فصل اول

« معرفی برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی و حل هندسی »

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال ۱: تعداد پزشکان موردنیاز یک بیمارستان برای هر دوره ۴ ساعته در طول یک شبانه‌روز به صورت جدول زیر می باشد.

ردیف	زمان هر شیفت	تعداد پزشک
۱	۰ تا ۴	۴
۲	۴ تا ۸	۷
۳	۸ تا ۱۲	۹
۴	۱۲ تا ۱۶	۱۲
۵	۱۶ تا ۲۰	۸
۶	۲۰ تا ۲۴	۶

هر پزشک از زمان شروع به کار خود به مدت ۸ ساعت به طور مستمر کار می‌کند. برنامه‌ی حضور پزشکان را طوری تنظیم کنید که تعداد پزشکان موردنیاز حداقل شود.

☑ **پاسخ:** گام‌های موردنیاز برای مدل‌سازی مسأله به صورت زیر است:

۱) تعریف متغیرهای تصمیم: در این مسأله هدف، تعیین برنامه‌ی حضور پزشکان در بیمارستان می‌باشد، یعنی اینکه چه تعداد پزشک در ابتدای هر شیفت ۴ ساعته مشغول به کار شوند. پس متغیر تصمیم عبارت است از:

x_i: تعداد پزشکانی که در ابتدای دوره i شروع به کار می‌کنند　　$i=1,2,\dots,6$

۲) تعریف تابع هدف: هدف این مسأله حداقل کردن تعداد پزشک مورد نیاز می‌باشد. بنابراین مجموع تعداد پزشکانی که در طول شبانه‌روز مشغول به کار می‌شوند باید حداقل شود. بنابراین تابع هدف به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\text{Min}Z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

۳) استخراج محدودیت‌ها: همانطور که در صورت مسأله ذکر شده است، هر پزشک در طول شبانه‌روز فقط ۸ ساعت آن هم به صورت مستمر کار می‌کند. پس مثلاً در ساعت ۱۲ تا ۱۶ (شیفت۴) فقط پزشکانی حضور دارند که در شیفت ۳ (ساعت ۸ تا ۱۲) و شیفت ۴ مشغول به کار شده‌اند، پس محدودیت مربوط به شیفت ۴ به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$x_3+x_4\ge 12$$

یعنی تعداد پزشکانی که در شیفت ۳ و۴ شروع به کار کرده‌اند، باید حداقل ۱۲ نفر باشد. سایر محدودیت‌ها نیز به همین صورت استخراج می‌شود. هم‌چنین از آنجایی که تعداد پزشکان نمی‌تواند منفی و غیرصحیح باشد، متغیرهای تصمیم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$x_i\ge 0$, عدد صحیح　　$i=1,\dots,6$

به این ترتیب مدل به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\,Z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\\
&\text{s.t}\quad x_1+x_2\ge 7\\
&\qquad x_2+x_3\ge 9\\
&\qquad x_3+x_4\ge 12\\
&\qquad x_4+x_5\ge 8\\
&\qquad x_5+x_6\ge 6\\
&\qquad x_6+x_1\ge 4\\
&\qquad x_i\ge 0\ ,\ \text{عدد صحیح}\quad i=1,\dots,6
\end{aligned}$$

مثال ۲: تابع هدف این مسأله کدام است؟

۱) $\text{Max } Z=\sum_{i=1}^{3} S_i$

۲) $\text{Max } Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\text{Min}\left\{\frac{M_i}{K_{ij}}, \frac{N_i}{P_{ij}}\right\}.C_{ij}.x_{ij}$

۳) $\text{Max } Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\frac{M_i}{k_{ij}}.C_{ij}\,x_{ij}$

۴) $\text{Max } Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}\,x_{ij}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» زیرا هدف، ماکزیمم کردن سود حاصل است.

مثال ۳: کدام یک از گزینه‌های زیر به عنوان محدودیت مسأله می‌باشد؟

۱) $\sum_{j=1}^{4}K_{ij}+S_i=M_i$
$i=1,2,3$

۲) $\sum_{j=1}^{4}K_{ij}\,X_{ij}+\sum_{j}P_{ij}\,X_{ij}=M_i+N_i$
$i=1,2,3$

۳) $\sum_{j=1}^{4}\frac{M_i}{K_{ij}}\le x_{ij}$
$i=1,2,3$

۴) $\sum_{j=1}^{4}\frac{M_i}{K_{ij}}\ge x_{ij}$
$i=1,2,3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ظرفیت استفاده شده از ساعت کار ماشین در کارگاه i ، $(\sum_{j=1}^{4}k_{ij})$ و ظرفیت استفاده نشده آن (S_i) برابر کل ساعت کار ظرفیت کارگاه i است.

$\sum_{j=1}^{4}K_{ij}$: بیانگر ماشین ساعت کاری است که در هر ماه در کارگاه i صرف ساختن صندلی (نوع ۱ و ۲ و ۳ و ۴) می‌شود.

S_i: ماشین ساعت کار استفاده نشده کارگاه i در هر ماه. و M_i: ظرفیت ماشین ساعت کار کارگاه i در هر ماه.

بنابراین می‌توان محدودیت‌های مقابل را برای مسأله نوشت:
$$\sum_{j=1}^{4}K_{ij}+S_i=M_i \quad \text{for } \ i=1,2,3$$

مثال ۴: کدام یک از گزینه‌های زیر به عنوان محدودیت مسأله می‌باشد؟

۱) $\sum_{i=1}^{3}\frac{M_i}{K_{ij}}\ge D_j$
$j=1,2,3,4$

۲) $\sum_{i=1}^{3}\frac{M_i}{K_{ij}}\le D_j$
$j=1,2,3,4$

۳) $\sum_{i=1}^{3}X_{ij}\le D_j$
$j=1,2,3,4$

۴) $\sum_{i=1}^{3}x_{ij}\ge D_j$
$j=1,2,3,4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $\sum_{i=1}^{3}X_{ij}$ یعنی مجموع صندلی‌های ساخته شده نوع j در هر سه کارگاه در هر ماه که باید حداکثر به اندازه‌ی تقاضای ماهیانه صندلی نوع j یعنی D_j باشد:

$$\sum_{i=1}^{3}X_{ij}\le D_j$$
$$\text{for } \ j=1,2,3,4$$

مثال ۵: کدام یک از روابط زیر به عنوان محدودیت مسأله است؟

۱) $S_۱ = S_۲ \; , \; S_۲ = S_۳$

۲) $\frac{S_۱}{N_۱} = \frac{S_۲}{N_۲}$

۳) $M_۲ S_۱ = M_۱ S_۲$

۴) $\frac{S_۱}{\sum_{j=۱}^{۴} K_{۱j}} = \frac{S_۲}{\sum_{j=۱}^{۴} K_{۲j}}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق فرض مسأله مبنی بر یکسان بودن فرسودگی ماشین‌آلات در سه کارگاه باید نسبت ماشین ساعت ظرفیت استفاده نشده در هر کارگاه (S_i) به کل ظرفیت ماشین ساعت آن کارگاه (M_i) برای هر سه کارگاه یکسان باشد:

$$\frac{S_۱}{M_۱} = \frac{S_۲}{M_۲} = \frac{S_۳}{M_۳} \Rightarrow \frac{S_۱}{M_۱} = \frac{S_۲}{M_۲} \Rightarrow M_۲ S_۱ = M_۱ S_۲$$

مثال ۶: یک محصول از مونتاژ ۲ قطعه A و ۳ قطعه B تشکیل می‌شود. در صورتی که Z مقدار تولید این محصول و x_A و x_B مقدار تولید این دو قطعه باشد، تابع هدف مسأله کدام است؟

۱) $\text{Max}\, Z = ۲x_A + ۳x_B$

۲) $\text{Max}\,(Z = \text{Min}\{\frac{x_A}{۲}, \frac{x_B}{۳}\})$

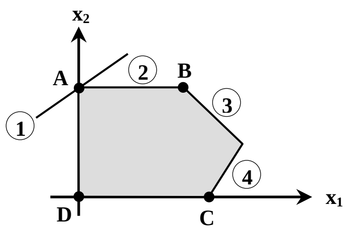
۳) $\text{Max}\,(Z = \text{Min}\{۲x_A + ۳x_B\})$

۴) $\text{Max}\,(Z = \text{Min}\{۲x_A + ۳x_B\})$

پاسخ: گزینه «۲» اگر قطعه‌های A را دو تا، دو تا بسته‌بندی کنیم، تعداد بسته‌ها $\frac{x_A}{۲}$ است و اگر قطعه‌های B را سه تا، سه تا بسته‌بندی کنیم، تعداد بسته‌ها $\frac{x_B}{۳}$است. تعداد هر کدام از بسته‌ها که کمتر باشد، بیانگر تعداد محصول قابل تولید است؛ یعنی $Z = \text{Min}\left\{\frac{x_A}{۲}, \frac{x_B}{۳}\right\}$. هدف ما ماکزیمم‌سازی تعداد محصول قابل تولید است، پس تابع هدف به صورت $\text{Max}(Z = \text{Min}\left\{\frac{x_A}{۲}, \frac{x_B}{۳}\right\})$ خواهد بود.

مثال ۷: فضای شدنی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت مقابل است. در نقاط A, B, C, D چه متغیرهایی مقدار مثبت و چه متغیرهایی صفر هستند؟

(S_i متغیر کمکی محدودیت i ام است که $i = ۱, ۲, ۳, ۴$)



پاسخ: می‌دانیم اگر محدودیتی از یک نقطه عبور نماید، مقدار متغیر کمکی این محدودیت در آن نقطه صفر است و اگر نقطه‌ای در خارج قید باشد، مقدار متغیر کمکی منفی می‌باشد. ولی اگر نقطه در فضای موجه آن قید باشد، مقدار متغیر کمکی در آن نقطه مثبت است. به عنوان مثال، نقطه‌ی A با مختصات $x_۱ = ۰$ و $x_۲ > ۰$ بر روی محدودیت ۱ و ۲ قرار دارد، پس $S_۱ = S_۲ = ۰$ و همچنین در داخل منطقه‌ی موجه محدودیت‌های ۳ و ۴ قرار دارد، پس: $S_۴, S_۳ > ۰$.

برای سایر نقاط هم به همین صورت نتیجه‌گیری می‌شود:

A	B	C	D
$x_۱ = ۰$	$x_۱ > ۰$	$x_۱ > ۰$	$x_۱ = ۰$
$x_۲ > ۰$	$x_۲ > ۰$	$x_۲ = ۰$	$x_۲ = ۰$
$S_۱ = ۰$	$S_۱ > ۰$	$S_۱ > ۰$	$S_۱ > ۰$
$S_۲ = ۰$	$S_۲ = ۰$	$S_۲ > ۰$	$S_۲ > ۰$
$S_۳ > ۰$	$S_۳ = ۰$	$S_۳ > ۰$	$S_۳ > ۰$
$S_۴ > ۰$	$S_۴ > ۰$	$S_۴ = ۰$	$S_۴ > ۰$

ملاحظه می‌شود که در هر گوشه موجه از فضای شدنی تعداد متغیرهای مثبت حداکثر به تعداد محدودیت‌هاست. در گوشه‌های غیر تباهیده D, C, B تعداد متغیرهای مثبت ۴ تا (به تعداد محدودیت‌ها) و در نقطه تباهیده A تعداد متغیرهای مثبت ۳ تا (کم‌تر از تعداد محدودیت‌ها) است.

مثال ۸: فرم خطی مسأله مقابل را بنویسید: $\max z = ۲|۳x_۱ + x_۲| + |x_۳ - x_۴| + |x_۱ - ۶|$

پاسخ: تغییر متغیرهای $۳x_۱ + x_۲ = y_۱$ و $x_۳ - x_۴ = y_۲$ و $x_۱ - ۶ = y_۳$ را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max\ & Z = ۲|y_۱| + |y_۲| + |y_۳| \\ \text{s.t.}\ & \\ & ۳x_۱ + x_۲ = y_۱ \\ & x_۳ - x_۴ = y_۲ \\ & x_۱ - ۶ = y_۳ \end{aligned}$$

در مسأله بالا قرار می‌دهیم: $|y_i| = y'_i + y''_i$ و $y_i = y'_i - y''_i$ برای $i = ۱,۲,۳$.

$$\begin{aligned} \max\ & Z = ۲(y'_۱ + y''_۱) + (y'_۲ + y''_۲) + (y'_۳ + y''_۳) \\ \text{s.t.}\ & \\ & ۳x_۱ + x_۲ = y'_۱ - y''_۱ \\ & x_۳ - x_۴ = y'_۲ - y''_۲ \\ & x_۱ - ۶ = y'_۳ - y''_۳ \\ & y'_i, y''_i \geq ۰ \quad \text{for} \quad i = ۱,۲,۳ \end{aligned}$$

مثال ۹: مسأله برنامه‌ریزی $\text{Min}|۲x_۱ - x_۲|$ که $x_۱, x_۲ \geq ۰$ را به حالت خطی تبدیل کنید.

پاسخ: با تغییر متغیر $۲x_۱ - x_۲ = x_۳$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{Min}\ & |x_۳| \\ \text{s.t.}\ & \\ & ۲x_۱ - x_۲ = x_۳ \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰;\ x_۳ : \text{نامقید} \end{aligned}$$

در مسأله بالا قرار می‌دهیم: $|x_۳| = x'_۳ + x''_۳$ و $x_۳ = x'_۳ - x''_۳$ که $x'_۳, x''_۳ \geq ۰$ است، پس مسأله بالا معادل است با:

$$\begin{aligned} \text{Min}\ & x'_۳ + x''_۳ \\ \text{s.t.}\ & \\ & ۲x_۱ - x_۲ = x'_۳ - x''_۳ \\ & x_۱, x_۲, x'_۳, x''_۳ \geq ۰ \end{aligned}$$

مثال ۱۰: مسأله زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} \textbf{Min}\ & \sum_{i=۱}^{m} t_i \\ \textbf{s.t}\ & \\ & t_i + \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \\ & t_i - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i \\ & \textbf{for} \quad i = ۱,\dots,m \end{aligned}$$

۱) این مسأله معادل مسأله $\text{Min} \sum_{i=۱}^{m} \left| b_i - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \right|$ است.

۲) این مسأله معادل مسأله $\text{Min} \sum_{i=۱}^{m} \left| b_i + \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \right|$ است.

۳) این مسأله معادل مسأله $\text{Max} \sum_{i=۱}^{m} \left| b_i - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \right|$ است.

۴) این مسأله معادل مسأله $\text{Max} \sum_{i=۱}^{m} \left| b_i + \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \right|$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها مشخص است که باید محدودیت‌ها را برحسب t_i به دست آورده و در تابع هدف جایگزین کنیم.

$$\begin{cases} t_i+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i \\ t_i-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge -b_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_i-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le t_i \\ b_i-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge -t_i \end{cases} \Rightarrow \left|b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\le t_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\left|b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\le\sum_{i=1}^{m}t_i$$

$$i=1,\dots,m \qquad i=1,\dots,m \qquad i=1,\dots,m$$

$$\Rightarrow \text{Min}\sum_{i=1}^{m}t_i=\text{Min}\sum_{i=1}^{m}\left|b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|$$

◆◆◆◆

مثال ۱۱: کدام‌یک از گزینه‌های زیر معادلات $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$ که $i=1,\dots,m$ را نشان می‌دهد؟

۱) $\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i \quad i=1,..,m \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge\sum\limits_{i=1}^{m}b_i\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge\sum\limits_{i=1}^{m}b_i\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_j\ge\sum\limits_{i=1}^{m}b_i\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» m محدودیت تساوی $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$ را می‌توان به طور معادل با $2m$ محدودیت مقابل نشان داد: $;i=1,\dots,m$ $\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i \\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i\end{cases}$

اکنون طرفین m محدودیت به فرم $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i$ را با هم جمع می‌کنیم و محدودیت‌های $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i$ که $i=1,\dots,m$ را عیناً می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i \;;i=1,\dots,m. \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge\sum\limits_{i=1}^{m}b_i\end{cases}$$

◆◆◆◆

مثال ۱۲: مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر عبارت است از:

$$\begin{aligned}&\textbf{Max }Z=2x_1+3x_2\\ &\textbf{s.t}\quad x_1+x_2=1\\ &\quad 3x_1+4x_2\le 30\\ &\quad x_2\ge 0\\ &\quad x_1 \text{ آزاد}\end{aligned}$$

۱) ۲۶
۲) ۲۸
۳) ۲۹
۴) ۳۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون متغیر x_1 آزاد در علامت است، آن را از محدودیت اول یافته و در مسأله جایگذاری می‌کنیم. پس در همه جای مسأله قرار می‌دهیم: $x_1=1-x_2$ و داریم:

$$\begin{aligned}&\text{Max }Z=2(1-x_2)+3x_2\\ &\text{s.t.}\\ &3(1-x_2)+4x_2\le 30\\ &x_2\ge 0\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}&\text{Max }Z=x_2+2\\ &\text{s.t.}\\ &x_2\le 27\;,\; x_2\ge 0\end{aligned}$$

با توجه به محدودیت‌ها، $0\le x_2\le 27$ و $2\le Z=x_2+2\le 29$. پس مقدار بهینه تابع هدف $Z^*=\text{Max}(Z)=29$ است.

مثال ۱۳: مسأله زیر مفروض است. مقدار Z^* برابر است با:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = x_1 + ۲x_۲ \\ &\text{s.t} \\ &x_1 + x_۲ + x_۳ = ۲ \\ &x_1 - x_۲ + x_۴ = ۱ \\ &x_۲ + x_۵ = ۶ \\ &x_1, \dots, x_۵ \geq ۰ \end{aligned}$$

۱) $\frac{۳}{۲}$

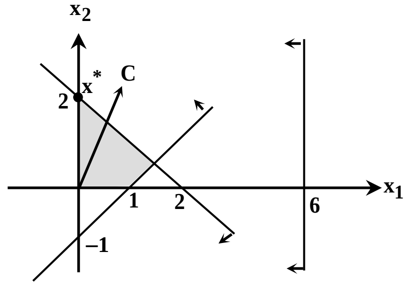
۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۴

۴) ۵

پاسخ: گزینه «۳» می‌توان متغیرهای $x_۳, x_۴, x_۵$ را متغیر کمکی فرض کرد و از حل هندسی برای جواب بهینه مسأله کمک گرفت.

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = x_1 + ۲x_۲ \\ &\text{s.t} \\ &x_1 + x_۲ \leq ۲ \\ &x_1 - x_۲ \leq ۱ \\ &x_۲ \leq ۶ \\ &x_1, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$



پس $x^* = (۰,۲)$ و در نتیجه $Z^* = ۴$ است.

مثال ۱۴: مسأله مقابل مفروض است:

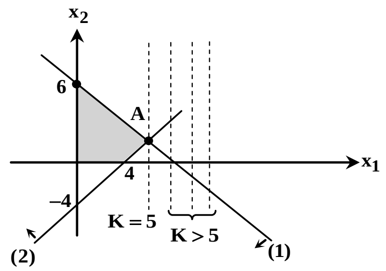
$$\begin{cases} x_1 + x_۲ \leq ۶ : (۱) \\ x_1 - x_۲ \leq ۴ : (۲) \\ x_1 \leq k \ : (۳) \end{cases}$$

$$x_1, x_۲ \geq ۰$$

به ازای چه مقادیری از k محدودیت سوم زائد است؟

۱) $k \geq ۲$ ۲) $k \geq ۴$ ۳) $k \leq ۶$ ۴) $k \geq ۵$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل زیر، باید $k \geq ۵$ باشد تا محدودیت سوم زائد باشد.



مثال ۱۵: مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = ۲x_1 + ۶x_۲ + ۸x_۳ \\ &\text{s.t.} \\ &x_1 + ۴x_۲ + ۲x_۳ \leq ۲۰ \\ &x_1 + ۳x_۲ + ۴x_۳ = ۱۰ \\ &x_1 + x_۲ + x_۳ \geq ۲ \\ &x_1, x_۲, x_۳ \geq ۰ \end{aligned}$$

۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۲۵

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت متوجه می‌شویم که تابع هدف از ضرب محدودیت دوم در ۲ به دست می‌آید، پس:

$$Z = ۲(x_1 + ۳x_۲ + ۴x_۳) = ۲۰$$

حال با توجه به اینکه نقطه‌ی $(x_1, x_۲, x_۳) = (۳, ۱, ۱)$ در هر سه محدودیت صدق می‌کند، پس مسأله فضای شدنی دارد و $Z^* = ۲۰$ است.

مثال ۱۶: جواب بهینه مسأله زیر عبارت است از:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3^2$$
$$\text{s.t}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 = 0 \text{ یا } 1$$

۱) ۱۲

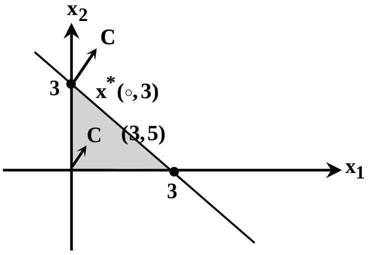
۲) ۱۵

۳) ۲۱

۴) ۲۵

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا فرض می‌کنیم $x_3 = 0$ داریم:

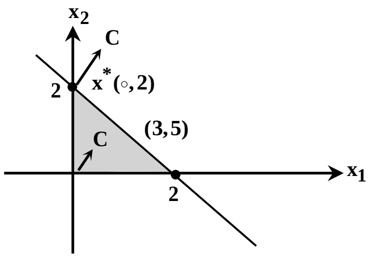
$$x_3 = 0 \rightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &x_1 + x_2 \le 3 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



$Z_1^* = 3(0) + 5(3) = 15$

حال فرض می‌کنیم $x_3 = 1$ داریم:

$$x_3 = 1 \rightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 4 \\ &\text{s.t.} \\ &x_1 + x_2 \le 2 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



$Z_2^* = 3(0) + 5(2) + 4 = 14$

بنابراین خواهیم داشت: $Z^* = \text{Max}\{Z_1^* = 15, Z_2^* = 14\} = 15$.

مثال ۱۷: کدام گزینه صحیح است؟

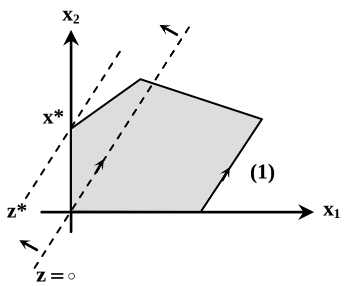
۱) اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیت‌ها باشد، جواب بهینه چندگانه داریم.

۲) اگر تابع هدف موازی یک محدودیت فعال باشد، جواب بهینه چندگانه داریم.

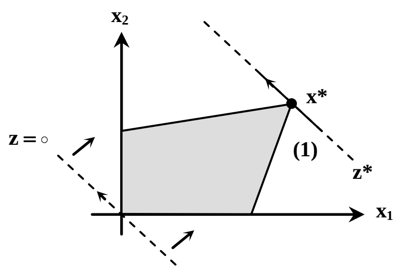
۳) اگر تابع هدف موازی یک محدودیت فعال غیر زائد باشد، حتماً جواب بهینه چندگانه داریم.

۴) اگر تابع هدف موازی یک محدودیت فعال غیر زائد باشد، ممکن است جواب بهینه چندگانه داشته باشیم.

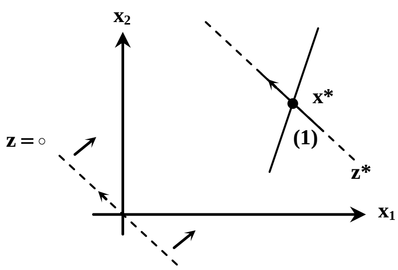
پاسخ: گزینه «۴»



مثال رد گزینه (۱)



مثال رد گزینه (۲)



فضای شدنی فقط یک نقطه

مثال رد گزینه (۳)

مثال ۱۸: کدام گزینه در مورد LP درست است؟

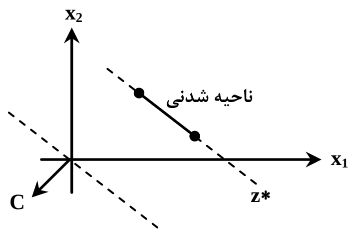
۱) در حالت بهینه چندگانه حتماً بیش از یک نقطه گوشه بهینه وجود دارد.

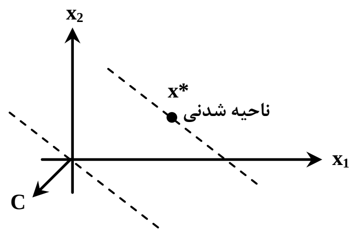
۲) تمام نقاط ناحیه شدنی ممکن است نقطه بهینه باشند.

۳) با حذف محدودیت غیرفعال جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

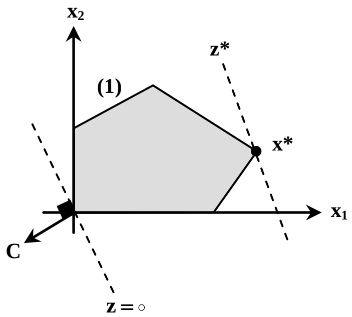
۴) گزینه ۲ و ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» گزینه «۱» نادرست است، زیرا در حالتی که مسأله دارای شعاع بهینه است فقط یک نقطه گوشه بهینه وجود دارد.
گزینه (۲) درست است زیرا در حالتی که ناحیه شدنی فقط یک نقطه است، تمام نقاط ناحیه شدنی همان یک نقطه است که آن هم بهینه می‌باشد. همچنین در حالتی که ناحیه شدنی یک پاره‌خط است نیز، ممکن است این حالت رخ دهد:





گزینه (۳) درست است. در شکل زیر، محدودیت (۱) غیرفعال است و حذف آن تأثیری در نقطه بهینه x^* ندارد.



مثال ۱۹: اگر در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی اعداد صحیح، متغیر $x_۱$ مجبور باشد مقدار خود را از مجموعه اعداد $\{۵,۶,۷,۸\}$ اختیار نماید، کدام محدودیت بیانگر این مطلب است؟

۱) $x_۱ - (۵y_۱ + ۶y_۲ + ۷y_۳ + ۸y_۴) = ۰$
$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۱$
$y_i = ۰$ یا ۱ for $i = ۱,\dots,۴$

۲) $(x_۱ - ۵)(x_۱ - ۶)(x_۱ - ۷)(x_۱ - ۸) = ۰$

۳) $x_۱ - (۵y_۱ + ۶y_۲ + ۷y_۳ + ۸y_۴) = ۰$
$y_i = ۰$ یا ۱ for $i = ۱,\dots,۴$

۴) هیچ کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در گزینه ۱ چون متغیرهای y_i فقط می‌توانند ۰ یا ۱ باشند و برای انتخاب فقط و فقط یکی از اعداد باید مجموع y_i ها ۱ شود، پس یکی از آن‌ها یک و بقیه صفر هستند. به طور مثال، اگر $y_۱ = ۱$ و $y_۲ = y_۳ = y_۴ = ۰$ که در این صورت $x_۱ = ۵$ خواهد بود. گزینه ۲ یک قید غیرخطی است.

مثال ۲۰: در یک مدل خطی تابع هدف به صورت $Z = ۴x_۱ - x_۲ + x_۱.x_۲$ است و متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ مقادیر ۰ یا ۱ را می‌گیرند. مسأله را طوری تغییر دهید که تابع هدف به صورت خطی درآید.

☑ **پاسخ:** تغییر متغیر $y = x_۱.x_۲$ را اعمال می‌کنیم. با این تعریف، y فقط می‌تواند ۰ یا ۱ شود. همچنین دو محدودیتِ $\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۱ + y \\ x_۱ + x_۲ \ge ۲y \end{cases}$ را به مدل می‌افزاییم. اگر $y = ۱$ را در محدودیت‌ها قرار دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۱ + ۱ \\ x_۱ + x_۲ \ge ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۲ \\ x_۱ + x_۲ \ge ۲ \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲ = ۱$$

و این همان چیزی است که انتظار داشتیم. اگر $y = ۰$ را در محدودیت‌ها قرار دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۱ - ۰ \\ x_۱ + x_۲ \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۱ \\ x_۱ + x_۲ \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow ۰ \le x_۱ + x_۲ \le ۱ \Rightarrow$$ حداقل یکی از دو متغیر $x_۱$ یا $x_۲$ صفر است.

پس مسأله جدید به صورت

$$\begin{aligned} Z &= ۴x_۱ - x_۲ + y \\ \text{s.t.} & \\ &\begin{cases} x_۱ + x_۲ - y \le ۱ \\ x_۱ + x_۲ \ge ۲y \end{cases} \\ &x_۱, x_۲, y = ۰ \text{ یا } ۱ \end{aligned}$$

در می‌آید.

آزمون فصل اول

۱ـ در صورتی که میزان منبع لازم برای تولید ۳ واحد از یک محصول، ۴۵ کیلوگرم و میزان منبع لازم برای تولید ۵ واحد از همین محصول ۸۰ کیلوگرم باشد، کدام یک از مفروضات برنامه‌ریزی خطی نقض گردیده است؟

۱) تناسب　۲) جمع‌پذیری　۳) تناسب و جمع‌پذیری　۴) بخش‌پذیری

۲ـ کدام گزینه محدودیت برنامه‌ریزی خطی است؟

۱) $x_1+\frac{x_2}{x_3}\le 4$　۲) $\frac{x_1+x_2}{x_3}\ge 2$　۳) $x_1x_2+x_3\ge 5$　۴) $x_1+x_2\ge\frac{3}{x_1}$

۳ـ می‌خواهیم یک گروه ۷۳ نفری را در چادرهای ۶ و ۵ نفره اسکان دهیم. تعداد کل چادرهائی که این گروه می‌تواند با خود حمل کند، حداکثر ۱۵ چادر است. اگر x_1 و x_2 به ترتیب نشان‌دهنده تعداد چادرهای ۶ و ۵ نفره باشد که باید توسط گروه حمل شود، محدودیت‌های مربوطه کدام است؟

۱) $\begin{cases}x_1+x_2\le 15\\6x_1+5x_2=73\end{cases}$　۲) $\begin{cases}x_1+x_2\le 15\\6x_1+5x_2\le 73\end{cases}$　۳) $\begin{cases}x_1+x_2=15\\6x_1+5x_2\ge 73\end{cases}$　۴) $\begin{cases}x_1+x_2\le 15\\6x_1+5x_2\ge 73\end{cases}$

۴ـ مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{aligned}\text{Max }\ & Z=x_1+2x_2-x_3\\ \text{s.t.}\ & x_1+x_2-x_3\ge 10\\ & -3x_1-6x_2+3x_3=-120\\ & x_1+x_2\ge 5\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0\end{aligned}$$

۱) $Z^*=20$
۲) $Z^*=40$
۳) $Z^*=10$
۴) $Z^*=+\infty$

۵ـ تابع هدف $\text{Min}\frac{1}{x_1.x_2}$ هم ارز با کدام گزینه است؟

۱) $\text{Min}\{\text{Max}\{x_1\times x_2\}\}$　۲) $\text{Max}\{\text{Max}\{x_1\times x_2\}\}$　۳) $\text{Max}\{\text{Min}\{x_1\times x_2\}\}$　۴) $\text{Min}\{\text{Min}\{x_1\times x_2\}\}$

۶ـ مسأله $\underset{\substack{\text{S.t.}\\AX\le b\\X\ge 0}}{\text{Max }Z=CX}$ مفروض است، اگر x^* نقطه بهینه مسأله باشد. حال اگر محدودیت‌های غیر فعال در x^* را حذف کنیم، در مورد مسأله جدید کدام گزینه صحیح است؟

۱) x^* و Z^* تغییری نخواهند کرد.　۲) x^* و Z^* ممکن است عوض شوند.
۳) x^* ممکن است عوض شود و z^* نیز عوض نمی‌شود.　۴) x^* و z^* حتماً عوض می‌شوند.

۷ـ متغیرهای صفرـ یک x_1,x_2,x_3 نشانگر سرمایه‌گذاری یا عدم سرمایه‌گذاری در پروژه‌های ۱و۲و۳ هستند. اگر پروژه‌های x_1,x_2 پیش نیاز پروژه x_3 باشند، در این صورت:

۱) $x_3\le x_1+x_2$　۲) $x_3\ge x_1+x_2$　۳) $2x_3\le x_1+x_2$　۴) $2x_3=x_1+x_2$

۸ـ مسأله زیر مفروض است:

$$\begin{aligned}\text{Max }\ & Z=x_1\\ \text{s.t.}\ & x_1+x_2\le b_1\\ & -x_1+x_2\le -1\\ & x_1\ge 0,x_2\ge 0\end{aligned}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) برای هر مقدار b_1 داریم: $z^*=b_1$.　۲) اگر مسأله موجه باشد، همواره $Z^*=b_1$.
۳) اگر مسأله موجه باشد، همواره $Z^*=1$.　۴) برای هر مقدار b_1 مسأله ناموجه است.

۹ـ مسأله $\begin{aligned}&\mathbf{Max}\ Z = Cx\\ &\text{s.t.}\\ &Ax<b\\ &x>0\end{aligned}$ **مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟** $(C \neq 0)$

۱) این مسأله ممکن است جواب بهینه داشته باشد.
۲) اگر فضای موجه محدود باشد، حتماً جواب بهینه دارد.
۳) این مسأله گوشه بهینه ندارد.
۴) مسأله نشدنی است.

۱۰ـ محدودیت غیر خطی $x_1 . x_2 . x_3 = 0$ **که** x_i **ها متغیر ۰ یا ۱ هستند، مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟**

۱) این محدودیت قابل تبدیل به حالت خطی نیست.
۲) این محدودیت معادل است با $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ که ۱ یا $x_i = 0$.
۳) این محدودیت معادل است با $x_1 + x_2 + x_3 \le 2$ که ۱ یا $x_i = 0$.
۴) این محدودیت معادل است با $x_1 + x_2 + x_3 \le 3$ که ۱ یا $x_i = 0$.

۱۱ـ در یک مسأله انتخاب پروژه ۱ و ۲ ناسازگارند و پروژه ۳ پیش‌نیاز پروژه ۴ است و در صورت انتخاب پروژه ۵ پروژه ۶ هم باید انتخاب شود. اگر ۱ یا $x_1, \ldots, x_6 = 0$**، محدودیت‌های مربوط کدامند؟**

۱) $x_1 + x_2 \le 1, x_4 \le x_3, x_5 \le x_6$
۲) $x_1 + x_2 \le 1, x_3 \le x_4, x_5 \le x_6$
۳) $x_1 + x_2 \le 1, x_4 \le x_3, x_6 \le x_5$
۴) $x_1 + x_2 = 1, x_3 \le x_4, x_5 \le x_6$

۱۲ـ حداکثر سود در مسأله روبرو کدام است؟

$$\begin{aligned}&\mathbf{Max}\ \ Z = 2x_1 + x_2\\ &\text{s.t.}\\ &|x_1 - x_2| \le 1\\ &x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

۱) -۴
۲) ۰
۳) ۱
۴) ∞

۱۳ـ جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی مقابل کدام است؟

$$\begin{aligned}&\mathbf{Max}\ Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3^2\\ &\text{s.t.}\\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 3\\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 = 0 \text{ یا } 1\end{aligned}$$

۱) $Z^* = 14$
۲) $Z^* = 15$
۳) $Z^* = 16$
۴) $Z^* = 19$

۱۴ـ مسأله مقابل چند نقطه بهینه دارد؟

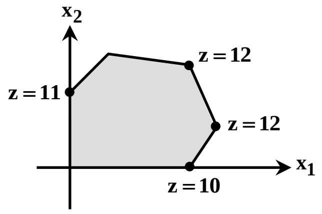
$$\begin{aligned}&\mathbf{Min}\ Z = 100\\ &\text{s.t.}\\ &x_1 + x_2 \le 5\\ &x_1 \le 4\\ &x_2 \le 4\\ &x_1 + x_2 \ge -5\\ &x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

۱) ۱
۲) ۱۹
۳) بی‌شمار
۴) ۲۰

۱۵ـ محصول A از مونتاژ ۳ قطعه نوع ۱ و ۴ قطعه نوع ۲ و ۵ قطعه نوع ۳ تولید می‌شود. مدل LP دارای چه تابع هدف است هرگاه به دنبال حداکثر کردن مقدار محصول تولیدی باشیم.

۱) $\max(\min\{3x_1, 4x_2, 5x_3\})$
۲) $\max(\min\{\frac{3x_1 + 4x_2 + 5x_3}{12}\})$
۳) $\max(\min\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{5}\})$
۴) $\min(\max\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{5}\})$

۱۶ـ مسأله زیر مفروض است:



۱) حتماً $Z^* = ۱۲$ است.

۲) مسأله حتماً جواب بهینه چندگانه دارد.

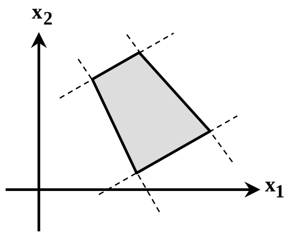
۳) تابع هدف با یکی از محدودیت‌ها موازی است.

۴) هر سه گزینه (۱) و (۲) و (۳)

۱۷ـ زمان حل یک LP در درجه اول به کدام عامل بستگی دارد؟

۱) تعداد محدودیت ۲) تعداد متغیر ۳) ضرایب تکنولوژی ۴) ضرایب هزینه

۱۸ـ ناحیه موجه یک LP به صورت زیر است. این مسأله چند محدودیت دارد؟



۱) چهار محدودیت $\leq$

۲) چهار محدودیت $\geq$

۳) سه محدودیت $\geq$ و یک محدودیت $\leq$

۴) سه محدودیت $\leq$ و یک محدویت $\geq$

۱۹ـ فرض کنید که دو نقطه $\bar{x} = (۱,۱,۰,۰)$ و $\tilde{x} = (۰,۲,۵,۰)$ و گوشه مجاور از فضای جواب یک مدل برنامه‌ریزی خطی باشد، در آن صورت نقطه $\hat{x} = (\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴},\frac{۵}{۴},۰)$:

۱) یک نقطه روی یال چند وجهی سازنده فضای جواب است. ۲) یک گوشه دیگر از فضای جواب است.

۳) یک نقطه داخلی از فضای جواب است. ۴) یک نقطه در خارج از فضای جواب است.

۲۰ـ در مجموعه پایه B که از بردارهای $a_۱, a_۲, ..., a_m$ تشکیل شده است، مایلیم که بردار جدید a_k را با یکی از بردارهای موجود جایگزین کنیم. شرط لازم برای اینکه مجموعه جدید همچنان یک مجموعه پایه باشد، چیست؟

۱) بردار a_k باید ترکیب خطی از بردارهای $a_۱, ..., a_m$ باشد.

۲) رابطه $k = m$ برقرار باشد.

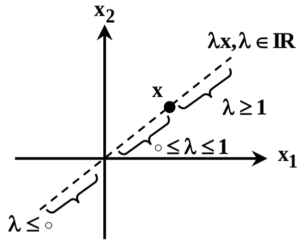
۳) بردار a_k باید مستقل خطی از دیگر بردارهای مجموعه B باشد.

۴) بردار a_k باید مستقل خطی از برداری که جایگزین آن می‌شود باشد.

فصل دوم

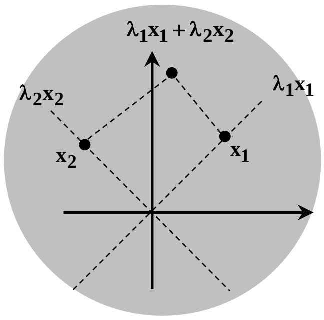
«جبر خطی»

تست‌های تألیفی فصل دوم



مثال ۱: تمام ترکیبات خطی (پوسته خطی) یک نقطه مانند X را بیابید.

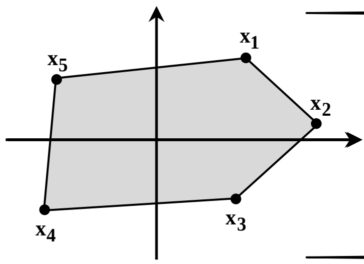
☑ **پاسخ:** اگر X یک نقطه باشد، ترکیبات خطی آن یعنی λX که λ عددی حقیقی است از نظر هندسی خط واصل نقطه X و مبدأ است.



مثال ۲: تمام ترکیبات خطی (پوسته خطی) دو نقطه متمایز X_1, X_2 را در فضای E^2 بیابید.

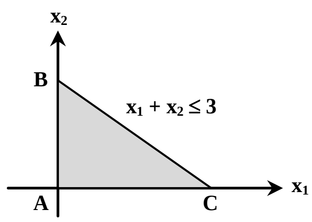
☑ **پاسخ:** اگر X_1, X_2 دو نقطه متمایز باشند، ترکیبات خطی آنها به صورت $\underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}}{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2}$ می‌باشد.

با توجه به مثال ۱ می‌دانیم $\lambda_1 X_1$ که $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ خط واصل نقطه X_1 و مبدأ و $\lambda_2 X_2$ که $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ خط واصل نقطه X_2 و مبدأ است بنابراین برای یافتن $\underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}}{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2}$ باید نقاط روی این دو خط را با هم جمع کنیم.پس ترکیب خطی دو نقطه در E^2 کل فضای E^2 است.



مثال ۳: پوسته محدب نقاط متمایز x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 در E^2 به صورت مقابل است:

مثال ۴: در یک مدل برنامه‌ریزی خطی با دو متغیر فرض کنید که فضای جواب موجه مثلث ABC است. کدام یک از روابط زیر نشان‌دهنده این فضای جواب موجه است؟



۱) $x = (\lambda_2, \lambda_3)$، $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 3$، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

۲) $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$، $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 3$، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

۳) $x = (3\lambda_3, 3\lambda_2)$، $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

۴) $x = (3\lambda_1, 3\lambda_2, 3\lambda_3)$، $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مثلث ABC ترکیب محدب نقاط گوشه‌ای $A(0,0)$ و $B(0,3)$ و $C(3,0)$ است؛ یعنی هر نقطه مانند x از این مثلث را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط A و B و C نوشت: $x = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$ به طوری که: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ و $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_3 \\ 3\lambda_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

مثال ۵: ثابت کنید که مجموعه $S = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ یک مجموعه محدب است.

☑ **پاسخ:** فرض کنید $x_1, x_2 \in S$ باشد، در این صورت $\underset{x_1 \geq 0}{Ax_1 \leq b}, \underset{x_2 \geq 0}{Ax_2 \leq b}$. می‌خواهیم ثابت کنیم نقطه $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ که $0 \leq \lambda \leq 1$ نیز در S قرار دارد:

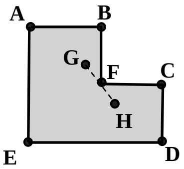
$$A\bar{x} = A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda (Ax_1) + (1-\lambda) Ax_2 \leq \lambda b + (1-\lambda) b = b \Rightarrow A\bar{x} \leq b$$

چون $x_2 \geq 0, x_1 \geq 0, 0 \leq \lambda \leq 1$ پس $\bar{x} \geq 0$ و در نتیجه $\underset{\bar{x} \geq 0}{A\bar{x} \leq b}$ پس $\bar{x} \in S$.

