www.modaresanesharif.ac.ir

فصل اول

«آنالیز برداری»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ اگر $\vec{A}(x,y,z)=x^2y\hat{i}-3x^2z\hat{j}+2xy\hat{k}$ و $\vec{B}(x,y,z)=-y^2\hat{i}+xzy\hat{j}-3yz\hat{k}$، حاصل عبارت $(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $-3x^3z^2-6xy^2$

۲) $3x^3z^2\hat{j}-6xy^2\hat{k}$

۳) $-3x^2y^3-3x^2z(xy-xz+yz)+2xy(3z-3yz)$

۴) $6x^2yz\hat{i}+(x^2y^2z-3x^3z^2+2x^2y^2)\hat{j}+(9x^2z^2-6xy^2)\hat{k}$

۲ـ مقدار انتگرال $\int_V e^{-2r}(\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r^3})d^3r$ کدام است؟ (r اندازه بردار $\vec{r}$ و V حجم کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) 4π ۲) -4π ۳) $4\pi(1-e^{-2a})$ ۴) $-4\pi(1-e^{-2a})$

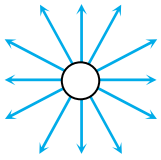
۳ـ اگر $\bar{r}$ بردار مکان و r اندازه آن، $f(r)$ تابع هموار از r و $\bar{A}(\bar{r})$ بردار دلخواهی باشد، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\nabla^2\vec{r}=\vec{0}$ ۲) $\vec{\nabla}\ln r=\frac{\vec{r}}{r^2}$ ۳) $\vec{\nabla}\times(f(r)\vec{r})=\vec{0}$ ۴) $(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{r}=3\vec{A}$

۴ـ شکل مقابل توزیع میدان الکتریکی E را در فضا نشان می‌دهد. کدام گزینه برای این میدان برداری می‌تواند صحیح باشد؟

(فیزیک ـ سراسری ۷۸)



۱) $\vec{\nabla}.E\neq 0\ ,\ \vec{\nabla}\times E\neq 0$ ۲) $\vec{\nabla}.E\neq 0\ ,\ \vec{\nabla}\times E=0$

۳) $\vec{\nabla}.E=0\ ,\ \vec{\nabla}\times E=0$ ۴) $\vec{\nabla}.E=0\ ,\ \vec{\nabla}\times E\neq 0$

۵ـ بردار $\vec{E}=\frac{1}{r}(\vec{a}_r-\vec{a}_\varphi)$ در مختصات استوانه‌ای داده شده است. مطلوب است محاسبه بردار واحدی در مختصات کارتزین که در جهت $\vec{E}$ بوده و از نقطه $r=1\ ,\ \varphi=90^\circ\ ,\ z=0$ عبور می‌کند. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $-0/707\vec{a}_x+0/707\vec{a}_y$ ۲) $-0/707\vec{a}_x-0/707\vec{a}_y$ ۳) $0/707\vec{a}_x-0/707\vec{a}_y$ ۴) $0/707\vec{a}_x+0/707\vec{a}_y$

۶ـ بردار $\frac{1}{r\sin\theta\cos\theta}\vec{a}_\theta$ در مختصات کروی داده شده است. تبدیل آن را در مختصات کارتزین به دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۸)

$$A=[(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)]^{\frac{1}{2}}$$

۱) $A(z\vec{a}_x-\frac{yz}{x}\vec{a}_y+\frac{x^2+y^2}{x}\vec{a}_z)$ ۲) $A(z\vec{a}_x+\frac{yz}{x}\vec{a}_y-\frac{x^2+y^2}{x}\vec{a}_z)$

۳) $A(z\vec{a}_x+\frac{yz}{x}\vec{a}_y+\frac{x^2+y^2}{x}\vec{a}_z)$ ۴) $A(z\vec{a}_x-\frac{yz}{x}\vec{a}_y-\frac{x^2+y^2}{x}\vec{a}_z)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ گزینه «۴» عملگر دل را می‌توان به صورت یک بردار تعریف کرد:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

ضرب داخلی آن با $\vec{A}$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{A}.\vec{\nabla}=x^{2}y\frac{\partial}{\partial x}-3x^{2}z\frac{\partial}{\partial y}+2xy\frac{\partial}{\partial z}$$

مقدار این ضرب داخلی در جهت $\vec{B}$ به صورت زیر به دست می‌آید $((\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B})$:

$$(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}=[\vec{A}.(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})]\vec{B}=[x^{2}y\frac{\partial}{\partial x}-3x^{2}z\frac{\partial}{\partial y}+2xy\frac{\partial}{\partial z}]\vec{B}$$

لذا باید از $\vec{B}$ مؤلفه به مؤلفه مشتق بگیریم، پس با انجام مشتق‌گیری و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$x^{2}y\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}-3x^{2}z\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}+2xy\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}=6x^{2}yz\hat{i}+(x^{2}y^{2}z-3x^{3}z^{2}+2x^{2}y^{2})\hat{j}+(9x^{2}z^{2}-6xy^{2})\hat{k}$$

۲ـ گزینه «۱»

روش اول: این تست را بر اساس مفهوم الکترومغناطیسی یک بار نقطه‌ای به دست می‌آوریم. یک بار نقطه‌ای در مرکز مختصات کروی را به صورت $Q\delta^{3}(r)$ نشان می‌دهیم که Q مقدار بار می‌باشد. حال با توجه به این که میدان یک بار نقطه‌ای در مبدأ به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}y^{2}}\hat{r}$$

با توجه به قانون گاوس- ماکسول مقدار بار نقطه‌ای در مرکز مختصات کروی و میدان آن به صورت مقابل با هم مرتبط می‌شوند. $\vec{\nabla}(\varepsilon_{\circ}\vec{E})=Q\delta^{3}(r)$

اگر $\vec{E}$ را در رابطه فوق قرار دهیم به نتیجه مقابل می‌رسیم:

$$\vec{\nabla}.(\frac{Q\hat{r}}{4\pi r^{2}})=Q\delta^{3}(r)\Rightarrow\vec{\nabla}.(\frac{\hat{r}}{r^{2}})=4\pi\delta^{3}(r)$$

بنابراین با توجه به دیورژانس داخل انتگرال داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\vec{\nabla}.(\frac{\hat{r}}{r^{3}})=\vec{\nabla}(\frac{\hat{r}}{r^{2}})=4\pi\delta^{3}(r)$$

با جایگذاری این مقدار در انتگرال داریم:

$$\int_{V}e^{-2r}(\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r^{3}})dr^{3}=\int_{V}e^{-2r}.4\pi\delta^{3}(r)d^{3}r$$

با توجه به خاصیت غربال‌گری تابع دلتا که در مقابل نشان داده شده مقدار انتگرال فوق را به دست می‌آوریم: $\int f(r)\,\delta(r)\,dr=f(\circ)$

در نتیجه داریم:

$$\int_{V}e^{-2r}.4\pi\delta^{3}(r)\,d^{3}r=4\pi e^{-2\times\circ}=4\pi$$

روش دوم: یک راه‌حل دیگر استفاده از قضیه‌ی دیورژانس یا گاوس است. داریم:

$$\vec{\nabla}.(e^{-2r}\frac{\vec{r}}{r^{3}})=(\vec{\nabla}e^{-2r}).\frac{\vec{r}}{r^{3}}+e^{-2r}\vec{\nabla}.(\frac{\vec{r}}{r^{3}})$$

لذا انتگرال به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_{V}d^{3}re^{-2r}\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r^{3}}=\int_{V}\vec{\nabla}.(e^{-2r}\frac{\vec{r}}{r^{3}})d^{3}r+\int d^{3}r\vec{\nabla}(e^{-2r}).\frac{\vec{r}}{r^{3}}=\oint_{S}d\vec{s}.e^{-2r}\frac{\vec{r}}{r^{3}}-\int_{V}d^{3}r(-2e^{2r}\frac{\vec{r}}{r}.\frac{\vec{r}}{r^{3}})$$

که در آن قضیه‌ی گاوس استفاده شده است. اما انتگرال سطحی را می‌توان روی سطح کره برد. پس می‌توان نوشت:

$$\int_{V}d^{3}re^{-2r}\vec{\nabla}.(\frac{\vec{r}}{r^{3}})=\oint a^{2}d\Omega e^{-2a}\frac{1}{a^{2}}-2\int d^{3}re^{-2r}\frac{1}{r^{2}}=4\pi e^{-2a}-\int_{\circ}^{a}dre^{-2r}d\Omega$$

که $d\Omega$ انتگرال روی زاویه‌ی فضایی است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{V}d_{r}^{3}e^{-2r}\vec{\nabla}.(\frac{\vec{r}}{r^{3}})=4\pi e^{-2a}-2(4\pi)(-\frac{1}{2})e^{-2r}\Big|_{\circ}^{a}=4\pi$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳ـ گزینه «۴» با فرض $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$ خواهیم داشت:

$$(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{r}=[\vec{A}.(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k})][x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}]=[A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}][x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}]=\vec{A}\neq 3\vec{A}$$

اثبات درستی گزینه‌های دیگر خیلی ساده می‌باشد. برای گزینه یک با توجه به رابطه لاپلاسین در مختصات کروی چون $\vec{r}$ ثابت می‌باشد، بنابراین تمام مشتق‌های آن صفر می‌شود.

در گزینه دوم با توجه به توضیحات گرادیان، گرادیان مانند مشتق عمل می‌کند و فقط فرق آن در جهت‌دار بودن آن است. پس خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\,\mathrm{Ln}r=\frac{\hat{r}}{r}=\frac{\vec{r}}{r^2}$$

در گزینه سوم با توجه به این که $f(r)$ تابع می‌باشد و بدون جهت است، از آنجایی که $f(r)\vec{r}$ فقط در جهت $\vec{r}$ می‌باشد، بنابراین با استفاده از فرمول کرل به این نتیجه می‌رسیم که مقدار $\vec{\nabla}\times(f(r)\vec{r})$ صفر می‌باشد.

۴ـ گزینه «۲» واضح است که تراکم خطوط در نزدیکی مرکز شدیدتر از نقاط دورتر است. لذا تغییرات میدان در راستای شعاع مخالف صفر است $(\vec{\nabla}.E\neq 0)$.

از طرفی تغییرات میدان نشان داده شده در راستای غیر از راستای شعاعی برابر صفر است (در راستای φ تغییر نمی‌کند) در نتیجه $\vec{\nabla}\times E=0$. می‌دانیم مفهوم کرل $\vec{\nabla}X$ به معنای چرخش است اما خطوط میدان در اینجا هیچ‌گونه چرخشی ندارد و شعاعی هستند بنابراین $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$.

۵ـ گزینه «۴» اگر بردارهای واحد در دستگاه استوانه‌ای را بر حسب بردارهای واحد در دستگاه دکارتی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\vec{a}_r=\cos\varphi\vec{a}_x+\sin\varphi\vec{a}_y \quad \text{و} \quad \vec{a}_\varphi=-\sin\varphi\vec{a}_x+\cos\varphi\vec{a}_y$$

بنابراین بردار $\vec{E}$ در دستگاه دکارتی به صورت مقابل خواهد بود:

$$\vec{E}=\frac{1}{r}(\cos\varphi\hat{a}_x+\sin\varphi\hat{a}_y+\sin\varphi\hat{a}_x-\cos\varphi\hat{a}_y)$$

اگر مقدار r و φ داده نشده بود، مجبور بودیم در رابطه بالا φ و r را برحسب x و y بیان کنیم. ولی چون مقدار آنها در نقطه مورد نظر $(1,90^\circ,0)$ داده شده داریم:

$$\vec{E}=\hat{a}_x+\hat{a}_y$$

بردار واحد در جهت $\vec{E}$ نیز از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\hat{n}=\frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}=\frac{+\vec{a}_x+\vec{a}_y}{\sqrt{2}}=+0/707\vec{a}_x+0/707\vec{a}_y$$

۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. به نظر می‌رسد منظور طراح سوال محاسبه $\vec{A}=\frac{1}{r\sin\varphi\cos\varphi}\hat{a}_\theta$ باشد.

ابتدا بردار یکه $\hat{a}_\theta$ را به دستگاه دکارتی منتقل می‌کنیم:

$$\hat{a}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\hat{a}_y-\sin\theta\hat{a}_z$$

حال با قرار دادن $\hat{a}_\theta$ در رابطه داده شده داریم:

$$\vec{A}=\frac{1}{r\sin\varphi\cos\varphi}(\cos\theta\cos\varphi\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\hat{a}_y-\sin\theta\hat{a}_z)=\frac{\cos\theta}{r\sin\varphi}\hat{a}_x+\frac{\cos\theta}{r\cos\varphi}\hat{a}_y-\frac{\sin\theta}{r\sin\varphi\cos\varphi}\hat{a}_z$$

با بیان φ,θ,r برحسب x و y داریم:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطه بالا به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{r\sin\varphi\cos\varphi}\hat{a}_\theta=\frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^2(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})}\hat{a}_x+\frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^2(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})}\hat{a}_y-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^2(\frac{yx}{x^2+y^2})}\hat{a}_z$$

$$=\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{y(x^2+y^2+z^2)}\hat{a}_x+\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{x(x^2+y^2+z^2)}\hat{a}_y-\frac{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}{xy(x^2+y^2+z^2)}\hat{a}_z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y(x^2+y^2+z^2)}[z\hat{a}_x+\frac{yz}{x}\hat{a}_y-\frac{x^2+y^2}{x}\hat{a}_z]$$

www.modaresanesharif.ac.ir

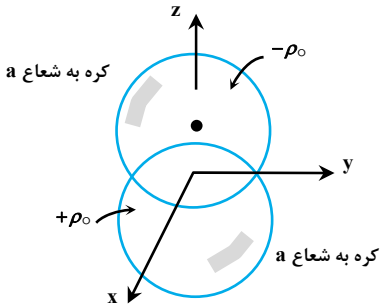
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل دوم

«میدان الکتریکی ساکن در فضای آزاد یا خلأ»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ دو کره به شعاع‌های مساوی a و مراکز $(0,0,d)$ و $(0,0,-d)$ (در مختصات دکارتی) و $d < a$ دارای بارهای حجمی ثابت به ترتیب با چگالی $-\rho_0$ و $+\rho_0$ می‌باشند. در ناحیه مشترک بین دو کره میدان الکتریکی $(\vec{E})$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۰)



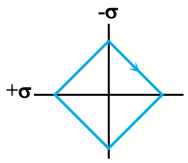
۱) ۰

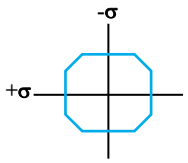
۲) $\frac{2\rho_0 d}{3\varepsilon_0}\hat{z}$

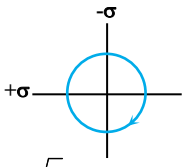
۳) $\frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y})$

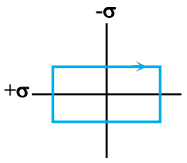
۴) $\frac{\rho_0 d}{\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۲ـ روی دو صفحه نامحدود بار با چگالی یکنواخت $+\sigma$ و $-\sigma$ چسبانیده شده است. دو صفحه مطابق شکل عمود بر یکدیگر قرار گرفته‌اند. مقدار و جهت خطوط میدان مطابق کدام گزینه است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)

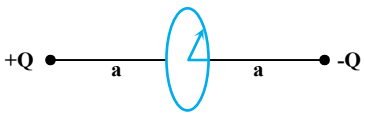
۱)  $E=\sqrt{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

۲)  $E=\frac{2\sigma}{\sqrt{2}\varepsilon_0}$

۳)  $E=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\varepsilon_0}$

۴)  $E=2\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

۳ـ دو بار یکسان ولی مخالف مطابق شکل به فاصله یکسان a از یک قرص فرضی به شعاع R قرار دارند. شار الکتریکی خالص گذرنده از این قرص چیست؟ (محور قرص منطبق بر خط واصل دو بار است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



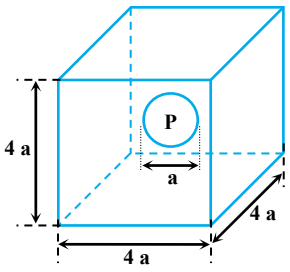
۱) صفر

۲) $\frac{Q}{\varepsilon_0}(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}})$

۳) $\frac{2Q}{\varepsilon_0}$

۴) $\frac{Q}{2\varepsilon_0 a^2}$

۴ـ بار حجمی یکنواخت ρ در کره‌ای به قطر a توزیع شده است. اگر این کره در مرکز یک مکعب به ضلع $4a$ قرار گرفته باشد، شار الکتریکی خارج شونده از سطوح جانبی این مکعب کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $\rho(4a)^3$

۲) $\frac{\rho}{6}(\pi a^3)$

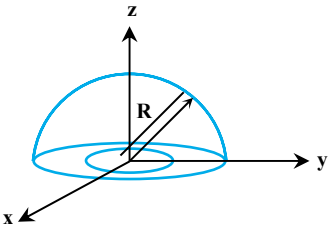
۳) $\frac{\rho}{9}(\pi a^3)$

۴) $\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(\pi a^3)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۵ـ قرصی به شعاع a با چگالی بار سطحی غیریکنواخت $\sigma(r)=\frac{\sigma_\circ}{r^2+a^2}$، که در آن r فاصله تا مرکز قرص، در صفحهٔ xy قرار دارد و مرکز قرص منطبق بر مبدأ مختصات است. مقدار شار $\int D.da$ از سطح نیمکره‌ای به شعاع R و هم مرکز با قرص چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۱)



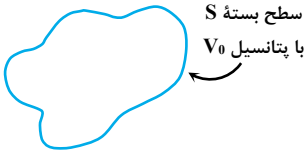
۱) $\frac{\sigma_\circ\pi}{2\varepsilon_\circ}$

۲) $\frac{\sigma_\circ\pi}{4}$

۳) $\frac{\sigma_\circ\pi}{2}\ln 2$

۴) $\frac{\sigma_\circ\pi}{\varepsilon_\circ}\ln 2$

۶ـ اگر در سطح بسته S هیچگونه بار الکتریکی موجود نباشد و تمامی نقاط این سطح بسته دارای پتانسیل معلوم $V_\circ$ باشند، در مورد نقاط داخل این سطح بسته می‌توان گفت: (برق ـ سراسری ۸۲)



۱) پتانسیل برابر صفر است.

۲) شدت میدان الکتریکی برابر صفر است.

۳) در حالت کلی پتانسیل نقاط داخل سطح بسته متفاوتند.

۴) شدت میدان الکتریکی برابر مقدار ثابتی مخالف صفر است.

