



مدرس‌ان شریف

فصل اول

«تبدیل لاپلاس»

یکی از مهم‌ترین مسائلی که در درس کنترل فرآیند با آن مواجه خواهیم شد، حل معادلات دیفرانسیلی می‌باشد. معادلات به‌دست آمده از حل سیستم‌ها، اغلب معادلاتی پیچیده هستند. از اینرو به‌دنبال روشی هستیم که از طریق آن سیستم‌ها را بصورت ساده‌تر حل و فصل نماییم. روش تبدیل لاپلاس یک روش خاص جهت حل معادلات دیفرانسیلی می‌باشد که در حل معادلات دیفرانسیلی معمولی و پاره‌ای کاربردهای فراوانی دارد. یکی از مزایای روش تبدیل لاپلاس این است که بدون حل معادلات پیچیده دیفرانسیلی که بازگو کننده شرایط سیستم می‌باشد، می‌توان عکس العمل و عملکرد سیستم را پیش‌بینی نمود.

تعریف تبدیل لاپلاس

اگر $f(t)$ تابعی پیوسته از متغیر مستقل t برای $0 < t < \infty$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع با $L\{f(t)\}$ نشان داده می‌شود که مقدار آن از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را به‌طور اختصار با $F(s)$ نمایش داده که s در تبدیل لاپلاس یک پارامتر بوده و در حالت کلی عددی مختلط می‌باشد.

مثال ۱: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 1$ عبارتست از:

$$F(s) = e^{-s} \quad (۴)$$

$$F(s) = 1 \quad (۳)$$

$$F(s) = s \quad (۲)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» برای گرفتن تبدیل تابع ابتدا تابع $f(t)$ را در فرم اصلی معادله تبدیل لاپلاس جایگزین می‌کنیم و سپس انتگرال حاصل را حل می‌کنیم.

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \Rightarrow L[1] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-st} \cdot dt \Rightarrow L[1] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} + \frac{1}{s} \right)$$

با توجه به تساوی $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ ، حد فوق زمانی وجود دارد که $s > 0$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$L[1] = \frac{1}{s} \quad ; s > 0$$

نکته ۱: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس، این تابع هیچ نوع اطلاعاتی راجع به رفتار تابع $f(t)$ به ازای $t < 0$ (متغیر زمان) نمی‌دهد. البته این نکته در مطالعه سیستم‌های کنترل محدودیتی ایجاد نمی‌کند زیرا متغیر مستقل t برای این سیستم‌ها زمان می‌باشد و رفتار سیستم‌ها به ازای زمان مثبت مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع زیر عبارت است از:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^{n+1} & t > 0 \end{cases}$$

$$n \cdot L[t^n] \quad (۴)$$

$$\frac{n}{s} \cdot L[t^n] \quad (۳)$$

$$(n+1) \cdot L[t^n] \quad (۲)$$

$$\frac{(n+1)}{s} \cdot L[t^n] \quad (۱)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

پاسخ: گزینه «۱» برای به‌دست آوردن تبدیل لاپلاس، تابع را به فرم $F(s)$ می‌نویسیم:

$$F(s) = \int_0^{\infty} t^{n+1} \cdot e^{-st} \cdot dt$$

با توجه به رابطه، تابع به ازای زمان‌های مثبت بررسی می‌شود:



برای گرفتن انتگرال مقابل، از روش انتگرال گیری جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} e^{-st}.dt = du \\ t^{n+1} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{s} e^{-st} = u \\ (n+1)t^n = dv \end{cases} \Rightarrow F(s) = vu - \int_0^\infty u dv \Rightarrow F(s) = \left(\frac{-1}{s} e^{-st} t^{n+1} \right) \Big|_0^\infty + \frac{(n+1)}{s} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st} \cdot dt$$

در سمت راست تساوی، ترم اول در $t \rightarrow \infty$ و $t = 0$ برای $\text{Re}(s) > 0$ صفر می‌باشد و فقط ترم دوم باقی می‌ماند. متوجه می‌شویم عبارت داخل

$$\Rightarrow F(s) = \frac{(n+1)}{s} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{(n+1)}{s} \cdot L[t^n] \quad \text{انتگرال، معادل تعریف لاپلاس } f(t) = t^n \text{ می‌باشد:}$$

نکته ۲: بایستی به این نکته توجه داشت که تبدیل لاپلاس برای توابعی موجود است که در فاصله $0 \leq t < \infty$ تعریف شده باشد و تابعی پیوسته باشد.

$$f(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

کدام مثال ۳: تحقیق کنید تابع روبرو دارای لاپلاس می‌باشد؟

(۱) چون در بازه $0 < t < \infty$ پیوسته نیست، دارای لاپلاس نیست.

(۳) تابع دارای لاپلاس می‌باشد.

(۲) دارای حد متناهی در $t = 0$ نمی‌باشد.

(۴) به طور مشروط دارای لاپلاس می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرم تابع مشخص است که تابع در فاصله $0 < t < \infty$ پیوسته می‌باشد. حال بایستی تحقیق شود که تابع در

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}}{t^2} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}}{t^2} \xrightarrow{\text{Hop}} 2 \left(\frac{t}{2} \right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

قسمت‌های 0^+ ، دارای حد متناهی می‌باشد یا خیر.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} = 0$$

بنابراین تابع $f(t)$ دارای لاپلاس می‌باشد.

تبدیل معکوس لاپلاس

اگر $F(s)$ تابع لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ می‌نامند و آن را با علامت L^{-1} نشان می‌دهند

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

ویژگی‌های تبدیل لاپلاس

خاصیت خطی: تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس دارای خاصیت خطی می‌باشد که می‌توان آن را به صورت ریاضی به شکل زیر نشان داد:

$$L[c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] \pm c_2 L[f_2(t)] \quad ; c_1, c_2 \in R$$

$$L\left[\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n c_i \cdot L[f_i(t)] \quad ; c_i \in R, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

و همچنین برای تبدیل معکوس روابط زیر را داریم:

$$L^{-1}[c_1 F_1(s) \pm c_2 F_2(s)] = c_1 L^{-1}[F_1(s)] \pm c_2 L^{-1}[F_2(s)] \quad ; c_1, c_2 \in R$$

$$L^{-1}\left[\sum_{i=1}^n c_i F_i(s)\right] = \sum_{i=1}^n c_i \cdot L^{-1}[F_i(s)] \quad ; c_i \in R, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

تبدیل لاپلاس مشتق‌ها

تبدیل لاپلاس صرفاً تابعی از t را به تابعی از s تغییر می‌دهد توابع s آسان‌تر از توابع t به نظر نمی‌رسند و همانند مورد $L\{f(t) = c\} = \frac{c}{s}$ ممکن است پیچیده‌تر هم باشد. در واقع ویژگی برجسته این تبدیل آن است که هر کجا لازم باشد از تابعی نسبت به t مشتق گرفته شود، با توجه به تعریفی که در زیر آورده می‌شود تابع s مربوط به آن تابع فقط در s ضرب می‌شود. این ویژگی در حل معادلات دیفرانسیلی بسیار مفید خواهد بود.

$$L\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

اگر رابطه بالا را برای مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر بنویسیم به رابطه کلی زیر خواهیم رسید:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

در رابطه بالا $f^{(n)}(0)$ نشان‌دهنده مشتق مرتبه n تابع $f(t)$ نسبت به متغیر t به ازای $t=0$ است.

به‌عنوان مثال مشتق مرتبه دوم تابع $f(t)$ به‌صورت روبرو نوشته خواهد شد:

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)$$

بایستی توجه نمود که دو ترم آخر عبارت سمت راست تساوی مربوط به $f(t)$ به ازای $t=0$ می‌باشد و نباید آن‌را با $F(s)$ به ازای $s=0$ اشتباه گرفت. بنابراین تبدیل لاپلاس، عمل مشتق‌گیری از یک تابع را به عمل ضرب تبدیل آن در s تغییر می‌دهد، که تعداد ضرب‌ها به تعداد مشتق‌ها مربوط می‌شود.

مثال ۴: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را که در معادله دیفرانسیلی و شرایط اولیه زیر صدق می‌کند پیدا کنید؟

$$\Delta \frac{d^3 f}{dt^3} + \frac{d^2 f}{dt^2} + \epsilon \frac{df}{dt} + 2f = \lambda, \quad f(0) = \frac{df(0)}{dt} = \frac{d^2 f(0)}{dt^2} = 0$$

$$\frac{\lambda s}{(\Delta s^3 + s^2 + \epsilon s + 2)} \quad (4) \quad \frac{\lambda s}{s(\Delta s^3 + s^2 + \epsilon s + 2)} \quad (3) \quad \frac{\lambda s}{(\Delta s^3 + s^2 + \epsilon s + 2)} \quad (2) \quad \frac{\lambda}{s(\Delta s^3 + s^2 + \epsilon s + 2)} \quad (1)$$

☒ پاسخ: گزینه «۱» برای به‌دست آوردن لاپلاس بایستی از دو طرف معادله دیفرانسیلی تبدیل لاپلاس گرفته شود و هر دو طرف را مساوی هم قرار داد، زیرا مساوی بودن توابع به معنی مساوی بودن تبدیلات آن‌ها نیز می‌باشد.

برای حل این معادله خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس نیز استفاده می‌شود، لذا خواهیم داشت:

$$\Delta[s^3 F(s) - sf'(0) - sf''(0) - f'''(0)] + [s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)] + \epsilon[sF(s) - f(0)] + 2F(s) = \frac{\lambda}{s}$$

با جایگذاری شرایط اولیه مسئله در عبارت به‌دست آمده به رابطه نهایی زیر خواهیم رسید.

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\lambda}{s(\Delta s^3 + s^2 + \epsilon s + 2)}$$

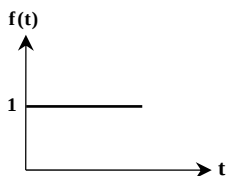
در روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل، توابع به تبدیلات خود برگردانده می‌شوند و معادلات حاصل به طریق جبری برای این تابع ناشناخته حل می‌شوند. این کار بسیار آسان‌تر از حل یک معادله دیفرانسیل می‌باشد.

تبدیلات توابع ساده

اکنون به محاسبه تبدیلات بعضی از توابع مفید و ساده می‌پردازیم:

الف - تابع پله‌ای

با توجه به شکل، تابع پله‌ای از نظر فیزیکی به صورت تابع ثابتی است که در زمان‌های مثبت ($t > 0$) و به صورت ناگهانی به سیستم اعمال می‌شود و شرایط سیستم در آن ثابت باقی خواهد ماند.



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

تبدیل تابع پله‌ای

مثال اول این فصل مربوط به یک تابع پله‌ای می‌باشد که روش تعیین تبدیل لاپلاس در این مثال توضیح داده شده است.

همانطور که قبلاً اشاره شد در حل مسائل مربوط به کنترل، زمان‌های منفی برای ما دارای اهمیت نمی‌باشد. رفتار تابع به‌ازای $t < 0$ روی تبدیل لاپلاس

$$f(t) = 1 \Rightarrow L[f(t)] = L[1 \times u(t)] = \frac{1}{s}$$

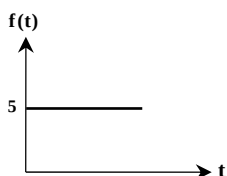
هیچ اثری ندارد.

نکته ۳: هر عدد ثابت A را می‌توان به‌صورت تابع $f(t) = A \cdot u(t)$ در نظر گرفت، لذا تبدیل آن به‌صورت $F(s) = \frac{A}{s}$ خواهد بود. به‌طور کلی

توابعی که در کنترل در نظر گرفته می‌شود به فرم $g(t) \cdot u(t)$ می‌باشند که اغلب از نوشتن $u(t)$ خودداری می‌شود.

اگر تابعی به فرم زیر داشته باشیم برای حل و تبدیل آن به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$f(t) = \begin{cases} a & \alpha_1 < t < \alpha_2 \\ b & \alpha_2 < t < \alpha_3 \\ c & \alpha_3 < t < \alpha_4 \end{cases} \Rightarrow f(t) = a \cdot u(t - \alpha_1) + (b - a) \cdot u(t - \alpha_2) + (c - b) \cdot u(t - \alpha_3) - c \cdot u(t - \alpha_4)$$



مثال ۵: تبدیل لاپلاس تابع مقابل برابر است با:

$$F(s) = \frac{5}{s} \quad (۲) \quad F(s) = 5s \quad (۱)$$

$$F(s) = 5 - s \quad (۴) \quad F(s) = 5 \quad (۳)$$

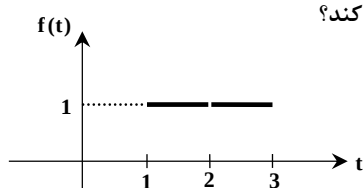
پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نمودار در زمان‌های مثبت، تغییر ثابتی در سیستم رخ می‌دهد و با گذشت زمان این مقدار برابر ۵ ثابت باقی خواهد ماند. ✓

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5 & t > 0 \end{cases}$$

برای تعیین تبدیل لاپلاس، تابع را به صورت فرم ریاضی تبدیل لاپلاس در می‌آوریم:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}.dt = \int_0^{\infty} 5e^{-st}.dt = 5 \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{-5}{s} (0 - 1) = \frac{5}{s}$$

ترم نمایی در $t \rightarrow \infty$ برابر صفر می‌باشد.



مثال ۶: نمودار تابع $f(t)$ در شکل نشان داده شده است کدام یک از مقادیر تابع $f(t)$ را تعریف می‌کند؟

$$u(t-1) + u(t-3) \quad (۱)$$

$$u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) \quad (۲)$$

$$u(t-1) + u(t-3) \quad (۳)$$

$$u(t-1) - u(t-3) \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۴» برای تعیین تبدیل لاپلاس ابتدا فرم ریاضی نمودار را می‌نویسیم: ✓

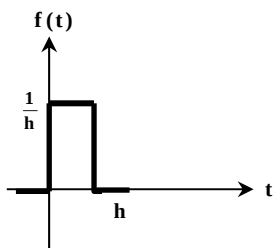
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 3 \\ 0 & 3 < t < \infty \end{cases}$$

$$f(t) = (1-0)u(t-1) + (0-1)u(t-3) = u(t-1) - u(t-3)$$

با توجه به نکته ذکر شده، تابع را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

ب - تابع ضربانی

با توجه به شکل، از نظر فیزیکی تابع ضربان واحد به صورت تغییری است که در یک محدوده زمانی مشخص به سیستم اعمال می‌شود و پس از سپری شدن زمان معین شرایط سیستم به شرایط اولیه خود باز می‌گردد.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{h} & 0 < t < h \\ 0 & t > h \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{h} [u(t) - u(t-h)]$$

تبدیل تابع ضربان: تابع ضربان با توجه به نکته‌ای که در قسمت تابع پله‌ای ذکر شد به صورت مقابل نوشته می‌شود:

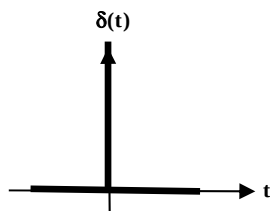
با لاپلاس گیری از معادله به دست آمده، به رابطه نهایی زیر خواهیم رسید:

(نحوه چگونگی تبدیل لاپلاس ترم دوم عبارت سمت راست در قسمت قضیه انتقال تبدیل توضیح داده خواهد شد.)

