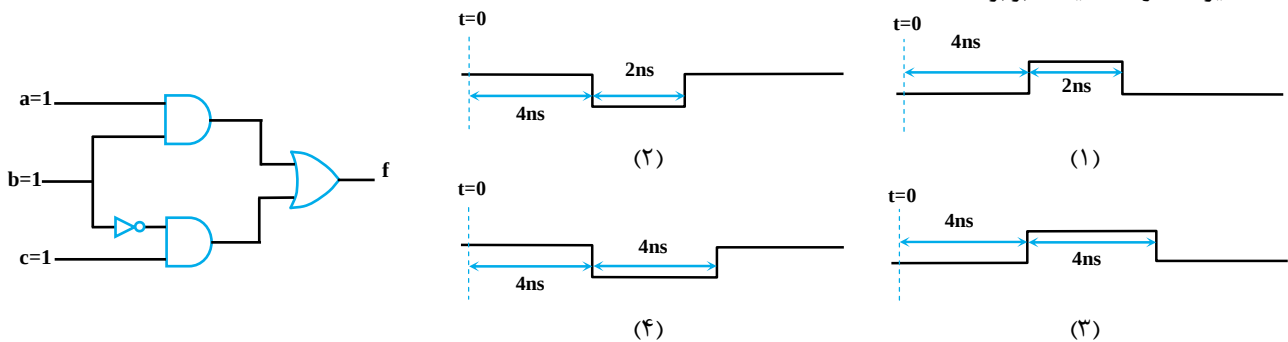
مثال ۲۶: اگر در مدار زیر مقدار abc در لحظه t از ۱۱۱ به ۱۰۱ تغییر نماید، شکل موج خروجی بصورت زیر خواهد بود.

پاسخ: در مثال مطرح شده تأخیر انتشار همه گیت‌ها برابر Δ در نظر گرفته شده است. در لحظه t که $b = 0$ می‌شود، پس از گذشت زمان Δ نتیجه در خروجی y_1 و y_2 ظاهر می‌گردد.

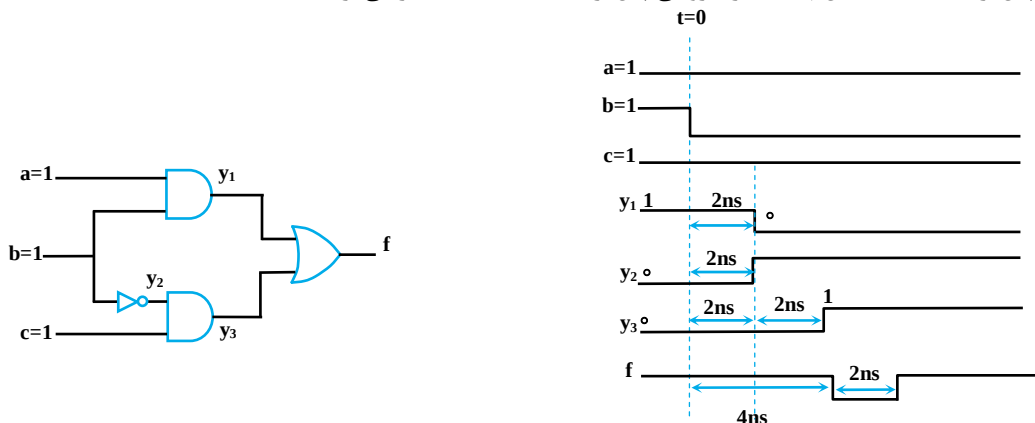
پس از تغییر y_1 بعد از گذشت Δ تغییر در خروجی y_3 ظاهر می‌شود و در نهایت هرگاه که y_1 یا y_2 تغییر نمایند پس از زمان Δ تغییر در f ظاهر می‌شود. همانگونه که در شکل موج f مشاهده می‌شود، مقدار f قبل و بعد از مخاطره ۱ است اما در لحظاتی صفر می‌شود.



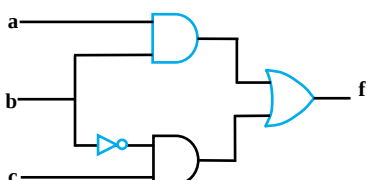
مثال ۲۷: در مورد شکل زیر اگر در لحظه $t = 0$ ورودی b از ۱ به صفر تغییر نماید، آنگاه کدام گزینه شکل موج خروجی f را به درستی نشان می‌دهد؟ (تأخیر انتشار همه گیت‌ها برابر $2ns$ است).



پاسخ: گزینه «۲» چون تابع $f(a, b, c) = ab + \bar{b}c$ به فرم SOP است دارای Hazard - ۱ - static است. پس گزینه‌های ۳ و ۱ رد می‌شوند. با رسم شکل موج f گزینه درست مشخص می‌گردد. با توجه به شکل در فاصله زمانی $2ns$ و $4ns$ ، y_1 و y_3 هر دو صفر هستند پس خروجی مدار پس از $2ns$ صفر می‌شود. پس از $4ns$ با یک شدن y_3 مقدار خروجی پس از $2ns$ مجدداً به یک بر می‌گردد.

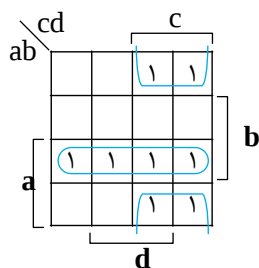


مثال ۲۸: در مورد شکل مقابل کدام گزینه درست است؟



- (۱) دارای Hazard - ۱ - Static $1010 \leftrightarrow 1110$ است.
- (۲) دارای Hazard - ۱ - Static $1011 \leftrightarrow 1111$ است.
- (۳) دارای Hazard - ۰ - Static $1010 \leftrightarrow 1110$ است.

(۴) گزینه ۲ و ۱

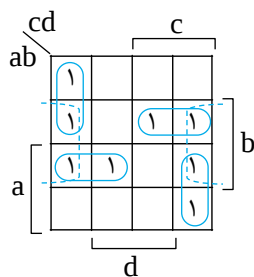
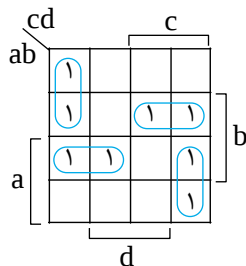


✓ پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه $f(a,b,c,d) = ab + \bar{b}c$ اگر تابع را روی جدول کارنو نمایش دهیم با دسته‌بندی ۱ها مشخص می‌شود که مین‌ترم‌های ۱۰ و ۱۱-۱۴ و ۱۵ با هم مجاور هستند. اما در یک دسته قرار نگرفته‌اند.

بنابراین تابع دارای static-1-Hazard است.

$$\left. \begin{array}{l} 1010 \leftrightarrow 1110 \\ 1011 \leftrightarrow 1111 \end{array} \right\}$$

🔗 مثال ۲۹: به تابع $f(a,b,c,d) = \sum m(0,4,6,7,10,12,13,14)$ توجه نمایید. اگر تابع روی جدول کارنو نمایش داده شود و دسته‌بندی مین‌ترم‌ها انجام شود، جدول بصورت زیر خواهد بود.



همانگونه که مشاهده می‌شود، m_4 با m_6 و m_4 با m_2 و m_6 با m_2 و m_4 با m_2 مجاور هستند، اما در هیچ دسته‌ای با هم قرار نگرفته‌اند. بنابراین، این تابع به این صورت دارای مخاطره خواهد بود. برای برطرف کردن مخاطره باید دسته‌هایی به جدول اضافه شود که همه مین‌ترم‌های مجاور را در یک دسته با هم قرار دهد. بنابراین شکل جدول بصورت روبه‌رو می‌شود.

و تابع f از جدول بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}cd + abc + \bar{a}bc + acd + bd$$

این تابع دارای مخاطره نخواهد بود.

🔗 مثال ۳۰: اگر بخواهیم در مدار مثال ۲۰ مخاطره از میان برود، کدام جمله‌ها باید به تابع اضافه گردد؟

$$(a+c+\bar{d})(a+c+d) \quad (۴)$$

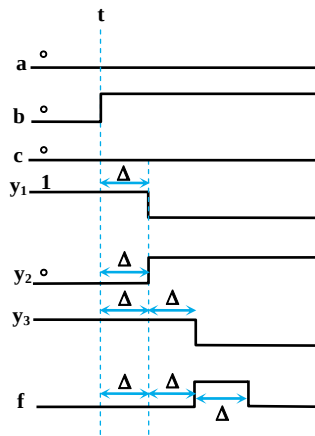
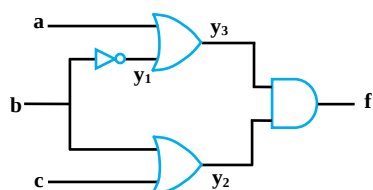
$$(a+c) \quad (۳)$$

$$ac \quad (۲)$$

$$acd + acd \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۲» برای برطرف کردن مخاطره در این مدار کفایت که مین‌ترم‌های ۱۰ و ۱۱-۱۴ و ۱۵ در یک دسته قرار گیرند که با اضافه کردن دسته‌ای شامل آنها با عبارت ac مخاطره از میان می‌رود.

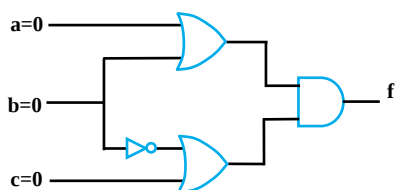
🔗 مثال ۳۱: اگر در مدار زیر مقدار a, b, c در لحظه t از ۰۰۰ به ۰۱۰ تغییر نماید، شکل موج خروجی بصورت زیر خواهد بود.



✓ پاسخ: در مدار داده شده تأخیر انتشار همه گیت‌ها برابر Δ در نظر گرفته شده است. در لحظه t که $b=1$ می‌شود، پس از گذشت زمان Δ نتیجه در خروجی‌های y_1 و y_2 ظاهر می‌شود. پس از تغییر y_1 بعد از گذشت زمان Δ تغییر در خروجی y_3 ظاهر می‌شود و در نهایت هرگاه که y_1 یا y_2 تغییر نماید پس از زمان Δ تغییر در خروجی f ظاهر می‌شود. با توجه به شکل موج خروجی f ، مقدار f قبل و بعد از مخاطره صفر است اما در لحظاتی یک می‌شود.



مثال ۳۲: در مورد شکل مقابل اگر در لحظه $t = 0$ ورودی b از صفر به یک تغییر نماید، کدام گزینه صحیح است؟
(تأخیر انتشار همه گیت‌ها برابر $2ns$ است).



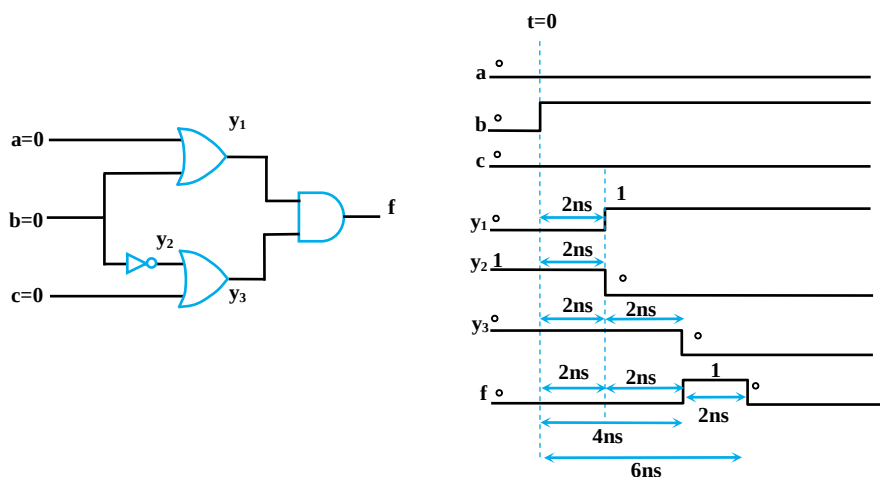
(۱) $4ns$ بعد خروجی ۰ شده و $6ns$ بعد خروجی ۱ می‌شود.

(۲) $4ns$ بعد خروجی ۱ شده و $6ns$ بعد خروجی ۰ می‌شود.

(۳) $6ns$ بعد خروجی ۰ شده و $8ns$ بعد خروجی ۱ می‌شود.

(۴) $6ns$ بعد خروجی ۱ شده و $8ns$ بعد خروجی ۰ می‌شود.

☒ پاسخ: گزینه «۲» اگر شکل موج خروجی‌ها رسم شود، داریم:



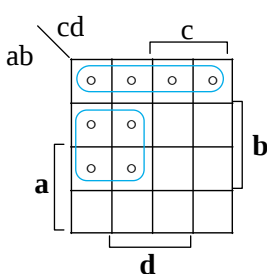
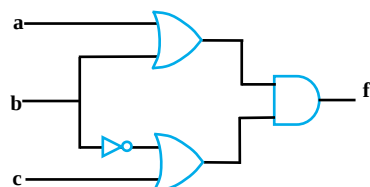
مثال ۳۳: در مورد شکل مقابل کدام گزینه درست است؟

(۱) دارای Static - 0 - Hazard است. $0000 \leftrightarrow 0100$

(۲) دارای Static - 0 - Hazard است. $0001 \leftrightarrow 0101$

(۳) دارای Static - 1 - Hazard است. $0001 \leftrightarrow 0101$

(۴) گزینه ۱ و ۲



☒ پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه $f(a,b,c,d) = (a+b)(\bar{b}+c)$ اگر تابع را روی جدول کارنو

نمایش دهیم با دسته‌بندی صفرها مشخص می‌شود که ماکسترم‌های ۰ و ۴-۱ و ۵ با هم مجاور هستند اما در یک دسته قرار نگرفته‌اند.

بنابراین مدار دارای Static - 0 - Hazard است. $0000 \leftrightarrow 0100$ و $0001 \leftrightarrow 0101$

مثال ۳۴: اگر بخواهیم در مدار تست قبل مخاطره از میان برود، کدام جمله‌ها باید به تابع اضافه گردد؟

(۴) $acd + ac\bar{d}$

(۳) $(a+c)$

(۲) $(a+c+d), (a+c+\bar{d})$

(۱) ac

☒ پاسخ: گزینه «۳» برای برطرف کردن مخاطره در این مدار کافیهست که ماکسترم‌های ۰ و ۴-۱ و ۵ در یک دسته قرار گیرند که با اضافه کردن

دسته‌ای شامل آنها با عبارت $(a+c)$ مخاطره از میان می‌رود.

آزمون فصل سوم

۱- ساده شده تابع $f(A, B, C, D, E) = \sum m(1, 3, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 22, 24, 25, 27)$ کدام گزینه است؟

$$\overline{C}E + \overline{A}B\overline{C}E + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}E \quad (1) \quad \overline{C}E + \overline{A}B\overline{C}E + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}E$$

$$\overline{C}E + \overline{A}B\overline{C}E + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}E \quad (2) \quad \overline{C}E + \overline{A}B\overline{C}E + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}E$$

۲- ساده شده تابع $f(A, B, C, D, E) = \sum m(7, 9, 12, 13, 19, 23) + d(0, 3, 20, 25, 27, 28, 29)$ کدام گزینه است؟

$$\overline{B}C\overline{D} + \overline{B}DE + \overline{B}DE \quad (1) \quad \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}DE + \overline{B}DE \quad (2) \quad \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}DE + \overline{B}DE \quad (3) \quad \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}DE + \overline{B}DE \quad (4)$$

۳- ساده شده تابع $f(A, B, C, D, E) = \prod M(0, 5, 8, 10, 21, 29, 31) \cdot D(2, 12, 13, 14, 15, 25, 26)$ کدام گزینه است؟

$$(A + \overline{C} + E)(\overline{C} + D + \overline{E})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{E}) \quad (1) \quad (A + C + E)(\overline{C} + D + \overline{E})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{E})$$

$$(A + C + E)(\overline{C} + D + \overline{E})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{E}) \quad (2) \quad (A + C + E)(\overline{C} + D + \overline{E})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{E}) \quad (3)$$

۴- ساده شده تابع $f(A, B, C, D) = \prod M(0, 7, 11, 15) \cdot D(1, 2, 3)$ کدام گزینه است؟

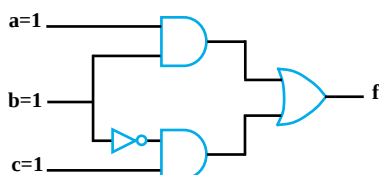
$$ABC + \overline{C}\overline{D} \quad (1) \quad (\overline{A} + \overline{B})(C + D) \quad (2) \quad (A + B)(\overline{C} + \overline{D}) \quad (3) \quad (A + B + C)(\overline{C} + \overline{D}) \quad (4)$$

۵- ساده شده تابع $f(A, B, C, D, E) = \prod M(1, 4, 7, 9, 15, 17, 20, 23, 25, 31)$ کدام گزینه است؟

$$(\overline{C} + \overline{D} + \overline{E})(C + D + \overline{E})(B + \overline{C} + D + E) \quad (1) \quad CDE + \overline{C}DE + \overline{B}C\overline{D}E$$

$$(\overline{C} + \overline{D} + E)(C + D + \overline{E})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) \quad (2) \quad (C + \overline{D} + E)(C + D + \overline{E})(B + \overline{C} + D + E) \quad (3)$$

۶- در مورد شکل مقابل اگر در لحظه $t = 0$ ورودی b از ۱ به صفر تغییر نماید، کدام گزینه صحیح است؟ (تأخیر انتشار همه گیت‌ها برابر ۲ns است)



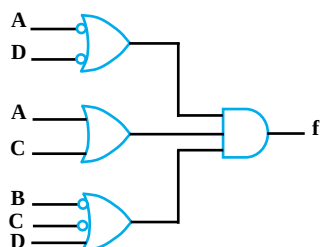
(۱) ۴ns بعد خروجی صفر شده و ۶ns بعد خروجی یک می‌شود.

(۲) ۴ns بعد خروجی یک شده و ۶ns بعد خروجی صفر می‌شود.

(۳) ۶ns بعد خروجی صفر شده و ۸ns بعد خروجی یک می‌شود.

(۴) ۶ns بعد خروجی صفر شده و ۸ns بعد خروجی صفر می‌شود.

۷- در مورد شکل مقابل کدام گزینه درست است؟



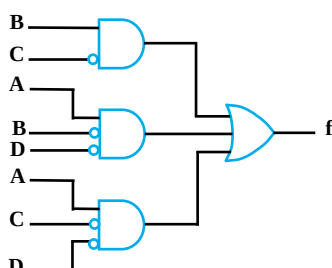
(۱) دارای Hazard - ۰ - Static ۰۱۰۰ ↔ ۰۱۱۰ است.

(۲) دارای Hazard - ۰ - Static ۰۱۰۱ ↔ ۱۱۰۱ است.

(۳) دارای Hazard - ۰ - Static ۱۱۱۰ ↔ ۱۱۱۱ است.

(۴) هر سه گزینه

۸- در مورد شکل مقابل کدام گزینه درست است؟



(۱) دارای Hazard - ۱ - Static ۱۰۱۰ ↔ ۱۰۱۱ است.

(۲) دارای Hazard - ۱ - Static ۱۰۰۰ ↔ ۱۱۰۰ است.

(۳) دارای Hazard - ۱ - Static ۱۱۰۱ ↔ ۱۱۱۱ است.