۷ـ کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را در نظر می‌گیریم. بار q در نقطه $(x=\circ, y=\circ, z=-a)$ قرار دارد. شار الکتریکی گذرنده از قسمتی از سطح که در آن $\theta\le\frac{\pi}{3}$ (مختصات کروی) برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۲)

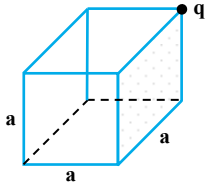
۱) $\frac{q}{4}$

۲) $\frac{q}{4}(2-\sqrt{3})$

۳) $\frac{q}{2}(2-\sqrt{3})$

۴) $\frac{q}{2}(2+\sqrt{3})$

۸ـ بار نقطه‌ای q در گوشهٔ یک مکعب به ضلع a قرار دارد. شار گذرنده از صفحه هاشور زده کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)



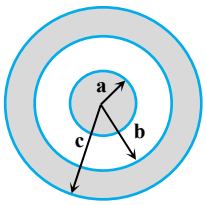
۱) $\frac{q}{6\varepsilon_\circ}$

۲) $\frac{q}{8\varepsilon_\circ}$

۳) $\frac{q}{24\varepsilon_\circ}$

۴) $\frac{q}{36\varepsilon_\circ}$

۹ـ کره هادی توپر به شعاع a دارای بار $2Q$ است. یک پوسته کروی هادی با شعاع داخلی b و شعاع خارجی c و هم مرکز با کره توپر آن را فرا گرفته است. بار پوسته کروی $Q-$ است. کدام گزینه درست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)



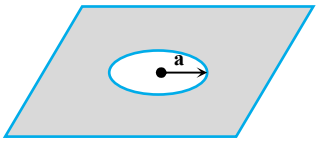
۱) $E=\begin{cases}0 & r<a\\ \frac{2kQ}{r^2} & a<r<c\end{cases}$

۲) $E=\begin{cases}\frac{2kQ}{r^2} & a<r<b\\ \frac{kQ}{r^2} & r<b\end{cases}$

۳) $E=\begin{cases}\frac{2kQ}{r^2} & a<r<c\\ 0 & r>c\end{cases}$

۴) $E=\begin{cases}0 & b<r<c\\ \frac{kQ}{r^2} & r>c\end{cases}$

۱۰ـ یک ورقه بسیار بزرگ مسطح کاغذی دارای بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت σ است. سوراخی به شعاع a در وسط این ورقه ایجاد می‌شود. میدان الکتریکی در مرکز این سوراخ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)



۱) $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$

۲) $\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}$

۳) $\frac{\sigma}{3\varepsilon_\circ}$

۴) $\frac{\sigma}{4\varepsilon_\circ}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ بار خطی یکنواخت با چگالی ρ_L روی محور z در $-a < z < +a$ توزیع شده است. $\vec{E}$ میدان الکتریکی در نقطه‌ای با فاصله r از خط بار واقع در صفحه xy چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۵)

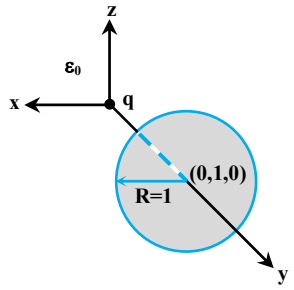
۱) $\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ r}\hat{r}$

۲) $\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ \sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

۳) $\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ \sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

۴) $\vec{E} = \frac{\rho_L a}{2\pi\varepsilon_\circ r\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

۱۲ـ بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ مختصات از سطح دایروی فرضی نشان داده شده در شکل یک کولن شار الکتریکی عبور می‌دهد. شدت میدان الکتریکی ناشی از این بار در نقطه (۰,۱,۰) چند ولت بر متر است؟ $(\varepsilon_\circ = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ \frac{F}{m})$ (برق ـ سراسری ۸۵)



۱) $\frac{36}{\ln 2}\times 10^9$

۲) $\frac{36}{2-\sqrt{2}}\times 10^9$

۳) $\frac{18}{\ln 2}\times 10^9$

۴) $\frac{18}{2-\sqrt{2}}\times 10^9$

۱۳ـ قانون گاوس برای کدام یک از موارد زیر، همواره صادق است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

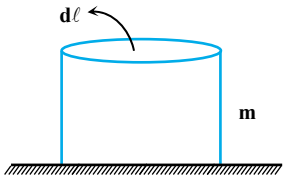
۱) فقط برای توزیع بار مستقل از زمان و دارای تقارن هندسی

۲) فقط برای توزیع بار مستقل از زمان

۳) برای هر نوع توزیع بار الکتریکی

۴) فقط برای توزیع بار وابسته به زمان

۱۴ـ قرص یکنواخت نازک فلزی بزرگی روی صفحهٔ رسانای نامحدودی قرار دارد. در ابتدا قرص و صفحه بدون بارند و سپس به تدریج بار اضافه می‌شود. چگالی بار الکتریکی صفحه چقدر باشد تا قرص از صفحه جدا شود؟ (m جرم قرص، A مساحت قاعدهٔ قرص و g شتاب جاذبه است) (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



۱) $(\frac{2\varepsilon_\circ mg}{A})^{\frac{1}{2}}$

۲) $(\frac{\varepsilon_\circ mg}{A})^{\frac{1}{2}}$

۳) $(\frac{\varepsilon_\circ mg}{4A})^{\frac{1}{2}}$

۴) $(\frac{\varepsilon_\circ mg}{2A})^{\frac{1}{2}}$

۱۵ـ میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا در مختصات کروی به شکل $\vec{E} = Ar\hat{r} + B\frac{\sin\theta}{r}\sin\varphi\hat{\theta} + C\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r}\hat{\varphi}$ است. مقدار چگالی بار در نقطه‌ای با مختصات $r = 2$، $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $\varphi = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟ A ، B و C مقادیر ثابتی هستند. (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

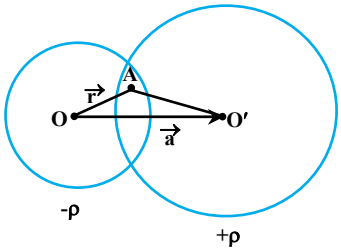
۱) $\varepsilon_\circ[3A + \frac{1}{8}(B-C)]$

۲) $\varepsilon_\circ[3A + \frac{1}{4}(B-C)]$

۳) $\varepsilon_\circ[3A + \frac{1}{4}(\frac{2B}{\sqrt{3}} - C)]$

۴) $\varepsilon_\circ[A + \frac{1}{8}(B-C)]$

۱۶ـ دو کره باردار یکی به شعاع R و چگالی بار $-\rho$ و دیگری به شعاع 2R و چگالی بار $+\rho$ مطابق شکل با هم همپوشانی دارند. میدان الکتریکی در نقطه A داخل ناحیهٔ همپوشانی دو کره و به فاصله r از مرکز کرهٔ به شعاع R کدام است؟ ($\vec{a}$ برداری است که مرکز کره به شعاع R را به مرکز کره به شعاع 2R وصل می‌کند). (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



۱) $\frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\vec{a}$

۲) $\frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\vec{r}$

۳) $\frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}(\vec{r}-\vec{a})$

۴) $\frac{\rho a^2}{3\varepsilon_\circ}(\frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{\vec{r}-\vec{a}}{(r-a)^2})$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ در مختصات کروی عایقی به شکل کره به شعاع a با ضریب عایقی $\varepsilon = \varepsilon_0(1+2r)$ با بار حجمی $\rho = \rho_0(1+\frac{r}{a})$ هم مرکز با مبدأ مختصات مفروض است. اندازه میدان الکتریکی در $r = \frac{a}{2}$ چقدر است؟ (ρ_0 مقدار ثابتی است) (برق ـ سراسری ۸۶)

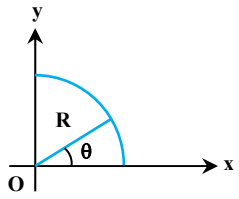
۱) $\frac{11a\rho_0}{48\varepsilon_0(1+a)}$

۲) $\frac{22a\rho_0}{\varepsilon_0(1+a)}$

۳) $\frac{11\rho_0}{24\varepsilon_0(1+\frac{1}{a})}$

۴) $\frac{a\rho_0}{\varepsilon_0(1+a)}$

۱۸ـ یک میله نازک پلاستیکی به شکل یک ربع حلقه به شعاع R خم شده است. اگر بار الکتریکی Q با تابع توزیع $\lambda = \lambda_0 \cos^2\theta$، که λ_0 مقدار ثابتی است، روی این میله توزیع شده باشد، اندازه میدان الکتریکی در نقطه O مرکز ربع حلقه کدام است؟ ($k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$) (فیزیک ـ سراسری ۸۶)



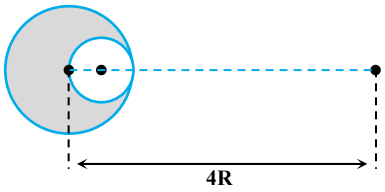
۱) $\frac{4\sqrt{5}}{3\pi}\frac{KQ}{R^2}$

۲) $\frac{4\sqrt{10}}{3\pi}\frac{KQ}{R^2}$

۳) $\frac{\sqrt{5}}{3\pi}\frac{KQ}{R^2}$

۴) $\frac{2\sqrt{5}}{3\pi}\frac{KQ}{R^2}$

۱۹ـ بار مثبت Q به طور یکنواخت در حجم کره توپری به شعاع R توزیع شده است. اگر حفره‌ای کروی به شعاع $\frac{R}{2}$ در داخل کره ایجاد شود که فاصله مرکز آن با مرکز کره توپر اولیه $\frac{R}{2}$ باشد، اندازه میدان الکتریکی در نقطه‌ای در امتداد خط واصل مرکز کره توپر و حفره و به فاصله $4R$ از مرکز کره توپر کدام است؟ ($k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$) (فیزیک ـ سراسری ۸۶)



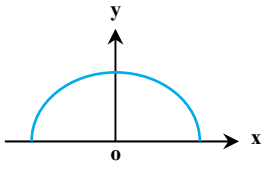
۱) $\frac{41}{392}\frac{KQ}{R^2}$

۲) $\frac{47}{392}\frac{KQ}{R^2}$

۳) $\frac{41}{784}\frac{KQ}{R^2}$

۴) $\frac{47}{784}\frac{KQ}{R^2}$

۲۰ـ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع a در صفحه‌ی xy باری به چگالی خطی $\lambda(x) = 6x^2$ (واحد x و λ در دستگاه SI است) توزیع شده است. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در مبدأ مختصات برابر است با: (فیزیک ـ سراسری ۸۷)



۱) $\frac{2a}{\pi\varepsilon_0}$

۲) $\frac{a}{\pi\varepsilon_0}$

۳) $\frac{a}{2\pi\varepsilon_0}$

۴) $\frac{\sqrt{2a}}{\pi\varepsilon_0}$

۲۱ـ در میدان الکتریکی تولید شده توسط یک‌بار خطی بی‌نهایت طویل واقع بر محور z با چگالی خطی $2\pi\varepsilon_0(\frac{C}{m})$، از سطحی با مشخصات $r = 1$ و $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ و $0 \le \varphi \le 2\pi$ چه مقدار شار الکتریکی عبور می‌کند؟ (برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

۲) $2\pi(\sqrt{2}-1)$

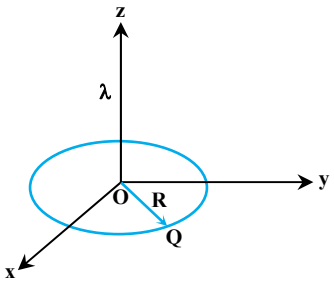
۳) $\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

۴) $\pi(\sqrt{3}-1)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۲ـ طبق شکل یک حلقه عایق به شعاع R حاوی توزیع یکنواخت از بار الکتریکی Q در صفحه افقی (صفحه xoy) قرار دارد. میله نیمه بی‌نهایت عایقی که حاوی توزیع یکنواخت از بار الکتریکی هم‌علامت با Q و با چگالی بار λ در واحد طول میله از مرکز O حلقه و عمود بر صفحه آن (در امتداد محور z) قرار گرفته، چه نیرویی بر حلقه و در کدام جهت وارد می‌سازد؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)



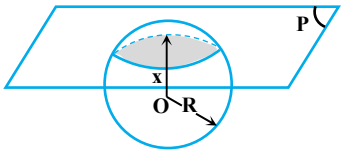
۱) نیروی $\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_\circ R}$ به سمت پایین صفحه $(-\hat{e}_z)$

۲) نیروی $\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ R}$ به سمت پایین صفحه $(-\hat{e}_z)$

۳) نیروی $\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_\circ R}$ به سمت بالای صفحه $(+\hat{e}_z)$

۴) نیروی $\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ R}$ به سمت بالای صفحه $(+\hat{e}_z)$

۲۳ـ کره عایق توپری به شعاع R دارای توزیع یکنواخت بار الکتریکی به چگالی حجمی ρ می‌باشد. صفحه افقی P به فاصله x از O مرکز کره آن را قطع می‌سازد. شار الکتریکی گذرنده از مقطع دایره‌ای که فصل مشترک این صفحه با کره باردار مزبور می‌باشد برابر $\varphi_e(x')$ است. مقدار بیشینه شار الکتریکی $\varphi_e(x)$ چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)



۱) $(\frac{2\pi}{3})\frac{\rho R^3}{\varepsilon_\circ}$

۲) $(\frac{2\pi}{9})\frac{\rho R^3}{\varepsilon_\circ}$

۳) $(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}})\frac{\rho R^3}{\varepsilon_\circ}$

۴) $(\frac{2\pi}{9\sqrt{3}})\frac{\rho R^3}{\varepsilon_\circ}$

۲۴ـ دو بار خطی نیمه بی‌نهایت یکنواخت با $\rho_L \frac{c}{m}$ بر روی محور z ها قرار گرفته‌اند. یکی از $z = h$ تا ∞ و دیگری از $z = -h$ تا $-\infty$ ادامه دارد. میدان الکتریکی را در صفحه $z = \circ$ بیابید. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ r}(1+\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}})$

۲) $\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ r}(1-\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}})$

۳) $\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ r}(1-\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}})$

۴) $\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ r}(1+\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}})$

۲۵ـ به دست آورید خطوط جریانی (stream lines) میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در صفحه $z = \circ$ با فرض: $\vec{E} = -e^x(\sin y\hat{a}_x + \cos y\hat{a}_y)$ (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\cos y = \exp[-(x+c)]$

۲) $\cos y = \exp[(x+c)]$

۳) $\sin y = \exp[-(x+c)]$

۴) $\sin y = \exp[(x+c)]$

۲۶ـ یک بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات، یک صفحه با بار سطحی یکنواخت ρ_{sa} در سطح کره $r = a$ و بار سطحی یکنواخت دیگری با ρ_{sb} در سطح کره $r = b$ قرار گرفته‌اند. چگالی بار الکتریکی $\vec{D}$ را در $r > b$ به دست آورید. $b > a$. (برق ـ آزاد ۸۸)

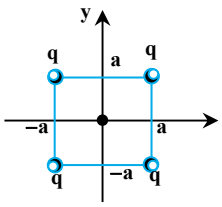
۱) $(\frac{Q}{4\pi r^2}+\rho_{sa}\frac{a^2}{4\pi r^2}+\rho_{sb}\frac{b^2}{4\pi r^2})\hat{a}_r$

۲) $(\frac{Q}{4\pi r^2}+\rho_{sa}\frac{a^2}{r^2}+\rho_{sb}\frac{b^2}{r^2})\hat{a}_r$

۳) $(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}+\rho_{sa}\frac{a^2}{r^2}+\rho_{sb}\frac{b^2}{r^2})\hat{a}_r$

۴) $(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}+\rho_{sa}\frac{a^2}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}+\rho_{sb}\frac{b^2}{4\pi\varepsilon_\circ r^2})\hat{a}_r$

۲۷ـ چهار بار نقطه‌ای q در چهار راس یک مربع به ضلع 2a به‌طور متقارن نسبت به مبدأ مختصات مانند شکل قرار دارند. یک ذره‌ی باردار به جرم m و بار $-Q$ در مرکز مربع قرار می‌دهیم. پریود نوسانات این ذره‌ی باردار برای جابجایی‌های کوچک در راستای محور z کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)



۱) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_\circ ma^3}{qQ}}$

۲) $T = 2\pi\sqrt{\frac{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_\circ ma^3}{qQ}}$

۳) $T = 2\pi\sqrt{\frac{qQ}{2\sqrt{3}\pi\varepsilon_\circ ma^3}}$

۴) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\pi\varepsilon_\circ ma^3}{qQ}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۸ـ در حجم کره‌ای به شعاع a بارهای حجمی با چگالی بار $\rho = \rho_\circ \cos\theta\,(\frac{C}{m^3})$ ($\rho_\circ$ ثابت است) گسترده شده‌اند. بردار گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}(\text{Dipole Moment})$ این توزیع بار کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi\rho_\circ a^3\hat{z}}{3}$ ۲) $\frac{\pi\rho_\circ a^4}{6}\hat{z}$ ۳) $\frac{\pi\rho_\circ a^4}{3}\hat{z}$ ۴) $\frac{\pi\rho_\circ a^3\hat{z}}{6}$

۲۹ـ چگالی بار الکتریکی در مختصات استوانه‌ای به صورت $\rho = re^{-2r}\,(\frac{C}{m^3})$ است، اندازه‌ی بردار جابجایی الکتریکی $\vec{D}$ در نقطه‌ای به مختصات $(\frac{1}{2}^m, \circ, \circ)$ در مختصات استوانه‌ای کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}-\frac{5}{4e}$ ۲) $\frac{1}{2}-\frac{5}{4e^2}$ ۳) $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{5}{4e}]$ ۴) $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{5}{4e^2}]$

۳۰ـ میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار ایستا (در مختصات کروی) به صورت $\vec{E} = A\frac{e^{-\frac{r}{r_\circ}}}{r}\hat{r}$ است که A و $r_\circ$ اعدادی ثابت هستند. مقدار بار کل این توزیع بار کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر ۲) $4\pi\varepsilon_\circ A$ ۳) $8\pi\varepsilon_\circ A$ ۴) $4\pi(4\pi-1)\varepsilon_\circ A$

۳۱ـ پوسته نیمکره هادی با شعاع R در صفحه $Z=\circ$ با چگالی بار سطحی ρ_s مفروض است. مرکز نیم‌کره منطبق بر مبدأ مختصات می‌باشد. گشتاور دو قطبی حاصل را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $\rho_s\pi R^3$ ۲) $\frac{\rho_s}{2}\pi R^3$ ۳) $2\rho_s\pi R^3$ ۴) $\frac{\rho_s}{4}\pi R^3$

۳۲ـ میدان الکتریکی توسط یک کره باردار به شعاع a و چگالی بار حجمی $\rho(r)$ توسط روابط زیر داده شده است $\rho(r)$ را به دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۹)

$$E_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 & r \le a \\ (a^5 + Aa^4)r^{-2} & r \ge a \end{cases}$$

۱) $\rho(r) = \varepsilon_\circ(5r+4A)$ ۲) $\rho(r) = \varepsilon_\circ r(r+A)$ ۳) $\rho(r) = \varepsilon_\circ(r+A)$ ۴) $\rho(r) = \varepsilon_\circ r(5r+4A)$

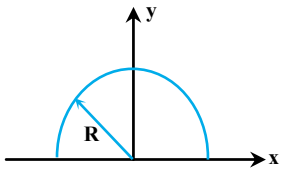
۳۳ـ بار نقطه‌ای $-Q_1$ به جرم m در مدار دایروی به شعاع R حول بار Q_2 گردش می‌کند. فرکانس دوران بار $-Q_1$ را تعیین نمائید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $f = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{m\varepsilon_\circ R^2}}$ ۲) $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{m\varepsilon_\circ R^3}}$ ۳) $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{m\varepsilon_\circ R^2}}$ ۴) $f = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{m\varepsilon_\circ R^3}}$