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-h.s}}{s} \right]$$

نکته ۴: در تابع ضربان در صورتی که مقدار h به سمت صفر میل کند، تابع جدیدی به دست خواهد آمد که مقدار آن همه جا صفر است جز در مبدا، که مقدار آن بینهایت می‌شود. البته باید توجه داشت که سطح زیر این تابع همیشه برابر واحد باقی می‌ماند. این تابع جدید تابع ضربان ایده‌آل واحد نامیده می‌شود و شکل ریاضی آن به صورت زیر می‌باشد:

تابع ضربان ایده‌آل واحد به عنوان یک تغییر ایده‌آل، در تحلیل‌ها و طرح سیستم‌های کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد.



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$$

مثال ۷: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < a \\ 1/k & a < t < a+k \\ 0 & a+k < t < \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & e^{-as}(1 - e^{-ks}) \\ (2) \quad & \frac{e^{-as}}{k}(1 - e^{-ks}) \\ (3) \quad & \frac{e^{-as}}{ks}(1 - e^{-ks}) \\ (4) \quad & ke^{-as}(1 - e^{-ks}) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۳» تابع در تمامی نقاط به غیر از بازه زمانی $a < t < a+k$ برابر صفر می‌باشد و تابع ضربان می‌باشد، برای تعیین لاپلاس ابتدا فرم ریاضی تابع را می‌نویسیم:

$$f(t) = \left(\frac{1}{k} - 0\right) \cdot u(t-a) + \left(0 - \frac{1}{k}\right) \cdot u(t-a-k) = \frac{1}{k} [u(t-a) - u(t-a-k)]$$

برای تعیین لاپلاس، از خاصیت خطی تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم:

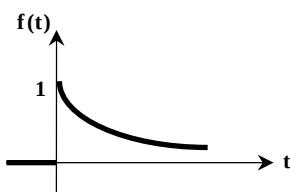
$$\Rightarrow F(s) = L\left\{\frac{1}{k}[u(t-a) - u(t-a-k)]\right\} = \frac{1}{k} \{L[u(t-a)] - L[u(t-a-k)]\}$$

با توجه به روابطی که برای تابع ضربان ذکر شد، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{k} \left(\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+k)s}}{s} \right) = \frac{e^{-as}}{ks} (1 - e^{-ks})$$

ج - تابع نمایی

با توجه به شکل، تابع نمایی به صورت تغییری است که در زمان‌های مثبت به سیستم اعمال می‌شود و با سپری شدن زمان، شرایط سیستم رفته رفته به شرایط اولیه سیستم میل می‌کند.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases} = u(t) \cdot e^{-at}$$

تبدیل تابع نمایی

برای گرفتن تبدیل تابع نمایی ابتدا تابع را در رابطه تبدیل لاپلاس جایگذاری می‌کنیم و سپس از رابطه به دست آمده انتگرال‌گیری می‌نماییم.

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \Rightarrow L[f(t)] = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-at} \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} \cdot dt$$

$$\Rightarrow L[f(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{(a+s)} \cdot e^{-(a+s)t} \right) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{(a+s)} \cdot e^{-(a+s)t} + \frac{1}{(a+s)} \right) \Big|_0^t$$

$$L[f(t)] = \frac{1}{(a+s)}$$

با این شرط که $(a+s) > 0$ یعنی $s > -a$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع نمایی به صورت مقابل خواهد شد:

$$\text{Re}(s) > -a$$

نکته ۵: در صورتی که در مثال بالا s یک عدد مختلط باشد، بایستی شرط زیر برای وجود تبدیل لاپلاس برقرار باشد:

$$f(t) = e^{\Delta t j}$$

مثال ۸: تبدیل لاپلاس تابع روبرو عبارت است از:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{(s + \Delta j)} \\ (2) \quad & \frac{\Delta j}{(s - \Delta j)} \\ (3) \quad & \frac{1}{(s - \Delta j)} \\ (4) \quad & \frac{-1}{(s - \Delta j)} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۳» با جایگذاری تابع $f(t)$ در فرم تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s) = L[e^{\Delta t j}] = \int_0^{\infty} e^{\Delta t j} e^{-st} \cdot dt \quad ; \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{(\Delta j - s)t} \cdot dt = \frac{e^{(\Delta j - s)t}}{(\Delta j - s)} \Big|_0^{\infty}$$

در رابطه بالا، با این شرط که $(\Delta j - s) < 0$ یعنی $s > \Delta j$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع نمایی به صورت زیر خواهد شد:

$$F(s) = \frac{e^{(\Delta j - s)t}}{(\Delta j - s)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(\Delta j - s)} (0 - 1) = \frac{1}{(s - \Delta j)}$$

در $t \rightarrow \infty$ ، عبارت نمایی برابر صفر می‌باشد.

نکته ۶: در صورتی که تابع نمایی به فرم $f(t) = e^{jat}$ باشد یعنی توان نمایی مختلط داشته باشد می‌توان از رابطه $e^{jat} = \cos at + j \sin at$

استفاده کرد. و همچنین چنانچه تابع نمایی به فرم $f(t) = e^{(a+bj)t}$ باشد می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$f(t) = e^{jat} = \cos at + j \sin at \quad ; \quad f(t) = e^{(a+bj)t} = e^{at} (\cos bt + j \sin bt)$$



مثال ۹: تابع تبدیل $\cosh \epsilon t$ برابر است با:

$$\begin{aligned} (۱) \quad & \frac{1}{2} \left[\frac{s}{s^2 - \epsilon^2} \right] \\ (۲) \quad & \frac{1}{2} \left[\frac{s}{s^2 + \epsilon^2} \right] \\ (۳) \quad & \left[\frac{s}{s^2 - \epsilon^2} \right] \\ (۴) \quad & \left[\frac{s}{s^2 + \epsilon^2} \right] \end{aligned}$$

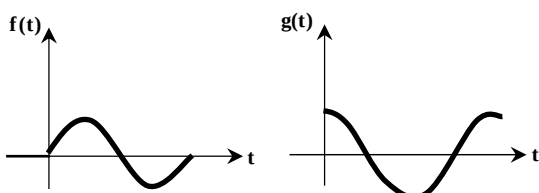
پاسخ: گزینه «۳» می‌توان با تبدیل تابع مثلثاتی به فرم نمایی، به طریق زیر عمل نمود:

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \quad \text{بنابراین تابع } f(t) \text{ برابر خواهد بود با:}$$

$$f(t) = \cosh \epsilon t = \frac{e^{\epsilon t} + e^{-\epsilon t}}{2} \Rightarrow F(s) = L\left[\frac{e^{\epsilon t} + e^{-\epsilon t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \{L[e^{\epsilon t}] + L[e^{-\epsilon t}]\}$$

با استفاده از روابط به‌دست آمده در قسمت تبدیل لاپلاس تابع نمایی، رابطه نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - \epsilon} + \frac{1}{s + \epsilon} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2s}{s^2 - \epsilon^2} \right] = \left[\frac{s}{s^2 - \epsilon^2} \right]$$



د- تابع سینوسی و کسینوسی

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin kt & t > 0 \end{cases} = u(t) \cdot \sin kt \\ g(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos kt & t > 0 \end{cases} = u(t) \cdot \cos kt \end{aligned}$$

با توجه به شکل، با اعمال توابع سینوسی و کسینوسی به سیستم، شرایط به‌صورت تناوبی و با دامنه مشخص حول شرایط اولیه سیستم نوسان می‌کند.

تبدیل تابع سینوسی و کسینوسی

با توجه به رابطه $e^{jkt} = \cos kt + j \sin kt$ و همچنین با توجه به رابطه‌ای که برای تبدیل تابع نمایی به‌دست آورده بودیم می‌توان تابع تبدیل توابع $f(t), g(t)$ را تعیین نماییم:

می‌دانیم که $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ ، با قرار دادن $a = jk$ ($j = \sqrt{-1}$) خواهیم داشت:

$$L[e^{jkt}] = \frac{1}{s - jk} = \frac{(s + jk)}{(s - jk)(s + jk)} = \frac{(s + jk)}{s^2 + k^2} = \frac{s}{s^2 + k^2} + j \frac{k}{s^2 + k^2}$$

با توجه به نتایج فوق و مقایسه رابطه ایجاد شده با رابطه $e^{jkt} = \cos kt + j \sin kt$ می‌توان به نتایج زیر رسید:

$$L[e^{jkt}] = L[\cos kt + j \sin kt] = L[\cos kt] + jL[\sin kt] = \frac{s}{s^2 + k^2} + j \frac{k}{s^2 + k^2} \Rightarrow \begin{cases} L[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2} \\ L[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2} \end{cases}$$

در حل معادله بالا از خاصیت جمع‌پذیری تبدیل لاپلاس استفاده شده است

$$f(t) = e^{\delta t j}$$

مثال ۱۰: تبدیل تابع روبرو عبارت است از:

$$\begin{aligned} (۱) \quad & \frac{1}{(s + \delta j)} \\ (۲) \quad & \frac{\delta j}{(s - \delta j)} \\ (۳) \quad & \frac{1}{(s - \delta j)} \\ (۴) \quad & \frac{-1}{(s - \delta j)} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۳» برای حل تست با استفاده از نکته ذکر شده در قسمت انتهایی تبدیل تابع نمایی می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

$$f(t) = e^{\delta t j} = \cos \delta t + j \sin \delta t$$

$$F(s) = L[f(t)] = L[\cos \delta t + j \sin \delta t]$$

با جایگذاری تابع $f(t)$ در فرم تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

با استفاده از خاصیت خطی تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s) = L[\cos \delta t] + jL[\sin \delta t]$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \delta^2} + j \frac{\delta}{s^2 + \delta^2} = \frac{(s + \delta j)}{(s^2 + \delta^2)} = \frac{(s + \delta j)}{(s^2 - (\delta j)^2)} = \frac{(s + \delta j)}{(s + \delta j)(s - \delta j)} = \frac{1}{(s - \delta j)}$$

مشاهده می‌شود از این روش نیز، به گزینه ۳ خواهیم رسید.



مثال ۱۱: حل معادله روبرو عبارت است از:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 9f = e^{-t}; \quad f(0) = f'(0) = 0$$

$$\frac{1}{10}(e^{-t} - \cos 3t) \quad (2)$$

$$\frac{1}{60}(e^{-t} - \cos 3t) \quad (4)$$

$$\frac{1}{10}(e^{-t} - \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t) \quad (1)$$

$$\frac{1}{60}(e^{-t} - \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t) \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» همانطور که قبلاً اشاره شد توسط روش لاپلاس می‌توان معادلات دیفرانسیلی پیچیده را تحلیل نمود. برای حل معادله بالا از طرفین

$$L\left[\frac{d^2 f}{dt^2} + 9f\right] = L[e^{-t}] \Rightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) + 9F(s) = \frac{1}{s+1}$$

معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

با جایگذاری شرایط اولیه سیستم در عبارت بالا، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$s^2 F(s) + 9F(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow (s^2 + 9)F(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 9)}$$

حال برای به دست آوردن تابع $f(t)$ از تابع تبدیل بالا، معکوس لاپلاس می‌گیریم:

برای حل این نوع توابع (توابعی که مخرج آن‌ها حاصلضرب چند عبارت می‌باشد)، ابتدا می‌بایست عملیات تفکیک کسرها انجام شود؛ به این صورت که عبارت کسری مورد نظر را به صورت حاصلجمع چند عبارت کسری مناسب تبدیل می‌نماییم و سپس از آن‌ها تبدیل لاپلاس و یا تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+9)} = \frac{1}{(s+1)(s+3j)(s-3j)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+3j)} + \frac{C}{(s-3j)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+9)} = \frac{A(s+3j)(s-3j) + B(s+1)(s-3j) + C(s+1)(s+3j)}{(s+1)(s-3j)(s+3j)}$$

$$As^2 + 9A + Bs^2 - 3Bjs + Bs - 3Bj + Cs^2 + 3Cjs + Cs + 3Cj = 1$$

می‌دانیم صورت کسر مقابل، معادل ۱ می‌باشد:

$$\Rightarrow (A+B+C)s^2 + (B+C-3Bj+3Cj)s + (9A-3Bj+3Cj) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (A+B+C) = 0 \\ (B+C-3Bj+3Cj) = 0 \\ (9A-3Bj+3Cj) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = \frac{-3+j}{60} \\ C = \frac{-3-j}{60} \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{(s+1)} + \left(\frac{-3+j}{60} \times \frac{1}{s+3j}\right) + \left(\frac{-3-j}{60} \times \frac{1}{s-3j}\right)$$

برای معکوس گیری از $F(s)$ ، از تبدیل تابع نمایی استفاده می‌کنیم ($L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$). این موضوع که a عددی مختلط است تغییری در نتیجه ایجاد

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{10}e^{-t} + \frac{-3+j}{60}e^{-3jt} + \frac{-3-j}{60}e^{3jt}$$

نخواهد کرد:

با استفاده از اتحاد $e^{(a+bj)t} = e^{at}(\cos bt + j \sin bt)$ خواهیم داشت:

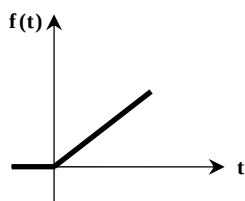
$$e^{-3jt} = (\cos 3t - j \sin 3t) \quad ; \quad e^{3jt} = (\cos 3t + j \sin 3t)$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{10}e^{-t} + \frac{-3+j}{60}(\cos 3t - j \sin 3t) + \frac{-3-j}{60}(\cos 3t + j \sin 3t)$$

$$f(t) = \frac{1}{10}(e^{-t} - \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t)$$

د- تابع خطی (Ramp)

با توجه به شکل، تابع خطی به صورت تغییری است که در زمان‌های مثبت به سیستم اعمال می‌شود و با سپری شدن زمان شرایط سیستم دائماً و به صورت خطی تغییر می‌کند و از شرایط اولیه سیستم فاصله می‌گیرد.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases} = t.u(t)$$



تبدیل تابع خطی: برای گرفتن تبدیل لاپلاس تابع خطی ابتدا تابع را در رابطه تبدیل لاپلاس جایگذاری می‌کنیم و سپس از رابطه به‌دست آمده انتگرال‌گیری می‌نماییم.