مثال ۶: نقاط رأسی هریک از شکل‌های زیر را بیابید؟

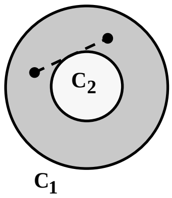
(۱)　　(۲)　　(۳)　　(۴)

پاسخ:



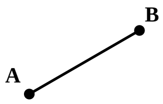
$\longrightarrow$ نقاط رأسی $=\{A,B,C,D,E\}$

نقطه‌ی F را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط G و H نوشت، پس گوشه‌ای نیست.



$\longrightarrow$ نقاط روی محیط دایره $C_1 =$ نقاط رأسی

نقاط روی دایره C_2 را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط فضای موجه نوشت، پس رأسی نیستند.

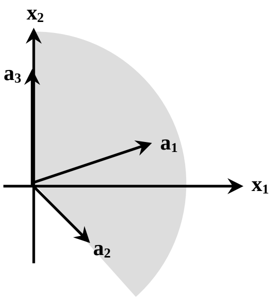


$\longrightarrow$ نقاط رأسی $=\{A,B\}$

شکل (۴) مربوط به یک خط است و نقطه رأسی ندارد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۷: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، نمایش هندسی مجموعه $S=\{Ax \mid x\geq 0\}$ چگونه است؟



پاسخ : فرض کنیم $a_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $a_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $a_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. در این صورت :

$$S=\{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \mid x_1,x_2,x_3\geq 0\}$$

مخروط حاصل از بردارهای a_1 و a_2 و a_3 است و نمایش هندسی آن به صورت مقابل است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۸: بردارهای a_1 و a_2 و a_3 در فضای E^3 تشکیل یک پایه به شرح مقابل می‌دهند: $\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ **چنانچه بخواهیم بردار $b=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ را با یکی از بردارهای فوق جایگزین نماییم، به شرطی که مجموعه جدید همچنان پایه باشد، مشخص کنید بردار b جایگزین کدام یک از بردارهای فوق می‌تواند گردد؟**

۱) بردارهای a_3 یا a_1　　۲) بردارهای a_3 یا a_2 یا a_1　　۳) فقط با بردار a_1　　۴) بردارهای a_3 یا a_2

پاسخ : گزینه «۱» **روش اول:** بردار b برحسب ترکیب خطی بردارهای پایه a_1 و a_2 و a_3 به صورت $b=2a_1+0\times a_2-a_3$ نمایش داده می‌شود. ضریب a_1 و a_3 در این ترکیب خطی مخالف صفر هستند. پس می‌توان b را با بردار a_1 یا بردار a_3 جایگزین کرد و مجموعه جدید بردارهای $[b,a_2,a_3]$ و $[a_1,a_2,b]$ همچنان پایه هستند، ولی بردار $[a_1,b,a_3]$ تشکیل پایه نمی‌دهد.

روش دوم: می‌توان بردار b را تک‌تک جایگزین بردارهای a_1,a_2,a_3 کرد و دترمینان حاصل را محاسبه کرد با توجه به نکته ۱۸، اگر دترمینان مخالف صفر شود یعنی بردارهای حاصل مستقل بوده و امکان تعویض b موجود است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۹: کدام گزینه در مورد تعداد جواب‌های دستگاه $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2-2x_3=6 \end{cases}$ صحیح است؟

۱) بی‌شمار جواب دارد.　　۲) فاقد جواب است.　　۳) جواب منحصر به فرد دارد.　　۴) بی‌شمار جواب یا بدون جواب

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{اعمال سطری مقدماتی}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{10}{3} \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت: $\begin{cases} x_1 = \frac{10}{3} + \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{8}{3} + \frac{5}{3}x_3 \end{cases}$، یعنی با مقدار دادن به x_3 مقادیر x_1 و x_2 به دست می آیند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد. ملاحظه می‌شود که $R(A \,\vdots\, b) = R(A) = 2$ و دستگاه موردنظر رتبه کامل سطری است.

◆◆◆◆

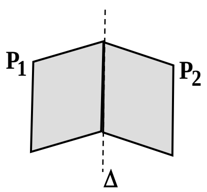
✍ **مثال ۱۰: فرم کلی جواب‌های دستگاه** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ **به صورت یک .... می‌باشد.**

۱) نقطه　　　۲) خط　　　۳) صفحه　　　۴) بدون جواب

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 = 2 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 \end{cases}$$

با فرض $x_3 = t$ داریم: $\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3}t \\ x_2 = 0 + \frac{5}{3}t \end{cases}$ که $t \in \mathbb{R}$. از نظر هندسی جواب‌های دستگاه، تشکیل یک خط مانند Δ را می‌دهند که همان فصل مشترک دو صفحه $P_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 4$ و $P_2 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ است.



◆◆◆◆

✍ **مثال ۱۱: تعداد نقاط رأسی فضای جواب سیستم** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ **عبارت است از:**

۱) ندارد　　　۲) ۲　　　۳) ۳　　　۴) بی‌نهایت

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در فضای ۳ بعدی هر نقطه رأسی از برخورد حداقل ۳ ابر صفحه پدید می‌آید ولی در این سؤال فقط ۲ ابرصفحه داریم. در سؤال قبل ملاحظه کردید که فضای جواب یک خط است، پس فاقد نقطه رأسی می‌باشد.

◆◆◆◆

✍ **مثال ۱۲: کدام گزینه در مورد تعداد جواب‌های دستگاه** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$ **صحیح است؟**

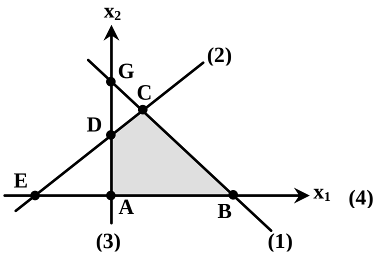
۱) بی‌شمار جواب دارد.　　　۲) فاقد جواب است.　　　۳) جواب منحصر به فرد دارد.　　　۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

ملاحظه می‌شود که $R(A) = 2$ ولی $R(A \mid b) = 3$؛ پس: $R(A \mid b) \neq R(A)$ و دستگاه فاقد جواب است.

مثال ۱۳: نقاط رأسی فضای شدنی محدودیت‌های زیر را بیابید؟



$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0 \;\;,\;\; x_2 \ge 0$$

پاسخ: ابتدا معادله تساوی هر محدودیت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & :(1) \\ -x_1 + x_2 = 1 & :(2) \\ x_1 = 0 \;\; :(3) \;\;,\;\; x_2 = 0 & :(4) \end{cases}$$

چون فضا ۲ بعدی (E^2) است، پس هر نقطه رأسی از برخورد ۲ محدودیت مستقل خطی پدید می‌آید.

$$A:\begin{cases}(3)\\(4)\end{cases}\Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \qquad B:\begin{cases}(1)\\(4)\end{cases}\Rightarrow B\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \qquad C:\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}\Rightarrow C\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\[4pt]\frac{3}{2}\end{matrix}\right. \qquad D:\begin{cases}(2)\\(3)\end{cases}\Rightarrow D\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$$

نقاط D, C, B, A گوشه‌های موجه فضای شدنی هستند و گوشه‌های G, E غیرموجه هستند.

$$E:\begin{cases}(2)\\(4)\end{cases}\Rightarrow E\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \qquad G:\begin{cases}(1)\\(3)\end{cases}\Rightarrow G\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۴: فضای موجه محدودیت‌های $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ **چند نقطه رأسی دارد؟**

۱) ۲   ۲) صفر   ۳) ۳   ۴) بی‌شمار

پاسخ : گزینه «۲» در فضای ۳ بعدی (E^3) باید حداقل ۳ محدودیت مستقل خطی داشته باشیم تا نقطه رأسی پدید آید، ولی در اینجا ما دو ابر صفحه داریم بنابراین نقطه رأسی نداریم.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۵: فضای موجه محدودیت‌های $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ **چند نقطه رأسی دارد؟**

۱) ۲   ۲) صفر   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱» فصل مشترک دو صفحه داده شده یک خط است که از دو طرف به صفحات مختصات محدود شده است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۶: تعداد نقاط رأسی مجموعه اعم از موجه و غیرموجه عباتند از:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

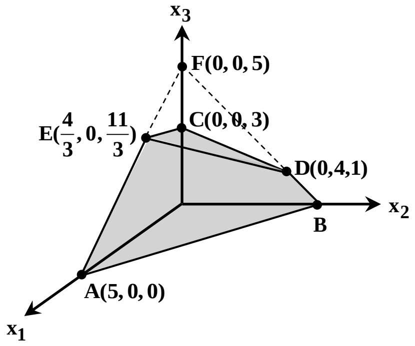
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» طبق تعریف نقطه رأسی برای چند وجهی $X=\{x \mid A_{m\times n}x_{n\times 1}\le b, x\ge 0\}$ هر نقطه رأسی از برخورد حداقل یک دسته n تایی از ابر صفحه‌های مستقل پدید می‌آید، بنابراین محدودیت‌ها را سه تا سه تا با هم برخورد می‌دهیم:



$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 5 & (1)\\ -x_1+x_2+2x_3\le 6 & (2)\\ x_1\ge 0 & (3)\\ x_2\ge 0 & (4)\\ x_3\ge 0 & (5)\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}(1): x_1+x_2+x_3=5\\ (4): x_2=0\\ (5): x_3=0\end{cases} \Rightarrow A(x_1=5, x_2=0, x_3=0)$$

$$\begin{cases}(1): x_1+x_2+x_3=5\\ (3): x_1=0\\ (5): x_3=0\end{cases} \Rightarrow B(x_1=0, x_2=5, x_3=0)$$

$$\begin{cases}(2): -x_1+x_2+2x_3=6\\ (3): x_1=0\\ (4): x_2=0\end{cases} \Rightarrow C(x_1=0, x_2=0, x_3=3)\ ;\ \begin{cases}(1): x_1+x_2+x_3=5\\ (2): -x_1+x_2+2x_3=6\\ (3): x_1=0\end{cases} \Rightarrow D(x_1=0, x_2=4, x_3=1)$$

$$\begin{cases}(1): x_1+x_2+x_3=5\\ (2): -x_1+x_2+2x_3=6\\ (4): x_2=0\end{cases} \Rightarrow E\left(x_1=\frac{4}{3}, x_2=0, x_3=\frac{11}{3}\right)$$

البته حالت‌های دیگری هم برای انتخاب ۳ ابر صفحه وجود دارد که منجر به یک نقطه رأسی ناموجه می‌شود، مثلاً:

$$\begin{cases}(1): x_1+x_2+x_3=5\\ (3): x_1=0\\ (4): x_2=0\end{cases} \Rightarrow F(x_1=0, x_2=0, x_3=5)$$

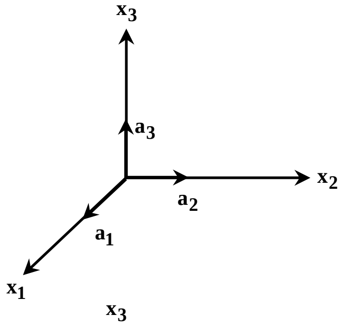
نقطه F یک نقطه گوشه‌ای ناموجه (نشدنی) است زیرا در محدودیت (۲) صدق نمی‌کند. پس در مجموع ۵ نقطه گوشه‌ای وجود دارد.

مثال ۱۷: فرض کنید که در مسأله $\{Max\,Z=CX / AX=b;\ x\ge 0\}$ ماتریس A یک ماتریس ۱۰×۵ بوده و دارای جواب بهینه باشد. چنانچه از یک جواب پایه قابل قبول شروع کنیم، حداکثر چند تکرار روش سیمپلکس اولیه لازم است تا به جواب برسیم؟

۱) یکصدوبیست ۲) دویست و پنجاه و دو ۳) سه هزار و سه ۴) دویست و هفتاد و شش

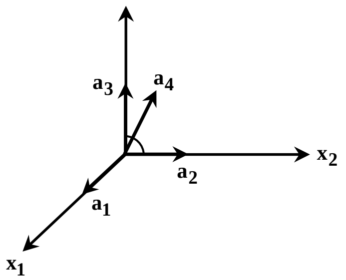
پاسخ: گزینه «۲» حداکثر تعداد تکرار سیمپلکس = حداکثر نقاط گوشه $=\binom{10}{5}=252$

مثال ۱۸: بردارهای شکل روبرو مفروض‌اند:



می‌دانیم که $B=\{a_1,a_2,a_3\}$ یک پایه برای E^3 است، زیرا سه بردار a_1 و a_2 و a_3 مستقل خطی‌اند. بردار $a_4=(0,1,2)$ را با کدام یک از بردارهای a_1 یا a_2 یا a_3 می‌توان جایگزین کرد به گونه‌ای که مجموعه جدید همچنان پایه‌ای برای E^3 باشد؟

۱) a_1 ۲) a_3 ۳) a_1 یا a_3 ۴) a_2 یا a_3



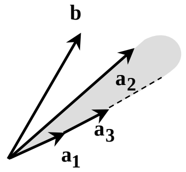
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل، بردار a_4 در صفحه بردار a_2 و a_3 است و می‌توان a_4 را برحسب ترکیب خطی a_2 و a_3 نوشت. یعنی:

$$a_4=0a_1+\alpha a_2+\beta a_3\ ;\alpha,\beta\ne 0$$

بنابراین با تعویض a_4 با هریک از بردارهای a_2 یا a_3 یک پایه جدید برای E^3 پدید می‌آید.

روش دیگر: می‌توان گفت بردارهای a_1,a_2,a_3 بردارهای یکه‌ی e_1,e_2,e_3 هستند و برای این که بدانیم بردار a_4 قابل جایگزینی با کدام‌یک از بردار a_1,a_2,a_3 می‌باشد کافی است دترمینان حاصل از جایگزینی بردار a_4 با یکی از بردارهای a_1,a_2,a_3 را محاسبه کرده و هر کدام مخالف صفر شد یعنی بردارهای تشکیل دهنده ماتریس، مستقل خطی بوده و امکان تعویض موجود است.

مثال ۱۹: سیستم $\begin{cases} x_1 + ۲x_۲ + x_۳ = ۱ \\ x_1 + ۳x_۲ + x_۳ = ۳ \\ x_1, x_۲, x_۳ \geq ۰ \end{cases}$ چند نقطه رأسی دارد؟

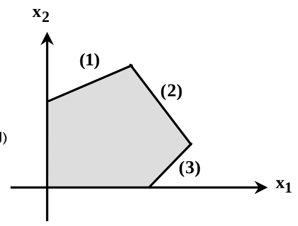


پاسخ: گزینه «۴» از فضای ایجاب استفاده می‌کنیم: $a_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و $a_۲ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$ و $a_۳ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$

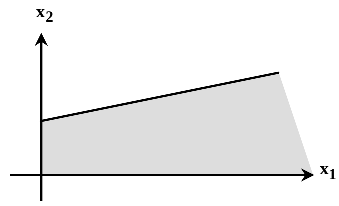
با توجه به فضای ایجاب، مسأله نشدنی است و هیچ نقطه رأسی ندارد.

مثال ۲۰: جهت‌های دور شونده مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف)

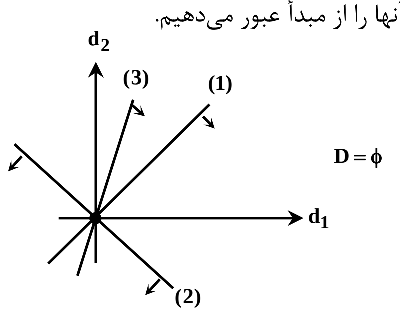


ب)



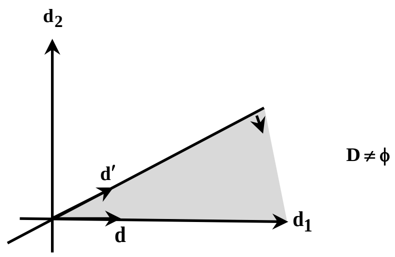
پاسخ: به منظور همگن کردن، محدودیت‌ها آنها را از مبدأ عبور می‌دهیم.

الف)



سیستم همگن جواب غیرصفر ندارد، پس جهت دور شونده نداریم و $D = \phi$ است.

ب)

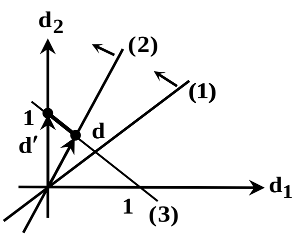


همه بردارهای موجود در مخروط، بردارهای d', d جهت دور شونده هستند و $D \neq \phi$ است.

مثال ۲۱: جهت‌های دور شونده رأسی سیستم $\begin{cases} -x_۱ + x_۲ \geq ۱۰ \\ ۲x_۱ - x_۲ \leq ۰ \\ x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{cases}$ را بیابید.

پاسخ: سیستم همگن به صورت $\begin{cases} -d_۱ + d_۲ \geq ۰ \\ ۲d_۱ - d_۲ \leq ۰ \\ d_۱, d_۲ \geq ۰ \end{cases}$ می‌باشد و چون $d_۱, d_۲ \geq ۰$ محدودیت نرمال‌ساز به صورت $d_۱ + d_۲ = ۱$ در می‌آید. اکنون

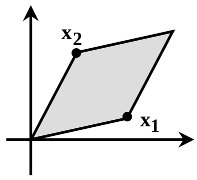
نقاط رأسی $\begin{cases} -d_۱ + d_۲ \geq ۰ \quad :(۱) \\ ۲d_۱ - d_۲ \leq ۰ \quad :(۲) \\ d_۱ + d_۲ = ۱ \quad :(۳) \\ d_۱, d_۲ \geq ۰ \end{cases}$ را می‌یابیم.



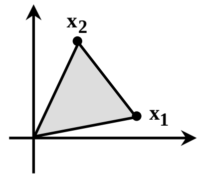
فضای موجه به صورت یک پاره خط است و نقاط رأسی آن در نتیجه جهت‌های دور شونده رأسی مسأله اصلی $d = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}, d' = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$ می‌باشد.

آزمون فصل دوم

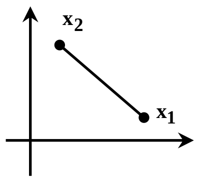
۱ـ اگر x_1 و x_2 دو نقطه در E^2 باشند، نمایش هندسی مجموعه $S = \left\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \middle| \begin{array}{l} 0 \le \lambda_1 \le 1 \\ 0 \le \lambda_2 \le 1 \end{array}\right\}$ کدام است؟



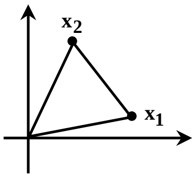
(۱)



(۲)

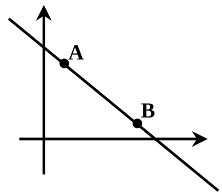


(۳)

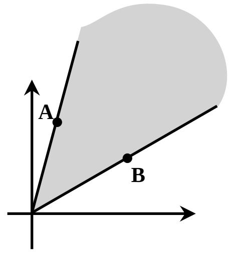


(۴)

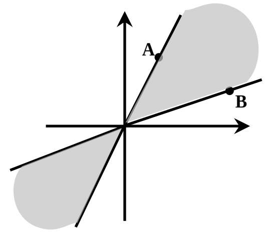
۲ـ اگر $A = (1,4)$ و $B = (5,2)$ دو نقطه در فضای E^2 باشند، نمایش هندسی مجموعه $S = \left\{(\lambda_1 + 5\lambda_2, 4\lambda_1 + 2\lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \ge 0\right\}$ کدام است؟



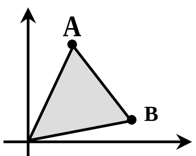
(۱)



(۲)



(۳)

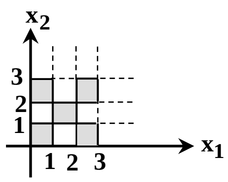


(۴)

۳ـ کدام گزینه یک مجموعه محدب است؟

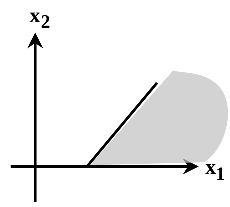
۱) $S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 4\}$
۲) $S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4, x_1 + x_2 \le 1\}$
۳) $S_3 = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$
۴) $S_4 = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| = |x_2|\}$

۴ـ تعداد نقاط رأسی ناحیه هاشور چند تاست؟

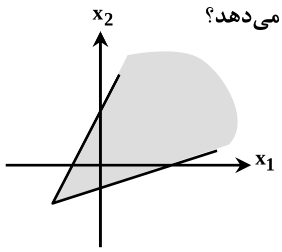


۱) ۱۶
۲) ۱۳
۳) ۴
۴) ۱۲

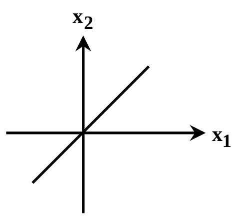
۵ـ کدام گزینه یک مخروط را نمایش می‌دهد؟



(۱)



(۲)



(۳)

۴) هیچکدام

۶ـ در ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -9 & -12 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & -8 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) با حذف سطر چهارم، سایر سطرها مستقل خطی‌اند.
۲) با حذف سطر چهارم و دوم سایر سطرها مستقل خطی‌اند.
۳) با حذف سطر چهارم و اول و دوم سایر سطرها مستقل خطی‌اند.
۴) با حذف سطر چهارم و پنجم سایر سطرها مستقل خطی‌اند.

۷ـ رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -7 & 0 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 0 & 7 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۱

۸ـ اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\2&0&2\\4&1&5\\6&2&8\end{bmatrix}$ **و** $b=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\4\end{bmatrix}$ **تعداد جواب‌های دستگاه** $AX=b$ **کدام است؟**

۱) بی‌شمار　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) جواب ندارد.

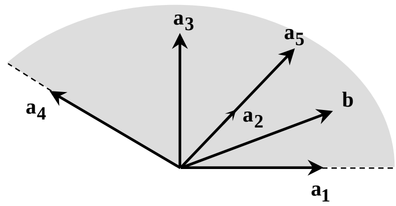
۹ـ دستگاه زیر مفروض است:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=b_1\\ x_1-x_2+x_4=b_2\end{cases}\qquad x_1,\dots,x_4\ge 0$$

به ازای کدام مقادیر $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$**، دستگاه شدنی است؟**

۱) $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$　　۲) $\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$　　۳) $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　　۴) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

۱۰ـ فضای ایجاب سیستم $\begin{cases}Ax=b\\x\ge 0\end{cases}$ **به صورت زیر است، کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟**



۱) $B=[a_2,a_5]$ یک پایه نشدنی است.
۲) $B=[a_2,a_3]$ یک پایه شدنی است.
۳) $B=[a_1,a_4]$ یک پایه شدنی است.
۴) $B=[a_5,a_3]$ پایه نمی‌باشد.

۱۱ـ سیستم $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3-2x_4=10\\-2x_1+x_2+4x_3=1\end{cases}\ x_1,\dots,x_4\ge 0$ **چند BFS دارد؟**

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۰

۱۲ـ نقطه $x_1=1$ **و** $x_2=3$ **و** $x_3=3$ **برای سیستم** $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3\le 7\\x_1+2x_3\ge 4\\-x_1+x_2+x_3\le 6\end{cases}$ **چگونه است؟**

۱) روی یکی از یال‌ها قرار دارد.　　۲) کاملاً داخل منطقه موجه قرار دارد.
۳) گوشه‌ای است.　　۴) روی یکی از وجه‌ها قرار دارد.

۱۳ـ نقطه $x_1=0$ **و** $x_2=0$ **و** $x_3=0$ **برای سیستم** $\begin{cases}x_1+x_2-x_3\le 4\\2x_1-x_2+x_3\le 6\\x_1+2x_3\le 10\end{cases}\ x_1,x_2,x_3\ge 0$ **چگونه است؟**

۱) کاملاً داخل ناحیه موجه است.　　۲) BFS تباهیده است.　　۳) BFS غیر تباهیده است.　　۴) جواب پایه‌ای نیست.

۱۴ـ اگر x_1 **و** x_2 **دو نقطه گوشه‌ای موجه و مجاور مجموعه** $S=\{x\mid Ax\le b, x\ge 0\}$ **باشند و** $\overline{x}=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ $(0<\lambda<1)$ **کدام گزینه صحیح است؟**

۱) نقطه $\overline{x}$ می‌تواند خارج از ناحیه موجه باشد.　　۲) نقطه $\overline{x}$ یک نقطه درون ناحیه موجه است.
۳) نقطه $\overline{x}$ نقطه‌ای روی وجه ناحیه موجه است.　　۴) نقطه $\overline{x}$ نقطه‌ای گوشه‌ای است.

۱۵ـ مسأله $\begin{array}{l}\operatorname{Max} Z=cx\\ \text{s.t}\\ Ax\ge b\\ x\ge 0\end{array}$ **که** $A_{m\times n}$ **مفروض است.**

۱) تعداد عناصر مثبت هر BFS غیر تباهیده حداکثر m است.　　۲) هر جواب شدنی با حداکثر m مؤلفه مثبت حتماً یک BFS است.
۳) تعداد عناصر مثبت هر BFS دقیقاً m است.　　۴) تعداد عناصر مثبت هر BFS غیر تباهیده دقیقاً m است.

۱۶ـ مسأله $\begin{array}{l}\operatorname{Max} Z=cx\\ \text{s.t}\\ Ax\le b\\ x\ge 0\end{array}$ **که** $A_{m\times n}$ **و** $R(A)<m$ **مفروض است.**

۱) تعداد عناصر مثبت هر BFS برابر $R(A)$ است.　　۲) تعداد عناصر مثبت هر BFS غیر تباهیده برابر $R(A)$ است.
۳) تعداد عناصر مثبت هر BFS غیر تباهیده برابر m است.　　۴) تعداد عناصر مثبت هر BFS برابر m است.

۱۷ـ مسأله $\underset{s.t}{\mathrm{Max}}\ Z = cx$ $\begin{array}{c} Ax=b \\ x\geq 0 \end{array}$ **که** $A_{m\times n}$ **و** $R(A) = m$ **مفروض است.**

۱) تعداد عناصر مثبت هر BFS برابر m است.

۲) تعداد عناصر مثبت هر BFS حداکثر m است.

۳) تعداد عناصر مثبت هر BFS غیر تباهیده m است.

۴) (۲) و (۳)

۱۸ـ مسأله $\underset{s.t}{\mathrm{Max}}\ Z = cx$ $\begin{array}{c} Ax=b \\ x\geq 0 \end{array}$ **که** $A_{m\times n}$ **و** $R(A) < m$ **مفروض است.**

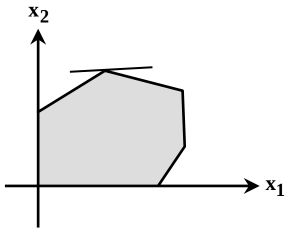
۱) تعداد عناصر مثبت هر BFS برابر R(A) است.

۲) همه BFSهای این سیستم تباهیده هستند.

۳) تعداد عناصر مثبت هر BFS حداکثر R(A) است.

۴) (۲) و (۳)

۱۹ـ در شکل مقابل تعداد پایه‌های شدنی و نشدنی را a و تعداد گوشه‌های موجه و غیر موجه را b فرض می‌کنیم. کدام گزینه صحیح است؟



۱) $a = ۱۵$ و $b = ۱۵$.

۲) $a = ۱۳$ و $b = ۱۱$.

۳) $a = ۱۲$ و $b = ۱۰$.

۴) $a = ۱۵$ و $b = ۱۳$.

۲۰ـ مسأله $\begin{cases} x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ **مفروض است. کدام گزینه یک جهت رأسی دور شونده برای این مسأله است؟**

۱) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

۲۱ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد جهت‌های دور شونده رأسی برای چند وجهی حداکثر برابر تعداد نقاط رأسی آن است.

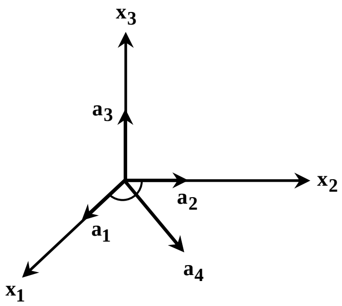
۲) تعداد جهت‌های دور شونده رأسی برای چند وجهی حداکثر برابر بعد فضا است.

۳) ممکن است چندوجهی تهی باشد ولی دارای جهت دور شونده باشد.

۴) هر چندوجهی غیرتهی حتماً نقطه رأسی دارد.

۲۲ـ بردارهای شکل زیر مفروض‌اند:

کدام گزینه ناصحیح است؟



۱) مجموعه $\{a_1, a_2, a_3\}$ یک پایه برای E^3 است.

۲) مجموعه $\{a_2, a_3, a_4\}$ یک پایه برای E^3 است.

۳) مجموعه $\{a_1, a_3, a_4\}$ یک پایه برای E^3 است.

۴) مجموعه $\{a_1, a_2, a_4\}$ یک پایه برای E^3 است.

۲۳ـ بعد فضای جواب سیستم $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۵
۴) حداکثر ۳

۲۴ـ بعد فضای جواب سیستم $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ $x_1, \dots, x_4 \geq 0$ **کدام است؟**

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) صفر

۲۵ـ مجموعه جواب مسأله $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \end{cases}$ **چند نقطه رأسی دارد؟**

۱) ۲
۲) صفر
۳) ۵
۴) ۶

فصل سوم

«روش سیمپلکس»

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال ۱: در مورد الگوریتم سیمپلکس بردار خروجی از ماتریس مبنا (پایه)در هر مرحله طوری انتخاب می‌گردد که ....

۱) افزایش مقدار تابع هدف، تضمین گردد.
۲) شدنی بودن نقطه حاصل، تضمین گردد.
۳) شدنی بودن و افزایش هدف هر دو توأماً تضمین گردد.
۴) با حداقل حجم مساوی مختصات نقطه جدید به دست آید.

پاسخ: گزینه «۲» تعیین بردار خروجی از پایه، طبق آزمون مینیمم نسبت صورت می‌گیرد و می‌دانیم که در آزمون مینیمم نسبت، شدنی بودن نقطه حاصل تضمین می‌شود.

مثال ۲: در مراحل حل یک LP با تابع هدف Min Z مقدار Z به ترتیب ۰ ← ۴– ← ۸– ← ۵– ← ۱۰– شده است.

۱) در یکی از تکرارها متغیر خروجی اشتباه انتخاب شده است.
۲) در یکی از تکرارها متغیر ورودی اشتباه انتخاب شده است.
۳) تابع هدف اصلی مسأله Max بوده و به Min تبدیل شده است.
۴) محدودیت‌های مسأله به صورت > بوده‌اند.

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود در یک مرحله از روش سیمپلکس مقدار تابع هدف مسأله مینیمم‌سازی از ۸– به ۵– رسیده است که نشان می‌دهد جواب بهینه بدتر شده است. پس در این مرحله متغیر ورودی به پایه اشتباه انتخاب شده است.

مثال ۳: کارخانه‌ای با استفاده از ۷ نوع ماده اولیه، امکان تولید ۱۳ نوع محصول را دارد. حداکثر تعداد محصولی که مدل برنامه ریزی خطی در جدول بهینه سیمپلکس برای تولید توصیه می‌کند، کدام است؟

۱) بین ۷ تا ۱۳
۲) ۱۳ محصول
۳) ۷ محصول
۴) بیش از ۱۳ محصول

پاسخ: گزینه «۳» در مدل برنامه‌ریزی خطی این مسأله ۷ محدودیت و ۱۳ متغیر تصمیم وجود دارد. در جدول بهینه ۷ متغیر پایه (به تعداد محدودیت‌ها) داریم و مابقی متغیرها غیرپایه بوده و صفر هستند، بنابراین در جدول بهینه حداکثر ۷ محصول می‌تواند تولید شود.

مثال ۴: مسأله برنامه ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z &= 5x_1 + x_2 \\
\text{s.t}\quad & \\
x_1 + 3x_2 &\le 12 \\
2x_1 + x_2 &\le 6 \\
x_1 + 2x_2 &\le 6 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

حداکثر خطا در مقدار تابع هدف، در صورتی که در انتخاب متغیر خروجی در اولین مرحله اشتباه کنیم، چند واحد است؟

۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۳» اولین جدول سیمپلکس (SP) به صورت زیر است:

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
Z	-5	-1	0	0	0	0
S_1	1	3	1	0	0	12
S_2	2	1	0	1	0	6
S_3	1	2	0	0	1	6

متغیر x_1 ورودی و طبق تست مینیمم نسبت متغیر S_2 خروجی است پس داریم:

$$Z_{\text{جدول بعد}} = 0 - (-5)\left(\frac{6}{2}\right) = 15$$

اگر متغیر خروجی به اشتباه S_1 انتخاب شود، در این صورت خواهیم داشت:

$$Z_{\text{جدول بعد}} = 0 - (-5)\left(\frac{12}{1}\right) = 60 \Rightarrow \text{خطا} = 60 - 15 = 45$$

و اگر متغیر خروجی به اشتباه S_3 انتخاب گردد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$Z_{\text{جدول بعد}} = 0 - (-5)\left(\frac{6}{1}\right) = 30 \Rightarrow \text{خطا} = 30 - 15 = 15$$

بنابراین حداکثر مقدار خطا ۴۵ است.

مثال ۵: جدول غیربهینه زیر یکی از مراحل حل یک مسأله LP مینیمم سازی است. به ازای چه مقادیری از پارامترها x_1 تنها متغیر ورودی و x_2 تنها متغیر خروجی است؟

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
	α	0	0	0	β	γ	
x_2	a	1	0	0	b	C	5
x_3	−2	0	1	0	−2	1	6
S_1	3	0	0	1	5	2	9

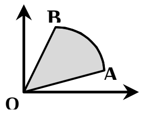
۱) $a>\frac{3}{5};\alpha>\beta>\gamma>0$

۲) $a>\frac{5}{3};\beta.\gamma=0;\alpha>0$

۳) $a<\frac{3}{5};\beta,\gamma>0;\alpha<0$

۴) $a>\frac{5}{3};\beta,\gamma<0;\alpha>0$

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه x_1 تنها متغیر ورودی باشد، باید $\alpha>0$ ولی $\gamma<0,\beta<0$ برای اینکه x_2 تنها متغیر خروجی باشد، باید $\frac{5}{a}<\frac{9}{3}$ یعنی $a>\frac{5}{3}$.

مثال ۶: نقاط رأسی شکل  **کدام گزینه است؟**

۱) فقط نقطه O

۲) نقاط روی کمان AB

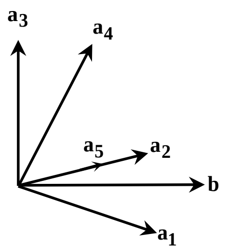
۳) پاره‌خط‌های OA و OB

۴) نقاط روی کمان AB و نقطه O

پاسخ: گزینه «۴»

مثال ۷: فضای ایجاب سیستم $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=b$ به صورت زیر است:
$x_1,\dots,x_4,x_5\geq 0$

کدام گزینه می‌تواند بیانگر یک پایه موجه غیرتباهیده در یک جدول سیمپلکس باشد؟



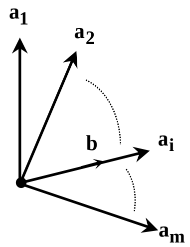
۱) $[a_2,a_5]$

۲) $[a_3,a_4]$

۳) $[a_1,a_3]$

۴) $[a_2,a_4]$

پاسخ: گزینه «۳» بردار b در مخروط حاصل از a_1 و a_3 قرار دارد و این پایه موجه و غیرتباهیده است.



یادآوری: زمانی پایه‌ی تباهیده داریم که بردار b روی یکی از بردارهای a_i قرار گیرد و هر پایه به شکل $[a_i,\underset{\substack{j\neq i\\ j=1,\dots,m}}{\text{سایر بردارها}\ a_j}]$، پایه تباهیده می‌باشد.

پس در شکل داده شده در مثال ۱۱ هیچ‌گونه پایه تباهیده نداریم.

از طرفی باید بردارهای هر پایه، مستقل خطی باشند و هیچ برداری ضریب مثبتی از بردار دیگر نباشد (بردار وابسته، برداری است که ضریب مثبتی از بردار دیگر باشد) پس بردارهایی که روی هم قرار دارند نمی‌توانند هم زمان در پایه باشند (رد گزینه ۱) از طرفی دیگر ترکیب خطی نامنفی بردارهای حاصل در پایه باید شامل بردار b باشند تا پایه موجه باشد (رد گزینه ۲ و ۴) $b\in pos\{a_1,\dots,a_m\}$

مثال ۸: مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Min}\ \ & Z=-30x_1+20x_2+10x_3+30x_4 \\ \text{s.t}\ \ & 50x_1+40x_2+30x_3+10x_4\geq 102 \\ & 0\leq x_j\leq 1\ \ \text{for}\ \ j=1,\dots,4 \end{aligned}$$

۱) ۹-

۲) ۱۲-

۳) ۸-

۴) ۶-

پاسخ: گزینه «۱» چون ضریب x_1 در تابع هدف منفی است قرار می‌دهیم $x_1 = 1$ پس محدودیت مسأله به شکل $40x_2 + 30x_3 + 10x_4 \geq 52$ در می‌آید. اکنون ضریب تابع هدف هر متغیر را بر ضریب آن متغیر در محدودیت تقسیم کرده و کوچکترین نسبت را می‌یابیم. $\text{Min}\{\frac{20}{40}, \frac{10}{30}, \frac{30}{10}\} = \frac{10}{30}$ کمترین نسبت حاصله مربوط به x_3 است، پس $x_3 = 1$ و محدودیت به صورت $40x_2 + 10x_4 \geq 22$ در می‌آید. کمترین نسبت بعدی $\frac{20}{40}$ است که مربوط به متغیر x_2 می‌باشد. حداقل مقداری که x_2 لازم است داشته باشد، تا محدودیت برقرار شود برابر $x_2 = \frac{22}{40}$ است، بنابراین $x_1 = x_3 = 1, x_2 = \frac{22}{40}$ و $x_4 = 0$ و در این شرایط $z^* = -9$.

مثال ۹: مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) $+\infty$

۲) ۳۰

۳) -۵

۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۱» ضریب x_1 در محدودیت مسأله منفی است پس هر قدر بخواهیم می‌توانیم x_1 را افزایش دهیم و با زیاد شدن x_1 مقدار Z نیز افزایش می‌یابد، اگر: $x_1 \to +\infty$ در این صورت: $z^* \to +\infty$.

مثال ۱۰: مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = -50x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 15x_4 + 10x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 30x_1 + 50x_2 + 10x_3 - 20x_4 + 40x_5 \leq 200 \\ & 0 \leq x_j \leq 4 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

۱) ۴۰۰

۲) ۴۲۰

۳) ۴۳۰

۴) ۴۳۵

پاسخ: گزینه «۳» چون ضریب x_1 در تابع هدف منفی است، پس $x_1 = 0$ (چرا؟) و ضریب x_4 در تابع هدف مثبت و در محدودیت منفی است، پس $x_4 = 4$ (چرا؟) اکنون برای متغیرهای باقیمانده ضریب آنها در تابع هدف را بر ضریب‌شان در محدودیت تقسیم می‌کنیم و بزرگترین نسبت را می‌یابیم.

$$\text{Max}\ \{\overset{x_2}{\frac{60}{50}}, \ \overset{x_3}{\frac{30}{10}}, \ \overset{x_5}{\frac{10}{40}}\} = \frac{30}{10} \Rightarrow x_3 = 4$$

پس محدودیت به صورت $50x_2 + 40x_5 \leq 240$، با توجه به نسبت‌های بالا بزرگترین نسبت بعدی $\frac{60}{50}$ است که مربوط به x_2 است، پس $x_2 = 4$ و در نتیجه $40x_5 \leq 40$ و در نهایت $x_5 = 1$ اکنون مقادیر $x_1 = 0$ و $x_2 = x_3 = x_4 = 4$ و $x_5 = 1$ را در تابع هدف قرار می‌دهیم و خواهیم داشت: $Z^* = 430$.

مثال ۱۱: مسأله مقابل داده شده است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 + 8x_5 - 4x_6 + 5x_7 + 7x_8 \\ \text{s.t} \quad & \\ & \{m \text{ محدودیت داده شده}\} \\ & -5 \leq x_j \leq 5 \qquad j = 1, \ldots, 8 \end{aligned}$$

کدام گزینه در مورد مقدار بهینه تابع هدف (z^*) صادق است؟

۱) $z^* \leq 180$

۲) $z^* \geq 300$

۳) $z^* \leq -220$

۴) $z^* \geq 260$

پاسخ: گزینه «۱» چون هدف Max سازی است به متغیرهایی که ضریب هزینه آنها منفی است مقدار منفی و به متغیرهایی که ضریب هزینه‌آنها مثبت است مقداری مثبت نسبت می‌دهیم. پس جواب عبارت است از :

$$x_1^* = x_2^* = x_5^* = x_7^* = x_8^* = 5 \qquad , \qquad x_3^* = x_4^* = x_6^* = -5\ ; Z = 180$$

در صورتی مقدار $Z = 180$ مقدار بهینه‌ی مسأله خواهد بود که مقادیر در نظر گرفته شده برای متغیرها در m محدودیت دیگر مسأله نیز صدق کنند، پس $Z = 180$ حد بالایی برای مقادیر بهینه مسأله خواهد بود. ($Z^* \leq 180$)

مثال ۱۲: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 20x_1 - 12x_2 - 14x_3\\
&\text{s.t.}\\
&\quad x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 30\\
&\quad 3x_1 - 3x_2 + 10x_3 \le 20\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 10\\
&\quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,3
\end{aligned}$$

اگر در جواب پایه بهینه x_2, x_1 متغیرهای پایه باشند، آنگاه مقدار بهینه z کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

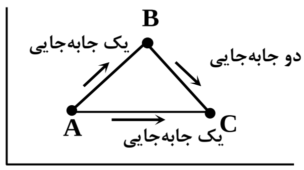
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» متغیر x_3 غیرپایه‌ای است (زیرا با پایه‌ای فرض کردن x_1 و x_2 و x_3 به یک جواب نشدنی می‌رسیم). پس: $x_3 = 0$. با قراردادن $x_3 = 0$ درمحدودیت اول و سوم داریم:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 30 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow z^* = 20(5) - 12(5) - 14(0) = 40$$

مثال ۱۳: در یک مدل برنامه‌ریزی خطی اگر A و B و C نقاط گوشه‌ای (Extreme Point) باشند و نقطه B مجاور نقطه A و نقطه C مجاور نقطه B باشد، آنگاه از نقطه C چگونه می‌توان نقطه A را به کمک روش سیمپلکس معمولی تعیین کرد ؟

۱) با جابه‌جایی حداکثر دو متغیر پایه با دو متغیر غیرپایه
۲) با جابه‌جایی حداقل دو متغیر پایه با دو متغیر غیرپایه
۳) جابه‌جایی دو متغیر پایه با دو متغیر غیرپایه
۴) جابه‌جایی یک متغیر پایه با یک متغیر غیرپایه

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با جابه‌جایی حداکثر دو متغیر پایه با دو متغیر غیرپایه بستگی به مسیر حرکت دارد.