۳۴ـ بار q در مرکز مکعبی به ضلع d قرار گرفته است. شار خالصی که از هر وجه مکعب عبور می‌کند، چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{q}{6\varepsilon_\circ d^2}$ ۲) $\frac{q}{6\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{qd^2}{6\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{qd^2}{\sqrt{6}\varepsilon_\circ}$

۳۵ـ بار مثبت خطی با چگالی $\lambda = \lambda_\circ x^2$ روی یک نیم‌دایره به شعاع R توزیع شده است. اندازه میدان الکتریکی در مرکز نیم‌دایره چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)



۱) $\frac{\lambda R}{6\pi\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_\circ R}$ ۳) $\frac{6\lambda R}{\pi\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{6\lambda R^2}{\pi\varepsilon_\circ}$

۳۶ـ بر روی محیط یک دایره به شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}R$، چهار بار الکتریکی برابر در فواصل مساوی از یکدیگر قرار گرفته‌اند، اندازه نیروی وارد به هر بار از طرف بقیه بارها عبارتست از: (k مقداری ثابت می‌باشد) (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $(\sqrt{2}+1)\frac{k}{R^2}$ ۲) $(\sqrt{2}+1)\frac{k}{2R^2}$ ۳) $(2+\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{k}{R^2}$ ۴) $(\sqrt{2}+\frac{1}{2})\frac{k}{R^2}$

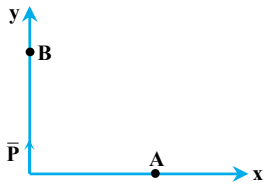
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۷ـ جسم عایق کروی شکل به شعاع R و چگالی بار الکتریکی یکنواخت ρ موجود است. در صورتی که فاصله $\frac{R}{۲}$ از مرکز این کره، یک حفره کروی به شعاع $\frac{R}{۲}$ ایجاد شود، اندازه میدان الکتریکی در مرکز حفره عبارتست از: (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) صفر
۲) $\frac{\rho R}{۳\varepsilon_۰}$
۳) $\frac{\rho R}{۶\varepsilon_۰}$
۴) $\frac{۲\rho R}{۳\varepsilon_۰}$

۳۸ـ مطابق شکل یک دو قطبی الکتریکی در مبدأ قرار دارد. اگر فاصله A و B از مبدأ یکسان باشد، نسبت شدت میدان در نقطه B به شدت میدان در نقطه A برابر است با: (فیزیک ـ آزاد ۸۹)



۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) چهار

۳۹ـ چگالی حجمی توزیع بار الکتریکی در کره‌ای به شعاع R با رابطه $\rho = \rho_۰ r\cos\theta$ داده شده است که در آن $\rho_۰$ مقدار ثابتی می‌باشد و r و θ در مختصات کروی هستند و مبدأ مختصات در مرکز کره واقع شده است. کدام گزینه صحیح می‌باشد؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) گشتاور دو قطبی این کره متناسب با $R^۵$ و در راستای مثبت محور zها می‌باشد.
۲) گشتاور دو قطبی این کره مستقل از محل مبدأ مختصات است.
۳) گشتاور دو قطبی این کره صفر است.
۴) گشتاور دو قطبی این کره متناسب با $R^۲$ و در جهت منفی محور zها می‌باشد.

۴۰ـ گشتاور دو قطبی الکتریکی را برای کره‌ای به شعاع a حامل بار الکتریکی با چگالی سطحی $\sigma = \sigma_۰\cos\theta$ کدام است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $\bar{P} = ۲\pi a^۲\sigma_۰\hat{k}$
۲) $\bar{P} = \frac{۲}{۳}\pi a^۲\sigma_۰\hat{k}$
۳) $\bar{P} = ۴\pi a^۲\sigma_۰\hat{k}$
۴) $\frac{۴}{۳}\pi a^۲\sigma_۰\hat{k}$

۴۱ـ روی خط به معادلهٔ $\vec{r}\times\hat{x} = -۵\hat{z}$ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت به اندازهٔ $\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹}$ کولن بر متر توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در فضای آزاد در نقطه‌ای به مختصات $(۴, ۵, ۲)$ با کدام رابطهٔ زیر داده می‌شود؟(می‌دانیم $\varepsilon_۰ = \frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹}\frac{F}{M}$) (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{۱}{۸\pi}\hat{z}$
۲) $-\frac{۱}{۱۰\pi}\hat{y}$
۳) $\frac{۱}{۱۰\pi}\hat{y}$
۴) $\frac{۱}{۸\pi}\hat{z}$

۴۲ـ حلقه دایروی به شعاع a در صفحهٔ $z = ۰$ و به مرکز مبدأ مختصات مفروض است. به ازاء $y > ۰$ بار الکتریکی با چگالی خطی q کولن بر متر و به ازاء $y < ۰$ بار الکتریکی با چگالی خطی $-q$ کولن بر متر بر روی این حلقه توزیع شده است. کدام رابطهٔ زیر اندازهٔ میدان الکتریکی $|\vec{E}|$ در نقطهٔ $(۰, ۰, z)$ است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{a^۲q}{۲\pi\varepsilon_۰(a^۲+z^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$
۲) $\frac{۲a^۲q}{\pi\varepsilon_۰(a^۲+z^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$
۳) $\frac{a^۲q}{\pi\varepsilon_۰(a^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$
۴) $\frac{۲a^۲q}{\pi\varepsilon_۰(a^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

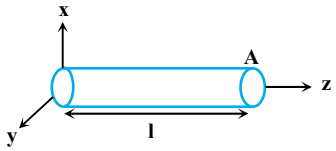
۴۳ـ یک بار نقطه‌ای به جرم m و بار $-q$ در مرکز یک حلقهٔ بار دایروی به شعاع a و چگالی خطی λ کولن بر متر قرار گرفته است. پریود نوسانات این بار نقطه‌ای برای جابجائی‌های بسیار کوچک در راستای محور حلقهٔ بار کدام است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $\pi a\sqrt{\frac{۴m\varepsilon_۰}{\lambda q}}$
۲) $\pi a\sqrt{\frac{۸m\varepsilon_۰}{\lambda q}}$
۳) $\pi a\sqrt{\frac{۸\varepsilon_۰}{m\lambda q}}$
۴) $\pi a\sqrt{\frac{۸m}{\varepsilon_۰\lambda q}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۴ـ یک میله باردار به طول l و سطح مقطع A مطابق شکل روی محور zها قرار دارد و چگالی بار آن $\rho = a(z-\frac{l}{2})$ است. ممان دو قطبی الکتریکی آن کدام است؟ a مقدار ثابتی است. (فیزیک ـ سراسری ۹۰)



۱) $\frac{1}{12}l^3aA(\hat{j}+\hat{k})$ ۲) $\frac{1}{12}l^3aA\hat{k}$

۳) $\frac{1}{3}l^3aA\hat{k}$ ۴) $\frac{1}{3}l^3aA(\hat{j}+\hat{k})$

۴۵ـ در یک فضای آزاد، میدان الکتریکی با شدت $\vec{E} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ وجود دارد. شار الکتریکی که از سطح جانبی استوانه‌ای به طول ℓ و شعاع R و محور z به مرکز مبدأ مختصات می‌گذرد، برابر است با: (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $-\pi\varepsilon_0\ell R^2$ ۲) $3\pi\varepsilon_0\ell R^2$ ۳) صفر ۴) $2\pi\varepsilon_0\ell R^2$

۴۶ـ کدام میدان الکتریکی زیر می‌تواند در یک ناحیه‌ای از فضا وجود داشته باشد که شامل هیچ باری هم نیست (در این توصیف A یک مقدار ثابت می‌باشد و میدان‌ها در مختصات دکارتی نوشته شده‌اند). (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $A(2xy\hat{i} - xz\hat{j})$ ۲) $A(-xy\hat{i} + xz\hat{k})$ ۳) $A(xz\hat{i} + xz\hat{j})$ ۴) $Axyz\hat{i}$

۴۷ـ دو بار نقطه‌ای با بار مشابه $+Q$ در طول محور xها ثابت شده‌اند. فاصله میان این دو بار $2R$ می‌باشد. یک بار کوچک $-q$ به جرم m در نقطه وسط این دو بار قرار می‌گیرد. فرکانس زاویه‌ای نوسانات کوچک این ذره در طول محور yها چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $(\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 R^2})^{\frac{1}{2}}$ ۲) $(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^3})^{\frac{1}{2}}$ ۳) $(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^3})$ ۴) $(\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 R^3})^{\frac{1}{2}}$

۴۸ـ کره‌ای شامل توزیع حجمی متقارن، اما غیریکنواخت بار می‌باشد و یک میدان الکتریکی برون‌سو به شکل $E = kr^4$ تولید می‌کند. در اینجا r فاصله از مرکز کره و k ثابت می‌باشد. چگالی باری که این میدان را تولید می‌کند، چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $6k\varepsilon_0 r^2$ ۲) $3k\varepsilon_0 r^2$ ۳) $\frac{3k\varepsilon_0}{r^2}$ ۴) $\frac{3k\varepsilon_0}{r}$

۴۹ـ شدت نور تابشی متوسط از خورشید در سطح زمین $1300\,W/m^2$ است. با فرض آن که نور دریافتی از خورشید تکفام با قطبش خطی است و به طور عمودی به زمین می‌رسد. اندازه میدان الکتریکی متوسط نور خورشید در سطح زمین چند ولت بر متر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۳)

۱) $1/5\times10^3$ ۲) $6/8\times10^3$ ۳) ۴۹۵ ۴) ۷۰۰

۵۰ـ پروتونی با تندی $3\frac{km}{s}$ از فاصله ۱۰ کیلومتری به سمت پروتون ساکنی که در جای خود میخکوب شده فرستاده می‌شود. نزدیک‌ترین فاصله‌ای که این دو پروتون از هم پیدا می‌کنند، تقریباً کدام است؟ $m_P = 2\times10^{-27}\,kg$ (فیزیک ـ سراسری ۹۴)

۱) ۵mm ۲) ۲/۶μm ۳) ۲۶nm ۴) ۵cm

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ گزینه «۲» با توجه به مطالب گفته شده در متن درس میدان حاصل در جهت $\hat{z}$ بوده و برابر است با: $\vec{E}=\frac{۲\rho_{\circ}d}{۳\varepsilon_{\circ}}\hat{z}$

توجه کنید که فاصله مرکز دو کره $۲d$ می‌باشد.

۲ـ گزینه «۳» شدت میدان الکتریکی ناشی از صفحه نامحدود برابر است با: $E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_{\circ}}$

لذا اگر یک صفحه را منطبق بر محور x و دیگری را منطبق بر محور y در نظر بگیریم می‌توانیم میدان را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases}\vec{E}_{۱}=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_{\circ}}\hat{y}\\ \vec{E}_{۲}=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_{\circ}}\hat{x}\end{cases}\Rightarrow E_T=\vec{E}_{۱}+\vec{E}_{۲}\Rightarrow|E_T|=\sqrt{|\vec{E}_{۱}|^{۲}+|\vec{E}_{۲}|^{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}}$$

۳ـ گزینه «۲» باز هم در این مسأله به جای حل مستقیم از رفتار حدی استفاده می‌کنیم و گزینه‌ی درست را به دست می‌آوریم. هرگاه $R\to\infty$ انتظار داریم که شار الکتریکی خالص گذرنده از قرص برابر $\frac{Q}{\varepsilon_{\circ}}$ گردد ($\frac{Q}{۲\varepsilon_{\circ}}$ به خاطر بار $+Q$ و $\frac{Q}{۲\varepsilon_{\circ}}$ به خاطر بار $-Q$) و لذا گزینه ۲ صحیح است.

۴ـ گزینه «۲» طبق قانون گاوس شار گذرنده از هر سطح بسته برابر بار کل دورن آن سطح می‌باشد: $\psi=q=\rho[\frac{۴}{۳}\pi(\frac{a}{۲})^{۳}]=\frac{\rho\pi a^{۳}}{۶}$

۵ـ گزینه «۳» شار گذرنده از سطح کره کامل به شعاع R عبارت است از: $\psi=\oiint\vec{D}.d\vec{s}=q_{in}=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{a}\sigma r dr d\varphi=\int_{\circ}^{a}\frac{\sigma_{\circ}۲\pi r}{r^{۲}+a^{۲}}dr=\pi\sigma_{\circ}\ln۲$

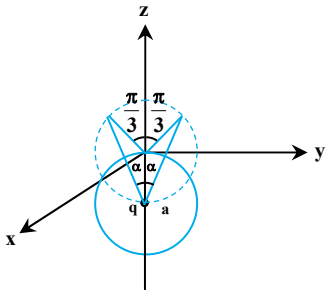
که در آن از رابطه‌ی انتگرال‌گیری مقابل استفاده شده است:

$$\int_{\circ}^{a}dx\frac{۲x}{x^{۲}+a^{۲}}=\ln(x^{۲}+a^{۲})\Big|_{\circ}^{a}=\ln(۲a^{۲})-\ln a^{۲}=\ln(\frac{۲a^{۲}}{a^{۲}})=\ln۲$$

شار گذرنده از نیم کره مورد نظر نصف مقدار فوق می‌باشد.

۶ـ گزینه «۲» در داخل سطح بسته بار وجود ندارد و لذا طبق قانون گاوس، شدت میدان الکتریکی در داخل سطح بسته برابر صفر می‌باشد.

۷ـ گزینه «۲» ابتدا شکل را می‌کشیم و بعد روی آن بحث می‌کنیم.



همان‌طور که گفتیم، سطح کل باید به طور متقارن حول بار نقطه‌ای q باشد ولی بار q روی سطح کره واقع است، پس خودمان یک سطح کروی به شعاع a حول بار نقطه‌ای q در نظر می‌گیریم. بنابراین $S=۴\pi a^{۲}$ که سطح کره‌ای است که مرکز آن بار q است و سطح مورد نظر طبق شکل کشیده شده برابر است با:

$$\alpha=\frac{۱}{۲}.\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶}$$

$$S=\int_{\theta=\circ}^{\frac{\pi}{۶}}\int_{\phi=\circ}^{۲\pi}.a^{۲}.\sin\theta.d\theta.d\phi=a^{۲}[-\cos\theta]_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}[\phi]_{\circ}^{۲\pi}=۲\pi a^{۲}[۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$$

$$\Phi=\frac{q\times۲\pi a^{۲}\left[۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right]}{۴\pi\ a^{۲}}=\frac{q}{۴}(۲-\sqrt{۳})$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

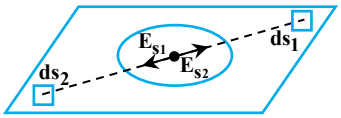
۸ـ گزینه «۳» با قرار دادن ۸ مکعب دورتادور بار q، کل شار عبوری از ۲۴ وجه خارجی مکعب‌ها، برابر بار درون آن $(\frac{q}{\varepsilon_\circ})$ می‌باشد. لذا شار عبوری از هر وجه مکعب برابر $\frac{q}{۲۴\varepsilon_\circ}$ خواهد بود.

۹ـ گزینه «۴» در داخل پوسته کروی هادی $(b<r<c)$ میدان الکتریکی صفر می‌باشد. همچنین برای نقاط $r>c$ ، طبق قانون گاوس خواهیم داشت:

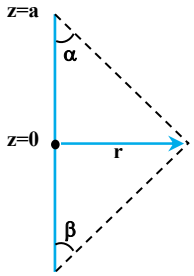
$$E=\frac{k(۲Q-Q)}{r^۲}=\frac{kQ}{r^۲}$$

زیرا بار کل قرار گرفته در $r<c$ برابر با $۲Q-Q=Q$ می‌باشد.

۱۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. به علت تقارن، میدان الکتریکی در مرکز سوراخ برابر صفر خواهد بود. چون هر جزء دیفرانسیلی روی صفحه در نظر بگیریم که میدان الکتریکی $\vec{E}$ در وسط صفحه ایجاد می‌کند، یک جزء دیفرانسیلی به صورت متقارن در طرف دیگر صفحه قرار دارد که میدانی الکتریکی به اندازه $\vec{E}$ ولی در جهت خلاف آن ایجاد می‌کند که همدیگر را خنثی می‌کنند. در شکل مقابل دو جزء دیفرانسیل متقارن را نشان می‌دهد که میدان همدیگر را خنثی می‌کنند. $\vec{E}_{S۱}+\vec{E}_{S۲}=\circ$



۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به مثال ۲۶ در متن درس داریم:



$$\vec{E}\Big|_{z=\circ}=\frac{\rho_L}{۴\pi\varepsilon_\circ r}(\cos\alpha+\cos\beta)\hat{a}_r$$

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^۲+r^۲}}$$

$$\vec{E}\Big|_{z=\circ}=\frac{a\rho_L}{۲\pi\varepsilon_\circ r\sqrt{a^۲+r^۲}}\hat{a}_r$$

۱۲ـ گزینه «۲» با توجه به نکات گفته شده در بخش زاویه فضایی در متن درس هرگاه بار نقطه‌ای q روی محور و در فاصله h از یک صفحه دایره‌ای شکل به شعاع r واقع باشد، در این صورت شار گذرنده از آن سطح از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\psi=\frac{q}{۲}(۱-\frac{h}{\sqrt{r^۲+h^۲}})$$

برای به دست آوردن شدت میدان الکتریکی در نقطه $(\circ,۱,\circ)$ باید ابتدا مقدار بار q را به دست آوریم. در این مسأله $h=۱$ و $r=۱$ و $\psi=۱c$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$۱=\frac{q}{۲}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\Rightarrow q=\frac{۴}{۲-\sqrt{۲}}c$$

$$\vec{E}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ h^۲}\hat{a}_y=\frac{۳۶\times۱\circ^۹}{(۲-\sqrt{۲})}\hat{a}_y$$

۱۳ـ گزینه «۳» قانون گاوس برای هر نوع توزیع بار الکتریکی صادق است. زیرا این قانون از معادله‌ی ماکسول $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$ به دست می‌آید که برای هر توزیع باری برقرار است.