(۴) هر سه گزینه

۹- برای آنکه در شکل مدار تست (۷)، Hazard برطرف شود باید چه جمله‌هایی به تابع اضافه گردد؟

$$(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \quad (1) \quad (\overline{B} + C + \overline{D}) \quad (2) \quad (A + \overline{B} + D) \quad (3) \quad (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \quad (4)$$

۱۰- برای آنکه در شکل مدار تست (۸)، Hazard برطرف شود باید چه جمله‌هایی به تابع اضافه گردد؟

$$ABD \quad (1) \quad ACD \quad (2) \quad \overline{A}BC \quad (3) \quad \overline{A}BC \quad (4)$$

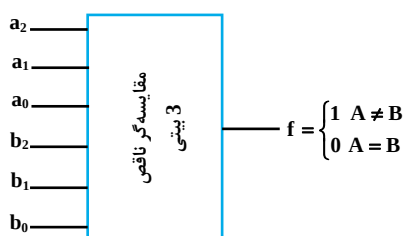


فصل چهارم

«مدارهای منطقی ترکیبی»

تست‌های تأییدی فصل چهارم

🔗 مثال ۱: اگر مدار مقابل یک مقایسه‌گر ناقص ۳ بیتی باشد، تابع f کدام است؟



$$f = (a_2 \odot b_2)(a_1 \odot b_1)(a_0 \odot b_0) \quad (۱)$$

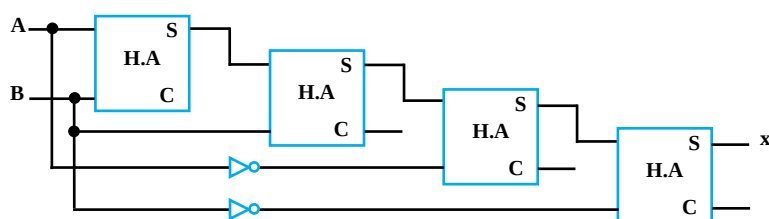
$$f = \overline{(a_2 \odot b_2)(a_1 \odot b_1)(a_0 \odot b_0)} \quad (۲)$$

$$f = (a_2 \oplus b_2)(a_1 \oplus b_1)(a_0 \oplus b_0) \quad (۳)$$

$$f = \overline{(a_2 \oplus b_2)(a_1 \oplus b_1)(a_0 \oplus b_0)} \quad (۴)$$

✅ پاسخ: گزینه «۲» چون هنگامیکه $A = B$ شود $f = ۰$ است، گزینه «۲» جواب است. برای برابر بودن عدد ۳ بیتی A با عدد ۳ بیتی B باید a_0 با b_0 برابر باشد، a_1 با b_1 برابر باشد و a_2 هم با b_2 برابر باشد. برای بررسی برابری هر بیت از A با هر بیت از B از گیت XNOR استفاده می‌شود. پس شرط تساوی A و B برابر $(a_0 \odot b_0)(a_1 \odot b_1)(a_2 \odot b_2)$ است. در صورت برابری $A = B$ مقدار این عبارت برابر یک خواهد شد، چون گفته شده در صورت برابری $A = B$ خروجی برابر صفر شود پس باید از عبارت فوق NOT بگیریم.

🔗 مثال ۲: خروجی x در مدار مقابل کدام گزینه است؟



$$A \oplus B \quad (۱)$$

$$A \odot B \quad (۲)$$

$$A \quad (۳)$$

$$B \quad (۴)$$

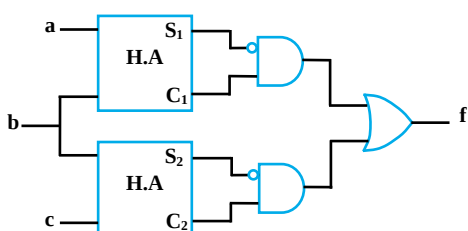
✅ پاسخ: گزینه «۴» اگر H.A ها را از چپ به راست شماره گذاری نماییم:

$$S_1 = A \oplus B \rightarrow S_2 = A \oplus \underbrace{B \oplus B}_0 = A$$

$$S_3 = A \oplus \bar{A} = 1$$

$$S_4 = 1 \oplus \bar{B} = B$$

🔗 مثال ۳: خروجی مدار مقابل معادل کدام گزینه است؟



$$(۱) \text{ صفر}$$

$$ab + \bar{a}bc \quad (۲)$$

$$\bar{a}b + a\bar{b} \quad (۳)$$

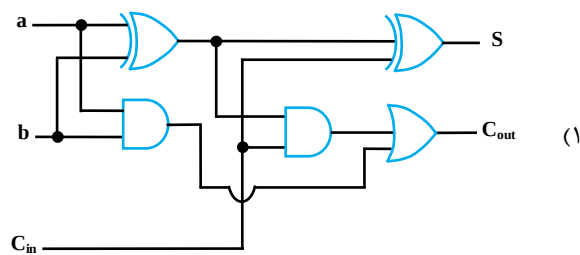
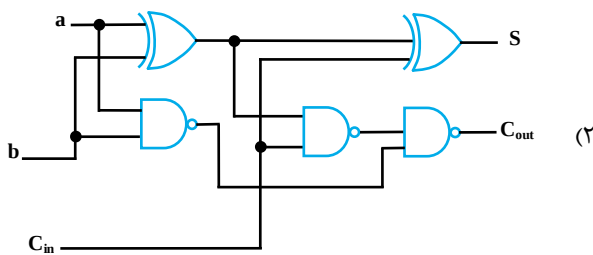
$$ab + bc \quad (۴)$$

$$f = \bar{S}_1 C_1 + \bar{S}_2 C_2 = (\bar{a} \oplus b)ab + (\bar{b} \oplus c)bc = (\bar{a}\bar{b} + ab)ab + (\bar{b}c + bc)bc = ab + bc$$

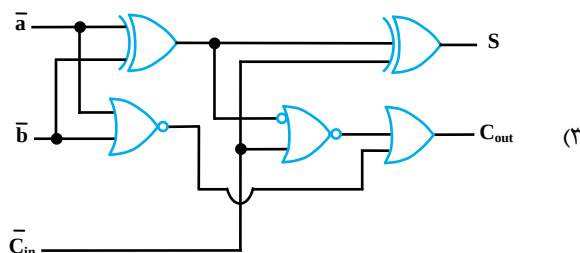
✅ پاسخ: گزینه «۴»



🔗 مثال ۴: کدام مدار مربوط به (Full Adder) است؟



(۴) هر سه مورد



🔍 پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های ۲ و ۳ معادل گزینه ۱ هستند. شکل گزینه ۱، شکل اصلی جمع کننده است. در گزینه ۲، تابع C_{out} از ساختار AND-OR به ساختار NAND-NAND تبدیل شده است. در گزینه ۳ نیز بر اساس معادله‌های گیتی، شکل معادلی با شکل گزینه ۱ ارائه شده است. در شکل گزینه ۳ ورودی‌ها NOT شده‌اند ولی به جای گیت‌های AND از NOR استفاده شده است. همچنین XOR نهایی در مسیر S به XNOR تبدیل شده است. بنابراین هر سه گزینه معادل جمع کننده کامل هستند.

🔗 مثال ۵: برای ضرب یک عدد ۳ بیتی در یک عدد ۲ بیتی، چند عدد گیت AND، چند عدد جمع کننده کامل، چند عدد جمع کننده ناقص مورد نیاز

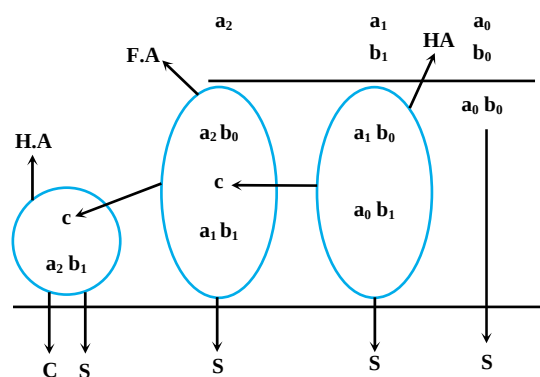
است. (حداقل سخت افزار ممکن بکار رود)

(۲) ۶ عدد گیت AND، ۲ عدد F.A، ۱ عدد H.A

(۱) ۵ عدد گیت AND، ۲ عدد F.A، ۱ عدد H.A

(۴) ۶ عدد گیت AND، ۱ عدد F.A، ۲ عدد H.A

(۳) ۵ عدد گیت AND، ۱ عدد F.A، ۲ عدد H.A



🔍 پاسخ: گزینه «۴» برای ضرب یک عدد m بیتی در یک عدد n بیتی، نیاز به $n \times m$ عدد گیت AND داریم تعداد F.A و H.A های مورد نیاز بصورت زیر مشخص می‌شود. در مرحله اول چون رقم نقلی نداریم یک H.A کافی است. در مرحله دوم یک رقم نقلی با دو رقم حاصل ضرب میانی با هم جمع می‌شوند که از یک FA استفاده می‌شود. در مرحله سوم یک رقم نقلی و یک رقم $a_2 b_1$ با هم جمع می‌شوند که با استفاده از یک H.A می‌توان این کار را انجام داد.

دو عدد H.A و یک عدد F.A نیاز داریم.

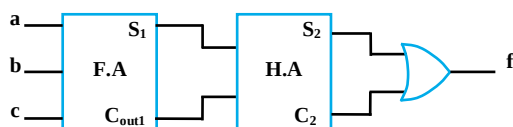
🔗 مثال ۶: مین ترم‌های تابع $f(a,b,c)$ در کدام گزینه است؟

$$f(a,b,c) = \sum m(1,2,3,4,5,6,7) \quad (۱)$$

$$f(a,b,c) = \sum m(0) \quad (۲)$$

$$f(a,b,c) = \prod M(0) \quad (۳)$$

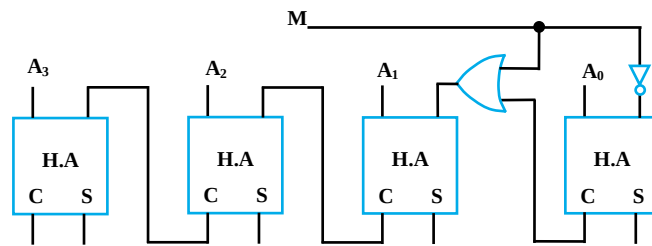
$$f(a,b,c) = \prod M(0,1,5,6,7) \quad (۴)$$



🔍 پاسخ: گزینه «۱» با توجه به جدول صحت F.A و معادله $f = S_7 + C_7 = (S_1 \oplus C_{out1}) + (S_1 C_{out1})$ به دست آمده برای f، گزینه «۱» صحیح است.



مثال ۷: در مورد مدار زیر کدام گزینه درست است؟

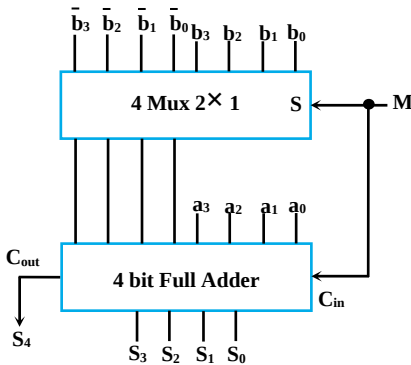


- (۱) اگر $M = 0$ مدار $A + 1$ و اگر $M = 1$ مدار $A - 1$ را تولید می‌کند.
 (۲) اگر $M = 0$ مدار $A - 1$ و اگر $M = 1$ مدار $A + 1$ را تولید می‌کند.
 (۳) اگر $M = 0$ مدار $A + 1$ و اگر $M = 1$ مدار $A + 2$ را تولید می‌کند.
 (۴) اگر $M = 0$ مدار $A - 1$ و اگر $M = 1$ مدار $A - 2$ را تولید می‌کند.

پاسخ: گزینه «۳» اگر $M = 0$ باشد عدد A با ۱ جمع شده و اگر $M = 1$ باشد، عدد A با ۲ جمع می‌شود. دقت نمایید که اگر $M = 0$ باشد ورودی به اولین HA برابر یک بوده و M تأثیری در گیت OR نخواهد داشت. بنابراین عدد A را با یک جمع می‌کند. اگر $M = 1$ باشد ورودی به اولین HA برابر صفر خواهد بود، ولی ورودی به گیت OR برابر یک می‌شود. در نتیجه خروجی گیت OR حتماً برابر یک می‌شود بنابراین چون به دومین HA یک عدد یک وارد می‌شود عدد A با ۲ جمع خواهد شد.

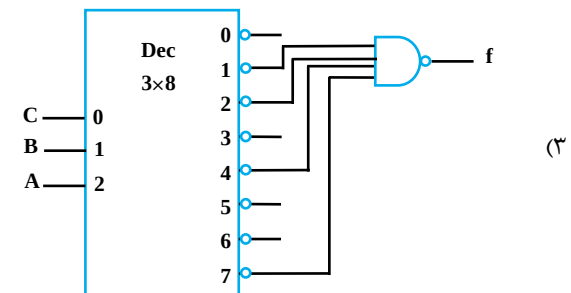
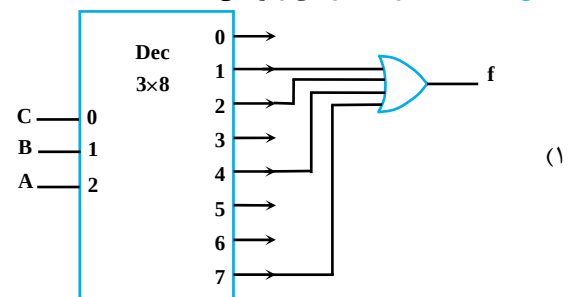
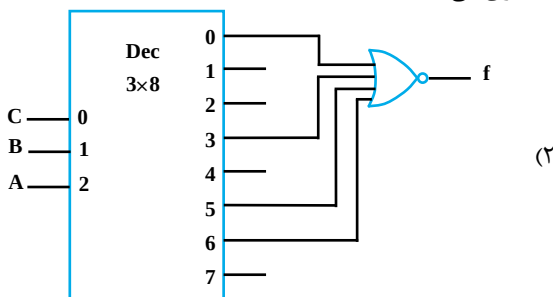
مثال ۸: عملکرد مدار مقابل چیست؟

- (۱) دو عدد چهار بیتی باینری را جمع / تفریق می‌کند.
 (۲) دو عدد چهار بیتی باینری را ضرب / تقسیم می‌کند.
 (۳) دو عدد چهار بیتی باینری را به چپ / راست شیفت می‌دهد.
 (۴) هیچکدام



پاسخ: گزینه «۱» اگر $M = 0$ باشد، جمع‌کننده $A + B + 0$ را انجام می‌دهد. اگر $M = 1$ باشد، جمع‌کننده $A + \bar{B} + 1$ یا همان $A - B = A + B^{scom}$ را انجام می‌دهد.

مثال ۹: کدامیک از دیکدرهای زیر تابع $f(A, B, C) = A \oplus B \oplus C$ را پیاده سازی می‌کند؟

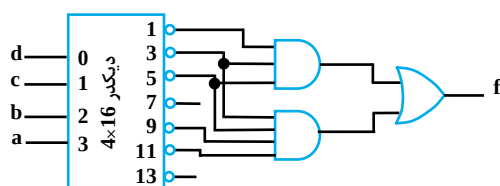


(۴) هر سه مورد

پاسخ: گزینه «۴» هر سه مورد تابع $f(A, B, C) = A \oplus B \oplus C = \Sigma(1, 2, 4, 7)$ را پیاده سازی می‌کنند. شکل ۱ طراحی تابع را با یک دیکدر 3×8 Active High نشان می‌دهد و کافی است خروجی‌های متناظر با مین‌ترم‌های تابع را OR کنیم. در شکل ۲ با توجه به اینکه مجموعه پایه‌های به جز مین‌ترم (یعنی ماکسترم‌های تابع) را انتخاب کردیم باید آن‌ها را با هم NOR کنیم. در گزینه ۳ از پیاده‌سازی تابع مین‌ترم با دیکدر Active low استفاده شده است که باید از گیت NAND استفاده شود.



🔗 مثال ۱۰: تابعی که شکل مقابل پیاده سازی می‌کند، کدام گزینه است؟



$$f(a, b, c, d) = \Pi M(1, 3, 5, 9, 11) \quad (1)$$

$$f(a, b, c, d) = \Pi M(1, 3, 5) \quad (2)$$

$$f(a, b, c, d) = \Pi M(3, 5, 9, 11) \quad (3)$$

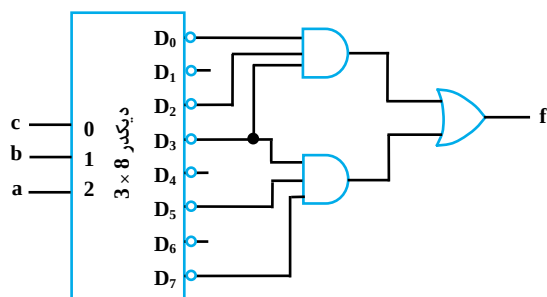
$$f(a, b, c, d) = \Pi M(3, 5) \quad (4)$$

✓ پاسخ: گزینه «۴» چون دیکدر فعال پایین یا Active low است پس مولد ماکسترم است. در طبقه بعدی این ماکسترم‌ها با هم AND شده‌اند. یکی از گیت‌های AND خروجی $M_1.M_3.M_5$ و گیت AND دیگر خروجی $M_3.M_5.M_9.M_{11}$ را تولید می‌کند. در نهایت این دو مجموعه با هم OR می‌شوند که باید بین این شماره‌ها اشتراک گرفت یعنی:

$$(M_3.M_5.M_9.M_{11}) \cap (M_1.M_3.M_5) = M_3.M_5$$

$$f = (M_1.M_3.M_5) + (M_3.M_5.M_9.M_{11}) = M_3.M_5$$

🔗 مثال ۱۱: خروجی مدار زیر معادل کدام گزینه است؟



$$f = \sum m(2, 4, 6, 7) \quad (1)$$

$$f = \sum m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 7) \quad (2)$$

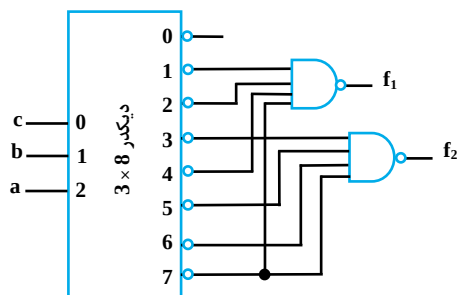
$$f = \Pi M(3) \quad (3)$$

$$(4) \text{ گزینه ۳ و ۲}$$

✓ پاسخ: گزینه «۴» هنگامی که دو مجموعه ماکسترم با هم OR شوند، حاصل برابر اشتراک دو مجموعه است.

$$F = \Pi M(0, 2, 3) + \Pi M(3, 5, 7) = \Pi M(3) = \sum m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 7)$$

🔗 مثال ۱۲: مدار زیر چه عملی انجام می‌دهد؟



$$(1) \text{ یک دیکدر } 3 \times 8 \text{ فعال پایین است.}$$

$$(2) \text{ یک جمع کننده کامل (F.A) است.}$$

$$(3) \text{ یک تفریق کننده کامل (F.S) است.}$$

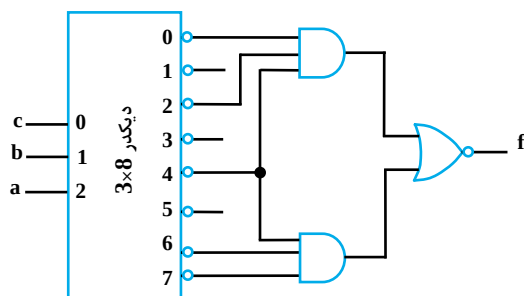
$$(4) \text{ هیچکدام}$$

✓ پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه دیکدر فعال پایین است و از گیت‌های NAND استفاده شده، دیکدر فعال پایین تولید کننده ماکسترم است و هنگامی که ماکسترم‌ها را با هم NAND کنیم معادل جمع مین ترم‌ها خواهد شد، بنابراین داریم:

$$f_1 = \sum m(1, 2, 3, 7) \quad , \quad f_2 = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

توابع به دست آمده مربوط به Sum و C_{out} یک جمع کننده کامل هستند.