برای حل انتگرال حاصل، بایستی از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده نماییم:

$$L[t.u(t)] = \int_0^{\infty} t.e^{-st}.dt$$

$$\begin{cases} e^{-st}.dt = dv \\ t = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{-1}{s} e^{-st} \\ dx = dt \end{cases} \Rightarrow L[t.u(t)] = v.x - \int_0^{\infty} v.dx = \frac{-t}{s}.e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s}.e^{-st}.dt$$

در سمت راست تساوی فوق، عبارت اول در $t \rightarrow \infty$ و $t = 0$ با شرط $s > 0$ صفر می‌باشد. بنابراین مقدار نهایی تبدیل لاپلاس برابر خواهد بود با:

$$L[t.u(t)] = -\frac{1}{s^2}(e^{-st}) \Big|_0^{\infty} \Rightarrow L[t.u(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = t^2 + 1$$

مثال ۱۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر است با:

$$\frac{2+s^2}{s^3} \quad (۴)$$

$$\frac{3+s^3}{s^2} \quad (۳)$$

$$\frac{2+s^3}{s^2} \quad (۲)$$

$$\frac{3+s^2}{s^3} \quad (۱)$$

☒ پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس خواهیم داشت: $F(s) = L[t^2 + 1] = \int_0^{\infty} (t^2 + 1).e^{-st}.dt = \int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt + \int_0^{\infty} 1.e^{-st}.dt$

برای تعیین انتگرال اول عبارت سمت راست تساوی از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌شود:

$$\int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt \Rightarrow \begin{cases} t^2 = u \\ e^{-st}.dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t.dt = du \\ \frac{-1}{s}e^{-st} = v \end{cases} ; \int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt = \left(\frac{-1}{s}e^{-st}.t^2 \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t.e^{-st}.dt$$

ترم اول عبارت سمت راست تساوی در $t = 0$, $t \rightarrow \infty$ برابر صفر می‌باشد، برای تعیین ترم دوم بایستی از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده نماییم:

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt = \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t.e^{-st}.dt \Rightarrow \begin{cases} t = u \\ e^{-st}.dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = du \\ \frac{-1}{s}e^{-st} = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt = \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t.e^{-st}.dt = \frac{2}{s} \left\{ \left(\frac{-t}{s}.e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st}.dt \right\}$$

ترم اول عبارت سمت راست تساوی در $t = 0$, $t \rightarrow \infty$ برابر صفر می‌باشد و نهایتاً مقدار انتگرال مورد نظر برابر خواهد بود با:

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt = \frac{2}{s} \left(\frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st}.dt \right) = \frac{2}{s^2} \left(\frac{-1}{s}e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{-2}{s^3} (0 - 1) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow \int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt = \frac{2}{s^3}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} t^2.e^{-st}.dt + \int_0^{\infty} 1.e^{-st}.dt = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s} = \frac{2+s^2}{s^3}$$

حال به قسمت اول مسئله باز می‌گردیم:

در جدول زیر تبدیل لاپلاس برخی از توابع مهم که ممکن است در حل مسائل با آن‌ها مواجه شویم، آمده است:

تابع	تبدیل لاپلاس	تابع	تبدیل لاپلاس
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos kt.u(t)$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
$t^n.u(t) : n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin kt.u(t)$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
$t^n.u(t) : n \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$	$\cosh kt.u(t)$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
$e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sinh kt.u(t)$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
$t^n.e^{-at}.u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$e^{-at}.\cos kt.u(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + k^2}$
		$e^{-at}.\sin kt.u(t)$	$\frac{k}{(s+a)^2 + k^2}$



$$f(t) = \cos^2 t$$

مثال ۱۳: تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید؟

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right) \quad (۱) \quad \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right) \quad (۲) \quad 2 \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right) \quad (۳) \quad -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right) \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۱» برای تبدیل معادله، ابتدا سعی می‌کنیم تا معادله را از حالت توانی خارج سازیم و برای سادگی کار آن را به یکی از فرم‌هایی که در

جدول آورده شده است، ارائه می‌نماییم. برای این منظور معادله را با استفاده از روابط مثلثاتی به صورت $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ جایگذاری می‌نماییم. همانطور که مشاهده می‌شود هر دو ترم سمت راست عبارت مشابه فرم‌های ارائه شده در جدول می‌باشد:

$$F(s) = L[\cos^2 t] = L\left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right]$$

با توجه به خاصیت خطی تبدیل لاپلاس:

$$F(s) = \frac{1}{2}(L[1] + L[\cos 2t]) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right)$$

مثال ۱۴: معکوس تبدیل لاپلاس $F(s) = \frac{s+5}{s^2 - 2s - 3}$ برابر است با:

$$2e^{-3t} - e^{-t} \quad (۴) \quad 2e^{-3t} + e^{-t} \quad (۳) \quad 2e^{3t} + e^{-t} \quad (۲) \quad 2e^{3t} - e^{-t} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل تابع ابتدا می‌بایست عملیات تفکیک کسرها انجام شود؛ به این صورت که عبارت کسری مورد نظر را به صورت حاصلجمع چند عبارت کسری مناسب تبدیل می‌نماییم و سپس از آن‌ها تبدیل لاپلاس و یا تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$\frac{s+5}{s^2 - 2s - 3} = \frac{s+5}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs - 3B}{(s-3)(s+1)} = \frac{(A+B)s + (A-3B)}{(s-3)(s+1)}$$

$$(A+B)s + (A-3B) = s+5 \Rightarrow \begin{cases} (A+B) = 1 \\ (A-3B) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\frac{s+5}{s^2 - 2s - 3} = \frac{2}{s-3} + \frac{-1}{s+1}$$

ملاحظه می‌شود که عبارت کسری به دو عبارت کسری ساده‌تر تبدیل شده است و اکنون می‌توانیم با استفاده از خاصیت خطی معکوس تبدیل لاپلاس، از

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{s+5}{s^2 - 2s - 3}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

عبارات به دست آمده تبدیل معکوس بگیریم.

$$f(t) = 2e^{3t} - e^{-t}$$

با استفاده از روابط ذکر شده در جدول تبدیلات به رابطه نهایی روبرو خواهیم رسید:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+5)}$$

مثال ۱۵: تبدیل معکوس لاپلاس توابع روبرو را به دست آورید؟

$$\frac{1}{5}(1 - e^{-5t}) \quad (۴) \quad \Delta(1 - e^{-\Delta t}) \quad (۳) \quad (1 - e^{-\Delta t}) \quad (۲) \quad \frac{1}{5}(1 + e^{-\Delta t}) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» برای حل این نوع توابع (توابعی که مخرج آن‌ها حاصلضرب چند عبارت می‌باشد)، ابتدا می‌بایست عملیات تفکیک کسرها انجام شود؛ به این صورت که عبارت کسری مورد نظر را به صورت حاصلجمع چند عبارت کسری مناسب تبدیل می‌نماییم و سپس از آن‌ها تبدیل لاپلاس و یا

$$F(s) = \frac{1}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{As + \Delta A + Bs}{s(s+5)} = \frac{(A+B)s + \Delta A}{s(s+5)}$$

تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم.

صورت کسر ظاهر شده، معادل عبارت کسری مورد نظر می‌باشد:

$$(A+B)s + \Delta A = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta A = 1 & A = \frac{1}{\Delta} \\ A+B = 0 & B = -\frac{1}{\Delta} \end{cases} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\Delta}$$

برای تعیین لاپلاس معکوس تابع مقابل از خاصیت خطی استفاده می‌نماییم:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+5)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right]$$



مدرس‌ان شریف

فصل چهارم

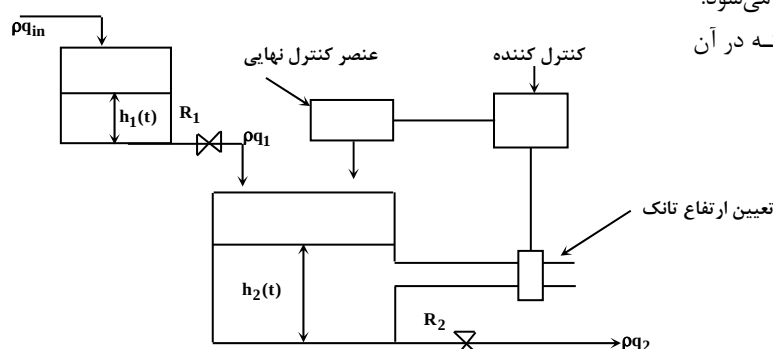
«پایداری و تحلیل پاسخ گذرا و دائم»

مقدمه

مفهوم پایداری ارتباط نزدیکی با انرژی سیستم دارد و مهمترین عاملی است که در تحلیل هر سیستم باید مورد توجه قرار گیرد. در واقع بهبود پاسخ گذرا و خطای حالت دائمی، کاهش حساسیت به تغییرات مدل فرآیند و دیگر اهداف، همگی در سایه پایداری قرار می‌گیرند چرا که به عنوان مثال در سیستم ناپایدار، تحلیل خطای حالت دائمی بی‌معنی خواهد بود.

یک نکته قابل توجه این است که تحلیل پایداری سیستم‌های فیزیکی را مفهوم واحدی تصور کنیم که تعابیر آن و معیارهای به دست آمده به نوع نمایش سیستم وابسته است. به این معنی که تحلیل پایداری برای سیستمی با نمایش فضای حالت، تابع تبدیل، معادله دیفرانسیلی و... مفهومی یکسان در قالب نتایجی به ظاهر متفاوت است که با متغیرهای محیط نمایش، بیان می‌شود.

به عنوان مثال سیستم مقابل شامل تانک آبی می‌باشد که در آن مقاومت R در جریان خروجی از تانک تعبیه شده است:



ورودی این سیستم جریان سیال با دانسیته ثابت ρ می‌باشد، هدف ثابت نگه داشتن ارتفاع تانک دوم در یک مقدار ثابت و معین می‌باشد. به این منظور سیستم کنترل مطابق شکل بر روی سیستم نصب شده است.

در این سیستم و یا دیگر سیستم‌های فیزیکی ممکن است عوامل متعددی بر روی ورودی سیستم تاثیرگذار باشند و در نتیجه این تغییرات منجر به ایجاد انحراف از حالت پایداری در سیستم خواهد شد. به عنوان مثال اگر فرض شود میزان دبی ورودی به سیستم دچار اغتشاش شده است و یا به علت پدیده‌های جوی ارتفاع سیال درون تانک تغییر می‌کند، وظیفه سیستم کنترل این است که میزان انحرافات را به حداقل برساند. بسته به این‌که سیستم بتواند در مقابل تغییر ورودی مقدار انحرافات را به میزان قابل قبولی تنظیم کند یا پاسخ سیستم به صورت نامحدود تغییر کند، بحث پایداری یا ناپایداری سیستم به وجود می‌آید.

پایداری داخلی و پایداری ورودی - خروجی

پایداری داخلی به پاسخ ورودی صفر (طبیعی) مربوط است. (منظور از ورودی صفر، تغییراتی است که با توجه به شرایط سیستم ممکن است به صورت طبیعی در سیستم ایجاد شوند). در حالی که پایداری ورودی-خروجی در ارتباط با پاسخ حالت صفر (اجباری) مطرح شود. به عنوان مثال به علت تغییر دبی جریان ورودی، مقدار جریان خروجی از تانک اول، مقدار جریان ورودی به تانک دوم و جریان خروجی از تانک دوم و در نتیجه مقدار ارتفاع تانک دوم تغییر خواهند نمود، در این حالت پایداری ورودی-خروجی در ازای پاسخ به این تغییر ورودی مطرح می‌شود.

الف - پایداری داخلی

بنا به تعریف، سیستمی را پایدار داخلی می‌گوئیم که بازای هر حالت اولیه دلخواه، پاسخ ورودی صفر آن به صفر برسد. در چنین شرایطی، در واقع، پاسخ طبیعی با گذشت زمان به صفر می‌رسد. در سیستم‌های ناپایدار، بالعکس، دامنه پاسخ طبیعی با گذشت زمان بدون کران افزایش می‌یابد. در شرایط خاص که پاسخ طبیعی نوسانات با دامنه ثابت داشته باشد سیستم را پایدار مرزی یا حاشیه‌ای می‌نامیم.

ب - پایداری ورودی - خروجی

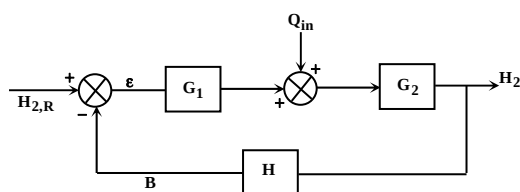
تعریف دیگر از پایداری، پایداری ورودی محدود - خروجی محدود (Bounded Input - Bounded Output) است که در ارتباط با پاسخ اجباری سیستم مطرح می‌شود. بنا به تعریف، سیستمی را پایدار BIBO می‌گوئیم اگر بازای هر ورودی محدود، خروجی محدود داشته باشد یا به عبارتی پاسخ حالت صفر سیستم بازای تمامی ورودیهای محدود، کراندار باقی بماند.

در تعبیر این نوع پایداری باید دقت نمود که اگر سیستمی به یک ورودی نامحدود، خروجی نامحدودی بدهد اظهار نظر در مورد پایداری BIBO بی‌معنی است چرا که مشخص نیست که این خروجی در اثر کدام جزء پاسخ به وجود آمده است. اما به هر حال اگر سیستمی به هر نوع ورودی محدود، پاسخ نامحدود بدهد ناپایدار BIBO تلقی خواهد شد.

ارتباط پایداری داخلی و پایداری ورودی - خروجی

چنانچه یک سیستم خطی، پایداری داخلی داشته باشد، قطعاً پایدار ورودی - خروجی نیز می‌باشد. اما عکس این قضیه صادق نیست. به این معنی که پایداری ورودی - خروجی در حالت کلی پایداری داخلی را نتیجه نمی‌دهد. در ادامه درس منظور از پایداری سیستم، پایداری ورودی - خروجی می‌باشد.

معیار پایداری



با در نظر گرفتن دیاگرام بلوکی برای مثال دو تانک تعیین سطح به شکل مقابل:

G_p مربوط به تابع تبدیل فرآیند می‌باشد و به صورت زیر خواهد بود:

$$G_p = \frac{R_p}{(1 + \tau_p s)(1 + \tau_p s)}$$

بسته به این که چه نوع کنترل کننده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقدار تابع تبدیل کنترل کننده متفاوت خواهد بود. اگر فرض کنیم تابع تبدیل کنترل

کننده معادل K_C می‌باشد و تابع تبدیل عنصر اندازه‌گیر معادل $\frac{1}{\tau_H s + 1}$ می‌باشد.

$$H_p = \frac{G_1 G_p}{1 + G_1 G_p H} H_{p,R} + \frac{G_p}{1 + G_1 G_p H} Q_{in}$$

با استفاده از روش‌های فصل گذشته خواهیم داشت:

$$G = G_1 G_p H$$

می‌دانیم عبارت G تابع انتقال مدار باز نامیده می‌شود:

$$H_p = \frac{\frac{K_C R_p}{(1 + \tau_p s)(1 + \tau_p s)}}{1 + \frac{K_C R_p}{(1 + \tau_p s)(1 + \tau_p s)(1 + \tau_H s)}} H_{p,R} + \frac{\frac{R_p}{(1 + \tau_p s)(1 + \tau_p s)}}{1 + \frac{K_C R_p}{(1 + \tau_p s)(1 + \tau_p s)(1 + \tau_H s)}} Q_{in}$$

$$H_p = \frac{K_C R_p (1 + \tau_H s)}{(1 + \tau_p s)(1 + \tau_p s)(1 + \tau_H s) + K_C R_p} H_{p,R} + \frac{R_p (1 + \tau_H s)}{(1 + \tau_p s)(1 + \tau_p s)(1 + \tau_H s) + K_C R_p} Q_{in}$$

هر یک از دو عامل $H_{p,R}$ ، Q_{in} می‌توانند به عنوان ورودی‌های سیستم به صورت پله‌ای، ضربه،... باشند. برای به دست آوردن پاسخ گذرای $H_p(t)$ ، نسبت به تغییرات ورودی پیدا کردن معکوس معادله ضروری می‌باشد. برای تعیین معکوس معادله تعیین ریشه‌های مخرج مورد نیاز می‌باشد. مشخص است که مقدار ریشه‌ها به مقادیر ثابت زمانی و K_C وابسته هستند. بسته به مقدار K_C سیستم می‌تواند پایدار و یا ناپایدار باشد. در حقیقت، همواره برای K_C مقدار آستانه‌ای وجود دارد که در مقادیر بالاتر از آن دامنه‌های متوالی پاسخ به جای فروکش کردن، افزایش می‌یابند. جهت تعیین شرایط پایداری سیستم، امتحان کردن پاسخ به یک ورودی محدود ضروری می‌باشد.