۱۴ـ گزینه «۱» میدان الکتریکی یک صفحه‌ی نامتناهی با بار سطحی σ برابر است با:

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}\hat{n}$$

بنابراین نیروی الکترواستاتیکی وارد بر قرص نازک فلزی از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{F}_e=\vec{E}q=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}(\sigma A)\hat{n}=\frac{\sigma^۲A}{۲\varepsilon_\circ}\hat{n}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

برای آنکه قرص فلزی از صفحه جدا شود لازم است نیروی الکترواستاتیکی بر نیروی جاذبه غلبه کند، بنابراین حداقل چگالی بار سطحی لازم از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$|\vec{F}_e| = mg \Rightarrow \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0} = mg \Rightarrow \sigma = \left(\frac{2\varepsilon_0 mg}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۱۵ـ گزینه «۱» هرگاه میدان الکتریکی در فضا داده شده باشد و مقدار بار یا چگالی بار خواسته شده باشد، از قانون گاوس یا قانون اول ماکسول استفاده می‌کنیم. در اینجا با توجه به متغیر بودن $\vec{E}$ از قانون اول ماکسول استفاده می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

با توجه به دیورژانس در مختصات کروی داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

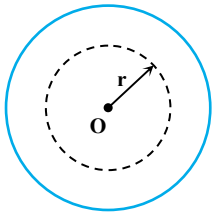
با ساده‌سازی به دست می‌آید:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 Ar) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B\frac{\sin\theta}{r}\sin\varphi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{C\sin\theta}{r}\cos\varphi)$$

بنابراین خواهیم داشت:

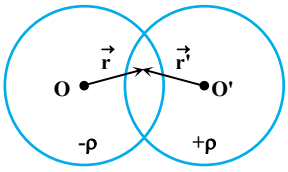
$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 3A + \frac{2B}{r^2}\sin\varphi\cos\theta - \frac{C}{r^2}\sin\varphi \Bigg|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{3}\\ \varphi=\frac{\pi}{6}\\ r=2}} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0[3A + \frac{B}{8} - \frac{C}{8}]$$

۱۶ـ گزینه «۱» برای یک توزیع بار کروی با چگالی حجمی ρ شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره طبق قانون گاوس از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\oiint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{\iiint \rho dV}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3\rho}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$$



بنابراین با استفاده از قضیه جمع آثار خواهیم داشت:

$$\vec{E}_A = \frac{-\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}'-\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

این تست را با توجه به توضیح متن درس صفحه ۱۰۵ خیلی ساده می‌توانستیم حل کنیم:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

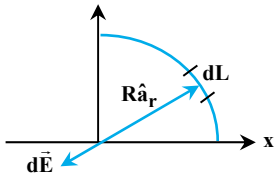
۱۷ـ گزینه «۱» طبق قانون گاوس خواهیم داشت:

$$\oiint \varepsilon\vec{E}.d\vec{s} = \iiint \rho dV$$

$$\Rightarrow \oiint \varepsilon_0(1+2r)\vec{E}.d\vec{s} = \iiint \rho_0(1+\frac{r}{a})r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr \Rightarrow \varepsilon_0(1+2r).E4\pi r^2 = 4\pi\int_0^r \rho_0(1+\frac{r}{a})r^2 dr$$

$$= 4\pi\rho_0(\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{4a}) \Rightarrow E = \frac{4\pi\rho_0(\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{4a})}{\varepsilon_0(1+2r).4\pi r^2}\Bigg|_{r=\frac{a}{2}} = \frac{11a\rho_0}{48\varepsilon_0(1+a)}$$

۱۸ـ گزینه «۱» ابتدا یک جزء دیفرانسیل کوچک روی میله را در نظر می‌گیریم و میدان الکتریکی $\overrightarrow{dE}$ حاصل از آن را با استفاده از قانون کولن در مبدأ مختصات به دست می‌آوریم:



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{r}' = R\hat{a}_r\\ \vec{r} = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{r}-\vec{r}' = -R\hat{a}_r$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

با استفاده از چگالی خطی $\lambda = \lambda_\circ \cos^2\theta$ مقدار dq به صورت مقابل به دست می‌آید: $\lambda = \frac{dq}{dL} \Rightarrow dq = \lambda dL \Rightarrow dq = \lambda_\circ \cos^2\theta dL$

با توجه به اینکه dL یک جزء دیفرانسیل روی محیط دایره است، در نتیجه برابر است با $dL = Rd\theta$.

$$dq = \lambda_\circ \cos^2\theta R d\theta$$

حال با قراردادن dq در $d\vec{E}$ داریم: $d\vec{E} = \frac{\lambda_\circ \cos^2\theta R d\theta}{4\pi\varepsilon_\circ R^2} \times (-\hat{a}_r)$

با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه بالا داریم: $\vec{E} = \int \frac{K\lambda_\circ \cos^2\theta}{R} d\theta(-\hat{a}_r)$

با توجه به شکل، θ بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند. برای گرفتن انتگرال رابطه بالا ابتدا باید $\hat{a}_r$ را به خاطر متغیر بودنش به دستگاه دکارتی انتقال دهیم.

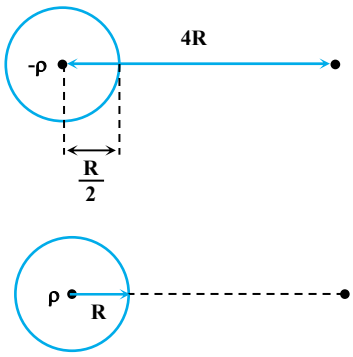
$$(\hat{a}_r = \cos\theta \hat{a}_x + \sin\theta \hat{a}_y)$$

$$\vec{E} = \int_\circ^{\frac{\pi}{2}} d\vec{E} = \frac{\lambda_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ R}[\int_\circ^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \hat{a}_x - \int_\circ^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \hat{a}_y] = \frac{\lambda_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ R}[\frac{2}{3}\hat{a}_x - \frac{1}{3}\hat{a}_y] \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\lambda_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ R}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}$$

از طرف دیگر بار کل ربع حلقه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = \int_\circ^{\frac{\pi}{2}} R\lambda_\circ \cos^2\theta d\theta = \frac{R\lambda_\circ \pi}{4} \Rightarrow \lambda_\circ = \frac{4Q}{R\pi} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{4QK}{R^2\pi} \times \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{4\sqrt{5}}{3\pi}\frac{KQ}{R^2}$$

۱۹ـ گزینه «۳» کره حفره‌دار را می‌توان به صورت برآیند یک کره توپر به شعاع R با چگالی بار یکنواخت $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ و کره توپر دیگر به شعاع $\frac{R}{2}$ با



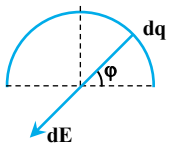
چگالی بار یکنواخت $-\rho$ دانست، پس می‌توان نوشت:

$$\vec{E}_1 = \frac{Q\hat{a}_x}{4\pi\varepsilon_\circ(4R)^2} = \frac{KQ}{16R^2}\hat{a}_x$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-\rho[\frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3]}{4\pi\varepsilon_\circ(4R-\frac{R}{2})^2} = \frac{-KQ}{98R^2}\hat{a}_x$$

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\frac{KQ}{16R^2} - \frac{KQ}{98R^2})\hat{a}_x = \frac{41}{784}\frac{KQ}{R^2}\hat{a}_x$$

۲۰ـ گزینه «۲» این تست مانند تست ۲۳ حل می‌شود. با توجه به تست شماره ۲۳ داریم:



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_\circ a^2} = \frac{\lambda a d\varphi}{4\pi\varepsilon_\circ a^2} \Rightarrow dE = \frac{6x^2 a d\varphi}{4\pi\varepsilon_\circ a^2}$$

به علت تقارن، شدت میدان الکتریکی نهایی در جهت $-\hat{y}$ خواهد بود: $dE_y = dE\sin\varphi = \frac{6(a\cos\varphi)^2 a d\varphi}{4\pi\varepsilon_\circ a}\sin\varphi$

از آنجا که در مختصات قطبی مسطح مورد استفاده $x = a\cos\varphi$ است به دست می‌آید: $E_y = \int dE_y = \int_\circ^\pi \frac{6a}{4\pi\varepsilon_\circ}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{a}{\pi\varepsilon_\circ}$

که در آن از φ بدین صورت انتگرال گرفته شده است. با تغییر متغیر $\cos\varphi = x$ و $dx = -\sin\varphi d\varphi$

$$\int_\circ^\pi d\varphi \sin\varphi\cos^2\varphi = -\int_1^{-1} dx x^2 = \int_{-1}^1 dx x^2 = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۱ـ گزینه «۳» شدت میدان الکتریکی ناشی از بار خطی بی‌نهایت طویل برابر است با: $\vec{E}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_{\circ} r}\hat{a}_r$

همچنین بردار جزء سطح کروی از رابطه روبرو به دست می‌آید: $d\vec{S}=R^{۲}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_R$

با توجه به روابط $R=۱$ و $r=R\sin\theta=\sin\theta$ و $\hat{a}_r.\hat{a}_R=\sin\theta$ و $\lambda=۲\pi\varepsilon_{\circ}$ با استفاده از قانون گاوس می‌توان چنین نوشت:

$$\psi=\iint\vec{E}.d\vec{s}=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{۱}{\sin\theta}\right)(\sin\theta\, d\theta d\varphi)(\hat{a}_r.\hat{a}_R)=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\sin\theta\, d\theta d\varphi=۲\pi\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}=\pi(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

۲۲ـ گزینه «۱» شدت میدان الکتریکی ناشی از میله نیمه بی‌نهایت در نقاط مختلف حلقه از رابطه مقابل به دست می‌آید: $\vec{E}=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}(\hat{e}_r-\hat{e}_z)$

با توجه به رابطه بین نیرو و میدان داریم: $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}\Rightarrow d\vec{F}=\vec{E}dq$

برای به دست آوردن کل نیروی وارد بر حلقه از رابطه بالا باید روی کل حلقه انتگرال گرفت: $\vec{F}=\int\vec{E}dq$

از آنجا که بار Q به طور یکنواخت روی حلقه توزیع شده است، با استفاده از رابطه چگالی خطی، dq را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned}\rho=\frac{dq}{dL}\Rightarrow dq=\rho dL\\ \rho=\frac{Q}{\text{محیط حلقه}}=\frac{Q}{۲\pi R}\end{aligned}\right\}\Rightarrow dq=\frac{Q}{۲\pi R}dL$$

همانطور که قبلاً گفتیم، dL روی دایره برابر $dL=Rd\varphi$ می‌باشد. با قرار دادن dq و $\vec{E}$ و dL در انتگرال $\vec{F}$ داریم:

$$\vec{F}=\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}(\hat{e}_r-\hat{e}_z)\frac{Q}{۲\pi R}Rd\varphi$$

چون $\hat{e}_r$ متغیر است، باید آن را به مختصات دکارتی انتقال بدهیم.

$$\vec{F}=\frac{\lambda Q}{۸\pi^{۲}\varepsilon_{\circ}R}\int_{\circ}^{۲\pi}(\cos\varphi\hat{e}_x+\sin\varphi\hat{e}_y-\hat{e}_z)d\varphi=-\frac{\lambda Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}\hat{e}_z$$

۲۳ـ گزینه «۴» شار عبوری از مقطع دایره‌ای برابر است با بار درون مخروطی به شعاع $\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}$ و رأس مبدأ. پس کافی است برای بیشینه شدن شار الکتریکی حجم بار درون این مخروط بیشینه شود. برای بهینه شدن حجم ابتدا فرمول حجم مخروط را نوشته سپس از آن با توجه به متغیر مسأله که مقدار x است مشتق می‌گیریم. با مساوی صفر قرار دادن مشتق اول بیشینه مقدار x به دست خواهد آمد.

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi(r^{۲})h=\frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{R^{۲}-x^{۲}})^{۲}\times x=\frac{۱}{۳}\pi x(R^{۲}-x^{۲})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\pi}{۳}(R^{۲}-x^{۲})+(-۲x^{۲})=\frac{\pi}{۳}(R^{۲}-۳x^{۲})=۰\quad;\quad R=\sqrt{۳}x\Rightarrow x=\frac{R}{\sqrt{۳}}$$

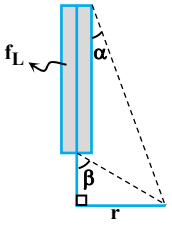
توجه داشته باشید شعاع مقداری حقیقی است. پس مقدار منفی در رابطه بالا بی‌معنی خواهد بود.

$$\varphi_e=\frac{Q}{\varepsilon_{\circ}}=\frac{\rho V}{\varepsilon_{\circ}}=\frac{\pi}{۳\varepsilon_{\circ}}\frac{\rho R}{\sqrt{۳}}(R^{۲}-\frac{R^{۲}}{۳})=\frac{۲\pi}{۹\sqrt{۳}}\frac{\rho R^{۳}}{\varepsilon_{\circ}}$$

۲۴ـ گزینه «۳» با توجه به مثال ۲۶ در متن درس شدت میدان الکتریکی در اطراف یک بار خطی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{E}=\frac{\rho_L}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}[\cos\alpha-\cos\beta]\hat{a}_r+\frac{\rho_L}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}[\sin\alpha-\sin\beta]\hat{a}_z$$

در این مسأله شدت میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار خطی بالایی و پایینی به صورت زیر خواهد بود:



$$\begin{cases}\vec{E}_۱=\frac{\rho_L}{۴\pi\in_{\circ}r}[۱-\frac{h}{\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}}]\hat{a}_r+\frac{\rho_L}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}[۰-\frac{r}{\sqrt{r^{۲}+h^{۲}}}]\hat{a}_z\\ \vec{E}_۲=\frac{\rho_L}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}[۱-\frac{h}{\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}}]\hat{a}_r+\frac{\rho_L}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}[\frac{r}{\sqrt{r^{۲}+h^{۲}}}]\hat{a}_z\end{cases}\Rightarrow\vec{E}=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲=\frac{\rho_L}{۲\pi\varepsilon_{\circ}r}[۱-\frac{h}{\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}}]\hat{a}_r$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۵ـ گزینه «۱» با توجه به مطالب مطرح شده در بحث خطوط میدان الکتریکی معادله خطوط جریان از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y} \Rightarrow \frac{dx}{\sin y}=\frac{dy}{\cos y} \Rightarrow dx=\text{tgy}\,dy$$

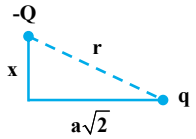
$$x+c=-\ln(\cos y) \Rightarrow \ln(\cos y)=-(x+c) \quad , \quad \cos y=e^{-(x+c)}$$

۲۶ـ گزینه «۲» بار الکتریکی کل درون سطح کروی فرضی به شعاع $(r>b)r$ از رابطه مقابل به دست می‌آید: $Q_{in}=Q+4\pi a^2\rho_{sa}+4\pi b^2\rho_{sb}$

بنابراین از قانون گاوس نتیجه می‌شود:

$$\vec{D}=\frac{Q_{in}}{4\pi r^2}\hat{a}_r=\frac{Q+4\pi a^2\rho_{sa}+4\pi b^2\rho_{sb}}{4\pi r^2}\hat{a}_r=(\frac{Q}{4\pi r^2}+\rho_{sa}\frac{a^2}{r^2}+\rho_{sb}\frac{b^2}{r^2})\hat{a}_r$$

۲۷ـ گزینه «۱» اگر فرض کنیم ذره $-Q$ به اندازه x در راستای محور z جابجا شده باشد، نیروی وارد بر آن از طرف بارهای q چنین خواهد بود:



$$\vec{F}=4\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\text{Cos}\alpha(-\hat{a}_z)$$

$$|\vec{F}|=\frac{qQ}{\pi\varepsilon_\circ(2a^2+x^2)}(\frac{x}{\sqrt{2a^2+x^2}})$$

برای مقادیر کوچک x می‌توان چنین نوشت:

$$|\vec{F}|=\frac{qQx}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_\circ a^3}$$

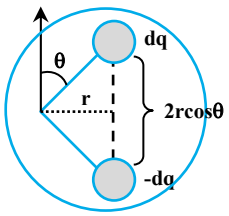
چنانچه $F=kx$ باشد، پریود نوسانات از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$k=\frac{qQ}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_\circ a^3} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_\circ ma^3}{qQ}}$$

۲۸ـ گزینه «۳»



با در نظر گرفتن جزء دیفرانسیلی dq و قرینه آن نسبت به صفحه xy خواهیم داشت:

$$dp=(dq)(2r\cos\theta)=(\rho_\circ\cos\theta\, r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi dr)(2r\cos\theta)=2\rho_\circ r^3\cos^2\theta\,\sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$p=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}\int_\circ^{a}2\rho_\circ r^3\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta d\varphi\, dr=4\pi\rho_\circ[\frac{a^4}{4}][-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_\circ^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\rho_\circ a^4}{3}\hat{z}$$

۲۹ـ گزینه «۱» با استفاده از قانون گاوس خواهیم داشت:

$$\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{L}D(rd\varphi dz)=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{L}\int_\circ^{r}r^2e^{-2r}drd\varphi dz \Rightarrow (2\pi rL)D=(2\pi L)[-\frac{1}{2}r^2e^{-2r}\frac{r}{2}e^{-2r}-\frac{1}{4}e^{-2r}]_\circ^r$$

$$(2\pi rL)D=2\pi L[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r^2e^{-2r}-\frac{r}{2}e^{-2r}-\frac{1}{4}e^{-2r}] \Rightarrow D=\frac{1}{4r}-\frac{1}{2}re^{-2r}-\frac{1}{2}e^{-2r}-\frac{1}{4r}e^{-24}$$

به ازای $r=\frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

$$D=\frac{1}{2}-\frac{5}{4e}$$

۳۰ـ گزینه «۱» طبق شکل دیفرانسیلی قانون گاوس می‌توان رابطه بین میدان الکتریکی $\vec{E}$ و چگالی بار حجمی ρ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2(A\frac{e^{-\frac{r}{r_\circ}}}{r})]=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[Are^{-\frac{r}{r_\circ}}]=\frac{1}{r^2}[Ae^{-\frac{r}{r_\circ}}-\frac{Ar}{r_\circ}e^{-\frac{r}{r_\circ}}] \Rightarrow \rho=\frac{A\varepsilon_\circ}{r^2}[e^{-\frac{r}{r_\circ}}-\frac{r}{r_\circ}e^{-\frac{r}{r_\circ}}]$$

کل بار Q برابر انتگرال چگالی بار حجمی در کل فضا است:

$$Q=\int_\circ^{\infty}\rho(4\pi r^2dr)=4\pi A\varepsilon_\circ\int_\circ^{\infty}[e^{-\frac{r}{r_\circ}}-\frac{r}{r_\circ}e^{-\frac{r}{r_\circ}}]dr=\circ$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۱ـ گزینه «۳» به نظر می‌رسد صورت مسأله اشتباه باشد. اگر فرض کنیم پوسته نیمکره‌ای در $z>0$ بوده و صفحه $z=0$ رسانا باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\vec{P}=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\rho_s R^2\sin\theta\,d\theta dy)(2R\cos\theta)=2\rho_s\pi R^3$$

۳۲ـ گزینه «۴» با استفاده از شکل دیفرانسیل در ناحیه $r\le a$ قانون گاوس داریم:

$$\rho=\vec{\nabla}.\vec{D}=\varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{E}=\varepsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)=\varepsilon_0 r(5r+4A)$$

در ناحیه $r\ge a$ هم $\vec{\nabla}.\vec{E}=0$ و بنابراین در این ناحیه بار آزاد نداریم.