مثال ۱۴: در سیستم $\begin{cases} A_{m\times n}X = b \\ x \ge 0 \end{cases}$ که $R(A) = m$، در صورت عدم تباهیدگی حداکثر گوشه موجه مجاور به هر گوشه موجه کدام است؟

۱) n ۲) m ۳) n - m ۴) m - n

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تعداد کل متغیرها n تا و تعداد متغیر پایه‌ای m تا است. پس تعداد متغیرهای غیرپایه‌ای یا همان بعد فضای جواب n-m است، بنابراین حداکثر n-m گوشه موجه مجاور وجود دارد.

مثال ۱۵: در حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس، در یکی از تکرارها اطلاعات زیر حاصل شده است:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z\\
&\text{s.t}\\
&\quad x_1 = \frac{4}{3} - 2x_2 - x_4\\
&\quad x_3 = \frac{7}{4} - 3x_2 + \frac{1}{2}x_4\\
&\quad z = 5 + x_2 + 2x_4\\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

در این تکرار کدام مورد صدق می‌کند؟

۱) متغیر x_2 وارد پایه شده و x_1 از پایه خارج می‌شود.
۲) متغیر x_4 وارد پایه شده و x_3 از پایه خارج می‌شود.
۳) متغیر x_4 وارد پایه شده و x_1 از پایه خارج می‌شود.
۲) متغیر x_2 وارد پایه شده و x_1 از پایه خارج می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جدول سیمپلکس این تکرار به صورت زیر است:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	R.H.S
z		۰	−۱	۰	−۲	۵
x_1		۱	۲	۰	۱	$\frac{۴}{۳}$
x_3		۰	۳	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۷}{۴}$

x_4 متغیر ورودی به پایه و x_1 متغیر خروجی از پایه است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۶: مسأله $\underset{\substack{s.t\\Ax=b\\x\geq ۰}}{\text{Max}}\ CX$ که در آن $A_{۳\times ۴}$ است را در نظر بگیرید. ستون iام ماتریس A را با a_i نمایش می‌دهیم. برای این مسأله $B=(a_1,a_2,a_4)$ یک پایه می‌باشد و $B^{-1}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۶\\ ۲ & ۰ & ۳\\ ۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}$. اگر $b=\begin{bmatrix}۳\\۱\\۱\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}$ و $C=(C_1=۱,C_2=۱,C_3=۱۲,C_4=۱)$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) مطابق روش سیمپلکس a_3 (متغیر x_3) وارد پایه می‌شود و a_1 (متغیر x_1) از پایه خارج می‌گردد.

۲) B پایه بهینه (Optimal Basis) می‌باشد.

۳) مسأله نامحدود می‌باشد.

۴) B یک پایه غیرقابل قبول (infeasible basis) می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تنها متغیر غیرپایه‌ای x_3 می‌باشد. برای محاسبه‌ی ضریب آن در سطر تابع هدف داریم:

$$Z_3-C_3=C_B B^{-1}a_3-C_3=(C_1=۱,C_2=۱,C_4=۱)\begin{pmatrix}-۲ & ۰ & ۶\\ ۲ & ۰ & ۳\\ ۱ & ۱ & -۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱\\۱\\۱\end{pmatrix}-۱۲\Rightarrow Z_3-C_3=-۳$$

پس متغیر x_3 وارد پایه می‌شود و برای تعیین متغیر خروجی از پایه داریم:

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۶\\ ۲ & ۰ & ۳\\ ۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\۱\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۹\\۲\end{bmatrix}\begin{matrix}=\bar{b}_1\\=\bar{b}_2\\=\bar{b}_3\end{matrix}\quad,\quad \bar{a}_3=B^{-1}a_3=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۶\\ ۲ & ۰ & ۳\\ ۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\۵\\۰\end{bmatrix}\begin{matrix}=\bar{a}_{13}\\=\bar{a}_{23}\\=\bar{a}_{33}\end{matrix}$$

آزمون مینیمم نسبت عبارت است از:

$$\theta=\text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}}\Big|\bar{a}_{i3}>۰,۱\leq i\leq ۳\}=\text{Min}\{\frac{۰}{۴},\frac{۹}{۵}\}=۰$$

پس متغیر x_1 پایه را ترک می‌کند و جواب پایه‌ای شدنی در مرحله بعد تباهیده $(x_3=۰)$ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۷: در مثال بالا اگر $b=\begin{bmatrix}۳\\۱\\۱\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}$, $C=(۱,۱,۱۲,۱)$, x_3 برابر ۲ قرار دهیم. مقدار تابع هدف کدام است؟

۱) $Z=۱۷$ ۲) $Z=۲۹$ ۳) $Z=۱۱$ ۴) $Z=۱۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$Z=C_B B^{-1}b-(Z_3-C_3).x_3=(۱,۱,۱)\begin{pmatrix}-۲ & ۰ & ۶\\ ۲ & ۰ & ۳\\ ۱ & ۱ & -۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۳\\۱\\۱\end{pmatrix}-(-۳)۲=۱۱-(-۳)(۲)=۱۷$$

مثال ۱۸: **مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مسأله c_5 و c_4 عدد ثابت و a_j و b بردار سه تایی از اعداد ثابت‌اند.**

$$\begin{aligned}&\text{Max } Z = x_1 + x_2 + x_3 + c_4x_4 + c_5x_5\\ &\text{s.t} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b\\ &\qquad x_j \ge 0 \quad \text{تمام } j \text{ ها}\end{aligned}$$

اجرای دستورالعمل سیمپلکس برای پایه $B = (a_1, a_2, a_3)$ با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید . اگر $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $a_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $c_4 = 1$ و $c_5 = 1$ باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) پایه B پایه بهینه مسأله است.

۲) بردار a_5 وارد پایه و بردار a_1 از پایه خارج می‌شود.

۳) بردار a_4 وارد پایه و بردار a_1 از پایه خارج می‌شود.

۴) بردار a_5 وارد پایه و بردار a_3 از پایه خارج می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j \qquad C_B = C(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$$

مقادیر $Z_j - C_j$ متغیرهای غیرپایه را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_5 - C_5 = (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 = (1,1,1)\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 = 1 > 0$$

$$Z_4 - C_4 = (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 1 > 0$$

$Z_j - C_j$ همه متغیرهای غیرپایه‌ای مثبت است، پس پایه B بهینه است.

مثال ۱۹: **مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مسأله c_j عدد ثابت و a_j و b بردار سه تایی از اعداد ثابت‌اند.**

$$\begin{aligned}&\max_{\text{s.t}} \; z = x_1 + x_2 + x_3 + c_4x_4 + c_5x_5\\ &\qquad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b\\ &\qquad x_j \ge 0 \quad \text{تمام } j \text{ ها}\end{aligned}$$

اجرای دستورالعمل سیمپلکس برای پایه $B = (a_1, a_2, a_3)$ با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $a_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $c_4 = -3$ و $c_5 = 2$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱) پایه B پایه بهینه مسأله است.

۲) بردار a_5 وارد پایه و بردار a_1 از پایه خارج می‌شود.

۳) بردار a_4 وارد پایه و بردار a_2 از پایه خارج می‌شود.

۴) بردار a_5 وارد پایه و بردار a_2 از پایه خارج می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقادیر $z_j - c_j$ متغیرهای غیرپایه عبارتند از:

$$Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j = C_B \bar{a}_j - C_j$$

$$\bar{a}_5 = B^{-1} a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j \Rightarrow \bar{a}_4 = B^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Z_5 - C_5 = (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 = -1$$

$$Z_4 - C_4 = (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - (-3) = 1$$

بنابراین چون $Z_5 - C_5 < 0$ متغیر x_5 ورودی به پایه است.

همچنین داریم:

$$\bar{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

آزمون مینیمم نسبت : $\text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i5}} \mid 1 \le i \le 3\} = \text{Min}\{\frac{1}{4}\}$

متغیر x_5 وارد پایه و متغیر x_2 از پایه خارج می‌گردد.

مثال ۲۰: مسأله زیر و جدول نهایی ناقص آن داده شده است.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t}\quad & 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 15 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

پایه	مقدار	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	$\frac{25}{4}$	0	$-b$	0	$-(M-\frac{1}{4})$	$-\frac{1}{4}$	$-(M-\frac{1}{4})$
x_1	c	1	-1	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$
x_3	$\frac{5}{4}$	0	1	1	$-\frac{3}{4}$	e	$\frac{5}{4}$

در این مسأله x_4 متغیر مصنوعی محدودیت اول، x_5 متغیر مازاد محدودیت دوم و x_6 متغیر مصنوعی محدودیت دوم می‌باشند. مقدار e کدام است؟

۱) $e=-\frac{5}{4}$ ۲) $e=-1$ ۳) $e=0$ ۴) $e=3$

پاسخ: گزینه «۱»

راه حل اول:

$$Z_5 - C_5 = -\frac{1}{4} \Rightarrow C_B\bar{a}_5 - C_5 = -\frac{1}{4} \Rightarrow (2,3)\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ e \end{pmatrix} - 0 = \frac{7}{2} + 3e = -\frac{1}{4} \Rightarrow e = -\frac{5}{4}$$

راه حل دوم: از آنجایی که متغیر مازاد و مصنوعی اضافه شده به یک محدودیت بزرگتر مساوی قرینه‌ی یکدیگر هستند، پس در تمامی جداول سیمپلکس ستون ضرایب آن‌ها نیز قرینه‌ی یکدیگر می‌باشد، پس ضرایب x_5 قرینه‌ی ضرایب x_6 بوده و $e=-\frac{5}{4}$ می‌باشد.

مثال ۲۱: در مدل LPI مقدار پارامتر a_1 برابر است با:

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) -3 ۳) 3 ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» برای متغیر x_2 داریم:

$$B^{-1}a_j = \bar{a}_j \Rightarrow \bar{a}_2 = B^{-1}a_2$$

B^{-1} در جدول بهینه، مقادیر زیر متغیرهای slack است.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ a_1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ a_1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}a_1 + 2 = 1 \Rightarrow a_1 = -3$$

مثال ۲۲: در مدل LPI مقدار پارامتر a_2 برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» برای متغیر غیرپایه‌ای x_3 در سطر هدف داریم:

$$Z_3 - C_3 = C_B B^{-1}a_3 - C_3 = [2,3,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = a_2 \Rightarrow Z_3 - C_3 = a_2 = 1$$

مثال ۲۳: در مدل LPI مقدار پارامتر a_3 برابر است با:

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» مقدار پارامتر a_3 برابر است با:

$$B^{-1}b = \bar{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_3 = 1$$

مثال ۲۴: در مدل LPI مقدار پارامتر $a_۴$ برابر است با:

۱) ۱۵ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقدار بهینه تابع هدف برابر است با:

$$Z^* = C_B B^{-1} b \quad ; \quad Z^* = (۲,۳,۰)\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & -۱ \\ -۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۷ \Rightarrow a_۴ = ۷$$

مثال ۲۵: مسأله مقابل مفروض است:

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\ Z = -۱۴x_۱ - ۱۸x_۲ - ۱۶x_۳ - ۸۰x_۴$$
$$ax_۱ + ۸/۵x_۲ - ۶x_۳ + ۲۰x_۴ \le ۶۰۰۰$$
$$x_۱ + x_۲ + ۴x_۳ + ۲۰x_۴ \le b$$
$$x_۱, ..., x_۴ \ge ۰$$

می‌دانیم که متغیرهای $x_۱$, $x_۴$ در پایه بهینه قرار دارند، یعنی: $X_B = (x_۱, x_۴)$ و ماتریس B^{-1} عبارت است از: $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۸} \\ -\frac{۱}{۱۶۰} & \frac{۹}{۳۲۰} \end{bmatrix}$ و مقدار بهینه تابع هدف ۲۰۰۰− است. مقدار پارامتر a کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

راه‌حل اول:

$$B = [a_۱, a_۴] = \begin{bmatrix} a & ۲۰ \\ ۱ & ۴۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = ۴۰a - ۲۰$$

همچنین $\det(B^{-1}) = \frac{۱}{۱۶۰}$. از آنجایی که متغیر $\det(B^{-1}) = \frac{۱}{\det(B)}$ بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۱۶۰} = \frac{۱}{۴۰a - ۲۰} \Rightarrow a = \frac{۹}{۲}$$

راه حل دوم: از آنجایی که متغیر $x_۱$ پایه‌ای است، پس ستون ضرایب آن در جدول نهایی بردار یکه $\bar{a}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\bar{a}_۱ = B^{-۱} a_۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۸} \\ -\frac{۱}{۱۶۰} & \frac{۹}{۳۲۰} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{۱}{۴}a - \frac{۱}{۸} = ۱ \Rightarrow a = \frac{۹}{۲}$$

مثال ۲۶: مسأله مقابل مفروض است:

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\ Z = x_۱ + x_۲ - ۴x_۳$$
$$x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ = ۹$$
$$x_۱ + x_۲ - x_۳ + x_۵ = ۲$$
$$-x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۶ = ۴$$
$$x_j \ge ۰ \quad ; \quad j = ۱, ..., ۶$$

پایه $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و معکوس آن $B^{-1} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $x_۴ = \theta, x_۲ = x_۶ = ۰$ انتخاب شوند، مقادیر سایر متغیرها کدام است؟

۱) $(x_۱, x_۵, x_۳) = (\frac{۲\theta + ۱}{۳}, ۶ - \theta, \frac{۱۳ - \theta}{۳})$

۲) $(x_۱, x_۵, x_۳) = (\frac{۱ - \theta}{۳}, ۶, \frac{۱۳ - \theta}{۳})$

۳) $(x_۱, x_۵, x_۳) = (\frac{\theta + ۱}{۳}, ۶ - \theta, \frac{۱۳ - ۲\theta}{۳})$

۴) $(x_۱, x_۵, x_۳) = (\frac{۱ - \theta}{۳}, ۶, \frac{۱۳}{۳} - \theta)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به پایه B می‌توان فهمید که متغیرهای پایه‌ای x_3, x_5, x_1 هستند، یعنی: $X_B = (x_1, x_5, x_3)$ و متغیرهای x_6, x_4, x_2 غیرپایه‌ای هستند، یعنی: $X_N = (x_2, x_4, x_6)$. همچنین می‌دانیم که $X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$.

ستون‌های a_6, a_4, a_2 غیرپایه‌ای هستند، بنابراین: $N = [a_2, a_4, a_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ داریم:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

با قرار دادن $x_2 = x_6 = 0, x_4 = \theta$ در این رابطه داریم:

$$(x_1 \; , \; x_5 \; , \; x_3) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\theta \; , \; 6 \; , \; \frac{13}{3} - \frac{1}{3}\theta\right)$$

مثال ۲۷: مسأله روبرو مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + C_4X_4 + C_5X_5 \\ \text{s.t.} \\ x_1 - x_2 + x_3 + fx_5 = b \\ x_1 + x_2 - x_3 - dx_4 + fx_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + dx_4 = b \\ x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

پایه $B = [a_1, a_2, a_3]$ و معکوس آن $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. در جواب پایه‌ای متناظر با پایه B مقدار $\frac{x_3}{x_1}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۰/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مقادیر سمت راست در جدول نهایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$X_B = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{x_3}{x_1} = 2 \\ x_3 = b \end{cases}$$

مثال ۲۸: در مثال بالا کلیه مقادیر f به گونه‌ای که مسأله نامحدود شود کدام است؟

۱) $\{f \mid f \leq 0, f < \frac{C_5}{4/5}\}$ ۲) $\{f \mid f \leq 0, f < 0/5C_5\}$ ۳) $\{f \mid f > 0, f < C_5\}$ ۴) $\{f \mid f \geq 0, f < C_5\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای یافتن حدود f به گونه‌ای که مقدار بهینه تابع هدف نامتناهی گردد، طبق نکته می‌بایست متغیر $x_۵$ شرط ورودی به پایه را دارا بوده و همچنین ستون ضرایب آن کوچکتر مساوی صفر باشد، یعنی: $Z_۵ - C_۵ < ۰ \; , \; \bar{a}_۵ \le ۰$

$$Z_۵ - C_۵ = C_B B^{-۱} a_۵ - C_۵ = (۲,۲,۳)\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f \\ ۰ \end{pmatrix} - C_۵ = (۲,۲,۳)\begin{pmatrix} f \\ \frac{f}{۲} \\ \frac{f}{۲} \end{pmatrix} - C_۵ = \frac{۹f}{۲} - C_۵ < ۰ \Rightarrow f < \frac{C_۵}{۴/۵}$$

$$\bar{a}_۵ = B^{-۱} a_۵ = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \frac{f}{۲} \\ \frac{f}{۲} \end{pmatrix} \le ۰ \Rightarrow f \le ۰$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که: $f < \frac{C_۵}{۴/۵}, f \le ۰$.

مثال ۲۹: مسأله برنامه‌ریزی خطی و جدول سیمپلکس یکی از مراحل، به صورت زیر است؟

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = ۳x_۱ + ۲x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & ۴x_۱ + fx_۲ \le b_۱ \\ & ax_۱ + gx_۲ \le b_۲ \\ & ۴x_۱ + kx_۲ \le b_۳ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
	۰	۰	d	e	۰	h
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۲
$x_۱$	۱	۰	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	۰	$\frac{۳}{۲}$
$S_۳$	۰	۰	۱	−۲	۱	۴

پارامترهای مجهول را بیابید.

☑ **پاسخ:** متغیرهای پایه‌ای اولین جدول سیمپلکس، $(S_۱, S_۲, S_۳)$ بوده‌اند. پس ماتریس $B^{-۱}$ جدول عبارت است از: ماتریس زیر $S_۳, S_۲, S_۱$، یعنی: $B^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۱}{۸} & \frac{۳}{۸} & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$. برای یافتن پارامتر k, g, f, a داریم:

$$\bar{a}_۱ = B^{-۱} a_۱ \Rightarrow \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۱}{۸} & \frac{۳}{۸} & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۴ \\ a \\ ۴ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ - \frac{a}{۲} \\ -\frac{۴}{۸} + \frac{۳a}{۸} \\ ۸ - ۲a \end{pmatrix} \Rightarrow a = ۴$$

$$\bar{a}_۲ = B^{-۱} a_۲ \Rightarrow \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۱}{۸} & \frac{۳}{۸} & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{۲} - \frac{g}{۲} \\ -\frac{f}{۸} + \frac{۳g}{۸} \\ f - ۲g + k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} g = ۱ \\ f = ۳ \\ k = -۱ \end{matrix}$$

برای یافتن پارامترهای b_1 و b_2 و b_3 داریم:

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 - b_2}{2} \\ \frac{-b_1 + 3b_2}{8} \\ b_1 - 2b_2 + b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_1 = 12 \\ b_2 = 8 \\ b_3 = 8 \end{matrix}$$

برای یافتن پارامترهای d و e توجه می‌کنیم که اعداد زیر متغیرهای پایه‌ای اولین جدول، یعنی: S_1 و S_2 و S_3 همان $C_B B^{-1}$ هستند. همچنین در این جدول $C_B = (C_2 = 2, C_1 = 3, C_{S_3} = 0)$ بنابراین خواهیم داشت:

$$C_B B^{-1} = (d,e,0) \Rightarrow (2,3,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (d,e,0) \Rightarrow (\frac{5}{8}, \frac{1}{8}, 0) = (d,e,0) \Rightarrow d = \frac{5}{8}, e = \frac{1}{8}$$

مثال ۳۰: مسأله زیر و جدول بهینه ناقص آن را در نظر بگیرید. S_1, S_3 متغیرهای کمبود R_2 متغیر مصنوعی محدودیت‌های مربوطه است. مقادیر d,c,b,a عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\textbf{Max} \quad Z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 10 \\ &\qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 18 \\ &\qquad -x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 25 \\ &\qquad x_j \ge 0, \quad j = 1 \text{ تا } 4 \end{aligned}$$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	R_2	S_3	R.H.S
	0	5	a	0	1	3+M	0	64
x_1	1	b	-0.5	0	0.5	0	0	5
x_4	0	0.5	3.5	1	-0.5	1	0	c
s_3	0	6.5	3.5	0	d	0	1	30

۱) $d = 0.5, c = 13, b = 1.5, a = 6$

۲) $d = 0.5, c = 10, b = 1.5, a = 6$

۳) $d = 0.5, c = 13, b = 1.5, a = 5$

۴) $d = 0.5, c = 10, b = 1.5, a = 4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$a = Z_3 - C_3 = C_B \bar{a}_3 - C_3 = (5,3,0) \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} - 2 \Rightarrow a = 6$$

با توجه به گزینه‌ها در می‌یابیم $d = 0.5$، زیرا در همه گزینه‌ها مقدار d برابر ۰/۵ است.

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ c \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ d = 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 13$$

مثال ۳۱: مسأله مقابل دارای جواب یگانه است اگر و فقط اگر در جدول نهایی سیمپلکس :

$$\begin{aligned} &\textbf{Max}\, Z = CX \\ &\text{s.t.} \\ &\quad AX = b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $C \ge 0$ باشد.

۲) ضریب کلیه متغیرهای غیر پایه در سطر تابع هدف بهینه در جدول بهینه متعارف غیر صفر باشد.

۳) $b \ge 0$ باشد.

۴) $A \ge 0$ باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شرط اینکه در جدول بهینه جواب بهینه چندگانه داشته باشیم این است که حداقل یکی از متغیرهای غیرپایه‌ای دارای ضریب تابع هدف صفر باشد. در غیر این صورت جواب بهینه منحصر به فرد خواهد بود.

مثال ۳۲: جدول مقابل یکی از مراحل سیمپلکس(SP) است، فضای موجه این مسأله:

	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	-5	0	3	0	6
x_2	-1	1	1	0	2
S_2	1	0	-2	1	2

۱) کران‌دار است. ۲) بی‌کران است. ۳) ممکن است بی‌کران باشد. ۴) ممکن است کران‌دار باشد.

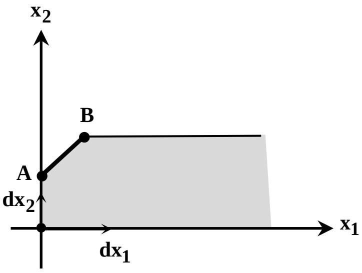
پاسخ: گزینه «۲» با ورود x_1 به پایه و خروج S_2 داریم:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S
x_2	0	1	$\boxed{-1}$	1	4
x_1	1	0	$\boxed{-2}$	1	2
			$\bar{a}_3 \le 0$		

با توجه به جدول اخیر فضای موجه بی‌کران است.

مثال ۳۳: مسأله زیر مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t } & \\ & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



پاسخ: اولین جدول SP را تشکیل می‌دهیم.

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S
	-2	-3	0	0	0
S_1	-1	1	1	0	2
S_2	-1	2	0	1	6

متغیر x_1 شرط ورود به پایه را دارا است اما متغیر خروجی نداریم، پس فضای موجه نامحدود و $Z^* = +\infty$ است. البته اگر x_2 را وارد پایه کنیم در دو جدول بعد (یعنی در گوشه B) به این نتیجه می‌رسیم. جهت‌های رأسی نظیر این جدول عبارتند از :

$$d_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ngeq 0 \rightarrow \text{جهت رأسی شدنی} \qquad d_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ge 0 \rightarrow \text{جهت دور شونده رأسی} \qquad Cd_{x_1} = (2,3,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

پس فضای موجه بی‌کران و Z^* نا محدود است.

مثال ۳۴: مسأله مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & \\ & -x_1 + x_2 + S_1 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + S_2 = 6 \\ & S_1, S_2, x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

در کدام گزینه یک شعاع به صورت $X(\theta)$ معرفی شده که با $\theta \to +\infty$ مقدار Z به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد؟

۱) $(\theta, 2+\theta, 0, 2-\theta)$ ۲) $(2-\theta, 4-\theta, 0, \theta)$ ۳) $(2+2\theta, 4+\theta, \theta, 0)$ ۴) $(0, 2+\theta, \theta, 2-2\theta)$

پاسخ: گزینه «۳» گزینه‌ها را به صورت $X^\circ + d\theta$ می‌نویسیم، باید X° یک نقطه رأسی و d یک جهت دور شونده باشد و همچنین $Cd > 0$ در گزینه ۳ داریم: $(2+2\theta, 4+\theta, \theta, 0) = (2,4,0,0) + (2,1,1,0)\theta$ که در آن $X = (2,4,0,0)$ یک B.F.S برای مسأله است (چرا؟) و همچنین $d = (2,1,1,0)$ یک جهت دور شونده است (چرا؟) و داریم: $Cd = (2,3,0,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 > 0$، پس Z^* نامتناهی است.

البته می‌توان از روی گزینه‌ها هم جواب را حدس زد. جهت دورشونده رأسی نیاز است تا جواب مسأله $+\infty$ شود و از طرفی جهت دورشونده رأسی، تمام مولفه‌هایش نامنفی می‌باشد و در گزینه‌ها کافی است ضرایب θ را جدا کرده و هر کدام منفی بود منجر به رد شدن گزینه می‌شود.

۱) $(\theta, ۲+\theta, ۰, ۲-\theta) = (۰,۲,۰,۲) + \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}^t \theta$

۲) $(۲-\theta, ۴-\theta, ۰, \theta) = (۲,۴,۰,۰) + \begin{pmatrix} -۱ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}^t \theta$

۳) $(۲+۲\theta, ۴+\theta, \theta, ۰) = (۲,۴,۰,۰) + \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}^t \theta \rightarrow$ تمام مؤلفه‌هایش مثبت است. ✓

۴) $(۰, ۲+\theta, \theta, ۲-۲\theta) = (۰,۲,۰,۲) + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \\ -۲ \end{pmatrix}^t \theta$

مثال ۳۵: جدول بهینه زیر مفروض است:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S
	۰	۰	−۱	۰	۲
x_2	−۱	۱	۱	۰	۲
S_2	۱	۰	−۲	۱	۲

در مورد مجموعه نقاط بهینه کدام گزینه صحیح است؟ $(۰ \le \lambda \le ۱)$

۱) $(۲-۲\lambda, ۲+۲\lambda, ۰, ۲\lambda)$ ۲) $(۲+۲\lambda, ۲-۲\lambda, ۰, ۲\lambda)$ ۳) $(۲-۲\lambda, ۲-۲\lambda, ۰, ۲\lambda)$ ۴) $(۲+۲\lambda, ۲+۲\lambda, ۰, ۰)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همانطور که مشخص است x_1 غیرپایه‌ای است و از آن‌جایی که ضریب سطر هدف آن صفر است و می‌توان جایگزین S_2 در پایه شود، پس جواب بهینه چندگانه داریم. با ورود x_1 و خروج S_2 جدول بعد به صورت زیر است:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	
	۰	۰	−۱	۰	۲
x_2	۰	۱	−۱	۱	۴
x_1	۱	۰	−۲	۱	۲

جدول اخیر، گوشه بهینه $X_2^*(x_1=۲, x_2=۴, S_1=۰, S_2=۰)$ را نشان می‌دهد و جدول صورت سؤال گوشه بهینه $X_1^*(x_1=۰, x_2=۲, S_1=۰, S_2=۲)$ را نشان می‌دهد پس هر ترکیب محدب X_1^* و X_2^* نیز نقطه بهینه خواهد بود.

مجموعه نقاط بهینه $= \{\lambda(۰,۲,۰,۲) + (۱-\lambda)(۲,۴,۰,۰) \mid ۰ \le \lambda \le ۱\} = \{(۲-۲\lambda, ۴-۲\lambda, ۰, ۲\lambda) \mid ۰ \le \lambda \le ۱\}$

مجموعه نقاط بهینه از نظر هندسی، پاره خط واصل X_1^* و X_2^* است.

مثال۳۶: در یک مسأله LP با تابع هدف Max جدول زیر داده شده است:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	−c	۲	۰	۰	۰	۱۰
x_3	۰	−۱	۳	۱	۰	۰	۴
x_4	۰	a	−۴	۰	۱	۰	۱
x_5	۰	−۲	۳	۰	۰	۱	b

مقادیر a و b و c چقدر باشد تا جدول فعلی بیانگر جواب بهینه چندگانه باشد؟

۱) $a \ge ۰, b = ۰, c > ۰$ ۲) $a > ۰, b \ge ۰, c = ۰$ ۳) $a \le ۰, b = ۰\ c = ۰$ ۴) $a \le ۰, b \ge ۰, c < ۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای داشتن جواب بهینه چندگانه باید ضریب سطر هدف یک متغیر غیرپایه صفر باشد، پس: $Z_1 - C_1 = -C = ۰$ پس: $C = ۰$. همچنین باید $a > ۰$ زیرا اگر $a \le ۰$ متغیر خروجی نخواهیم داشت، همچنین باید $b \ge ۰$. در حقیقت گزینه (۳) نیز صحیح است زیرا با شرایط ذکر شده در گزینه (۳) مسأله دارای شعاع بهینه است.

مثال ۳۷: جدول بهینه زیر مفروض است:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	
	۰	۰	۰	−۳	۱۵
x_1	۱	۰	−۲	۴	۲
x_2	۰	۱	−۱	۱	۶

کدام گزینه یک نقطه بهینه مسأله است؟ (نقاط به صورت (x_1, x_2, S_1, S_2) هستند)

۱) $(0,5,1,0)$ ۲) $(3,1,0,7)$ ۳) $(4,7,1,0)$ ۴) هیچ‌کدام.

پاسخ: گزینه «۳» برای متغیر غیرپایه S_1 داریم: $Z_3 - C_3 = 0$ ولی با ورود S_1 به پایه، متغیر خروجی نداریم پس مسأله دارای شعاع بهینه به صورت زیر است:

$$\text{مجموعه نقاط بهینه} = S_1 \text{ شعاع متناظر} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\bar{a}_{s_1} \\ e_{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} S_1 \ , \ 0 \le S_1 \le +\infty$$

با قرار دادن $S_1 = 1$، نقطه‌ی بهینه‌ی $(4,7,1,0)$ به دست می‌آید.

مثال ۳۸: مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max}\, z &= x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t}\quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ & 5x_1 - 3x_2 + x_3 \le 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

فرض کنید که این مسأله سیمپلکس حل شده و جواب بهینه آن در جدول زیر داده شده باشد.

پایه	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	۱	۳	۰	۰	۱/۵	۰/۵	۸
x_3	۰	−۱	۰	۱	۱/۵	−۰/۵	۱
x_2	۰	۲	۱	۰	−۰/۵	۰/۵	۲

ضریب x_1 در تابع هدف به چه عددی تغییر کند تا مسأله دارای جواب بهینه چندگانه باشد؟

۱) نمی‌تواند دارای جواب چندگانه باشد. ۲) صفر
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» از آنجایی که جدول سیمپلکس ارائه شده در صورت مسأله، بهینه می‌باشد و شرط لازم برای چندگانه بودن، صفر شدن ضریب متغیر پایه در سطر z جدول بهینه سیمپلکس است. بنابراین خواهیم داشت:

$$z_1 - c_1 = 0 \Rightarrow c_B B^{-1} a_1 - c_1 = 0 \Rightarrow (2 \quad 3)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - c_1 = 0 \qquad c_1 = 4$$

مثال ۳۹: جدول بهینه زیر مفروض است:

Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
	۰	۰	۲	۰	۰	
x_1	۱	۱	−۳	۰	۰	۴
S_2	۰	۲	۱	۲	۱	۰

کدام گزینه صحیح است؟

۱) مسأله نقطه بهینه منحصر به فرد و تباهیده دارد.
۲) مسأله جواب بهینه چندگانه دارد و یکی از جواب‌های بهینه تباهیده است.
۳) تباهیدگی جدول رفع شدنی است.
۴) مسأله جواب بهینه نامتناهی دارد.

پاسخ: گزینه«۱» برای متغیر غیرپایه‌ای x_2 داریم: $Z_2 - C_2 = 0$ و تست مینیمم نسبت، به صورت $\theta = \text{Min}\{\frac{4}{1}, \frac{0}{2}\} = 0$ می‌باشد پس با ورود x_2 و خروج S_2 دوباره در همین نقطه باقی می‌مانیم و فقط یکی از پایه‌های دیگر گوشه تباهیده به دست می‌آید.

مثال ۴۰:جدول بهینه زیر مفروض است:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_1	R.H.S
Z	0	0	0	3	1	
x_1	1	0	-1	4	1	0
x_2	0	1	3	-2	5	6

کدام گزینه صحیح است؟

۱) مسأله نقطه بهینه منحصر به فرد و تباهیده دارد.
۲) جواب بهینه چندگانه دارد و یکی از جواب‌های بهینه تباهیده است.
۳) مسأله شعاع بهینه دارد.
۴) مسأله دو گوشه بهینه نا تباهیده دارد.

پاسخ: گزینه «۲» برای متغیر غیرپایه‌ای x_3 داریم: $Z_3 - C_3 = 0$ و طبق تست مینیمم نسبت، x_2 از پایه خارج و به گوشه بهینه بعدی می‌رویم و مسأله جواب بهینه چندگانه دارد. همچنین جواب بهینه فعلی تباهیده است ولی با توجه به انتخاب x_2 برای خروج از پایه تباهیدگی برای سایر جواب‌های بهینه از بین می‌رود.

مثال ۴۱: مسأله زیر مفروض است:

$$\begin{aligned}
\text{Max } & Z = 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\
\text{s.t. } & \\
& 3x_1 - 3x_2 + x_3 \le 6 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 18 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) مسأله جواب بهینه چندگانه دارد و یکی از گوشه‌های بهینه تباهیده است و $Z^* = 36$.
۲) مسأله جواب بهینه منحصر به فرد و تباهیده دارد.
۳) فضای موجه نامحدود و دارای گوشه تباهیده است.
۴) فضای موجه محدود و همه گوشه‌ها ناتباهیده هستند.

پاسخ: گزینه «۱» محدودیت $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 18$ باعث محدود شدن فضای موجه می‌شود. (چرا؟). بردار سمت راست $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$ مضربی از ستون ضرایب متغیر x_3، یعنی: $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ می‌باشد و مسأله دارای گوشه موجه تباهیده $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6)$ است. با توجه به محدودیت دوم داریم.

$$Z = 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2\underbrace{(3x_1 + 2x_2 + 6x_3)}_{18} \le 36 \Rightarrow Z^* = 36$$

از طرفی گوشه تباهیده $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6)$ و نقطه $(x_1 = \frac{22}{5}, x_2 = \frac{12}{5}, x_3 = 0)$ نیز جواب بهینه هستند، پس جواب بهینه چندگانه داریم.

مثال ۴۲: جدول زیر یکی از تکرارهای SP است.

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z		0		$\frac{5}{4}$		$\frac{12}{5}$
S_1		1		-1		2
x_1		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{2}$
S_3		$\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$

این مسأله دارای حالت خاص:

۱) تبهگن است. ۲) جواب بهینه چندگانه است. ۳) بدون منطقه موجه است. ۴) ۱ و ۲

پاسخ: گزینه «۴» برای متغیر غیرپایه x_2 داریم: $Z_2 - C_2 = 0$ با ورود x_2 به پایه تست مینیمم نسبت، عدد غیرصفر ۲ است که منحصر به فرد نمی‌باشد. پس مسأله جواب بهینه چندگانه دارد و در مرحله بعد یک بهینه تباهیده به دست می‌آید.

مثال ۴۳: آیا ممکن است که یک جدول سیمپلکس شرایط بهینگی را نداشته باشد، ولی گوشه بهینه را نشان دهد؟

پاسخ: بله، به جدول در مسأله SP زیر در مسأله Max توجه کنید؛

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	R.H.S
	0	-2	0	4	12
x_1	1	1	0	$+1$	3
x_3	0	1	1	3	0

این جدول بهینه نیست زیرا $Z_2 - C_2 = -2 < 0$، جدول بالا نقطه $(x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0)$ و $Z = 12$ را نشان می‌دهد. با ورود x_2 به پایه و خروج x_3 جدول بعد به صورت زیر است:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	12
	0	0	2	10	
x_1	1	0	-1	-2	3
x_2	0	1	1	3	0

جدول اخیر بهینه است و نقطه بهینه $X^*(x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0)$ و $Z^* = 12$ را نشان می‌دهد هرچند که جدول اول نیز نقطه بهینه را نشان می‌داد ولی شرایط بهینگی را نداشت.

مثال ۴۴: با توجه به جدول فوق حداقل شرایط لازم برای امکان پذیری جواب کدام است؟

۱) $c_3 \geq 0, a_1 \geq 0, b_1 \geq 0$
۲) $c_3 \geq 0, c_1 \geq 0$
۳) $b_3 \geq 0, b_1 \geq 0$
۴) $c_3 \neq 0, c_1 \neq 0, b_3 \geq 0, b_1 \geq 0$

پاسخ: گزینه «۳» برای امکان‌پذیری جواب باید مقادیر سمت راست جدول نامنفی باشند که گزینه‌های ۳و۴ این شرط را دارا هستند. اما در گزینـه۴ داریم $C_1 \neq 0$ ولی چون متغیر x_1 پایه‌ای است، باید $C_1 = 0$.

مثال ۴۵: با توجه به مسأله قبل حداقل شرایط لازم برای آنکه جواب‌های بهینه چندگانه داشته باشیم مربوط به کدام گزینه است؟

۱) $a_5 \neq 0, b_3 \geq 0, c_5 = 0$
۲) $\frac{b_1}{a_1} < \frac{3}{3}, b_1 \geq 0, c_3 = 0$
۳) $c_3 > 0, a_5 = 0, c_5 = 0, b_3 \geq 0, b_1 \geq 0$
۴) $[(a_5 > 0, c_3 \geq 0, c_5 = 0)$ یا $(c_5 \geq 0, c_3 = 0)], b_3 \geq 0, b_1 \geq 0$

پاسخ: گزینه «۴» باید جدول دارای جواب شدنی باشد، یعنی اعداد ستون سمت راست نامنفی باشند. پس: $b_1 \geq 0$ و $b_3 \geq 0$ همچنین باید حداقل یکی از متغیرهای غیرپایه دارای $Z_j - C_j = 0$ باشند. البته گزینه (۳) نیز نشان دهنده شعاع بهینه است. ولی با توجه به اینکه حداقل شرایط خواسته شده، گزینه (۴) مناسب‌تر است.

مثال ۴۶: با توجه به مسأله قبل اگر جواب فعلی تبهگن باشد و در تکرار بعدی تبهگنی از بین برود حداقل شرایط لازم در کدام گزینه وجود دارد؟

۱) $a_5 \neq 0, c_5 < c_3, b_1 \geq 0, b_3 = 0$
۲) $a_1 \leq 0, c_3 < c_5, b_3 \geq 0, b_1 = 0$
۳) $a_5 \leq 0, c_5 < c_3, b_1 \geq 0, b_3 = 0$
۴) با جدول داده شده امکان ندارد تبهگنی موقت باشد.

پاسخ: گزینه «۲» در گزینه‌های ۱ و ۳ اگر $a_5 \leq 0$ در این صورت متغیر خروجی وجود ندارد. زیرا همه مؤلفه‌های ستون متغیر ورودی منفی یا صـفر می‌شوند و مسأله جواب بهینه نامتناهی خواهد داشت.

مثال ۴۷: الگوریتم سیمپلکس، برای ماکزیمم‌یابی تابع هدف مسائل برنامه‌ریزی خطی، طوری طراحی شده است که برای مسائل غیر دژنره ....

۱) در هر مرحله نقطه حاصل شدنی باشد.
۲) در هر مرحله تابع هدف افزایش یابد.
۳) در هر مرحله تابع هدف افزایش یابد و نقطه حاصل شدنی باشد.
۴) در هر مرحله تابع هدف حداکثر ممکن افزایش یابد و نقطه حاصل شدنی باشد.

پاسخ: گزینه «۳» گزینه ۴ غلط است، زیرا با انتخاب متغیر ورودی به پایه براساس منفی‌ترین $Z_j - C_j$ (در مسأله Max) ممکن است بیشترین افـزایش در مقدار تابع هدف ایجاد نشود، همچنین $\Delta Z = -(Z_j - C_j).\theta$ (که θ مقدار حاصل ازتست مینیمم نسبت است) مقدار ΔZ به θ نیز بستگی دارد.

مثال ۴۸: جدول بهینه یک مسأله ماکزیمم‌سازی به صورت زیر است: (x_4, x_5, x_6 متغیرهای کمکی هستند)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R.H.S
z	۰	۰	۱	۳	۰	۱	۷
x_1	۱	۰	۱	۶	۰	۱−	۲
x_2	۰	۱	۰	۳−	۰	۱	۱
x_5	۰	۰	۲	۲	۱	۱−	۱

۱) اگر مدیریت تصمیم بگیرد که محصول x_3 را تولید نماید، مقدار تابع هدف چه تغییری می‌کند؟

۲) اگر مدیریت تصمیم بگیرد که محصول x_3 را تولید نماید، مقدار تولید محصولات x_1, x_2 چه تغییری می‌کند؟

۳) اگر منبع قید اول را یک واحد افزایش دهیم میزان تولید محصول x_1 و مقدار تابع هدف چه تغییری خواهد کرد؟

پاسخ: ۱) x_3 یک متغیر غیرپایه‌ای است و می‌دانیم: $\frac{\partial z}{\partial x_3} = -(Z_3 - C_3) = -(1) = -1$ با تولید ۱ واحد از x_3 مقدار تابع هدف ۱ واحد کم می‌شود.

۲) x_3 یک متغیر غیرپایه‌ای و x_1, x_2 متغیرهای پایه‌ای هستند. $\frac{\partial x_1}{\partial x_3} = -\bar{a}_{13} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_3} = 0$

با یک واحد افزایش تولید x_3 میزان تولید x_1 یک واحد کاهش می‌یابد و مقدار تولید محصول x_2 تغییر نخواهد کرد.

۳) با توجه به جدول مقادیر زیر x_4, x_5, x_6 در سطر هدف همان $C_B B^{-1}$ است، پس: $C_B B^{-1} = (3, 0, 1)$ و در نتیجه داریم: $\frac{\partial z}{\partial b_1} = y_1 = 3$ و درایه (۱و۱) ماتریس $B^{-1}, \frac{\partial x_1}{\partial b_1} = 6$ با یک واحد افزایش در منبع قید اول، مقدار تولید محصول x_1 به اندازه ۶ واحد زیاد می‌شود و مقدار تابع هدف نیز ۳ واحد افزایش می‌یابد.