معادله مشخصه سیستم کنترل

با نوشتن تابع تبدیل مدار بین خروجی و ورودی(های) سیستم، عبارت مخرج را معادله مشخصه سیستم کنترل می‌نامند. در واقع ریشه‌های معادله مشخصه تعیین کننده شرایط پایداری سیستم می‌باشد.

معادله مشخصه را با $\Delta(s) = 1 + G$ نمایش می‌دهند.

اگر هر کدام از ریشه‌های معادله مشخصه در نیمه سمت راست صفحه مختلط قرار داشته باشند (RHP)، پاسخ به تغییرات مقدار مقرر و یا بار به صورت نمایی افزایش می‌یابد و پاسخ ناپایدار می‌باشد. ریشه‌های واقع در نیمه سمت چپ محور موهومی (LHP) ریشه‌های مجاز سیستم می‌باشد. اگر یک ریشه در مبدأ مختصات وجود داشته باشد (S) جواب به صورت عدد ثابت خواهد بود و نامحدود نمی‌گردد ولی اگر چند ریشه در مبدأ قرار داشته باشند (s^n)، پاسخ

باز هم نامحدود خواهد بود و به صورت تابع چند جمله‌ای از زمان تغییر می‌یابد. اگر یک جفت ریشه مزدوج روی محور موهومی داشته باشیم، پاسخ پله‌ای کلی، فقط محدود و سینوسی خواهد بود، اما اگر ورودی محدود به صورت سینوسی باشد که دوره تناوب نوسانی آن قسمت موهومی ریشه‌های مزدوج است، پاسخ کلی پاسخی است که دامنه آن به صورت تابعی چند جمله‌ای از زمان افزایش می‌یابد. بنابراین یک سیستم کنترل خطی هنگامی ناپایدار است که یکی از ریشه‌های معادله مشخصه روی محور موهومی و یا در سمت راست آن قرار بگیرد. در واقع اگر ریشه‌ها روی محور موهومی واقع شوند، پاسخ بدون تغییر دامنه نوسان خواهد نمود و اصطلاحاً آستانه ناپایداری خوانده می‌شود.

در واقع هرچه ریشه‌ها به سمت منفی تمایل یابند، سیستم دارای دینامیک سریع‌تری خواهد بود و مرحله گذرای آن کوتاه‌تر می‌شود. **قطب:** در واقع قطب‌های تابع تبدیل همان ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشند.

اما در عمل تعیین تمامی این ریشه‌ها به سادگی امکان پذیر نیست. به همین دلیل معیارهای مختلفی برای بررسی پایداری سیستم بدون محاسبه مستقیم قطبهای آن ارائه شده‌اند. برخی از این معیارها از ابزار گرافیکی خاصی برای تحلیل استفاده می‌کنند که در فصلهای بعدی به تفصیل مورد بحث قرار خواهند گرفت. در ادامه به یکی از معیارهای رایج در تعیین پایداری که معیاری جبری برای تعیین علامت ریشه‌های معادله مشخصه است اشاره خواهیم نمود. اگر $G(s)$ تابع تبدیل فرآیند و $H(s)$ تابع تبدیل فیدبک باشد معادله زیر، معادله مشخصه سیستم characteristic equation نامیده می‌شود:

$$1 + G(s).H(s) = 0$$

بدیهی است که ریشه‌های این معادله همان قطب‌ها، می‌باشند. ماهیت پاسخ سیستم، بستگی به نوع ریشه‌های این معادله دارد که در جدول زیر و شکل متعاقب آن‌ها را خلاصه نموده‌ایم:

نوع ریشه (قطب) در صفحه S	$1 + G(s).H(s) = 0$	شکل و ماهیت پاسخ	شکل
۱- یک ریشه در $s = a$ ($b = 0$)	$s - a = 0$	Ae^{at}	شکل a
۲- k ریشه در $s = a$ ($b = 0$)	$(s - a)^k = 0$	$(A_1 + A_2 t + \dots + A_k t^{k-1})e^{at}$	شکل a
۳- دو ریشه در $s = a \pm jb$	$(s - a + jb)(s - a - jb) = 0$	$Ae^{at} \sin(\omega t + \beta)$	شکل b
۴- k ریشه در $s = a \pm jb$	$[(s - a + jb)(s - a - jb)]^k = 0$	$[A_1 \sin(bt + \beta_1) + A_2 t \sin(bt + \beta_2) + \dots + A_k t^{k-1} \sin(bt + \beta_k)]e^{at}$	شکل b
۵- دو ریشه روی محور موهومی ($a = 0$) $s = \pm jb$	$(s + jb)(s - jb) = 0$	$A \sin(bt + \beta)$	شکل c
۶- k ریشه روی محور موهومی در $s = \pm jb$	$[(s + jb)(s - jb)]^k = 0$	$[A_1 \sin(bt + \beta_1) + A_2 t \sin(bt + \beta_2) + \dots + A_k t^{k-1} \sin(bt + \beta_k)]$	شکل c
۷- یک ریشه در مبدأ مختصات $s = 0 + j0$	$s = 0$	A	شکل d
۸- k ریشه در مبدأ مختصات	$sk = 0$	$A_1 + A_2 t + \dots + A_k t^{k-1}$	شکل d

محل ریشه‌ها	پاسخ ضربان ایده‌آل
	(a)
	(b)

محل ریشه‌ها	پاسخ ضربان ایده‌آل

در جدول قبل، در حالت کلی ریشه را به صورت $s = a + jb$ در نظر گرفتیم که a و b می‌توانند مثبت، منفی یا صفر باشند:

- $a < 0$: ریشه واقع در سمت چپ محور موهومی ($b > 0$ بالای محور حقیقی و $b < 0$ پایین محور حقیقی)

- $a > 0$: ریشه واقع در سمت راست محور موهومی ($b > 0$ بالای محور حقیقی و $b < 0$ پایین محور حقیقی)

- $a = 0$: ریشه روی محور موهومی ($b > 0$ بالای محور حقیقی و $b < 0$ پایین محور حقیقی)

- $b = 0$: ریشه روی محور حقیقی ($a > 0$ سمت راست مبدأ و $a < 0$ سمت چپ مبدأ)

- $a = 0$ و $b = 0$: مبدأ

در موارد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ (در جدول) که پاسخ دارای ضریب e^{at} است اگر $a < 0$ باشد یعنی ریشه دارای قسمت حقیقی منفی باشد با افزایش زمان ($t \rightarrow \infty$) پاسخ به شمت صفر می‌رود (پایدار). و در صورتی که $a > 0$ باشد با افزایش زمان ($t \rightarrow \infty$) جمله e^{at} به سمت بی‌نهایت می‌رود و پاسخ نامحدود (ناپایدار) می‌گردد. موارد ۶ و ۸ نیز به علت وجود ضرایب t (و توان‌های بالاتر t) در پاسخ، با افزایش زمان ($t \rightarrow \infty$) پاسخ نامحدود می‌گردد. در موارد ۵ و ۷ مقدار پاسخ یا دامنه آن همواره ثابت می‌ماند و افزایش زمان سبب نامحدود شدن آن نمی‌گردد.

- معمولاً محور حقیقی را با σ یا Re و محور موهومی را با $j\omega$ یا Im نشان می‌دهند.

پس با در نظر گرفتن تعریف پایداری (BIBO) که داریم:

۱- سیستمی پایدار است که هر ورودی محدود سبب ایجاد خروجی محدود در آن شود.

۲- سیستمی ناپایدار است که هر ورودی محدود سبب ایجاد خروجی نامحدود در آن شود.

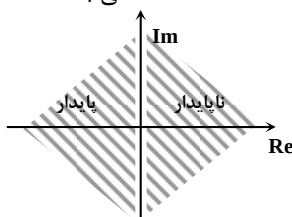
برای پایداری سیستم بر حسب محل ریشه‌های معادله مشخصه آن داریم:

۱- سیستم پایدار باید دارای تابع انتقالی با قطب‌های سمت چپ محور موهومی باشد یعنی قسمت حقیقی ریشه‌های معادله مشخصه منفی باشد.

۲- سیستم ناپایدار حداقل یک قطب سمت راست محور موهومی (یا قطب تکراری روی محور موهومی) دارد.

۳- سیستم پایدار حده (Limitedly stable یا Marginally stable) دارای حداقل یک قطب غیر تکراری

روی محور موهومی است (بقیه قطب‌ها سمت چپ محور موهومی هستند).



مثال ۱: تابع تبدیل فرآیندی معادل G_1 می‌باشد، با استفاده از یک کنترل کننده انتگرالی با تابع انتقال G_{PI} فرآیند را کنترل می‌کنیم، تابع

$$G_1 = \frac{4}{s^2 + 2s}, \quad G_{PI} = 2\left(1 + \frac{1}{2s}\right), \quad H = 1$$

تبدیل عنصر اندازه‌گیر برابر یک می‌باشد. شرایط سیستم را تعیین کنید؟

(۱) سیستم ناپایدار می‌باشد.

(۲) سیستم به صورت مشروط پایدار می‌باشد.

(۳) سیستم پایدار می‌باشد.

(۴) سیستم نوسانی و در آستانه ناپایداری می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۳» برای تعیین پایداری سیستم، ابتدا معادله مشخصه را تعیین و سپس موقعیت ریشه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1 + G = 1 + G_1 G_{PI} H = 0, \quad 1 + G = 1 + \left(\frac{4}{s^2 + 2s} \times \frac{2(s+1)}{2s}\right) = \frac{1 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 4}{2s(s+2)} = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 + j\sqrt{3} \\ s_2 = -1 - j\sqrt{3} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود هر دو ریشه معادله در سمت چپ نمودار قرار دارند، بنابراین سیستم پایدار است.

مثال ۲: با توجه به دیاگرام بلوکی زیر آیا سیستم پایدار است؟

(۱) پاسخ محدود می‌باشد.

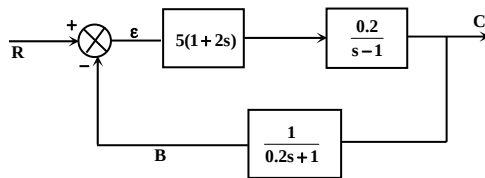
(۲) پاسخ نامحدود می‌باشد.

(۳) سیستم در آستانه ناپایداری می‌باشد.

(۴) سیستم ناپایدار می‌باشد.



پاسخ: گزینه «۴» معادله مشخصه سیستم عبارت است از:



$$1 + G = 1 + \left(\frac{0.2}{s-1} \times \frac{5(1+2s)}{0.2s+1} \right) = 0, \quad 1 + G = \frac{0.2s^2 + 2/8s}{(s-1)(0.2s+1)} = 0$$

$$\Rightarrow 0.2s^2 + 2/8s = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = -14 \end{cases}$$

یک ریشه معادله مشخصه در مبدا قرار دارد، و بنابراین پاسخ نامحدود خواهد بود.

معیار پایداری روث (ROUTH)

این آزمون به سیستم‌هایی محدود می‌شود که معادله مشخصه آن‌ها به صورت چند جمله‌ای باشد و برای سیستم‌هایی که پسی انتقال دارند کاربردی ندارد.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_1 s + a_0 = 0$$

در عبارت بالا، a_n عددی مثبت می‌باشد، در صورتی که a_n منفی باشد معادله مشخصه را در منفی ضرب می‌کنیم. اگر یکی از ضرایب منفی باشد، سیستم قطعاً ناپایدار می‌باشد و اجرای معیار روث ضرورتی ندارد.

$$1 + G = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

بنا به تعریف هر چند جمله‌ای مانند $1 + G$ را که تمامی ریشه‌های آن در نیم صفحه چپ باز باشد اکیداً هرویتز می‌نامیم. الگوریتم Routh تعیین می‌کند که آیا معادله مشخصه سیستم یک چند جمله‌ای اکیداً هرویتز است یا خیر؟

$$1 + G = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)$$

$$= a_n s^n - a_n (s_1 + \dots + s_n) s^{n-1} - a_n (s_1 s_2 + \dots + s_{n-1} s_n) - a_n (s_1 s_2 \dots s_n)$$

بنابراین اگر همگی قطبها در نیم صفحه چپ باز باشند تمامی ضرایب معادله مشخصه باید علامت یکسانی داشته باشند. لذا:

شرط کافی برای ناپایداری داخلی، مختلف‌العلامه بودن ضرایب معادله مشخصه سیستم است.

اجرای معیار پایداری R - H

الگوریتم تعیین پایداری روث - هرویتز (Routh-Hurwitz) به شرح زیر است:

۱. تشکیل آرایه Routh

تمامی ضرایب معادله مشخصه در این دو ردیف قرار می‌گیرند. اگر عدد ثابت a_0 در ردیف n قرار گرفت در ردیف زیرین صفر قرار می‌دهیم. در تشکیل

$$(1) \begin{pmatrix} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \end{pmatrix}$$

$$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

بطوری که:

این مراحل را به شیوه‌ای مشابه ادامه می‌دهیم تا ردیف s^0 کامل شود.

اگر n عددی زوج باشد، سطر اول یک عنصر بیشتر از سطر دوم خواهد داشت. و به طور کلی $n+1$ سطر خواهیم داشت.

۲. تعبیر آرایه Routh

بر طبق الگوریتم Routh شرط لازم و کافی برای آنکه تمامی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم در نیم صفحه چپ باشند آن است که تمامی عناصر محاسبه شده در ستون اول آرایه Routh غیر صفر بوده و علامت یکسانی داشته باشند. در واقع تعداد تغییر علامت در ستون اول این آرایه متناظر با تعداد قطبهای سمت راست خواهد بود.

هر یک از سطرها را می‌توان به عدد ثابت و مثبت تقسیم کرد بدون این‌که در نتیجه آزمون تغییری ایجاد شود.

۱- حالت‌های خاص در آرایه روث

۱- برخورد با صفر در ستون اول: اگر در ستون اول عدد صفر ظاهر شود ادامه تکمیل جدول غیرممکن است، جهت رفع این مشکل سه روش وجود دارد: الف) به جای صفر عدد مثبت بسیار کوچک ϵ قرار می‌دهیم و بقیه جملات آرایه را حساب می‌کنیم، پس حد تمام جملات ستون اول را وقتی به سمت 0^+ میل کند پیدا کرده و علامت آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

ب) اگر علامت ضریب معادله بالای ϵ و پایین آن یکسان باشند، نشانه این است که یک زوج قطب موهومی وجود دارد.

ج) اگر ضریب بالای ϵ و پایین آن مختلف علامه باشند یک تغییر علامت رخ داده است.

۲) معادله اصلی را در $(s+1)$ ضرب کرده و برای معادله جدید آرایه روث را تشکیل می‌دهیم. (با ضرب $(s+1)$ در واقع یک ریشه منفی به معادله اضافه می‌شود که در پایداری و محل ریشه‌های معادله اصلی تاثیری ندارد).

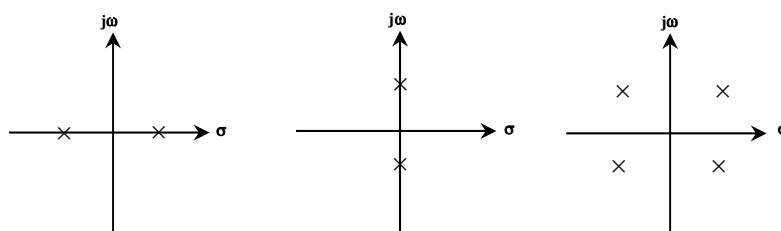
۳) در معادله اصلی به جای s عبارت $s = \frac{1}{x}$ را جایگذاری می‌کنیم و معادله را بر اساس x مرتب می‌کنیم و برای معادله جدید بر حسب x آرایه روث را تنظیم می‌کنیم.