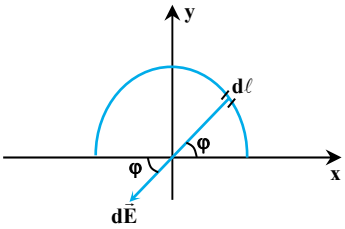
۳۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. طبق دینامیک حرکت دورانی خواهیم داشت:

$$F_e=mR\omega^2\Rightarrow\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2}=4\pi^2f^2mR$$

$$f=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{\pi\varepsilon_0mR^3}}$$

۳۴ـ گزینه «۲» تمام شار الکتریکی از وجه‌های مکعب عبور می‌کند که برابر $\frac{q}{\varepsilon_0}$ می‌باشد. بنابراین شار خالص گذرنده از هر وجه مکعب $\frac{q}{6\varepsilon_0}$ می‌باشد. زیرا بر مبنای تقارن و با توجه به این که بار در مرکز مکعب قرار دارد شار گذرنده از هر وجه با وجه دیگر برابر است.

۳۵ـ گزینه «۱» ابتدا یک عنصر دیفرانسیلی به طول $d\ell$ روی محیط دایره در نظر می‌گیریم و میدان الکتریکی ناشی از آن را در مبدأ به دست می‌آوریم:



$$d\ell=Rd\theta$$

$$d\vec{E}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0R^2}\hat{a}_r$$

$$dq=\lambda d\ell=\lambda Rd\theta$$

چون چگالی یک تابع زوج می‌باشد بنابراین میدان در مبدأ فقط مؤلفه در جهت $-\hat{a}_y$ خواهد داشت. مؤلفه‌های در جهت $\hat{a}_x$ همدیگر را خنثی می‌کنند.

همچنین چون λ در مختصات دکارتی داده شده است آن را به مختصات قطبی انتقال می‌دهیم:

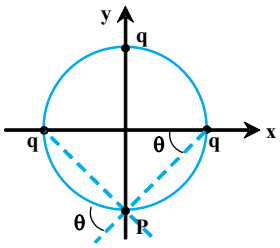
$$d\vec{E}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0R^2}\sin\varphi\hat{a}_y=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0R^2}\sin\varphi d\theta\hat{a}_y$$

$$\lambda=\lambda_0x^2\xrightarrow{x=R\cos\varphi}\lambda=\lambda_0R^2\cos^2\varphi\Rightarrow d\vec{E}=\frac{\lambda_0R}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\varphi\sin\varphi d\theta\hat{a}_y$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق روی نیم‌دایره $(0<\varphi<\pi)$ داریم:

$$|\vec{E}|=\left|\int_0^{\pi}\frac{\lambda_0R}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\varphi\sin\varphi d\theta\right|=\left|\frac{\lambda_0R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos^3\varphi}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{\lambda_0R}{6\pi\varepsilon_0}$$

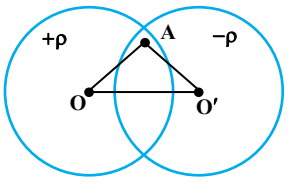
۳۶ـ گزینه «۳»



طبق شکل، مؤلفه‌های نیروی وارد بر بار قرار گرفته در $(0,-R)$ طوری هستند که مؤلفه‌ای در راستای $\hat{x}$ وجود نخواهد داشت. لذا داریم:

$$F=\frac{kq^2}{(2R)^2}+\frac{2kq^2}{(\sqrt{2}R)^2}\sin\theta=\frac{kq^2}{4R^2}+\frac{2kq^2}{2R^2}\frac{R}{\sqrt{2}R}=\frac{kq^2}{R^2}(2+\frac{1}{\sqrt{2}})$$

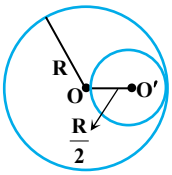
۳۷ـ گزینه «۳» طبق رابطه زیر می‌توانیم میدان در مرکز حفره را به دست آوریم، اگر هندسه به صورت مقابل باشد خواهیم داشت:



$$\vec{E}_A=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

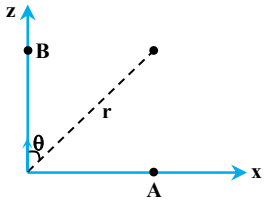
www.modaresanesharif.ac.ir



بنابراین می‌توان نوشت:

$$|\vec{E}|=\frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\frac{R}{2}=\frac{\rho R}{6\varepsilon_\circ}$$

۳۸ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم که نقاط A و B از دو قطبی الکتریکی خیلی دور می‌باشند. میدان الکتریکی در نقاط دور برای یک دو قطبی الکتریکی به صورت زیر می‌باشد.



$$\vec{E}=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_\circ r^3}[2\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta]$$

در نقطه B داریم $\theta=\circ$ بنابراین:

$$\vec{E}_B=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_\circ r^3}(2\hat{a}_r)$$

در نقطه A داریم $\theta=\frac{\pi}{2}$ بنابراین:

$$\vec{E}_A=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_\circ r^3}(\hat{a}_\theta)$$

نسبت دو میدان برابر است با:

$$\frac{|\vec{E}_B|}{|\vec{E}_A|}=2$$

۳۹ـ گزینه «۱» با توجه به چگالی بار درون کره نتیجه می‌گیریم که در ناحیه $z>\circ$ بارهای مثبت و در $z<\circ$ بارهای منفی قرار دارند. جهت گشتاور دو قطبی از سمت بار منفی به سمت بار مثبت می‌باشد بنابراین گشتاور دو قطبی این کره در راستای مثبت محور z ها می‌باشد. مقدار بار قرار گرفته در نیم‌کره بالایی برابر است با: (چون علاقه داریم بار درون نیم‌کره‌ی بالا را به دست آوریم $\theta=\circ\cdots\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.)

$$q=\iiint\rho dV=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}\int_\circ^{R}\rho_\circ r\cos\theta r^2\sin\theta d\theta dr d\varphi=2\pi\frac{R^4}{4}\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_\circ^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^4}{4}$$

بنابراین گشتاور مغناطیسی برابر است با:

$$\vec{P}=qd\hat{a}_z=\frac{\pi R^4}{4}\times R\hat{a}_z=\frac{\pi}{4}R^5\hat{a}_z$$

۴۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. نیم‌کره در ناحیه $z>\circ$ دارای بار مثبت و نیم‌کره در ناحیه $z<\circ$ دارای بار منفی می‌باشد که اندازه بار آن‌ها با هم برابر می‌باشد و چون به بار روی نیم‌کره‌ی بالایی علاقه داریم $\circ<\theta<\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

$$q=\int_s\sigma_\circ\cos\theta ds=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}\sigma\cos\theta a^2\sin\theta d\theta d\varphi\Rightarrow q=2\pi\sigma_\circ a^2\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_\circ^{\frac{\pi}{2}}=\pi\sigma_\circ a^2$$

گشتاور دوقطبی به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\vec{P}=q\vec{d}=\pi\sigma_\circ a^2\times a\hat{a}_z=\pi\sigma_\circ a^3\hat{a}_z$$

۴۱ـ گزینه «۴» با حل معادله خط خواهیم داشت:

$$\vec{r}\times\hat{x}=-5\hat{z}\ \Rightarrow\ [x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}]\times\hat{x}=-5\hat{z}$$

$$\begin{cases}y=5\\z=\circ\end{cases}$$

فاصله نقطه (۴ و ۵ و ۲) از خط به معادله $\begin{cases}y=5\\z=\circ\end{cases}$ برابر $r=4$ می‌باشد. بنابراین:

$$\vec{E}=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ r}\hat{r}=\frac{1}{8\pi}\hat{r}$$

در نقطه مورد نظر بردار $\hat{r}$ برابر $\hat{z}$ می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۲ـ گزینه «۳» شدت میدان الکتریکی ناشی از هر کدام از نیم حلقه‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{E}_+ = \int_{0}^{\pi} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{-a\hat{a}_r + z\hat{a}_z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \quad , \quad \vec{E}_- = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{a\hat{a}_r - z\hat{a}_z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

با تجزیه بردار $\hat{a}_r$ خواهیم داشت:

$$\hat{a}_r = \cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$dq = \rho_L dL = \rho_L (a d\varphi) = q a d\varphi$$

بنابراین داریم:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q a^2}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\int_{0}^{\pi} -\mathrm{Sin}\varphi\, d\varphi\,\hat{a}_y + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{Sin}\varphi\, d\varphi\,\hat{a}_y\right\}$$

$$\vec{E} = \frac{-4 q a^2}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_y \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{a^2 q}{\pi\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۴۳ـ گزینه «۲» میدان الکتریکی ناشی از حلقه دایره‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad |\vec{F}| = |\vec{E}q| = \frac{\lambda q a z}{2\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

با فرض $a >> z$ خواهیم داشت:

$$|\vec{F}| \simeq \frac{\lambda q a z}{2\varepsilon_0 a^3} \simeq \frac{\lambda q}{2\varepsilon_0 a^2} z = kz$$

در این صورت پریود نوسانات به صورت مقابل خواهد بود:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi a\sqrt{\frac{4 m \varepsilon_0}{\lambda q}}$$

۴۴ـ گزینه «۲» گشتاور دو قطبی یک توزیع بار به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{P} = \int_v \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv'$$

بنابراین با توجه به داده‌های مسأله خواهیم داشت:

در اینجا

$$\begin{cases} \vec{r}' = z\hat{k} \\ \rho(\vec{r}) = \rho(z) = a(z - \frac{l}{2}) \\ dv' = A dz \end{cases} \Rightarrow \vec{P} = \hat{k}\int_0^l z a(z-\frac{l}{2}) A dz = \hat{k} a A \int_0^l z(z-\frac{l}{2})dz = \hat{k} a A (\frac{1}{3}l^3 - \frac{1}{4}l^3) \Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{12}l^3 a A \hat{k}$$

۴۵ـ گزینه «۴» شار الکتریکی گذرنده از یک سطح از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\Phi = \int_s \vec{D}.d\vec{s}$$

ابتدا میدان الکتریکی داده شده را به مختصات استوانه‌ای انتقال می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \\ \vec{r} &= x\hat{a}_x + y\hat{a}_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$$

چون میدان در فضای آزاد قرار دارد چگالی شار الکتریکی به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{D} = \varepsilon.\vec{E} = \varepsilon_0(r\hat{a}_r + z\hat{a}_z)$$

با استفاده از رابطه شار الکتریکی داریم:

$$\Phi = \int_s \varepsilon_0(r\hat{a}_r + z\hat{a}_z).d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ را یک عنصر دیفرانسیلی بروی سطح استوانه در نظر می‌گیریم:

$$d\vec{s} = r d\theta dz \hat{a}_r \Rightarrow \Phi = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 r^2 d\theta dz = 2\pi\varepsilon_0 \ell r^2$$

۴۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. طبق قانون گاوس داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho \xrightarrow{\rho=0} \vec{\nabla}.\vec{D} = \vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

بنابراین باید ببینیم که دیورژانس کدام گزینه صفر می‌باشد.

گزینه ۱:

$$\vec{\nabla}.(2xy\hat{i} - xz\hat{j}) = 2y \neq 0$$

گزینه ۲:

$$\vec{\nabla}.(xz\hat{i} + xz\hat{j}) = z \neq 0$$

گزینه ۳:

$$\vec{\nabla}.(-xy\hat{i} + xz\hat{j}) = -y + x \neq 0$$

گزینه ۴:

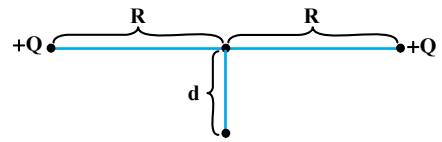
$$\vec{\nabla}.(xyzi) = yz \neq 0$$

بنابراین هیچ‌کدام از گزینه‌ها نمی‌تواند یک میدان الکتریکی باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

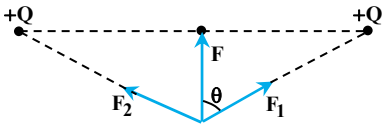
www.modaresanesharif.ac.ir

۴۷ـ گزینه «۴» فرض می‌کنیم که بار $-q$ به اندازه d روی محور yها جابه‌جا شده باشد.



نیرویی که از طرف دو بار $+q$ به بار $-q$ وارد می‌شود برابر است با:

$$|F_1|=|F_2| \quad , \quad |F|=2\cos\theta\,|F_1|$$



$$\cos\theta=\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}$$

$$\left.\begin{aligned}|F|&=2\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}|F_1|\\ |F_1|&=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_\circ(d^2+R^2)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow|F|=\frac{dqQ}{2\pi\varepsilon_\circ(d^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

با فرض $d\ll R$ داریم:

$$|F|=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_\circ R^3}d\Rightarrow k=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_\circ R^3}$$

که k برابر با ثابت فنری است که از مقایسه‌ی قانون هوک $F=kx$ با نیروی به دست آمده می‌توان آن را نوشت.

فرکانس زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\left(\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_\circ mR^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۴۸ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از شکل دیفرانسیلی قانون گاوس داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho\Rightarrow\vec{\nabla}.(\varepsilon_\circ\vec{E})=\vec{\nabla}.(\varepsilon_\circ kr^4\hat{a}_r)=\rho$$

با استفاده از شکل دیورژانس در مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$\rho=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2(\varepsilon_\circ kr^4)=\frac{1}{r^2}6k\varepsilon_\circ r^5=6k\varepsilon_\circ r^3$$

۴۹ـ گزینه «۴» شدت الکترومغناطیس (مقدار توان بر واحد سطح) برابر است با:

$$I=\frac{Cn\varepsilon_\circ}{2}|E|^2$$

که n ضریب شکست ماده، $\varepsilon_\circ$ گذردهی خلأ، C سرعت نور و $|E|$ اندازه میدان الکتریکی است. چون تنها قطبش خطی در نظر گرفته شده است.

$$I=\frac{Cn\varepsilon_\circ}{2}\times2|E_L|^2$$

چرا که $E_L=(\sqrt{2})^{-1}E$

$$\Rightarrow E_L=699/58$$

$$\left(C=3\times10^8\frac{m}{s},\ I=1300\frac{w}{m^2},\ n=1,\ \varepsilon_\circ=8/85\times10^{-12}\right)$$

۵۰ـ گزینه «۳» با فرض پایستار بودن انرژی، انرژی جنبشی اولیه پروتون متحرک تماماً صرف می‌شود تا دو پروتون کمترین فاصله از یکدیگر را داشته باشند.

انرژی جنبشی شروع حرکت دستگاه پروتون‌ها:

$$E_1=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}\times2\times10^{-27}\,(kg)\times9\times10^6\,(\frac{m}{s})^2=9\times10^{-21}\,(\frac{kgm^2}{s^2})$$

انرژی پتانسیل الکتریکی در نزدیک‌ترین حالت بین پروتون‌ها که k برابر $\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}$ است.

$$E_2=k\frac{q_1q_2}{r}=9\times10^9\times\frac{(1/6\times10^{-19})^2}{r}=9\times10^{-29}\times2/56\frac{1}{r}$$

$$E_1=E_2\Rightarrow9\times10^{-21}=9\times10^{-29}\times\frac{2/56}{r}\Rightarrow r=2/56\times10^{-8}\,(m)\approx26nm$$

www.modaresanesharif.ac.ir

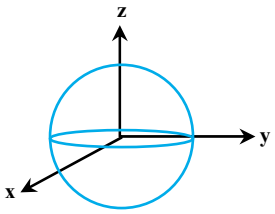
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل سوم

«پتانسیل الکتریکی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ کره رسانایی به شعاع R و بار Q را مطابق شکل از مقطع در صفحه xy به دو نیم کره تقسیم می‌کنیم. چه مقدار نیرو در راستای z به هر یک از دو نیم کره باید وارد شود تا همچنان در کنار یکدیگر قرار گیرند؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}$

۲) $\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$

۳) $\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$

۴) $\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

۲ـ کره‌ای از دی‌الکتریک با ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon = 2\varepsilon_0$، به شعاع a چگالی بارحجمی ثابت ρ ساخته شده است. پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

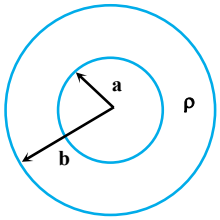
۱) $\frac{a^2\rho}{12\varepsilon_0}$

۲) $\frac{a^2\rho}{4\varepsilon_0}$

۳) $\frac{5a^2\rho}{6\varepsilon_0}$

۴) $\frac{5a^2\rho}{12\varepsilon_0}$

۳ـ انرژی لازم برای ایجاد یک لایه کروی بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت ρ در ناحیه $a < r < b$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری۸۲)



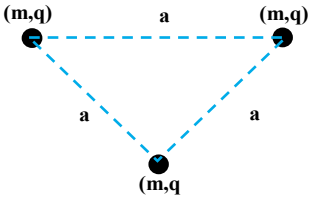
۱) $W = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}(b^3 - a^3)$

۲) $W = (\frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0})(b^3 - a^3)\varepsilon_0$

۳) $W = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[(\frac{4\pi}{3\varepsilon_0})(b^3 - a^3)\rho\right]^2$

۴) $W = (\frac{2\pi\rho^2}{15\varepsilon_0})(3a^5 + 2b^5 - 5a^3b^2)$

۴ـ در فضای خالی سه ذره یکسان به جرم m ، بار الکتریکی q و شعاع بسیار ناچیز بر روی سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a نگاه داشته شده‌اند. در لحظه‌ای از زمان نیروهای خارجی نگهدارنده این سه ذره حذف می‌شوند و لذا آنها از یکدیگر فاصله می‌گیرند. سرعت این ذرات در نقاط بی‌نهایت دور با کدام گزینه برابر است؟ (برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $\frac{\sqrt{3}q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 am}}$

۲) $\frac{q}{\sqrt{3\pi\varepsilon_0 am}}$

۳) $\frac{q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 am}}$

۴) $\frac{q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 am}}$

۵ـ هسته اتمی، به شعاع R و بار الکتریکی آن q است. بار به طور یکنواخت در حجم هسته توزیع شده است. انرژی الکتریکی هسته اتم کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

۲) $\frac{2q^2}{5\pi\varepsilon_0 R}$

۳) $\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$

۴) $-\frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}$

۶ـ سه کره رسانای یکسان به شعاع a در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $l\,(a << l)$ قرار گرفته‌اند. در ابتدا بار هر کره Q بوده است. یکی از کره‌ها به زمین متصل می‌شود تا به حالت تعادل برسد. بار کره زمین شده تقریباً برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر

۲) $-\frac{aQ}{l}$

۳) $-\frac{2aQ}{l}$

۴) $-\frac{a^2Q}{l^2}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

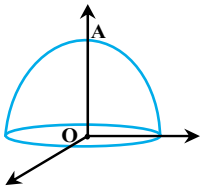
۷ـ در مختصات کروی پتانسیل الکتریکی روی سطح کره‌ای به شعاع r به مرکز مبدأ مختصات که هیچ بار الکتریکی را احاطه نمی‌کند به صورت $V = \cos^2\theta$ تغییر می‌کند. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۸ـ صفحه $y = 0$ یک رسانای کامل است. برای $y > 0$ برای پتانسیل الکتریکی داریم: $V(x,y) = V_0 e^{-ax}\sin ay$. بار موجود روی صفحه xz برای $0 < x < \infty$ و $0 < z < 1$ چقدر خواهد بود؟ (برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $-V_0\varepsilon_0$ ۲) $\frac{1}{2}V_0\varepsilon_0$ ۳) $V_0\varepsilon_0$ ۴) $-2V_0\varepsilon_0$