🔗 مثال ۱۳: تابع پیاده‌سازی شده توسط شکل مقابل کدام گزینه است؟



$$f(a, b, c) = \sum m(0, 2, 4, 6, 7) \quad (1)$$

$$f(a, b, c) = \sum m(4) \quad (2)$$

$$f(a, b, c) = \Pi M(0, 1, 2, 3, 5, 6, 7) \quad (3)$$

$$(4) \text{ گزینه ۳ و ۲}$$



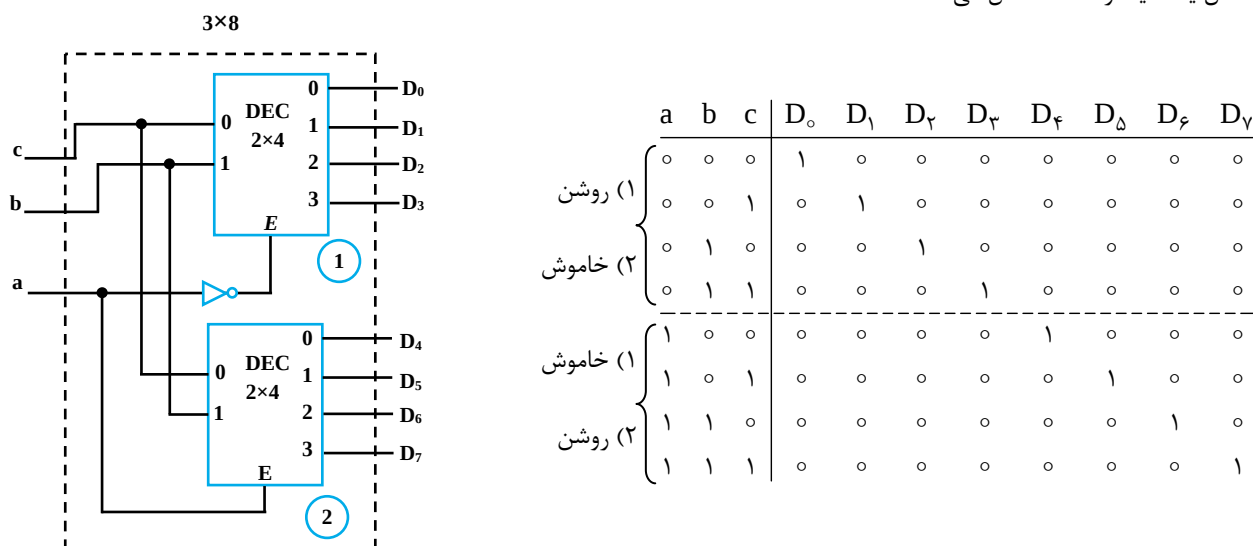
✓ پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه دیکدر فعال پایین مولد ماکسترم است (ماکسترم‌ها ورودی‌هایش را تولید می‌کند) در طبقه بعدی مدار ماکسترم‌ها با هم AND می‌شوند. پس خروجی یکی از AND ها برابر $M_0.M_1.M_4$ و خروجی AND دیگر برابر $M_4.M_6.M_7$ است. در طبقه آخر مدار این دو مجموعه با هم NOR می‌شوند که طبق قانون دمرگان ماکسترم‌ها به مین ترم، جمع به ضرب، ضرب به جمع تبدیل می‌شود. در مرحله آخر دو مجموعه جمع مین ترمی داریم که در یکدیگر ضرب می‌شوند که در این حالت باید میان این شماره‌ها اشتراک گرفت. داریم:

$$f(a, b, c) = \overline{(M_0.M_1.M_4)} + \overline{(M_4.M_6.M_7)} = \overline{(M_0.M_1.M_4)} . \overline{(M_4.M_6.M_7)}$$

$$= (m_0 + m_1 + m_4)(m_4 + m_6 + m_7) = m_4 \Rightarrow f = \sum m(4) = \Pi M(0, 1, 2, 3, 5, 6, 7)$$

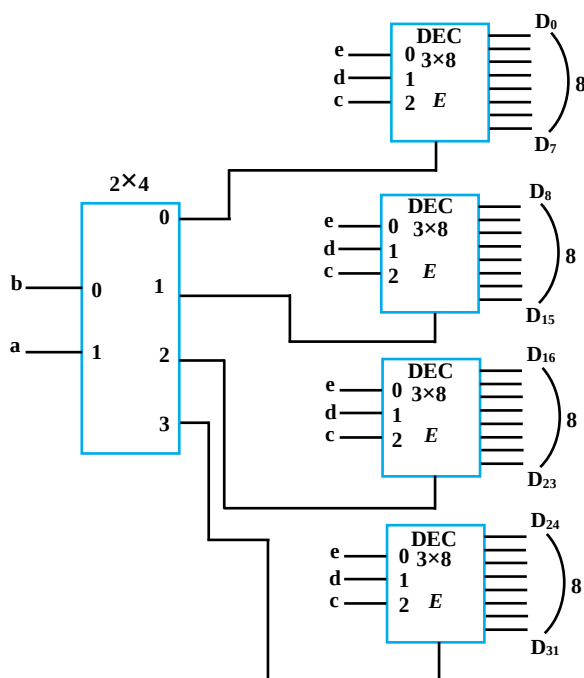
🔗 مثال ۱۴: ساخت یک دیکدر 3×8 با استفاده از دو عدد دیکدر 2×4 .

✓ پاسخ: در این شکل ورودی $\bar{a}$ به فعال‌ساز دیکدر بالائی و a به فعال‌ساز دیکدر پایینی متصل شده است. اگر $a = 0$ باشد $\bar{a} = 1$ خواهد شد و دیکدر بالائی روشن و دیکدر پایینی خاموش خواهد شد، حال بر اساس مقدار c و b یکی از خروجی‌های دیکدر بالائی فعال می‌شود که در ۴ ردیف اول جدول پایین نشان داده شده است. اگر $a = 1$ باشد $\bar{a} = 0$ خواهد شد و دیکدر بالائی خاموش و دیکدر پایینی روشن خواهد شد، حال بر اساس مقدار c و b یکی از خروجی‌های دیکدر پایینی فعال می‌شود که در ۴ ردیف دوم جدول پایین مشاهده می‌شود. بنابراین در کل این دو دیکدر به همراه گیت NOT معادل یک دیکدر 3×8 عمل می‌کنند.



🔗 مثال ۱۵: ساخت یک دیکدر 5×32 با استفاده از یک دیکدر 2×4 و چهار دیکدر 3×8 .

✓ پاسخ: در این شکل براساس مقدار b و a یکی از خروجی‌های دیکدر 2×4 فعال خواهد شد. هر کدام از این خروجی‌ها که فعال شوند، منجر به فعال شدن یکی از دیکدرهای طبقه دوم می‌شود. حال هر دیکدری که فعال شود، براساس مقدار c, d, e یکی از خروجی‌های آن دیکدر فعال می‌شوند. بنابراین در هر لحظه براساس مقدار a, b, c, d, e یکی از ۳۲ خروجی نهایی فعال هستند. پس این شکل معادل یک دیکدر 5×32 عمل می‌کند.



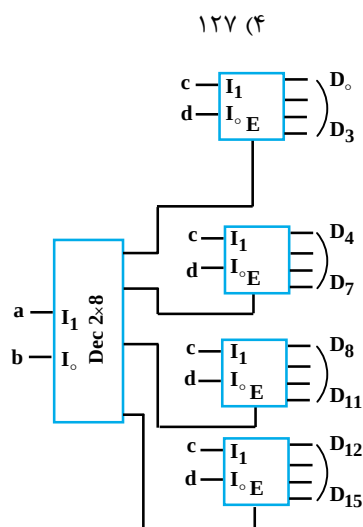


مثال ۱۶: برای ساختن یک دیکدر 4×16 چند عدد دیکدر 2×4 لازم داریم؟

۶۳ (۳)

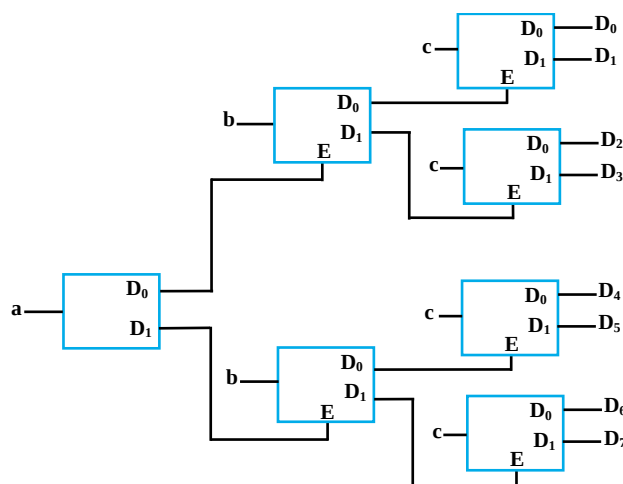
۵ (۲)

۱۵ (۱)



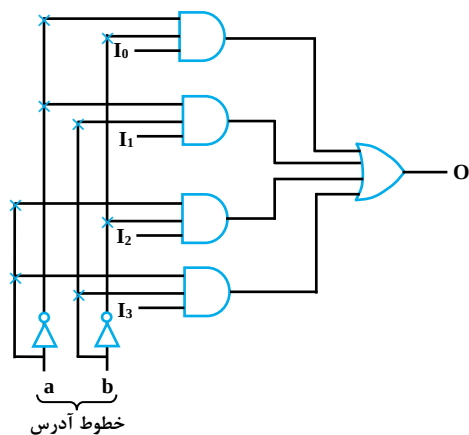
پاسخ: گزینه «۲» بر اساس شکل مقابل می‌توان بوسیله دیکدرهای 2×4 ، دیکدر 4×16 ساخت. در این طراحی بر اساس مقادیر a و b یکی از خروجی‌های دیکدر 2×4 سطح اول فعال می‌شود و با توجه به اینکه خروجی‌ها به پایه فعال کننده دیکدرهای سطح بعد متصل شده یکی از آنها را فعال می‌کند که خروجی آنها برحسب مقدار D و C تعیین خواهد شد.

مثال ۱۷: ساختن یک دیکدر 3×8 با هفت دیکدر 1×2 .



پاسخ: در این شکل بر اساس مقدار a یکی از دیکدرهای طبقه دوم، بر اساس مقدار b یکی از دیکدرهای طبقه سوم و در نهایت بر اساس مقدار c یکی از خروجی‌های نهایی فعال می‌شود. پس در نهایت این شکل همانند یک دیکدر 3×8 عمل می‌کند.

مثال ۱۸: به عنوان مثال ساختمان داخلی یک $Mux(4 \times 1)$ را بررسی می‌کنیم.



پاسخ: در یک مالتی پلکسر هر گیت AND یک مین ترم از 2^n مین ترم قابل تولید با n خط آدرس را تولید می‌کند و همچنین یک ورودی را در AND شرکت می‌دهد. چون به ازاء هر ترکیب خطوط آدرس فقط یکی از گیت‌های AND فعال می‌شود، تنها همان ورودی از گیت عبور کرده و به گیت OR می‌رسد. چون سایر ورودی‌های OR غیرفعال هستند، همان داده به خروجی می‌رود.

جدول زیر ورودی انتخاب شده بر اساس مقدار b و a را نشان می‌دهد.

a	b	o
۰	۰	I_0
۰	۱	I_1
۱	۰	I_2
۱	۱	I_3

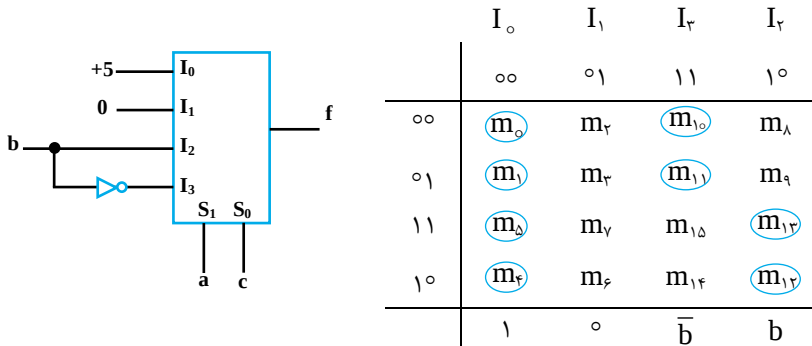
نتیجه‌گیری: برای ساخت یک $Mux(2^n \times 1)$ نیاز به 2^n گیت AND، که هر کدام $n+1$ عدد ورودی دارند، n گیت NOT، یک گیت OR، 2^n ورودی است.



مثال ۱۹: تابع زیر را با استفاده از یک $Mux(4 \times 1)$ پیاده‌سازی کنید. متغیرهای c و a را به آدرس Mux متصل نمایید.

$$f(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 4, 5, 10, 11, 12, 13)$$

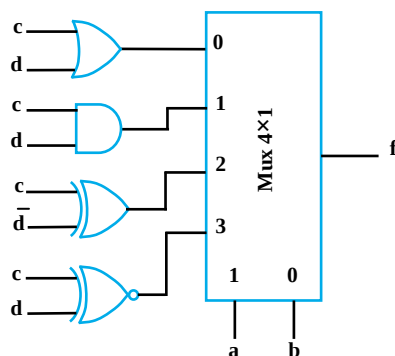
پاسخ: چون در صورت سؤال گفته شده که متغیرهای c و a به خطوط آدرس متصل شوند، پس باید متغیرهای d و b را به خطوط داده متصل کنیم. بنابراین در یک جدول در سطر مقدار d و b و در ستون مقدار c و a را نوشته و تمامی ترکیبات ممکن آنها را می‌نویسیم. حال در جدول بر اساس ترکیب d و c و b و a شماره مین‌ترمی بدست آمده را مشخص می‌کنیم. در مرحله بعد با توجه به مین‌ترم‌های تابع، دور مین‌ترم‌های درون جدول دایره می‌کشیم. در مرحله آخر نوبت این است که هر ستون را بصورت مستقل بر اساس مقدار d و b ساده کنیم. در نهایت مقدار هر ستون را بر اساس مقدار c و a به یکی از ورودی‌های مالتی پلکسر متصل می‌کنیم. مثلاً مقدار ستون 00 یعنی 1 را به I_0 ، مقدار ستون 01 یعنی 0 را به I_1 و متصل می‌نمایم.



چند نکته مهم:

- ۱) ساده شده هر ستونی که همه مین‌ترم‌های آن با دایره مشخص شده باشند، 1 است.
- ۲) ساده شده هر ستونی که هیچ‌کدام از مین‌ترم‌های آن مشخص نشده باشند، 0 است.
- ۳) عبارت هر ستون را بر اساس متغیرهای روی سطر می‌نویسیم.
- ۴) هر ستون متعلق به ورودی از مالتی پلکسر است که شماره باینری آن در بالای ستون نوشته شده است.

مثال ۲۰: ساده شده تابع پیاده‌سازی شده توسط شکل مقابل کدام گزینه است؟



$$a\bar{b}c + a\bar{b}d + a\bar{b}d + cd \quad (1)$$

$$a\bar{c}d + a\bar{b}d + \bar{b}c + \bar{c}d \quad (2)$$

$$acd + abd + a\bar{b}c + cd \quad (3)$$

$$a\bar{c}d + a\bar{b}d + a\bar{b}c + cd \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۱» در حالت کلی برای بدست آوردن تابع پیاده‌سازی شده توسط مالتی پلکسر $2^n \times 1$ یک عبارت کلی بصورت $F = m_0 I_0 + m_1 I_1 + \dots + m_{2^n-1} I_{2^n-1}$ وجود دارد که m_i مین‌ترم شماره i بر اساس خطوط آدرس (select) است. برای یکی مالتی پلکسر 4×1 فرم کلی این تابع بصورت $F = \bar{S}_1 \bar{S}_0 I_0 + \bar{S}_1 S_0 I_1 + S_1 \bar{S}_0 I_2 + S_1 S_0 I_3$ است. بنابراین در این شکل داریم:

$$F = \bar{a}\bar{b}(c+d) + \bar{a}bcd + \bar{a}b(c \oplus d) + ab(c \odot d)$$

$$= \bar{a}\bar{b}(c+d) + \bar{a}bcd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + ab(cd + \bar{c}\bar{d}) = \sum m(1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 15)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00		1	1	1
01			1	
11	1			
10	1			1

$$\Rightarrow f = a\bar{c}d + cd + a\bar{b}d + \bar{a}bc$$

در نهایت تابع را روی جدول کارنو نمایش داده و ساده می‌کنیم.



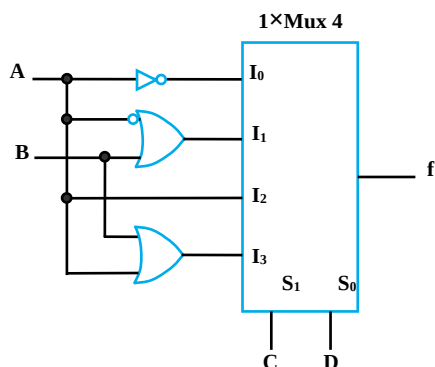
مثال ۲۱: تابع خروجی F کدام گزینه است؟

$$AB + \bar{A}C + B\bar{D} \quad (۱)$$

$$AB + CD + \bar{A}C \quad (۲)$$

$$ABC + \bar{A}\bar{D} \quad (۳)$$

$$\bar{A}\bar{C} + BD + AC \quad (۴)$$

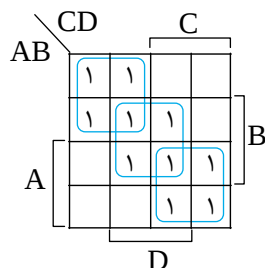


پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تابع خروجی مالتی پلکسر ۴×۱ داریم:

$$F = \bar{C}\bar{D}\bar{A} + \bar{C}D(\bar{A} + B) + C\bar{D}A + CD(A + B)$$

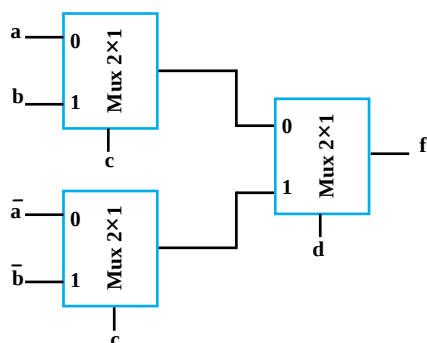
حال باید تابع بدست آمده را به جدول کارنو منتقل کرد و

ساده سازی را انجام داد. بنابراین داریم:



$$\Rightarrow f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{C} + BD + AC$$

مثال ۲۲: کدام تابع زیر، توسط شکل مقابل پیاده سازی می شود؟



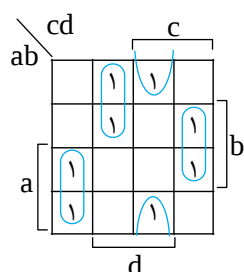
$$f(a, b, c, d) = \sum m(۳, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۵) \quad (۱)$$

$$f(a, b, c, d) = \sum m(۱, ۳, ۵, ۶, ۸, ۱۲, ۱۴) \quad (۲)$$

$$f(a, b, c, d) = \prod M(۱, ۳, ۴, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۵) \quad (۳)$$

$$f(a, b, c, d) = a\bar{c}\bar{d} + b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}d + \bar{b}\bar{c}d \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا d را مشخص می کنیم. با توجه به مقدار d و مالتی پلکسر انتخاب شده، مقدار C را تعیین کرده و سپس مقداری از a یا b را بدست می آوریم که ورودی انتخاب شده را ۱ می کند. توجه داشته باشید که هر گاه مقدار متغیری نامشخص است باید هر دو مقدار آن یعنی هم صفر و هم یک را در نظر بگیریم.



شماره مین ترمی	a b	c	d
۸	۱ { ۰	→ { ۰	۰
۱۲	۱ { ۱	→ { ۱	۰
۶	۰ { ۰	→ { ۰	۱
۱۴	۱ { ۱	→ { ۱	۱
۱	۰ { ۰	→ { ۰	۱
۵	۱ { ۱	→ { ۱	۱
۳	۰ { ۰	→ { ۰	۱
۱۱	۱ { ۱	→ { ۱	۱

مثال ۲۳: اگر بخواهیم تابع $f(a, b, c, d) = \sum m(۰, ۳, ۵, ۶, ۸, ۱۱, ۱۳, ۱۴)$ را توسط یک $Mux(۴ \times ۱)$ پیاده سازی نماییم، آنگاه کدام گزینه

ورودی های Mux را به درستی مشخص کرده است؟ (c و a به آدرس Mux متصل هستند.)

$$I_1 = I_3 = b \oplus d, I_0 = I_2 = b \odot d \quad (۲)$$

$$I_0 = I_2 = b \odot d, I_1 = I_3 = b \oplus d \quad (۴)$$

$$I_0 = I_2 = b \oplus d, I_1 = I_3 = b \oplus d \quad (۱)$$

$$I_0 = I_2 = b \odot d, I_1 = I_3 = b \odot d \quad (۳)$$



✓ پاسخ: گزینه «۴» در صورت سؤال گفته شده که a و c به خطوط آدرس متصل شوند. پس باید متغیرهای d و b را به خطوط داده متصل کنیم. در یک جدول در سطر مقدار d و b و در ستون مقدار c و a را نوشته و بر اساس مقدار a, b, c, d شماره مین‌ترمی بدست آمده را مشخص می‌کنیم. در مرحله بعد شماره مین‌ترم‌های داده شده برای تابع را با دایره مشخص می‌کنیم. در مرحله آخر هر ستون را بصورت مستقل بر اساس مقدار d و b ساده می‌کنیم. هر ستون ساده شده مربوط به یکی از ورودی‌های I_0 تا I_3 است. ستون 00 مربوط به I_0 ، 01 مربوط به I_1 ، 10 مربوط به I_2 و 11 مربوط به I_3 است.

ac \ bd	I_0 00	I_1 01	I_2 11	I_3 10
00	m_0	m_2	m_1	m_3
01	m_1	m_3	m_1	m_1
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{13}
10	m_4	m_6	m_{14}	m_{12}
	$b \odot d$	$b \oplus d$	$b \oplus d$	$b \odot d$

$\Rightarrow I_0 = I_2 = b \odot d, \quad I_1 = I_3 = b \oplus d$

🔗 مثال ۲۴: اگر بخواهیم تابع $f(a, b, c) = \Pi M(0, 2, 6, 7)$ توسط یک $Mux(4 \times 1)$ ، با اتصال c و b به خطوط آدرس Mux پیاده‌سازی نماییم، کدام گزینه ورودی‌های Mux را به درستی مشخص کرده است؟

$$\begin{aligned} I_0 &= a, I_1 = 0, I_2 = 1, I_3 = \bar{a} \quad (2) \\ I_0 &= a, I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = \bar{a} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= a, I_1 = 1, I_2 = \bar{a}, I_3 = 0 \quad (1) \\ I_0 &= \bar{a}, I_1 = 1, I_2 = \bar{a}, I_3 = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

✓ پاسخ: گزینه «۴» روش حل این تست دقیقاً همانند تست قبلی است. توجه داشته باشید که چون تابع سه متغیره است و مالتی پلکسر 4×1 است و دو خط آدرس دارد، بنابراین دو متغیر به خطوط آدرس متصل می‌شوند و یک متغیر به خطوط داده متصل می‌شود. که طبق خواسته مسئله c و b به خطوط آدرس و a به خطوط داده متصل شده است.