مثال ۴۹: مسأله LP به فرم کلی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = CX \\ &\text{s.t} \\ &\quad Ax \le b \\ &\quad x \text{ آزاد} \end{aligned}$$

در جدول نهایی این مسأله مقدار $\frac{\partial z}{\partial x_N}$ (X_N بردار متغیرهای غیرپایه می‌باشد) برابر است با:

۱) صفر ۲) $-(Z_N - C_N)$ ۳) مقادیر شناوری (Slack) ۴) موارد ۱ و ۲

پاسخ: گزینه «۲» $\frac{\partial Z}{\partial X_N}$ یا همان ضریب سطر هدف متغیر X_N در جدول نهایی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$Z = C_B B^{-1} b - (Z_N - C_N) X_N \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial X_N} = -(Z_N - C_N)$$

مثال ۵۰: جدول بهینه یک مسأله LP که در آن سه محدودیت به شکل ≤ وجود داشته و متغیرهای X_4, X_5, X_6 متغیرهای کمکی هستند، نشان داده شده است اگر $a = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ و $b = \frac{\partial z}{\partial x_6}$ باشد، در این صورت مقادیر b, a عبارتند از:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	۱	۰	۴	۰	۱	۰	۲	۱۷
x_1	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	۰	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	۰	۰	۲	۰	۰	۱	۱	۶
x_3	۰	۰	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

۱) $a = \frac{2}{3}, b = -2$ ۲) $a = -\frac{2}{3}, b = 2$ ۳) $a = -\frac{2}{3}, b = -2$ ۴) $a = \frac{2}{3}, b = 2$

پاسخ: گزینه «۳» $a = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = -\bar{a}_{32} = -\frac{2}{3} \quad ; \quad b = \frac{\partial z}{\partial x_6} = -(z_6 - c_6) = -2$

مثال ۵۱: در مسأله برنامه ریزی خطی روبرو:

$$\min_{s.t} \; x_2 + x_3 + x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \le 5$$
$$x_1 \ge 1 \;\; x_2 \ge 2 \;\; x_3 \ge 3 \;\; x_4 \ge 0$$

چنانچه مایل به تبدیل این مسأله به فرم استاندارد باشیم، در این صورت حداقل متغیر مصنوعی مورد نیاز برابر است با:

۱) صفر ۲) یک ۳) سه ۴) چهار

پاسخ: گزینه «۱» ماتریس ضرایب x_1, x_4 ماتریس همانی است بنابراین می‌توان آنها را پایه‌ای فرض کرده و روش سیمپلکس را شروع کرد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۵۲: با چه تغییری مسأله زیر را می‌توان بدون استفاده از متغیرهای مصنوعی حل کرد؟

$$\max z = 3x_1 - 2x_2$$
$$s.t \quad 5x_1 + x_2 \ge 10$$
$$2x_1 - x_2 \ge -8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \le 0$$

۱) تحت هیچ شرایط

۲) تبدیل تابع هدف به حداکثر

۳) غیرمنفی کردن متغیرها

۴) تغییر جهت یافتن محدودیت‌ها

پاسخ: گزینه «۱» منظور سؤال استفاده از روش سیمپلکس دوگان است. گزینه (۲) به وضوح غلط است زیرا تابع هدف به خودی خود به صورت حداکثر کردن است. گزینه (۳) نیز غلط است زیرا اگر با تغییر متغیر $x_2' = -x_2$ متغیرها را غیرمنفی کنیم مسأله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2'$$
$$\text{s.t.}$$
$$5x_1 - x_2' \ge 10$$
$$2x_1 + x_2' \ge -8$$
$$x_1 \ge 0, x_2' \ge 0$$

ولی با تشکیل جدول سیمپلکس ملاحظه می شود که شرط بهینگی برقرار نمی‌باشد پس، نمی‌توان از سیمپلکس دوگان استفاده کرد.

گزینه (۴) نیز غلط است با توجه به ضرایب هزینه شرط بهینگی برقرار نیست و تغییر جهت محدودیت‌ها مشکلی را حل نمی‌کند.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۵۳: اگر در پایان مرحله اول روش دو مرحله‌ای، متغیر مصنوعی در پایه باشد:

۱) حتماً مسأله اصلی دارای جواب شدنی نیست.

۲) مسأله اصلی اگر جواب داشته باشد، حتماً یک مسأله تبهگن است.

۳) مسأله ممکن است جواب شدنی داشته باشد، ولی حتماً بی‌کران خواهد بود.

۴) مسأله اصلی ممکن است جواب شدنی داشته باشد، ولی جواب بهینه چندگانه خواهد داشت.

پاسخ: گزینه «۲» اگر در پایان فاز ۱ متغیر مصنوعی در پایه بوده ولی مقدار آن صفر باشد در این صورت مسأله اصلی شدنی است ولی گوشه‌ای که در پایان فاز ۱ به دست آمده تبهگن می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۵۴: مسأله‌ای Min سازی را به روش M بزرگ حل کرده‌ایم و به جدول زیر رسیده‌ایم:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R_1	R.H.S
Z	$-\frac{9}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{2M+3}{2}$	$-\frac{15}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_5	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

مسأله اصلی کدام حالت را داراست؟

۱) نشدنی است. ۲) جواب بهینه نامتناهی دارد. ۳) جواب بهینه متناهی دارد. ۴) جواب بهینه تباهیده است.

پاسخ: گزینه «۲» در این جدول x_4 ورودی است ولی چون $\bar{a}_4 < 0$ پس متغیر خروجی نداریم. پس مسأله $P(M)$ دارای Z^* نامتناهی است و متغیر مصنوعی R_1 غیرپایه‌ای است. بنابراین مقدار صفر دارد، لذا مسأله اصلی (مسأله P) نیز جواب بهینه نامتناهی دارد.

مثال ۵۵: مسأله‌ای Min سازی را به روش M بزرگ حل کرده‌ایم و به جدول زیر رسیده‌ایم:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R_2	R_3	R.H.S
Z	$\frac{3}{2}-2M$	$\frac{7}{3}-M$	۰	$\frac{1}{2}-M$	$-M$	$-M$	۰	۰	$2+3M$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	۰	۲
R_2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	-1	۰	۱	۰	۲
R_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	۰	-1	۰	۱	۰

مسأله اصلی کدام حالت را داراست؟

۱) نشدنی است.　۲) جواب بهینه نامتناهی دارد.　۳) جواب بهینه متناهی دارد.　۴) جواب بهینه تباهیده است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون تمام $Z_j - C_j$ ها برای متغیرهای غیرپایه منفی هستند، جدول اخیر بهینه است. ولی چون $R_2 = 2 \neq 0$ در پایه قرار دارد، پس مسأله اصلی نشدنی است.

مثال ۵۶: در پایان فاز اول به جدول زیر رسیده‌ایم:

	x_1	x_2	x_3	S_4	R_1	R_2	R_3	R.H.S
x_0	۰	۰	۰	۰	-2	-2	۰	۰
x_1	۱	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۲
x_2	۰	۱	۰	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۲
R_3	۰	۰	۰	۰	-1	-1	۱	۰
x_3	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۲

(R_i ها متغیر مصنوعی هستند) کدام گزینه صحیح است؟

۱) مسأله اصلی نشدنی است.　۲) می‌توان R_3 را از پایه خارج و S_4 را وارد پایه کرد.

۳) محدودیتی که متغیر مصنوعی R_3 به آن افزوده شده، زائد است.　۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» متغیر مصنوعی R_3 با مقدار صفر در پایه است و در سطر مربوط به R_3 متغیر غیرپایه و غیرمصنوعی (یعنی S_4) ضریب صفر دارد، پس قید متناظر با R_3 در مسأله اصلی زائد است.

مثال ۵۷: در حل یک مسأله مینیمم سازی به روش $-M$ بزرگ به جدول زیر رسیده‌ایم:

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R.H.S
z	$1+2M$	۰	$-M$	$2+M$	۰	۰	$-2-2M$	$-2+M$
R_1	۲	۰	-1	۱	۰	۱	-1	۱
x_2	-1	۱	۰	-1	۰	۰	۱	۱
S_3	۱	۰	۰	۱	۱	۰	-1	۲

اگر این مسأله را به روش دو فازی حل کنیم. جدول متناظر با جدول فوق به چه صورت است؟

(۱

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R.H.S
x_0	۱	۰	۰	۲	۰	۰	-2	-2
R_1	۲	۰	-1	۱	۰	۱	-1	۱
x_2	-1	۱	۰	-1	۰	۰	۱	۱
S_3	۱	۰	۰	۱	۱	۰	-1	۲

(۲

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R.H.S
x_0	۲	۰	-1	۱	۰	۰	-2	۱
R_1	۲	۰	-1	۱	۰	۱	-1	۱
x_2	-1	۱	۰	-1	۰	۰	۱	۱
S_3	۱	۰	۰	۱	۱	۰	-1	۲

(۳

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R.H.S
x_0	۱	۰	-1	۲	۰	۰	-2	-2
R_1	۲	۰	-1	۱	۰	۱	-1	۱
x_2	-1	۱	۰	-1	۰	۰	۱	۱
S_3	۱	۰	۰	۱	۱	۰	-1	۲

۴) ارتباط خاصی بین جداول سیمپلکس روش $-M$ بزرگ و روش دو فازی وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **راه حل اول:** در جدول داده شده در روش $M-$ بزرگ متغیر مصنوعی $R_1 = 1 \neq 0$ در پایه است و هنوز به حالت بهینگی نرسیده‌ایم پس در صورت حل به روش دو فازی در فاز ۱ قرار داریم. برای یافتن جدول متناظر در روش دو فازی فقط در سطر تابع هدف ضرایب M را قرار می‌دهیم و بقیه جدول بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر مسأله اصلی Max سازی باشد، از آنجایی که تابع هدف فاز I روش دوفازی Min سازی است، باید ضرایب M در سطر هدف در ۱- ضرب شوند و در جدول متناظر روش دوفازی قرار گیرند.

راه‌حل دوم: همانطور که در نکته ۳۰ ذکر شد ترتیب متغیرهای خروجی و ورودی در روش M بزرگ و دوفازی یکسان است. در جدول روش M بزرگ متغیر x_1 ورودی است و فقط در گزینه «۲» متغیر x_1 برای روش دوفاز نیز متغیر ورودی می‌باشد.

مثال ۵۸: اگر دو نامعادله از محدودیت‌های یک مسأله برنامه‌ریزی خطی متناقص (ناسازگار) با یکدیگر باشند:

۱) نمی‌توان از روش سیمپلکس اولیه برای حل آن استفاده کرد.

۲) در جواب نهایی حداقل یک متغیر مصنوعی مقدار مثبت خواهد داشت.

۳) نمی‌توان از روش سیمپلکس مزدوج برای حل آن استفاده کرد.

۴) نمی‌توان از روش سیمپلکس اولیه ـ مزدوج برای حل آن استفاده کرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مسأله نشدنی است. پس در جواب نهایی روش M ـ بزرگ حداقل یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت وجود دارد.

مثال ۵۹: در صورتی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، جواب غیرقابل قبول دارد که ....

۱) در انتهای فاز I سیمپلکس یک متغیر مصنوعی جزء متغیرهای پایه باشد.

۲) در انتهای فاز I سیمپلکس یک جواب منحط (Degenerate) داشته باشیم.

۳) در انتهای فاز I سیمپلکس یک متغیر مصنوعی جزء متغیرهای پایه باشد و جواب نیز منحط (Degenerate) باشد.

۴) در انتهای فاز I سیمپلکس یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت جزء متغیرهای پایه باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در انتهای فاز I اگر متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه باشد، مسأله جواب شدنی ندارد.

مثال ۶۰: در روش دو فازی (فاز $I-$ فاز II)، مقدار تابع هدف بهینهٔ فاز I:

۱) حتماً صفر می‌شود. ۲) عدد منفی نخواهد شد. ۳) ممکن است $-\infty$ شود. ۴) ممکن است $+\infty$ شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در انتهای فاز I نمی‌توانیم جواب بهینهٔ منفی و یا بی‌کران داشته باشیم.

مثال ۶۱: در حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با روش سیمپلکس دو مرحله‌ای، کدام یک از حالات زیر صحیح می‌باشند؟

۱) در مرحله اول سیمپلکس ممکن است با حل نامحدود مواجه گردیم و مرحله دوم نشدنی باشد.

۲) در مرحله اول سیمپلکس ممکن است با حل نامحدود مواجه گردیم و مرحله دوم به جواب یگانه منجر شود.

۳) در مرحله اول سیمپلکس ممکن است با حل نامحدود مواجه گردیم ولی مرحله دوم دارای حل نامحدود باشد.

۴) در مرحله اول سیمپلکس ممکن است با حل نامحدود مواجه گردیم و مرحله دوم نیز دارای حل نامحدود باشد.

☑ **پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.** در مرحله اول از روش دوفازی، مقدار بهینه تابع هدف هیچگاه بی‌کران یا منفی نمی‌شود. بنابراین هر ۴ گزینه غلط می‌باشند.

مثال ۶۲: در صورتی برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی از روش سیمپلکس دو فازی استفاده می‌شود که:

۱) مسأله پیچیده یا خیلی بزرگ باشد.

۲) تابع هدف به صورت Max باشد.

۳) تابع هدف به صورت Min باشد.

۴) هیچ جواب اساسی موجه (Basic Feasible Solution) اولیه در دسترس نباشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر محدودیت‌ها پس از استاندارد کردن مسأله شامل پایه همانی نباشند از متغیرهای مصنوعی و روش دوفاز یا M بزرگ برای یافتن جواب پایه موجه اولیه، کمک می‌گیریم.

مثال ۶۳: فضای جواب مسأله زیر مفروض است:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$0 \le x_1 \le 4$$
$$-1 \le x_2 \le 4$$

جوابی که در آن $x_1 = 0$ و $x_2 = -1$ و $x_3 = 6$ و $x_4 = 6$ چگونه است؟

۱) پایه‌ای موجه ۲) پایه‌ای غیرموجه ۳) غیرپایه‌ای موجه ۴) غیرپایه‌ای و غیرموجه

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ملاحظه می‌شود که x_1 در کران پایین خود و x_2 نیز در کران پایین خود است. پس x_1 و x_2 متغیرهای غیرپایه‌ای هستند و متغیرهای x_3 و x_4 متغیرهای پایه‌ای هستند، یعنی $B=[a_3, a_4]$ و چون $|B|=1\neq 0$ پس این جواب پایه‌ای است و در همه محدودیت‌ها نیز صدق می‌کند، پس جواب پایه‌ای موجه است.

مثال ۶۴: در یک برنامه‌ریزی خطی که همه متغیرها دارای مقدار حد فوقانی (کران‌دار) هستند :

۱) فقط در صورتی از روش سیمپلکس مخصوص حد فوقانی استفاده می‌شود که متغیرهای مصنوعی نیاز نباشد.

۲) از روش سیمپلکس مخصوص حد فوقانی استفاده می‌شود زیرا نسبت به روش سیمپلکس معمولی دارای محدودیت‌های کمتری است.

۳) از روش سیمپلکس مخصوص حد فوقانی استفاده می‌شود زیرا نسبت به روش سیمپلکس معمولی دارای متغیرهای کمتری است.

۴) فقط در صورتی از روش سیمپلکس مخصوص حد فوقانی استفاده می‌شود که مقدار متغیرهای آن نسبت به محدودیت‌ها زیاد نباشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» استفاده از روش سیمپلکس متغیرهای کران‌دار موجب کمتر شدن محدودیت‌های مسأله می‌شود.

مثال ۶۵: در مقایسه با روش سیمپلکس معمولی کدام گزینه در مورد روش حل مسأله برنامه‌ریزی خطی با سیمپلکس تجدید نظر شده (Revised simplex) درست است؟

۱) محاسبه پاسخ دوگان مسأله در روش سیمپلکس تجدید نظر شده مشکل‌تر است.

۲) جواب بهینه مسأله در تعداد کمتری مرحله (iteration) به دست می‌آید.

۳) برای پیدا کردن پایه شدنی اولیه، نیازی به روش‌های M بزرگ یا دو فازی نیست.

۴) در صورت حل مسائل به روش سیمپلکس تجدید نظر شده با کامپیوتر به حافظه کمتری نیاز می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون در روش سیمپلکس تجدید نظر شده فقط محاسبات روی سطر متغیر خروجی و ستون متغیر ورودی انجام می‌شود.

مثال ۶۶: کدام گزینه در مورد الگوریتم تجدیدنظر شده سیمپلکس (Revised Simplex) صادق است؟

۱) مؤلفه‌های بردار دست راست در هر مرحله از الگوریتم تغییر نمی‌کند.

۲) مؤلفه‌های بردار دست راست در هر مرحله از الگوریتم تغییر می‌کند.

۳) مؤلفه‌های بردار دست راست در مراحل الگوریتم می‌تواند عددی منفی باشد.

۴) تغییرات بردار دست راست دقیقاً معادل تغییرات بردار دست راست در الگوریتم سیمپلکس است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تغییرات ستون R.H.S در روش سیمپلکس تجدیدنظر شده، معادل تغییرات ستون R.H.S روش سیمپلکس است.

آزمون فصل سوم

۱ـ کدام گزینه در مورد LP غلط است؟

۱) اگر فضای شدنی یک LP نامحدود باشد، مقدار بهینه تابع هدف می‌تواند محدود باشد.

۲) شرط لازم برای اینکه یک LP جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آن است که تابع هدف موازی یکی از محدودیت‌ها باشد.

۳) اگر تابع هدف موازی یک محدودیت فعال باشد، حتماً جواب بهینه چندگانه داریم.

۴) گزینه «۲» و «۳»

۲ـ کدام گزینه در مورد LP صحیح است؟

۱) اگر تابع هدف موازی یک محدودیت فعال و غیر زائد باشد، حتماً جواب بهینه چندگانه داریم.

۲) یک LP ممکن است فقط دو نقطه بهینه داشته باشد.

۳) اگر فضای شدنی یک LP محدود باشد، در این صورت حتماً LP دارای گوشه بهینه است.

۴) هیچ‌کدام

۳ـ جدول نهایی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی مینیمم‌سازی به صورت زیر است:

پایه	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	−۳	۰	۰	۰	−۲	
s_1	۲	۰	−۴	۱	۱	۰
x_2	۱	۱	۰	۰	۴	۲

کدام گزینه صحیح است؟

۱) مسأله فقط یک نقطه بهینه دارد که تباهیده نیز می‌باشد و فضای شدنی بی‌کران است.

۲) مسأله بی‌نهایت نقطه بهینه دارد که تنها یکی از آنها نقطه گوشه‌ای و تباهیده است و فضای شدنی بی‌کران است.

۳) مسأله بی‌نهایت نقطه بهینه دارد و بیشتر از یک گوشه‌ی بهینه دارد.

۴) فضای شدنی و مقدار بهینه تابع هدف هر دو بی‌کران هستند.

۴ـ یکی از جداول سیمپلکس یک مسأله مینیمم سازی به صورت زیر است:

پایه	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	−۳	۰	۰	۰	−۲	
s_1	۲	۰	۲	۱	۱	۰
x_2	۱	۱	۳	۰	۴	۲

کدام گزینه در مورد این مسأله صحیح است؟

۱) این جدول، جدول بهینه مسأله است.

۲) مسأله دارای تبهگنی دائم است.

۳) مسأله جواب بهینه چندگانه دارد.

۴) گزینه ۱ و ۲

۵ـ جدول زیر مربوط به یکی از مراحل یک مسأله ماکزیمم‌سازی است:

پایه	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
z	−۳	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	۳۰
s_1	۱	۰	۱	۰	۰	۴
x_2	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۶
s_3	۳	۰	۰	−۱	۱	۶

با ورود x_1 به پایه به چند گوشه مجاور می‌توان دست یافت؟

۱) یک گوشه شدنی و یک گوشه نشدنی

۲) سه گوشه شدنی

۳) دو گوشه شدنی

۴) دو گوشه شدنی و یک گوشه نشدنی

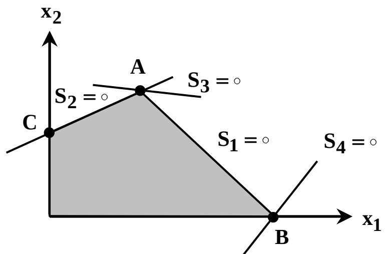
۶ـ در تست ۵ حاصل $\frac{\partial x_2}{\partial b_2}$ و $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\partial z}{\partial x_1}=-3\ ,\ \frac{\partial x_2}{\partial b_2}=\frac{1}{2}$
۲) $\frac{\partial z}{\partial x_1}=-3\ ,\ \frac{\partial x_2}{\partial b_2}=-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\partial z}{\partial x_1}=-3\ ,\ \frac{\partial x_2}{\partial b_2}=-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{\partial z}{\partial x_1}=3\ ,\ \frac{\partial x_2}{\partial b_2}=\frac{1}{2}$

۷ـ در تست ۵ کدام دسته از متغیرها نمی‌توانند به طور همزمان پایه‌ای باشند؟

۱) x_1, x_2, s_3
۲) s_1, x_2, x_1
۳) s_1, s_2, s_3
۴) s_1, x_1, s_3

۸ـ فضای شدنی مقابل مفروض است:



در گوشه A کدام دسته از متغیرها می‌توانند بطور همزمان پایه‌ای باشند؟

۱) s_1, s_2, s_3, s_4
۲) x_1, s_1, s_2, s_3
۳) x_1, x_2, s_4, s_3
۴) x_2, s_1, s_2, s_3

۹ـ در تست ۸ اگر در گوشه B قرار داشته باشیم و متغیر s_4 از پایه خارج شود در این صورت جواب در مرحله بعد ....

۱) همچنان تباهیده است.
۲) غیرتباهیده است.
۳) به گوشه A می‌رویم.
۴) ممکن است تباهیده یا غیرتباهیده باشد.

۱۰ـ در تست ۸ اگر در گوشه A قرار داشته باشیم و متغیر x_1 از پایه خارج شود در این صورت جواب مرحله بعد ....

۱) همچنان تباهیده است.
۲) از گوشه A خارج نمی‌شویم.
۳) ممکن است به گوشه B حرکت کنیم.
۴) به گوشه C حرکت می‌کنیم.

۱۱ـ اگر در تست ۸ در گوشه B قرار داشته باشیم و در جدول سیمپلکس نظیر متغیر x_1 جهت خروج از پایه انتخاب شود و در این جدول متغیرهای پایه‌ای (s_1, s_3, s_2, x_1) باشند، متغیر ورودی به پایه کدام است؟

۱) s_4
۲) x_2
۳) x_2 یا s_4
۴) هیچ‌کدام

۱۲ـ اگر x_0 تابع هدف فاز ۱ یک مسأله باشد، در این صورت در پایان فاز ۱ مقدار x_0 کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲−
۲) $-\infty$
۳) ۴
۴) گزینه ۱ و ۲

۱۳ـ مسأله $\text{Min}\ -x_1-3x_3$ مفروض است. مقدار بهینه تابع هدف کدام است؟

$$\text{Min } Z=-x_1-3x_3$$
$$\text{s.t.}$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\ge 1\\ 3x_1+4x_2+x_3\ge 2\\ x_1, x_2, x_3\ge 0\end{cases}$$

۱) ۴-
۲) ۴
۳) $-\infty$
۴) متناهی است.

۱۴ـ در روش سیمپلکس معمولی اگر عنصر لولا منفی باشد در این صورت ....

۱) جواب مرحله بعد حتماً نشدنی است.
۲) اگر جواب مرحله بعد شدنی باشد، حتماً تباهیده است.
۳) جواب مرحله بعد ممکن است شدنی باشد و ناتباهیده باشد.
۴) جواب مرحله بعد، حتماً شدنی است.

۱۵ـ جدول سیمپلکس زیر مفروض است:

پایه	x_1	x_2	x_3	R_1	RHS
z	۰	۰	۳	۰	z
x_1	۱	۰	۳	۰	۲
x_2	۰	۱	۱	۰	۴
R_1	۰	۰	۲−	۱	۰

جدول بالا مربوط به فاز ۲ یک مسأله مینیمم سازی است. اگر x_3 متغیر وروی باشد، متغیر خروجی کدام است؟

۱) x_1
۲) x_2
۳) R_1
۴) x_1 یا x_2

۱۶ـ جدول زیر مربوط به یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف $\text{Max } Z = ۹x_۱ + ۶x_۲$ می‌باشد. در این صورت جواب این مسأله .... است.

z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	RHS
	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۱۰
	۰	-۳	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۱۲

۱) بهینه

۲) چندگانه

۳) نامحدود

۴) تبهگن

۱۷ـ جدول سیمپلکس زیر مفروض است:

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	RHS
z	۰	۱۴	۰	۷	-۱	۰	
$x_۳$	۰	۳	۱	۶	۳	۰	۰
$x_۱$	۱	۱	۰	۲	۰	۰	۰
$x_۶$	۰	۲	۰	۴	-۲	۱	۲

تابع هدف به صورت مینیمم سازی است و متغیرهای $x_۴$ و $x_۵$ و $x_۶$ متغیرهای پایه‌ای اولین جدول سیمپلکس بوده‌اند. با استفاده از قاعده بلاند متغیر ورودی و خروجی کدامند؟

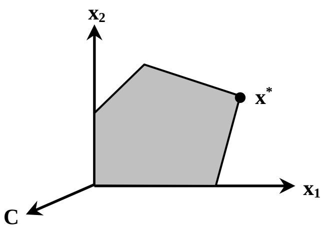
۱) $x_۲$ ورودی و $x_۱$ خروجی است.
۲) $x_۴$ ورودی و $x_۳$ خروجی است.

۳) $x_۲$ ورودی و $x_۳$ خروجی است.
۴) $x_۲$ ورودی و $x_۶$ خروجی است.

۱۸ـ در تست ۱۷ با استفاده از قاعده لکزیکوگراف متغیر ورودی و خروجی کدامند؟

۱) $x_۲$ ورودی و $x_۱$ خروجی
۲) $x_۲$ ورودی و $x_۳$ خروجی
۳) $x_۴$ ورودی و $x_۳$ خروجی
۴) $x_۴$ ورودی و $x_۱$ خروجی

۱۹ـ نمایش هندسی یک Lp به صورت مقابل است؟



۱) تابع هدف Min است و $z^* > ۰$.

۲) تابع هدف Max است و $z^* > ۰$.

۳) تابع هدف Min است و $z^* < ۰$.

۴) تابع هدف Max است و $z^* < ۰$.

۲۰ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر تعداد صفرهای موجود در سطر تابع هدف جدول بهینه بیشتر از متغیرهای پایه‌ای باشد، جواب بهینه چندگانه داریم.

۲) اگر تعداد صفرهای موجود در سطر تابع هدف جدول بهینه بیشتر از متغیرهای پایه‌ای باشد و جدول تباهیده باشد، جواب بهینه چندگانه نداریم.

۳) اگر تعداد صفرهای موجود در سطر تابع هدف جدول بهینه بیشتر از متغیرهای پایه‌ای باشد و جدول تباهیده باشد، ممکن است جواب بهینه چندگانه داشته باشیم.

۴) هیچ‌کدام

فصل چهارم

«دوگان و تحلیل حساسیت»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال ۱: مسأله $\underset{s.t}{\text{Max}}\, Z = ۲x_۱ - x_۲ + x_۳$ مفروض است. شکل ماتریسی مسأله دوگان و مسأله اولیه را بنویسید.

$$x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \le ۴ \;:\; y_۱$$
$$-۲x_۱ + x_۲ - x_۳ \le ۱ \;:\; y_۲$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$$

☑ **پاسخ:** مسأله دوگان به صورت زیر است:

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\, W = ۴y_۱ + y_۲$$
$$y_۱ - ۲y_۲ \ge ۲$$
$$۲y_۱ + y_۲ \ge -۱$$
$$۳y_۱ - y_۲ \ge ۱$$
$$y_۱, y_۲ \ge ۰$$

همچنین نمایش ماتریسی مسأله دوگان به صورت زیر می‌باشد:

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\, W = (y_۱, y_۲)\begin{pmatrix} ۴ \\ ۱ \end{pmatrix}$$
$$(y_۱, y_۲)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ & -۱ \end{pmatrix} \ge (۲, -۱, ۱)$$
$$(y_۱, y_۲) \ge ۰$$

برای نمایش ماتریسی مسأله اولیه خواهیم داشت:

$$\underset{s.t.}{\text{Max}}\, Z = (۲, -۱, ۱)\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} ۴ \\ ۱ \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} \ge ۰$$

به طور خلاصه داریم:

$$P: \underset{s.t.}{\text{Max}}\, Z = C_{۱\times n} X_{n\times ۱} \quad ; \quad D: \underset{s.t.}{\text{Min}}\, W = y_{۱\times m} b_{m\times ۱}$$
$$A_{m\times n} X_{n\times ۱} \le b_{m\times ۱} \qquad\qquad y_{۱\times m} A_{m\times n} \ge C_{۱\times n}$$
$$X \ge ۰ \qquad\qquad y \ge ۰$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۲: دوگان مسأله $P: \underset{s.t}{\text{Min}}\; Z = cx$ عبارت است از: $D: \underset{s.t}{\text{Max}}\; W = yb$.

$Ax=b$ ، $x\ge ۰$

$yA \le C$ ، y نامقید

مثال ۳: مسأله $\underset{\text{s.t.}}{\text{Min } Z = y}$ $y - Cx = 0$ ، $Ax = b$ ، $x \geq 0$ مفروض است که در آن $C_{1\times n}$ و $x_{n\times 1}$ و $A_{m\times n}$ و $b_{m\times 1}$ می‌باشد و y یک متغیر انفرادی است. دوگان این مسأله را بنویسید.

پاسخ: متغیر دوگان u را متناظر محدودیت $y - cx = 0$ مسأله اولیه و بردار $V_{1\times m}$، از متغیرهای دوگان را متناظر بـا محـدودیت‌هـای $Ax = b$، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{lcl} \text{Min } Z = y + 0x & & \text{Max } W = 0u + vb \\ \text{s.t} & & \text{s.t} \\ y - Cx = 0 \ : u & \xrightarrow{\text{دوگان}} & u(1) + V(0) = 1 \\ 0y + Ax = b \ : v & & u(-C) + VA \leq 0 \\ y : \text{آزاد} \ ; \quad x \geq 0 & & u \ , \ v : \text{آزاد} \end{array}$$

واضح است که در مسأله دوگان مقدار متغیر u همواره برابر ۱ است.

مثال ۴: مدل مقابل داده شده است:

$$\begin{array}{l} \text{Min} - Z = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t} \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 1 \\ \quad 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ \text{آزاد} \ x_2 \ ; \ x_3 \leq 0 \end{array}$$

برای همزاد این مدل کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\text{Min } w = y_1 + y_2 + y_3 , y_3 \leq 0$

۲) $\text{Max } w = y_1 + y_2 + y_3 , y_3 \geq 0$

۳) $\text{Min } w = -y_1 - y_2 - y_3 , y_3 \leq 0$

۴) $\text{Max } w = -y_1 - y_2 - y_3 , y_3 = 0$

پاسخ: گزینه «۳» تابع هدف دوال عبارت است از: $\text{Max} - w = y_1 + y_2 + y_3$ و $y_3 \leq 0$ در نتیجه خواهیم داشت:

$\text{Min} w = -y_1 - y_2 - y_3$ و $y_3 \leq 0$

مثال ۵: مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو مفروض است:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } z = x_1 + 2x_2 + x_3 & \\ \text{s.t} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & |x_1| \leq 4 \\ & x_2 , x_3 \geq 0 \end{array}$$

دوگان این مسأله کدام است؟

۱)
$$\begin{array}{l} \text{Max } u + 4v_1 \\ \text{s.t.} \\ \quad u \leq 2 \\ \quad v_1 \leq 1 \\ u \ \text{آزاد و} \ v_1 \geq 0 \end{array}$$

۲)
$$\begin{array}{l} \text{Max } u + 4v_1 - 4v_2 \\ \text{s.t.} \\ \quad u + v_1 + v_2 \leq 1 \\ \quad u \leq 2 \\ \quad u \ \text{آزاد و} \ v_1 , v_2 \geq 0 \end{array}$$

۳)
$$\begin{array}{l} \text{Max } u + 4v_1 - 4v_2 \\ \text{s.t.} \\ \quad u + v_1 + v_2 = 1 \\ \quad u \leq 2 \\ \quad u \leq 1 \\ v_2 \geq 0 \ , \ v_1 \leq 0 \ \text{آزاد و} \ u \end{array}$$

۴)
$$\begin{array}{l} \text{Max } u + 4v_1 + 4v_2 \\ \text{s.t.} \\ \quad u + v_1 + v_2 = 1 \\ \quad u \leq 2 \\ v_2 \leq 0 \ , \ v_1 \geq 0 \ \text{آزاد و} \ u \end{array}$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{array}{llcll} \text{Min } z = x_1 + 2x_2 + x_3 & & & \text{Max } w = u + 4v_1 - 4v_2 & \\ \text{s.t} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 & & \text{s.t} & u + v_1 + v_2 = 1 \\ & x_1 \leq 4 & \xrightarrow{\text{دوگان}} & & u \leq 2 \\ & x_1 \geq -4 & & & u \leq 1 \\ & x_2 , x_3 \geq 0 , x_1 \ \text{آزاد} & & & v_2 \geq 0 \ , \ v_1 \leq 0 \ \text{و آزاد} \ u \end{array}$$

مثال ۶: مسأله همزاد (Dual) یا ثانویه متناظر با مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر کدام است؟

$$\begin{aligned}&\text{Min } x_0\\&\text{s.t}\\&\quad Ax - x_0 e \le b\\&\quad x, x_0 \ge 0\end{aligned}$$

e برداری $m\times 1$ است که تمام درایه‌های آن برابر یک است. x_0 یک متغیر اسکالر است. ماتریس A یک ماتریس $m\times n$ است.

۱) $\text{Min } b^T y$ s.t. $A^T y - e^T y \le 1,\ y \le 0$

۲) $\text{Min } b^T y$ s.t. $A^T y \ge 0$, $e^T y \le 1, y \ge 0$

۳) $\text{Min } b^T y$ s.t. $A^T y - e^T y \ge 1,\ y \ge 0$

۴) $\text{Max } b^T y$ s.t. $A^T y \ge 0,\ e^T y \ge 1,\ y \le 0$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{aligned}&\text{Min } X_0\\&\text{s.t.}\\&\quad AX - x_0 e \le b\\&\quad x, x_0 \ge 0\end{aligned} \xrightarrow{\text{دوگان}} \begin{aligned}&\text{Max } yb \qquad\qquad \to \text{Min}(-y)b\\&\text{s.t.}\\&\begin{cases} yA \le 0\\ y(-e) \le 1\\ y \le 0\end{cases} \to \begin{cases}(-y)A \ge 0\\ (-y)e \le 1\\ -y \ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

مسأله دوگان را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\text{Min } b^T(-y^T)\\&\text{S.t.}\\&\quad A^T(-y^T) \ge 0\\&\quad e^T(-y^T) \le 1\\&\quad -y^T \ge 0\end{aligned} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر } -y^T = y'} \begin{aligned}&\text{Min } b^T y'\\&\text{S.t.}\\&\begin{cases}A^T y' \ge 0\\ e^T y' \le 1\\ y' \ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

مثال ۷: جواب ثانویه (dual) مسأله زیر چه حالت خاصی از سیمپلکس خواهد بود؟

$$\begin{aligned}&\text{Min } Z = 4x_1 - 7x_2 + 9x_3\\&\text{s.t}\\&\quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 4\\&\quad x_1, x_2 \ge 0 \quad , \quad x_3 : \text{آزاد}\end{aligned}$$

۱) بهینه چندگانه(جواب‌های متعدد)

۳) تباهیده دائم

۲) تباهیده موقت

۴) بدون جواب بهینه

پاسخ: گزینه «۴» **راه‌حل اول:** مسأله ثانویه به صورت مقابل است :

$$\begin{aligned}&\text{Max } W = 4y_1\\&\text{s.t.}\end{aligned}$$

$$y_1 \le 4\ ;\ 2y_1 \le -7\ ;\ 4y_1 = 9\ ;\ y_1 \ge 0$$

فضای شدنی مسأله ثانویه تهی است، پس فاقد جواب بهینه می‌باشد.

راه حل دوم: با مشاهده مسأله اولیه مشخص است که با هر مقدار افزایش متغیر x_2 مقدار تابع هدف بهبود یافته و محدودیت‌ها نیز برقرار می‌مانند، پس جواب مسأله اولیه نامتناهی و مسأله دوگان نشدنی می‌باشد.

مثال ۸: یک مدل برنامه‌ریزی خطی و همزاد آن را در نظر بگیرید آنگاه ....

۱) هر دو مسأله می‌توانند غیرممکن باشند.

۲) هر دو مسأله می‌توانند جواب بهینه نامحدود داشته باشند.

۳) اگر یکی نامحدود باشد آنگاه دیگری نیز جواب بهینه نامحدود دارد.

۴) اگر یکی جواب بهینه محدود داشته باشد، آنگاه دیگری جواب بهینه نامحدود دارد.

پاسخ: گزینه «۱»

مسأله ثانویه (اولیه) نشدنی است $\Rightarrow$ مسأله اولیه (ثانویه) جواب بهینه بی‌کران دارد.

مسأله ثانویه (اولیه) جواب بهینه بی‌کران دارد و یا نشدنی است $\Rightarrow$ مسأله اولیه (ثانویه) نشدنی است.

پس هر دو مسأله اولیه و ثانویه می‌توانند نشدنی باشند.

مثال ۹: اگر فضای شدنی مسأله P تهی باشد کدام گزینه درست است؟ (D مسأله‌ی دوگان P است)

۱) فضای شدنی مسأله D حتماً محدود است.
۲) فضای شدنی مسأله D حتماً بی‌کران است.
۳) فضای شدنی مسأله D حتماً تهی است.
۴) فضای شدنی مسأله D ممکن است تهی باشد.

پاسخ: گزینه «۴» D نشدنی یا بی‌کران است $\Leftarrow$ P نشدنی.

مثال ۱۰: مسأله P را به شرح روبرو در نظر بگیرید:

$$(P)\ \ \text{Max } z = x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 \le -1,\quad -x_2 \le 1,\quad x_1, x_2 \ge 0$$

کدام عبارت در مورد مسأله (p) و مسأله همزاد آن (D) درست است؟

۱) P غیرموجه و D نامحدود است.
۲) D موجه و P غیرموجه است.
۳) هم P و هم D موجه است.
۴) هم P و هم D غیرموجه (infeasible) هستند.

پاسخ: گزینه «۴» دوگان مسأله P به صورت مقابل است:

$$D:\ \text{Min } W = -y_1 + y_2 \quad \text{s.t.} \quad y_1 \ge 0,\quad -y_2 \ge 1,\quad y_1, y_2 \ge 0$$

قیود مسأله p ناسازگارند، پس مسأله P غیرموجه است و قیود مسأله D نیز ناسازگارند، پس مسأله D نیز غیرموجه است.

مثال ۱۱: اگر یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، دارای منطقه موجه نامحدود باشد، مسأله ثانویه آن:

۱) ممکن است منطقه موجه نامحدود داشته باشد.
۲) بدون منطقه موجه است.
۳) دارای منطقه موجه محدود است.
۴) همه موارد

پاسخ: گزینه «۴» توجه کنید که منطقه موجه مسأله اولیه نامحدود است و مقدار بهینه تابع هدف مسأله اولیه می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. اگر منطقه موجه مسأله اولیه نامحدود و مقدار بهینه تابع هدف آن متناهی باشد، در این صورت منطقه موجه مسأله ثانویه می‌تواند محدود یا نامحدود باشد، ولی مقدار بهینه تابع هدف دوگان حتماً متناهی است. اگر منطقه موجه مسأله اولیه نامحدود و مقدار بهینه تابع هدف آن نامتناهی باشد، در این صورت مسأله دوگان نشدنی(بدون منطقه موجه) است. در این مسأله در مورد مقدار بهینه تابع هدف مسأله اولیه اطلاعی نداریم، پس با توجه به نامحدود بودن منطقه موجه مسأله اولیه، بسته به مقدار بهینه تابع هدف آن منطقه موجه دوگان می‌تواند محدود یا نامحدود یا تهی باشد.

مثال ۱۲: مسأله برنامه‌ریزی خطی P و دوگان آن D داده شده‌اند. اگر مسأله P جواب شدنی نداشته باشد آنگاه ....

۱) فضای شدنی مسأله D بی‌کران است.
۲) جواب مسأله D بی کران (نامحدود) است.
۳) ممکن است مسأله D هم جواب شدنی نداشته باشد.
۴) مسأله D جواب شدنی دارد ولیکن لزوماً بی کران نیست.

پاسخ: گزینه «۳» D نشدنی یا بی‌کران $\Leftarrow$ P نشدنی

مثال ۱۳: یک مسأله اولیه و دوگان نظیر آن مفروضند. نقطه $x(x_1 = 5, x_2 = 5)$ یک نقطه موجه مسأله اولیه با تابع هدف $\text{Max } Z = 6x_1 + 8x_2$ است و نقطه $y(y_1 = 0/2, y_2 = 0/8)$ یک نقطه موجه مسأله ثانویه با تابع هدف $\text{Min } W = 300y_1 + 110y_2$ است. مقدار Z^* چگونه است؟

۱) بیشتر از ۱۴۸ است.
۲) بیشتر از ۷۰ است.
۳) بین ۷۰ تا ۱۴۸ است.
۴) بین ۱۰۰ تا ۱۴۸ است.

پاسخ: گزینه «۳» با قرار دادن نقطه $x(5,5)$ در تابع هدف مسأله اولیه داریم:

$$Z = 6(5) + 8(5) = 70$$

بنابراین طبق نتیجه ۱ از قضیه ضعیف دوگان، $70 \le W^*$ می‌باشد.

با قرار دادن نقطه $y(0/2, 0/8)$ در تابع هدف مسأله ثانویه داریم:

$$W = 300(0/2) + 110(0/8) = 148$$

بنابراین طبق نتیجه ۲ از قضیه ضعیف دوگان، $Z^* \le 148$ است.

از طرفی هر دو مسأله اولیه و دوگان شدنی هستند و طبق نتیجه ۸ داریم: $Z^* = W^*$ بنابراین: $70 \le Z^* = W^* \le 148$.

■ مسأله زیر را مسأله Q می‌نامیم. در این مسأله k,h,g,c_5,c_4 اعداد ثابت هستند.

$$\text{مسأله Q}\quad \left\{\begin{aligned} &\max\ Z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5\\ &\text{s.t}\\ &x_1 - x_2 + x_3 + hx_5 = k\\ &x_1 + x_2 - x_3 - gx_4 + hx_5 = 0\\ &-x_1 + x_2 + x_3 + gx_4 = k\\ &x_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,\dots,5 \end{aligned}\right.$$

برای این مسأله پایه(basic) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ که متشکل از سه بردار اول محدودیت‌های مسأله است را در نظر بگیرید. معکوس (Inverse) این پایه $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ می‌باشد. به هریک از سه سؤال بعدی مستقل از دیگر سؤال‌ها پاسخ دهید:

راهنمایی: ابتدا جدول سیمپلکس مسأله Q برای پایه B را تهیه کنید.