۲- برخورد با سطر صفر: این حالت که در سطری متناظر با توان فرد s رخ می‌دهد به دلیل وجود چند جمله‌ای زوج $A(s^2)$ به عنوان عاملی از معادله مشخصه اتفاق می‌افتد. در این شرایط:

$$1 + G = A(s^2).Q(s)$$

$A(s^2)$ که معادله کمکی نیز نامیده می‌شود در سطر بالای سطر صفر دیده می‌شود. برای تکمیل آرایه ضرایب مشتق معادله کمکی $A(s^2)$ را جایگزین سطر صفر می‌کنیم و آرایه را مشابه حالت‌های قبل کامل می‌کنیم.

لازم به تذکر است که چند جمله‌ای زوج ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ دارد که به یکی از صورت‌های زیر یا ترکیبی از آنها خواهد بود.



باید توجه نمود که در اینحالت در آرایه Routh از سطر حاوی چند جمله‌ای زوج تا آخر آرایه تست پایداری برای این چند جمله‌ای صورت می‌گیرد. بنابراین اگر این چند جمله‌ای ریشه‌های سمت راست نداشته باشد (تغییر علامت در ستون اول) قطعاً ریشه‌های روی محور $j\omega$ خواهد داشت. در اینحالت اگر این ریشه‌ها مکرر باشند سیستم ناپایدار است. در بهترین وضعیت که ریشه‌ها ساده هستند حالت پایدار مرزی را خواهیم داشت.

تذکر ۱: در حالت برخورد با سطر صفر، از ابتدای آرایه تا سطر حاوی چند جمله‌ای زوج ریشه‌ای روی محور موهومی نخواهیم داشت. در این ناحیه از جدول در واقع پایداری $Q(s)$ تعیین می‌شود که $\Delta(s) = A(s^2).Q(s)$ لازم به ذکر است که در چنین حالتی از آنجایی که ریشه‌های $A(s^2)$ به راحتی تعیین می‌شوند، می‌توان سایر ریشه‌های $\Delta(s)$ را نیز بدست آورد و به نوعی معادله مشخصه را تجزیه نمود.

تذکر ۲: در آرایه روث ممکن است با چندین سطر صفر برخورد کنیم. در این حالت تعداد چنین سطرهایی بیانگر مرتبه تکرار ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ در معادله مشخصه است.

تذکر ۳: با تبدیل $s \rightarrow -s$ در معادله مشخصه و اعمال الگوریتم Routh به $\Delta(-s)$ می‌توان تعداد ریشه‌های معادله مشخصه در نیم صفحه چپ را محاسبه نمود. اگر n_R تعداد ریشه‌های نیم صفحه راست باز و n_L تعداد ریشه‌های نیم صفحه چپ باز را نشان دهد خواهیم داشت:

$$\text{تعداد ریشه‌های موهومی محض} = n - (n_R + n_L)$$

که n مرتبه سیستم است.

سیستم پس‌خور واحد: هنگامی که تابع تبدیل پس‌خور برابر واحد باشد

مثال ۳: کدام یک از توابع زیر پایدار می‌باشد:

$$1 + G = (s+2)(s-1) \quad (۴) \quad 1 + G = s^2 - s^2 + s + 1 \quad (۳) \quad T(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 6} \quad (۲) \quad T(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 10} \quad (۱)$$

$$1 + G = s^2 + 7s + 10$$

پاسخ: گزینه «۱» بررسی گزینه ۱: معادله مشخصه عبارت است از:

$$1 + G = 0 \Rightarrow s^2 + 7s + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -5 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله هر دو در سمت چپ محور موهومی قرار دارند، بنابراین سیستم پایدار می‌باشد.

بررسی گزینه ۲:

$$1 + G = s^3 + 2s^2 + 3s + 6$$

$$s^3 + 2s^2 + 3s + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = +i\sqrt{3} \\ s_3 = -i\sqrt{3} \end{cases}$$

ریشه s_1 در سمت چپ محور موهومی قرار دارد، و باعث ناپایداری نخواهد شد. دو ریشه s_2, s_3 پایدار مرزی و یا حاشیه‌ای می‌باشند و سیستم در مرز ناپایداری قرار دارد.

بررسی گزینه ۳: با توجه به معیارهای پایداری روت، یکسان نبودن علامت ضرایب معادله مشخصه شرط کافی برای ناپایداری سیستم می‌باشد.

بررسی گزینه ۴: یکی از ریشه‌های معادله مشخصه در سمت راست محور موهومی قرار دارد و بنابراین باعث ناپایداری سیستم خواهد شد.

مثال ۴: کدام یک از شرایط زیر برای پایداری سیستمی که معادله مشخصه آن معادل $1 + G = a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$ نادرست می‌باشد؟

$$a_1a_0 > a_2a_3 \quad (۴)$$

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \quad (۳)$$

$$a_1 > 0 \quad (۲)$$

$$a_0 > 0 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا آرایه روت را تشکیل می‌دهیم، (ضرایب مثبت فرض می‌شوند).

$$\begin{array}{ccc} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array} \xrightarrow{\text{شرایط پایداری}} \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \\ a_3 > 0 \end{cases}$$

مثال ۵: آیا سیستم با معادله مشخصه $1 + G = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$ پایدار می‌باشد یا خیر؟

پاسخ: روش اول: با تشکیل آرایه روت خواهیم داشت:

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 3 & 5 \\ s^4 & 2 & 6 & 3 \\ s^3 & \varepsilon & \frac{7}{2} & 0 \\ s^2 & \frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon} & 3 & 0 \\ s^1 & \frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14} & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon} = -\infty < 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14} = \frac{49}{14} > 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} s^2 \rightarrow s^1 \text{ تغییر علامت} \\ s^3 \rightarrow s^2 \text{ تغییر علامت} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{سیستم ناپایدار} \Rightarrow 2 \text{ قطب سمت راست}$$

روش دوم: $s \rightarrow \frac{1}{s}: 3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1$

$$\begin{array}{ccc} s^5 & 3 & 6 & 2 \\ s^4 & 5 & 3 & 1 \\ s^3 & \frac{21}{5} \rightarrow 3 & \frac{7}{5} \rightarrow 1 & 0 \\ s^2 & 4 & 3 & 0 \\ s^1 & -5 & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & \end{array}$$

۲ قطب سمت راست $\rightarrow 2$ تغییر علامت بنابراین سیستم ناپایدار می‌باشد.

مثال ۶: معادله مشخصه سیستمی به صورت $1 + G = 1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{K}{s^3}$ می‌باشد، محدوده بهره فیدبک را چنان بیابید که سیستم حالت پایدار داشته باشد؟

$$k > 6 \quad (۴)$$

$$0 < k < 6 \quad (۳)$$

$$k < 6 \quad (۲)$$

$$k > 0 \quad (۱)$$



پاسخ: گزینه «۳» ☒

$$\Delta(s) = 1 - \left(-\frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{k}{s^3} \right) = 1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{k}{s^3} \Rightarrow \Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & \frac{6-k}{3} & 0 \\ s^0 & k & 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} k > 0 \\ 6-k > 0 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < k < 6$$

شرایط پایداری:

مثال ۷: معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر می‌باشد، شرایط سیستم عبارت است از:

$$1 + G = s^8 + 3s^7 + 10s^6 + 24s^5 + 48s^4 + 96s^3 + 128s^2 + 192s + 128$$

- (۱) ۴ ریشه منفی، ۲ ریشه مثبت، ۲ ریشه موهومی
(۲) ۲ ریشه منفی، ۴ ریشه مثبت، ۲ ریشه موهومی
(۳) ۲ ریشه منفی، ۲ ریشه مثبت، ۴ ریشه موهومی
(۴) ۲ ریشه منفی، ۳ ریشه مثبت، ۳ ریشه موهومی

پاسخ: گزینه «۱» با تعیین آرایه روت خواهیم داشت: ☒

$$\begin{array}{cccccc} s^8 & 1 & 10 & 48 & 128 & 128 \\ s^7 & 3 & 8 & 32 & 64 & 0 \\ s^6 & 1 & 8 & 32 & 64 & 0 \\ s^5 & 3 & 16 & 32 & 0 & 0 \\ s^4 & \frac{8}{3} & \frac{64}{3} & 64 & 0 & 0 \\ s^3 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ s^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1(s^2) = s^6 + 8s^4 + 32s^2 + 64 \\ A_1'(s^2) = 6s^5 + 32s^3 + 64s \end{cases}$$

از s^8 تا s^6 هیچ تغییر علامتی و یا سطر صفری نداریم، بنابراین تا این قسمت تست پایداری مربوط به $Q(s)$ از مرتبه دوم است و دو قطب سمت چپ داریم. بررسی قطب‌ها از سطر s^6 :

در ستون اول دو تغییر علامت وجود دارد و بنابراین دو قطب در سمت راست وجود دارد. در سطر s^5 با سطر صفر مواجه می‌شویم و به علت تقارن (با دو قطب حاصل از تغییر علامت) دو ریشه در سمت چپ را نتیجه می‌دهد. بنابراین در مجموع چهار قطب در سمت چپ محور موهومی وجود دارد.
 $2 = 8 - (2 + 4) = 2$ تعداد قطب‌های روی محور موهومی

مثال ۸: معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر می‌باشد، شرایط سیستم عبارت است از:

$$\Delta(s) = s^7 + 2s^6 + s^5 + 2s^4 - s^3 - 2s^2 - s - 2$$

- (۱) ۴ ریشه منفی، ۲ ریشه مثبت، ۱ ریشه موهومی
(۲) ۲ ریشه منفی، ۴ ریشه مثبت، ۱ ریشه موهومی
(۳) ۲ ریشه منفی، ۱ ریشه مثبت، ۴ ریشه موهومی
(۴) ۲ ریشه منفی، ۳ ریشه مثبت، ۲ ریشه موهومی

پاسخ: گزینه «۳» ☒

$$\begin{array}{cccc} s^7 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ s^6 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ s^5 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ s^4 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ s^3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ s^2 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ s^1 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ s^0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A_1(s^2) = s^6 + s^4 - s^2 - 1 \\ A_1'(s^2) = 6s^5 + 4s^3 - 2s \\ A_2(s^2) = -3s^2 - 3 \\ A_2'(s^2) = -6s \end{cases}$$

از s^7 تا s^6 هیچ تغییر علامتی و یا سطر صفر نداریم، بنابراین تا این قسمت تست پایداری مربوط به $Q(s)$ از مرتبه اول است و یک ریشه سمت چپ وجود دارد. بررسی ریشه‌ها از سطر s^6 :
 در ستون اول یک بار تغییر علامت وجود دارد بنابراین یک ریشه در سمت راست محور موهومی وجود دارد. در سطرهای s^5, s^4 ، سطر صفر به وجود آمده است، اولاً به علت تقارن به ازای یک ریشه در سمت راست به علت تغییر علامت، یک ریشه نیز در سمت چپ محور موهومی خواهیم داشت و بنابراین در مجموع دو ریشه منفی وجود دارد. ثانیاً به علت دو سطر صفر، مرتبه تکرار قطب‌های موهومی محض دو می‌باشد.

$$4 = 7 - (1 + 2) = 4$$

دو جفت قطب موهومی محض یکسان وجود دارد.



مثال ۹: معادله مشخصه سیستمی معادل $s^4 + ks^3 + s^2 + s + 1$ می‌باشد، گستره k برای پایدار بودن عبارت است از:

(۱) $k > 1$ (۲) $0 < k < 1$ (۳) تمامی مقادیر k (۴) هیچ مقدار از k

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا آرایه روت را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} s^4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ s^3 \quad k \quad 1 \\ s^2 \quad \frac{k-1}{k} \quad 1 \\ s^1 \quad 1 - \frac{k^2}{k-1} \\ s^0 \quad 1 \end{array}$$

جهت پایداری در ستون اول نباید تغییر علامتی وجود داشته باشد:

(۱) $k > 0$, (۲) $\frac{k-1}{k} > 0$, (۳) $1 - \frac{k^2}{k-1} > 0$

با توجه به شرط یک و دو نتیجه می‌شود $k > 1$ می‌باشد ولی به ازای این شرط، شرط سوم همواره منفی است. بنابراین هر سه شرط به طور همزمان نمی‌توانند برقرار باشند و در نتیجه سیستم به ازای هیچ مقداری از k پایدار نخواهد بود.

مثال ۱۰: تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد به شکل $L(s) = \frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ مفروض است. حدود پایداری سیستم

برابر است با:

(۱) $k > \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ (۲) $0 < k < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ (۳) $k > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ (۴) $0 < k < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا معادله مشخصه سیستم کنترل را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از آن آرایه روت را تشکیل داده و پایداری سیستم را بررسی می‌کنیم.

$$\Delta(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k = 0$$

$$\begin{array}{r} s^3 \quad T_1 T_2 \quad 1 \\ s^2 \quad T_1 + T_2 \quad K \\ s^1 \quad A \quad 0 \\ s^0 \quad K \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{شرط پایداری: } \begin{cases} k > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 + T_2 - k T_1 T_2 > 0 \\ \Downarrow \\ k T_1 T_2 < T_1 + T_2 \\ k < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{array}$$

در نتیجه:

مثال ۱۱: تابع حلقه باز سیستمی عبارتست از: $L(s) = \frac{k(1+T_d s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$ ، حدود k برای پایداری سیستم حلقه بسته در کدام گزینه بدرستی

آمده است؟

(۱) $k > \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 - T_d}$ (۲) $0 < k < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 - T_d(T_1 + T_2)}$ (۳) $0 < k < \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2) T_d - T_1 T_2}$ (۴) $k > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2 - T_d}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا معادله مشخصه سیستم کنترل را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از آن آرایه روت را تشکیل داده و پایداری سیستم را بررسی

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{k(1+T_d s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}}{1 + \frac{k(1+T_d s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}} = \frac{k(1+T_d s)}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + K T_d s + K}$$

می‌کنیم:

$$\Delta(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + K T_d s + K = 0$$

$$S^3 \quad T_1 T_r \quad 1 + K T_d$$

$$S^2 \quad T_1 + T_r \quad K$$

$$S^1 \quad A \quad 0$$

$$S^0 \quad K$$

با توجه به اینکه T_1 و T_r مثبت هستند شرایط پایداری آن است که $k > 0$ و:

$$\begin{cases} -K\{(T_1 + T_r)T_d - T_1 T_r\} < (T_1 + T_r) \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < \frac{T_1 + T_r}{T_1 T_r - T_d(T_1 + T_r)}$$

لذا:

مثال ۱۲: تابع تبدیل حلقه بازسیستمی عبارتست از $\frac{0.2k(s+5)}{(s+1)^3}$ ، حداکثر k برای پایداری و فرکانس نوسانات پایدار عبارت است از:

$$\begin{cases} k = 10 \\ \omega = 7 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} k = 10 \\ \omega = \sqrt{7} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} k = 20 \\ \omega = 7 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} k = 20 \\ \omega = \sqrt{7} \end{cases} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا معادله مشخصه سیستم کنترل را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از آن آرایه روت را تشکیل داده و پایداری سیستم را بررسی می‌کنیم.

$$\Delta(s) = S^3 + 3S^2 + 3S + 1 + 0.2KS + K$$

$$S^3 \quad 1 \quad 0.2K + 3$$

$$S^2 \quad 3 \quad K + 1 \quad \Rightarrow A = 0 \Rightarrow 0.2K + 9 - K - 1 = 0 \Rightarrow 0.4K = 8 \Rightarrow K = 20$$

$$S^1 \quad A \quad 0 \quad \Rightarrow 3s^2 + 21 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{7}$$

$$S^0 \quad K + 1$$

مثال ۱۳: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد به صورت $G(s) = \frac{as+2}{s^2(s^2+3s+3)}$ است، کدام گزینه درست است؟

۱ سیستم حلقه بسته برای $6 < a < 9$ پایدار است و برای $a = 6$ نوسانی است.