$f(a, b, c) = \Pi M(0, 2, 6, 7) = \sum m(1, 3, 4, 5) \Rightarrow$

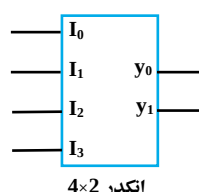
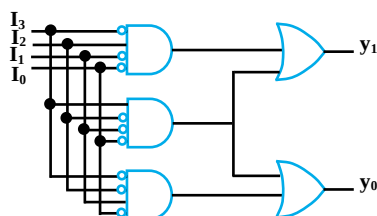
bc \ a	I_0 00	I_1 01	I_2 11	I_3 10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6
	a	1	$\bar{a}$	0

🔗 مثال ۲۵: اگر بخواهیم یک انکدر 4×2 طراحی نماییم، مدار آن بصورت زیر خواهد شد.

✓ پاسخ: برای طراحی این انکدر، ورودی‌ها را I_0 تا I_3 نامگذاری می‌کنیم. همچنین دو خروجی را با y_0 و y_1 مشخص می‌کنیم. چون این یک انکدر معمولی است، پس هر لحظه فقط یکی از ورودی‌ها می‌تواند برابر ۱ باشد؛ بر همین اساس جدول صحت مدار را تشکیل می‌دهیم. هر گاه $I_0 = 1$ باشد خروجی عدد ۰ یعنی ۰۰ را نشان می‌دهد هر گاه $I_1 = 1$ باشد خروجی عدد یک یا ۰۱ را نشان می‌دهد. به همین ترتیب برای I_2 و I_3 خروجی ۱۰ و ۱۱ را نشان خواهد داد. در مرحله بعد خروجی‌های y_0 و y_1 بصورت مستقل بر اساس مین‌ترم‌های ورودی نوشته می‌شوند، در نهایت بر اساس توابع y_0 و y_1 شکل مداری انکدر رسم شده است.

I_3	I_2	I_1	I_0	y_1	y_0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \bar{I}_3 \bar{I}_2 \bar{I}_1 \bar{I}_0 + I_3 \bar{I}_2 \bar{I}_1 \bar{I}_0 \\ y_0 = \bar{I}_3 \bar{I}_2 \bar{I}_1 \bar{I}_0 + I_3 \bar{I}_2 \bar{I}_1 \bar{I}_0 \end{cases}$$



شکل مداری و نمودار بلوکی آن بصورت زیر خواهد شد:

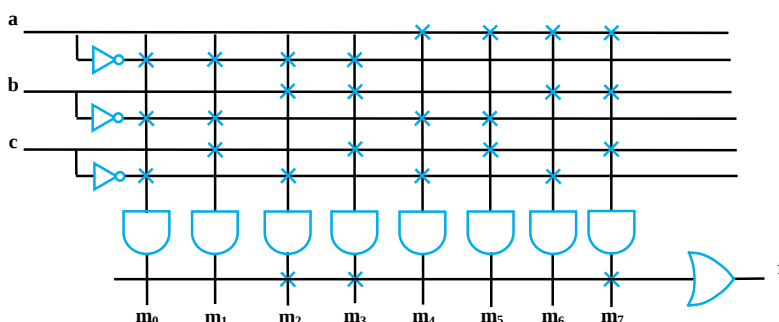


🔗 مثال ۲۶: اگر بخواهیم یک انکدر اولویت 4×2 طراحی نماییم، مدار آن بصورت زیر خواهد شد:

✅ پاسخ: روند کلی طراحی انکدر اولویت همانند انکدر معمولی است. نکته قابل توجه در این انکدر، تقدم در اولویت میان ورودی‌هاست. در این انکدر فرض شده است که ورودی با اندیس بزرگتر اولویت بیشتری داشته باشد. بنابراین اولویت I_3 بیشتر از I_2 ، I_2 بیشتر از I_1 و I_1 بیشتر از I_0 است. بر همین اساس اگر دو پایه ورودی همزمان برابر یک باشند خروجی شماره پایه با اولویت بالاتر را نشان می‌دهد. مثلاً در ورودی 1101 که هر سه پایه I_3 ، I_2 ، I_0 بطور همزمان برابر یک شده‌اند خروجی y_1y_0 شماره پایه با اولویت بالاتر یعنی ۳ را نشان می‌دهد. همچنین هرگاه حداقل یکی از ورودی‌ها برابر یک باشد خروجی G برابر یک می‌شود و اگر همه ورودی‌ها برابر صفر باشند، خروجی G برابر صفر است. بر این اساس جدول درستی کامل شده و توابع خروجی ساده می‌شوند و در نهایت مدار رسم خواهد شد.

🔗 مثال ۲۷: $f(a,b,c) = \sum m(2,3,7)$ را با استفاده از یک ROM پیاده‌سازی کنید.

✅ پاسخ: تابع داده شده خود بصورت SOP استاندارد است. پس ورودی‌های تابع را به ورودی‌های ROM متصل کرده و در آرایه OR برای مین ترم‌های ۲، ۳ و ۷ اتصال بین خروجی AND ها ورودی‌های OR برقرار می‌کنیم.



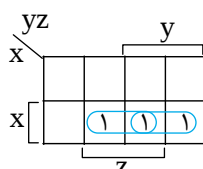
🔗 مثال ۲۸: با استفاده از آرایه برنامه‌پذیر PLA مداری طراحی نمایید که عدد سه بیتی $X = xyz$ را دریافت کرده و عدد $X+3$ را تولید نماید.

X			$X+3$			
x	y	z	A	B	C	D
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

✅ پاسخ: ابتدا جدول درستی مدار موردنظر را بدست می‌آوریم:

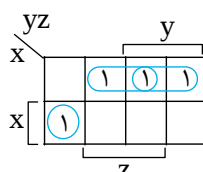
سپس خروجی‌های A, B, C, D را بصورت توابعی از x, y, z بدست آورده و آنها را توسط جدول کارنو ساده می‌نماییم.

$$A(x, y, z) = \sum m(5, 6, 7) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow A(x, y, z) = xz + xy$$

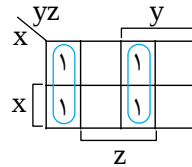
$$B(x, y, z) = \sum m(1, 2, 3, 4) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow B(x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{x}z + \bar{x}y$$

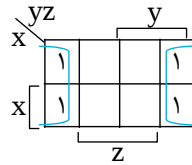


$$C(x, y, z) = \sum m(0, 3, 4, 7) \Rightarrow$$

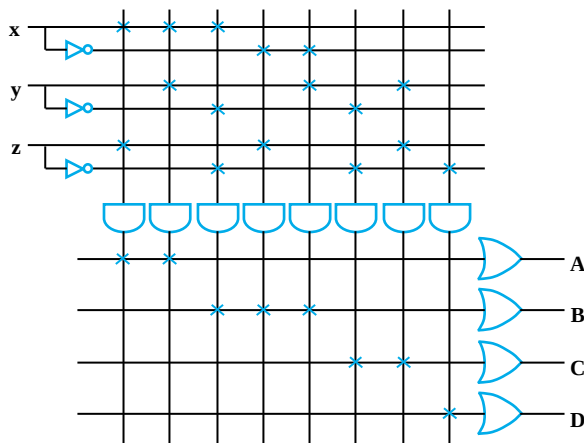


$$\Rightarrow C(x, y, z) = \bar{y}z + yz$$

$$D(x, y, z) = \sum m(0, 2, 4, 6)$$



$$\Rightarrow D(x, y, z) = \bar{z}$$



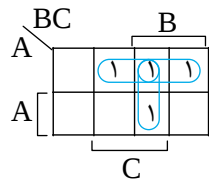
حال از میان جمله‌های ضربی بدست آمده، جمله‌های غیرتکراری و تکراری‌ها، فقط یک بار، را توسط آرایه AND تولید می‌نماییم.

در مرحله آخر با برقراری اتصالات در شبکه OR، از خروجی‌های شبکه AND برای پیاده‌سازی توابع A، B، C، D استفاده می‌نماییم.

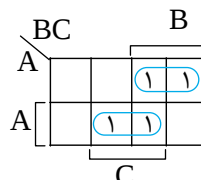
مثال ۲۹: توابع زیر را توسط PAL پیاده‌سازی نمایید.

$$f_1(A, B, C) = \sum m(0, 1, 5, 7), f_2(A, B, C) = \sum m(2, 3, 5, 7), f_3(A, B, C) = \sum m(1, 2, 3, 7)$$

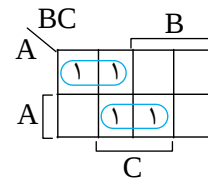
پاسخ: ابتدا توسط جدول کارنو، توابع را بصورت ساده شده بدست می‌آوریم. ☒



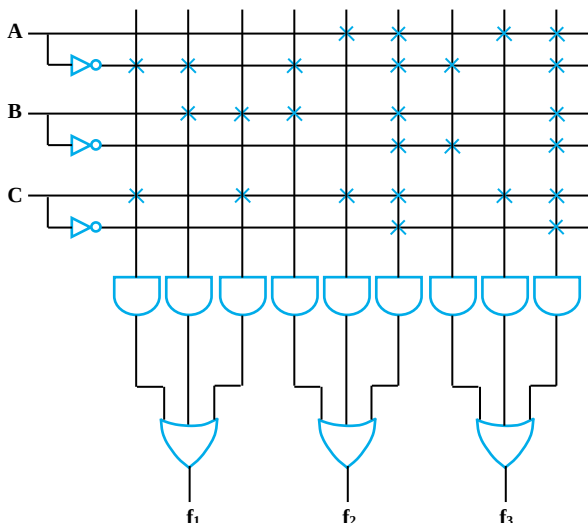
$$f_1 = \bar{A}C + \bar{A}B + BC$$



$$f_2 = \bar{A}B + AC$$



$$f_3 = \bar{A}B + AC$$



توجه داشته باشید که تعداد ورودی‌های هر گیت OR سه عدد است. بنابراین توابعی که ۲ جمله‌ای هستند همه اتصالات برای جمله سوم برقرار می‌گردد تا خروجی آن گیت بی‌تأثیر گردد.

مقایسه انواع قطعات برنامه پذیر

شبکه OR	شبکه AND	قطعه
قابل برنامه‌ریزی	ثابت	PROM
ثابت	قابل برنامه‌ریزی	PAL
قابل برنامه‌ریزی	قابل برنامه‌ریزی	PLA



آزمون فصل چهارم

۱- برای اجرای چهار تابع منطقی زیر با نیم جمعگر، حداقل به چند نیم جمعگر نیاز داریم؟ (از مدارهای دیگر نمی‌توانید استفاده کنید).

$$f_1 = A \oplus B \oplus C \quad f_2 = \overline{A}BC + A\overline{B}C \quad f_3 = ABC + (\overline{A} + \overline{B})C \quad f_4 = ABC$$

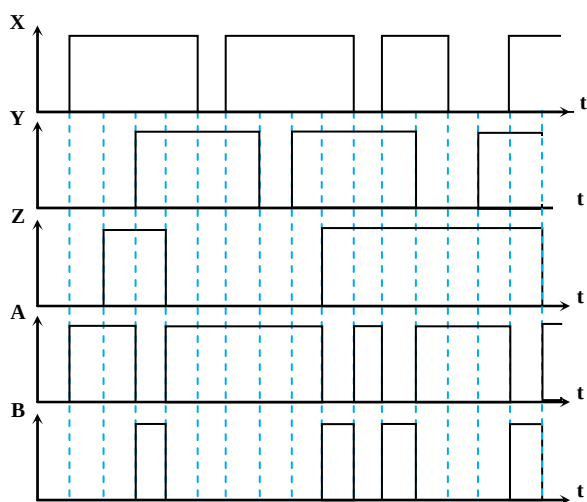
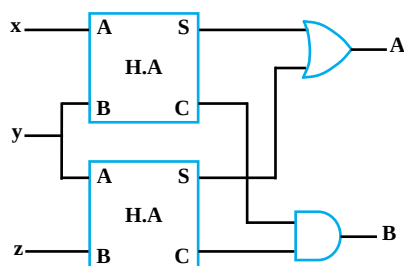
(۴) ۵

(۳) ۴

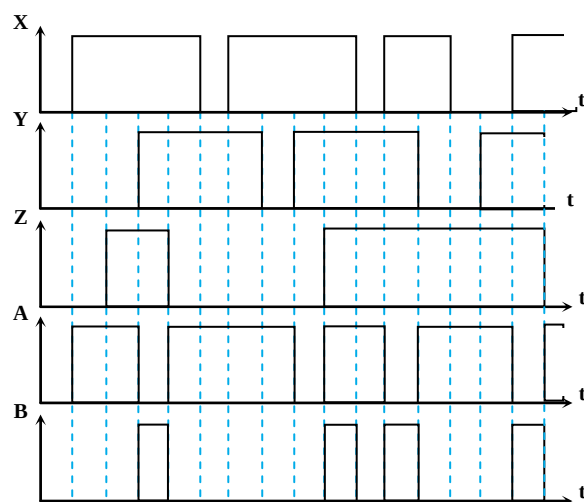
(۲) ۳

(۱) ۲

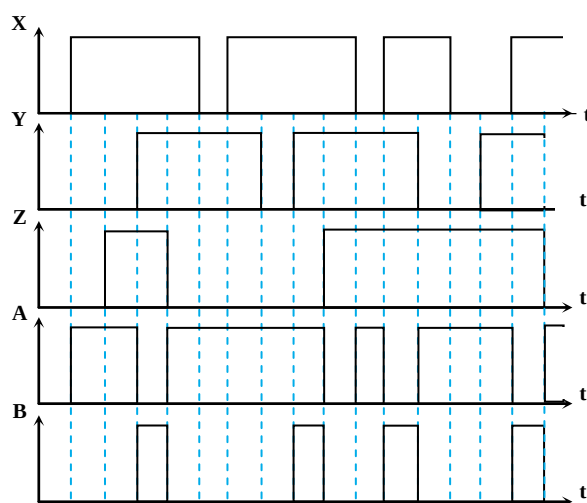
۲- در مدار زیر با توجه به ورودی‌های داده شده، شکل صحیح A و B کدام است؟



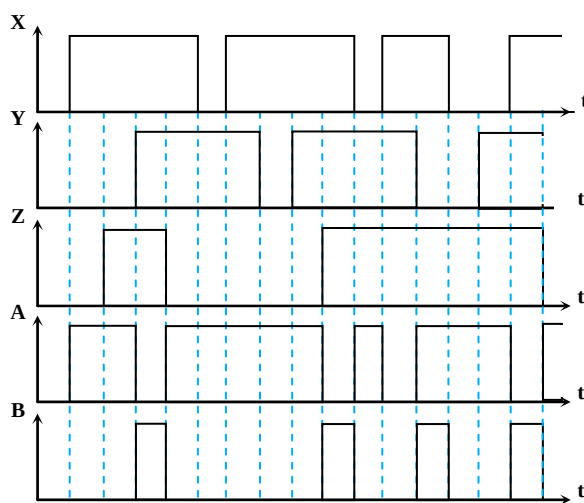
(۲)



(۱)



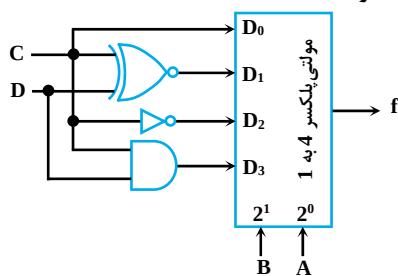
(۴)



(۳)



۳- مدار شکل مقابل کدام تابع را اجرا می‌کند؟ (ارزش متغیرها به ترتیب: $A = ۸$ و $B = ۴$ و $C = ۲$ و $D = ۱$ است)



$$\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + ABCD \quad (۱)$$

$$\sum m(۱, ۲, ۴, ۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۵) \quad (۲)$$

$$A(\bar{C}\bar{D} + CD) + ABD \quad (۳)$$

$$\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + ACD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \quad (۴)$$

۴- در مقایسه کننده دو بیتی مقابل، رابطه منطقی $(A < B)$ ، کدام است؟



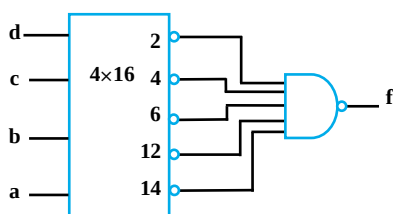
$$A_1\bar{B}_1 + (\bar{A}_1\bar{B}_1 + A_1B_1)A_0\bar{B}_0 \quad (۱)$$

$$A_1\bar{B}_1 + (\bar{A}_1\bar{B}_1 + A_1\bar{B}_1)A_0\bar{B}_0 \quad (۲)$$

$$\bar{A}_1B_1 + (\bar{A}_1B_1 + A_1\bar{B}_1)\bar{A}_0B_0 \quad (۳)$$

$$\bar{A}_1B_1 + (\bar{A}_1\bar{B}_1 + A_1B_1)\bar{A}_0B_0 \quad (۴)$$

۵- تابعی که شکل مقابل آن را پیاده سازی می‌کند، کدام است؟



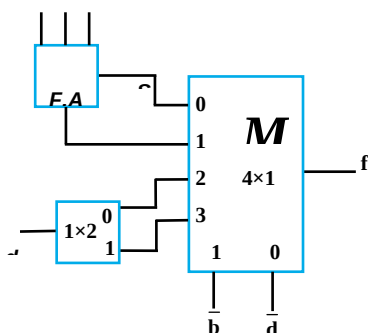
$$f = \sum m(۲, ۴, ۶, ۱۲, ۱۴) \quad (۱)$$

$$f = \prod M(۲, ۴, ۶, ۱۲, ۱۴) \quad (۲)$$

$$F = \prod M(۰, ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۵) \quad (۳)$$

$$۱, ۳ \quad (۴)$$

۶- تابعی که مدار شکل مقابل پیاده سازی می‌کند کدام است؟



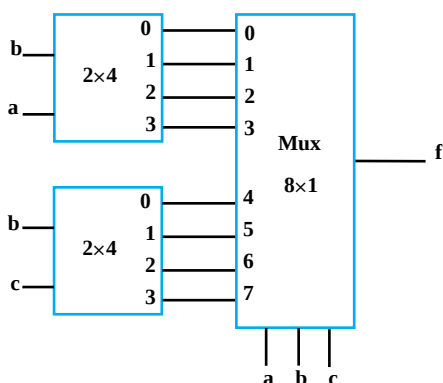
$$f(a, b, c, d) = \sum m(۱, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۴) \quad (۱)$$

$$f(a, b, c, d) = \sum m(۲, ۵, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴) \quad (۲)$$

$$f(a, b, c, d) = \sum m(۵, ۶, ۱۲, ۱۴, ۱۵) \quad (۳)$$

$$f(a, b, c, d) = \sum m(۵, ۶, ۱۲) \quad (۴)$$

۷- لیست مین‌ترم‌های تابع f کدام گزینه است؟



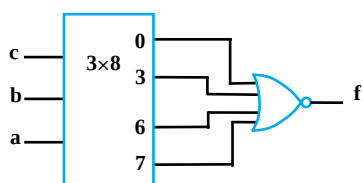
$$f(a, b, c) = \sum m(۰, ۴) \quad (۱)$$

$$f(a, b, c) = \sum m(۰, ۴, ۷) \quad (۲)$$

$$f(a, b, c) = \sum m(۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۵) \quad (۳)$$

$$f(a, b, c) = \sum m(۲, ۴, ۶) \quad (۴)$$

۸- تابعی که شکل مقابل آن را پیاده سازی می‌کند کدام است؟



$$f = \sum m(۰, ۳, ۴, ۷) \quad (۱)$$

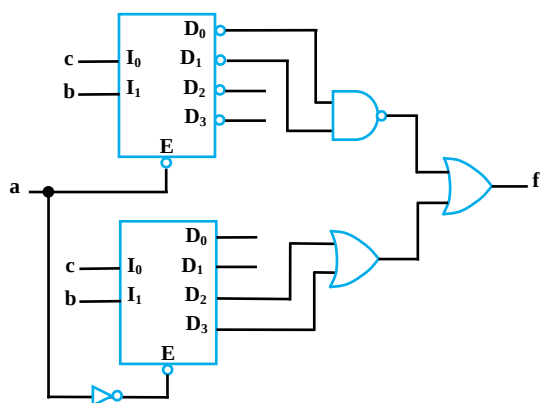
$$f = \prod M(۱, ۲, ۵, ۶) \quad (۲)$$

$$f = \sum m(۱, ۲, ۵, ۴) \quad (۳)$$

$$۱, ۲ \quad (۴)$$



۹- در شکل مقابل، کدام گزینه مین‌ترم‌های تابع f را نشان می‌دهد.