مثال ۱۴: جدول سیمپلکس مسأله Q برای پایه B را در نظر بگیرید و فرض کنید $h>0, k>0$ می‌باشند. اگر مطابق دستورالعمل سیمپلکس x_5 متغیر پایه شود، برای جواب پایه قابل قبول جدید مقدار تابع هدف z کدام است؟

۱) $k(5+\frac{3c_5}{h})$ ۲) $k(2/75+\frac{0/5c_5}{h})$ ۳) $k(0/5+\frac{2c_5}{h})$ ۴) $k(-4+\frac{2c_5}{h})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\bar{a}_5 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix}\begin{matrix} = \bar{a}_{15} \\ = \bar{a}_{25} \\ = \bar{a}_{35} \end{matrix} \quad ; \quad \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} \\ k \end{pmatrix}\begin{matrix} = \bar{b}_1 \\ = \bar{b}_2 \\ = \bar{b}_3 \end{matrix}$$

اگر x_5 متغیر ورودی به پایه باشد، برای تعیین متغیر خروجی از آزمون مینیمم نسبت استفاده می‌کنیم.

$$\theta = \text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i5}}\} = \text{Min}\left\{\frac{\frac{k}{2}}{h}, \frac{\frac{k}{2}}{\frac{h}{2}}, \frac{k}{\frac{h}{2}}\right\} = \frac{k}{2h} \qquad (\text{زیرا } k,h>0)$$

یعنی متغیر x_1 از پایه خارج می‌شود. همچنین مقدار متغیر x_5 در مرحله بعد $x_5 = \frac{k}{2h}$ خواهد بود.

$$Z_5 - C_5 = C_BB^{-1}a_5 - C_5 = (2,2,3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} - C_5 = (2,2,3)\begin{pmatrix} h \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} - C_5 = \frac{9}{2}h - C_5$$

همچنین مقدار تابع هدف در این مرحله عبارت است از:

$$Z = C_BB^{-1}b = (2,2,3)\begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} \\ k \end{pmatrix} = 5k$$

برای محاسبه مقدار تابع هدف در مرحله بعد داریم:

$$Z_{new} = Z_{old} - (Z_5 - C_5).x_5 = 5k - (\frac{9}{2}h - C_5).\frac{k}{2h} = k(2/75 + \frac{0/5C_5}{h})$$

مثال ۱۵: اگر در یک جواب (solution) برای مسأله Q مقدار $x_4 = 2, x_5 = 0$ باشد، آنگاه مقدار z در ازای این جواب برابر است با :

۱) $k + 2j - 2c_4$ ۲) $5k + 2c_4$ ۳) $5k - g + 2c_4$ ۴) $2c_4$

پاسخ: گزینه «۳» x_4, x_5 متغیرهای غیرپایه‌ای هستند و می‌توان تابع هدف را به صورت زیر نوشت:

$$Z = C_B B^{-1} b - (Z_4 - C_4)x_4 - (Z_5 - C_5)x_5$$

همچنین می‌دانیم که : $x_5 = 0, x_4 = 2, C_B B^{-1} b = 5k$ پس خواهیم داشت: $Z = 5K - 2(Z_4 - C_4)$. اکنون $Z_4 - C_4$ را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_4 - C_4 = C_B B^{-1} a_4 - C_4 = (2,2,3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ g \end{pmatrix} - C_4 \Rightarrow Z_4 - C_4 = \frac{1}{2}g - C_4$$

بنابراین خواهیم داشت: $z = 5k - 2(\frac{1}{2}g - C_4) = 5k - g + 2C_4$.

مثال ۱۶: مسأله مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 20 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 \ge 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \;;\; x_3 : \text{آزاد} \end{aligned}$$

کدام گزینه در مورد مسأله دوگان درست است؟

۱) بهینه نامحدود دارد. ۲) حتماً شدنی است. ۳) حتماً نشدنی است. ۴) بهینه محدود دارد.

پاسخ: گزینه «۳» در مسأله اولیه با فرض $x_1 = x_2 = 0$ و $x_3 \to -\infty$ محدودیت‌ها برقرارند و $Z^* = +\infty$ یعنی مسأله اولیه جواب بهینه نامحدود دارد، پس مسأله دوگان نشدنی است.

مثال ۱۷: مسأله مقابل مفروض است $z_1 = \{\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;;\; x_j \ge 0\}$ که در آن c_j, b_i, a_{ij} اعداد صحیح هستند. y_i^* جواب بهینه دوگان این مسأله است. حال فرض کنید که $z_2 = \{\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + k_i \;;\; x_j \ge 0\}$ چنانچه جواب مسأله اخیر موجه باشد، کدام عبارت صحیح است؟

۱) $z^2 > z^1 + \sum k_i y_i^*$ ۲) $z^2 = z^1 + \sum k_i y_i^*$ ۳) $z^2 < z^1$ ۴) $z^2 \le z^1 + \sum k_i y_i^*$

پاسخ: گزینه «۴» دوگان مسأله Z_1 را D_1 و دوگان مسأله Z_2 را D_2 می‌نامیم:

$$D_1 : \text{Min} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge C_j \;;\; j = 1,\dots,n \quad y_i \ge 0 \;;\; i = 1,\dots,m$$

$$D_2 : \text{Min} \sum_{i=1}^{m} (b_i + k_i) y_i \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge C_j \;;\; j = 1,\dots,n \quad y_i \ge 0 \;;\; i = 1,\dots,m$$

y_1^* جواب بهینه D_1 است. چون فضای شدنی مسائل D_1 و D_2 یکسان هستند پس y_1^* یک نقطه شدنی مسأله D_2 می‌باشد. مقدار بهینه تابع هدف مسأله D_2 را ω^2 می‌نامیم چون y_1^* نقطه شدنی D_2 است و چون D_2 مسأله مینیمم‌سازی است، پس هر نقطه‌ی شدنی آن بزرگتر مساوی مقدار بهینه تابع هدف (ω^2) خواهد بود. داریم:

$$\omega^2 \le \sum_{i=1}^{m} (b_i + k_i) y_i^* \Rightarrow \omega^2 \le \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*}_{\omega^1} + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^* \qquad :(1)$$

می‌دانیم $\omega^{۱} = \sum_{i=۱}^{m} b_i y_i^*$ مقدار بهینه تابع هدف مسأله $D_۱$ است بنابراین داریم: $:(۲)$ $\quad (۱) \Rightarrow \omega^{۲} \le \omega^{۱} + \sum_{i=۱}^{m} k_i y_i^*$

مقادیر بهینه تابع هدف مسائل اولیه و دوگان برابرند پس اگر در رابطه (۲) قرار دهیم $Z^{۱} = \omega^{۱}$ و $Z^{۲} = \omega^{۲}$ داریم: $\quad Z^{۲} \le Z^{۱} + \sum_{i=۱}^{m} k_i y_i^*$

$Z^{۱}, Z^{۲}$ مقادیر بهینه تابع هدف مسائل $Z_۱, Z_۲$ هستند.

مثال ۱۸: مسأله $\underset{\substack{s.t\\ Ax\le b\\ -u\le x\le u}}{Min}\ Z = CX$ که در آن $b > ۰$ و $u > ۰$ مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟(بردار u برداری از اعداد متناهی باشد)

۱) ممکن است مسأله دوگان ناموجه باشد.

۲) هم مسأله اولیه و هم دوگان، جواب بهینه محدود دارند.

۳) مسأله اولیه می‌تواند جواب بهینه نامحدود داشته باشد و دوگان نشدنی باشد.

۴) هر دو مسأله اولیه و دوگان فضای موجه نامحدود دارند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نقطه $X = ۰$ در محدودیت‌ها صدق می‌کند، سپس یک جواب موجه مسأله‌ی اولیه است. همچنین از آنجایی که بردار u برداری از اعداد متناهی است از این رو با توجه به محدودیت $-u \le x \le u$ متغیر x نیز نمی‌تواند مقادیر نامحدود به خود بگیرد و فضای جواب متناهی است. پس مسأله جواب بهینه محدود دارد و مسأله دوگان نیز جواب بهینه محدود خواهد داشت.

مثال ۱۹: مسأله $\underset{\substack{s.t\\ j-۱\le x_j\le j+۱\\ j=۱,\dots,n}}{Min}\ Z = x_۱ + \dots + x_n$ مفروض است. مقدار بهینه تابع هدف مسأله دوگان کدام است؟

۱) $\frac{n^{۲} - ۲n}{۲}$ ۲) $\frac{n^{۲} + ۲n}{۲}$ ۳) $\frac{n^{۲} + n}{۲}$ ۴) $\frac{n^{۲} - n}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به محدودیت‌های مسأله اولیه داریم:

$$\begin{cases} ۰ \le x_۱ \le ۲ \\ ۱ \le x_۲ \le ۳ \\ \vdots \\ n-۱ \le x_n \le n+۱ \end{cases} \longrightarrow \underbrace{۱ + \dots + n - ۱}_{\frac{n(n-۱)}{۲}} \le x_۱ + x_۲ + \dots + x_n \le ۲ + ۳ + \dots + n + ۱$$

بنابراین:

$$Z^* = \min(x_۱ + \dots + x_n) = \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{n^{۲} - n}{۲}$$

در هر دو مسأله‌ی اولیه و ثانویه جواب بهینه فقط یک نقطه می‌باشد، پس فقط می‌توان گفت مسأله ثانویه نیز امکان‌پذیر است.

قضیه ۵ (قضیه مکمل زائد): مسأله اولیه و دوگان زیر را در نظر بگیرید:

$$D: \underset{s.t.}{Min}\ W = yb \qquad yA \ge C \qquad y \ge ۰$$

$$P: \underset{s.t.}{Max}\ Z = Cx \qquad Ax \le b \qquad x \ge ۰$$

اگر x^* جواب بهینه مسأله P و S^* مقادیر بهینه متغیرهای کمبود مسأله P و y^* جواب بهینه مسأله D و u^* مقادیر بهینه متغیرهای مازاد مسأله D باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} y_i^* . s_i^* = ۰ \quad \text{for } i = ۱,\dots,m. \\ x_j^* . u_j^* = ۰ \quad \text{for } j = ۱,\dots,n. \end{cases}$$

اثبات: طبق مفروضات قضیه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} Ax^*+s^*=b \;\; ; x^*,s^*\geq 0 & (1)\\ y^*A-u^*=c \;\; ; y^*,u^*\geq 0 & (2)\end{cases}$$

رابطه (۱) را از سمت راست در y^* و رابطه (۲) را از سمت چپ در x^* ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} y^*Ax^*+y^*s^*=y^*b & (3)\\ y^*Ax^*-u^*x^*=cx^* & (4)\end{cases} \Rightarrow (3)-(4): y^*s^*+u^*x^*=y^*b-cx^*$$

چون x^* جواب بهینه P و y^* جواب بهینه D است، پس: $y^*b=cx^*$ و در نتیجه داریم: $y^*s^*+u^*x^*=0$ از طرفی $x^*,y^*,u^*,s^*\geq 0$ بنابراین $y^*s^*\geq 0 , u^*x^*\geq 0$ و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y^*.s^*=0 \rightarrow y_1^*s_1^*+...+y_m^*s_m^*=0\\ u^*.x^*=0 \rightarrow u_1^*x_1^*+...+u_n^*x_n^*=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i^*.s_i^*=0 : 1\leq i\leq m\\ u_j^*.x_j^*=0 : 1\leq j\leq n\end{cases}$$

زیرا: $x_j^*, y_i^*, u_j^*, s_i^*\geq 0$.

مثال ۲۰: مسائل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید که بردار s متغیرهای کمبود مسأله حداکثر کردن و u بـردار متغیرهـای مـازاد مسأله حداقل کردن باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1x_1+c_2x_2\\ \text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq b_1\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq b_2\\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0\end{aligned} \quad \xleftrightarrow{\text{همزاد}} \quad \begin{aligned} \text{Min } \omega &= b_1y_1+b_2y_2\\ \text{s.t.}\quad & a_{11}y_1+a_{21}y_2\geq c_1\\ & a_{12}y_1+a_{22}y_2\geq c_2\\ & y_1\geq 0, y_2\geq 0\end{aligned}$$

کدام‌یک از گزینه‌های زیر کاملاً صحیح است؟

۱) $y_1s_1=y_2s_2=x_1u_1=x_2u_2=0$
۲) $s_1u_1=s_2u_2=x_1y_1=x_2y_2=0$
۳) $s_1y_1=s_2y_2=u_1y_1=u_2y_2=0$
۴) $s_1x_1=s_2x_2=u_1y_1=u_2y_2=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به قضیه مکمل زائد، گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۲۱: در مدل خطی زیر x_1, x_2, x_3 متغیرهای پایه بهینه با مقدار مثبت می‌باشند. در جواب بهینه مسأله همزاد محدودیت‌ها به چه شکل صادق می‌باشند؟

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z=cx\\ \text{s.t}\quad & A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\\ & x\geq 0\end{aligned}$$

۱) همگی به صورت > صادق هستند.
۲) همگی به صورت معادله صادق هستند.
۳) همگی به صورت < صادق هستند.
۴) فقط اولی به صورت نامعادله صادق است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$x_1^*>0, x_2^*>0, x_3^*>0 \xrightarrow[\text{(قضیه مکمل زائد)}]{x_i^*.u_i^*=0} u_1^*=u_2^*=u_3^*=0$$

که u_iها متغیر مازاد قیود مسأله دوگان هستند. پس در حالت بهینه همه محدودیت‌های دوگان به صورت تساوی (معادله) هستند.

مثال ۲۲: مسأله مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1x_1+c_2x_2\\ \text{s.t}\quad & x_1+\frac{5}{2}x_2\leq 14\\ & 3x_1+2x_2\leq 32\\ & x_1-\frac{1}{2}x_2\leq 8\\ & x_1, x_2\geq 0\end{aligned}$$

اگر جواب بهینه دوگان $(y_1, y_2, y_3)=(2, 0, 3)$ و این جواب تبهگن هم نباشد، مقدار بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری مسأله اولیه کدام است؟

۱) $(x_1, x_2)=(4, 4)$
۲) $(x_1, x_2)=(9, 2)$
۳) $(x_1, x_2)=(9, 4)$
۴) $(x_1, x_2)=(8, 3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم s_1 و s_2 و s_3 متغیرهای کمبود قید مسأله اولیه باشند.

$y_1 = 2 > 0 \xrightarrow{y_1.s_1=0} s_1 = 0 \Rightarrow$ قید اول مسأله اولیه به‌صورت تساوی است. $\Rightarrow x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 14 \quad : (1)$

$y_3 = 3 > 0 \xrightarrow{y_3.s_3=0} s_3 = 0 \Rightarrow$ قید سوم مسأله اولیه به‌صورت تساوی است. $\Rightarrow x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 8 \quad : (2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

مثال ۲۳: یک مسأله Min سازی را به روش M بزرگ حل کرده‌ایم و جدول بهینه به صورت زیر است:

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	
z	-1	0	0	0	-2	$-M$	$-M$	-6
S_2	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	1	0	0	1	0	0	3
S_1	-1	0	1	0	1	-1	0	1

می‌دانیم که (R_1, R_2, S_3) متغیرهای پایه اولین جدول بوده‌اند. مقادیر متغیرهای دوگان را بیابید؟

☑ **پاسخ:** R_1 متغیر تصنعی اولین قید مسأله اولیه است، پس عدد متناظر با آن در سطر هدف به ازای $M = 0$ مقدار بهینه متغیر دوگان y_1^* را می‌دهد. یعنی: $y_1^* = 0$.

R_2 متغیر تصنعی دومین قید است، پس عدد متناظر با آن در سطر تابع هدف به ازای $M = 0$ مقدار بهینه متغیر دوگان y_2^* را می‌دهد. یعنی: $y_2^* = 0$.

S_3 متغیر کمکی سومین قید است، پس: $y_3^* = -2$.

مثال ۲۴: جدول بهینه یک مسأله Min سازی به صورت زیر است:

	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
$-Z$	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{35}{4}$	$M-\frac{5}{4}$	$M-\frac{35}{4}$	-45
x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	3

اگر متغیرهای پایه‌ای آغازین جدول سیمپلکس (R_1, R_2) باشند. جواب بهینه دوگان را بیابید؟

☑ **پاسخ:** ملاحظه می‌شود که سطر تابع هدف $-Z$ است. پس ابتدا یک منفی در سطر تابع هدف ضرب می‌کنیم. اکنون در اعداد متناظر با R_1 و R_2 در سطر تابع هدف به‌جای M، صفر قرار می‌دهیم و داریم: $y_1^* = \frac{5}{4}$, $y_2^* = \frac{35}{4}$.

مثال ۲۵: مسأله LP مقابل $\underset{\text{S.t.}}{\text{Max}}\, Z = 10x_1 + 15x_2 + 5x_3$ مفروض است:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6000 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 9000 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 4000 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
Z	0	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	5	35000
S_1	0	0	1	1	-1	1	1000
x_1	1	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	2000
x_2	0	1	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	1000

جدول بهینه سیمپلکس این مسأله به‌صورت روبرو است:

الف) مقادیر بهینه متغیرهای مسأله دوگان را بیابید؟

ب) کدام یک از محدودیت‌های مسأله دوگان در نقطه بهینه مسأله دوگان فعال هستند؟

ج) متغیرهای پایه‌ای مسأله دوگان در جواب بهینه کدامند؟

د) کدام یک از منابع در جواب بهینه به طور کامل مصرف نشده است؟

☑ **پاسخ:** الف) متغیرهای پایه‌ای اولین جدول سیمپلکس (S_1, S_2, S_3) بوده‌اند. پس اعداد متناظر با آن‌ها در سطر تابع هدف مقادیر بهینه متغیرهـای مسأله دوگان هستند: $y_1^* = 0$ ، $y_2^* = \frac{5}{3}$ و $y_3^* = 5$.

ب) فرض کنیم که u_1, u_2, u_3 متغیرهای کمکی محدودیت‌های مسأله دوگان باشند.

اولین محدودیت مسأله دوگان در نقطه بهینه فعال است. $\Leftarrow u_1^* = 0 \xleftarrow[\text{قضیه مکمل زاویه}]{x_1^* \times u_1^* = 0} x_1^* = 2000$

دومین محدودیت مسأله دوگان در نقطه بهینه فعال است. $\Leftarrow u_2^* = 0 \xleftarrow[\text{قضیه مکمل زاویه}]{x_2^* \times u_2^* = 0} x_2^* = 1000$

ج) متغیرهای پایه‌ای مسأله دوگان در جواب بهینه عبارتند از: y_2, y_3, u_3.

د) در جواب بهینه مسأله اولیه $S_1^* = 1000$، یعنی محدودیت اول در جواب بهینه به تساوی تبدیل نشده است و منبع قید اول به طور کامل مصرف نشـده است و چون $S_2^* = S_3^* = 0$ ، پس منبع قید دوم و سوم در جواب بهینه به‌طور کامل مصرف شده‌اند.

■ **مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است:**

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & Z = 4x_1 + c_2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\
\text{s.t.} & \\
& a_{11}x_1 + x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = 7 \\
& a_{21}x_1 + 2x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = 1 \\
& a_{31}x_1 + 2x_2 + a_{33}x_3 + x_6 = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

این مسأله را با روش سیمپلکس حل کرده و به جدول نهایی (بهینه) زیر رسیده‌ایم:

		c^T	4	c_4	4	3	0	0
C_B	Basic	x_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
3	a_4	β_1	0	γ_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
4	a_1	β_2	1	γ_2	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	a_3	β_3	0	γ_3	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{55}{2}$	0	5	0	0	$\frac{1}{2}$	α

در ارتباط با این مسأله به سؤالات چهار سؤال زیر پاسخ دهید.

مثال ۲۶: بردار $x_B^T = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (مقادیر سمت راست RHS) به ترتیب به قرار زیر است:

۱) $x_B^T = (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{4})$ ۲) $x_B^T = (\frac{7}{6}, \frac{13}{4}, \frac{11}{4})$ ۳) $x_B^T = (\frac{1}{2}, \frac{15}{4}, \frac{11}{4})$ ۴) $x_B^T = (\frac{11}{6}, \frac{15}{4}, \frac{7}{4})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از ماتریس B^{-1} مقادیر سمت راست در جدول نهایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
X_B = B^{-1}b \Rightarrow X_B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}
$$

مثال ۲۷: بردار $y_2^T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ به قرار زیر می‌باشد:

۱) $y_2^T = (-1, 2, 0)$ ۲) $y_2^T = (1, 4, -4)$ ۳) $y_2^T = (1, -2, 2)$ ۴) $y_2^T = (1, 3, -3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از ماتریس B^{-1} مقادیر ستون ضرایب x_2 در جدول بهینه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_2 = \bar{a}_2 = B^{-1}a_2 \Rightarrow \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

مثال ۲۸: مقدار c_2 به قرار زیر می‌باشد:

۱) $c_2 = 0$ ۲) $c_2 = 2$ ۳) $c_2 = 5$ ۴) $c_2 = -5$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$Z_2 - C_2 = 5 \to C_B\bar{a}_2 - C_2 = 5 \to (3, 4, 4)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - C_2 = 5 \to 5 - C_2 = 5 \to C_2 = 0$$

مثال ۲۹: بردار v^*، جواب بهینه مسأله ثانویه (Dual) مسأله فوق، به قرار زیر می‌باشد:

۱) $v^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ ۲) $v^* = (2, \frac{3}{2}, 1)$ ۳) $v^* = (3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ۴) $v^* = (4, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» متغیرهای دوگان یا همان شبه قیمت‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$v^* = C_B B^{-1} \to v^* = (3, 4, 4)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

مثال ۳۰: مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Max\ Z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4} \\ &\text{s.t.} \\ &\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 8 \\ &\quad x_j \ge 0,\ j = 1 \text{ تا } 4 \end{aligned}$$

با فرض اینکه جواب بهینه مسأله مزدوج آن به صورت روبرو باشد: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$

حل بهینه مسأله اولیه برابر است با:

۱) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 2)$ ۲) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 3, 0)$

۳) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 2)$ ۴) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» متغیر y_1 متناظر با اولین محدودیت مسأله اولیه و متغیر y_2 متناظر دومین محدودیت مسأله اولیه است. با فرض اینکه S_1, S_2 متغیرهای کمکی محدودیت‌های مسأله اولیه باشند. طبق قضیه مکمل زائد داریم:

$$\begin{cases} y_1.S_1 = 0 \xrightarrow{y_1 = 1 \ne 0} S_1 = 0 \to & \text{(۱) : در جواب بهینه اولین محدودیت مساله اولیه به تساوی تبدیل می‌شود.} \\ y_2.S_2 = 0 \xrightarrow{y_2 = 1 \ne 0} S_2 = 0 \to & \text{(۲) : در جواب بهینه دومین محدودیت مساله اولیه به تساوی تبدیل می‌شود.} \end{cases}$$

متغیرهای y_3, y_4, y_5, y_6 متغیرهای کمکی محدویت‌های مسأله دوگان هستند و طبق قضیه مکمل زائد داریم:

$$y_4 . x_2 = 0 \xrightarrow{y_4 = 1 \neq 0} x_2 = 0 \qquad :(3)$$

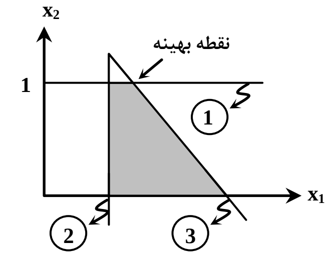
$$y_5 . x_3 = 0 \xrightarrow{y_5 = 1 \neq 0} x_3 = 0 \qquad :(4)$$

با توجه به (۱)و (۲)و (۳)و (۴) در جواب بهینه داریم :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

پس جواب بهینه مسأله اولیه $(x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2)$ می‌باشد.

مثال ۳۱: با توجه به نمایش ترسیمی جواب یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با ۳ محدودیت کارکردی (functional constraint) و دو متغیرتصمیم به شکل زیر (در صورتی که متغیرهای تصمیم و کمکی مسأله ثانویه این مسأله به ترتیب y_i, s'_j نامیده شوند)، متغیرهای اساسی جواب بهینه مسأله ثانویه عبارتند از:



۱) y_1, y_2

۲) y_2, y_3

۳) y_1, y_3

۴) y_1, S'_2

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم متناظر با هر محدودیت در مسأله اولیه یک متغیر اصلی در مسأله دوگان وجود دارد. اگر یک محدودیت در مسأله اولیه از نقطه بهینه عبور نماید، متغیر متناظر آن در مسأله دوگان در حالت بهینگی در پایه می‌باشد (البته در حالتی که نقطه بهینه تباهیده است ممکن است این موضوع صحیح نباشد). با توجه به شکل، محدودیت‌های (۱) و (۳) از نقطه بهینه غیرتباهیده مسأله اولیه عبور می‌کنند، پس متغیرهای دوگان وابسته به آنها یعنی y_1 و y_3 متغیر اساسی جواب بهینه دوگان هستند.

مثال ۳۲: مسأله زیر در نظر بگیرید. می‌دانیم در شرایط بهینه x_1 و x_3 در پایه و x_2 غیرپایه است. در این صورت بردار جواب‌های بهینه مسأله دوگان کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s.t} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 \\ & 4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \le 20 \\ & 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 8 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $(y_1 = 0, y_2 = 15, y_3 = 0)$

۲) $(y_1 = 6, y_2 = 0, y_3 = 6)$

۳) $(y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = 8)$

۴) $(y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همانطور که در صورت سؤال ذکر شده متغیر x_2 غیرپایه‌ای و مقدار آن در حالت بهینه صفر است. پس با صفر قرار دادن آن داریم:

$$8x_1 + x_3 \le 48$$

$$4x_1 + \frac{3}{2}x_3 \le 20$$

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_3 \le 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

از طرفی با ضرب کردن طرفین محدودیت دوم در ۲ و مقایسه آن با محدودیت اول:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_3 \le 48 \\ 8x_1 + 3x_3 \le 40 \end{cases}$$

مشخص است که با برقراری محدودیت دوم محدودیت اول نیز برقرار خواهد شد.

(چون $x_3 \ge 0$ پس $8x_1 + 3x_3 \le 40 \Rightarrow 8x_1 + x_3 \le 40 \Rightarrow 8x_1 + x_3 \le 48$)

محدودیت اول قید زائد می‌باشد ($S_1 > 0$) و محدودیت‌های فعال محدودیت ۲ و ۳ می‌باشند.

$$\begin{cases} 4x_1 + \frac{3}{2}x_3 = 20 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2\ ,\ x_3 = 8\ ,\ S_1 = 24$$

حال با توجه به قضیه مکمل زائد داریم:

$$S_1 > 0 \xrightarrow{S_1 y_1 = 0} y_1 = 0\ ,\ x_1 > 0 \xrightarrow{x_1 . s'_1 = 0} S'_1 = 0\ ,\ x_3 > 0 \xrightarrow{x_3 . s'_3 = 0} S'_3 = 0$$

$$\begin{cases} 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 + S'_1 = 60 \\ 6y_1 + 2y_2 + \frac{3}{2}y_3 + S'_2 = 30 \\ y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + S'_3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = 20 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 0\ ,\ y_2 = 10\ ,\ y_3 = 10$$

مثال ۳۳: مسائل P و D به شرح روبرو مفروض است:

$$\begin{aligned} &\textbf{Max}\ \ Z = cX \\ &\textbf{s.t}\ \ Ax \le b \quad (p) \\ &\qquad X \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\textbf{Min}\ \ W = Yb \\ &\textbf{s.t}\ \ YA \ge c \quad (D) \\ &\qquad Y \ge 0 \end{aligned}$$

تعداد جواب‌های پایه:

۱) درمدل P بیشتر است.
۲) در مدل D بیشتر است.
۳) در مسأله P و D برابر می‌باشد.
۴) بستگی دارد به تعداد متغیرها و محدودیت‌های مسائل P و D

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تعداد جواب‌های پایه اعم از شدنی و نشدنی در مدل اولیه و همزاد با یکدیگر برابرند.

مثال ۳۴: مسأله مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} &\textbf{Min}\ Z = x_1 + x_2 - 4x_3 \\ &\textbf{s.t} \\ &\quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ &\quad x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

یکی از تکرارهای سیمپلکس این مسأله به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۳	−۵	۰	۰	۰	−۴	−۱۶
S_1	۳	−۱	۰	۱	۰	−۲	۱
S_2	۰	۲	۰	۰	۱	۱	۶
x_3	−۱	۱	۱	۰	۰	۱	۴

می‌دانیم این جدول یکی از گوشه‌های ناحیه شدنی مسأله بالا را ارائه می‌دهد. گوشه متناظر در مسأله دوگان کدام است؟

۱) $y_1 = 0, y_2 = -4, y_3 = 0$
۲) $y_1 = -4, y_2 = 0, y_3 = 0$
۳) $y_1 = -8, y_2 = -8, y_3 = 0$
۴) $y_1 = 0, y_2 = 0, y = -4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌توان از قضیه مکمل زائد استفاده کرد. فرض کنیم u_1, u_2, u_3 متغیرهای کمکی قیود دوگان باشند:

$$S_1 = 1 > 0 \xrightarrow{S_1 y_1 = 0} y_1 = 0 \qquad S_2 = 6 > 0 \xrightarrow{S_2 y_2 = 0} y_2 = 0 \qquad x_3 = 4 > 0 \xrightarrow{x_3 u_3 = 0} u_3 = 0$$

قید سوم دوگان $2y_1 - y_2 + y_3 \le -4$ است. داریم:

$$2y_1 - y_2 + y_3 + u_3 = -4 \xrightarrow{y_1 = y_2 = 0,\ u_3 = 0} y_3 = -4$$

ملاحظه می‌شود که مقادیر متناظر با متغیرهای کمکی (متغیرهای پایه‌ای اولین جدول سیمپلکس) در سطر تابع هدف نیز گوشه متناظر دوگان را می‌دهند.

مثال ۳۵: مسأله اولیه و دوگان زیر مفروض‌اند:

$$P: \underset{s.t}{\text{Min}}\ Z = 3x_1 - 4x_2 \qquad D: \underset{S.t}{\text{Max}}\ W = 4y_1 + 5y_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1, x_2 &: \text{نامقید} \end{aligned} \xrightarrow{\text{دوگان}} \begin{aligned} 2y_1 + y_2 &= 3 \\ -y_1 + y_2 &= -4 \\ y_1, y_2 &: \text{نامقید} \end{aligned}$$

فضای شدنی مسأله P ، نقطه $(x_1 = 3, x_2 = 2)$ است و فضای شدنی مسأله D ، نقطه $(y_1 = \frac{7}{3}, y_2 = -\frac{5}{3})$ است. پس ناحیه شدنی مسأله اولیه و دوگان هر دو متناهی است.

مثال ۳۶: کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان فضای شدنی محدود داشته باشد، مسأله دیگر حتماً دارای مقدار بهینه تابع هدف متناهی است.

۲) در مسائل $\begin{aligned} P: &\text{Max}\ cx \\ \text{s.t.}\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$ و $\begin{aligned} D: &\text{Min}\ yb \\ \text{s.t.}\ & yA \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$ حداقل یکی از فضاهای شدنی بی‌کران است.

۳) اگر یک گوشه در مسأله اولیه شدنی و گوشه متناظر آن در مسأله دوگان نیز گوشه شدنی باشد، در این صورت گوشه‌ها، گوشه بهینه مسائل نظیرشان هستند.

۴) هیچ کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان فضای شدنی محدود داشته باشد، پس جواب بهینه محدود نیز خواهد داشت و چون جواب بهینه اولیه و ثانویه برابرند، پس مقدار مسأله دیگر نیز متناهی خواهد بود. هم‌چنین در حالت خاص ذکر شده در گزینه «۲» حداقل یکی از فضاهای شدنی بی‌کران خواهد بود. گزینه «۳» نیز درست می‌باشد چون فقط در جواب بهینه گوشه‌های مسأله اولیه و ثانویه هر دو شدنی هستند.

مثال ۳۷: مسأله برنامه‌ریزی خطی اولیه و مزدوج آن را به ترتیب ذیل در نظر بگیرید. تفاوت مابین حداکثر مقدار x_0 و حداقل مقدار y_0 برابر است با :

(اولیه)
$$\begin{aligned} &\text{Max}\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j \\ &\text{s.t} \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ &x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

(مزدوج)
$$\begin{aligned} &\text{Min}\ y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i . y_i \\ &\text{s.t} \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} . y_i \ge c_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ &y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

۱) صفر یا بی نهایت
۲) یا صفر یا یک مقدار عددی منفی
۳) یا صفر یا یک مقدار عددی مثبت
۴) یا بی‌نهایت یا یک مقدار عددی مثبت

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر یکی از مسائل بهینه محدود داشته باشد، دیگری نیز بهینه محدود دارد و مقادیر بهینه تابع‌های هدف برابرند، یعنی $x_0^* = y_0^*$, $x_0^* - y_0^* = 0$. اگر یکی از مسائل بهینه نامحدود داشته باشد، دیگری نشدنی است و تفاوت مقادیر بهینه بی‌نهایت است.

مثال ۳۸: مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو و جدول بهینه آن مفروضند:

$$\begin{aligned} &\underset{s.t}{\text{Max}}\ Z = 2x_1 + x_2 - 4x_3 \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ &x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

جدول بهینه این مسأله به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
Z	۰	۱	۲	۰	۲	۰	۴
S_1	۰	۰	۳	۱	۱−	۰	۷
x_1	۱	۱	۱−	۰	۱	۰	۲
S_3	۰	۲	۰	۰	۱	۱	۶

الف) قیمت سایه منابع را بیابید؟ ب) اگر منبع قید اول را یک واحد افزایش دهیم، مقدار تابع هدف چقدر تغییر خواهد کرد؟ج) قیمت هر واحد از منبع قید دوم ۳ واحد پول است. آیا خرید این منبع توجیه اقتصادی دارد؟

☑ **پاسخ:** الف) قیمت سایه منابع همان مقادیر بهینه متغیرهای دوگان هستند. چون متغیرهای کمکی S_1 و S_2 و S_3 متغیرهای پایه‌ای در اولین جدول سیمپلکس بوده‌اند، پس اعداد زیر آن‌ها در سطر تابع هدف همان مقادیر بهینه متغیرهای دوگان هستند، یعنی: $y_1^* = 0 , y_2^* = 2$ و $y_3^* = 0$ در نتیجه قیمت سایه منبع قید اول صفر است و قیمت سایه منبع قید دوم، ۲ و قیمت سایه منبع قید سوم نیز صفر است. ب) از آنجایی که قیمت سایه منبع قید اول صفر است، پس با افزایش این منبع به هر میزانی مقدار تابع هدف تغییر نخواهد کرد $(\frac{dz^*}{db_1} = y_1^* = 0)$ و این امری طبیعی است، زیرا منبع قید اول در جواب بهینه به طور کلی مصرف نشده است و به میزان $S_1 = 7$ واحد آن باقی مانده است. ج) قیمت سایه منبع قید دوم ۲ است. یعنی خرید یک واحد از منبع قید دوم به مقدار ۲ واحد پول، سودآوری دارد در حالی که برای خرید هر واحد از این منبع ۳ واحد پول پرداخته‌ایم و این یعنی ضرر!

در این قسمت می‌خواهیم به بیان رابطه بین شدنی بودن مسأله دوگان و بهینگی مسأله اولیه بپردازیم:

لم ۱: شدنی بودن مسأله دوگان معادل است با برقراری شرط بهینگی در مسأله اولیه.

اثبات: مسأله اولیه و دوگان نظیر آن مفروض‌اند:

$$P: \underset{\text{S.t.}}{\text{Min}}\ Z = Cx \qquad\qquad D: \underset{\text{S.t.}}{\text{Max}}\ W = yb$$

$$Ax = b \qquad\qquad yA \le C$$

$$x \ge 0 \qquad\qquad y\ \text{نامقید}$$

ابتدا اثبات می‌کنیم که اگر مسأله P بهینه باشد، مسأله دوگان شدنی خواهد بود.

فرض کنیم B پایه‌ای بهینه برای مسأله P باشد که لزوماً شدنی نیست. چون پایه B بهینه است می‌توان نوشت:

$$\forall j; Z_j - C_j \le 0 \Rightarrow C_B B^{-1} a_j - C_j \le 0$$

$$\text{(متغیرهای دوگان است } y = C_B B^{-1} \text{ می‌دانیم)} \Rightarrow y a_j \le C_j \Rightarrow yA \le C$$

پس اگر B پایه‌ای بهینه برای P باشد، $y = C_B B^{-1}$ یک جواب شدنی مسأله دوگان است.

همچنین می‌توان ثابت کرد که اگر $y = C_B B^{-1}$ یک جواب شدنی دوگان باشد، پایه B یک پایه بهینه (نه لزوماً شدنی) برای مسأله اولیه است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۳۹: در یک مسأله برنامه‌ریزی تولید با افزایش میزان دسترسی به یک منبع، مقدار سود بهینه مسأله تغییری نمی‌کند. در چنین مسأله‌ای کدام‌یک از پاسخ‌های زیر صحیح است؟

۱) قیمت سایه‌ای این منبع صفر است.
۲) مقدار ظرفیت باقیمانده این منبع در جدول بهینه مثبت است.
۳) قیمت سایه‌ای این منبع مثبت است.
۴) موارد ۱و۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» وقتی با افزایش دسترسی به منبع b_i مقدار بهینه تابع هدف یعنی Z^* تغییر نمی‌کند، داریم: $\text{قیمت سایه} = \frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = y_i^* = 0$

به عبارت دیگر در حالت بهینه تمام این منبع مصرف نشده است و افزایش مقدار آن تأثیری در Z^* ندارد.

◆ ◆ ◆ ◆

■ **مدل برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:**

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\ Z = 4x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 = b_1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 \quad + x_4 \quad &= 7 = b_2 \\ L_3 x_1 + L_4 x_2 \quad\quad + x_5 &= 9 = b_3 \\ x_j \ge 5 \quad j = 1, \dots, 5 & \end{aligned}$$

با در دست داشتن ضرایب L_1 الی L_4 مسأله فوق را با روش سیمپلکس حل کرده و به تابلوی بهینه زیر رسیده‌ایم.

C_B	پایه	مقدار (RHS)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
۴	x_2	۴	۰	۱	۰	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
۴	x_1	۱	۱	۰	۰	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
-۱	x_3	۱	۰	۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
	z	۱۹	۰	۰	۰	۳	۱

در ارتباط با مسأله بالا به سه سؤال زیر پاسخ دهید.

مثال ۴۰: مقدار $L_۱$ و $L_۳$ (ضرایب $x_۱$) در محدودیت‌های دوم و سوم مسأله فوق برابر است با:

۱) $L_۱=۲, L_۳=۳$ ۲) $L_۱=۳, L_۳=۱$ ۳) $L_۱=۱, L_۳=۴$ ۴) $L_۱=۴, L_۳=۱$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\bar{a}_۱ = B^{-۱}a_۱ \rightarrow \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۵} & \frac{۳}{۵} \\ ۰ & \frac{۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} \\ ۱ & -\frac{۱}{۵} & -\frac{۲}{۵} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ L_۱ \\ L_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۵}L_۱+\frac{۳}{۵}L_۳ \\ \frac{۲}{۵}L_۱-\frac{۱}{۵}L_۳ \\ ۱-\frac{۱}{۵}L_۱-\frac{۲}{۵}L_۳ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{۱}{۵}L_۱+\frac{۳}{۵}L_۳=۰ \\ \frac{۲}{۵}L_۱-\frac{۱}{۵}L_۳=۱ \\ ۱-\frac{۱}{۵}L_۱-\frac{۲}{۵}L_۳=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_۱=۳ \\ L_۳=۱ \end{matrix}$$

مثال ۴۱: اگر محدودیت $۱ \le ۲x_۳+\frac{۳}{۵}x_۴-\frac{۹}{۵}x_۵$ را به مسأله فوق اضافه کنیم، جواب بهینه مسأله حاصل کدام است؟

۱) $\bar{x}^*=(۱,۴,۱,۱,۰,۰)^T$

۲) $\bar{x}^*=(\frac{۱۷}{۱۵},\frac{۶}{۵},\frac{۷}{۵},۱,۰,۰)^T$

۳) $\bar{x}^*=(\frac{۶}{۵},\frac{۱۷}{۵},\frac{۷}{۵},۰,۱,۰)^T$

۴) $\bar{x}^*=(۱,۴,۱,۰,۱,۰)^T$

پاسخ: گزینه «۳» با قرار دادن جواب بهینه $(۱,۴,۱,۰,۰)$ در محدودیت $۱ \le ۲x_۳+\frac{۳}{۵}x_۴-\frac{۹}{۵}x_۵$ داریم: $۱ \not\le ۲$ یعنی جواب بهینه در این محدودیت صدق نمی‌کند. پس محدودیت $۲x_۳+\frac{۳}{۵}x_۴-\frac{۹}{۵}x_۵+x_۶=۱$ را به سطر آخر جدول می‌افزاییم:

z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	RHS
	۰	۰	۰	۳	۱	۰	۱۹
$x_۲$	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	۰	۴
$x_۱$	۱	۰	۰	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۰	۱
$x_۳$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	۰	۱
$x_۶$	۰	۰	۲	$\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۹}{۵}$	۱	۱

ستون سوم جدول از حالت یکه بودن خارج شده است. ۲ــ برابر سطر ۳ را به سطر ۴ می‌افزاییم:

z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	R.H.S
	۰	۰	۰	۳	۱	۰	۱۹
$x_۲$	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	۰	۴
$x_۱$	۱	۰	۰	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۰	۱
$x_۳$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	۰	۱
$x_۶$	۰	۰	۰	۱	-۱	۱	-۱

طبق سیمپلکس دوگان $x_۶$ از پایه خارج و $x_۵$ وارد پایه می‌گردد.

z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	R.H.S
	۰	۰	۰	۴	۰	۱	۱۸
$x_۲$	۰	۱	۰	$\frac{۲}{۵}$	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱۷}{۵}$
$x_۱$	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۶}{۵}$
$x_۳$	۰	۰	۱	$-\frac{۳}{۵}$	۰	$-\frac{۲}{۵}$	$\frac{۷}{۵}$
$x_۵$	۰	۰	۰	-۱	۱	-۱	۱

جواب بهینه جدید عبارت است از: $x^*=(\frac{۶}{۵},\frac{۱۷}{۵},\frac{۷}{۵},۰,۱,۰)$

مثال ۴۲: اگر جواب بهینه دوگان مسأله فوق را با $\bar{v}^* = (v_۱, v_۲, v_۳)^T$ نمایش دهیم، آنگاه $\bar{v}^*$ برابر است با:

۱) $(۰,۳,۱)^T$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۷},۲)^T$ ۳) $(۲,۱,۰)^T$ ۴) $(-۱,۱,۲)^T$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم که اگر ضریب هزینه متغیرهای پایه‌ای اولین جدول سیمپلکس صفر باشند، در این صورت اعداد متناظر با این متغیرها در سطر تابع هدف در جدول بهینه بیانگر جواب بهینه مسأله دوگان است. در این سؤال متغیرهای پایه‌ای در اولین جدول سیمپلکس $(x_۳, x_۴, x_۵)$ می‌باشد، ولی ضرایب این متغیرها در تابع هدف صفر نمی‌باشد. پس برای یافتن جواب بهینه دوگان از داریم:

$$\begin{aligned}
&Z_۳ - C_۳ = ۰ \Rightarrow V_۱ = Z_۳ = C_۳ + ۰ = -۱ + ۰ = -۱ \\
&Z_۴ - C_۴ = ۳ \Rightarrow V_۲ = Z_۴ = C_۴ + ۳ = -۲ + ۳ = ۱ \quad \Rightarrow V^* = (-۱,۱,۲) \\
&Z_۵ - C_۵ = ۱ \Rightarrow V_۳ = Z_۵ = C_۵ + ۱ = ۱ + ۱ = ۲
\end{aligned}$$

مثال ۴۳: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مسأله c_j عدد ثابت و a_j و b بردار سه تایی از اعداد ثابت‌اند.

$$\begin{aligned}
\text{Max}\ & Z = x_۱ + x_۲ + x_۳ + c_۴ x_۴ + c_۵ x_۵ \\
\text{s.t}\ & \\
& a_۱ x_۱ + a_۲ x_۲ + a_۳ x_۳ + a_۴ x_۴ + a_۵ x_۵ = b \\
& x_j \ge ۰ \quad \text{تمام j ها}
\end{aligned}$$

پایه $B = (a_۱, a_۲, a_۳)$ با وارون $B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ پایه بهینه این مسأله است. متغیرهای دوگان مسأله بالا را $W = (\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳)$ می‌نامیم. جواب بهینه دوگان مسأله کدام است؟

۱) $W = B^{-۱} b$ ۲) $\omega_j = (۱,۱,۱) B^{-۱} a_j - c_j \ ; \ j = ۱,۲,۳$

۳) $W = (\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳) = (۰,۱,۰)$ ۴) $\omega_j = (۱,۱,۱) B^{-۱} a_j \ ; \ j = ۱,۲,۳$

پاسخ: گزینه «۳» مقادیر دوگان یا همان شبه قیمت‌ها از رابطه‌ی زیر به دست آورید:

$$W^* = C_B B^{-۱} \Rightarrow W^* = (۱,۱,۱) \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = (۰,۱,۰)$$

مثال ۴۴: مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned}
\text{Max}\ \ & Z = ۶۰ x_۱ + ۳۰ x_۲ + ۲۰ x_۳ \\
\text{s.t}\ \ & \\
\text{منبع اول} \leftarrow\ & ۸x_۱ + ۶x_۲ + x_۳ \le ۴۸ \\
\text{منبع دوم} \leftarrow\ & ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۱/۵x_۳ \le ۲۰ \\
\text{منبع سوم} \leftarrow\ & ۲x_۱ + ۱/۵x_۲ + ۵x_۳ \le ۸ \\
\text{منبع چهارم} \leftarrow\ & x_۲ \le ۵ \\
& x_j \ge ۰ \qquad j = ۱,۲,۳
\end{aligned}$$

حل بهینه این مسأله به کمک کامپیوتر به صورت زیر است:

Objective Function Value = ۲۸۰

$x_۱ = ۲ \ ; \ x_۲ = ۰ \ ; \ x_۳ = ۸$

هزینه فرصت از دست رفته برای متغیرهای $x_۱, x_۲, x_۳$ به ترتیب صفر و پنج و صفر است.