۲ سیستم حلقه بسته برای $a < 6$ پایدار است و برای $a = 6$ نوسانی است.

۳ سیستم حلقه بسته برای $3 < a < 6$ پایدار است و برای $a = 3$ نوسانی است.

۴ سیستم حلقه بسته برای $a < 3$ و $a > 6$ پایدار است و برای $a = 3$ یا $a = 6$ نوسانی است.

پاسخ: گزینه «۳» $\Delta(s) = 1 + G(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + as + 2 = 0$ معادله مشخصه

$$s^4 \quad 1 \quad 3 \quad 2$$

$$s^3 \quad 3 \quad a \quad 0$$

$$s^2 \quad 9-a \quad 6$$

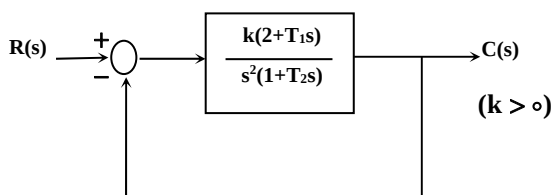
$$s^1 \quad 9a-a^2-18 \quad 0$$

$$s^0 \quad 6$$

$$\begin{cases} 9-a > 0 \\ 9a-a^2-18 > 0 \end{cases} \quad \text{شرایط پایداری:}$$

بنابراین بازای $3 < a < 6$ سیستم پایدار است و بازای $a = 3$ با توجه به شرایط ایجاد شده برای سطر صفر سیستم نوسانی است. در این حالت داریم:

$$s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s = \pm j$$



مثال ۱۴: در سیستم مقابل:

۱) وقتی $T_1 > 2T_2$ باشد سیستم حلقه - بسته پایدار است.

۲) سیستم حلقه بسته به ازای $k \geq 0$ همواره پایدار است.

۳) سیستم حلقه بسته بستگی به k نداشته و همواره ناپایدار است.

۴) سیستم حلقه بسته فقط به ازای $k > 0$ پایدار است.

پاسخ: گزینه «۱» برای تعیین پایداری سیستم، ابتدا معادله مشخصه را تعیین نموده و سپس آرایه روت را تشکیل می‌دهیم:

$$1 + G = 1 + \frac{k(2 + T_1 s)}{s^2(1 + T_2 s)} = \frac{T_2 s^3 + s^2 + kT_1 s + 2k}{s^2(1 + T_2 s)} = 0 \quad \text{تعیین معادله مشخصه}$$



مدرس‌ان شریف

فصل هفتم

« معادله فضای حالت »

نمایش فضای حالت

توجه : این فصل مختص دانشجویان رشته مهندسی پلیمر می‌باشد.



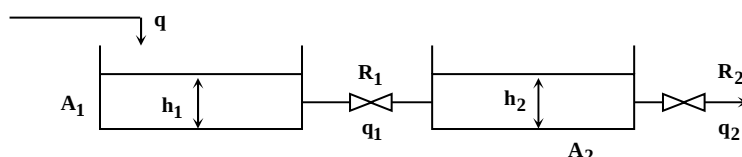
بر خلاف نمایش‌های قبلی، نمایش فضای حالت یک توصیف داخلی از سیستم را ارائه می‌دهد. اساس این روش تبدیل معادله دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت از مرتبه n به n معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه اول است. این امر با انتخاب مجموعه‌ای از متغیرهای حالت صورت می‌گیرد. بطوریکه با آگاهی از این متغیرها در زمان خاص $t = t_0$ و همچنین با داشتن ورودی بازای $t \geq t_0$ بتوان رفتار سیستم را در هر زمان دلخواه $t \geq t_0$ تعیین نمود. متغیرهای حالت متغیرهایی دینامیکی هستند و انتخاب آنها به شیوه‌های مختلفی امکان پذیر است. یک انتخاب رایج، انتخاب خروجی عناصر ذخیره ساز انرژی (انتگرال گیر) به عنوان متغیر حالت است. نمایش فضای حالت سیستم خطی برخلاف نمایش تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل آن یک نمایش منحصر بفرد نیست. بطوریکه ترتیب و نوع انتخاب متغیرهای حالت در نمایش بدست آمده اهمیت دارد. لازم به ذکر است که حداقل تعداد متغیرهای حالت مستقل که برای توصیف کامل سیستم مورد نیاز هستند همان مرتبه معادله دیفرانسیل و یا به عبارتی مرتبه سیستم است که مساوی با تعداد انتگرالگیرهای مورد نیاز برای تحقق سیستم بوده و یکتاست. نمایش فضای حالت سیستمهای خطی، یک نمایش ماتریسی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{معادله حالت} \\ y = Cx + Du & \text{معادله خروجی} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \in R^n & \text{ بردار حالت} & u \in R^m & \text{ بردار ورودی} & y \in R^p & \text{ بردار خروجی} \\ A_{n \times n} & \text{ ماتریس سیستم (مربعی)} & B_{n \times m} & \text{ ماتریس ورودی (کنترل)} & C_{p \times n} & \text{ ماتریس خروجی (رؤیت)} \\ D_{p \times m} & \text{ ماتریس انتقال مستقیم} \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که در مورد سیستمهای تک ورودی - تک خروجی: $m = p = 1$ به همین دلیل B یک بردارستونی و C یک بردار سطری و D یک اسکالر خواهد بود.

مثال ۱: دو تانک ارتفاع پشت سرهم مطابق شکل در نظر گرفته شده است، مدل فضای حالت را به دست آورید؟



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» برای هر کدام از تانک‌ها، معادله دیفرانسیلی مربوطه را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A_1 \frac{dh_1}{dt} = q - \frac{h_1}{R_1} \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = \frac{q}{A_1} - \frac{h_1}{A_1 R_1} \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{A_2 R_1} - \frac{h_2}{A_2 R_2} \end{cases}$$

این معادلات به شکل مقابل نوشته خواهند شد:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{A_2 R_1} & -\frac{1}{A_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} q$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$$

خروجی تانک دوم مورد نظر می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

شکل معادله فضای حالت یک سیستم منحصر به فرد نمی‌باشد و می‌توان آن را به شکل متفاوتی در فضای حالت نوشت:

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{cases} A_1 D h_1 = q - \frac{h_1}{R_1} \\ A_2 D h_2 = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A_1 D + \frac{1}{R_1}) h_1 = q \\ (A_2 D + \frac{1}{R_2}) h_2 = \frac{h_1}{R_1} \end{cases}$$

$$h_1 = \frac{q}{(A_1 D + \frac{1}{R_1})} \Rightarrow (A_2 D + \frac{1}{R_2}) h_2 = \frac{q}{R_1} = \frac{q}{R_2 (A_1 D + \frac{1}{R_1})} ; (A_2 D + \frac{1}{R_2}) (A_1 D + \frac{1}{R_1}) h_2 = \frac{q}{R_1}$$

$$(A_1 A_2 D^2 + (\frac{A_2}{R_1} + \frac{A_1}{R_2}) D + \frac{1}{R_1 R_2}) h_2 = \frac{q}{R_1} ; \tau_1 = A_1 R_1, \tau_2 = A_2 R_2$$

برای تعیین معادله بر حسب ثابت‌های زمانی طرفین معادله را در $R_1 R_2$ ضرب می‌کنیم:

$$(A_1 R_1 A_2 R_2 D^2 + (A_2 R_2 + A_1 R_1) D + 1) h_2 = R_2 q \Rightarrow \tau_1 \tau_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dh_2}{dt} + h_2 = R_2 q$$

$$Y = \frac{dh_2}{dt} \Rightarrow \frac{dY}{dt} = \frac{d^2 h_2}{dt^2} \Rightarrow \frac{dY}{dt} = -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} h_2 - \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} Y + \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2} q$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_2 \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix}$$

در انتها معادله فضای حالت برابر است با:

مثال ۲: دینامیک یک فرآیند توسط معادله دیفرانسیلی $\frac{d^4 y}{dx^4} + 3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 11 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + y = \delta u$ تعریف می‌شود. فضای حالت این سیستم را به دست آورید؟

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تغییر متغیرهایی به صورت زیر را اعمال می‌کنیم:

$$z_1 = y, z_2 = \frac{dy}{dx}, z_3 = \frac{d^2y}{dx^2}, z_4 = \frac{d^3y}{dx^3} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = -z_1 - 6z_2 - 11z_3 - 3z_4 + 5u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -11 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

برخی از شکل‌های مدل فضای حالت

الف - شکل کنونیکیال (متعارف)

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \dots + b_n u$$

اگر دینامیک سیستمی مطابق معادله زیر باشد:

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

تابع تبدیل سیستم عبارت است از:

شکل کنونیکیال این سیستم به صورت مقابل می‌باشد:

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, C_C = [1 \ 0 \ \dots \ 0], D_C = \beta_0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u & \beta_0 &= b_0 \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x} - \beta_1 u & \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u & \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ &\vdots & \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ &\vdots & & \vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u & \beta_{n-1} &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{aligned}$$

ب - شکل کنونیکیال کیفی

در این شکل، قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز در قطر ماتریس A نوشته می‌شود:

$$Y(s) = \frac{n_1 s^{n-1} + n_2 s^{n-2} + \dots + n_r}{s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_n} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s - r_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - r_i}$$

شکل کنونیکیال کیفی عبارت است از:

$$A_m = \begin{bmatrix} -r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -r_n \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, C_m = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n], D_m = 0$$

از معایب شکل کنونیکیال

- اگر قطب موهومی وجود داشته باشد، ماتریس نیز دارای عضو موهومی خواهد بود.
- اگر قطب مکرر وجود داشته باشد، ماتریس سیستم نمی‌تواند قطری باشد.

پاسخ دینامیکی بر اساس معادلات حالت

با داشتن معادلات فضای حالت و خروجی می‌توان به راحتی سایر نمایش‌های سیستم را بدست آورد:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[\text{شرایط اولیه صفر}]{\text{تبدیل لاپلاس}} \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s)$$

در رابطه بالا I ماتریس واحد می‌باشد.

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \Rightarrow Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \Rightarrow \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

از این نمایش کلیه مشخصات و تعاریف مرتبط با تابع تبدیل سیستم خطی قابل حصول است. کافی است توجه کنیم که:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \text{adj}(sI - A)B}{\det(sI - A)} + D \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \text{adj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

از این نمایش واضح است که قطب‌های سیستم همان ریشه‌های $\det(sI - A) = 0$ هستند. جالب اینکه این ریشه‌ها در حقیقت مقادیر ویژه ماتریس سیستم (A) خواهند بود. بنابراین مقادیر مشخصه ماتریس A همان قطب‌های سیستم می‌باشند. در تئوری سیستم‌های خطی به این مقادیر ویژه «مود» سیستم گفته می‌شود. با کمی دقت می‌توان صفرهای انتقال تابع تبدیل را نیز محاسبه کرد. ثابت می‌شود که این صفرها از رابطه $\det \begin{bmatrix} -s_0 I + A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 0$ بدست می‌آیند.

از طرفی چون درجه $\text{adj}(sI - A)$ از درجه $\det(sI - A)$ کمتر است واضح است که اکیداً سره بودن تابع تبدیل به D وابسته است. بطوریکه:

$$\begin{cases} D = 0 \Rightarrow \text{تابع تبدیل اکیداً سره} \\ D = \text{cte} \neq 0 \Rightarrow \text{تابع تبدیل سره} \end{cases}$$

باید توجه داشت که امکان ندارد تابع تبدیل یک سیستم خطی فیزیکی درجه نسبی منفی داشته باشد. بنابراین می‌توان گفت:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = D$$

از طرفی بهره استاتیکی (DC) تابع تبدیل به راحتی از رابطه زیر قابل محاسبه است:

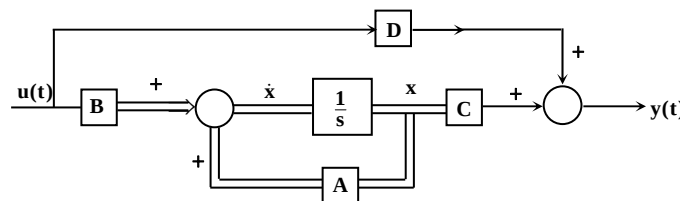
$$H(0) = -CA^{-1}B + D$$

$$G(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}}{\det(sI - A)}$$

بنابراین تابع تبدیل بر اساس مدل فضای حالت عبارت است از:

بنابراین معادله مشخصه سیستم عبارت است از:

با داشتن تابع تبدیل سیستم می‌توان به راحتی نمایش معادله دیفرانسیل آن را محاسبه کرد. (عکس تبدیل لاپلاس) نمایش دیاگرام بلوکی متناظر با فضای حالت داده شده نیز به قرار زیر است:



→ : اسکالر

⇒ : بردار / ماتریس

با توجه به یکتا نبودن نمایش فضای حالت، محاسبه این نمایش از روی سایر نمایشها بحث بسیار مفصلی را طلب می‌کند که موضوع اصلی تئوری تحقق در سیستم‌های کنترل پیشرفته است.

مثال ۳: یک مدل فضای حالت با دو ورودی و سه خروجی:

(۲) سه متغیر حالت دارد.

(۱) دو متغیر حالت دارد.

(۴) با این اطلاعات تعداد متغیرهای حالت مشخص نخواهد شد.

(۳) ماتریس حالت 2×3 دارد.

پاسخ: گزینه «۴» ☒

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

مثال ۴: معادله فضای حالت و خروجی سیستمی عبارت است از:

کدام گزینه تابع انتقال و صفر انتقال این سیستم را نشان می‌دهد؟

(۴) صفر انتقال ندارد.

$$s = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$s = -2 \quad (2)$$

$$s = -1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۲» ☒

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D = 0 \\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, (sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{s^2 + 7s + 12} \Rightarrow s_0 = -2 \text{ صفر انتقال}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -10 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} x$$

مثال ۵: نمایش فضای حالت سیستمی عبارتست از:

به ازای کدام مقدار k قطب‌های سیستم در -4 و -6 قرار می‌گیرند؟

$$k = -8 \quad (4)$$

$$k = -6 \quad (3)$$

$$k = -12 \quad (2)$$

$$k = -24 \quad (1)$$

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \Delta(s) = \begin{vmatrix} s+10 & -k \\ -1 & s \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s^2 + 10s - k = 0$$

پاسخ: گزینه «۱» ☒

$$\Delta(s) = (s+6)(s+4) = s^2 + 10s + 24 \Rightarrow k = -24 \Leftrightarrow (s+6)(s+4) = s^2 + 10s - k$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u ; \quad y = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} x$$

مثال ۶: معادلات فضای حالت سیستمی به شکل مقابل داده شده است.