$$f = \sum m(2, 3, 4, 5) \quad (1)$$

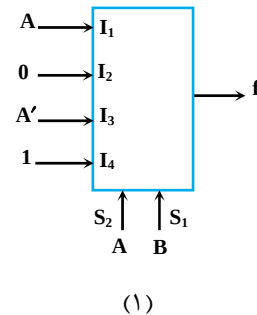
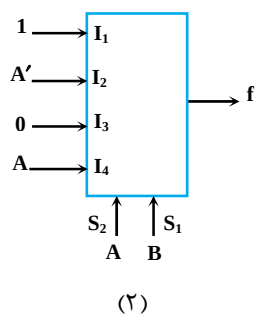
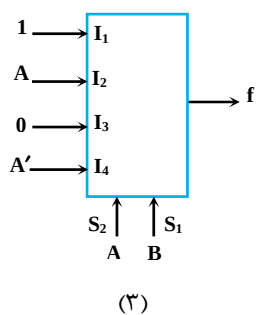
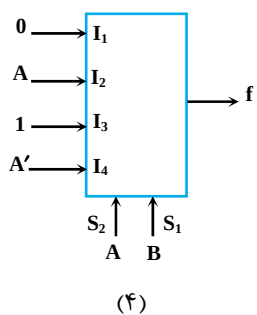
$$f = \sum m(0, 1, 4, 5) \quad (2)$$

$$f = \sum m(0, 1, 6, 7) \quad (3)$$

$$f = \sum m(2, 3, 6, 7) \quad (4)$$

۱۰- تابع روبرو را به کمک یک تسهیم‌کننده یا Mux ساخته و ورودی‌های آن را مشخص کرده‌ایم. کدام گزینه، مدار طراحی شده را نشان داده است؟

$$F(A, B, C) = \sum (2, 3, 4, 7)$$



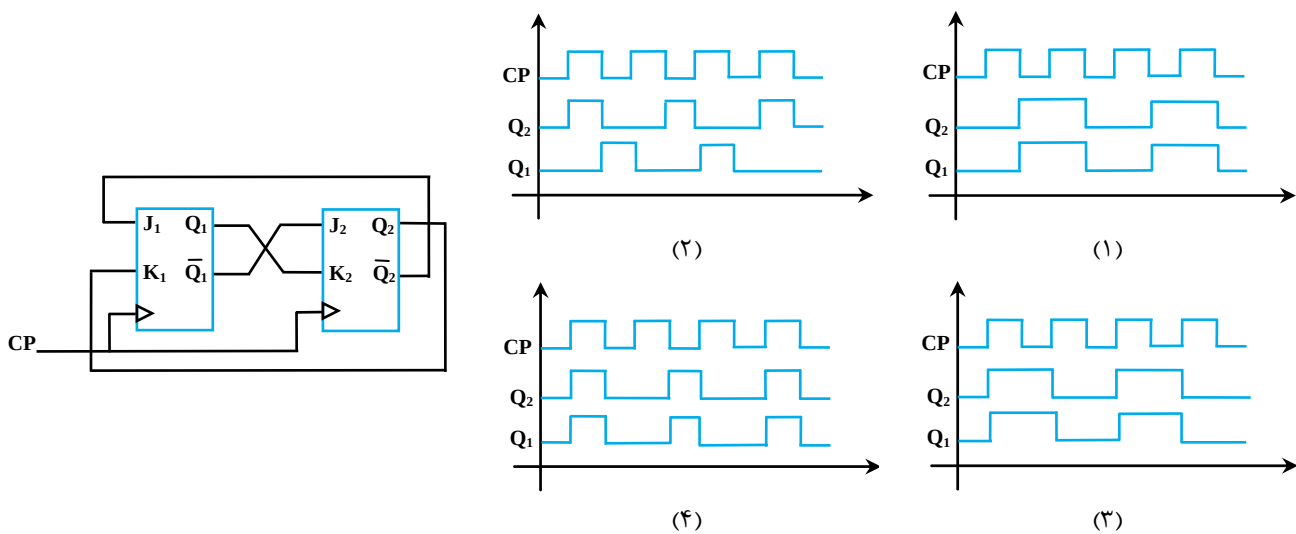


فصل پنجم

«مدارهای منطقی ترتیبی»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال ۱: چنانچه در شرایط اولیه $Q_2 = Q_1 = 0$ باشد، شکل موج خروجی‌های Q_1 و Q_2 چگونه خواهد بود؟



$$J_1 = \overline{Q_2(t)} \quad K_1 = Q_2(t) \Rightarrow Q_1(t+1) = \overline{Q_2(t)} \quad \overline{Q_1(t)} + \overline{Q_2(t)} \quad Q_1(t) = \overline{Q_2(t)}$$

$$J_2 = \overline{Q_1(t)} \quad K_2 = Q_1(t) \Rightarrow Q_2(t+1) = \overline{Q_1(t)} \quad \overline{Q_2(t)} + \overline{Q_1(t)} \quad Q_2(t) = \overline{Q_1(t)}$$

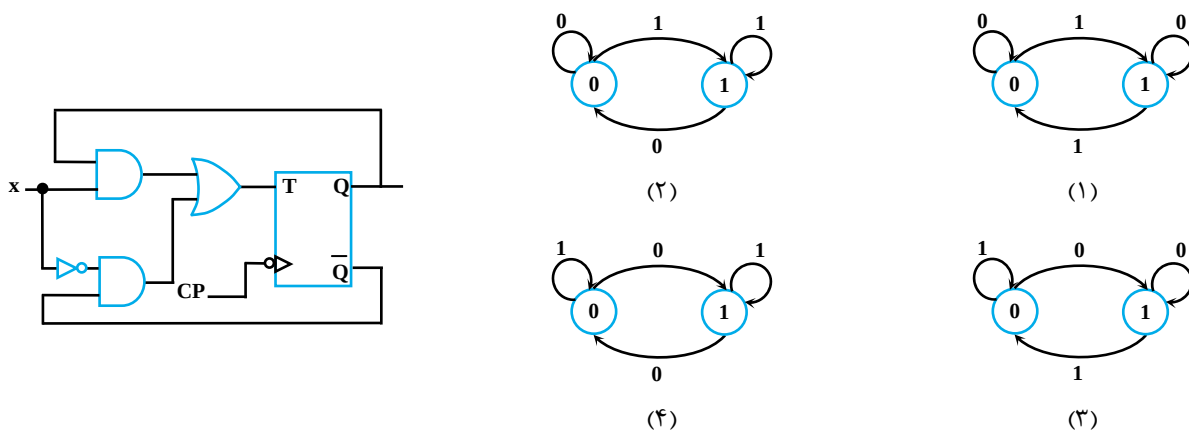
پاسخ: گزینه «۳» با آنالیز مدار داریم: ☒

با جایگذاری‌های متوالی در معادله‌های فوق داریم:

$$Q_2 Q_1 = 00 \rightarrow 11 \rightarrow 00 \rightarrow 11 \rightarrow \dots$$

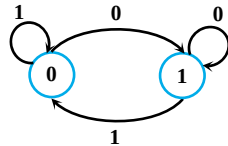
یعنی Q_1 و Q_2 در پالس‌های متوالی دائماً متمم (صفر و یک) می‌شوند که مطابق گزینه «۳» است.

مثال ۲: برای مدار ترتیبی روبرو، نمودار حالت کدام است؟



پاسخ: گزینه «۳» با آنالیز مدار داریم: ابتدا معادله مشخصه فلیپ فلاپ T یعنی $Q(t+1) = T \oplus Q(t)$ را می‌نویسیم. سپس مقداری که به ورودی فلیپ فلاپ متصل شده یعنی $xQ(t) + \bar{x}Q(t)$ یا $x \odot Q(t)$ را به جای T قرار می‌دهیم. معادله بدست آمده برابر $Q(t+1) = (x \odot Q(t)) \oplus Q(t)$ می‌شود. حال در یک جدول تمامی مقادیر x و $Q(t)$ را سمت چپ نوشته و بر اساس معادله اخیر مقدار $Q(t+1)$ را بدست می‌آوریم. در مرحله آخر باید نمودار حالت مدار را بدست بیاوریم. چون مقدار Q فقط صفر یا یک است پس نمودار حالت فقط دو حالت صفر و یک را دارد. هر ردیف جدول معادل یک کمان می‌شود به این صورت که $Q(t)$ مبدأ کمان، $Q(t+1)$ مقصد کمان و x مقدار روی کمان (x) خواهد شد.

$Q(t)$	x	$Q(t+1)$
۰	۰	۱
۰	۱	۰
۱	۰	۱
۱	۱	۰

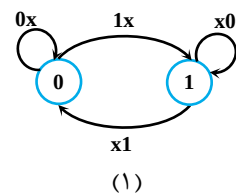
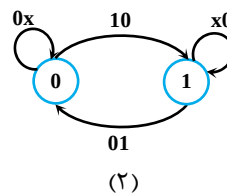
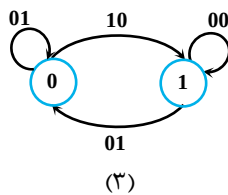
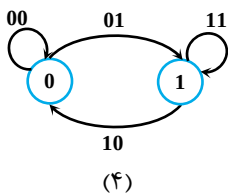


$$T = xQ(t) + \bar{x}Q(t) = x \odot Q(t)$$

$$Q(t+1) = T \oplus Q(t) = (x \odot Q(t)) \oplus Q(t)$$

با جایگذاری مقادیر در معادله اخیر جدول حالت و سپس نمودار حالت بدست می‌آید.

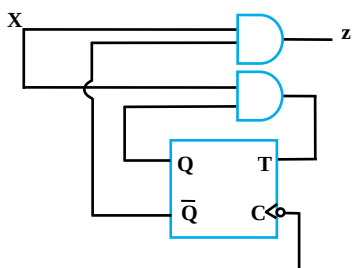
مثال ۳: نمودار حالت JK - FF کدام گزینه است؟ (بیت ورودی سمت چپ J و بیت ورودی سمت راست K است).



پاسخ: گزینه «۱» با توجه به جدول تحریک JK - FF داریم:

$Q(t)$	$Q(t+1)$	J	K
۰	۰	۰	X
۰	۱	۱	X
۱	۰	X	۱
۱	۱	X	۰

چون خروجی یک فلیپ فلاپ یا صفر یا یک است (دو حالت) پس این نمودار تنها دو حالت دارد. آن عاملی که باعث تغییر حالت برای مقدار فلیپ فلاپ می‌شود ورودی‌های J و K هستند که بر اساس جدول تحریک مشخص شده‌اند. در نهایت ورودی‌ها به عنوان برچسب کمان، حالت فعلی $Q(t)$ به عنوان مبدأ کمان و حالت بعدی $Q(t+1)$ به عنوان مقصد کمان خواهد بود و نمودار رسم می‌شود.



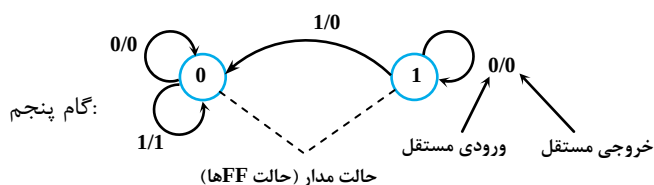
مثال ۴: مدار روبرو را آنالیز کنید.

ورودی مستقل مدار x ، خروجی آن Z و متغیر حالت مدار $Q(t)$ است. سپس مقدار متصل به ورودی فلیپ فلاپ یعنی T را بدست می‌آوریم. بر اساس این شکل داریم $T = xQ(t)$ همچنین یک معادله برای خروجی مدار یعنی Z برابر $Z = x\bar{Q}(t)$ در گام چهارم معادله فلیپ فلاپ T یعنی $Q(t+1) = T \oplus Q(t)$ را نوشته و مقدار بدست آمده برای T را در آن قرار می‌دهیم تا معادله نهایی $Q(t+1)$ بدست آید.

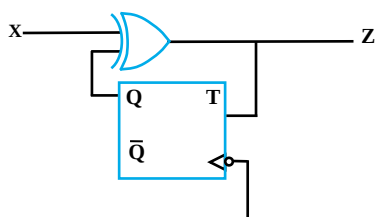
حال در یک جدول در سمت چپ مقدار x و $Q(t)$ و در سمت راست مقدار $Q(t+1)$ و Z را می‌نویسیم. تمامی ترکیبات مقداری سمت چپ را نوشته و بر اساس معادله‌ها مقادیر سمت راست بدست می‌آیند. در نهایت بر اساس جدول بدست آمده نمودار حالت مدار رسم می‌شود یعنی $Q(t)$ دو حالت صفر و یک دارد. برای هر کمان $Q(t)$ به عنوان مبدأ، $Q(t+1)$ به عنوان مقصد و x و Z به عنوان ورودی و خروجی روی کمان نوشته می‌شود.

گام اول و دوم: $\left. \begin{array}{l} x: \text{ورودی مستقل} \\ Q(t): \text{متغیر حالت} \\ Z: \text{خروجی مستقل} \end{array} \right\}$
گام سوم: $\{T = xQ(t), Z = x\bar{Q}(t)\}$

گام چهارم: $Q(t+1) = T \oplus Q(t) = xQ(t) \oplus Q(t) \Rightarrow Q(t+1) = xQ(t) \oplus Q(t)$



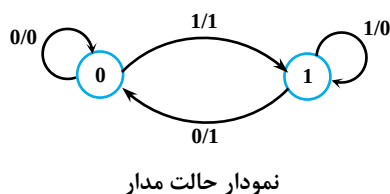
$Q(t)$	x	$Q(t+1)$	Z
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰



مراحل این مثال دقیقاً همانند مثال ۴ است، فقط با این نکته که معادله ورودی فلیپ فلاپ برابر $T = x \oplus Q(t)$ و معادله خروجی برابر $z = x \oplus Q(t)$ خواهد شد. همچنین معادله نهایی بصورت $Q(t+1) = x$ خواهد شد. یک راه تستی برای حل این مسئله این است که چون $Q(t+1) = x$ شده است و همیشه $Q(t+1)$ مقصد کمان و x عدد روی کمان است پس باید حتماً مقصد کمان با عدد روی کمان یک باشد.

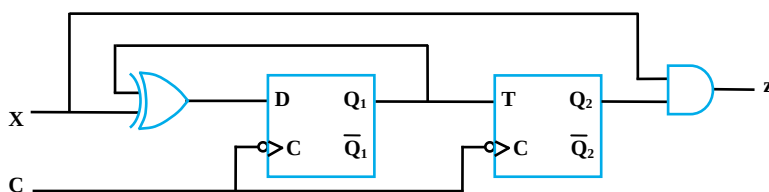
گام چهارم: $Q(t+1) = T \oplus Q(t) = x \oplus Q(t) \oplus Q(t) = x \Rightarrow Q(t+1) = x$

گام اول و دوم } $\left. \begin{array}{l} X: \text{ورودی مستقل} \\ Q(t): \text{متغیر حالت} \\ Z: \text{خروجی مستقل} \end{array} \right\}$

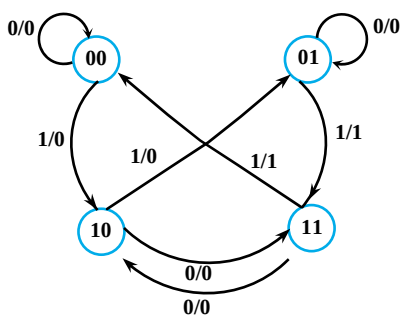


Q(t)	x	Q(t+1)	z
o	o	o	o
o	1	1	1
1	o	o	1
1	1	1	o

 **مثال ۶:** برای مدار ترتیبی زیر، نمودار حالت را بدست آورید.



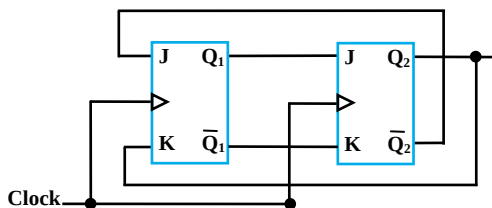
مراحل حل این مثال نیز مشابه با مثال‌های ۵ و ۴ است. توجه کنید که در این شکل دو فلیپ فلاپ D و T وجود دارد. پس باید برای هر یک معادله‌ی جداگانه‌ای نوشته شود و مقدار ورودی متصل به هر فلیپ فلاپ بصورت جداگانه در معادله‌ی مربوط به خودش قرار داده شود. برای رسم جدول چون دو فلیپ فلاپ داریم در سمت چپ x , $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ و در سمت راست z , $Q_1(t+1)$, $Q_2(t+1)$ قرار می‌گیرد. تمامی ترکیبات ممکن برای ستون سمت چپ نوشته شده و مقدار ستون سمت راست از معادله‌ها بدست می‌آید. همچنین در رسم نمودار حالت چون مدار دو فلیپ فلاپ دارد پس Q_1 , Q_2 چهار حالت 00 , 01 , 10 و 11 نسبت به هم خواهند داشت پس ۴ دایره (حالت) در نمودار حالت داریم. مقدار Q_1Q_2 به عنوان مبدأ کمان و $Q_1^+Q_2^+$ به عنوان مقصد کمان خواهد بود. مقدار x به عنوان ورودی و مقدار z به عنوان خروجی روی کمان نوشته می‌شود.

$$\text{گام اول و دوم} : \begin{cases} \text{ورودی مستقل: } X \\ \text{متغیرهای حالت: } Q_1(t), Q_2(t) \\ \text{خروجی مستقل: } Z \end{cases}$$
$$\text{گام سوم} : \begin{cases} D = x \oplus Q_1(t) \\ T = Q_1(t) \\ Z = xQ_2(t) \end{cases}$$
$$\text{گام چهارم} : \begin{cases} Q_1(t+1) = D \Rightarrow Q_1(t+1) = x \oplus Q_1(t) \\ Q_r(t+1) = T \oplus Q_r(t) \Rightarrow Q_r(t+1) = Q_1(t) \oplus Q_r(t) \end{cases}$$


$Q_i(t)$	$Q_r(t)$	X	$Q_i(t+1)$	$Q_r(t+1)$	Z
o	o	o	o	o	o
o	o	1	1	o	o
o	1	o	o	1	o
o	1	1	1	1	1
1	o	o	1	1	o
1	o	1	o	1	o
1	1	o	1	o	o
1	1	1	o	o	1

توضیح: منظور از Q همان $Q(t)$ و منظور از Q^+ همان $Q(t+1)$ است.