۹ـ نیم کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار الکتریکی سطحی یکنواخت σ است. اختلاف پتانسیل بین بالاترین نقطه نیم کره و مرکز آن، $(V_A - V_O)$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



۱) $\frac{\sigma R}{8\pi\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}(\sqrt{2}-1)$

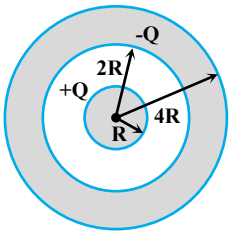
۱۰ـ ذره اول با بار Q در نقطهٔ p ثابت فرض می‌شود. ذرهٔ دوم به جرم m و بار $-2Q$ با سرعت ثابت بر روی دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز p حرکت می‌کند. کاری که باید توسط یک عامل خارجی بر روی ذرهٔ دوم انجام شود تا شعاع دایرهٔ حرکت (به مرکز p) به $r_2 = 3r_1$ افزایش یابد، کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{2Q^2}{3\pi\varepsilon_0 r_1}$ ۲) $\frac{Q^2}{3\pi\varepsilon_0 r_1}$ ۳) $\frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 r_1}$ ۴) $\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$

۱۱ـ در مرکز یک ابر کروی به شعاع R که دارای بار کل $-Q$ (پخش شده به طور یکنواخت) است، یک بار نقطه‌ای Q قرار گرفته است. پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله‌ی $\frac{R}{2}$ از مرکز کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{-3Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$ ۲) $\frac{3Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$ ۳) $\frac{5Q}{32\pi\varepsilon_0 R}$ ۴) $\frac{5Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$

۱۲ـ کره بارداری با بار حجمی یکنواخت Q و شعاع R، درون پوستهٔ کروی بارداری به شعاع داخلی $2R$ و شعاع خارجی $4R$، با بار حجمی یکنواخت $-Q$ به طور هم مرکز قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره‌ها و در ناحیه $R < r < 2R$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)



۱) $\frac{KQ}{R}$ ۲) $KQ(\frac{1}{r} - \frac{1}{3R})$

۳) $KQ(\frac{1}{r} - \frac{9}{7R})$ ۴) $KQ(\frac{1}{r} - \frac{9}{28R})$

۱۳ـ فرض کنید الکترون با بار الکتریکی $-e$ به صورت یک ابر الکتریکی کروی و متقارن با توزیع بار یکنواخت به شعاع r_0 می‌باشد. انرژی الکتریکی ساختار الکترون چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $U = -(\frac{2}{5})\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$ ۲) $U = (\frac{2}{5})\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$ ۳) $U = -(\frac{3}{5})\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$ ۴) $U = (\frac{3}{5})\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$

۱۴ـ نسبت انرژی الکتریکی W لازم برای تشکیل یک لایه بار الکتریکی در فضای خالی بین دو سطح کروی $r = a$ و $r = 2a$ با چگالی حجمی ثابت ρ_0 به کل بارالکتریکی Q موجود در لایه چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{W}{Q} = \frac{15}{24}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{W}{Q} = \frac{47}{70}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{W}{Q} = \frac{35}{48}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{W}{Q} = \frac{31}{35}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$

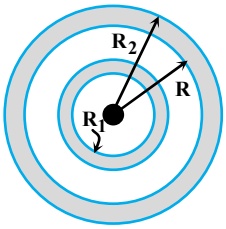
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۵ـ نسبت عددی خود- انرژی الکترواستاتیکی (self- electro static energy) یک کره باردار الکتریکی در حالتی که بارآن به‌طور کاملاً یکنواخت و ثابت در سرتاسر حجم آن توزیع شده باشد نسبت به حالتی که همان مقدار بار با چگالی حجمی خطی نسبت به شعاع $(\rho \propto r)$ روی همان کره توزیع شده باشد، چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۲۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۲۰}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۵}{۳۶}$

۱۶ـ ضریب پتانسیل $P_{۱۱}$ و $P_{۲۲}$ برای پیکربندی شکل مقابل کدام است؟ (پیکربندی شامل یک کره رسانا به شعاع $R_۱$، بار الکتریکی $Q_۱$ و یک پوسته کروی رسانای هم‌مرکز با آن به شعاع داخلی R و شعاع خارجی $R_۲$ با بار الکتریکی $Q_۲$ می‌باشد.) (فیزیک ـ سراسری ۸۸)



۱) $P_{۱۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{R_۱}$ ، $P_{۲۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{R_۲}$

۲) $P_{۱۱}=P_{۲۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}-\frac{۱}{R}]$

۳) $P_{۱۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{R_۱}$ ، $P_{۲۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}-\frac{۱}{R}]$

۴) $P_{۱۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}-\frac{۱}{R}]$ ، $P_{۲۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{R_۲}$

۱۷ـ بارهای نقطه‌ای Q_i در نقاط $(x_i,۰,۰)$ طوری قرار گرفته‌اند که $Q_i=\frac{۴\pi\varepsilon_۰}{۲^i}C$ و $x_i=۲^i m$ باشد. $i=۰,۱,۲...$، با در نظر گرفتن مرجع ولتاژ در بی‌نهایت برابر با صفر، میزان ولتاژ را در مبدأ مختصات به دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{۳}{۴}V$ ۲) $\frac{۴}{۳}V$ ۳) $\frac{۳}{۲}V$ ۴) $\frac{۲}{۳}V$

۱۸ـ با به‌دست آوردن تفاوت جزئی پتانسیل مابین دو نقطه A و B در میدان الکتریکی: $\vec{E}=۲e^{۲x-۳y+۴z}(-۲\hat{a}_x+۳\hat{a}_y-۴\hat{a}_z)$ در حالی‌که در مختصات استوانه‌ای B برابر با $(۰,۰^\circ,۰)$ و A برابر با $(۱۰^{-۳},\phi,۱۰^{-۴})$ می‌باشند، ϕ را برای حداکثر مقدار ΔV تعیین نمایید. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\phi=\arctan(۱/۵)$ ۲) $\phi=\arctan(-۲/۵)$ ۳) $\phi=\arctan(۲/۵)$ ۴) $\phi=\arctan(-۱/۵)$

۱۹ـ در دستگاه مختصات کروی روی سطح مخروط $\theta=\frac{\pi}{۶}$، برای $۰<r<a$ بار سطحی الکتریکی غیریکنواخت با چگالی $\rho_s=r^۲$ کولن بر مترمربع توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات کدام است؟ (مرجع پتانسیل در بی‌نهایت فرض می‌شود.) (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{a^۲}{۱۲\varepsilon_۰}$ ۲) $\frac{a^۳}{۶\varepsilon_۰}$ ۳) $\frac{a^۳}{۱۲\varepsilon_۰}$ ۴) $\frac{a^۲}{۶\varepsilon_۰}$

۲۰ـ در فضای خالی در ناحیه $۰\le r\le a$ و $۰\le\varphi<۲\pi$ و $|z|<h$ از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای بارهای الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت ρ توزیع شده‌اند. پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بار در محل مبدأ مختصات یک ولت است. اگر a و h هر دو نصف شوند ولی ρ بدون تغییر بماند، آنگاه پتانسیل الکتریکی در محل مبدأ مختصات چند ولت خواهد بود؟ (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۱

۲۱ـ انرژی الکتریکی ذخیره شده در کره‌ای به شعاع R و با چگالی بار شعاعی $\rho(r)=\beta r$ (β عددی ثابت است) کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi\beta^۲R^۷}{۷\varepsilon_۰}$ ۲) $\frac{۳\beta^۲R^۸}{۴\pi\varepsilon_۰}$ ۳) $\frac{\beta^۲\varepsilon_۰R^۷}{۴\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۲\pi\varepsilon_۰}(\beta R^۳)^۲$

۲۲ـ کره‌ای باردار با بار یکنواخت به میزان کل $-Q$ و شعاع a در دست است. مرکز کره منطبق بر مرکز مختصات می‌باشد. اگر پتانسیل در $r=a$ برابر با صفر باشد، پتانسیل را در $r<a$ تعیین نمائید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $V=\frac{Q}{۸\pi\varepsilon_۰}[\frac{۱}{a}-\frac{r^۲}{a^۲}]$ ۲) $V=\frac{Q}{۸\pi\varepsilon_۰}[\frac{r^۲}{a^۳}-\frac{۱}{a}]$ ۳) $V=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰}[\frac{r^۲}{a^۳}-\frac{۱}{a}]$ ۴) $V=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰}[\frac{۱}{a}-\frac{r^۲}{a^۳}]$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۳ـ اگر چگالی بار حجمی $\rho = \rho_\circ \frac{a}{r}$ در مختصات کروی داده شده باشد، پتانسیل V را با فرض $V = \circ$ در $r = ۱\circ$ تعیین نمایید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $V = \frac{a\rho_\circ}{۲\varepsilon_\circ}(۱\circ - r)$ ۲) $V = \frac{a\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(۱\circ - r)$ ۳) $V = \frac{a\rho_\circ}{۲\varepsilon_\circ}(۱\circ\circ - r^۲)$ ۴) $V = \frac{a\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(۱\circ\circ - r^۲)$

۲۴ـ به‌دست آورید کار انجام شده در حرکت بار یک کولن از نقطه $(۲,۱,-۱)$ به نقطه $(۸,۲,-۱)$ در میدان $\bar{E} = y\bar{a}x + x\bar{a}y$ و در امتداد منحنی هذلولی $x = \frac{۸}{۷ - ۳y}$. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $W = ۱۴J$ ۲) $W = -۱۴J$ ۳) $W = ۱۲J$ ۴) $W = -۱۲J$

۲۵ـ بار خطی $\rho_\ell \frac{c}{m}$ به طول ℓ به طور موازی با یک صفحه بی‌نهایت بزرگ با بار سطحی $\rho_s \frac{c}{m^۲}$ به فاصله a از آن قرار دارد. چه میزان کار لازم است تا بار خطی را چرخانده و در حالت عمود بر صفحه قرار داد. فرض نمائید در حالت اخیر، حداقل فاصله بار خطی از صفحه برابر a باشد. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $W = -\frac{\rho_\ell \rho_s \ell^۲}{۴\varepsilon_\circ}$ ۲) $W = \frac{\rho_\ell \rho_s \ell^۲}{۴\varepsilon_\circ}$ ۳) $W = \frac{-\rho_\ell \rho_s \ell^۲}{۲\varepsilon_\circ}$ ۴) $W = \frac{\rho_\ell \rho_s \ell^۲}{۲\varepsilon_\circ}$

۲۶ـ کار انجام شده برای آن‌که در یک کره به شعاع R بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho_\circ$ جمع شود، چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{۴\pi\rho_\circ R^۵}{۱۵\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{۴\pi\rho_\circ^۲ R^۵}{۱۵\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{۴\pi\rho_\circ R^۵}{۱۵\varepsilon_\circ^۲}$ ۴) $\frac{۴\pi^۲\rho_\circ^۲ R^۵}{۱۵\varepsilon_\circ^۲}$

۲۷ـ تابع پتانسیل $\phi = ۲x + ۴y$ در فضای آزاد مفروض است. انرژی ذخیره شده در همه فضا و چگالی انرژی به ترتیب برابرند با: (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $۱\circ\varepsilon_\circ$, ∞ ۲) $\circ$, ∞ ۳) ∞ , ∞ ۴) $\circ$, $\sqrt{۲\circ}$

۲۸ـ بار حجمی یکنواخت با چگالی ثابت $\rho_\circ$ کولن بر مترمکعب، در حجمی به شکل نیم‌کره به شعاع a توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای از قاعدهٔ نیمکره به فاصلهٔ $\frac{a}{۲}$ از مرکز نیمکره چند ولت است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۱۱}{۴۸}\frac{\rho_\circ a^۲}{\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۴}\frac{\rho_\circ a^۲}{\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{۳}{۲۴}\frac{\rho_\circ a^۲}{\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{۳}{۴۸}\frac{\rho_\circ a^۲}{\varepsilon_\circ}$

۲۹ـ توزیعی از بار الکتریکی در فضای سه بعدی پتانسیل الکتریکی با تقارن کروی $V(r) = V_\circ \frac{e^{-k_\circ r}}{k_\circ r}$ را به وجود آورده است. مقدار کل بار الکتریکی این توزیع بار کدام است؟ $V_\circ$ و $k_\circ$ مقادیر ثابت مثبتی هستند. (فیزیک ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) $-۴\pi\varepsilon_\circ \frac{V_\circ}{k_\circ}$ ۳) $۸\pi\varepsilon_\circ \frac{V_\circ}{k_\circ}$ ۴) $۴\pi\varepsilon_\circ \frac{V_\circ}{k_\circ}$

۳۰ـ بار الکتریکی Q به‌طور یکنواخت درون حجم کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. انرژی کل الکتروستاتیکی حاصل از میدان الکتریکی که این توزیع بار در فضای اطراف خود از مرکز کره تا بی‌نهایت ایجاد می‌کند را برابر U_{es} می‌گیریم. انرژی کل خود دافعه کولنی که لایه‌های مختلف این کره باردار به وجود می‌آورند را U_{sr} می‌گیریم. تفاوت این دو انرژی $\Delta U = U_{es} - U_{sr}$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) $-\frac{۲}{۵}\frac{Q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$ ۳) $\frac{۲}{۵}\frac{Q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$ ۴) $\frac{Q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$

۳۱ـ روی سطح کروی و سطح قاعده نیم‌کره‌ای به شعاع $r = a$ و $\circ \le \varphi \le ۲\pi$ و $\circ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ در فضای آزاد، بار الکتریکی سطحی به چگالی ثابت ρ_s قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات برابر است با: (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $-\frac{\rho_s a}{\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{۲\rho_s a}{\varepsilon_\circ}$ ۳) صفر ۴) $\frac{\rho_s a}{\varepsilon_\circ}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۲ـ دسته سطوح هم‌پتانسیل توسط رابطه $y^2 = xy + c$ بیان می‌شوند و $E_z = 0$ است. در صورتی که در نقطه $(2,5,0)$ مقدار $E_x = 20\frac{V}{m}$ باشد، رابطه $\bar{E}$ در کدام گزینه به درستی گزارش شده است؟ (بر حسب ولت بر متر) (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $\sqrt{100y-50}\hat{a}_x$ ۲) $20\hat{a}_x + 50\hat{a}_y$ ۳) $4y\hat{a}_x + (4x-8y)\hat{a}_y$ ۴) $(6y-5x)\hat{a}_x + y^2\hat{a}_y$

۳۳ـ سه بار نقطه‌ای ۱ و ۲ و ۳ کولنی به ترتیب روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع یک متر قرار گرفته‌اند. کار لازم برای این که اضلاع این مثلث به ۰/۵ متر کاهش یابند، چقدر است؟ (بر حسب ژول) (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{7}{4\pi\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{11}{4\pi\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{9}{4\pi\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{3}{\pi\varepsilon_0}$

۳۴ـ تابع پتانسیل $V = 2x + 4y$ در فضای آزاد مفروض است. انرژی ذخیره شده در همه فضا و چگالی انرژی الکتریکی به ترتیب برابرند با: (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) ∞ و ∞ ۲) ∞ و $10\varepsilon_0$ ۳) ∞ و صفر ۴) $\sqrt{20}$ و $10\varepsilon_0$

۳۵ـ یک مکعب دارای یک پتانسیل ثابت الکتریکی V بر روی یکی از وجه‌هایش می‌باشد. اگر هیچ بار الکتریکی در داخل مکعب وجود نداشته باشد، پتانسیل در مرکز مکعب چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{V}{2}$ ۲) $\frac{V}{6}$ ۳) $\frac{V}{\sqrt{3}}$ ۴) V

۳۶ـ یک میله باردار به طول L در نظر بگیرید که بار Q در سرتاسر آن به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در یک نقطه روی محور میله و به فاصله L از یک انتهای آن چه مضربی از $(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L})$ می‌باشد؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\ln 2$

۳۷ـ یک میله پلاستیکی به شکل دایره‌ای به شعاع R درآمده است. در طول ربع محیط دایره بار مثبت Q و در طول بقیه محیط دایره بار منفی $(-\sigma Q)$ به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مرکز دایره برابر است با: (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{-5Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ ۲) $\frac{+5Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ ۳) $\frac{-5Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ ۴) $\frac{+5Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ گزینه «۱» نیروی وارد بر سطح رسانا از رابطه مقابل محاسبه می‌گردد:

$$\vec{F}=\int\frac{۱}{۲}(\frac{\sigma^۲}{\varepsilon_\circ})ds\hat{n}$$

که $\hat{n}$ بردار واحد عمود بر سطح رسانا می‌باشد.

$$\vec{F}=\frac{۱}{۲}(\frac{\sigma^۲}{\varepsilon_\circ})\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}R^۲\sin\theta d\theta d\varphi(\hat{a}_R)$$

با تجزیه بردار $\hat{a}_R$ خواهیم داشت:

$$\vec{F}=\frac{R^۲}{۲\varepsilon_\circ}(\frac{Q}{۴\pi R^۲})^۲\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\sin\theta d\theta d\varphi[\sin\cos\varphi\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y+\cos\theta\hat{a}_z]$$

با توجه به رابطه $\int_\circ^{۲\pi}\cos\varphi d\varphi=\int_\circ^{۲\pi}\sin\varphi d\varphi=\circ$ خواهیم داشت:

$$\vec{F}=\frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi\hat{a}_z=\frac{Q^۲}{۳۲\pi\varepsilon_\circ R^۲}$$

۲ـ گزینه «۴» اگر جدول داده شده در صفحه ۱۸۲ متن درس این فصل را حفظ باشید، خیلی راحت می‌دانید که پتانسیل الکتریکی درون یک کره دی‌الکتریک با بار Q و شعاع $a=R$ به صورت زیر می‌باشد:

$$V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{R}(۱+\frac{\varepsilon_\circ}{۲\varepsilon}(۱-\frac{r^۲}{R^۲}))$$

چون پتانسیل الکتریکی در مرکز کره خواسته شده است، در رابطه بالا $r=\circ$ قرار می‌دهیم و هم‌چنین به جای $\varepsilon=۲\varepsilon_\circ$ و $Q=\rho\frac{۴}{۳}\pi a^۳$، بنابراین داریم:

$$V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{\rho\frac{۴}{۳}\pi a^۳}{a}(۱+\frac{۱}{۴})=\frac{۵\rho a^۲}{۱۲\varepsilon_\circ}$$

۳ـ گزینه «۴» برای به دست آوردن انرژی لازم برای ایجاد لایه بار الکتریکی باید انرژی ذخیره شده در محیط را به دست آوریم که از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$W_e=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ\iiint|\vec{E}|^۲\,dv$$

ابتدا باید میدان الکتریکی در کل فضا را به دست آوریم. با استفاده از قانون گاوس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{E}=\begin{cases}\circ & r<a\\ \frac{\frac{۴}{۳}\pi(r^۳-a^۳)\rho}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\hat{a}_r & a<r<b\\ \frac{\frac{۴}{۳}\pi(b^۳-a^۳)\rho}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\hat{a}_r & b<r\end{cases}$$