Row	Slack / Surplus	Dual value
۱	۲۴	۰
۲	۰	۱۰
۳	۰	۱۰
۴	۵	۰

چنانچه مایل به واگذاری قسمتی از منبع اول به شرکت مشابه باشیم در این صورت:

۱) منبع اول نقش چندانی در حل بهینه ما ندارد و می‌تواند به هر مقدار واگذار گردد.

۲) برای فروش حداقل ۲۴ واحد از منبع اول قیمت ۱۰واحد پول باید پیشنهاد گردد.

۳) واگذاری هر مقدار از منبع اول به شرکت مشابه با قیمت ناچیز کاملاً مقرون به صرفه است و گرفتن منبع دوم و سوم از شرکت مشابه با قیمت حداکثر ۱۰ واحد نیز مقرون به صرفه است.

۴) واگذاری تا سقف ۲۴ واحد از منبع اول به شرکت مشابه با قیمت ناچیز مقرون به صرفه است و گرفتن منبع بیشتر از نوع دوم و سوم از شرکت مشابه با قیمت کمتر از ۱۰ واحد پول امری بسیار پسندیده است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به مفهوم قیمت سایه‌ای، محدودیت اول تا سقف ۲۴ واحد قابل واگذاری و محدودیت دوم و سوم به علت غیرصفر بودن دوال آنها، با قیمت کمتر از ۱۰ واحد قابل خریداری است و محدودیت چهارم تا سقف ۵ واحد قابل واگذاری می‌باشد.

مثال ۴۵: یک مسأله برنامه‌ریزی خطی و حل کامپیوتری آن به صورت زیر داده شده است.

Max ۶۰DESKS + ۳۰TABLES + ۲۰CHAIRS
SUBJECT TO

۲)۸DESKS + ۶TABLES + CHAIRS ≤ ۴۸ منبع اول

۳)۴DESKS + ۲TABLES + ۱/۵CHAIRS ≤ ۲۰ منبع دوم

۴)۲DESKS + ۱/۵TABLES + ۰/۵CHAIRS ≤ ۸ منبع سوم

۵)TABLES ≤ ۵

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 280.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
DESKS	2.000000	0.000000
TABLES	0.000000	5.000000
CHAIRS	8.000000	0.000000

ROW	SLACK OF SURPLUS	DUAL PRICES
2)	24.000000	0.000000
3)	0.000000	10.000000
4)	0.000000	10.000000
5)	5.000000	0.000000

چنانچه مایل به واگذاری قسمتی از مقدار منبع اول به شرکت همکار باشیم در این صورت :

۱) منبع اول نقش چندانی در حل بهینه ما ندارد و می‌تواند به هر مقدار واگذار گردد.

۲) برای فروش حداقل ۲۴ واحد از منبع اول، قیمت ۱۰ واحد باید پیشنهاد گردد.

۳) واگذاری هر مقدار از منبع اول به شرکت همکار با قیمت ناچیز کاملاً مقرون به صرفه بود و گرفتن منبع بیشتر از نوع دوم و سوم از شرکت همکار با قیمت حداکثر ۱۰ واحد نیز مقرون به صرفه است.

۴) واگذاری تا سقف ۲۴ واحد از منبع اول به شرکت همکار با قیمت ناچیز کاملاً مقرون به صرفه بوده و گرفتن منبع بیشتر از نوع دوم و سوم از شرکت همکار با قیمت کمتر از ۱۰ واحد بسیار امری پسندیده است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» متغیر کمکی محدودیت اول در جواب بهینه ۲۴ است، یعنی پس از رسیدن به جواب بهینه و مصرف منبع اول تا حد بهینگی باز هم۲۴ واحد از منبع ۱ باقی مانده است، پس منبع ۱ یک منبع فراوان است که می‌تواند فروخته شود. متغیرکمکی محدودیت دوم و سوم برابرصفر است یعنی تمام منبع ۲و۳ مصرف شده است و قیمت سایه این دو منبع ۱۰است یعنی خرید منبع ۲و۳ با هزینه هر واحد حداکثر ۱۰مقرون به صرفه است، زیرا سود حاصل از افزایش هر واحد از منبع ۲ یا۳ برابر ۱۰است (قیمت سایه) و هزینه خرید هر واحد از این دو منبع نباید بیشتر از ۱۰باشد.

مثال ۴۶: کدام یک از موارد زیر جزء اهداف و مراحل سیمپلکس مزدوج نیست؟

۱) حفظ شرط تعلق جواب به فضای شدنی

۲) شروع از یک نقطه ناشدنی گوشه‌ای

۳) حفظ شرط بهینگی جدول سیمپلکس

۴) عدم استفاده از متغیرهای مصنوعی برای محدودیت‌های بزرگتر یا مساوی

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» سیمپلکس مزدوج برای مسائلی مطرح می‌شود که بهینه اما نشدنی است.

مزیت این روش عدم استفاده از متغیرهای مصنوعی است. بدین ترتیب از یک نقطه نشدنی شروع و با حفظ شرط بهینگی به جواب شدنی و بهینه دست می‌یابیم.

مثال ۴۷: مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مسأله c_j عدد ثابت و b, a_j بردار سه تایی از اعداد ثابت‌اند.

$$\begin{aligned}\text{Max}\quad & Z = x_1 + x_2 + x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \\ \text{s.t}\quad & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b \\ & x_j \ge 0 \quad \text{تمام j ها}\end{aligned}$$

اجرای دستورالعمل دوال سیمپلکس برای پایه $B = (a_1, a_2, a_3)$ با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $b = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$، $a_4 = \begin{bmatrix}-1\\-3\\-1\end{bmatrix}$، $a_5 = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}$، $c_4 = 3$ و $c_5 = 3$ باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) بردار a_4 وارد پایه و بردار a_2 از پایه خارج می‌شود.

۲) پایه B قابل قبول از نظر دوگان نیست و در دستورالعمل دوال سیمپلکس از آن استفاده نمی‌شود.

۳) بردار a_5 وارد پایه و بردار a_3 از پایه خارج می شود.

۴) پایه B پایه بهینه مسأله است.

پاسخ: گزینه «۲»

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \;;\; \bar{a}_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \;;\; \bar{a}_5 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \;;\; Z_4 - C_4 = -6 \;;\; Z_5 - C_5 = 1$$

چون $Z_4 - C_4 = -6 < 0$ پس پایه فعلی بهینه نمی‌باشد و در نتیجه دوال شدنی نیست.

مثال ۴۸: مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مسأله c_j عدد ثابت و a_j و b بردار سه تایی از اعداد ثابت‌اند.

$$\begin{aligned}\text{Max}\quad & Z = x_1 + x_2 + x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \\ \text{s.t}\quad & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b \\ & x_j \ge 0 \quad \text{تمام j ها}\end{aligned}$$

اجرای دستورالعمل دوال سیمپلکس برای پایه $B = (a_1, a_2, a_3)$ با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید اگر $b = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$، $a_4 = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}$، $a_5 = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}$ و $c_4 = -3$ و $c_5 = 3$ باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) مسأله نامحدود است.

۲) بردار a_5 وارد پایه و بردار a_2 از پایه خارج می‌شود.

۳) پایه B پایه بهینه مسأله است.

۴) مسأله جواب قابل قبول (feasible solution) ندارد.

پاسخ: گزینه «۴»

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \bar{b} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad Z_4 - C_4 = 1 \;,\; Z_5 - C_5 = 1$$

$$\bar{a}_4 = B^{-1}a_4 \Rightarrow \bar{a}_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \bar{a}_5 = B^{-1}a_5 \Rightarrow \bar{a}_5 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

یعنی جدول به صورت زیر است:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
		۰	۰	۰	۱	۱		
	x_1	۱	۰	۰	−۱	۱	۱	
خروجی $x_2 \Leftarrow$	x_2	۰	۱	۰	۰	۱	−۱	
	x_3	۰	۰	۱	−۱	۲	۱	

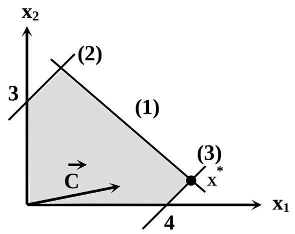
طبق سیمپلکس دوگان متغیر x_2 برای خروج انتخاب می‌شود ولی چون در سطر لولا همه عناصر نامنفی هستند، متغیر ورودی نداریم. یعنی مسأله نشدنی است و دوگان نامحدود است.

مثال ۴۹: مسأله $\underset{s.t}{\text{Max}}\ Z = 2x_1 + x_2$ مفروض است. با حذف محدودیت (۲) مقدار بهینه تابع هدف چه تغییری خواهد کرد؟

$$x_1 + x_2 \le 5 \quad (1)$$
$$-x_1 + x_2 \le 3 \quad (2)$$
$$x_1 - x_2 \le 4 \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) کم می‌شود. ۲) زیاد می‌شود. ۳) تغییر نمی‌کند. ۴) کم نمی‌شود.

پاسخ: گزینه «۳»



ملاحظه می‌شود که محدودیت (۲) غیرزائد و غیرفعال است (از نقطه بهینه عبور نمی‌کند) پس با حذف آن مقدار بهینه تابع هدف تغییری نخواهد کرد.

■ **مسائل P_1 و P_2 به شرح زیر داده شده است:**

$$P_1: \underset{s.t.}{\text{Max}}\ Z = c^T x \quad Ax \le b,\ x \ge 0$$

$$P_2: \underset{s.t.}{\text{Max}}\ Y = c^T x \quad Ax \le b,\ x \ge 0,\ x: \text{Integer}$$

در ارتباط با مسائل فوق به ۴ سؤال بعدی پاسخ دهید:

مثال ۵۰: اگر مقادیر بهینه مسائل P_1 و P_2 را به ترتیب با Z^* و Y^* نمایش دهیم آنگاه Z^*:

۱) ممکن است کوچکتر از Y^* باشد. ۲) ممکن است برابر Y^* باشد.

۳) همواره بزرگتر از Y^* می‌باشد. ۴) همواره کوچکتر از Y^* می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۲» از آنجایی که در مدل P_2 متغیرها فقط مقادیر صحیح را می‌توانند اختیار کنند، موجب ایجاد محدودیت برای مدل شده و مقادیر بهینه مدل P_2 کوچکتر یا مساوی مدل P_1 خواهد بود. اگر X^* نقطه بهینه مسأله P_1 دارای مختصات صحیح باشد در این صورت X^* نقطه بهینه مسأله P_2 نیز می‌باشد و $Z^* = Y^*$. با توجه به توضیح‌های داده شده ناحیه شدنی P_1 را به صورت همیشه رسم کرده ولی ناحیه شدنی P_2 نقاط صحیح موجود در این فضای شدنی P_1 می‌باشد پس ناحیه شدنی P_2 کوچکتر یا مساوی P_1 می‌باشد پس مقدار تابع هدف P_1 بزرگتر یا مساوی P_2 می‌باشد.

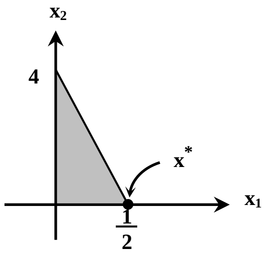
مثال ۵۱: کدام گزینه در ارتباط با مسائل P_1 و P_2 صحیح است؟

۱) اگر حل بهینه مسأله P_1 شمار باشد، آنگاه Z^* ممکن است بزرگتر از Y^* باشد.

۲) شرط لازم و کافی برای اینکه جواب بهینه مسائل P_1 و P_2 شمار باشند، آن است که مؤلفه‌های A, c و b همگی عدد صحیح باشند.

۳) مسأله p_1 اگر بی نهایت جواب بهینه داشته باشد، مسأله p_2 هم بی نهایت جواب بهینه خواهد داشت.

۴) شمار بودن مؤلفه‌های A, c و b ایجاب نمی‌کند که جواب‌های بهینه مسائل P_1 و P_2 یکسان باشند.



پاسخ: گزینه «۴» اگر حل بهینه P_1 شمار (صحیح) باشد در این صورت $Z^* = y^*$ پس گزینه (۱) غلط است.

مسأله مقابل مفروض است:

$$P_1: \underset{s.t}{\text{Max}}\ Z = x_1$$
$$8x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

مؤلفه‌های $b=[4], A=[8,1], c=[1,0]$ همگی شمار هستند در حالی که نقطه بهینه مسأله p_1 نقطه $x^*(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0)$ می‌باشد و $z^* = \frac{1}{2}$.

ولی نقطه بهینه مسأله $P_2: \underset{s.t.}{\text{Max}}\ y = x_1$، $8x_1+x_2 \le 4$، $x_1, x_2 \ge 0$، x_1, x_2 عدد صحیح، نقطه $y^*(x_1 = 0, x_2 = 0)$ می‌باشد و $y^* = 0$. پس گزینه (۲) نیز غلط است.

نقاط بهینه مسأله p_2 عبارتند از: $(x_1=0, x_2=0), (x_1=0, x_2=1), (x_1=0, x_2=2), (x_1=0, x_2=3), (x_1=0, x_2=4)$ که برای همه آنها $y^* = 0$ است. در حالی که مسأله P_1 فقط یک نقطه‌ی بهینه $(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0)$ دارد، پس گزینه (۳) نیز غلط است.

مثال ۵۲: اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، آنگاه تعداد مؤلفه‌های مثبت:

۱) در حل بهینه مسائل P_1 و P_2 یکسان است.

۲) در حل بهینه مسأله P_2 ممکن است از m بیشتر باشد.

۳) در حل بهینه مسأله P_1 همواره کمتر از تعداد مؤلفه‌های مثبت در حل بهینه مسأله P_2 است.

۴) در حل بهینه مسأله P_2 حداکثر برابر $m+1$ است.

پاسخ: گزینه «۲» حل بهینه مسأله P_2 لزوماً یک نقطه گوشه‌ای فضای شدنی نیست پس تعداد مؤلفه‌های مثبت آن می‌تواند بیشتر از m باشد.

مثال ۵۳: اگر مسأله P_1 جواب بهینه داشته باشد آنگاه مسأله P_2:

۱) ممکن است جواب بهینه نداشته باشد. ۲) حتماً جواب شدنی دارد. ۳) دارای فضای شدنی محدود می‌باشد. ۴) حتماً جواب بهینه دارد.

پاسخ: گزینه «۱» مسأله P_1, P_2 را به صورت مقابل در نظر بگیرید:

$$P_2: \underset{s.t}{\text{Max}}\ Z = 2x_1 - 3x_2$$
$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ و صحیح}$$

$$P_1: \underset{S.t.}{\text{Max}}\ Z = 2x_1 - 3x_2$$
$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

فضای شدنی مسأله P_1 فقط یک نقطه $(x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{4}{3})$ می‌باشد و همین نقطه بهینه است. درحالی که فضای شدنی مسأله P_2 تهی است و فاقد جواب بهینه است.

مثال ۵۴: جدول نهایی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است، ضریب x_3 در تابع هدف در چه محدوده‌ای تغییر کند، تا بهینگی جدول حفظ گردد؟

x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	2	0	-1	4
z	0	0	-6	-3	-5	

۱) $c_3 \ge -10$

۲) $c_3 \ge 10$

۳) $c_3 \le -10$

۴) $0 \le c_3 \le 10$

پاسخ: گزینه «۲» حفظ بهینگی منوط به این است که در جدول نهایی در مسأله Min سازی، هیچ عنصر مثبتی در سطر هدف وجود نداشته باشد متغیرهای x_1 و x_2 متغیرهای پایه‌ای جدول بهینه هستند. برای به دست آوردن ضرایب تابع هدف آن‌ها داریم:

$$C_B B^{-1} = (-3,-5) \Rightarrow (C_1\ C_2)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-3,-5) \Rightarrow C_1 = 6\ ,\ C_2 = 8$$

برای حفظ بهینگی جدول، ضریب x_3 (C_3) باید در شرایط زیر صدق کند.

$$Z_3 - C_3 \le 0 \Rightarrow C_B B^{-1} a_3 - C_3 \le 0 \Rightarrow (6,8)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - C_3 \le 0 \Rightarrow C_3 \ge 10$$

مثال ۵۵: مسأله مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \\ \text{S.t.}\quad & 2x_1 + x_2 \le 6000 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 9000 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4000 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

جدول بهینه سیمپلکس این مسأله به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	0	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	5	35000
S_1	0	0	1	1	-1	1	1000
x_1	1	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	2000
x_2	0	1	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	1000

ضریب هزینه متغیر x_3 را حداکثر چه میزان می‌توان افزایش داد تا جواب بهینه عوض نشود؟

۱) ۳۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $\frac{20}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به جدول بهینه، x_3 یک متغیر غیرپایه‌ای است، پس تغییر در ضریب هزینه آن فقط موجب تغییر $Z_3 - C_3$ می‌شود.

$$X_B = (S_1, x_1, x_2) \rightarrow C_B = (0,10,15)\ ,\ \bar{a}_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

روش ۱):

$$(Z_3 - C_3)_{\text{جدید}} = C_B B^{-1} a_3 - C_3 = (0,10,15)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} - C_3 = \frac{35}{3} - C_3$$

برای این که جواب بهینه عوض نشود مقدار C_3 باید به گونه‌ای باشد که $(Z_3 - C_3)_{\text{جدید}} = \frac{35}{3} - C_3 \ge 0$ یعنی $C_3 \le \frac{35}{3}$. با توجه به مقدار فعلی $C_3 = 5$ می‌توان C_3 را حداکثر $\frac{35}{3} - 5 = \frac{20}{3}$ افزایش داد.

روش ۲):

$$(Z_3 - C_3)_{\text{جدید}} = (Z_3 - C_3)_{\text{قدیم}} - \Delta C_3 = (\frac{20}{3}) - \Delta C_3 \ge 0 \Rightarrow \Delta C_3 \le \frac{20}{3}$$

مثال ۵۶: در مثال ۸۵ اگر مقدار $C_۳$ را از ۵ به ۱۲ تغییر دهیم، مقدار بهینه تابع هدف کدام گزینه خواهد شد؟

۱) ۳۵۱۰۰ ۲) ۳۵۲۰۰ ۳) ۳۵۳۰۰ ۴) ۳۵۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با تغییر گفته شده در صورت سؤال داریم:

$$(Z_۳-C_۳)_{\text{جدید}}=C_BB^{-۱}a_۳-C_۳=(۰,۱۰,۱۵)\begin{pmatrix}۱\\ -\frac{۴}{۳}\\ \frac{۵}{۳}\end{pmatrix}-۱۲=\frac{۳۵}{۳}-۱۲=-\frac{۱}{۳}<۰ \quad \text{یا} \quad (Z_۳-C_۳)_{\text{جدید}}=(\frac{۲۰}{۳})-(۱۲-۵)=-\frac{۱}{۳}$$

متغیر $x_۳$ شرط ورود به پایه را داراست و طبق آزمون مینیمم نسبت:

$$\theta=\text{Min}\{\frac{۱۰۰۰}{۱},\frac{۱۰۰۰}{\frac{۵}{۳}}\}=۶۰۰$$

متغیر $x_۲$ از پایه خارج می‌شود، مقدار بهینه تابع هدف مسأله جدید $Z^*=۳۵۲۰۰$ خواهد بود.

مثال ۵۷: قسمتی از جدول بهینه یک مسأله ماکزیمم‌سازی به‌صورت زیر است:

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
Z	۰	۰		۰	$\frac{۵}{۳}$	۵	۳۵۰۰۰
$S_۱$	۰	۰		۱			۱۰۰۰
$x_۱$	۱	۰		۰			۲۰۰۰
$x_۲$	۰	۱		۰			۱۰۰۰

(محدودیت‌های مسأله همگی به‌صورت ≥ بوده‌اند و $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ متغیرهای کمکی محدودیت‌ها هستند). همچنین محدودیت دوگان متناظر با متغیر $x_۳$ عبارت است از: $y_۲+۲y_۳\geq ۵$. محدوده تغییرات ضریب هزینه متغیر $x_۳$ چگونه باشد تا محصول $x_۳$ تولید گردد و میزان سود را بهبود دهد؟

۱) $C_۳\leq ۳۵$ ۲) $C_۳\geq ۳۵$ ۳) $C_۳\leq\frac{۳۵}{۳}$ ۴) $C_۳>\frac{۳۵}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای این که محصول $x_۳$ تولید شود باید وارد پایه گردد و برای این منظور باید $Z_۳-C_۳<۰$ باشد. یعنی شرط بهینگی از بین می‌رود و محدودیت دوگان متناظر با متغیر $x_۳$ در نقطه بهینه دوگان نقض می‌گردد: $(y_۱^*=۰,y_۲^*=\frac{۵}{۳},y_۳^*=۵)\Rightarrow\frac{۵}{۳}+۲(۵)\ngeq C_۳ \Rightarrow C_۳>\frac{۳۵}{۳}$

مثال ۵۸: مدل برنامه‌ریزی خطی زیر و جواب بهینه آن و همچنین دامنه تغییرات مقادیر سمت راست محدودیت‌ها به‌طوری که جواب پایه بهینه تغییر نکند داده شده است. اگر $b_۱$ به ۱۰۵ و $b_۲$ به ۱۰۰ و $b_۳$ به ۱۴۰ تبدیل شود و بقیه ضرایب ثابت نگه داشته شود، آنگاه:

$$\text{Max } Z=۲۵x_۱+۴۵x_۲+۱۲x_۳+۶۴x_۴+۵۰x_۵$$
s.t

$$۱۰x_۱+۵x_۲+۸x_۳-۸x_۵\leq ۱۰۰ \qquad ۳۵x_۱+۵x_۳-۳x_۴+۵x_۵\leq ۸۰$$
$$۲x_۱+۳x_۲+۴x_۳+۱۲x_۵\leq ۱۲۰ \qquad ۶x_۱+۱۱x_۲+۶x_۳+۵x_۵\leq ۱۴۵$$
$$۱۰x_۱+۵x_۲+۸x_۳-۸x_۵\leq ۱۰۰ \qquad x_j\geq ۰ \quad j=۱۶۵$$

۱) پایه بهینه تغییر نمی‌کند.
۲) پایه بهینه تغییر می‌کند.
۳) منطقه قابل قبول کوچکتر می‌گردد.
۴) منطقه قابل قبول تغییر نمی‌کند.

$$X^*=(۰,۰,۱۵,۶۲۵/۲۱,۲۱/۵۶۲,۳/۱۲۵) \qquad Z^*:۱۷۲۳/۷۵$$
$$۶۶/۶۶\leq b_۱\leq ۱۲۸/۳۴ \quad ۲۹/۰۶\leq b_۳ \quad ۱۳۰/۹۵\leq b_۴\leq ۱۵۷/۵ \quad ۱۰۷/۵\leq b_۲\leq ۱۳۶/۳$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» محدوده تغییرات مجاز برای عناصر سمت راست به صورت زیر می‌باشد.

$۶۶/۶۶\leq b_۱\leq ۱۲۸/۳۴ \xrightarrow{b_۱\to ۱۰۵}$ مجاز

$۱۰۷/۵\leq b_۲\leq ۱۳۶/۳ \xrightarrow{b_۲\to ۱۰۰}$ غیر مجاز $\Rightarrow \underbrace{B^{-۱}b}_{\text{تغییر می‌کند}} \to \underbrace{X_B}_{\text{تغییر می‌کند}}$

$۲۹/۰۶\leq b_۳ \xrightarrow{b_۳\to ۱۴۰}$ مجاز

مثال ۵۹: مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$z^* = \text{Max } c'x \quad \text{s.t} \quad Ax \le b \qquad\qquad z^{**} = \text{Max } c'x \quad \text{s.t} \quad Ax \le b + K$$

که در آن $A_{m\times n}$، $b_{m\times 1}$ و $c_{n\times 1}$ مقادیر ثابت هستند. فرض کنید $(y_1^*,\cdots,y_m^*)$ حل بهینهٔ مزدوج (Dual) آن باشد به علاوه فرض کنید:

که در آن $k = (k_1,\dots,k_m)'$ مقادیر ثابتی هستند، در این صورت:

۱) $z^{**} \ge z^* + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$ ۲) $z^{**} \le z^* + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$ ۳) $z^* \ge z^{**} + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$ ۴) $z^* \le z^{**} + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$

پاسخ: گزینه «۲» دوگان مسأله $P_1 : Z^* = \underset{\substack{\text{S.t.}\\ AX\le b}}{\text{Max}}\ C'X$ عبارت است از: $D_1 : \underset{\substack{\text{S.t.}\\ yA=C' \\ y\ge 0}}{\text{Min}}\ w^* = yb$ و دوگان مسأله $P_2 : Z^{**} = \underset{\substack{\text{S.t.}\\ AX\le b+k}}{\text{Max}}\ C'X$ عبارت است از:

$$D_2 : \underset{\substack{\text{S.t.}\\ yA=C' \\ y\ge 0}}{\text{Min}}\ w^{**} = y(b+k)$$

می‌دانیم نقطه $y^*(y_1^*,\dots,y_m^*)$ حل بهینه D_1 است، پس y^* نقطه شدنی D_1 نیز هست و $\begin{cases} y^*A = C' \\ y^* \ge 0 \end{cases}$ یعنی y^* یک جواب شدنی مسأله D_2 است.

پس مقدار تابع هدف مسأله D_2 در y^* یک کران بالا برای مقدار تابع هدف مسأله P_2 است: $(w^{**} \le y^*(b+k))$

$$Z^{**} \le y^*(b+k) = \underbrace{y^*b}_{w^*=Z^*} + y^*k = z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* k_i$$

مثال ۶۰: یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد و مسأله دوگان وابسته به آن را در نظر بگیرید. اگر k امین محدودیت مسأله اولیه در مقدار غیرصفر λ ضرب شود در این صورت جواب بهینه متغیر دوگان وابسته به این محدودیت چه تغییری می‌کند؟

۱) λ برابر می‌شود. ۲) تغییری نمی‌کند. ۳) با λ جمع می‌شود. ۴) در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب می‌شود.

پاسخ: گزینه «۴» مقادیر متغیرهای دوگان (قیمت‌های سایه‌ای) از رابطه $y = C_B B^{-1}$ به دست می‌آیند. چون K امین محدودیت مسأله اولیه در $\lambda \ne 0$ ضرب شده، پس K امین سطر ماتریس پایه B در جواب بهینه نیز در λ ضرب شده. بنابراین ستون K ام ماتریس B^{-1} در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب خواهد شد، یعنی اگر B^{-1} مسأله قدیم به صورت $B^{-1} = [b_1,\dots,b_k,\dots,b_m]$ باشد، که b_i ستون I ام B^{-1} است، ماتریس B^{-1} مسأله جدید به صورت $B_{new}^{-1} = [b_1,\dots,\frac{1}{\lambda}b_k,\dots,b_m]$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$y_{new}^* = C_B B_{new}^{-1} = (C_1,\dots,C_k,\dots,C_m)\begin{pmatrix} & \frac{1}{\lambda}b_{1k} & \\ \dots & \vdots & \dots \\ & \frac{1}{\lambda}b_{mk} & \end{pmatrix} = (y_1^*,\dots,\frac{y_k^*}{\lambda},\dots,y_m^*)$$

پس متغیر دوگان مربوطه (y_k) در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب می‌شود.

مثال ۶۱: تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت‌ها در یک برنامه‌ریزی خطی می‌تواند:

۱) در شرط بهینگی مسأله اثر بگذارد. ۲) در شرط موجه بودن مسأله اثر بگذارد.

۳) موارد ۱ و ۲ ۴) در شرایط بهینگی و موجه بودن اثر ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» بهینگی جواب از مقادیر $Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j$ برای متغیرهای غیرپایه قابل تشخیص است که به مقادیر سمت راست محدودیت‌ها (بردار b) بستگی ندارد. پس تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت‌ها روی شرط بهینگی اثر ندارد. موجه بودن هر جواب عبارت است از $\bar{b} = B^{-1}b \ge 0$ که به مقادیر b وابسته است.

مثال ۶۲: مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو مفروض است:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 15x_2 + 5x_3$$
S.t.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6000 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 9000 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 4000 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

جدول بهینه این مسأله به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	0	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	5	35000
S_1	0	1	1	1	-1	1	1000
x_1	1	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	2000
x_2	0	1	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	1000

مقدار سمت راست محدودیت اول را حداکثر چقدر می‌توان کاهش داد به گونه‌ای که پایه بهینه عوض نشود؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۲۰۰۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۱۵۰۰

پاسخ: گزینه «۱» برای این که پایه بهینه عوض نشود باید مقادیر سمت راست جدول نهایی مثبت بماند (جدول شدنی باقی بماند) پس داریم:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1}b' \ge 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000-\Delta \\ 9000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000-\Delta \ge 0 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta \le 1000$$

مثال ۶۳: در مسأله داده شده در مثال ۹۴ محدوده تغییرات مجاز b_2 چگونه است به طوری که جدول شدنی باقی بماند؟

۱) $0 \le b_2 \le 10000$ ۲) $10000 \le b_2 \le 12000$ ۳) $6000 \le b_2 \le 12000$ ۴) $6000 \le b_2 \le 10000$

پاسخ: گزینه «۴» برای این که جدول شدنی باقی بماند، باید مقادیر سمت راست در جدول نهایی مثبت باشند.

$$B^{-1}b' \ge 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ b_2 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 - b_2 \ge 0 \\ \frac{2}{3}b_2 - 4000 \ge 0 \\ -\frac{1}{3}b_2 + 4000 \ge 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 6000 \le b_2 \le 10000$$

با فرض این که b_1 و b_3 ثابت بمانند محدوده تغییرات مجاز b_2 به‌صورت بالا است.

مثال ۶۴: در مسأله داده شده در مثال ۹۴ اگر بردار سمت راست محدودیت‌ها را به $\begin{pmatrix} 4000 \\ 9000 \\ 3000 \end{pmatrix}$ تغییر دهیم کدام گزینه صحیح است؟

۱) متغیر S_1 پایه را ترک می‌کند و متغیر ورودی نداریم.

۲) متغیر S_1 پایه را ترک می‌کند و متغیر S_2 وارد پایه می‌شود.

۳) پایه بهینه عوض نمی‌شود.

۴) متغیر x_1 پایه را ترک می‌کند و متغیر x_3 وارد پایه می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & \frac{۲}{۳} & -۱ \\ ۰ & -\frac{۱}{۳} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴۰۰۰ \\ ۹۰۰۰ \\ ۳۰۰۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲۰۰۰ \\ ۳۰۰۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مقدار سمت راست اولین سطر، منفی شده، پس با توجه به سیمپلکس دوگان اولین متغیر پایه‌ای یعنی $S_۱$ از پایه خارج می‌شود و با توجه به سطر مربوط به متغیر خروجی $S_۱$، متغیر $S_۲$ وارد پایه می‌شود.

مثال ۶۵: دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی (۱) و (۲) را در نظر بگیرید:

$$Z=\min u(x_۱,x_۲,....,x_n)$$
$$\text{s.t.}\{a_۱x_۱+a_۲x_۲+......+a_nx_n\le E\} \qquad (۱)$$
$$Z'=\min u(x_۱,x_۲,.....,x_n)$$
$$\text{s.t.}\{a_۱x_۱+a_۲x_۲+.....+a_nx_n\le E'\} \qquad (۲)$$

این دو مسأله دارای تابع هدف غیرخطی و یکسان هستند. اگر $E'>E$ باشد، آنگاه همواره می‌توان نتیجه گرفت:

۱) $Z'<Z$ ‏ ۲) $Z'\ge Z$ ‏ ۳) $Z'>Z$ ‏ ۴) $Z'\le Z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $E'>E$، پس نقطه بهینه مسأله (۱) یک نقطه درونی مسأله (۲) است و نقطه بهینه مسأله (۱) نمی‌تواند نقطه بهینه مسأله (۲) باشد، یعنی $z\ne z'$ و چون $E'>E$ پس فضای شدنی مسأله (۲) بزرگ‌تر از فضای شدنی مسأله (۱) است و با بزرگ‌تر شدن فضای شدنی مقدار تابع هدف بهتر می‌شود یا بدون تغییر می‌ماند. ولی چون $z\ne z'$ پس مقدار تابع هدف حتماً بهتر می‌شود، یعنی $z'<z$.

مثال ۶۶: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر و جدول بهینه آن در دست است:

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Min}}\quad Z=-۴x_۱-۶x_۲-۱۸x_۳$$
$$۲x_۱+۳x_۳\ge ۳$$
$$۳x_۲+۲x_۳\ge ۵$$
$$x_۱,x_۲,x_۳\ge ۰$$

	z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	RHS
z	۱	۰	۰	−۸	−۲	−۲	−۱۶
$x_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۲}$
$x_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$

اگر قرار بود بین افزایش یا کاهش سمت راست اولین محدودیت و یا دومین محدودیت یکی را انتخاب کنید تا بیشترین بهبود در تابع هدف داشته باشید، کدام محدودیت را انتخاب می‌کردید و مقدار این افزایش یا کاهش چقدر بود؟

۱) کاهش در محدودیت دوم با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۱۰ واحد پول

۲) افزایش محدودیت دوم با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۱۰ واحد پول

۳) افزایش در محدودیت اول به اندازه ۳ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد پول

۴) کاهش در محدودیت اول به اندازه ۳ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد پول

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در مدل ارائه شده محدودیت‌ها بزرگتر مساوی بوده و مشاهده می‌شود که متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ می‌توانند مقادیر بی‌کران داشته باشند و چون ضرایب آن‌ها در تابع هدف منفی است، پس جواب بهینه هم بی‌کران می‌باشد که با جدول بهینه داده شده و سؤال سازگاری ندارد. در صورتی که تابع هدف را به صورت $\text{Min}\,Z=۴x_۱+۶x_۲+۱۸x_۳$ در نظر بگیریم مسأله را حل می‌کنیم.

با توجه به اینکه $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، پس $B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ می‌باشد. اگر فرض کنیم θ میزان کاهش سمت راست محدودیت اول باشد داریم:

$$B^{-1}b\ge ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳-\theta \\ ۵ \end{bmatrix}\ge ۰ \Rightarrow \theta\le ۳$$

حداکثر میزان θ برابر ۳ می‌باشد، پس اگر $\theta = 3$ باشد داریم:

$$Z = C_B B^{-1} b = [4\ 6]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = [2\ 2]\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 10 \Rightarrow \Delta Z = 10 - 16 = -6$$

حداکثر میزان کاهش سمت راست محدودیت اول ۳ واحد و حداکثر میزان بهبود ۶ واحد است، برای محدودیت دوم داریم:

$$B^{-1} b \ge 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5-\theta \end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow \theta \le 5 \qquad Z = C_B B^{-1} b = [4\ 6]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 6 \Rightarrow \Delta Z = 6 - 16 = -10$$

حداکثر میزان کاهش سمت راست محدودیت دوم ۵ واحد و حداکثر میزان بهبود تابع هدف ۱۰ واحد است. پس گزینه (۱) درست است.

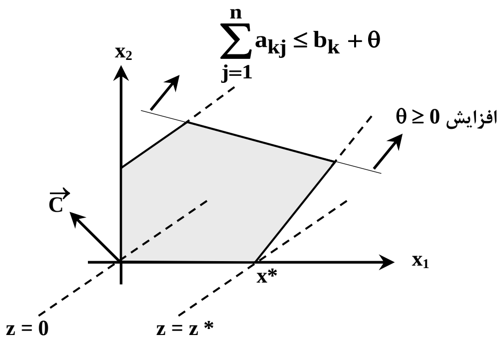
مثال ۶۷: مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Min}\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j \\ &\text{s.t} \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \le b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ &x_j \ge 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

اگر جواب بهینه این مسأله بردار X^* باشد و به ازای این جواب بهینه محدودیت K ام یک محدودیت غیرفعال باشد و سمت راست محدودیت K ام به $b_k + \theta$ $(\theta \ge 0)$ تغییر داده شود، دامنه تغییرات θ چه باید باشد تا X^* کماکان بردار حل بهینه باشد؟

۱) $\theta \le 0$ ۲) $\theta = 0$ ۳) $\theta \ge 0$ ۴) $0 \le \theta \le \dfrac{b_k}{\max(a_{kj})}$

پاسخ: گزینه «۳» محدودیت k ام عبارت است از: $a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k$. اگر مقدار سمت راست b_k را با $b_k + \theta$ جایگزین کنیم، در این صورت $a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k + \theta$ با افزایش مقدار θ در واقع فضای شدنی بزرگتر می‌شود ولی افزایش ناحیه شدنی لزوماً موجب عوض شدن نقطه بهینه x^* نمی‌شود، زیرا نقطه بهینه x^* با حرکت $Z = 0$ درخلاف جهت بردار گرادیان $\vec{C}$ پیدا می‌شود و چون جهت $\vec{C}$ تغییر نکرده، پس θ هر مقدار مثبتی بگیرد X^* کماکان نقطه بهینه است.



■ **توجه کنید که دو سؤال بعدی در رابطه با مسأله کلی زیر است.**

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر به نام مدل (P) داده شده است.

$$\mathbf{Max}\ x_0 = 5000E + 4000F$$
s.t.

۱) $E + F \ge 5$

۲) $E - 3F \le 0$

۳) $10E + 15F \le 150$

۴) $20E + 10F \le 160$

۵) $30E + 10E \ge 135$

$E, F \ge 0$

تصور کنید که این مسأله توسط کامپیوتر حل شده و بخشی از اطلاعات مهم آن به صورت زیر داده شده باشد:

Variable	Value	دامنه تغییرات ضرایب تابع هدف
E	۴/۵	$2666/67 \le c_1 \le 8000$
F	۷	$2500 \le c_2 \le 7500$

تصور کنید که سایر اطلاعات خروجی به شکل زیر باشد:

محدودیت	مقدار فعلی سمت راست	افزایش مجاز	کاهش مجاز	Dual Price
۱	۵	۶/۵	بی نهایت	۰
۲	۰	بی نهایت	۱۶/۵	۰
۳	۱۵۰	۹۰	۴۷/۱۴	۱۵۰
۴	۱۶۰	۷۳/۳۳	۴۰	۱۷۵
۵	۱۳۵	۷۰	بی نهایت	۰

مثال ۶۸: در رابطه با مدل (P)، مقدار **Dual Price** محدودیت اول برای چه دامنه‌ای از مقدار سمت راست این محدودیت برقرار است؟

۱) $b_1 \le ۱۶/۵$
۲) $b_1 \le ۶/۵$
۳) $b_1 \le ۱۱/۵$
۴) با اطلاعات داده شده نمی‌توان به طور قاطع اظهار نظر کرد.

پاسخ: گزینه «۳»

۶/۵ = افزایش مجاز در محدودیت اول   ۵ = مقدار فعلی سمت راست محدودیت اول

حداکثر دامنه مقادیر سمت راست $= ۵ + ۶/۵ = ۱۱/۵$

مثال ۶۹: در رابطه با مدل (P)، اگر به سمت راست محدودیت سوم که در حال حاضر ۱۵۰ است، ۵ واحد اضافه کنیم، کدام یک از عبارت زیر صحیح است؟

۱) مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.
۲) از مقدار تابع هدف ۷۵۰ واحد کم می‌شود.
۳) مقدار تابع هدف ۵۱۲۵۰ می‌شود.
۴) با اطلاعات داده شده نمی‌توان پاسخ داد.

پاسخ: گزینه «۳» میزان افزایش مجاز سمت راست محدودیت سوم به‌گونه‌ای که پایه بهینه نشود ۹۰ واحد است، پس پایه بهینه عوض نمی‌شود، اما هرگونه تغییر در عناصر وابسته به X_B، ممکن است مقدار تابع هدف بهینه را عوض کند.