مثال ۷: در مدار نشان داده شده، خروجی‌های Q_1 و Q_2 در حالت اولیه برابر $Q_2 = Q_1 = 1$ هستند. مقدار این خروجی‌ها پس از ۴ پالس چه خواهد بود؟



$$Q_1 = 1, Q_2 = 0 \quad (1)$$

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0 \quad (2)$$

$$Q_1 = 0, Q_2 = 1 \quad (3)$$

$$Q_1 = 1, Q_2 = 1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۴» با آنالیز مدار داریم:

در این مدار دو فلیپ فلاپ JK داریم و برای هر یک باید معادله‌ای جداگانه بدست آوریم. بنابراین با توجه به معادله کلی فلیپ فلاپ JK بصورت $Q(t+1) = J\bar{Q}(t) + \bar{K}Q(t)$ مقدار J_1 و K_1 و J_2 و K_2 را بدست آورده و در این معادله قرار می‌دهیم. با قرار دادن این مقادیر در معادله اصلی یک معادله جدید برای $Q_1(t+1)$ و یکی برای $Q_2(t+1)$ به دست می‌آید. حال نوبت جایگذاری در معادله‌هاست. مقدار اولیه برای مدار بصورت ۱۱ داده شده است که با جایگذاری در دو معادله مقدار برای پالس اول بدست می‌آید، سپس مقدار بدست آمده برای پالس اول را در معادله قرار داده و مقدار برای پالس دوم بدست می‌آید. همین کار را تا ۴ مرحله تکرار می‌کنیم.

$$J_1 = \bar{Q}_2(t) \quad K_1 = Q_2(t) \Rightarrow Q_1(t+1) = \bar{Q}_2(t) \bar{Q}_1(t) + Q_2(t) Q_1(t) = \bar{Q}_2(t)$$

$$J_2 = Q_1(t) \quad K_2 = \bar{Q}_1(t) \Rightarrow Q_2(t+1) = Q_1(t) \bar{Q}_2(t) + \bar{Q}_1(t) Q_2(t) = Q_1(t)$$

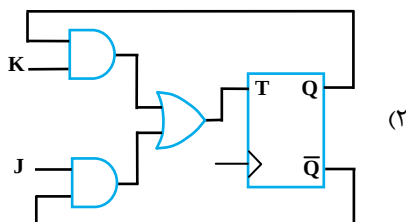
$$Q_2 Q_1 = 1 \xrightarrow{\text{پالس اول}} 10 \xrightarrow{\text{پالس دوم}} 00 \xrightarrow{\text{پالس سوم}} 01 \xrightarrow{\text{پالس چهارم}} 11 \Rightarrow \begin{cases} Q_2 = 1 \\ Q_1 = 1 \end{cases}$$

$$Q_2 Q_1 \quad 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00 \rightarrow 01$$

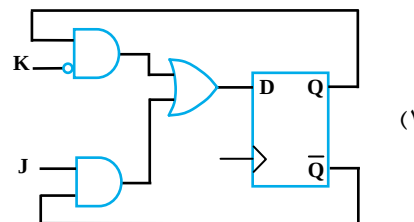
روش دوم: شکل نشان داده شده یک شمارنده جانسون می‌باشد. بنابراین سیکل شمارش:

را خواهد داشت.

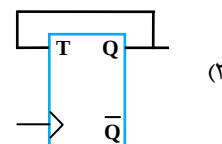
مثال ۸: کدام یک از گزینه‌های زیر معادل یک JK-FF عمل می‌کند؟



(۲)



(۱)



(۳)

(۴) و ۲ و ۱

پاسخ: گزینه «۴» باید برای هر کدام از گزینه‌ها معادله‌ی مشخصه بنویسیم و ببینیم کدام یک به معادله‌ی مشخصه JK-FF تبدیل می‌شود.

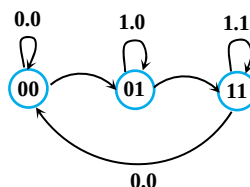
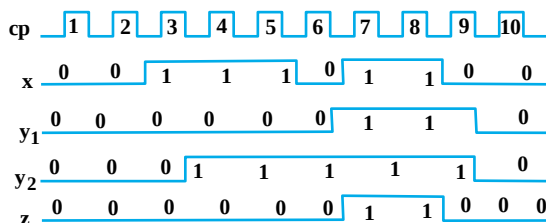
گزینه ۱: $Q(t+1) = D, D = J\bar{Q}(t) + \bar{K}Q(t) \Rightarrow Q(t+1) = J\bar{Q}(t) + \bar{K}Q(t)$

گزینه ۲: $Q(t+1) = T \oplus Q(t) \quad T = KQ(t) + J\bar{Q}(t) \Rightarrow Q(t+1) = J\bar{Q}(t) + \bar{K}Q(t)$

گزینه ۳: $Q(t+1) = T \oplus Q(t) \quad T = Q(t) \Rightarrow Q(t+1) = Q(t) \oplus Q(t) = 0$

در خصوص گزینه یک، یک فلیپ فلاپ D با معادله مشخصه $Q(t+1) = D$ داده شده است. که مقدار متصل به ورودی D آن برابر $J\bar{Q}(t) + \bar{K}Q(t)$ است که اگر به جای D بنشیند معادله فلیپ فلاپ JK بدست می‌آید. درگزینه دو یک فلیپ فلاپ T با معادله مشخصه $Q(t+1) = T \oplus Q(t)$ داده شده است که مقدار متصل به ورودی T آن برابر $KQ(t) + J\bar{Q}(t)$ است که اگر به جای T بنشیند معادله فلیپ فلاپ JK بدست می‌آید. پس هر دو گزینه ۱ و ۲ معادل فلیپ فلاپ JK هستند.

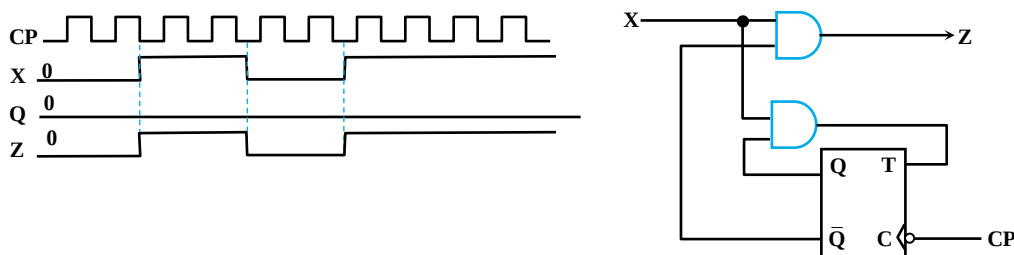
مثال ۹: اگر بر اساس نمودار حالت زیر دیاگرام زمانی مدار را رسم نماییم:





✓ پاسخ: در این مدار فلیپ فلاپ‌ها حساس به لبه پایین رونده پالس ساعت فرض شده‌اند همچنین حالت مدار بصورت Y_1Y_2 است توجه نمایید که با هر لبه پایین رونده CP تغییر وضعیت در حالت مدار ممکن است اتفاق بیفتد یعنی تغییر حالت مدار با پالس ساعت همگام است. اما تغییر خروجی Z همگام با پالس ساعت و حالت یعنی Y_1Y_2 نیست. مثلاً بعد از پالس ششم مقدار X از ۰ به یک تغییر کرده است؛ مشاهده می‌شود که حالت مدار عوض نشده ولی خروجی Z از صفر به یک تغییر کرده است، یا مجدداً بعد از پالس ۸ مقدار X از یک به صفر تغییر یافته است که باز هم این تغییر بر خروجی تأثیر گذاشته است (ولی حالت هنوز عوض نشده). بنابراین باز هم به این نکته تأکید می‌کنیم که در مدل میلی ورودی می‌تواند مستقیماً روی خروجی تأثیر بگذارد.

🔗 مثال ۱۰: اگر برای مدار زیر نمودار زمانی را رسم نماییم:



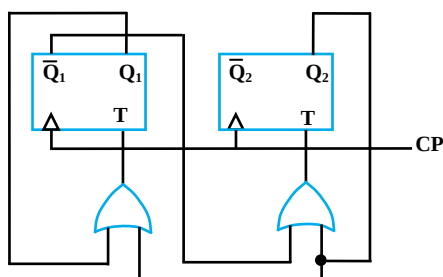
$$T = xQ(t)$$

$$Q(t+1) = T \oplus Q(t) = xQ(t) \oplus Q(t)$$

$$z = xQ(t)$$

باز هم در نمودار بالا مشاهده می‌شود که خروجی Z فقط به مقدار Q بستگی ندارد و در حالیکه مقدار Q بصورت ثابت روی صفر می‌ماند و حالت مدار عوض نمی‌شود، اما با تغییر ورودی X مقدار خروجی Z تغییر می‌کند. و این همان نکته‌ای است که خروجی در یک مدار مدل میلی تابعی از ورودی و حالت مدار است.

🔗 مثال ۱۱: چنانچه در شرایط اولیه $Q_2 = Q_1 = 0$ باشد، خروجی‌های Q_1 و Q_2 در پالس‌های ساعت متوالی چه مقادیری را تولید می‌کنند؟



$$Q_2Q_1 = 00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 00 \rightarrow \dots (1)$$

$$Q_2Q_1 = 00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00 \rightarrow \dots (2)$$

$$Q_2Q_1 = 00 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00 \rightarrow \dots (3)$$

$$Q_2Q_1 = 10 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow \dots (4)$$

$$T_1 = Q_1(t) + Q_2(t) \Rightarrow Q_1(t+1) = (Q_1(t) + Q_2(t)) \oplus Q_1(t)$$

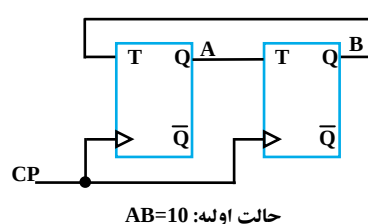
$$T_2 = \overline{Q_1(t)} + Q_2(t) \Rightarrow Q_2(t+1) = (\overline{Q_1(t)} + Q_2(t)) \oplus Q_2(t)$$

$$Q_2Q_1 = 00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00 \rightarrow \dots$$

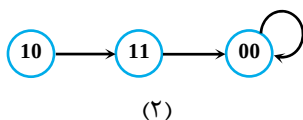
✓ پاسخ: گزینه «۲» با آنالیز مدار داریم:

با جایگذاری در معادله‌های فوق:

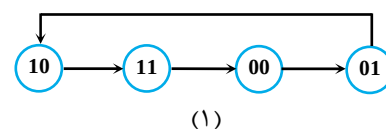
🔗 مثال ۱۲: حلقه شمارش شمارنده زیر کدام گزینه است؟ (خروجی را به صورت AB فرض کنید).



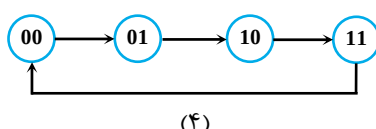
حالت اولیه: AB=10



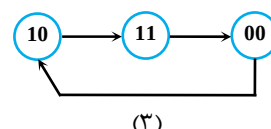
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)



✓ پاسخ: گزینه «۳» با تحلیل شمارنده داده شده داریم:

$$T_A = Q_B(t) \Rightarrow Q_A(t+1) = T_A \oplus Q_A(t) = Q_B(t) \oplus Q_A(t)$$

$$T_B = Q_A(t) \Rightarrow Q_B(t+1) = T_B \oplus Q_B(t) = Q_A(t) \oplus Q_B(t)$$



✓ مثال ۱۳: مداری که جدول حالت آن در زیر آمده است را با استفاده از فلیپ فلاپ‌های T طراحی کنید؟

حالت	ورودی x	
	۰	۱
A	A/۰	B/۰
B	C/۰	B/۰
C	D/۰	B/۰
D	B/۱	A/۰

	y ₁	y ₂
A	۰	۰
B	۰	۱
C	۱	۱
D	۱	۰

✓ پاسخ: ابتدا به هر یک از سمبل‌های حرفی یک مقدار دودویی نسبت می‌دهیم.

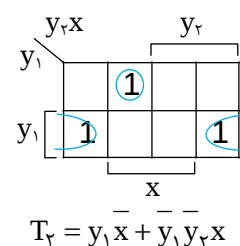
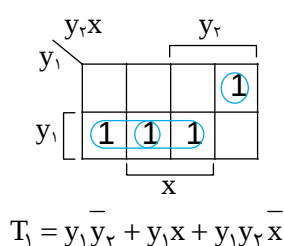
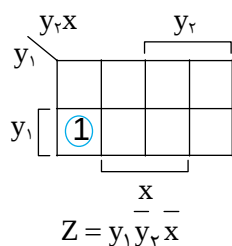
چون مدار ۴ حالت A, B, C و D را دارد پس نیاز دو بیت و به تبع به دو فلیپ فلاپ می‌باشد که آنها را y₁ و y₂ می‌نامیم و هر یک از ۴ مقدار y₁y₂ را به یکی از این حروف انتساب می‌دهیم.

ورودی فلیپ فلاپ‌ها خروجی حالت بعدی ورودی حالت فعلی

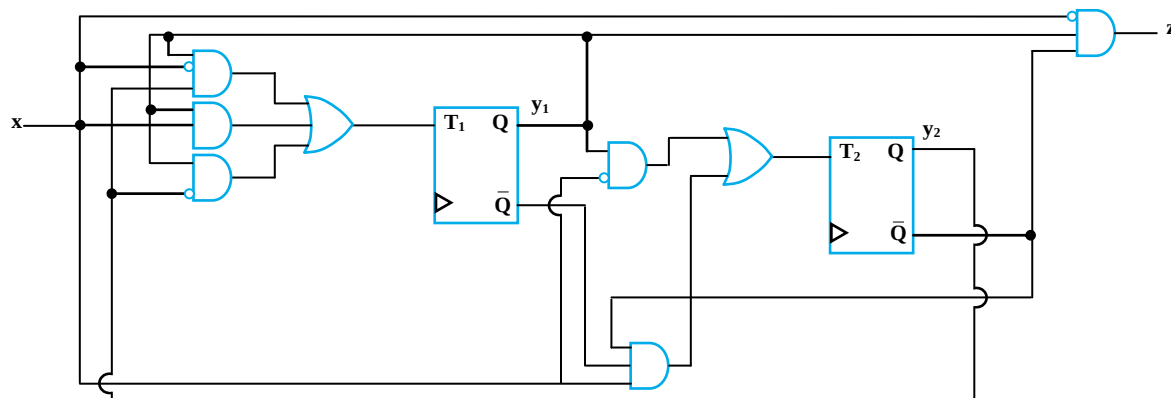
y ₁	y ₂	x	y ₁ ⁺	y ₂ ⁺	Z	T ₁	T ₂
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۰

سپس برای هر یک از y₁ و y₂ یک T-FF در نظر گرفته و جدول تحریک مدار را بدست می‌آوریم، Z خروجی مدار است. برای بدست آوردن جدول تحریک کل مدار، از جدول تحریک فلیپ فلاپ T استفاده می‌کنیم. به این صورت که هر گاه $y = y^+$ باشد T=۰ است و هر گاه $y^+ = \bar{y}$ باشد T=۱ بوده است. خروجی Z نیز بر اساس جدول داده شده نوشته می‌شود.

در مرحله آخر با استفاده از جدول کارنو معادله ورودی فلیپ فلاپ‌ها و خروجی مدار را بدست می‌آوریم:

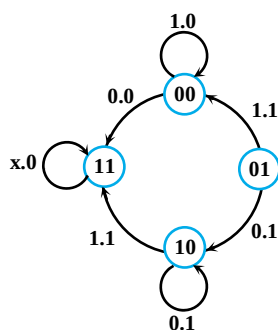


در نهایت با استفاده از رابطه بدست آمده فوق، مدار ترتیبی نهایی بدست می‌آید. شکل مدار:





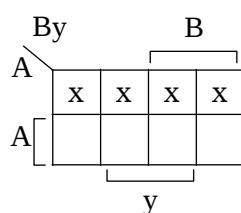
مثال ۱۴: مداری که نمودار حالت آن داده شده است را با استفاده از JK - FF طراحی نمایید.



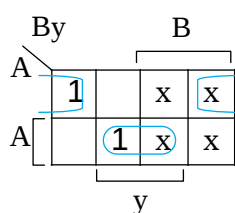
ورودی فلیپ‌فلاپ‌ها			خروجی		حالت بعدی		ورودی		حالت فعلی
A	B	y	A ⁺	B ⁺	Z	J _A	K _A	J _B	K _B
0	0	0	1	1	0	1	X	1	X
0	0	1	0	0	0	0	X	0	X
0	1	0	1	0	1	1	X	X	1
0	1	1	0	0	1	0	X	X	1
1	0	0	1	0	1	X	0	0	X
1	0	1	1	1	1	X	0	1	X
1	1	0	1	1	0	X	0	X	0
1	1	1	1	1	0	X	0	X	0

پاسخ: حالت مدار دارای ۲ بیت است. بنابراین ۲ عدد JK - FF با خروجی‌های A, B را برای مدار در نظر می‌گیریم. سپس جدول حالت مدار را تشکیل داده و بر اساس حالت فعلی و بعدی مدار و با استفاده از جدول تحریک فلیپ فلاپ‌ها، جدول تحریک مدار را بدست می‌آوریم. برای بدست آوردن جدول تحریک کل مدار باید از جدول تحریک فلیپ فلاپ JK استفاده کنیم. به این صورت که اگر $A = A^+ = 0$ باشد مقدار $K = X$ و $J = 0$ است. اگر $A^+ = 1$ و $A = 0$ باشد مقدار $K = 1$ و $J = X$ است. اگر $A = A^+ = 1$ باشد مقدار $K = 0$ و $J = X$ است.

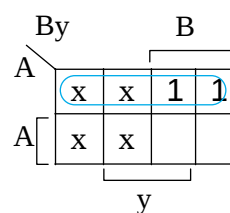
حال با استفاده از جدول کارنو معادله ورودی فلیپ فلاپ‌ها و خروجی مدار را بدست می‌آوریم:



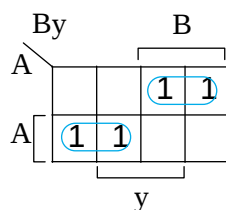
$$K_A = 0$$



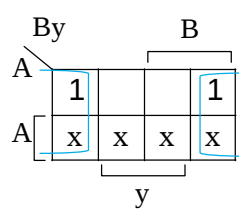
$$J_B = Ay + \bar{A}\bar{y} = A \odot y$$



$$K_B = \bar{A}$$

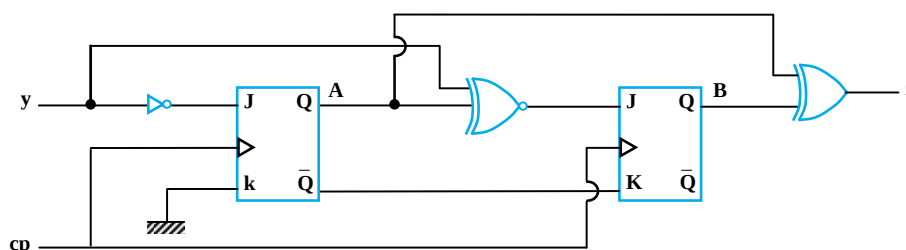


$$Z = A\bar{B} + \bar{A}B = A \oplus B$$

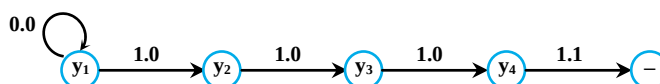


$$J_A = \bar{y}$$

در نهایت با استفاده از روابط بدست آمده، مدار ترتیبی رسم می‌شود.



مثال ۱۵: مدار ترتیبی دارای نمودار حالت مقابل را توسط فلیپ فلاپ‌های T طراحی نمایید.





✓ پاسخ: ابتدا به هر یک از حالات مشخص مدار یک مقدار دودویی نسبت می‌دهیم.

$$y_1 = 00, y_2 = 01, y_3 = 10, y_4 = 11$$

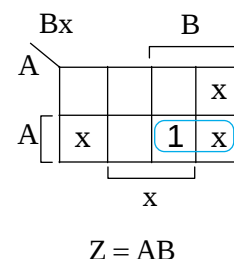
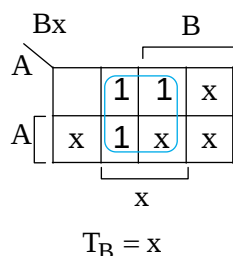
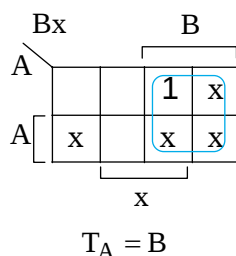
چون حالت مدار دو بیتی است، دو فلیپ فلاپ T با نام‌های A و B برای مدار در نظر می‌گیریم و جدول حالت مدار را رسم می‌کنیم.

ورودی فلیپ‌فلاپ‌ها خروجی حالت بعدی ورودی حالت فعلی

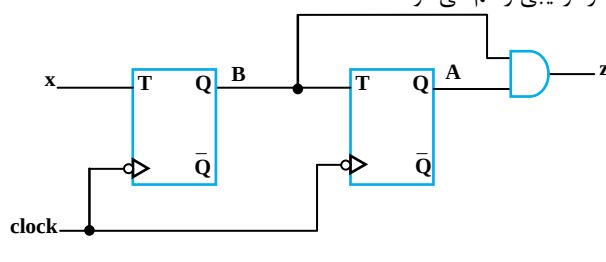
A	B	x	A ⁺	B ⁺	Z	T _A	T _B
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	x	x	x	x	x
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	x	x	x	x	x
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	x	x	x	x	x
1	1	1	x	x	1	x	x

در نمودار حالت مدار، از حالت y_3 به ازاء ورودی صفر حالت بعدی مشخص نیست. بنابراین در جدول حالت مدار به ازاء حالت $AB = 01$ یا (y_2) و ورودی $x = 0$ حالت بعدی هم «بی‌اهمیت» $(A^+B^+ = xx)$ درج شده و خروجی هم «بی‌اهمیت» درج شده است. در نتیجه در ستون مربوط به ورودی فلیپ فلاپ‌ها، ورودی هر دو فلیپ فلاپ هم «بی‌اهمیت» $(T_A T_B = xx)$ درج شده است. برای سایر حالات تعریف نشده وضع به همین صورت است.