کدام گزینه تابع تبدیل این سیستم را به درستی نشان می‌دهد؟

$$\frac{8s+1}{s^2+6s+5} \quad (4)$$

$$\frac{8s+1}{s^2+5s+6} \quad (3)$$

$$\frac{s+8}{s^2+6s+5} \quad (2)$$

$$\frac{s+8}{s^2+5s+6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» ☒

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+5s+6} \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+5s+6} (s+8) = \frac{s+8}{s^2+5s+6}$$

مثال ۷: تابع تبدیل سیستمی به شکل زیر داده شده است. نمایش فضای حالت آن را بدست آورید.

$$\frac{Y}{U} = \frac{\frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}}{1 + \frac{10}{s} + \frac{24}{s^2}} = \frac{s+3}{s^2+10s+24}$$

پاسخ: ☒

برای محاسبه نمایش فضای حالت ابتدا باید متغیرهای حالت را انتخاب کنیم. همانطور که اشاره شد اولین انتخاب، خروجی انتگرال‌گیر (عنصر ذخیره سازی انرژی) به عنوان متغیر حالت است. طبیعی است که ترتیب انتخاب نیز اهمیت دارد. فرض کنید خروجی انتگرال‌گیر اول را x_1 و خروجی انتگرال‌گیر دوم را x_2 انتخاب کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{s} x_2 \Rightarrow s x_1 = x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \frac{1}{s} (u - 10x_2 - 24x_1) \Rightarrow \dot{x}_2 = -24x_1 - 10x_2 + u \\ y = 3x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \cdot u \end{cases}$$



با تعویض X_1, X_2 نمایش جدید حاصل می‌شود به طوری که:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -24 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 3) \quad D = 0$$

برای نمونه صفرها، قطبها و بهره DC را از نمایش فضای حالت محاسبه نموده با تابع تبدیل مقایسه می‌کنیم:

$$\det(sI - A) = 0 = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 24 & s+1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow s^2 + 1s + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = -6 \\ s = -4 \end{cases}$$

$$\text{صفه‌های انتقال} = \det \begin{pmatrix} -s_0 I + A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det \left(\begin{array}{cc|c} -s_0 & 1 & 0 \\ -24 & -(s_0+1) & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 \end{array} \right) = 0 \Rightarrow -s_0 - 3 = 0 \Rightarrow s_0 = -3$$

$$DC \text{ بهره} = D - CA^{-1}B = 0 - (3 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}$$

تحلیل پایداری به کمک فضای حالت

همانطور که اشاره شد مقادیر ویژه ماتریس سیستم در نمایش فضای حالت معادل قطبها یا ریشه‌های مشخصه سیستم هستند. لذا با محاسبه مقادیر ویژه این ماتریس می‌توان به راحتی پایداری سیستم را مورد تحلیل و بررسی قرار داد.

مثال ۸: معادلات دیفرانسیل سیستمی به شکل زیر مفروض است. این سیستم بازاء چه مقادیری از a پایدار است؟

$$\dot{\zeta}(t) = a\zeta(t) + \gamma(t) + u(t); \quad \dot{\gamma}(t) = \gamma(t) - 2\zeta(t) + u(t); \quad \dot{\omega}(t) = -\omega(t)$$

$$1 < a < 2 \quad (4)$$

$$-2 < a < -1 \quad (3)$$

$$a > -2 \quad (2)$$

$$a < -1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۳» معادلات حالت سیستم عبارتند از:

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \gamma(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$\det(sI - A) = 0 \Rightarrow (s+1)(s^2 - (a+1)s + a+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1 < 0 \\ a+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < a < -1$$

الف - آنالیز پاسخ‌های گذرای سیستم در فضای حالت

۱- حل معادلات حالت و خروجی در حوزه زمان

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{ZI}(t) + x_{ZS}(t) \\ y(t) &= y_{ZI}(t) + y_{ZS}(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

منظور از $(x_{ZI}(t), y_{ZI}(t))$ پاسخ ورودی صفر و منظور از $(x_{ZS}(t), y_{ZS}(t))$ پاسخ حالت صفر سیستم است. به راحتی ثابت می‌شود که پاسخ ورودی

$$x_{ZI}(t) = e^{At} x_0, \quad t \geq 0; \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k$$

صفر بصورت:

محاسبه می‌شود. ماتریس $\varphi(t) = e^{At}$ را ماتریس انتقال حالت سیستم می‌نامیم چون که انتقال حالت سیستم از حالت اولیه x_0 در زمان $t=0$ را به حالت $x_{ZI}(t)$ در زمان t نشان می‌دهد. ثابت می‌شود که سری نامتناهی متناظر با e^{At} بازای تمام مقادیر t همگراست.

* خواص ماتریس انتقال حالت

این خواص با توجه به تعریف $\varphi(t)$ به شکل یک ماتریس نمایی به راحتی اثبات می‌شوند. برخی از مهمترین خواص ماتریس انتقال حالت عبارتند از:

$$\varphi(0) = e^{A \cdot 0} = I; \quad \dot{\varphi}(t) = A e^{At} \Rightarrow \dot{\varphi}(0) = A$$

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = e^{At_2} e^{At_1} ; \quad \forall t, \varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \varphi^k(t) = \varphi(kt) ; \quad \forall t, \varphi^T(t) = (e^{At})^T = e^{A^T t} ; \quad \forall t, A\varphi(t) = \varphi(t)A$$

پاسخ حالت صفر سیستم را نیز می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\begin{cases} x_{zs}(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \\ y_{zs}(t) = \int_0^t C\varphi(t-\tau)BU(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases}$$

باید توجه نمود که: $Ce^{At}B + D\delta(t)$ در واقع پاسخ ضربه سیستم را نشان می‌دهد.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

تذکره: اگر ماتریس سیستم (A) قطری پذیر باشد تبدیلی ناویژه مثل T وجود دارد بطوریکه:

که λ_i ها همان مقادیر مشخصه (ویژه) سیستم هستند. در این شرایط ماتریس انتقال حالت به راحتی و بصورت $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$ محاسبه

$$x(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} v_i \beta_i \quad \text{که } e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \text{خواهد شد که}$$

خواهد بود. v_i ها بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ_i هستند. $v_i e^{\lambda_i t}$ را بعضاً مدهای سیستم نیز می‌نامند. بنابراین پاسخ ورودی صفر در این شرایط ترکیب خطی از مدهای سیستم خواهد بود. v_i ها میزان مشارکت هر متغیر حالت را در مود متناظر نشان می‌دهند و β_i ها بیانگر میزان تحریک هر مود توسط شرایط اولیه هستند.

۲- حل معادلات حالت و خروجی در حوزه فرکانس

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} \begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

از این روابط مشاهده می‌شود که:

$$L\{x_{zI}(t)\} = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$L\{y_{zI}(t)\} = C(sI - A)^{-1}x_0$$

$$L\{x_{zs}(t)\} = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$L\{y_{zs}(t)\} = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$L\{\varphi(t)\} = L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} \Rightarrow \varphi(t) = e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \quad \text{از مقایسه روابط متناظر با روابط حوزه زمان خواهیم داشت:}$$

$$T(s) = CL\{e^{At}\}B + D \quad \text{تابع تبدیل سیستم}$$

مثال ۹: معادلات حالت و خروجی سیستمی به شکل زیر داده شده است:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \\ x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

ماتریس انتقال حالت و پاسخ این سیستم را به ورودی پله واحد بدست آورید.

$$\phi(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

پاسخ: برای سادگی مساله را در حوزه فرکانس حل می‌کنیم.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

پس از بسط کسرهاى جزئى خواهیم داشت:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + T(s)U(s)$$

برای محاسبه خروجی سیستم به ورودی پله واحد داریم:

$$C(sI - A)^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C(sI - A)^{-1}x_0 = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

در این رابطه:

$$T(s)U(s) = \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \times \frac{1}{s}$$

همچنین:

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s-2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s} + \frac{4}{s+1} + \frac{-3}{s+2} \Rightarrow y(t) = -1 + 4e^{-t} - 3e^{-2t} \quad t \geq 0$$

با جایگذاری:

❏ مثال ۱۰: ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$ متناظر با ماتریس سیستم $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ در کدام گزینه آمده است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{-2t} + 1) \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} e^{-2t} & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} \\ 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\phi(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

❑ پاسخ: گزینه «۲»

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

❏ مثال ۱۱: کدام گزینه ویژگی ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$ را به درستی بیان نمی‌کند؟

$$[\phi(t)]^k = \phi(kt) \quad (4)$$

$$\phi^{-1}(t) = -\phi(t) \quad (3)$$

$$A\phi(t) = \phi(t)A \quad (2)$$

$$\dot{\phi}(0) = A \quad (1)$$

$$\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$$

❑ پاسخ: گزینه «۳» زیرا:

❏ مثال ۱۲: نمایش فضای حالت سیستمی با ورودی صفر به شکل: $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t)$ داده شده است، برای شرایط اولیه $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ کدام

گزینه صحیح است؟

$$x_2(t) = -e^{-t} + e^{-2t} \quad (4)$$

$$x_2(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad (3)$$

$$x_2(t) = e^{-t} \quad (2)$$

$$x_2(t) = e^{-2t} \quad (1)$$

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

❑ پاسخ: گزینه «۱»

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow x_2(t) = e^{-2t}$$

❏ مثال ۱۳: اگر $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه A کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\left. \frac{d}{dt} e^{At} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ پاسخ: گزینه «۱» مشتق ماتریس حالت در $t=0$ با ماتریس A برابر است. لذا:

ب - تحلیل پاسخ حالت دائمی به کمک نمایش فضای حالت

* روش اول: استفاده از قضیه مقدار نهایی

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

معادلات حالت و خروجی سیستم را به شکل کلی زیر در نظر بگیرید.

به یاد داریم که تابع تبدیل سیستم حلقه بسته با داشتن معادلات حالت و خروجی به شکل $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ محاسبه می‌شود. بنابراین:

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} U(s)(1 - T(s))$$

* روش دوم: در این روش پاسخ حالت دائمی و ورودی را در معادلات حالت جایگزین می‌کنیم. بازای ورودی پله واحد و با فرض پایداری سیستم، در حالت دائمی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_\infty = 0 \\ x_\infty = \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \alpha_i = \text{cte} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_\infty = Ax_\infty + Bu \\ y_\infty = Cx_\infty + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A\tilde{\alpha} + B \\ y_\infty = C\tilde{\alpha} + D \end{cases} \Rightarrow A\tilde{\alpha} = -B \Rightarrow \tilde{\alpha} = -A^{-1}B \Rightarrow y_\infty = -CA^{-1}B + D$$

$$\Rightarrow e_\infty = 1 - y_\infty = 1 + CA^{-1}B - D \Rightarrow \boxed{e_\infty = 1 + CA^{-1}B - D}$$

به همین ترتیب بازای ورودی شیب واحد خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u(t) = t \\ \dot{x}_\infty = \tilde{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = A(\alpha t + \beta) + Bt \\ y_\infty = C(\alpha t + \beta) + Dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -A^{-1}B \\ \beta = A^{-1}\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_\infty = C(-A^{-1}Bt - A^{-1}(A^{-1}B)) + Dt \Rightarrow y_\infty = -CA^{-1}Bt - C(A^{-1})^2 B + Dt$$

$$\boxed{e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - y_\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + CA^{-1}B - D)t + C(A^{-1})^2 B}$$

ملاحظه می‌شود که خطای پله واحد در حالت دائمی مشتق خطای شیب واحد است.

مثال ۱۴: معادلات حالت سیستمی به صورت $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$ داده شده است. به ازای کدام مقدار a خطای پله واحد سیستم صفر است؟

(۴) بازای هیچ مقدار a

(۳) $\forall a$

(۲) $a = 0$

(۱) $a = 2$

$$T(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + a}$$

پاسخ: گزینه «۱» تابع تبدیل سیستم عبارت است از:

بازای $a = 2$ سیستم پایدار است و $T(0) = 1$ لذا خطای پله واحد سیستم صفر خواهد شد.

مثال ۱۵: نمایش حالت سیستمی عبارتست از: $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ x(0) = 0 \end{cases}$ پاسخ دائم x به ازای پله واحد در ورودی u برابر است با:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = 1, t \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow 0 = Ax + B \Rightarrow x = -A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

پاسخ: گزینه «۴»

مثال ۱۶: نمایش فضای حالت یک سیستم حداقل فاز به شکل $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ داده شده است. اگر $D = 1 + CA^{-1}B$ باشد در مورد نوع

سیستم چه اظهار نظری می‌توان داشت؟

(۲) نوع سیستم یک است.

(۱) نوع سیستم بزرگتر یا مساوی یک است.

(۴) اظهار نظری در این مورد نمی‌توان داشت.

(۳) نوع سیستم صفر است.

$$T(0) = -CA^{-1}B + D$$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم خطای دائمی سیستم پایدار به ورودی پله واحد برابر است با $1 - T(0)$ که:

لذا با توجه به فرض داده شده برای D خطای پله صفر است و نوع سیستم بزرگتر یا مساوی یک.

کنترل پذیری

فرض کنید معادله فضای حالت سیستمی در حالت کلی به شکل زیر باشد:
 آنگاه این سیستم را کنترل پذیر گویند اگر ماتریس کنترل پذیری آن (P_{cont}) که به صورت زیر تعریف می‌گردد رتبه کامل (Full-Rance) باشد.

$$P_{\text{cont}} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

وقتی فقط ۲ متغیر حالت داشته باشیم ماتریس کنترل پذیری به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$P_{\text{cont}} = [B \ AB]$$

مشاهده پذیری

اگر معادله فضای حالت سیستمی به صورت زیر باشد:
 آنگاه این سیستم را مشاهده پذیر گویند اگر ماتریس مشاهده پذیری آن رتبه کامل باشد. ماتریس مشاهده پذیری به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$P_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

برای سیستمی که دارای ۲ متغیر حالت باشد، ماتریس مشاهده پذیری به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$P_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

آزمون فصل هفتم

که ۱- معادلات فضای حالت سیستمی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u ; y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; w = \dot{x}_1 + y \quad u = r - w$$

که در آن r ورودی مرجع، y خروجی، x بردار حالت، w یک فیدبک داخلی و u سیگنال کنترل است. تابع تبدیل سیستم حلقه بسته کدام است؟

(۴) $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

(۳) $G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$

(۲) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

(۱) $G(s) = \frac{1}{s+1}$

که ۲- معادلات حالت سیستم مقابل کدام است؟

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (۲) \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (۱)$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (۴) \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (۳)$$

که ۳- معادلات حالت سیستم پیوسته خطی به شکل زیر است، تابع تبدیل سیستم عبارتست از:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1 \ 1 \ 0] \quad D = 0$$

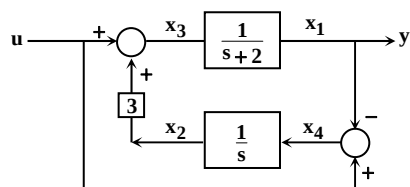
(۲) $G(s) = \frac{5}{s+4} + \frac{2}{s+2}$

(۱) $G(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}$

(۴) $G(s) = \frac{5}{s+7} + \frac{4}{s+2}$

(۳) $G(s) = \frac{7}{s+2} + \frac{2}{s+4}$

که ۴- معادلات حالت و معادله خروجی سیستم کنترل شکل مقابل کدام است؟



(۱) $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(۲) $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(۳) $\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(۴) $\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

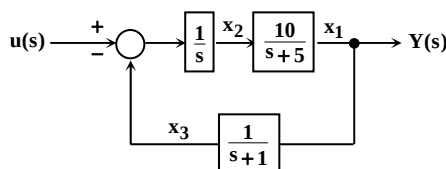
که ۵- اگر x_1 و x_2 و x_3 حالت‌های سیستم و y خروجی سیستم نشان داده در شکل زیر انتخاب شوند، ماتریس‌های حالت سیستم عبارتند از:

(۱) $A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 1]$

(۲) $A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 1]$

(۳) $A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$

(۴) $A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$



$$x_3 = \ddot{y} \text{ و } x_2 = \dot{y} \text{ و } x_1 = y$$

که ۶- تحقق فضای حالت تابع تبدیل $G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ کدام است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (4)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

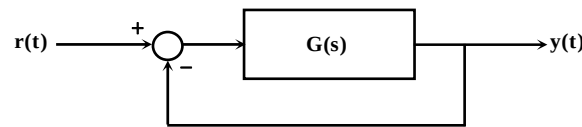
$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$

$$G(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

که ۷- با تجزیه تابع تبدیل $G(s)$ به کسرهای ساده، یک مدل فضای حالت برای سیستم کنترل زیر عبارتست از:



$$y = (1 \ 2 \ 3)x, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (2)$$

$$y = (1 \ 2 \ 3)x, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (1)$$

$$y = (1 \ 2 \ 3)x, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (4)$$

$$y = (1 \ 2 \ 3)x, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} + y - 2u + az = 0; \quad \frac{dz}{dt} - by + fu = 0$$

که ۸- سیستمی با معادلات دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

که در آن y و z توابعی از زمان بوده و u ورودی است. ریشه‌های مشخصه این سیستم کدام است؟

$$\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{4ab-1}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{-1}{2} \pm \sqrt{4ab-1} \quad (3)$$

$$\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4ab}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{-1}{2} \pm \sqrt{1-4ab} \quad (1)$$

که ۹- معادله دیفرانسیل سیستمی با شرایط اولیه صفر عبارت است از $y''(t) - \alpha y'(t) = r'(t) - \beta r(t)$ که $r(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم است. با انتخاب $x_1(t) = y(t)$ و $x_2(t) = y'(t) - r(t)$ ماتریس A در نمایش فضای حالت این سیستم کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +k+1 \\ -k-2 & -2k-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

که ۱۰- معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از:

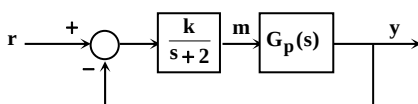
به ازای چه مقدار از k سیستم پایدار است؟

$$k > -2 \quad (1)$$

$$-1 > k > -2 \quad (2)$$

(۳) به ازای $k > -1$ سیستم پایدار است.

(۴) سیستم همواره پایدار است و به k بستگی ندارد.



که ۱۱- سیستم کنترل شکل روبرو را در نظر بگیرید:

فرض کنید توصیف واحد تحت کنترل $G_p(s)$ بصورت معادلات حالت زیر باشد:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} m(t); \quad y(t) = [1 \ 0] x$$

مقدار k که به ازاء آن دو تا از ریشه‌های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته فوق بر روی محور $j\omega$ قرار می‌گیرند برابر است با:

$$40 \quad (4)$$

$$30 \quad (3)$$

$$20 \quad (2)$$

$$-30 \quad (1)$$

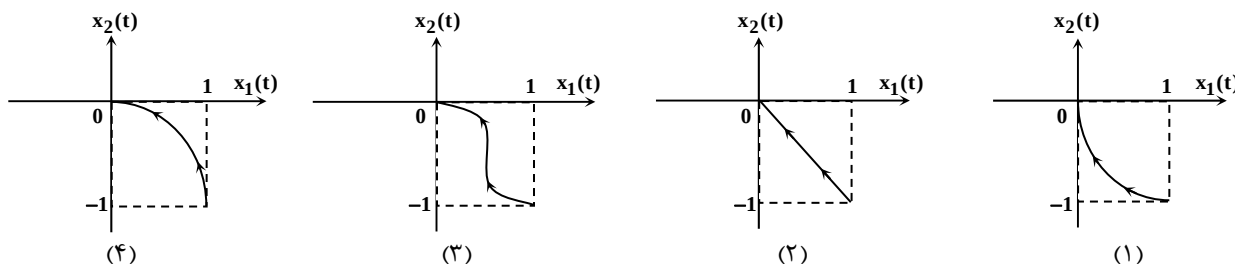
۱۲- سیستم $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0/5 \end{bmatrix} u$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی $u = [-1 \quad +1]x$ به سیستم اعمال شود، عنصر $(1,1)$ از ماتریس انتقال حالت سیستم حلقه بسته برابر کدام است؟

- (۱) e^{-t} (۲) e^{-2t} (۳) ۱ (۴) $1 - e^{-t}$

۱۳- اگر $\phi(t)$ ماتریس انتقال حالت سیستم $\dot{x} = Ax$ باشد کدام یک از روابط زیر در مورد این سیستم برقرار نمی‌باشد؟

- (۱) $\phi^{-1}(\Delta t) = \phi(-2t)\phi(-3t)$ (۲) $\phi(t) + \phi^{-1}(t) = \phi(-t) + \phi^{-1}(-t)$ (۳) $\phi(3t)\phi(4t) = \phi(2t)\phi(5t)$ (۴) هر سه رابطه فوق برقرار هستند.

۱۴- در معادله حالت $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ و $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ باشد کدام شکل، نمودار $(x_1(t), x_2(t))$ را معرفی می‌کند؟



۱۵- معادلات حالت سیستمی به صورت:

- (۱) $\dot{x}_1 = x_2$
(۲) $\dot{x}_2 = -2x_1 - ax_2 + 2u$
(۳) $y = x_1$

می‌باشد. خطای حالت دایمی به ورودی شیب واحد برای $a > 0$ کدام است؟

- (۱) a (۲) $\frac{a}{2}$ (۳) $\frac{2}{a}$ (۴) $\frac{1}{a}$

۱۶- معادلات دینامیکی حالت در سیستمی بصورت زیر است.

- (۱) $\dot{x}_1 = x_2$
(۲) $\dot{x}_2 = -2x_1 - \alpha x_2 + 2u$
(۳) $y = x_1$

که در آن u , y به ترتیب ورودی و خروجی سیستم و $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ بردار حالت است. خطای ماندگار سیستم $u(t) - y(t)$ به ورودی شیب واحد کدام است؟

- (۱) $-\frac{\alpha}{2}$ اگر α منفی باشد. (۲) به هر حال ∞ است. (۳) صفر اگر α مثبت باشد. (۴) $+\frac{\alpha}{2}$ اگر α مثبت باشد.

۱۷- در یک سیستم با فیدبک واحد منفی $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+3)}$ است. k را طوری انتخاب می‌کنیم که در معرفی فضای حالت سیستم مقدار

ویژه‌ای در $3/5 -$ داشته باشیم. در این صورت خطای ماندگار سیستم به ازای ورودی $u(t) = (2t + 0/5)u(t)$ چقدر است؟

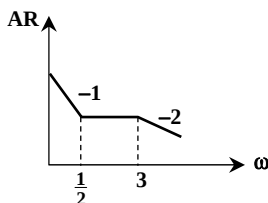
- (۱) $\frac{35}{48}$ (۲) $\frac{48}{35}$ (۳) صفر (۴) ∞

آزمون (۱)

سطح آزمون : (C)

تعداد سؤالات : ۱۵

۱- مجانب دیاگرام بد برای یک سیستم به صورت زیر داده شده است. تابع تبدیل سیستم کدام یک از توابع زیر است:



$$\frac{\frac{1}{2}s+1}{s(3s+1)^2} \quad (2)$$

$$\frac{2s+1}{s(\frac{1}{3}s+1)^2} \quad (1)$$

$$\frac{s(\frac{1}{2}s+1)}{(3s+1)^2} \quad (4)$$

$$\frac{s(2s+1)}{(\frac{1}{3}s+1)^2} \quad (3)$$

۲- معادله مشخصه سیستمی به صورت $1+G = 4s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 8 = 0$ می‌باشد. کدامیک از گزینه در رابطه با پایداری سیستم صحیح است؟

(۱) سیستم دارای دو ریشه ناپایدار است.

(۲) سیستم پایدار است.

(۳) سیستم دارای یک ریشه ناپایدار است.

(۴) سیستم در مرز نوسان است.

۳- پاسخ یک سیستم کنترل به ورودی شیب واحد به صورت $y(t) = 2 + 4e^{-2t} - 4e^{-t}$ می‌باشد. ضریب میرایی (ζ) و ثابت زمانی (τ) چقدر می‌باشد؟

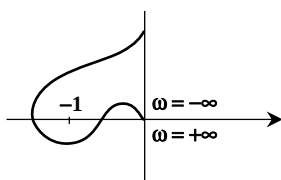
$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \zeta = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\tau = \sqrt{2} \quad \zeta = 3\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \zeta = \frac{2\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

$$\tau = \sqrt{3} \quad \zeta = 2\sqrt{3} \quad (3)$$

۴- نمودار نایکوئیست سیستمی مطابق شکل است، تحلیل پایداری سیستم چگونه خواهد بود؟ ($\rho = 0$)



(۱) سیستم پایدار است.

(۲) سیستم دارای یک ریشه ناپایدار است.

(۳) سیستم دارای دو ریشه ناپایدار است.

(۴) اطلاعات شکل جهت بررسی پایداری سیستم کافی نیست.

۵- شکل کلی مکان ریشه‌های سیستمی به ازای تغییرات مثبت بهره k عبارت است از: $\omega(\gamma+1+\sqrt{2}\omega)(\gamma+1-\sqrt{2}\omega)$ فرکانس نوسانات پایدار این سیستم عبارت است از:

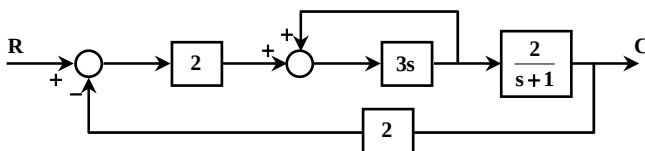
$$2 \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

۶- کدام گزینه تابع تبدیل $\frac{C}{R}$ نمودار جعبه‌ای زیر را نشان می‌دهد؟



$$\frac{12s}{-3s^2 + 22s + 1} \quad (2)$$

$$\frac{12}{3s^2 - 24s + 1} \quad (1)$$

$$\frac{12}{s^3 + 12s^2 + 1} \quad (4)$$

$$\frac{s}{s^3 + 12s + 1} \quad (3)$$

۷- اگر به سیستمی با تابع انتقال $\frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$ ورودی $x(t) = 5 \sin t$ اعمال شود. پاسخ سیستم را تعیین کنید.

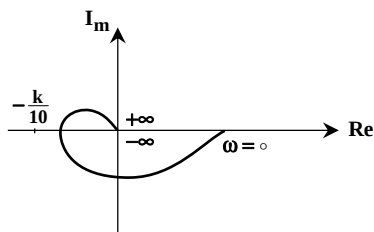
$$y = \frac{5}{\sqrt{2}} \sin(t - \frac{8+3\pi}{4}) \quad (2)$$

$$y = 5\sqrt{2} \sin(t + \frac{12-\pi}{4}) \quad (1)$$

$$y = 5\sqrt{2} \sin(t - \frac{\pi}{4}) \quad (4)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{5} \sin(t - \frac{\pi}{4}) \quad (3)$$

۸- نمودار نایکوئیست سیستمی مطابق شکل است. با توجه به این نکته که سیستم قطب ناپایدار ندارد، پایداری مستقیم را تحلیل نمایید.

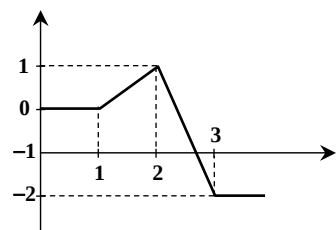


$$k > 10 \quad (1)$$

$$0 < k < 10 \quad (2)$$

$$k > 10, k < 1 \quad (3)$$

$$k > 0 \quad (4)$$



۹- اگر تغییرات سیگنال $C(t)$ با زمان به صورت زیر باشد، $R(s)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{e^{-s}}{s^2} - 4 \frac{e^{-2s}}{s^2} + 3 \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{2}{s} e^{-3s} \\ (2) \quad & \frac{e^{-s}}{s^2} + 4 \frac{e^{-2s}}{s^2} + 3 \frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{2}{s} e^{-3s} \\ (3) \quad & \frac{e^{-s}}{s^2} + 3 \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{2}{s^2} e^{-3s} \\ (4) \quad & \frac{e^{-s}}{s^2} - 3 \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-3s} \end{aligned}$$

۱۰- تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترلی به شکل $L(s) = \frac{k}{\Delta s(2s+a)}$ است. نقطه شکست مکان هندسی ریشه‌های این سیستم به ازای $a, k > 0$ در کدام گزینه آمده است؟

$$s = \frac{-1}{2a} \quad (4)$$

$$s = \frac{-1}{4a} \quad (3)$$

$$s = \frac{-a}{4} \quad (2)$$

$$s = \frac{-a}{2} \quad (1)$$

۱۱- تابع تبدیل مدار باز سیستمی معادل $\frac{5}{(4s+1)(2s+1)}$ می‌باشد. از یک کنترل کننده تناسبی برای کنترل خط استفاده می‌شود. تبدیل مدار پس‌خور برابر واحد می‌باشد. برای یک تغییر پله‌ای واحد در مقدار مقرر، مقدار k_c را برای حالتی که مقدار خطای دائمی برابر 0.5 باشد برابر است با:

$$k_c = 0.2 \quad (4)$$

$$k_c = 0.5 \quad (3)$$

$$k_c = 4 \quad (2)$$

$$k_c = 5 \quad (1)$$

۱۲- تابع انتقال یک سیستم به صورت زیر داده شده است. در صورت تحریک سیستم به ورودی ضربان ایده‌آل واحد نسبت مقدار اولیه پاسخ به

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+4)(s+3)}$$

مقدار نهایی پاسخ چه قدر است؟

$$4 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

۱۳- سیستمی شامل دو تانک ارتفاع پشت سرهم با اثر متقابل می‌باشد. چنانچه سیستم دارای سریع‌ترین پاسخ غیرنوسانی باشد و $A_1 = A_2 = 1$ باشد. رابطه بین R_1 و R_2 را بدست آورید.

$$R_1 + 4R_2 = 0 \quad (4)$$

$$2R_1 + R_2 = 2\sqrt{R_2} \quad (3)$$

$$(R_1 + R_2)^2 = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$R_1 + 2R_2 = 2\sqrt{R_1} \quad (1)$$

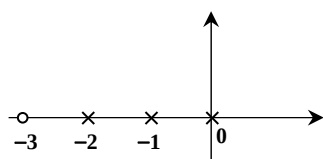
۱۴- با توجه به نمودار مکان هندسی مقابل، محدوده پایداری k را تعیین نمایید؟

$$0 < k < 6 \quad (1)$$

$$k > 6 \quad (2)$$

$$0 < k < 4 \quad (3)$$

$$k > 4 \quad (4)$$



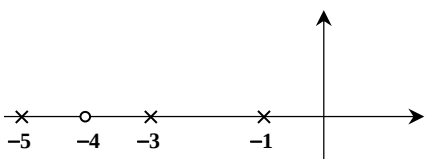
۱۵- محل تلاقی مجانب‌ها را در نمودار مکان هندسی مقابل محاسبه نمایید.

$$s = -1/5 \quad (1)$$

$$s = -2/5 \quad (2)$$

$$s = -3 \quad (3)$$

$$s = -0/5 \quad (4)$$



لطفاً جهت مشاهده پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی به سایت www.modaresanesharif.ac.ir مراجعه نمایید.