$X_B = B^{-1} \underset{\text{تغییر}}{b} \;\rightarrow\; Z^*$ تغییر می‌کند

در بهینگی $\Rightarrow\; Z^* = W^*_{\text{جدید}} \rightarrow\; W^* = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + b_4y_4 + b_5y_5$

$W^* = ۱۵۵ \times ۱۵۰ + ۱۷۵ \times ۱۶۰ = ۵۱۲۵۰$

■ مسأله برنامه‌ریزی خطی P به شرح زیر مفروض است:

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\; z = x_1 - ۲x_2 - x_3 - ۳x_4 + ۲x_5$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 = b_1 = ۲۰ \\ & -x_1 + x_2 - x_4 = b_2 = ۱۰ \\ & x_2 + x_5 = b_3 = ۳۰ \\ & x_1 \text{ تا } x_5 \ge ۰ \end{aligned}$$

می‌دانیم در جدول نهایی سیمپلکس ماتریس مبنا (B) و برگردان آن B^{-1} به قرار مقابل است:

$$B = (a_4, a_2, a_3),\; B^{-1} = \begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

مثال ۷۰: اگر در مسأله P بردار $\beta = \begin{pmatrix} ۳\beta \\ \beta \\ ۲\beta \end{pmatrix}$ به بردار سمت راست $b = \begin{pmatrix} ۲۰ \\ ۱۰ \\ ۳۰ \end{pmatrix}$ افزوده شود محدوده پارامتر β برای اینکه ماتریس مبنای بهینه تغییر نکند چیست؟

۱) $\beta \ge ۰$
۲) $-۲۰ \le \beta \le ۱۰$
۳) $-۱۵ \le \beta \le ۱۰$
۴) $-۲۰ \le \beta \le ۲۰$

پاسخ: گزینه «۳» برای اینکه ماتریس مبنا (پایه) بهینه تغییر نکند، بایستی $\bar{b} = B^{-1}b \ge ۰$ پس:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲۰+۳\beta \\ ۱۰+\beta \\ ۳۰+۲\beta \end{pmatrix} \ge ۰ \Rightarrow \begin{cases} -(۱۰+\beta)+(۳۰+۲\beta) \ge ۰ \Rightarrow ۲۰+\beta \ge ۰ \Rightarrow \beta \ge -۲۰ & (۱) \\ (۳۰+۲\beta) \ge ۰ \Rightarrow \beta \ge -۱۵ & (۲) \\ -(۲۰+۳\beta)+(۳۰+۲\beta) \ge ۰ \Rightarrow \beta \le ۱۰ & (۳) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که: $-۱۵ \le \beta \le ۱۰$

■ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی و حل کامپیوتری آن در زیر آورده شده است: (مسأله P)

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Min}}\ ۱۵x_۱+۱۵x_۲+۱۶x_۳$$

$۱x_۱+۱x_۳ \le ۳۰$	محدودیت اول
$۰/۵x_۱-۱x_۲+۶x_۳ \ge ۱۵$	محدودیت دوم
$۳x_۱+۴x_۲-۱x_۳ \ge ۲۰$	محدودیت سوم
$x_۱,x_۲,x_۳ \ge ۰$	

Objective Function Value = ۱۳۹/۷۲۹۷۳۶

Variable	Value	Reduced Costs
$x_۱$	۷/۲۹۷۲۹۸	۰/۰۰۰۰۰۱
$x_۲$	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۶۷۵۶۷۴
$x_۳$	۱/۸۹۱۸۹۲	۰/۰۰۰۰۰۱

Constraint	Slack / Surplus	Dual Prices
۱	۲۰/۸۱۰۸۱۰	۰/۰۰۰۰۰۰
۲	۰/۰۰۰۰۰۰	−۳/۴۰۵۴۰۶
۳	۰/۰۰۰۰۰۰	−۴/۴۳۲۴۳۳

Obiective Coefficient Rangee

Variable	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
$x_۱$	۱/۳۳۳۳	۱۵/۰۰۰۰	۱۵/۵۴۳۴۷۷
$x_۲$	۱۴/۳۲۴۳	۱۵/۰۰۰۰	∞
$x_۳$	۱۳/۵۰۰۰۰۵	۱۶/۰۰۰۰	۱۸/۰۰۰۰۰

Constraint	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
$x_۱$	۱/۳۳۳۳۳۳	۱۵/۰۰۰۰۰	۱۵/۵۴۳۴۷۷
$x_۲$	۱۴/۳۲۴۳۲۶	۱۵/۰۰۰۰۰۰	No Upper Limit
$x_۳$	۱۳/۵۰۰۰۰۵	۱۶/۰۰۰۰۰۰	۱۸/۰۰۰۰۰

Right Hand Side Ranges

Constraint	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
۱	۹/۱۸۹۱۹۰	۳۰/۰۰۰۰۰	∞
۲	۳/۳۳۳۳	۱۵/۰۰۰۰۰	۱۱۱/۲۴۹۹۹۲
۳	−۲/۵۰۰۰۰	۲۰/۰۰۰۰۰	۸۹/۹۹۹۹۹۲

مثال ۷۱: اگر تابع هدف مسأله P به شکل $\text{Min}\,۱۵/۲x_۱+۱۴/۸x_۲+۱۵x_۳$ بود:

۱) حل بهینه عوض می‌شود و باید حل بهینه جدید را به دست آورد.

۲) حل بهینه عوض نمی‌شود زیرا مقادیر سمت راست را تغییر نمی‌دهیم.

۳) مقدار تابع هدف تغییر می‌کند ولیکن مقادیر حل بهینه عوض نمی‌شود.

۴)حل بهینه عوض می‌شود ولیکن مقدار بهینه تابع هدف تغییر نمی‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» وقتی بیش از یکی از ضرایب هزینه تغییر کند، برای بررسی اینکه آیا نقطه بهینه تغییر می‌کند یا خیر از قانون ۱۰۰٪ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۰/۲}{۰/۵۴۳۴۷۷}+\frac{۰/۲}{۰/۶۷۵۶۷۴}+\frac{۱}{۲/۴۹۹۹۹۵}=۱/۰۶۴>۱$$

پس نقطه بهینه ممکن است عوض شود. با محاسبه z_j-c_j متغیرهای غیرپایه ملاحظه می‌شود، حل بهینه تغییر نمی‌کند ولی مقدار z^* تغییر می‌کند زیرا $x_۱$ و $x_۳$ پایه‌ای هستند. (برای درک بهتر قانون ۱۰۰% به صفحه‌ی ۲۹۳رجوع شود)

مثال ۷۲: اگر y_i متغیر مسأله مزدوج در رابطه با محدودیت iام باشند، جواب بهینه مسأله مزدوج کدام است؟

۱) $y_۱ < ۰\ ;\ y_۲ > ۰\ ;\ y_۳ > ۰$

۲) $y_۱ = ۰\ ;\ y_۲ = \frac{۳}{۴}\ ;\ y_۳ = ۴/۴۳$

۳) $y_۱ = ۰/۶۷۵\ ;\ y_۲ = ۳/۴\ ;\ y_۳ = ۴/۴۳$

۴) $y_۱ = ۰\ ;\ y_۲ = ۳/۴\ ;\ y_۳ = ۴/۴۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع هدف مسأله مزدوج $w = ۳۰y_۱ + ۱۵y_۲ + ۲۰y_۳$ است. چون مقدار بهینه تابع هدف مسأله اولیه $Z^* = ۱۳۹/۷$ است، با قراردادن مقادیر داده شده در گزینه (۴) در تابع هدف مسأله مزدوج داریم: $W^* = ۱۳۹/۷$.

البته قرینه مقادیر متغیرهای دوگان در حل کامپیوتری در ستون Dual Prices داده شده است.

مثال ۷۳: در مسأله P اگر سمت راست محدودیت دوم را از ۱۵ به ۵ می‌رساندیم:

۱) مقدار بهینه تابع هدف جدید تقریباً ۱۷۳/۷۳ می‌شد. بردار حل تغییر نمی‌کرد ولیکن مقدار آن تغییر می‌کرد.

۲) مقدار بهینه تابع هدف جدید تقریباً ۱۷۳/۷۳ می‌شد ولیکن بردار حل و مقدار آن تغییر نمی‌کرد.

۳) مقدار بهینه تابع هدف جدید تقریباً برابر ۱۰۵/۷۲ می‌شد. بردار حل تغییر نمی‌کرد ولیکن مقدار آن تغییر می‌کرد.

۴) مقدار بهینه تابع هدف جدید تقریباً ۱۰۵/۷۲ می‌شد ولیکن بردار حل و مقدار آن تغییر نمی‌کرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به قسمت Right Hand Side Ranges می‌دانیم تغییرات مجاز $b_۲$ در بازه [۳/۳۳۳,۱۱۱/۲۴۹] است. مقدار جدید $b_۲$ نیز در این بازه قراردارد پس بردار حل (متغیرهای پایه) عوض نمی‌شود. ولی مقدار تابع هدف تغییر می‌کند و نیز مقادیر متغیرهای پایه نیز عوض می‌شوند:

$$\Delta Z^* = y_۲ \times \Delta b_۲ \Rightarrow \Delta Z^* = ۳/۴(-۱۰) = -۳۴ \Rightarrow Z^*_{new} = Z^*_{old} + \Delta Z^* = ۱۳۹/۷۲ - ۳۴ = ۱۰۵/۷۲$$

مثال ۷۴: فرض کنید که ضرایب تابع هدف مسألهP را به طور ترکیبی طوری تغییر دهیم که پایه بهینه فعلی عوض نشود. در این صورت کدام گزاره برای مسأله مزدوج مسأله P درست است؟

۱) پایه بهینه مسأله مزدوج و مقدار متغیرهای آن عوض می‌شود.

۲) پایه بهینه مسأله مزدوج عوض نمی‌شود، ولیکن مقدار متغیرهای آن عوض می‌شود.

۳) پایه بهینه مسأله مزدوج عوض می‌شود، ولیکن مقدار متغیرهای آن عوض نمی‌شود.

۴) پایه بهینه مسأله مزدوج و مقدار آن عوض نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» پایه بهینه عوض نمی‌شود ولی مقدار متغیرهای دوگان در حل بهینه عوض می‌شود زیرا $y^* = C_B B^{-۱}$ و می‌دانیم که C_B عوض شده است.

مثال ۷۵: مسأله زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = ۵x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴$$

s.t

$$\begin{aligned}
&۲x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ \le ۱۰\\
&x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ = ۱۸\\
&-x_۱ + ۵x_۲ + ۴x_۳ \le ۲۵\\
&x_j \ge ۰\ ,\ j = ۱ \text{ تا } ۴
\end{aligned}$$

دامنه تغییرات $c_۱$ (ضریب $x_۱$ در تابع هدف) و $b_۱$ ضریب سمت راست اولین محدودیت به طوری که پایه بهینه تغییر نکند در جدول بهینه $s_۱$ و $s_۳$ متغیرهای کمبود (SlACK) و $A_۲$ متغیر مصنوعی محدودیت‌های مربوطه می‌باشند.

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$S_۱$	$A_۲$	$S_۳$	R.H.S
z	۰	۵	β	۰	۱	۳+M	۰	۶۴
$x_۱$	۱	$\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۰
$x_۴$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	α
$s_۳$	۰	$\frac{۱۳}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۳۰

۱) $۰ \le b_۱ \le ۱۷, ۳ \le c_۱ \le ۳۶$

۲) $۰ \le b_۱ \le ۳۶, ۳ \le c_۱ \le ۱۷$

۳) $۳ \le b_۱ \le ۳۶, ۳ \le c_۱ \le ۲۷$

۴) $۵ \le b_۱ \le ۳۶, ۰ \le c_۱ \le ۱۷$

پاسخ: گزینه «۲» برای اینکه پایه بهینه تغییر نکند باید مقادیری از b_1 را به دست آوریم که به ازای آن جواب بهینه شدنی باقی بماند. پس:

$$\bar{b} = B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 18 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{2} \\ -\frac{b_1}{2}+18 \\ \frac{b_1}{2}+25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow 0 \leq b_1 \leq 36$$

■ **صورت مسأله مربوط به دو سؤال بعدی:**

مسأله برنامه‌ریزی خطی را مسأله p می‌نامیم:

$$\begin{aligned} \underset{s.t}{\text{Max}}\ Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ -x_1 + x_2 + a_{13}x_3 + x_4 &= b_1 \\ x_1 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

در این مسأله b_i, a_{ij}, c_j اعداد ثابت هستند. برای مسأله P ماتریس B و وارون B^{-1} که در زیر داده شده‌اند را در نظر بگیرید و به هر یک از سوال‌های زیر به طور مستقل از یکدیگر پاسخ دهید.

$$B = [A_1, A_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۷۶: در مسأله P اگر $b_1 = 1-2t$, $b_2 = 1-t$ و برای $t = 0$ ماتریس B پایه بهینه مسأله P باشد، تمام مقادیر $t \geq 0$ که برای آنها B پایه بهینه باقی بماند، کدام است؟

۱) $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$		۲) $0 \leq t \leq 1$		۳) $0 \leq t \leq \infty$		۴) $0 \leq t \leq 2$

پاسخ: گزینه «۱» مقادیری از t را باید به دست آوریم که به ازای آن جواب مسأله شدنی باقی بماند:

$$\bar{b} = B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \geq 0 \\ 2-3t \geq 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t \geq 0} 0 \leq t \leq \frac{2}{3}$$

مثال ۷۷: در مسأله p اگر $c_1 = c_2 = a_{23} = 1$ ، $c_3 = 3$, $a_{13} = 0$ و $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$ باشد، مقدار Z بهینه کدام است؟

۱) $b_1 + 3b_2$		۲) $2b_1 + 3b_2$		۳) b_2		۴) z نامحدود است.

پاسخ: گزینه «۱» چون $B = [A_1, A_2]$ ، پس متغیرهای x_1, x_2 پایه‌ای و x_3, x_4 غیرپایه‌ای هستند.

$$Z_3 - C_3 = C_B B^{-1} a_3 - C_3 = (1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = (1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -1 < 0$$

$$Z_4 - C_4 = C_B B^{-1} a_4 - C_4 = (1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 1 > 0$$

چون $Z_3 - C_3 < 0$ ، پس پایه B ، پایه بهینه نمی‌باشد. متغیر x_3 وارد پایه می‌شود و برای تعیین متغیر خروجی داریم:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \ ; \ \bar{a}_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \mid i = 1,2\} = \text{Min}\{\frac{b_2}{1}, \frac{b_1 + b_2}{1}\} = \text{Min}\{b_2, b_1 + b_2\} = b_2$$

می‌دانیم $b_1, b_2 \geq 0$ پس $b_2 \leq b_1 + b_2$. لذا متغیر x_1 پایه را ترک می‌کند و پایه جدید $B' = [A_3, A_2]$ است. بهینه بودن پایه B' را بررسی می‌کنیم:

$$B' = [A_3, A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B'^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Z_1 - C_1 = C_B B'^{-1} a_1 - C_1 = (3,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = (3,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = 1 > 0$$

$$Z_3 - C_3 = C_B B'^{-1} a_3 - C_3 = (3,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = (3,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

پایه B' بهینه است. برای یافتن مقدار بهینه تابع هدف داریم:

$$Z^* = C_B B'^{-1} b = (3,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (1,3)\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = b_1 + 3b_2$$

مثال ۷۸: مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مسأله a_j و b بردار سه تایی از اعداد ثابت‌اند.

$$\begin{aligned} \textbf{Max } & Z = x_1 + x_2 + x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5 \\ \text{s.t.} & \\ & a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 = b \\ & x_j \geq 0 \quad \text{تمام } j \text{ ها} \end{aligned}$$

برای $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ پایه $B = (a_1, a_2, a_3)$ با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ پایه بهینه این مسأله است. چنانچه مقدار b به $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ تغییریابد، کلیه مقادیر α به طوری که پایه B بهینه باقی بماند کدام است؟

۱) $-2 \leq \alpha$ ۲) $-1 \leq \alpha$ ۳) $-1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ ۴) $0 \leq \alpha \leq 2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای اینکه پایه فعلی بهینه باقی بماند باید با تغییرات مقادیر سمت راست جدول نهایی شدنی باقی بماند.

$$\bar{b} = B^{-1} b \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 4 \\ 2+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \geq 0 \\ 1-2\alpha \geq 0 \\ 2+\alpha \geq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

مثال ۷۹: در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی ماکزیمم‌سازی پایه بهینه $B = [a_1, a_3, a_4]$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $C_B = (1,2,3)$. محدودیت دوم مسأله دوگان $y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 7$ است. اگر بردار ضرایب متغیر x_2 در محدودیت‌ها به $a'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ تغییر یابد کدام گزینه درست است؟

۱) متغیر x_2 وارد پایه می‌شود و متغیر x_3 از پایه خارج می‌شود.

۲) متغیر x_2 وارد پایه می‌شود و متغیر x_1 از پایه خارج می‌شود.

۳) پایه بهینه تغییری نمی‌کند.

۴) متغیر x_2 وارد پایه می‌شود و هریک از متغیرهای x_1 یا x_3 می‌توانند از پایه خارج شوند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جواب بهینه مسأله دوگان عبارت است از:

$$y^* = C_B B^{-1} \Rightarrow y^* = (1,2,3)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (2,4,2) \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 2 \\ y_2^* = 4 \\ y_3^* = 2 \end{cases}$$

چون بردار ضرایب متغیر x_2 به $a'_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ تغییر یافته پس محدودیت دوم مسأله دوگان به‌صورت $2y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 7$ در می‌آید که $2(2) - (4) + 3(2) = 6 \ngeq 7$ یعنی جواب بهینه دوگان، محدودیت دوم مسأله دوگان را نقض می‌کند، پس بهینگی برقرار نمی‌باشد. یعنی: $Z'_2 - C_2 < 0$، در نتیجه متغیر x_2 وارد پایه می‌شود.

$$\bar{a}'_2 = B^{-1}a'_2 = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\\-1\end{bmatrix} \longrightarrow$$ عنصر لولا

در نتیجه دومین متغیر پایه‌ای یعنی x_3 از پایه خارج می‌شود.

مثال ۸۰: جدول بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به شکل زیر است که در آن x_5, x_6 متغیرهای کمبود هستند:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{44}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{56}{3}$
x_1	0	1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{4}{150}$	$\frac{1}{15}$

دامنه عنصر a_{11} در جدول اصلی این مسأله برنامه‌ریزی خطی برای اینکه حل مسأله کماکان قابل قبول بماند، کدام است؟

۱) $a_{11} > \frac{1}{4}$　　۲) $a_{11} \ge \frac{3}{2}$　　۳) $a_{11} \ge \frac{1}{4}$　　۴) $a_{11} \le \frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» پایه فعلی جدول $B=[a_1, a_2]$ است و چون $B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{15}\\ -\frac{1}{150} & \frac{4}{150}\end{bmatrix}$، پس $B = \begin{array}{cc} a_1 & a_2\\ \downarrow & \downarrow \end{array}\begin{bmatrix}4 & 10\\ 1 & 40\end{bmatrix}$. همچنین $\bar{b} = B^{-1}b$، $\bar{b} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{1}{15}\end{pmatrix}$

پس $b = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$. برای یافتن دامنه تغییرات a_{11} به منظور قابل قبول ماندن جواب داریم:

$$B = \begin{bmatrix}a_{11} & 10\\ 1 & 40\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b \ge 0 \to \frac{1}{40a_{11} - 10}\begin{bmatrix}40 & -10\\ -1 & a_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{200}{40a_{11}-10} \ge 0\\ \frac{4a_{11}-6}{40a_{11}-10} \ge 0\end{bmatrix} \to a_{11} \ge \frac{3}{2}$$

مثال ۸۱: جدول بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر است؛ محدودیت جدید $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ را به مسأله می‌افزاییم. مقدار بهینه تابع هدف مسأله جدید کدام است؟

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	3	0	0	1/5	0/5	8
x_3	-1	0	1	1/5	-0/5	1
x_2	2	1	0	-0/5	0/5	2

۱) ۶/۵
۲) ۶
۳) ۷/۵
۴) ۷

پاسخ: گزینه «۲» محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ را به طور معادله به دو محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 \le 2$:(۱) و $x_1 + x_2 + x_3 \ge 2$:(۲) تبدیل می‌کنیم. جواب بهینه مسأله یعنی $x_1^* = 0$ و $x_2^* = 2$ و $x_3^* = 1$ در محدودیت (۲) صدق می‌کند، اما محدودیت (۱) را نقض می‌کند. پس محدودیت (۱) را به‌صورت $x_1 + x_2 + x_3 + S_3 = 2$ نوشته و به سطر آخر جدول می‌افزاییم:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۳	۰	۰	۱/۵	۰/۵	۰	۸
x_3	−۱	۰	۱	۱/۵	−۰/۵	۰	۱
x_2	۲	۱	۰	−۰/۵	۰/۵	۰	۲
S_3	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۲

$\times -1$ $\quad$ $\times -1$

ستون‌های دوم و سوم جدول از فرم پایه خارج شده‌اند بنابراین قرینه سطر اول و دوم را به سطر سوم می‌افزاییم:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۳	۰	۰	۱/۵	۰/۵	۰	۸
x_3	−۱	۰	۱	۱/۵	−۰/۵	۰	۱
x_2	۲	۱	۰	−۰/۵	۰/۵	۰	۲
S_3	۰	۰	۰	−۱	۰	۱	−۱

با توجه به روش سیمپلکس دوگان، متغیر S_3 از پایه خارج و متغیر S_1 وارد پایه می‌شود.

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۳	۰	۰	۰	۰/۵	۱/۵	۶/۵
x_3	−۱	۰	۱	۰	−۰/۵	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	۲	۱	۰	۰	۰/۵	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
S_1	۰	۰	۰	۱	۰	−۱	۱

متغیر x_3 از پایه خارج و S_2 وارد پایه می‌شود. جدول بعدی شدنی و بهینه است و $Z^* = 6$ خواهد شد. (به دست آوردن جدول بعدی به عهده خواننده است)

مثال ۸۲: مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مسأله c_j عدد ثابت و a_j و b بردار سه تایی از اعداد ثابت‌اند.

$$\begin{aligned}\max_{s.t}\ & Z = x_1 + x_2 + x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \\ & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b \\ & x_j \ge 0 \quad \text{تمام } j \text{ ها}\end{aligned}$$

برای $b = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}$ پایه $B = (a_1, a_2, a_3)$ با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ پایه بهینه این مسأله است. اگر قید چهارم به صورت $2x_1 + x_3 + x_5 \ge b_4$ به مسأله اضافه شود، کلیه مقادیر b_4 به طوری که پایه B بهینه باقی بماند کدام است؟

۱) $b_4 \le 4$ ۲) $1 \le b_4 \le 2$ ۳) $1 \le b_4$ ۴) $b_4 \le 2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$x_B^* = B^{-1}b \Rightarrow x_B^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}$$

باید جواب بهینه $(1,1,2,0,0)$ در قید $2x_1 + x_3 + x_5 \ge b_4$ صدق نماید. پس: $2(1) + 2 + 0 \ge b_4 \Rightarrow b_4 \le 4$

مثال ۸۳: در مدل:

$$\begin{aligned}\text{MAX}_{s.t}\ & F(x) \\ & AX \ge b \\ & BX \le d \\ & X \ge 0\end{aligned}$$

اگر به جای ≥ و ≤ همه جا مساوی قرار دهیم، آنگاه مقدار بهینه تابع هدف:

۱) بدتر نمی‌شود. ۲) بهتر نمی‌شود. ۳) بهتر می‌شود. ۴) بدتر نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با این تغییرات فضای شدنی کوچکتر می‌شود، پس مقدار بهینه تابع هدف بهتر نمی‌شود. (یعنی کوچکتر می‌شود یا تغییر نمی‌کند)

مثال ۸۴: جدول بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی ماکزیمم‌سازی به صورت زیر است. اگر محدودیت $x_1 + x_2 + x_4 \geq 3$ به مسأله اضافه شود مقدار بهینه تابع هدف:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	۲	۰	۰	۱	۲۰
x_2	۱	۱	۰	۲	۵
x_3	۲	۰	۱	۰	۲

۱) تغییری نمی‌کند.
۲) برابر ۲۳ خواهد شد.
۳) برابر ۲۲ خواهد شد.
۴) برابر ۱۸ خواهد شد.

پاسخ: گزینه «۴» نقطه بهینه در محدودیت جدید صدق نمی‌کند، بنابراین باید این قید را به مسأله افزود و جواب بهینه را یافت. با افزودن قید جدید ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و مقدار بهینه تابع هدف بهتر نخواهد شد، چون مسأله ماکزیمم‌سازی است مقدار تابع هدف زیاد نمی‌شود و تنها گزینه‌ای که در آن مقدار تابع هدف کمتر از مقدار فعلی‌اش یعنی ۲۰ شده است گزینه (۴) است.

◆ ◆ ◆ ◆

■ **مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است. اگر در شرایط بهینه داشته باشیم $(X_1^* = 6, S_2^* = 10)$ در این صورت به پنج سؤال زیر مستقلاً پاسخ دهید.**

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.t } & x_1 + x_2 + x_3 \leq b_1 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq b_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۸۵: مقدار صحیح بردار $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ کدام گزینه است؟

۱) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از متغیرهای کمکی S_1, S_2 قیود را به تساوی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = b_1 \\ -x_1 + 2x_2 + S_2 = b_2 \end{cases}$$

چون رتبه ماتریس ضرایب ۲ است، پس در هر BFS و از جمله نقطه بهینه فقط دو متغیر پایه‌ای داریم و بقیه متغیرها غیرپایه‌ای (صفر) هستند که دو متغیر پایه‌ای در نقطه بهینه $x_1^* = 6$ و $S_2^* = 10$ هستند و $x_2^* = x_3^* = S_1^* = 0$ غیرپایه‌ای هستند. پس با قراردادن در محدودیت‌ها داریم:

$$\begin{cases} 6 + 0 + 0 + 0 = b_1 \\ -(6) + 2(0) + 10 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 6 \\ b_2 = 4 \end{cases}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۸۶: اگر محدودیت جدید به مدل سؤال قبل اضافه شود، جواب‌های بهینه جدید کدام مورد است؟ $2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 14$

۱) $(x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 9)$ ۲) $(x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 6)$ ۳) $(x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 0)$ ۴) $(x_1 = 6, x_2 = x_3 = 0)$

پاسخ: گزینه «۴» مختصات نقطه بهینه $(x_1^* = 6, x_2^* = 0, x_3^* = 0)$ را در محدودیت جدید قرار می‌دهیم: $2(6) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{3}(0) = 12 \leq 14$

نقطه بهینه در قید جدید صدق می‌کند، پس با افزودن این قید جواب بهینه عوض نمی‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۸۷: در مسأله قبلی حدود تغییرات ضریب متغیر x_1 در تابع هدف (c_1) به گونه‌ای که جواب پایه فعلی بهینه شود چقدر است؟

۱) $c_1 \leq 2$ ۲) $c_1 \geq 2$ ۳) $c_1 \leq \frac{5}{2}$ ۴) $2 \leq c_1 \leq \frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» متغیر x_1 پایه‌ای است، پس تغییر در ضریب هزینه آن روی $Z_j - C_j$ متغیرهای غیرپایه تاثیرگذار است. می‌دانیم $B = [a_1, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ پایه متناظر با جواب بهینه و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$Z_2 - C_2 = C_B B^{-1} a_2 - C_2 = (C_1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (-1) = (C_1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 = C_1 + 1 \geq 0 \Rightarrow C_1 \geq -1 \quad (1)$$

$$Z_3 - C_3 = C_B B^{-1} a_3 - C_3 = (C_1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = (C_1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = C_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow C_1 \geq 1 \quad (2)$$

$$Z_{s_1} - C_{s_1} = C_B B^{-1} a_{s_1} - C_{s_1} = (C_1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (C_1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \geq 0 \Rightarrow C_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow C_1 \geq 1$$

گزینه (۲) یعنی $C_1 \geq 2$ می‌تواند درست باشد.

مثال ۸۸: در مسأله قبلی اگر ضریب متغیر x_3 در تابع هدف (c_3) در شرایط زیر صدق کند، یعنی $c_3 \ge 2$ شود، آنگاه ....

۱) جواب تبهگن خواهیم داشت.
۲) متغیر x_3 وارد پایه و x_1 خارج می‌شود.
۳) متغیر x_3 وارد پایه و S_2 خارج می‌شود.
۴) مسأله دارای بی‌نهایت جواب بهینه است.

پاسخ: گزینه «۲»

$$Z_3 - C_3 = C_B B^{-1} a_3 - C_3 = (2,0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} - C_3 = (2,0)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - C_3 = 2 - C_3$$

چون $C_3 \ge 2$، پس $Z_3 - C_3 = 2 - C_3 \le 0$ یعنی x_3 شرط ورود به پایه را داراست و $\bar{a}_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ و $\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 10\end{bmatrix}$

پس برای تعیین متغیر خروجی از پایه داریم: $\mathrm{Min}\{\frac{6}{1}, \frac{10}{1}\} = 6$، پس متغیر x_1 از پایه خارج می‌شود.

مثال ۸۹: در مسأله قبلی قیمت سایه‌ای (شبه قیمت) منابع به ترتیب عبارتند از.................... .

۱) منبع اول برابر ۲، منبع دوم برابر صفر
۲) منبع اول برابر ۲، منبع دوم برابر یک
۳) منبع اول برابر صفر، منبع دوم برابر سه
۴) منبع اول برابر ۳، منبع دوم برابر یک

پاسخ: گزینه «۱»

قیمت سایه‌ای = مقادیر بهینه متغیرهای دوگان = $y^* = C_B B^{-1} \Rightarrow (y_1^*, y_2^*) = (2,0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (2,0) \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 2 \\ y_2^* = 0 \end{cases}$

مثال ۹۰: مدل زیر و جواب بهینه آن و همچنین دامنه تغییرات مقادیر سمت راست محدودیت‌ها به طوری که جواب پایه بهینه تغییر نکند، داده شده است:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Max}\ Z &= 25x_1 + 45x_2 + 12x_3 + 64x_4 + 50x_5 \\
\text{s.t.}\quad & 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 8x_5 \le 100 \\
& 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 125x_5 \le 120 \\
& 35x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 5x_5 \le 80 \\
& 6x_1 + 11x_2 + 6x_4 + 5x_5 \le 145 \\
& x_j \ge 0 \quad , \quad j = 1, \dots, 5
\end{aligned}$$

$x^* = (0, 0, 15/625, 21/562, 3/125),\ z^* = 1723/75$

$66/66 \le b_1 \le 128/34$

$107/5 \le b_2 \le 136/3$

$29/06 \le b_3$

$130/95 \le b_4 \le 157/5$

اگر b_1 به ۱۰۵ و b_2 به ۱۰۰ و b_3 به ۱۴۰ تغییر کند و بقیه ضرایب و مقادیر ثابت باشند، آنگاه :

۱) پایه بهینه تغییر نمی‌کند.
۲) پایه بهینه تغییر می‌کند.
۳) منطقه قابل قبول کوچکتر می‌گردد.
۴) منطقه قابل قبول تغییر نمی‌کند.

پاسخ: گزینه «۲» چون b_2 به ۱۰۰ تغییر یافته در حالیکه دامنه تغییرات مجاز b_2 عبارت است از : $107/5 < b_2 < 136/3$.

آزمون فصل چهارم

۱ـ دوگان مسأله $\underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\; -z = cx$, $Ax = b$, $x \ge 0$ **کدام است؟**

۱) $\text{Max } w = yb$, s.t. $yA \ge c$, y: آزاد

۲) $\text{Min } w = yb$, s.t. $yA \le c$, y: آزاد

۳) $\text{Min } w = yb$, $yA \ge c$, y: آزاد

۴) $\text{Max } w = yb$, s.t. $yA \le c$, y: آزاد

۲ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) همواره حداقل یکی از مسائل اولیه و دوگان شدنی هستند.

۲) ممکن است یکی از مسائل اولیه و دوگان بهینه نامحدود داشته باشد درحالی که دیگری بهینه محدود داشته باشد.

۳) هر دو مسأله اولیه و دوگان نظیر آن نمی‌توانند بهینه نامحدود داشته باشند.

۴) اگر یکی از مسایل اولیه دوگان نشدنی باشد، دیگری حتماً بهینه نامحدود دارد.

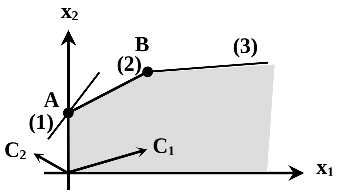
۳ـ مسأله مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 20x_1 - 12x_2 - 14x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 30 \\ &\quad 3x_1 - 3x_2 + 10x_3 \le 20 \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

اگر در جواب پایه‌ای بهینه متغیرهای x_1 و x_2 پایه‌ای باشند، مقادیر بهینه متغیرهای مسأله دوگان کدام است؟

۱) $y^* = (-8, 0, 28)$ ۲) $y^* = (1, 0, 1)$ ۳) $y^* = (0, 2, 0)$ ۴) $y^* = (0, 1, 2)$

۴ـ ناحیه شدنی یک مسأله LP با تابع هدف Max به صورت زیر است:



کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر بردار ضرایب هزینه C_1 باشد، مسأله دوگان فاقد ناحیه شدنی است.

۲) اگر بردار ضرایب هزینه C_2 باشد، مسأله دوگان دارای جواب بهینه چندگانه است.

۳) اگر گوشه B نقطه بهینه مسأله باشد. در این صورت در جواب بهینه مسأله دوگان هر دو محدودیت به صورت تساوی هستند و $y_1^* \ne 0$.

۴) هیچکدام

۵ـ در تست ۴ کدام گزینه اگر گوشه B بهینه باشد، در مورد مقادیر بهینه متغیرهای مسأله دوگان صحیح است؟

۱) $y_3^* < 0 , y_2^* < 0 , y_1^* = 0$

۲) $y_3^* > 0 , y_2^* > 0 , y_1^* = 0$

۳) $y_3^* < 0 , y_2^* < 0 , y_1^* \ne 0$

۴) $y_3^* > 0 , y_2^* > 0 , y_1^* \ne 0$

۶ـ مسأله $P: \text{Max } z = 2x_1 + x_3$ مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ & 2x_2 + x_3 \ge 1 \\ & 3x_1 + 2x_3 \ge 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) مسأله دوگان نشدنی است.

۲) مسأله دوگان بهینه نامتناهی است.

۳) مسأله دوگان بهینه محدود دارد و $w^* > 0$.

۴) مسأله دوگان بهینه محدود دارد و $w^* < 0$.

۷ـ مسأله مقابل مفروض است:

$$P_1: \underset{s.t}{Max} \quad Z_1 = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \le 20$$

$$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

جواب بهینه دوگان $y^* = (0,10,10)$ می‌باشد. حال مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$P_2: \underset{s.t.}{Max} \; z_2 = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 53$$

$$4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \le 25$$

$$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 13$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

اگر z_2^* مقدار بهینه تابع هدف مسأله P_2 باشد، در این صورت:

۱) $z_2^* \le 380$ ۲) $z_2^* > 380$ ۳) $z_2^* < 280$ ۴) $280 \le z_2^* \le 380$

۸ـ در تست ۷ جواب بهینه مسأله P_1 کدام است؟

۱) $x_3^* = 7 \;,\; x_2^* = 2 \,,\, x_1^* = 1$ ۲) $x_3^* = 3 \;,\; x_2^* = 2 \,,\, x_1^* = 1$

۳) $x_3^* = 8 \;,\; x_2^* = 0 \,,\, x_1^* = 2$ ۴) $x_3^* = 2 \;,\; x_2^* = 0 \,,\, x_1^* = 4$

۹ـ اگر x^o یک جواب پایه‌ای برای مسأله اولیه با تابع هدف z و y^o جوابی برای مسأله دوگان با تابع هدف w باشد، در این صورت:

۱) اگر $z(x^o) = w(y^o)$ آنگاه x^o و y^o نقاط بهینه مسائل نظیرشان هستند.

۲) اگر x^o و y^o گوشه‌ای و $z(x^o) = w(y^o)$ در این صورت حتماً y^o یک BFS مسأله دوگان است.

۳) اگر x^o و y^o نقاط گوشه‌ای و $z(x^o) = w(y^o)$ در این صورت حتماً x^o و y^o نقاط بهینه مسایل نظیرشان هستند.

۴) اگر x^o و y^o نقاط شدنی و $z(x^o) = w(y^o)$ در این صورت حتماً x^o و y^o نقاط بهینه مسایل نظیرشان هستند.

۱۰ـ جدول زیر یکی از مراحل حل یک مسأله ماکزیمم سازی به روش سیمپلکس دوگان است:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	3	1	2	0	
x_1	1	3	0	5	0	-4
s_2	0	-2	4	2	1	2

کدام گزینه در مورد این مسأله صحیح است؟

۱) دوگان این مسأله جواب بهینه متناهی دارد. ۲) دوگان این مسأله نشدنی است.

۳) این مسأله جواب بهینه نامتناهی دارد. ۴) این مسأله نشدنی است.

۱۱ـ در مسأله پارامتری $\text{Min}\, z = cx$ نمودار z بر حسب λ چگونه است؟

$$\text{s.t} \quad Ax \ge b(\lambda)$$

$$x \ge 0$$

۱) قطعه، قطعه خطی و محدب است. ۲) خطی است. ۳) قطعه، قطعه خطی و مقعر است. ۴) ثابت است.

۱۲ـ مسأله مقابل و جدول بهینه آن مفروضند:

$$\text{Min } z=-2x_1+x_2-x_3$$

s.t.

$$x_1+x_2+x_3\le 6$$
$$-x_1+2x_2\le 4$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	۰	−۳	−۱	−۲	۰	−۱۲
x_1	۱	۱	۱	۱	۰	۶
s_2	۰	۳	۱	۱	۱	۱۰

اگر فعالیت x_4 با ضریب هزینه $C_4=-1$ و بردار ضرائب $a_4=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ در محدودیت‌ها به مسأله افزوده گردد، جواب بهینه جدید کدام است؟

$(x^*(x_1,x_2,x_3,x_4,s_1,s_2))$

۱) $x^*(1,0,0,5,0,0)$
۲) $x^*(2,1,0,0,3,4)$
۳) $x^*(6,0,0,1,0,10)$
۴) $x^*(1,1,1,0,2,1)$

۱۳ـ در تست ۱۲ اگر بردار سمت راست با $b(\lambda)=\begin{pmatrix}6-2\lambda\\4+\lambda\end{pmatrix}$ جایگزین گردد، در چه محدوده‌ای از پارامتر نامنفی λ پایه بهینه تغییر نخواهد کرد؟

۱) $3\le\lambda\le 10$
۲) $0\le\lambda\le 3$
۳) $0\le\lambda\le 10$
۴) $\lambda\ge 10$

۱۴ـ در تست ۱۲ اگر بردار ضریب هزینه با $c(\lambda)=(-2+\lambda,1-2\lambda,-1)$ جایگزین گردد، در چه محدوده‌ای از پارامتر نامنفی λ پایه بهینـه تغییـر نخواهد کرد؟

۱) $1\le\lambda\le 2$
۲) $0\le\lambda\le 2$
۳) $0\le\lambda\le 1$
۴) $\lambda\ge 2$

۱۵ـ در تست ۱۲ ضریب x_3 در محدودیت اول به چه مقداری تغییر یابد تا جواب بهینه چندگانه داشته باشیم؟

۱) -2
۲) 2
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

۱۶ـ جدول آغازین و فعلی یک LP به صورت زیر هستند؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	RHS
z	۱	۶	−۷	a	۵	۰	۰	۰
s_1	۵	−۴	۱۳	b	۱	۱	۰	۲۰
s_2	۱	−۱	۵	c	۱	۰	۱	۸

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	RHS
z	$\frac{72}{7}$	۰	۰	$\frac{11}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{23}{7}$	$-\frac{50}{7}$	$\frac{60}{7}$
x_3	$-\frac{1}{7}$	۰	۱	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$
x_2	$-\frac{12}{7}$	۱	۰	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$

حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) -4
۲) -5
۳) -6
۴) -7

۱۷ـ در تست ۱۶ حاصل $\frac{\partial x_2}{\partial x_5}$ کدام است؟

۱) $-\frac{8}{7}$
۲) $\frac{8}{7}$
۳) $\frac{7}{8}$
۴) $-\frac{7}{8}$

۱۸ـ در تست ۱۶ حاصل $\frac{\partial x_3}{\partial b_2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{7}$
۲) $\frac{12}{7}$
۳) $-\frac{12}{7}$
۴) $\frac{4}{7}$

۱۹ـ در تست ۱۶ حاصل $\frac{\partial z}{\partial b_1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{23}{7}$
۲) $\frac{50}{7}$
۳) $\frac{23}{7}$
۴) $-\frac{50}{7}$

۲۰ـ در تست ۱۶ حاصل $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{72}{7}$
۲) $\frac{72}{7}$
۳) $\frac{7}{72}$
۴) $-\frac{7}{72}$

فصل پنجم

«مدل حمل و نقل و تخصیص و مدل‌های شبکه»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال۱: مسأله حمل و نقل مقابل مفروض است؟

	1	2	3	عرضه
1	4	7	0	50
2	2	-1	6	100
3	0	4	1	50
تقاضا	70	40	90	200 / 200

یک جواب شدنی برای این مسأله ارائه دهید و میزان هزینه حمل و نقل را به ازای جواب موردنظر بیابید.

پاسخ: یک جواب شدنی در جدول مقابل نمایش داده شده است که به صورت زیر است:

	1	2	3	عرضه
1	4 / 21	7 / 29	0	50
2	2 / 9	-1 / 6	6 / 85	100
3	0 / 40	4 / 5	1 / 5	50
تقاضا	70	40	90	

$x_{11}=۲۱ \quad , \quad x_{12}=۲۹ \quad , \quad x_{13}=۰$

$x_{21}=۹ \quad , \quad x_{22}=۶ \quad , \quad x_{23}=۸۵$

$x_{31}=۴۰ \quad , \quad x_{32}=۵ \quad , \quad x_{33}=۵$

میزان هزینه حمل و نقل به ازای ارسال‌های بالا با ضرب عدد هر خانه در ضریب هزینه همان خانه و جمع کردن مقادیر حاصله عبارت است از: $z=۸۳۴$.

مثال۲: در یک مدل حمل و نقل متوازن با m مبدأ و n مقصد:

۱) کلیه محدودیت‌ها مستقل از یکدیگرند.

۲) در شرایط خاص ممکن است یکی از محدودیت‌ها از ترکیب خطی سایر محدودیت‌ها به دست آید.

۳) فقط می‌توان محدودیت آخر را بر حسب ترکیب خطی سایر محدودیت‌ها نوشت.

۴) می‌توان هر کدام از محدودیت‌ها را بر حسب ترکیب خطی سایر محدودیت‌ها نوشت.

پاسخ: گزینه «۴» در مدل حمل و نقل متوازن، همواره یکی از محدودیت‌ها زائد است و می‌توان محدودیت زائد را بر حسب ترکیب خطی سایر محدودیت‌ها نوشت و در مدل حمل و نقل این محدودیت زائد ممکن است هر کدام از محدودیت‌ها باشد.

مثال ۳: مسأله حمل و نقل روبرو را در نظر بگیرید:

$$\min z=\sum_{i=۱}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}=a_i , i=۱,\dots,m$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij}=b_j , j=۱,\dots,n$$

به ازای تمام i و j ها، $x_{ij}\geq ۰$

اگر این مسأله توسط دستورالعمل سیمپلکس حل شود، مقدار عنصر لولا در هر تغییر جدول سیمپلکس این مسأله کدام است؟

۱) ۱

۲) $۱ , -۱$

۳) $۰,۱,-۳$

۴) $\min\{a_i,b_j\}$، x_{ij} متغیر ورودی به پایه

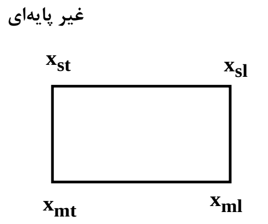
پاسخ: گزینه «۱» اگر مسأله حمل و نقل را به روش سیمپلکس حل کنیم، در هر جدول سیمپلکس ستون‌های متناظر با متغیرهای غیراساسی فقط درایه‌های ۰ و ۱ و ۱- هستند (به متن درس مراجعه شود). می‌دانیم ستون لولا از بین ستون‌های مربوط به متغیرهای غیراساسی انتخاب می‌شود ولی ۰ و ۱- نمی‌توانند عنصر لولا باشند پس عنصر لولا در هر جدول سیمپلکس، ۱ خواهد بود.