حال با استفاده از جدول کارنو معادله ورودی فلیپ فلاپ‌ها و خروجی مدار را بدست می‌آوریم.

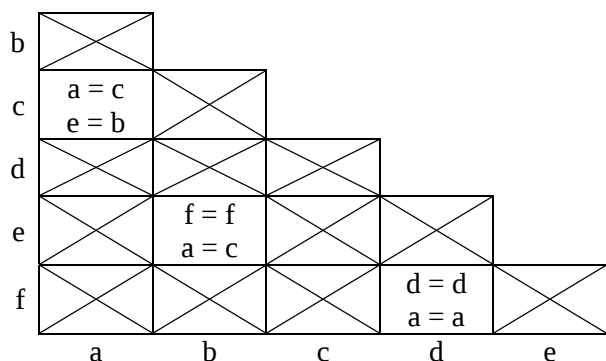


در نهایت با استفاده از روابط بدست آمده، مدار ترتیبی رسم می‌شود.



حالت فعلی	حالت بعدی		خروجی	
	x = 0	x = 1	x = 0	x = 1
a	a	e	1	0
b	f	a	0	1
c	c	b	1	0
d	d	a	0	0
e	f	c	0	1
f	d	a	0	0

🔗 مثال ۱۶: حالت مدار ترتیبی با جدول حالت زیر را در صورت امکان کاهش دهید.



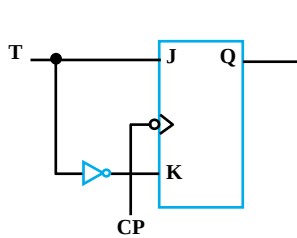
✓ پاسخ: با بکارگیری روش کاهش حالات داریم:

چون $a = a$ و $d = d$ بنابراین حالت‌های d و f با هم معادند. حالت‌های a و c با هم معادند اگر حالت‌های b و e با هم معادل باشند و حالت‌های b و e با هم معادند اگر حالت‌های c و a با هم معادل باشند. بنابراین اگر یکی از دو زوج معادل فرض شوند، زوج دیگر نیز معادل خواهند بود. پس a با هم و b و e با هم معادند.



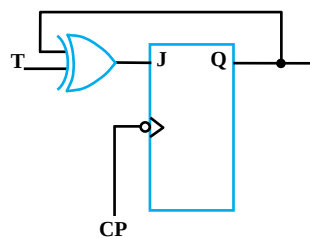
آزمون فصل پنجم

۱- عملکرد کدام مدار، معادل عملکرد T-FF است؟



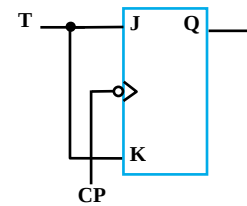
شکل (۳)

(۴) ۲ و ۳



شکل (۲)

(۳) ۱ و ۲

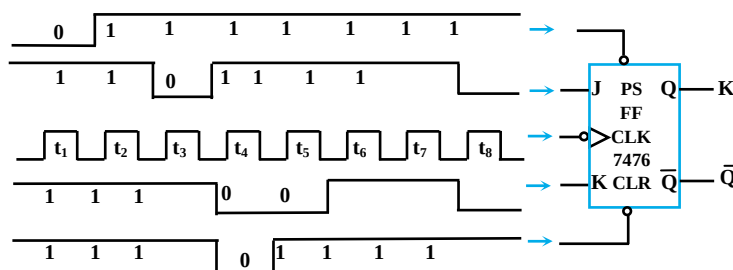


شکل (۱)

(۲) ۳

(۱) ۱

۲- در شکل داده شده در لحظه‌ی اعمال پالس ساعت t_8 خروجی $Q = \dots$ و خروجی $\bar{Q} = \dots$ است.



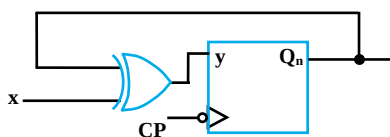
(۴) ۱-۱

(۳) ۰-۰

(۲) ۱-۰

(۱) ۰-۱

۳- در فلیپ فلاپ شکل زیر X و Y را مشخص کنید.

(۱) $y = D$ و $x = T$ (۲) $y = T$ و $x = D$

(۳) ۱ و ۲

(۴) هیچکدام

۴- جدول درستی شکل زیر چه نوع فلیپ فلاپی را نشان می‌دهد؟

x	Q_{n+1}
۰	۰
۱	۱

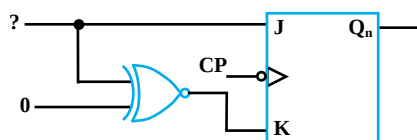
(۱) T

(۲) D

(۳) SR

(۴) Jk

۵- شکل زیر مربوط به کدام فلیپ فلاپ است؟



(۱) T

(۲) D

(۳) jk

(۴) SR

۶- در مدار میلی خروجی تابعی از و در مور خروجی تابعی از است.

(۱) حالت مدار - حالت مدار

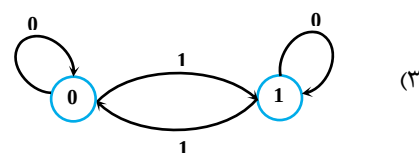
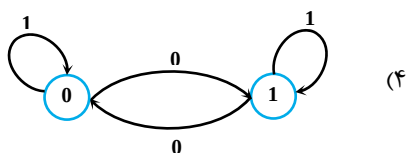
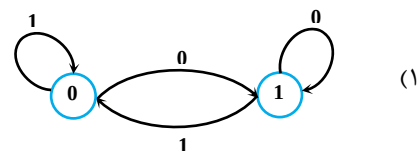
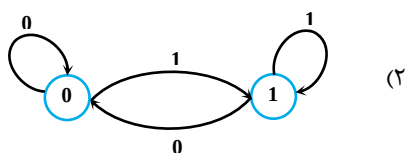
(۲) حالت مدار - حالت مدار و ورودی

(۳) حالت مدار و ورودی - حالت مدار

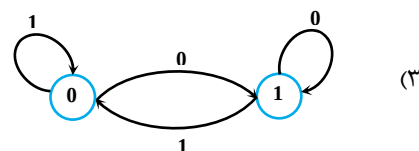
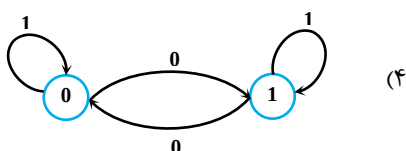
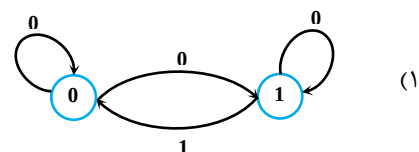
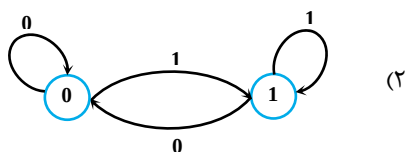
(۴) حالت مدار و ورودی - حالت مدار و ورودی



۷- کدام شکل مربوط به دیاگرام حالت $D - FF$ می‌باشد؟



۸- کدام شکل مربوط به دیاگرام حالت $D - FF$ می‌باشد؟



۹- اگر بخواهیم با یک $D - FF$ ، $SR - FF$ بسازیم، کدام گزینه ورودی D را به درستی مشخص کرده است؟

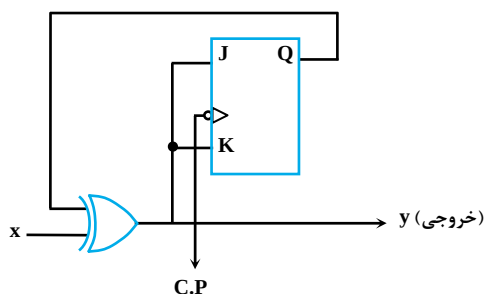
$D = S + \overline{R}Q(t)$ (۴)

$D = S \oplus R \oplus Q(t)$ (۳)

$D = (S + R) \oplus Q(t)$ (۲)

$D = S\overline{Q}(t) + \overline{R}Q(t)$ (۱)

۱۰- خروجی مدار شکل زیر به ازای رشته ورودی $x = ۰۱۱۰۱۰۱۰$ کدام است؟ (فلیپ فلاپ را ابتدا set فرض کنید).



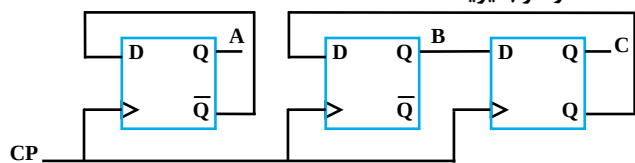
$y = ۰۱۰۱۰۱۰۱$ (۱)

$y = ۰۱۱۰۱۰۱۰$ (۲)

$y = ۱۱۰۱۱۱۱$ (۳)

$y = ۱۱۱۱۱۰۱۱$ (۴)

مثال ۳: دنباله شمارش مدار مقابل کدام گزینه است؟ (خروجی را به صورت ABC در نظر بگیرید).



حالت اولیه: ABC=000

- (۱) $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$
 (۲) $0 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
 (۳) $0 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2$
 (۴) $0 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

پاسخ: گزینه «۴» فلیپ فلاپ‌های C و B یک شمارنده حلقوی تابیده را تشکیل می‌دهند و مقدار فلیپ فلاپ A هم در هر پالس ساعت ممتد

ABC

$000 \rightarrow 110 \rightarrow 011 \rightarrow 101 \rightarrow 000 \equiv 0 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 0$

می‌شود. (D = Q_A(t)) بنابراین:

مثال ۴: ورودی T در یک فلیپ فلاپ T همواره «۱» است اگر ورودی ساعت، پالسی متناوب با فرکانس ۱KHz باشد، کدام گزینه در مورد خروجی

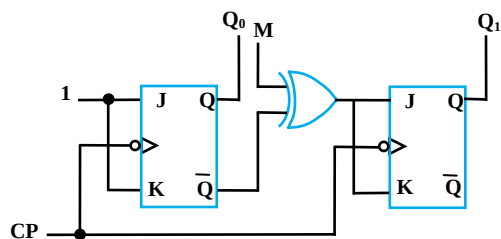
صادق است؟

- (۱) خروجی، یک پالس متناوب با دوره تناوب ۱ms است.
 (۲) خروجی، یک پالس متناوب با فرکانس ۲KHz است.
 (۳) خروجی، یک پالس متناوب با دوره تناوب ۲ms است.
 (۴) خروجی، یک پالس متناوب با فرکانس ۰/۱KHz است.

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم به ازای هر فلیپ فلاپ فرکانس خروجی $f_{out} = \frac{1}{2^n} f_{in}$ خواهد شد، و در مورد زمان تناوب بالعکس یعنی

$T_{out} = 2^n T_{in}$ خواهد شد. در این تست دو برابر یعنی ۲ms خواهد بود.

مثال ۵: در مورد مدار شکل زیر کدام گزینه درست است؟



- (۱) به شرط $M=1$ یک نزولی شمار و به شرط $M=0$ یک صعودی شمار است.
 (۲) به شرط $M=0$ یک نزولی شمار و به شرط $M=1$ یک صعودی شمار است.
 (۳) به شرط $M=0$ شیف به چپ و به شرط $M=1$ شیف به راست می‌دهد.
 (۴) به شرط $M=1$ شیف به راست و به شرط $M=0$ شیف به چپ می‌دهد.

پاسخ: گزینه «۲» اگر $M=0$ باشد، گیت XOR بی‌تأثیر (اتصال کوتاه) بوده و خروجی $\bar{Q}$ فلیپ فلاپ اول به ورودی فلیپ فلاپ دوم متصل

می‌شود که با این عمل مدار تبدیل به نزولی شمار می‌شود. اگر $M=1$ باشد گیت XOR عمل NOT کرده و خروجی Q فلیپ فلاپ اول به ورودی فلیپ فلاپ دوم متصل می‌شود که با این عمل مدار تبدیل به یک صعودی شمار می‌شود.

مثال ۶: توسط فلیپ فلاپ نوع JK یک شمارنده‌ی بخش بر ۵ (مبنای ۵) طراحی کنید.

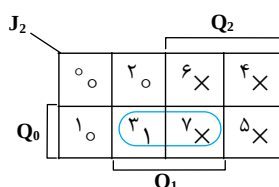
پاسخ: ابتدا جدول تحریک فلیپ فلاپ نوع JK را با توجه به جدول درستی آن بدست می‌آوریم.

						حالت فعلی				حالت بعدی									
J	K	Q_{n+1}	Q_n	Q_{n+1}	J	K	اعداد	Q_2	Q_1	Q_0	Q_2^+	Q_1^+	Q_0^+	J_2	K_2	J_1	K_1	J_0	K_0
0	0	Q_n	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	1	0	X	0	X	1	X
0	1	0	0	1	1	X	1	0	0	1	0	1	0	0	X	1	X	X	1
1	0	1	1	0	X	1	2	0	1	0	0	1	1	0	X	X	0	1	X
1	1	$\bar{Q}_n$	1	1	X	0	3	0	1	1	1	0	0	1	X	X	1	X	1
							4	1	0	0	0	0	0	X	1	0	X	0	X

حال با توجه به جدول، Jها و Kها را بر حسب حالت فعلی بدست می‌آوریم.

برای J_2 با توجه به اینکه هیچ شباهتی با حالات فعلی مشاهده نمی‌شود از طریق جدول کارنو آن را بدست می‌آوریم.

نکته ۱: چون در جدول کارنو اعداد ۵، ۶ و ۷ وجود ندارند بنابراین بجای آن‌ها X (بی‌اهمیت) قرار می‌دهیم.



$$J_2 = Q_1 Q_0$$



$$K_2 = 1$$

برای بدست آوردن K_2 همانگونه که ملاحظه می‌کنیم کافی است X ها را "۱" در نظر بگیریم که در این صورت خواهیم داشت:

$$J_1 = Q_0$$

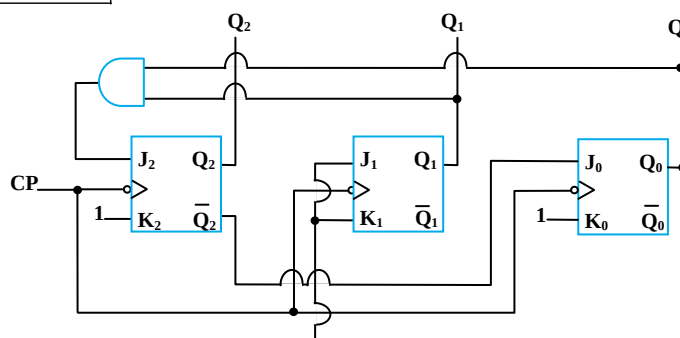
برای بدست آوردن J_1 اگر یکی از X ها را "۰" و دیگری را "۱" در نظر بگیریم در این صورت J_1 همان Q_0 خواهد شد بنابراین:

برای بدست آوردن K_1 نیز کافی است X اولی را "۰" و X دومی را "۱" و X سومی را "۰" در نظر بگیریم در این صورت K_1 برابر همان Q_0 خواهد شد بنابراین:

$$K_1 = Q_0$$

برای بدست آوردن J_0 ، با مقایسه آن با Q_2 به این نتیجه برسیم که اگر در J_0 ها X ها را "۱" در نظر بگیریم دقیقاً به عکس Q_2 خواهیم رسید بنابراین:

$$J_0 = \bar{Q}_2$$



برای بدست آوردن K_0 همانگونه که می‌بینیم اگر X ها را "۱" در نظر بگیریم در این صورت خواهیم داشت:

$$K_0 = 1$$

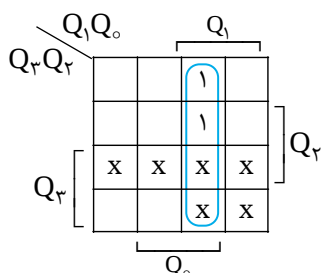
حال با بدست آمدن تمامی ورودی‌ها می‌توان مدار این شمارنده را رسم کرد.

مثال ۷: یک شمارنده BCD طراحی نمایید که از ۰ تا ۹ می‌شمارد.

پاسخ: یک شمارنده BCD اعداد مبنای ده از ۰ تا ۹ را می‌شمارد و مجدداً به صفر باز می‌گردد. چون این شمارنده اعداد ۱۰ تا ۱۵ را نمی‌شمارد الگوی منظم ساختار شمارنده‌های دودویی را ندارد. بنابراین باید با استفاده از روند طراحی شمارنده‌ها (مدارهای ترتیبی) به دست آید. مرحله اول: چهار فلیپ فلاپ T با خروجی‌های Q_0 تا Q_3 در نظر می‌گیریم. سپس بر اساس مقدار فعلی و بعدی فلیپ فلاپ‌ها و جدول تحریک فلیپ فلاپ T ، جدول تحریک مدار را بدست می‌آوریم.

ورودی فلیپ فلاپ‌ها				خروجی				حالت بعدی				حالت فعلی			
T _۰	T _۱	T _۲	T _۳	y	Q _۰	Q _۱	Q _۲	Q _۳	Q _۰	Q _۱	Q _۲	Q _۳			
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰			
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰			
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰			
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰			
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰			
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰			
۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱			
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱			
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱			

مرحله دوم: پنج جدول کارنوی چهار متغیره رسم کرده و مقدار ساده شده T_0 تا T_3 و y را بر اساس Q_0 تا Q_3 بدست می‌آوریم توجه نمایید که در جدول کارنو خانه‌های ۱۰ تا ۱۵ به عنوان حالت بی‌اهمیت هستند چون هیچگاه شمارنده این اعداد را نخواهد شمرد. به عنوان مثال برای ورودی T_2 جدول را رسم می‌نماییم و برای بقیه موارد ساده شده نوشته شده است:



$$\Rightarrow T_2 = Q_1 Q_0$$

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = \bar{Q}_3 Q_0$$

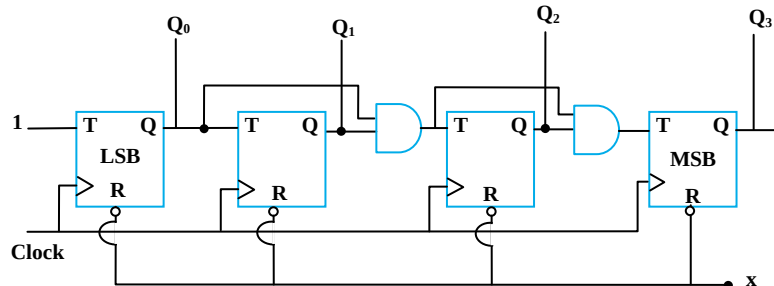
$$T_3 = Q_3 Q_0 + Q_2 Q_1 Q_0$$

$$y = Q_3 Q_0$$

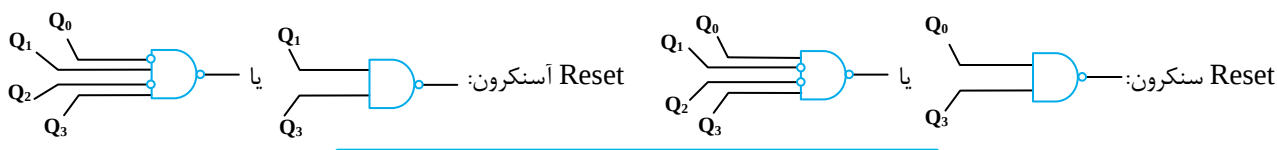
حال می‌توان بر اساس این اعداد مدار را رسم کرد. شمارنده‌های BCD را می‌توان بصورت سری به هم وصل کرد و شمارنده‌های چند رقمی برای اعداد دهدهی ساخت. برای این کار باید خروجی y از یک طبقه (رقم) به ورودی شمارش طبقه (رقم) با ارزش بالاتر متصل گردد.



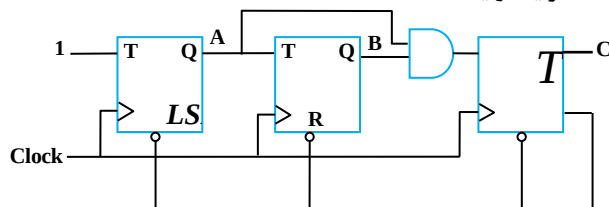
مثال ۸: ایجاد یک شمارنده ۱۰ شمار (۰-۹) سنکرون:



پاسخ: اگر پایه‌های Reset سنکرون باشند باید گیت مورد استفاده رسیدن به عدد ۹ را تشخیص دهد و اگر پایه‌های Reset آسنکرون باشند باید گیت مورد استفاده رسیدن به عدد ۱۰ را تشخیص دهد. در هر حال خروجی گیت به نقطه‌ی X متصل می‌شود.