با قرار دادن میدان در رابطه W_e و انتگرال گرفتن از کل فضا داریم:

$$W_e=\frac{۱}{۲\varepsilon_\circ}\int_a^b\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\pi}|\frac{r^۳-a^۳}{۳\varepsilon_\circ r^۲}|^۲\rho^۲r^۲\sin\theta d\theta d\varphi dr+\frac{۱}{۲\varepsilon_\circ}\int_b^\infty\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\pi}|\frac{b^۳-a^۳}{۳\varepsilon_\circ r^۲}|^۲\rho^۲r^۲\sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$W_e=\frac{۲\pi\rho^۲}{۹\varepsilon_\circ}[\int_a^b\frac{(r^۳-a^۳)^۲}{r^۲}dr+\int_b^\infty\frac{(b^۳-a^۳)^۲}{r^۲}dr\Rightarrow W_e=(\frac{۲\pi\rho^۲}{۱۵\varepsilon_\circ})(۳a^۲+۲b^۲-۵a^۳b^۲)$$

این تست را می‌توانستیم با استفاده از رابطه $dw_e=V_idQ_i$ که در قسمت انرژی الکتروستاتیک توزیع بار پیوسته در متن درس توضیح دادیم به دست آوریم که به صورت زیر می‌باشد.

$$W=\int\Phi dq\quad\text{و}\quad\Phi=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi(r^۳-a^۳)\rho}{۴\pi\varepsilon_\circ r}\qquad a<r<b$$

$$dq=۴\pi r^۲\rho dr\quad\text{و}\quad W=\int_{r=a}^{r=b}dW=\frac{۲\pi\rho^۲}{۱۵\varepsilon_\circ}(۳a^۵+۲b^۵-۵a^۳b^۲)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴ـ گزینه «۴» انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم صرف انرژی جنبشی هر سه گلوله می‌گردد. یعنی:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i\,\Phi_i = 3\times\frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 3(q\,\frac{2q}{4\pi\varepsilon_\circ a}) = \frac{3}{2}mV^2 \Rightarrow V = \frac{q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_\circ ma}}$$

۵ـ گزینه «۳» این تست مانند تست شماره ۳ حل می‌شود فقط باید $b = R, a = \circ$ را در جواب آن قرار بدهیم. چون به جای یک لایه کروی یک کره کامل به شعاع R داریم که نتیجه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$W_e = \frac{2\pi\rho^2}{15\varepsilon_\circ}(3a^5 + 2b^5 - 5a^3b^2)\Big|_{\substack{b=R\\a=\circ}} \Rightarrow W_e = \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_\circ}$$

با توجه به اینکه مقدار بار q به طور یکنواخت در کره پخش شده است بنابراین چگالی آن برابر است با:

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

با قرار دادن ρ در رابطه W_e داریم:

$$W_e = \frac{4\pi(\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3})^2R^5}{15\varepsilon_\circ} = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_\circ R}$$

۶ـ گزینه «۳» اگر بار کره زمین شده را q' فرض نماییم و پتانسیل ناشی از q' و بارهای دو کره دیگر را روی کره زمین شده محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$V = \circ = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_\circ a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ L} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ L} \Rightarrow q' = \frac{-2aQ}{L}$$

۷ـ گزینه «۲» پتانسیل در مرکز کره میانگین پتانسیل روی سطح کره است:

$$V_\circ = \frac{1}{4\pi}\int V d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3}$$

۸ـ گزینه «۱» از رابطه بین میدان الکتریکی ناشی از یک صفحه فلزی و چگالی سطحی آن استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{\rho_s}{\varepsilon_\circ}\hat{a}_n \Rightarrow \rho_s = \varepsilon_\circ\vec{E} = \varepsilon_\circ(-\vec{\nabla}\vec{V}) = -\varepsilon_\circ V_\circ[-a\sin ay\hat{a}_x + a\cos ay\hat{a}_y]e^{-ax} \Rightarrow \rho_s\,|_{y=\circ} = -\varepsilon_\circ V_\circ a e^{-ax}$$

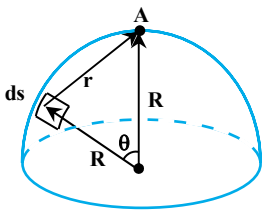
$$Q_f = \int_\circ^1\int_\circ^\infty \rho_s ds = \int_\circ^1\int_\circ^\infty -\varepsilon_\circ V_\circ a e^{-ax}dxdz = -\varepsilon_\circ V_\circ$$

۹ـ گزینه «۴» پتانسیل در نقطه O عبارت است از:

$$V_o = \int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_\circ R} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_\circ}$$

برای محاسبه پتانسیل در نقطه A نیز خواهیم داشت:

$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta$$



$$r^2 = 4R^2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow r = 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

بنابراین برای اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$V_A = \int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_\circ(2R\sin\frac{\theta}{2})} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_\circ}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_A - V_o = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_\circ}(\sqrt{2}-1)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۰ـ گزینه «۳» کار لازم برابر تفاوت انرژی سیستم در دو حالت می‌باشد. طبق دینامیک حرکت دورانی خواهیم داشت:

$$|F_e| = mr\omega^2 \Rightarrow \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mr\omega^2$$

بنابراین انرژی دو حالت ذکر شده در صورت سؤال برابر خواهد بود با:

$$w_1 = \frac{1}{2}mr_1^2\omega^2 = \frac{2Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \quad ; \quad w_2 = \frac{Q^2}{12\pi\varepsilon_0 r_1} \Rightarrow |\Delta w| = \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 r_1}$$

که $|\Delta w|$ برابر اختلاف دو حالت است.

۱۱ـ گزینه «۳» با توجه به تقارن کروی، برای حل مسئله از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. ابتدا میدان را در داخل و خارج کره که به ترتیب با E_1 و E_2 نمایش داده شده‌اند، محاسبه می‌کنیم:

$$\oiint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

چون بار کره $-Q$ می‌باشد، بنابراین چگالی آن برابر است با:

$$\rho = \frac{-Q}{V} = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

اگر بخواهیم با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی E_1 در فاصله r داخل کره را پیدا کنیم، باید بار الکتریکی Q'_{in} محصور شده درون کره به شعاع r را به دست آوریم. با استفاده از چگالی به دست آمده در بالا داریم:

$$\left.\begin{aligned} Q'_{in} &= \rho V \Rightarrow Q'_{in} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \rho &= \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q'_{in} = -(\frac{r}{R})^3 Q$$

از قانون گاوس استفاده کرده و می‌نویسیم:

$$r < R \Rightarrow E_1 \oint ds = \frac{Q'_{in} + Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1(4\pi r^2) = \frac{Q - (\frac{r}{R})^3 Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$r > R \Rightarrow E_2(4\pi r^2) = \frac{Q - Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E_2 = 0$$

حال با استفاده از رابطه $\Delta V = -\int \vec{E}.d\vec{L}$ و انتخاب $r = \infty$ به عنوان مرجع پتانسیل خواهیم داشت:

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{L} = -\int_{\infty}^{R} E_2 dr - \int_{R}^{r} E_1 dr \Rightarrow V(r) = -\int_{R}^{r} E_1 dr = -\int_{R}^{r} (\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3})dr$$

پس به ازای $r = \frac{R}{2}$ می‌توان نوشت:

$$V(\frac{R}{2}) = -\int_{R}^{\frac{R}{2}} (\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3})dr = \frac{5Q}{32\pi\varepsilon_0 R}$$

۱۲ـ گزینه «۴» ابتدا باید با استفاده از قانون گاوس، میدان الکتریکی را در ناحیه خارج از پوسته کروی E_1، در ناحیه درون پوسته کروی E_2 و در ناحیه بین کره و پوسته کروی E_3 پیدا کنیم. سپس با استفاده از رابطه $V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{r}$ پتانسیل الکتریکی در نقطه r را به دست آوریم:

$$r > 4R \Rightarrow E_1 = 0$$

$$2R < r < 4R \Rightarrow \varepsilon_0 \oiint \vec{E}_2.d\vec{s} = Q - \frac{Q(r^3 - 8R^3)}{56R^3}$$

$$E_2 = \frac{KQ}{r^2} - \frac{KQr}{56R^3} + \frac{KQ}{7r^2} \qquad (K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0})$$

$$R < r < 2R \Rightarrow \varepsilon_0 \oiint \vec{E}_3.d\vec{s} = Q \Rightarrow E_3 = \frac{KQ}{r^2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

$$V(r)-V(\infty)=-\int_{\infty}^{r}\vec{E}.d\vec{r}=-\int_{\infty}^{۴R}\vec{E}_۱.d\vec{r}-\int_{۴R}^{۲R}\vec{E}_۲.d\vec{r}-\int_{۲R}^{r}\vec{E}_۳.d\vec{r}$$

بنابراین با محاسبه انتگرال‌های فوق داریم:

$$V(r)-۰=\frac{KQ}{r}-\frac{۹KQ}{۲۸R}\Rightarrow V(r)=KQ(\frac{۱}{r}-\frac{۹}{۲۸R})$$

۱۳ـ گزینه «۴» می‌توان ابر کروی را دارای تقارن کروی در نظر گرفت. بنابراین اگر فرض کنیم که بار به صورت یکنواخت توزیع شده است می‌توان نتیجه گرفت که این مسئله معادل است با کره‌ای با شعاع $r_۰$ و با بار $(-e)$. پس می‌توان نوشت:

$$w=\frac{۳q^۲}{۲۰\pi\varepsilon_۰r_۰}=(\frac{۳}{۵})\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_۰r_۰}$$

۱۴ـ گزینه «۲» شدت میدان الکتریکی در نقاط مختلف طبق قانون گاوس چنین خواهد بود:

$$(b=۲a)\qquad r<a\Rightarrow\vec{E}_۱=۰$$

$$r<a<b\Rightarrow\vec{E}_۲=\frac{\frac{۴}{۳}\pi(r^۳-a^۳)\rho}{۴\pi\varepsilon_۰r^۲}\hat{r}=\frac{(r^۳-a^۳)\rho}{۳\varepsilon_۰r^۲}\hat{r}\qquad r>b\Rightarrow\vec{E}_۳=\frac{\frac{۴}{۳}\pi(b^۳-a^۳)\rho}{۴\pi\varepsilon_۰r^۲}\hat{r}=\frac{(b^۳-a^۳)\rho}{۳\varepsilon_۰r^۲}\hat{r}$$

بنابراین انرژی الکترواستاتیکی لازم از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$W=\frac{۱}{۲}\iiint\varepsilon_۰|E|^۲\,dv=\frac{۱}{۲}\int_a^b\varepsilon_۰|E_۲|^۲\,۴\pi r^۲dr+\frac{۱}{۲}\int_b^{\infty}\varepsilon_۰|E_۳|^۲\,۴\pi r^۲dr=\frac{۲\pi\rho^۲}{۱۵\varepsilon_۰}\left[۳a^۵+۲b^۵-۵a^۳b^۲\right]$$

با توجه به اینکه $b=۲a$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$W=\frac{۲\pi\rho^۲}{۱۵\varepsilon_۰}(۴۷a^۵)$$

همچنین بار کل موجود در لایه کروی برابر است با:

$$Q=\frac{۴}{۳}\pi(b^۳-a^۳)\rho=\frac{۲۸}{۳}\pi a^۳\rho\Rightarrow\frac{W}{Q}=\frac{۴۷a^۲\rho_۰}{۷۰\varepsilon_۰}$$

۱۵ـ گزینه «۱» ابتدا خود انرژی را برای کره بارداری که چگالی حجمی بار ρ ثابت است حساب می‌کنیم:

$$\rho=\frac{Q}{\frac{۴\pi}{۳}R^۳}$$

لذا برای انرژی خواهیم داشت:

$$u_۱=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰\int E^۲dV\Rightarrow u_۱=-\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰[\int_{\infty}^{R}(\frac{Q}{۴\pi r^۲\varepsilon_۰})^۲\,۴\pi r^۲dr+\int_R^{۰}(\frac{Qr}{R^۳\,۴\pi\varepsilon_۰})^۲\,۴\pi r^۲dr]$$

$$\Rightarrow u_۱=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰[(\frac{Q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰^۲}\frac{۱}{R})+\frac{Q^۲}{۴\pi R^۶\varepsilon_۰^۲}\frac{۱}{۵}R^۵]\Rightarrow u_۱=\frac{Q^۲\varepsilon_۰}{۸\pi R\varepsilon_۰^۲}\frac{۶}{۵}=\frac{۳Q^۲\varepsilon_۰}{۲۰\pi R\varepsilon_۰^۲}=\frac{۳Q^۲}{۲۰\pi\varepsilon_۰R}$$

حال خود انرژی کره باردار با چگالی بار $\rho=kr$ را به‌دست می‌آوریم:

$$u_۲=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰\int E^۲dV\Rightarrow u_۲=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰[\int_۰^R(\frac{kr^۲}{۴\varepsilon_۰})^۲\,۴\pi r^۲dr+\int_R^{\infty}(\frac{Q}{۴\pi r^۲\varepsilon_۰})^۲\,۴\pi r^۲dr]\Rightarrow u_۲=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰[(\frac{k^۲}{۱۶\varepsilon_۰^۲}۴\pi\frac{۱}{۷}R^۷)+\frac{Q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰^۲}\frac{۱}{R}]$$

بار Q را به دست می‌آوریم:

$$Q=\int_۰^R kr\,۴\pi r^۲dr=۴\pi k\frac{۱}{۴}R^۴=\pi kR^۴\Rightarrow Q=\pi kR^۴$$

$$\Rightarrow Q^۲=\pi^۲k^۲R^۸\Rightarrow k^۲=\frac{Q^۲}{\pi^۲R^۸}\Rightarrow u_۲=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰[(\frac{Q^۲}{\pi^۲R^۸۱۶\varepsilon_۰^۲}\frac{۴\pi}{۷}R^۷)+(\frac{Q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰^۲R})]$$

بنابراین نسبت خواسته شده را می‌توان به صورت ذیل محاسبه کرد.

$$u_۲=\frac{۱}{۸\pi\varepsilon_۰R}Q^۲[۱+\frac{۱}{۷}]=\frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_۰R}\frac{۸}{۷}\Rightarrow\frac{u_۱}{u_۲}=\frac{(\frac{۳Q^۲}{۲۰\pi\varepsilon_۰R})}{(\frac{۸}{۷}\frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_۰R})}=\frac{\frac{۳}{۲۰}}{\frac{۱}{۷}}=\frac{۲۱}{۲۰}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۶ـ گزینه «۴» در حقیقت در اینجا با یک خازن روبه‌رو هستیم.

$$\varphi_i = \sum_j P_{ij} Q_j$$

برای پیدا کردن V_{R_1} به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$V_{R_1} = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = -\int_{\infty}^{R_2} \vec{E}.d\vec{r} - \int_{R_2}^{R} \vec{E}.d\vec{r} - \int_{R}^{R_1} \vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R_2}\frac{dr}{r^2} - 0 - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R}^{R_1}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R}\right) \xrightarrow{\text{می‌دانیم}} \varphi_1 = P_{11}Q_1 \Rightarrow P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R}\right)$$

برای محاسبه‌ی φ_2 از ∞ تا R_2 انتگرال می‌گیریم، در این حالت خواهیم داشت:

$$\varphi_2 = -\int_{\infty}^{R_2}\vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} \Rightarrow P_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

۱۷ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال از رابطه پتانسیل الکتریکی برای بارهای گسسته استفاده می‌کنیم:

$$V = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i'|}$$

چون پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات را می‌خواهیم، بنابراین $\vec{r}=0$ می‌باشد و بردار $\vec{r}_i$ مکان بارها را مشخص می‌کند که برابر $\vec{r}' = x_i\hat{a}_x$ می‌باشد پس می‌توان نوشت: $|\vec{r}-\vec{r}_i| = x_i$

حال با قرار دادن $Q_i = \frac{4\pi\varepsilon_0}{2^i}$ و $|\vec{r}-\vec{r}_i'|$ در رابطه V داریم:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\frac{4\pi\varepsilon_0}{2^i}}{4\pi\varepsilon_0 2^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^i} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

۱۸ـ گزینه «۴»

روش اول: حداکثر تغییرات پتانسیل الکتریکی (ΔV) در جهت شدت میدان الکتریکی می‌باشد. به عبارت دیگر بردار جابجایی باید به موازات بردار شدت میدان الکتریکی باشد. $(dx,dy,dz)\|(-2,3,-4)$

بنابراین می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{dx}{-2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{-4} \Rightarrow \frac{10^{-3}\cos\varphi}{-2} = \frac{10^{-3}\sin\varphi}{3} = \frac{10^{-4}}{-4}$$

از حل معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{-3}{4\sqrt{0}}\\ \cos\varphi &= \frac{2}{4\sqrt{0}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{-3}{2} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-1/5)$$

روش دوم: ابتدا نقاط A و B را به مختصات دکارتی انتقال می‌دهیم:

$$B = (0,0^\circ,0) \rightarrow (0,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned}A &= (10^{-3},\varphi,10^{-4})\\ x &= r\cos\varphi\\ y &= r\sin\varphi\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = (10^{-3}\cos\varphi, 10^{-3}\sin\varphi, 10^{-4})$$

با توجه به میدان الکتریکی $\vec{E}$ با استفاده از رابطه $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ می‌توانیم مقدار V را به دست آوریم:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -4e^{2x-3y+4z} \Rightarrow V_1 = -2e^{2x-3y+4z} + f_1(y,z,c)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 6e^{2x-3y+4z} \Rightarrow V_2 = -2e^{2x-3y+4z} + f_2(x,z,c)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -8e^{-2x-3y+4z} \Rightarrow V_3 = -2e^{2x-3y+4z} + f_3(x,y,c)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

با مساوی قرار دادن $V_1 = V_2 = V_3$ در روابط بالا نتیجه می‌گیریم که پتانسیل الکتریکی V برابر است با:

$$V = 2e^{2x-3y+4z} + C$$

حال رابطه پتانسیل الکتریکی را داریم، پس می‌توانیم اختلاف پتانسیل بین نقطه A و B را به دست آوریم:

$$\Delta V = V(B) - V(A) = 2e^{2\times10^{-3}\cos\varphi - 3\times10^{-3}\sin\varphi + 4\times10^{-4}} - 2$$

برای این که به بیشترین مقدار ΔV برسیم، باید ریشه‌های مشتق رابطه بالا را به دست آوریم:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \varphi} = 2(-2\times10^{-3}\sin\varphi - 3\times10^{-3}\cos\varphi)e^{2\times10^{-3}\cos\varphi - 3\times10^{-3}\sin\varphi + 4\times10^{4}}$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow -2\sin\varphi - 3\cos\varphi = 0 \Rightarrow \tan\varphi = -1/5 \Rightarrow \varphi = \arctan(-1/5)$$

۱۹ـ گزینه «۳»

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_S \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad V = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r^2(r\sin\theta\, dr\, d\varphi)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_0^a \frac{r^2\sin\theta\, dr}{2\varepsilon_0}$$