مثال ۴: ضمن حل مسائل حمل و نقل به روش سیمپلکس، در هر مرحله با حلقه (Loop) مواجه هستیم. در ارتباط با بردارهای مرتبط با حلقه در هر مرحله کدام گزینه صحیح است؟

۱) حتماً استقلال خطی دارند. ۲) استقلال خطی ندارد.

۳) ممکن است استقلال خطی داشته باشند. ۴) لزومی ندارد که استقلال خطی داشته باشند.

پاسخ: گزینه «۲» حلقه زیر را در نظر بگیرید:



نمایش ستون غیرپایه‌ای a_{st} برحسب ستون‌های پایه‌ای a_{mt}, a_{ml}, a_{sl} به صورت:

(۱): $a_{st} = a_{sl} - a_{ml} + a_{mt}$ زیرا در مدل حمل و نقل ستون ضرایب مربوط به متغیر x_{ij} به صورت $a_{ij}^T = [0\cdots0\ \underset{\text{مکان i ام}}{1}\ 0\cdots0\ \underset{\text{مکان j ام}}{1}\ 0\cdots0]$ پس با جایگذاری به جای ستون‌های پایه و غیرپایه رابطه (۱) به وضوح برقرار است. رابطه (۱) بیان می‌کند که بردارهای مرتبط با هر حلقه استقلال خطی ندارند.

مثال ۵: با استفاده از روش گوشه شمال غربی یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل زیر بیابید.

	1	2	3	
1	4	3	2	130
2	1	0	-1	75
3	2	1	3	50
	60	140	55	255 / 255

پاسخ: تعداد متغیرهای پایه‌ای در این مدل حمل ونقل $m+n-1=5$ است. خانه‌های پر در جدول مقابل همان خانه‌های مربوط به متغیرهای پایه‌ای است و اعداد موجود در آنها مقادیر متغیرهای پایه‌ای است و خانه‌های خالی مربوط به متغیرهای غیرپایه‌ای است که مقدار صفر دارند.

	1	2	3	
1	4 / 60	3 / 70	2	~~130~~ ~~70~~ 0
2	1	0 / 70	-1 / 5	~~75~~ ~~5~~ 0
3	2	1	3 / 50	~~50~~ 0
	~~60~~ 0	~~140~~ ~~70~~ 0	~~55~~ ~~50~~ 0	255 / 255

جواب پایه‌ای شدنی به دست آمده به صورت زیر است:

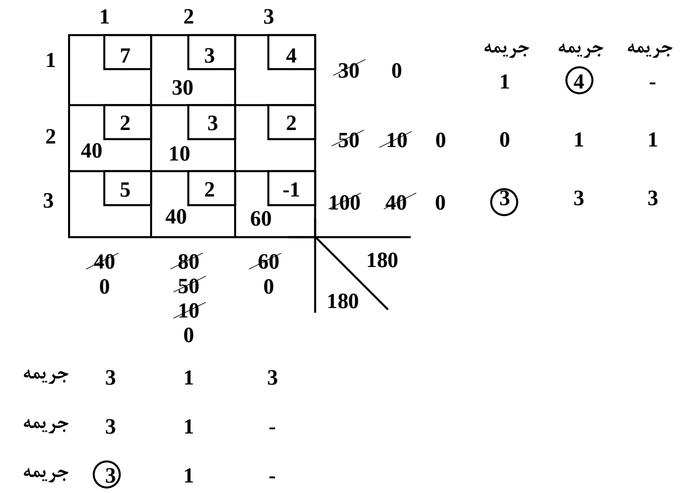
$$x_{11}=60, x_{12}=70, x_{13}=0 \quad ; \quad x_{21}=0, x_{22}=70, x_{23}=5 \quad ; \quad x_{31}=0, x_{32}=0, x_{33}=50$$

و هزینه حمل و نقل به ازای این جواب $z=595$ است.

مثال ۶: با روش وگل یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل زیر بیابید.

	1	2	3	
1	7	3	4	30
2	2	3	2	50
3	5	2	-1	100
	40	80	60	180 / 180

☑ پاسخ:



یک جواب پایه‌ای غیرتباهیده به دست آمده است زیرا تعداد خانه‌های پر برابر $m+n-1=5$ است.

مثال ۷: با روش راسل یک جواب شدنی برای مسأله‌ی حمل و نقل زیر بیابید.

	۱	۲	۳	
۱	۷	۳	۴	۳۰
۲	۲	۳	۲	۵۰
۳	۵	۲	−۱	۱۰۰
	۴۰	۸۰	۶۰	

☑ پاسخ:

$x_{ij} : c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$

$x_{11} : 7-7-7=-7$

$x_{12} : 3-7-3=-7$

$x_{13} : 4-7-4=-7$

$x_{21} : 2-3-7=-8$

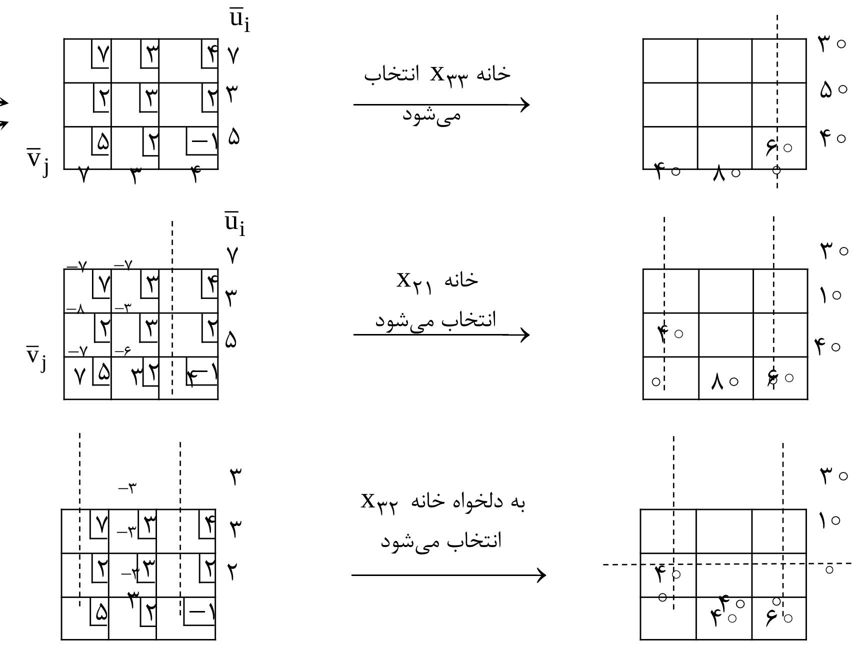
$x_{22} : 3-3-3=-3$

$x_{23} : 2-3-4=-5$

$x_{31} : 5-5-7=-7$

$x_{32} : 2-5-3=-6$

$x_{33} : -1-5-4=-10$ ✓



به همین ترتیب خانه‌های $x_{12}=30$ و $x_{22}=10$ خواهند شد.

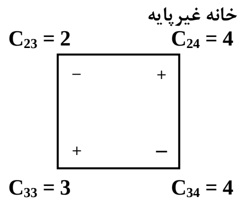
مثال ۸: یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل زیر داده شده است:

	1	2	3	4	
1	(-1) 20	(2)	(0) 40	(3)	60
2	(4)	(1) 30	(2) 10	(4)	40
3	(5)	(1)	(3) 20	(4) 30	50
	20	30	70	30	

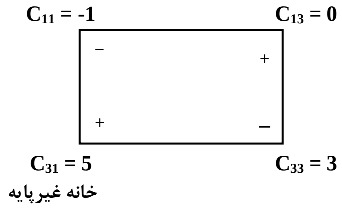
$C_{۲۴} - Z_{۲۴}, C_{۳۱} - Z_{۳۱}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

محاسبه $C_{۲۴} - Z_{۲۴}$:



محاسبه $C_{۳۱} - Z_{۳۱}$:



$$C_{۲۴} - Z_{۲۴} = ۴ - ۲ + ۳ - ۴ = ۱$$

$$C_{۳۱} - Z_{۳۱} = ۵ - (-۱) + ۰ - ۳ = ۳$$

■ **سؤالات ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ در رابطه با مسأله کلی ذیل است:**

مسأله زیر را مسأله T می‌نامیم. در این مسأله، c_{ij} و a_i b_j اعداد ثابت نامنفی هستند.

$$\underset{s.t.}{\text{Min}} \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = ۱,\dots,m$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = ۱,\dots,n$$

$$x_{ij} \ge ۰ \quad , \quad i = ۱,\dots,m \quad j = ۱,\dots,n$$

مثال ۹: مسأله حمل و نقل زیر مفروض است، که در آن C_{ij} و a_i و b_j اعدادی ثابت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{s.t.}{\text{Min}\, Z} = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} C_{ij}\ x_{ij} \\ \qquad \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = a_i \ ;\ i = ۱,\cdots,m \\ \qquad \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = b_j \ ;\ j = ۱,\cdots,n \\ \qquad x_{ij} \ge ۰ \text{ به ازای تمام } j,i \text{ ها} \end{array}\right\} \text{ مسأله Q}$$

شرط کافی برای اینکه تمام جواب‌های پایه‌ای شدنی مسأله بالا عدد صحیح باشند کدام است؟

۱) تمام a_i ها و b_j ها عدد صحیح باشند.

۲) تمام C_{ij} ها عدد صحیح باشند.

۳) تمام a_i ها و C_{ij} ها عدد صحیح باشند.

۴) تمام b_j ها و C_{ij} ها عدد صحیح باشند.

پاسخ: گزینه «۱» اثبات در نکته ۴ ذکر شده است.

مثال ۱۰: اگر مسأله Q در مثال قبل توسط روش حمل و نقل حل شود و برای جواب پایه‌ای شدنی مربوط به جدول حمل و نقل سیستم روابط خطی روبرو را حل کنیم: x_{ij} **متغیر پایه‌ای:** $u_i + v_i = c_{ij}$

و $w = (u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n)$ **تعریف شود، در چه صورت** w **یک جواب قابل قبول برای مسأله دوگان است؟**

۱) $\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$

۲) $u_i + v_j \le C_{ij}$ برای تمام خانه‌های غیرپایه‌ای جدول حمل و نقل

۳) $\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{n} v_j$

۴) $u_i + v_j = a_i b_j$ برای تمام خانه‌های غیرپایه‌ای جدول حمل و نقل

پاسخ: گزینه «۲» در صورتی مسأله دوگان شدنی می‌شود که مسأله اولیه بهینه باشد، یعنی برای همه متغیرهای غیرپایه‌ای داشته باشیم: $C_{ij} - z_{ij} \ge 0$ و در نتیجه: $C_{ij} - (u_i + v_j) \ge 0$، یعنی برای متغیرهای غیرپایه‌ای $u_i + v_j \le c_{ij}$.

مثال ۱۱: متغیرهای مسأله مزدوج هر مدل حمل و نقل:

۱) مقید به قید نامنفی بودن نیستند و هیچ درجه آزادی ندارند.

۲) مقید به قید نامنفی بودن نیستند و هیچکدام نامنفی هم نمی‌شوند.

۳) مقید به قید نامنفی بودن نیستند و یک درجه آزادی دارند.

۴) مقید به قید نامنفی بودن هستند.

پاسخ: گزینه «۳» در مسأله حمل و نقل قیود به صورت تساوی هستند پس متغیرهای مسأله مزدوج مقید به قید نامنفی بودن نیستند و چون یکی از قیود مسأله حمل و نقل زائد است، یکی از متغیرهای مسأله مزدوج مقدار دلخواه می‌گیرد یعنی متغیرهای مسأله مزدوج دارای یک درجه آزادی هستند.

مثال ۱۲: یک جواب پایه‌ای شدنی برای مسأله حمل و نقل زیر داده شده است. مقادیر پارامترهای e, d, c کدام است؟

	1	2	3		
1	a	c / 100	9 / 50	150	$u_1 = 0$
2	d / 200	b	e / 150	350	$u_2 = -4$
	200	100	200		
	$v_1 = 10$	$v_2 = 7$	$v_3 = 9$		

۱) $e = 7, d = 6, c = 5$

۲) $e = 6, d = 5, c = 7$

۳) $e = 5, d = 7, c = 6$

۴) $e = 5, d = 6, c = 7$

پاسخ: گزینه «۴» برای خانه پایه‌ای x_{ij} داریم: $C_{ij} = u_i + v_j$.

$C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow C = 0 + 7 = 7$

$C_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow d = -4 + 10 = 6$

$; C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow e = -4 + 9 = 5$

مثال ۱۳: در مثال قبل اگر متغیر x_{11} **به عنوان متغیر ورودی تعیین شود، کدام گزینه صحیح است؟**

۱) $a < b, a \le 10$

۲) $a > b + 7, a > 10$

۳) $a \le b + 7, a \le 10$

۴) $a \le b + 7, a > 10$

پاسخ: گزینه «۳» دو متغیر غیرپایه‌ای x_{11}, x_{22} وجود دارد. برای اینکه x_{11} متغیر ورودی باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} C_{11} - Z_{11} \le C_{22} - Z_{22} \Rightarrow a - (0 + 10) \le b - (-4 + 7) \Rightarrow a \le b + 7 \\ C_{11} - Z_{11} \le 0 \Rightarrow a - (0 + 10) \le 0 \Rightarrow a \le 10 \end{cases}$$

مثال ۱۴: در مسأله حمل و نقل زیر به ازای چه مقادیری از b,a جواب داده شده بهینه است؟

	1	2	3	
1	1 / 70	1	2 / 80	150
2	a	1 / 50	4	50
3	b	2 / 50	4 / 50	100
	70	100	130	

۱) $a \ge 2, b \le 3$

۲) $a \ge 2, b \ge 3$

۳) $a \le 2, b \ge 3$

۴) $a \le 2, b \le 2$

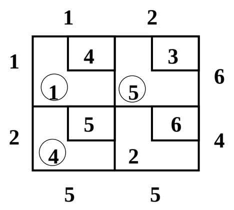
پاسخ: گزینه «۲» خانه‌های مربوط به متغیرهای a و b غیرپایه‌ای هستند. بنابراین برای اینکه جواب بهینه باشد، باید $C_{ij} - Z_{ij} \ge 0$ باشد. با استفاده از روش حلقه داریم:

$C_{31} - Z_{31} = b - 1 + 2 - 4 = b - 3 \ge 0 \Rightarrow b \ge 3$

$C_{21} - Z_{21} = a - 1 + 2 - 4 + 2 - 1 = a - 2 \ge 0 \Rightarrow a \ge 2$

مثال ۱۵: در صورت حل مسأله حمل و نقل مقابل به روش سیمپلکس،

کدام جدول سیمپلکس متناظر با جدول حمل و نقل داده شده است؟



(۱

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	R_1	
z	۰	۰	۰	-۲	۰	۳۹
x_{11}	۱	۰	۰	-۱	۰	۱
x_{12}	۰	۱	۰	۱	۰	۵
x_{21}	۰	۰	۱	۱	۰	۴
R_1	۰	۰	۰	۰	۱	۰

(۲

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	R_1	
z	۰	۰	۰	-۲	۰	۳۹
x_{11}	۱	۰	۰	۱	۰	۱
x_{12}	۰	۱	۰	-۱	۰	۵
x_{21}	۰	۰	۱	۱	۰	۴
R_1	۰	۰	۰	۰	۱	۰

(۳

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	R_1	
z	۰	۰	۰	-۲	۰	۳۹
x_{11}	۱	۰	۰	۱	۰	۱
x_{12}	۰	۱	۰	-۱	۰	۵
x_{21}	۰	۰	۱	-۱	۰	۴
R_1	۰	۰	۰	۰	۱	۰

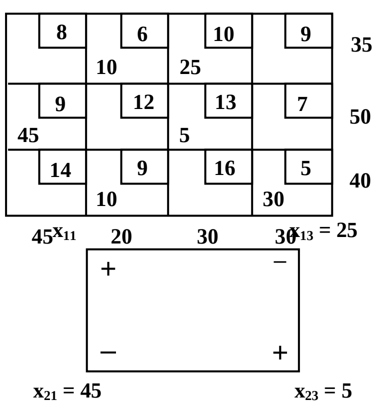
(۲

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	R_1	
z	۰	۰	۰	-۲	۰	۳۹
x_{11}	۱	۰	۰	-۱	۰	۱
x_{12}	۰	۱	۰	۱	۰	۵
x_{21}	۰	۰	۱	-۱	۰	۴
R_1	۰	۰	۰	۰	۱	۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» متغیرهای x_{11}, x_{12}, x_{21} متغیر پایه‌ای هستند و متغیر x_{22} غیرپایه‌ای است و داریم: $C_{22} - Z_{22} = 2$ که در سطر تابع هدف جدول سیمپلکس قرار می‌دهیم: $Z_{22} - C_{22} = -2$. همچنین می‌دانیم که به دلیل زائد بودن یکی از محدودیت‌های مسأله حمل و نقل در جدول سیمپلکس همواره یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر در پایه قرار دارد که این متغیر پایه‌ای مصنوعی در جدول حمل و نقل حذف گردیده است. همچنین نمایش ستون غیرپایه‌ای a_{22} برحسب ستون‌های پایه‌ای a_{11}, a_{12}, a_{21} به صورت مقابل است: $a_{22} = a_{21} - a_{11} + a_{12}$ زیرا $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$.

پس $\bar{a}_{22} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\\R_1\end{matrix}$ ستون متناظر با متغیر غیرپایه‌ای x_{22} در جدول سیمپلکس است.

مثال ۱۶: جواب بهینه یک مسأله حمل و نقل به صورت زیر است. اگر ضریب هزینه متغیر x_{11} را از ۸ به ۵ کاهش دهیم مقدار بهینه تابع هدف مسأله جدید کدام است؟



۱) ۸۰۰　　۲) ۹۹۵　　۳) ۹۹۰　　۴) ۸۹۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$C_{11} - Z_{11} = 5 - 9 + 13 - 10 = -1 < 0$$

متغیر x_{11} وارد پایه می‌شود و برای تعیین متغیر خروجی داریم:

$$\theta = \text{Min}\{x_{13} = 25, x_{21} = 45\} = 25$$

متغیر x_{13} از پایه خارج می‌شود و جواب پایه‌ای شدنی بعدی به صورت زیر است:

	$v_1=5$	$v_2=6$	$v_3=9$	$v_4=2$	
$u_1=0$	[5] 25	[6] 10	[10] 1	[9] 7	35
$u_2=4$	[9] 20	[12] 2	[13] 30	[7] 1	50
$u_3=3$	[14] 6	[9] 10	[16] 4	[5] 30	40
	45	20	30	30	

جدول بالا بهینه است و $Z=25(5)+10(6)+20(9)+30(13)+10(9)+30(5) \Rightarrow Z=995$

مثال ۱۷: در مسأله حمل و نقل مثال قبل حدود تغییرات ضریب هزینه متغیر x_{33} چگونه است، به طوری که جواب بهینه عوض نشود؟

۱) $C_{33} \ge 12$ ۲) $C_{33} \ge 6$ ۳) $C_{33} \ge 9$ ۴) $C_{33} \ge 10$

پاسخ: گزینه «۱»

$$C_{33}-Z_{33}=C_{33}-13+9-5+6-9 \ge 0 \Rightarrow C_{33} \ge 12$$

مثال ۱۸: جدول بهینه یک مسأله حمل و نقل به صورت زیر است:

[8]	[6] 10	[10] 25	[9]	35
[9] 45	[12]	[13] 5	[7]	50
[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
45	20	30	30	

محدوده تغییرات مجاز ضریب هزینه متغیر x_{12} چگونه است، به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند؟

۱) $C_{12} \ge 5$ ۲) $3 \le C_{12} \le 8$ ۳) $C_{12} \ge 3$ ۴) $3 \le C_{12} \le 15$

پاسخ: گزینه «۲» متغیر پایه‌ای x_{12} در حلقه متغیرهای غیر پایه x_{14} و x_{22} و x_{24} و x_{31} و x_{33} حضور دارد.

$$C_{14}-Z_{14}=9-C_{12}+9-5=13-C_{12} \ge 0 \Rightarrow C_{12} \le 13 \quad :(1)$$
$$C_{22}-Z_{22}=12-C_{12}+10-13=9-C_{12} \ge 0 \Rightarrow C_{12} \le 9 \quad :(2)$$
$$C_{31}-Z_{31}=14-9+13-10+C_{12}-9=C_{12}-1 \ge 0 \Rightarrow C_{12} \ge 1 \quad :(3)$$
$$C_{33}-Z_{33}=16-10+C_{12}-9=C_{12}-3 \ge 0 \Rightarrow C_{12} \ge 3 \quad :(4)$$
$$C_{24}-Z_{24}=7-5+9-C_{12}+10-13 \ge 0 \Rightarrow C_{12} \le 8 \quad :(5)$$
$$(1),(2),(3),(4),(5) \Rightarrow 3 \le C_{12} \le 8$$

مثال ۱۹: جدول بهینه یک مدل حمل و نقل در ذیل داده شده است:

با توجه به جدول بهینه مدل حمل و نقل داده شده، اگر میزان عرضه محل تولید ۴ از ۴۰ به ۴۱ افزایش یابد و میزان تقاضای مشتری ۱ از ۶۰ به ۶۱ تبدیل شود، مقدار بهینه تابع هدف چه تغییری می‌کند؟

i \ j	1	2	3	4	عرضه
1	[10]	[20]	[5] 10	[7]	10
2	[12]	[9] 20	[12]	[8]	20
3	[4] 30	[15]	[7]	[9]	30
4	[14]	[7] 30	[1]	[0] 10	40
5	[3] 30	[12] 10	[5] 10	[19]	50
تقاضا	60	60	20	10	

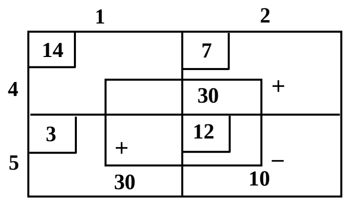
۱) چهارده واحد کم می‌شود.

۲) چهارده واحد اضافه می‌شود.

۳) دو واحد کم می‌شود.

۴) تغییری نمی‌کند.

پاسخ: گزینه «۳» حلقه خانه غیر پایه $x_{۴۱}$ را تشکیل می‌دهیم:



با تغییرات گفته شده در مسأله، مقدار متغیرهای $x_{۴۲}$ و $x_{۵۱}$ هر کدام ۱ واحد افزایش می‌یابـد و مقـدار متغیر $x_{۵۲}$ یک واحد کاهش می‌یابد، پس مقدار تغییر تابع هدف عبارت است از:

$$\Delta z = ۷ - ۱۲ + ۳ = -۲$$

■ **حل بهینهٔ جدول حمل و نقل زیر داده شده است.**

با توجه به این حل به سؤالات زیر پاسخ دهید.

مبدأ \ مقصد	1	2	3	عرضه	u_i
1	[50]	[100] 110	[100]	110	0
2	[200] 80	[300]	[200] 80	160	200
3	[100] 60	[200] 90	[300]	150	100
تقاضا	140	200	80		
v	0	100	0		

مثال ۲۰: حد پایین $c_{۳۳}$ به طوری که پایهٔ بهینه تغییر نکند چیست؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینه «۱» متغیر $X_{۳۳}$ غیرپایه‌ای است، پس برای اینکه پایه بهینه تغییر نکند کافی است $C_{۳۳} - Z_{۳۳} \geq ۰$ باشد.

$$Z_{۳۳} - C_{۳۳} = (u_۳ + v_۳) - C_{۳۳} = (۱۰۰ + ۰) - C_{۳۳} \leq ۰ \Rightarrow C_{۳۳} \geq ۱۰۰$$

مثال ۲۱: حد بالای $c_{۱۲}$ به طوری که پایهٔ بهینه تغییر نکند چیست؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینه «۴» چون $x_{۱۲}$ متغیر پایه‌ای است پس باید $C_{ij} - Z_{ij}$ همه متغیرهای غیرپایه که متغیر $x_{۱۲}$ در حلقه آنها حضور دارد را بررسی کنیم:

$$C_{۱۱} - Z_{۱۱} = ۵۰ - C_{۱۲} + ۲۰۰ - ۱۰۰ = ۱۵۰ - C_{۱۲} \geq ۰ \Rightarrow C_{۱۲} \leq ۱۵۰$$

$$C_{۱۳} - Z_{۱۳} = ۱۰۰ - C_{۱۲} + ۲۰۰ - ۱۰۰ + ۲۰۰ - ۲۰۰ = ۲۰۰ - C_{۱۲} \geq ۰ \Rightarrow C_{۱۲} \leq ۲۰۰$$

پس داریم $C_{۱۲} \leq ۱۵۰$.

مثال ۲۲: اگر بخواهیم ۵۰ واحد کالا از مبدأ ۲ به مقصد ۲ حمل کنیم، مقدار بهینه تابع هدف چه مقدار تغییر می‌کند؟

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۱۵۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰۰ ۴) تغییر نمی‌کند.

پاسخ: گزینه «۴» $x_{۲۲}$ یک متغیر غیرپایه‌ای است و با افزایش مقدار آن به یک سطح مثبت مقدار تغییر تابع هدف $\Delta Z = (C_{۲۲} - Z_{۲۲})x_{۲۲}$ خواهد بود.

$$C_{۲۲} - Z_{۲۲} = C_{۲۲} - (u_۲ + v_۲) = ۳۰۰ - (۲۰۰ + ۱۰۰) = ۰$$

پس اگر $x_{۲۲} = ۵۰$ باشد، در این صورت $\Delta z = ۰$ است؛ یعنی مقدار بهینه تابع هدف تغییر نمی‌کند.

مثال ۲۳: مسأله تخصیص با جدول هزینه زیر مفروض است. واگذاری کار ۱ به ماشین ۲ ممنوع است. حداقل هزینه برای انجام کارها توسط ماشین‌ها کدام است؟

کار \ ماشین	1	2
1	4	3
2	5	2
3	1	4

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & 4 & M & 0 \\
2 & 5 & 2 & 0 \\
3 & 1 & 4 & 0 \\
\hline
\end{array}
\xrightarrow{\text{تقلیل سطری}}
\begin{bmatrix} 4 & M & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{تقلیل ستونی}}
\begin{bmatrix} 3 & M-2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$Z^* = ۱+۲+۰ = ۳$ حداقل هزینه تخصیص

مثال ۲۴: مسأله تخصیص زیر را در نظر بگیرید :

	۱	۲	۳	۴
۱	۵	۸	۷	۷
۲	۸	۶	۷	۸
۳	۵	۹	۸	۶
۴	۶	۵	۶	۹

مقدار بهینه تابع هدف برابر است با:

۱) ۲۳　　۲) ۲۰　　۳) ۲۶　　۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۱»

۵	۸	۷	۷
۸	۶	۷	۸
۵	۹	۸	۶
۶	۵	۶	۹

ماتریس تقلیل‌یافته →

۰	۳	۱	۱
۲	۰	۰	۱
۰	۴	۲	۰
۱	۰	۰	۳

حداقل خطوط پوششی $= n = ۴$

پس به جدول بهینه رسیده‌ایم و $z^* = ۵+۷+۵+۶ = ۲۳$ است. این مسأله جواب بهینه چندگانه دارد.

مثال ۲۵: ماتریس هزینه مسأله تخصیص زیر که هدف حداقل کردن تابع هدف آن است را در نظر بگیرید، مقدار بهینه تابع هدف کدام است؟

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۷ & ۲۷ & ۳۰ & ۴۰ \\ ۵۰ & ۴۰ & ۳۰ & ۲۵ & ۳۵ \\ ۶۰ & ۸۰ & ۴۰ & ۵۰ & ۶۰ \\ ۵۰ & ۳۰ & ۹۰ & ۶۰ & ۴۰ \\ ۸۰ & ۷۰ & ۵۰ & ۶۰ & ۴۰ \end{bmatrix}$$

۱) کوچکتر یا مساوی ۹۵ می‌باشد.
۲) بزرگتر یا مساوی ۱۴۰ می‌باشد.
۳) برابر ۱۳۰ می‌باشد.
۴) برابر ۱۲۴ می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۷ & ۲۷ & ۳۰ & ۴۰ \\ ۵۰ & ۴۰ & ۳۰ & ۲۵ & ۳۵ \\ ۶۰ & ۸۰ & ۴۰ & ۵۰ & ۶۰ \\ ۵۰ & ۳۰ & ۹۰ & ۶۰ & ۴۰ \\ ۸۰ & ۷۰ & ۵۰ & ۶۰ & ۴۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ماتریس تقلیل‌یافته}} \begin{bmatrix} ۰ & ۷ & ۱۷ & ۲۰ & ۳۰ \\ ۲۵ & ۱۵ & ۵ & ۰ & ۱۰ \\ ۲۰ & ۴۰ & ۰ & ۱۰ & ۲۰ \\ ۲۰ & ۰ & ۶۰ & ۳۰ & ۱۰ \\ ۴۰ & ۳۰ & ۱۰ & ۲۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حداقل خطوط پوششی $= n = ۵$

$Z^* = ۱۰+۲۵+۴۰+۳۰+۴۰ = ۱۴۵ \geq ۱۴۰$

مثال ۲۶: تعداد متغیرهای اساسی تبهگن (degeneracy) در مسأله تخصیص با n شغل و n فرد هرگاه با الگوریتم حمل و نقل حل شود، معادل است با:

۱) $۲n-۱$　　۲) $n-۱$　　۳) $۲n$　　۴) n

پاسخ: گزینه «۲» تعداد متغیرهای پایه‌ای در هر جواب پایه‌ای شدنی مسأله تخصیص $n \times n$ برابر $۲n-۱$ است که n تا از آنها مقدار ۱ دارند و مابقی یعنی $n-۱$ تا مقدار ۰ دارند.

■ **مدل حمل و نقل با m مبدأ عرضه و n مقصد تقاضا که مؤلفه‌های جدول هزینه آن همگی محدود می‌باشند، داده شده است. مقادیر عرضه و تقاضا در مدل متوازن است، در ارتباط با این مدل به سه سؤال بعدی که مستقل از یکدیگر هستند پاسخ دهید:**

مثال ۲۷: اگر در مدل فوق مؤلفه‌های عرضه و تقاضا همگی برابر یک (واحد) بوده و m برابر n باشد، آنگاه تعداد مؤلفه‌های:

۱) صفر در هر حل‌شدنی برابر $n(n-1)$ می‌باشد.
۲) مثبت در هر حل‌شدنی می‌تواند برابر n^2 باشد.
۳) مثبت در حل اساسی (پایه) می‌تواند برابر $n+1$ می‌باشد.
۴) مثبت در هر حل‌شدنی برابر n خواهد بود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تعداد مؤلفه مثبت در هر جواب قابل قبول پایه‌ای در مسأله تخصیص $n\times n$ برابر n می‌باشد و تعداد مؤلفه مثبت در هر جواب قابل قبول (حل‌شدنی) می‌تواند برابر n^2 شود. به مثال زیر توجه کنید.

یک حل شدنی برای مسأله تخصیص مقابل ارائه شده است که $1\le i,j\le 3, x_{ij}=\frac{1}{3}$ یعنی دارای $n^2=9$ مؤلفه مثبت است.

	۱	۲	۳	عرضه
۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱
۲	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱
۳	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱
تقاضا	۱	۱	۱	

مثال ۲۸: در مدل فوق:

۱) جواب بهینه همواره شمار (عدد صحیح) می‌باشد.
۲) شمار بودن جواب بهینه بستگی به مقادیر هزینه حمل و نقل دارد.
۳) ممکن است جواب بهینه غیرشمار (غیر عدد صحیح) باشد.
۴) شمار بودن جواب بهینه بستگی به مقادیر عرضه در مبادی عرضه دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شمار بودن جواب بهینه هم به مقادیر عرضه و هم مقادیر تقاضا بستگی دارد. در صورتی که هم مقادیر عرضه و هم مقادیر تقاضا صحیح باشند، جواب بهینه صحیح خواهد بود. از آنجایی که اطلاعاتی در مورد مقادیر عرضه و تقاضا داده نشده، ممکن است جواب بهینه غیرشمار باشد.

مثال ۲۹: در مدل فوق:

۱) ممکن است فضای شدنی تهی باشد.
۲) ممکن است فضای شدنی بی‌کران باشد.
۳) ممکن است جواب بهینه تابع هدف نامحدود باشد.
۴) همواره حل بهینه وجود دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در مسأله حمل و نقل همواره فضای شدنی محدود و غیرتهی است و مقدار بهینه تابع هدف، متناهی می‌باشد.

مثال ۳۰: مسأله تخصیص با جدول هزینه زیر مفروض است:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 99 & 1 & 8 & 0 \\ 14 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \end{array}$$

اگر هدف حداقل کردن تابع هدف باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $X_{A3}=1$
۲) $x_{C3}=1$
۳) $X_{B3}=1$
۴) $X_{C1}=1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix} 99 & 1 & 8 & 0 \\ 14 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 98 & 1 & 7 & 0 \\ 13 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

۴= حداقل خطوط پوششی

در جدول هزینه داده شده در صورت سؤال تعداد حداقل خطوط پوششی ۳ است پس هنوز به بهینگی نرسیده‌ایم. برای یافتن جدول بعدی کمترین عدد پوشیده‌نشده (یعنی ۱) را از همه اعداد پوشیده‌نشده کم و به اعداد دو بار پوشیده شده اضافه کنیم. جدول مرحله بعد بهینه است و $x_{A4}=1, x_{B2}=1, x_{C3}=1, x_{D1}=1$ و بقیه متغیرهای تصمیم‌گیری، مقدار صفر را دارند.

آزمون فصل پنجم

۱ـ در یک مسأله تخصیص با ۳ مبدأ و ۴ مقصد تعداد متغیرهای پایه‌ای در هر BFS کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۵

۲ـ یک مسأله حمل و نقل $m \times n$ مفروض است. حداکثر تعداد مؤلفه‌های مثبت در هر جواب شدنی کدام است؟

۱) $m.n-1$ ۲) $m+n-1$ ۳) $m.n$ ۴) $2m-1$

۳ـ یک مسأله حمل و نقل با ۴ مبدأ و ۵ مقصد مفروض است. تعداد درایه ۰ در ماتریس ضرایب تکنولوژی این مسأله کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۵۵

۴ـ در مسأله حمل و نقل زیر ستون ۴ یک مشتری مجازی را نشان می‌دهد. اگر جواب داده شده بهینه باشد، کدام گزینه صحیح است؟

	1	2	3	4	عرضه ↓
1		10	25		35
2	45		50		50
3		10		30	40
تقاضا →	45	20	30	30	

۱) مشتری ۴ تمام تقاضایش را دریافت نکرده است.

۲) ۳۰ واحد کالا در انبار ۳ باقی مانده است.

۳) مشتری ۴ هیچ کالایی دریافت نکرده است.

۴) ۱۰ واحد کالا در انبار ۳ باقی مانده است.

۵ـ در جدول سیمپلکس متناظر با جواب بهینه ارائه شده در تست ۴ ستون متناظر با متغیر غیرپایه‌ای x_{22} کدام است؟ (ترتیب متغیرهای پایه‌ای در جدول سیمپلکس متناظر به صورت $(x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{32}, x_{34})$ فرض شود).

۱) $\bar{a}_{22}^t = (1,-1,0,1,0,0,0)$ ۲) $\bar{a}_{22}^t = (-1,1,-1,0,0,0,0)$

۳) $\bar{a}_{22}^t = (1,-1,1,0,0,0)$ ۴) $\bar{a}_{22}^t = (-1,1,-1,0,0,0)$

۶ـ اگر یک مسأله حمل و نقل را از روش $M-$ بزرگ حل کنیم کدام گزینه در مورد جدول سیمپلکس صحیح است؟

۱) ممکن است دارای ستونی باشد که همه مؤلفه‌هایش نامثبت باشند. ۲) ممکن است دارای متغیر مصنوعی با مقدار غیرصفر باشد.

۳) حتماً تباهیده است. ۴) هیچ‌کدام

۷ـ در جدول حمل‌ونقل زیر خانه‌هایی که با علامت × (ضربدر) مشخص شده‌اند نشان‌دهنده خانه‌های پایه‌ای هستند. کدام گزینه صحیح است؟

	1	2	3	4
1				
2		×		
3		×	×	×
4			×	

۱) جواب پایه‌ای ارائه شده تباهیده است.

۲) متغیر $x_{14} = 0$ می‌تواند پایه‌ای باشد.

۳) متغیر $x_{12} = 0$ می‌تواند پایه‌ای باشد.

۴) هر سه گزینه صحیح هستند.

۸ـ مسأله حمل و نقل زیر مفروض است. با روش گوشه شمال غربی جواب پایه‌ای شدنی کدام است؟

	1	2	3	4	تقاضا ↓
1					40
2					40
3					30
عرضه →	10	20	50	10	

۱) $x_{11} = 10,\ x_{21} = 20,\ x_{31} = 10,\ x_{23} = 40,\ x_{34} = 10$

۲) $x_{11} = 10,\ x_{12} = 20,\ x_{13} = 10,\ x_{23} = 30,\ x_{34} = 10,\ x_{35} = 20$

۳) $x_{11} = 10,\ x_{12} = 30,\ x_{13} = 10,\ x_{23} = 40,\ x_{34} = 10,\ x_{35} = 20$

۴) $x_{11} = 10,\ x_{12} = 20,\ x_{13} = 10,\ x_{23} = 40,\ x_{34} = 10,\ x_{35} = 20$

۹ـ چنانچه مقدار ثابت $k > 0$ به تمامی عناصر یک ستون ماتریس هزینه یک مدل حمل‌ونقل افزوده گردد (تمامی ضرایب هزینه نامنفی‌اند)، در این صورت ...

۱) حتماً جواب بهینه و z^* عوض می‌شوند. ۲) ممکن است جواب بهینه عوض شود.

۳) جواب بهینه عوض نمی‌شود ولی z^* کاهش نمی‌یابد. ۴) جواب بهینه و z^* تغییر نمی‌کند.

۱۰ـ تعداد BFS های ممکن برای یک مسأله تخصیص $A \times B$ کدام است؟

۱) $2m$ ۲) m^2 ۳) $m!$ ۴) m

۱۱ـ مسأله حمل و نقل زیر و BFS ارائه شده مفروضند. برای بهبود این جواب با روش سیمپلکس کدام گزینه صحیح است؟

	1	2	3		
1	5 / 10	8	1 / 10	20	$U_1 = 0$
2	2	3 / 10	-1	10	$U_2 = -1$
3	4	7 / 10	4 / 10	20	$U_3 = 3$
	10	20	20		
	$V_1 = 5$	$V_2 = 4$	$V_3 = 1$		

۱) متغیر x_{31} ورودی به پایه و x_{11} خروجی

۲) متغیر x_{31} ورودی به پایه و x_{13} خروجی

۳) متغیر x_{12} ورودی به پایه و x_{13} خروجی

۴) متغیر x_{12} ورودی به پایه و x_{11} خروجی

۱۲ـ در مسأله حمل و نقل زیر به ازای چه مقادیری از a و b جواب ارائه شده بهینه است؟

	1	2	3	
1	4 / 40	6	-1 / 50	90
2	a	3 / 15	b	15
3	2 / 10	3 / 15	4	25
	50	30	50	

۱) $a \geq -2$ و $b \geq 3$

۲) $a \geq 2$ و $b \geq 3$

۳) $a \geq 2$ و $b \geq -3$

۴) $a \geq -2$ و $b \geq 3$

۱۳ـ جواب بهینه یک مسأله حمل و نقل به صورت زیر است:
حدود تغییرات ضریب هزینه متغیر x_{23} چگونه باشد به گونه‌ای که جواب بهینه عوض نشود؟

	1	2	3	4	
1	8	6 / 10	10 / 25	9	35
2	9 / 45	12	13 / 5	7	50
3	14	9 / 10	16	5 / 30	40
	45	20	30	30	

۱) $C_{23} \geq 4$

۲) $C_{23} \geq 5$

۳) $0 \leq C_{23} \leq 10$

۴) $11 \leq C_{23} \leq 15$

۱۴ـ در تست ۱۳ حدود تغییرات ضریب هزینه متغیر x_{12} چگونه است به طوری که جواب بهینه عوض نشود؟

۱) $3 \leq C_{12} \leq 9$ ۲) $C_{12} \geq 3$ ۳) $C_{12} \leq 9$ ۴) $C_{12} \geq 9$

۱۵ـ در تست ۱۳ اگر میزان عرضه سطر اول و تقاضای ستون سوم را ۳ واحد اضافه کنیم جواب بهینه چگونه تغییر می‌کند؟

۱) متغیر x_{13} سه واحد افزایش می‌شود. ۲) متغیر x_{13} سه واحد کاهش می‌یابد.

۳) متغیر x_{23} سه واحد کاهش می‌یابد. ۴) متغیر x_{12} سه واحد افزایش می‌یابد.

۱۶ـ در تست ۱۳ اگر عرضه سطر دوم و تقاضای ستون چهارم را ۲ واحد کاهش دهیم جواب بهینه چه تغییری می‌کند؟

۱) متغیر x_{23} و x_{12} و x_{34} دو واحد کاهش و متغیر x_{13} و x_{33} دو واحد افزایش می‌یابد.

۲) متغیر x_{23} و x_{12} و x_{34} دو واحد افزایش و متغیر x_{13} و x_{33} دو واحد کاهش می‌یابد.

۳) متغیر x_{23} و x_{32} دو واحد کاهش و x_{34} و x_{12} و x_{13} دو واحد افزایش می‌یابد.

۴) متغیر x_{23} و x_{32} دو واحد افزایش و x_{34} و x_{12} و x_{13} دو واحد کاهش می‌یابد.

۱۷ـ در تست ۱۳ عرضه مبدأ ۳ و تقاضای مقصد ۱ حداکثر چقدر می‌تواند کاهش یابد به گونه‌ای که جواب بهینه عوض نشود؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲

۱۸ـ در تست ۱۳ عرضه مبدأ ۳ و تقاضای مقصد ۱ حداکثر چقدر می‌تواند زیاد شود به گونه‌ای که جواب بهینه عوض نشود؟

۱) ۱۵ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۱۹ـ به ازای چه مقادیری از λ از مسأله حمل و نقل زیر جواب بهینه عوض نمی‌شود؟

4 / 20	12	$\lambda - 2$ / 25	45
6	$7 + \lambda$ / 40	5 / 55	95
20	40	80	

۱) $2 \leq \lambda \leq 9/5$

۲) $5 \leq \lambda \leq 6$

۳) $3/5 \leq \lambda \leq 6$

۴) $5 \leq \lambda \leq 9/5$

۲۰ـ اگر در یک مسأله حمل و نقل m مرکز عرضه و $m-1$ مرکز تقاضا داشته باشیم تعداد متغیرهای پایه‌ای در هر جواب مسأله حمل و نقل عبارت است از:

۱) $2m-2$ ۲) $2m-1$ ۳) $m-1$ ۴) $2m$

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول : «معرفی برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی و حل هندسی»

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۳»

فصل دوم : «جبر خطی»

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۴»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۴»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۲»

فصل سوم : «روش سیمپلکس»

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۳»

فصل چهارم : «دوگان و تحلیل حساسیت»

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل پنجم : «مدل حمل و نقل و تخصیص و مدل‌های شبکه»

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۲»