مثال ۹: کدام گزینه سیکل شمارش مدار زیر را به صورت ABC نشان می‌دهد؟ (شرایط اولیه ۰۰۰)



(۱) ۰۰۰ → ۱۰۰ → ۰۱۰ → ۱۱۰ → ۰۰۱ → ۰۰۰

(۲) ۰۰۰ → ۰۰۱ → ۰۱۰ → ۰۱۱ → ۱۰۰ → ۰۰۰

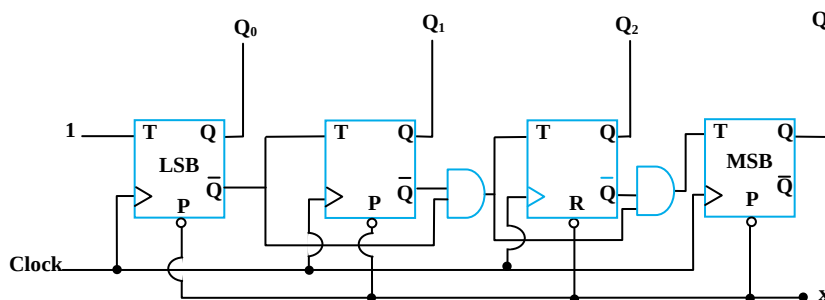
(۳) ۰۰۰ → ۰۱۰ → ۱۰۰ → ۱۱۰ → ۰۰۱ → ۰۰۰

(۴) ۰۰۰ → ۱۱۰ → ۰۱۱ → ۱۰۰ → ۰۰۱ → ۰۰۰

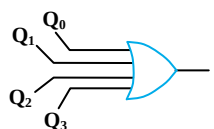
پاسخ: گزینه «۱» مدار یک شمارنده سنکرون صعودی شمار است. با رسیدن به عدد ۰۰۱ یعنی ۴ پایه‌ی Reset فلیپ فلاپ‌ها فعال شده و در پالس ۰۰۰ → ۱۰۰ → ۰۱۰ → ۱۱۰ → ۰۰۱ → ۰۰۰ ≡ ۰ → ۱ → ۲ → ۳ → ۴

بعدی شمارنده صفر می‌شود. بنابراین:

مثال ۱۰: ساختن یک شمارنده نزولی شمار ۱۲ شمار سنکرون:

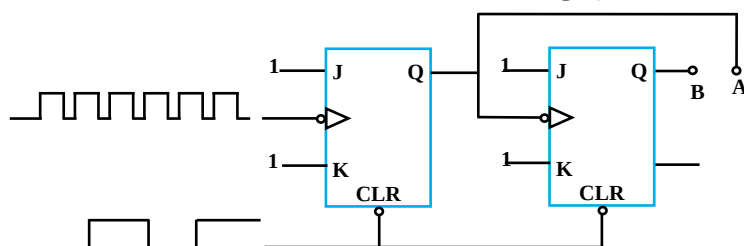


پاسخ: اگر پایه‌های Preset سنکرون باشند گیت مورد استفاده رسیدن به عدد ۰ را باید تشخیص دهد و اگر پایه‌های Preset آسنکرون باشند باید گیت مورد استفاده رسیدن به عدد $2^n - 1$ را تشخیص دهد. با فرض سنکرون بودن پایه‌های Preset:



خروجی گیت به نقطه‌ی X متصل می‌شود. با رسیدن به عدد ۰ مجدداً عدد ۱۱ در شمارنده بار می‌شود.

مثال ۱۱: در شکل زیر بعد از اعمال پالس ساعت پنجم، خروجی چه عددی را نشان می‌دهد؟

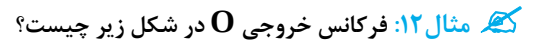
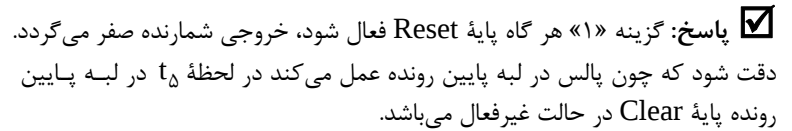


(۱) ۱

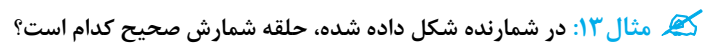
(۲) ۲

(۳) ۳

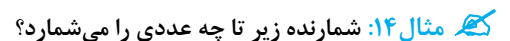
(۴) ۰



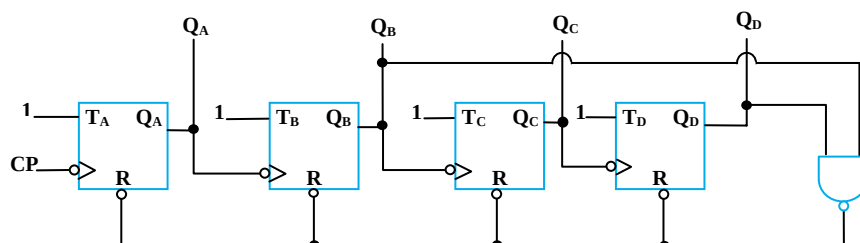
- ✓ پاسخ: گزینه «۴» فلیپ فلاپ‌های T_1, T_2 تشکیل یک شمارنده دودویی دو بیتی را می‌دهند که فرکانس ورودی را به ۴ تقسیم می‌کند. سپس خروجی این شمارنده به عنوان پالس ساعت یک $T - FF$ بکار رفته است که آن هم مجدداً فرکانس را بر ۲ تقسیم می‌کند. بنابراین فرکانس بر ۸ تقسیم می‌شود.
- $$f_o = \frac{f_{in}}{8} = \frac{1\text{KHz}}{8} = 125\text{Hz}$$



- ✓ پاسخ: گزینه «۳» شمارنده داده شده، یک شمارنده آسنکرون صعودی شمار ۳ بیتی است. با شروع شمارش از صفر با رسیدن به عدد ۵ یا ۱۰۱ پایه R فلیپ فلاپ‌ها فعال شده و همگی فلیپ فلاپ‌ها صفر می‌شوند. چون عدد ۵ در خروجی پایدار نیست لذا سیکل شمارش به صورت $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ است.

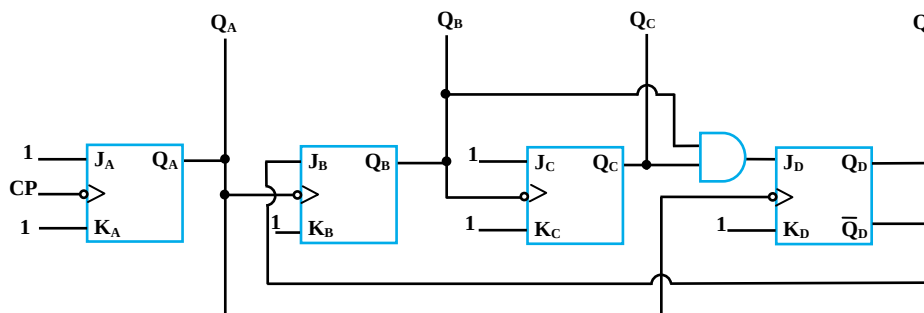


- ✓ پاسخ: گزینه «۴» چون به محض آمدن ۳ تا صفر preset فعال شده و به عدد ۶ می‌پرد و ما صفر را نمی‌بینیم.
- اگر بخواهیم شمارنده بعد از ده پالس به حالت اول برگردد (شمارنده بخش بر ده) کافی است که وقتی به پالس دهم رسید، همه فلیپ فلاپ‌ها پاک (Reset) شوند یعنی شمارنده به حالت اول برگردد، چون کد خروجی شمارنده ($Q_3Q_2Q_1Q_0$) برابر 1010 می‌باشد (عدد 10 در سیستم اعشاری) می‌توان با یک گیت Nand به محض رسیدن به این کد خروجی آن را صفر کرد و همه فلیپ فلاپ‌ها را Reset نمود شکل مدار چنین است.

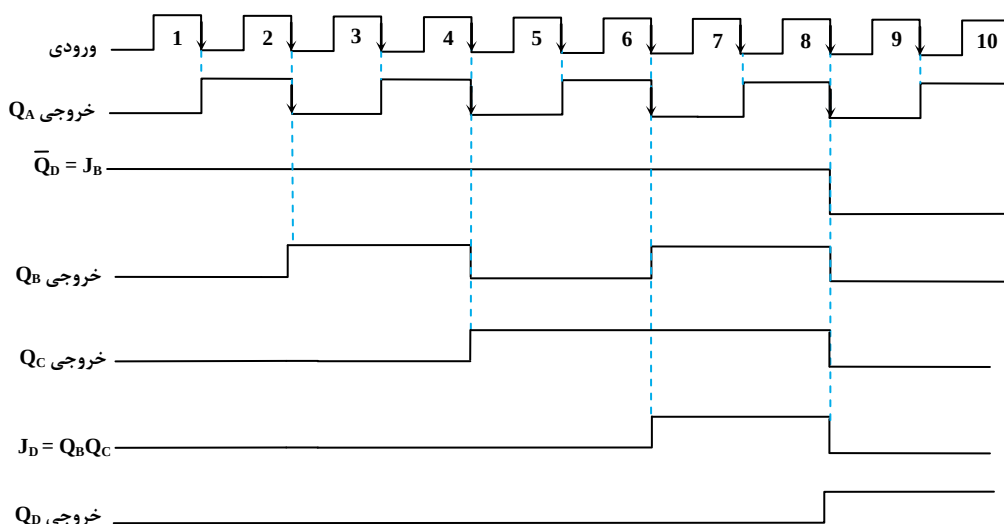




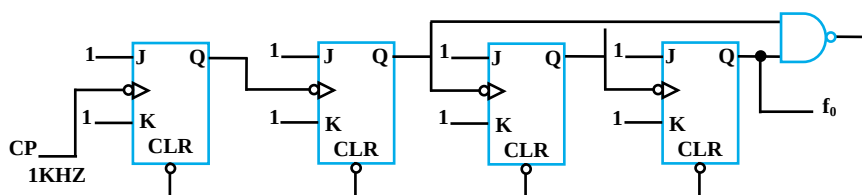
این شمارنده برای فرکانس‌های پائین مناسب است ولی وقتی فرکانس زیاد می‌شود قبل از Reset شدن فلیپ فلاپ‌ها، فلیپ فلاپ اول تغییر حالت می‌دهد در نتیجه شمارنده یک رقم اشتباه می‌کند. برای رفع این شکل روش‌های متفاوتی وجود دارد. روش اول بصورت مدار زیر ارائه شده است که بصورت آی‌سی شماره ۷۴۹۰ در بازار وجود دارد.



فلیپ فلاپ‌های اول و سوم بصورت T فلیپ فلاپ کار می‌کنند (چرا؟) فلیپ فلاپ دوم وقتی کار می‌کند که $\bar{Q}_D$ برابر ۱ باشد ($J_B = \bar{Q}_D$) و فلیپ فلاپ چهارم وقتی کار می‌کند که Q_C و Q_B هر دو یک باشند ($J_D = Q_B Q_C$) باید توجه داشت که CP به Q_A وصل است. شکل موج خروجی‌های شمارنده در شکل زیر داده شده است.



مثال ۱۵: فرکانس خروجی f_o در شکل زیر، چند هرتز است؟



۹۰ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۱۰ (۳)

۱۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» مدار یک شمارنده آسنکرون صعودی شمار است. با رسیدن به عدد ۱۰۱ یعنی ۱۰ مجدداً صفر می‌شود.

$$f_o = \frac{1}{N} cp = \frac{1}{10} \times 1 \text{ KHZ} = 100 \text{ Hz}$$

f_o خروجی MSB آن است که تقسیم فرکانس بر $\frac{1}{N}$ یا $\frac{1}{10}$ را انجام می‌دهد.

مثال ۱۶: در یک شمارنده حلقوی تاییده با n عدد FF فرکانس خروجی هر یک از FF‌ها چه رابطه‌ای با فرکانس ورودی (f_{in}) دارد؟

$$f_{in} * n \quad (۴)$$

$$\frac{f_{in}}{n^2} \quad (۳)$$

$$\frac{f_{in}}{2n} \quad (۲)$$

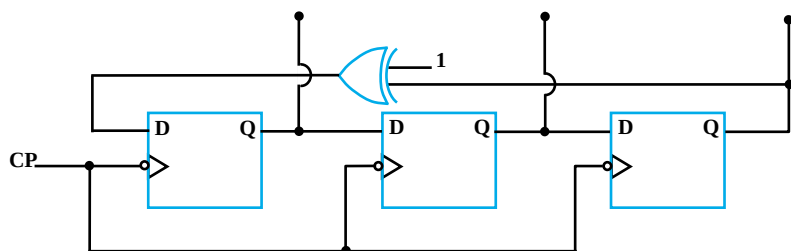
$$\frac{f_{in}}{n} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲»



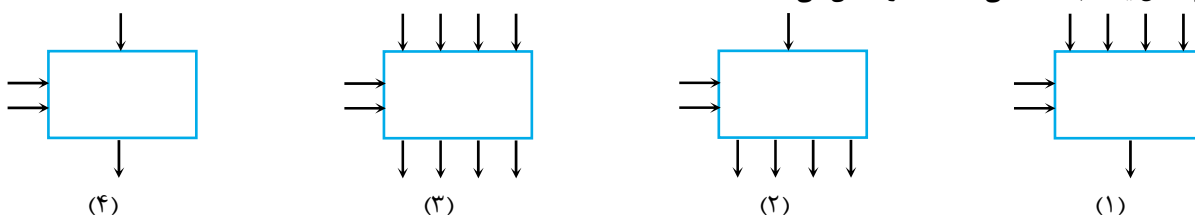
آزمون فصل ششم

۱- شمارنده زیر چه نوع شمارنده‌ای است؟



- (۱) باینری
- (۲) ناهمگام
- (۳) حلقوی
- (۴) جانسون

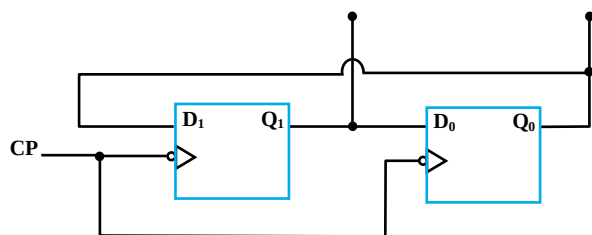
۲- کدام شکل یک ثابت انتقالی SIPO را نشان می‌دهد؟



۳- در صورتی که یک ثابت انتقالی ۳۲ بیتی داشته باشیم و بخواهیم عدد داخلی آن را بر ۶۴ تقسیم کنیم آن را چند بار و در چه جهتی باید شیفت بدهیم؟

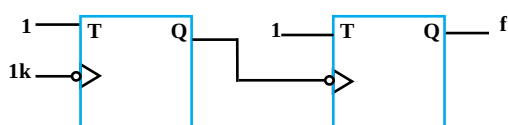
- (۱) ۵ بار - راست
- (۲) ۵ بار - چپ
- (۳) ۶ بار - راست
- (۴) ۶ بار - چپ

۴- مدار شکل زیر کدام شمارنده را نشان می‌دهد و نحوه شمارش چگونه است؟



- (۱) حلقوی - ۱ → ۲
- (۲) همگام - ۲ → ۳
- (۳) جانسون - ۱ → ۲
- (۴) حلقوی - ۲ → ۳

۵- در شکل زیر فرکانس خروجی برابر است با:

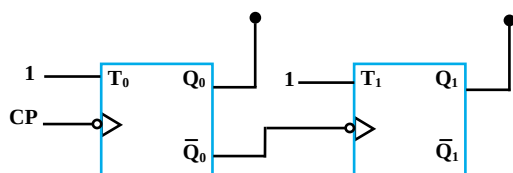


- (۱) ۲۵۰ Hz
- (۲) ۱۲۵ Hz
- (۳) ۲ KHz
- (۴) ۵۰۰ Hz

۶- در یک شمارنده ناهمگام (آسنکرون) در صورتی که بخواهیم شمارنده تا عدد ۲۰ را شمارش نماید به چند فلیپ نیاز داریم؟

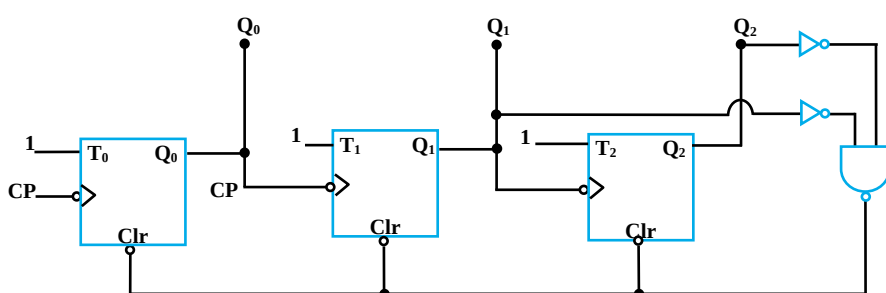
- (۱) ۶
- (۲) ۴
- (۳) ۸
- (۴) ۵

۷- در شمارنده زیر چه اعدادی شمارش می‌شود؟



- (۱) ۰ تا ۳
- (۲) ۰ تا ۳
- (۳) ۰ تا ۲
- (۴) هیچکدام

۸- در شمارنده زیر نحوه شمارش چگونه است؟



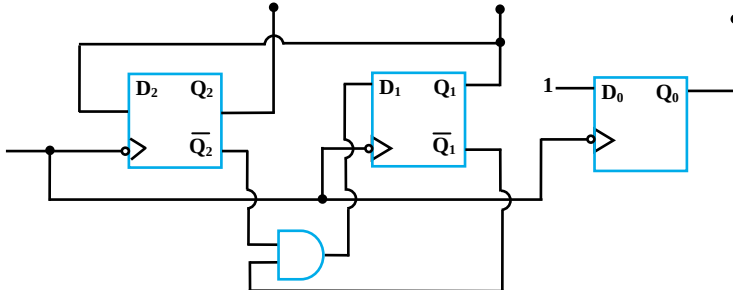
- (۱) ۰ تا ۷
- (۲) ۰ تا ۶
- (۳) ۰ تا ۵
- (۴) شمارش روی صفر متوقف است.



۹- تفاوت شمارنده‌های ناهمگام (آسنکرون) با شمارنده‌های همگام (سنکرون) در چیست؟

- (۱) در نوع فلیپ فلاپ
- (۲) در پالس ساعت
- (۳) فرقی ندارد
- (۴) هیچکدام

۱۰- در شمارنده همگام (سنکرون) شکل زیر چه اعدادی شمارش می‌شود؟



(۱) $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

(۲) $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

(۳) $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

(۴) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$



فصل اول: سیستم‌ها و مبناهای عددی»

۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۱»	۳- گزینه «۳»	۴- گزینه «۴»	۵- گزینه «۱»
۶- گزینه «۱»	۷- گزینه «۳»	۸- گزینه «۱»	۹- گزینه «۴»	۱۰- گزینه «۲»

فصل دوم: مدارهای منطقی»

۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۱»	۳- گزینه «۳»	۴- گزینه «۱»	۵- گزینه «۲»
۶- گزینه «۲»	۷- گزینه «۱»	۸- گزینه «۱»	۹- گزینه «۴»	۱۰- گزینه «۳»

فصل سوم: ساده‌سازی توابع منطقی»

۱- گزینه «۴»	۲- گزینه «۱»	۳- گزینه «۱»	۴- گزینه «۲»	۵- گزینه «۲»
۶- گزینه «۱»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۴»	۹- گزینه «۴»	۱۰- گزینه «۴»

فصل چهارم: مدارهای منطقی ترکیبی»

۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۴»	۴- گزینه «۴»	۵- گزینه «۱»
۶- گزینه «۳»	۷- گزینه «۲»	۸- گزینه «۳»	۹- گزینه «۳»	۱۰- گزینه «۱»

فصل پنجم: مدارهای منطقی ترتیبی»

۱- گزینه «۳»	۲- گزینه «۱»	۳- گزینه «۳»	۴- گزینه «۲»	۵- گزینه «۲»
۶- گزینه «۳»	۷- گزینه «۲»	۸- گزینه «۱»	۹- گزینه «۴»	۱۰- گزینه «۳»

فصل ششم: واحدهای منطقی ترتیبی»

۱- گزینه «۴»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۳»	۴- گزینه «۱»	۵- گزینه «۱»
۶- گزینه «۴»	۷- گزینه «۲»	۸- گزینه «۴»	۹- گزینه «۲»	۱۰- گزینه «۲»