به ازای $\theta = \frac{\pi}{6}$ خواهیم داشت:

$$V = \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_0^a r^2 dr = \frac{a^3}{12\varepsilon_0}$$

۲۰ـ گزینه «۲» با در نظر گرفتن جزء دیفرانسیلی dq از استوانه، پتانسیل الکتریکی در مرکز آن چنین خواهد بود:

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V = \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho r\, dr\, d\varphi dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^a\int_{-h}^{h}\frac{r\, dr dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{-h}^{h}[\sqrt{r^2+z^2}]_0^a dz = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{-h}^{h}(\sqrt{a^2+z^2}-|z|)dz$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_0^h(\sqrt{a^2+z^2}-z)dz = \frac{\rho}{\varepsilon_0}[\frac{a^2}{2}(\sinh^{-1}\frac{h}{a} + \frac{h}{a}\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a}) - \frac{h^2}{2}]$$

بدیهی است که اگر a و h هر دو نصف شوند، پتانسیل $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

۲۱ـ گزینه «۱» با استفاده از قانون گاوس، شدت میدان الکتریکی در داخل و خارج کره چنین خواهد بود:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\int_0^r \rho(4\pi r^2 dr)}{\varepsilon_0(4\pi r^2)} = \dfrac{\int_0^r(\beta r)(4\pi r^2 dr)}{\varepsilon_0(4\pi r^2)} & r<a \\ \dfrac{\int_0^R \rho(4\pi r^2 dr)}{\varepsilon_0(4\pi r^2)} = \dfrac{\int_0^R(\beta r)(4\pi r^2 dr)}{\varepsilon_0(4\pi r^2)} & r>a \end{cases} \qquad \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\beta r^2}{4\varepsilon_0} & r<a \\ \dfrac{\beta R^4}{4\varepsilon_0 r^2} & r>a \end{cases}$$

انرژی الکتریکی ذخیره شده در کره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varepsilon_0 |E|^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\beta^2 r^4}{16\varepsilon_0}(4\pi r^2 dr) + \frac{1}{2}\int_R^\infty \frac{\beta^2 R^8}{16\varepsilon_0 r^4}4\pi r^2 dr = \frac{\beta^2\pi R^7}{56\varepsilon_0} + \frac{\beta^2\pi R^7}{8\varepsilon_0} = \frac{\pi\beta^2 R^7}{7\varepsilon_0}$$

۲۲ـ گزینه «۲» طبق قانون گاوس شدت میدان الکتریکی در داخل و خارج کره چنین خواهد بود:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \dfrac{-Qr}{4\pi a^3\varepsilon_0} & r<a \\ \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>a \end{cases}$$

بنابراین پتانسیل الکتریکی برابر است با:

$$V(r) - V(a) = -\int_a^r \vec{E}.d\vec{L} = -\int_a^r \frac{-Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}dr \qquad V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}[\frac{r^2}{a^3} - \frac{1}{a}]$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۳ـ گزینه «۱» طبق قانون گاوس خواهیم داشت:

$$E=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_\circ S}=\frac{\int_\circ^r(\rho_\circ\frac{a}{r})(4\pi r^2dr)}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}=\frac{\rho_\circ a}{2\varepsilon_\circ}\Rightarrow V(r)-V(10)=-\int_{10}^r\vec{E}.d\vec{L}=-\int_{10}^r\frac{\rho_\circ a}{2\varepsilon_\circ}dr=\frac{a\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}(10-r)$$

۲۴ـ گزینه «۲» بهتر است ابتدا پتانسیل الکتریکی را محاسبه کنیم:

$$\vec{E}=y\hat{a}_x+x\hat{a}_y\Rightarrow V=-xy+k\Rightarrow\begin{cases}V_1=-2+C\\V_2=-16+C\end{cases}$$

$$\Delta W=q\Delta V=q(V_2-V_1)=-14$$

۲۵ـ گزینه «۱» شدت میدان الکتریکی ناشی از صفحه باردار چنین است:

$$E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ}$$

نیروی وارد بر جزء دیفرانسیلی بار dq از میله برابر است با:

$$F=Edq=E(\rho_l dz)=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ}(\rho_l dz)$$

$$dw=-Fz=\frac{-\rho_s\rho_l}{2\varepsilon_\circ}(zdz)\qquad W=\int_\circ^L dw=-\frac{\rho_l\rho_s l^2}{4\varepsilon_\circ}$$

۲۶ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم که چگالی بار به صورت جزء به جزء از بی‌نهایت آورده شود تا کره تشکیل شود. برای یک مرحله‌ی میانی روابط انرژی و پتانسیل را به دست می‌آوریم و سپس انتگرال می‌گیریم.

با استفاده از تعریف انرژی الکترواستاتیکی داریم:

$$W=\int Vdq$$

V اختلاف پتانسیل در محل dq می‌باشد. dq را یک لایه کروی در نظر می‌گیریم:

$$\rho_\circ=\frac{dq}{dV}=\frac{dq}{4\pi r^2dr}\Rightarrow dq=\rho_\circ 4\pi r^2dr$$

اختلاف پتانسیل در فاصله r درون کره برابر است با:

$$V=\frac{\rho_\circ\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_\circ r}=\frac{\rho_\circ r^2}{3\varepsilon_\circ}$$

با جایگذاری V و dq در رابطه W داریم:

$$W=\int_\circ^R\frac{\rho_\circ r^2}{3\varepsilon_\circ}\rho_\circ 4\pi r^2dr=\frac{4\pi\rho_\circ^2}{3\varepsilon_\circ}\frac{r^5}{5}\Big|_\circ^R=\frac{4\pi\rho_\circ^2R^5}{15\varepsilon_\circ}$$

۲۷ـ گزینه «۱» برای میدان الکتریکی خواهیم داشت:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=-2\hat{i}-4\hat{j}$$

بنابراین برای چگالی انرژی می‌توان نوشت:

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ|E|^2=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ(4+16)=10\varepsilon_\circ$$

اما با انتگرال‌گیری از این رابطه روی کل فضا نتیجه بی‌نهایت خواهد شد لذا گزینه‌ی (۱) درست است.

۲۸ـ گزینه «۱» بار حجمی مورد نظر را می‌توان به صورت مجموع یک بار حجمی کروی شکل کامل با چگالی $\rho_\circ$ و یک بار حجمی نیم کره‌ای شکل با چگالی $-\rho_\circ$ در نظر گرفت. اگر پتانسیل الکتریکی ناشی از کره کامل را برابر V_T فرض نماییم، خواهیم داشت:

$$V=V_T-V\Rightarrow V=\frac{1}{2}V_T$$

از طرفی خواهیم داشت:

$$V_T=-\int_\infty^{\frac{a}{2}}\vec{E}\cdot d\vec{L}=-\int_\infty^a\frac{\rho_\circ a^3}{3\varepsilon_\circ r^2}dr-\int_a^{\frac{a}{2}}\frac{\rho_\circ r}{3\varepsilon_\circ}dr\Rightarrow V_T=\frac{11\rho_\circ a^2}{24\varepsilon_\circ}\Rightarrow V=\frac{11}{48}\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}$$

۲۹ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی بار کل ابتدا میدان را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V(r)=-\vec{\nabla}\left(V_\circ\frac{e^{-k_\circ r}}{k_\circ r}\right)=\frac{V_\circ}{k_\circ}\left(\frac{k_\circ}{r}+\frac{1}{r^2}\right)e^{-k_\circ r}\hat{r}$$

حال از قانون اول ماکسول که در فصل‌های بعد با آن آشنا می‌شوید خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\rightarrow\rho=\varepsilon_\circ\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

بنابراین برای ρ و Q می‌توانیم بنویسیم:

$$\rho=\varepsilon_{\circ}\frac{V_{\circ}}{k_{\circ}}[۴\pi\delta^{۳}(r)-k_{\circ}^{۲}\frac{e^{-k_{\circ}r}}{r}]\quad;\quad Q=\int\rho dv=\int_{\circ}^{\infty}\rho۴\pi r^{۲}dr=\circ$$

$$Q=\int\rho dV=\int_{\circ}^{\infty}\rho(۴\pi r^{۲}dr)=\varepsilon_{\circ}\frac{V_{\circ}}{k_{\circ}}\int_{\circ}^{\infty}[۱۶\pi^{۲}r^{۲}\delta^{۳}(r)-۴\pi rk_{\circ}^{۲}e^{-k_{\circ}e}]dr$$

حاصل انتگرال $r^{۲}\delta^{۳}(r)$ برابر صفر است. پس جمله اول انتگرال فوق صفر می‌شود:

$$Q=۴\pi\varepsilon_{\circ}V_{\circ}\int_{\circ}^{\infty}-k_{\circ}re^{-k_{\circ}r}dr=۴\pi\varepsilon_{\circ}V_{\circ}[re^{-k_{\circ}r}\Big|_{\circ}^{\infty}-\int_{\circ}^{\infty}e^{-k_{\circ}r}dr]=۴\pi\varepsilon_{\circ}\frac{V_{\circ}}{k_{\circ}}e^{-k_{\circ}r}\Big|_{\circ}^{\infty}=-۴\pi\varepsilon_{\circ}\frac{V_{\circ}}{k_{\circ}}$$

۳۰ـ گزینه «۱» U_{sr} را می‌توان به صورت مقابل محاسبه کرد:

$$u=\int du=\int\phi(r)dq\qquad(*)$$

برای هر کرهٔ فرضی به شعاع r:

$$q=\rho v=\rho\times\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\ \rightarrow\ dq=۴\pi r^{۲}\rho dr\qquad(I)\qquad\text{و}\qquad\phi(r)=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}\qquad(II)$$

با جایگذاری روابط (I) و (II) در رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$U_{sr}=\int\frac{q\,dq}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}=\int\frac{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\rho\times۴\pi r^{۲}\rho dr}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}=\frac{۴\pi}{۳\varepsilon_{\circ}}\rho^{۲}\int_{\circ}^{R}r^{۴}dr=\frac{۴\pi\rho^{۲}R^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}}$$

طبق قانون گاوس شدت میدان الکتریکی در نواحی مختلف چنین خواهد بود:

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{۳\varepsilon_{\circ}} & r<R\\[2ex]\dfrac{\rho R^{۳}}{۳\varepsilon_{\circ}r^{۲}} & r>R\end{cases}$$

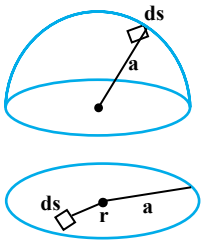
بنابراین U_{es} به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$U_{es}=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{\infty}\varepsilon_{\circ}E^{۲}dv=\frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}\int_{\circ}^{R}(\frac{\rho r}{۳\varepsilon_{\circ}})(۴\pi r^{۲}dr)+\frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}\int_{R}^{\infty}(\frac{\rho R^{۳}}{۳\varepsilon_{\circ}r^{۲}})^{۲}(۴\pi r^{۲}dr)=\frac{۴\pi\rho^{۲}R^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}}\Rightarrow\Delta U=\circ$$

۳۱ـ گزینه «۴» ابتدا باید پتانسیل الکتریکی ناشی از سطح نیم‌کره و سطح قاعده را در مرکز کره جداگانه به‌دست آوریم و سپس مجموع آن‌ها را محاسبه کنیم. طبق رابطه پتانسیل الکتریکی برای چگالی بار سطحی داریم:

$$V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{s}\frac{\rho_{s}ds}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

چون پتانسیل در مبدأ را می‌خواهیم بنابراین $\vec{r}'=\circ$ می‌باشد. ابتدا پتانسیل ناشی از نیم‌کره را به‌دست می‌آوریم:



$$V_{۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\rho_{s}r^{۲}\sin\theta d\theta d\varphi}{a}\Rightarrow V_{۱}=\frac{\rho_{s}a}{۲\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sin\theta d\theta=\frac{\rho_{s}a}{۲\varepsilon_{\circ}}$$

حال پتانسیل ناشی از سطح قاعده نیم‌کره را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{a}\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{\rho_{s}rd\varphi dr}{r}\Rightarrow V_{۲}=\frac{\rho_{s}}{۲\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{a}dr=\frac{\rho_{s}a}{۲\varepsilon_{\circ}}$$

پتانسیل الکتریکی کل در مبدأ برابر است با:

$$V=V_{۱}+V_{۲}=\frac{\rho_{s}a}{\varepsilon_{\circ}}$$

۳۲ـ گزینه «۳» ابتدا معادله سطوح هم پتانسیل را بیان می‌کنیم.

$$V=k(y^{۲}-xy)$$

سپس از رابطه طلائی استفاده کرده و $\vec{E}$ را بدست می‌آوریم.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_{z})\Rightarrow\vec{E}=-k(-y\hat{a}_{x}+(۲y-x)\hat{a}y)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

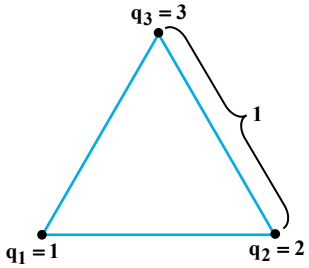
همین حالا هم می‌توانیم گزینه درست را انتخاب کنیم. درسته! گزینه ۱ صحیح است. ولی اجازه دهید از داده‌های مسئله استفاده کرده و آن را به طور کامل حل کنیم.

$$E_x\Big|_{(۲,۵,۰)}=۲۰\frac{v}{m}\Rightarrow ky\Big|_{(۲,۵,۰)}=۵k=۲۰\frac{v}{m}\Rightarrow k=۴$$

$$\vec{E}=ky\hat{a}_x+k(-۲y+x)\hat{a}_y=۴y\hat{a}_x+(۴x-۸y)\hat{a}_y$$

۳۳ـ گزینه «۲» ابتدا انرژی الکترواستاتیک ذخیره شده بین بارها را در هر دو حالت حساب می‌کنیم. تفاضل انرژی آن‌ها برابر مقدار کار لازم می‌باشد.

حالت اول:

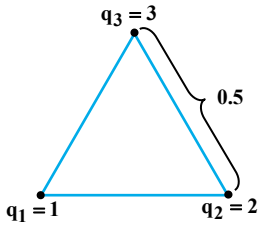


$$W=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۳}q_iV_i$$

V_i اختلاف پتانسیل در محل بار q_i می‌باشد.

$$W_۱=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[q_۱q_۲+q_۲q_۳+q_۱q_۳]=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[۲+۶+۳]=\frac{۱۱}{۴\pi\varepsilon_۰}$$

حالت دوم:



$$W_۲=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[\frac{q_۱q_۲}{۰/۵}+\frac{q_۲q_۳}{۰/۵}+\frac{q_۱q_۳}{۰/۵}]=\frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰}[۲+۶+۳]=\frac{۲۲}{۴\pi\varepsilon_۰}$$

اختلاف انرژی ذخیره شده بین دو حالت برابر است با:

$$\Delta W=W_۲-W_۱=\frac{۲۲}{۴\pi\varepsilon_۰}-\frac{۱۱}{۴\pi\varepsilon_۰}=\frac{۱۱}{۴\pi\varepsilon_۰}$$

۳۴ـ گزینه «۲» ابتدا میدان الکتریکی در فضای داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-۲\hat{a}_x-۴\hat{a}_y\Rightarrow|\vec{E}|=\sqrt{۲۰}$$

انرژی ذخیره شده در همه فضا برابر است با:

$$W=\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰\int_v|\vec{E}|^۲\,dv=\frac{۲۰}{۲}\varepsilon_۰\int_v dv=\infty$$

چگالی انرژی الکتریکی با استفاده از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰|\vec{E}|^۲=۱۰\varepsilon_۰$$

۳۵ـ گزینه «۲» با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای پتانسیل الکتریکی نتیجه می‌گیریم که پتانسیل در مرکز مکعب، میانگین پتانسیل بر روی هر وجه مکعب است، بنابراین داریم:

$$\frac{V+۰+۰+۰+۰+۰}{۶}=\frac{V}{۶}$$

قضیه‌ی مقدار میانگین نیز از اینجا به دست می‌آید که پتانسیل الکتریکی در معادله‌ی لاپلاس با شرط مرزی موردنظر صدق می‌کند.

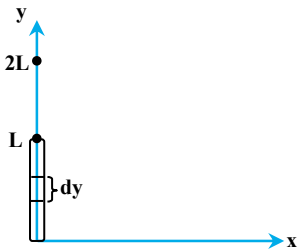
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۶ـ گزینه «۴» ابتدا چگالی بار الکتریکی بر روی میله را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho_L = \frac{Q}{L}$$

مطابق شکل مقابل ابتدا یک عنصر دیفرانسیلی به طول dy روی میله در نظر می‌گیریم:



پتانسیل ناشی از dy در نقطه L برابر است با:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{dQ}{2L-y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{\rho_L dy}{2L-y}$$

با انتگرال گرفتن روی کل میله از dV داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^L \frac{\rho_L dy}{2L-y} = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ}\ln(2L-y)\Big|_\circ^L = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ}\ln 2$$

بنابراین با توجه به چگالی بار خطی خواهیم داشت:

$$\rho_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow V = \frac{\ln 2}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{L}$$

۳۷ـ گزینه «۳» در صورت سؤال بار منفی را به صورت $-\sigma Q$ نشان داده است. با فرض این که مقدار بار منفی $-6Q$ باشد، تست را حل می‌کنیم. ابتدا یک عنصر دیفرانسیلی روی محیط دایره به طول $d\ell$ در نظر می‌گیریم و پتانسیل ناشی از آن را به‌دست می‌آوریم:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_\circ R} \quad , \quad dq = \rho_L dl = \rho_L R d\theta \quad , \quad \rho_L = \frac{dq}{dl}$$

برای ربع دایره با بار $+Q$ چگالی بار $\rho_L = \frac{Q}{\frac{1}{4}2\pi R} = \frac{2Q}{\pi R}$ و برای بقیه محیط دایره چگالی بار Q $\rho_L = -\frac{6Q}{\frac{3}{4}2\pi R} = -\frac{4}{\pi R}$ می‌باشد. با انتگرال‌گیری از dV داریم:

$$V = \int_\circ^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2Q}{\pi R}\times R}{4\pi\varepsilon_\circ R} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\frac{-4Q}{\pi R}R}{4\pi\varepsilon_\circ R} d\theta = \frac{-5Q}{4\pi\varepsilon_\circ R}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

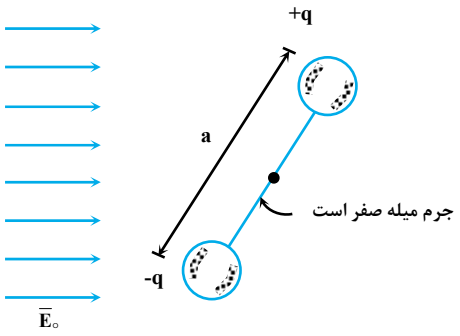
فصل چهارم

«الکترواستاتیک عایق‌ها و هادی‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ یک دو قطبی الکتریکی که می‌تواند بدون اصطکاک حول محورش دوران کند، همانند شکل در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0$ قرار گرفته است. اگر جرم کل دو قطبی m بوده و زاویهٔ اولیه دو قطبی با خطوط $\vec{E}_0$ بسیار کوچک باشد، دو قطبی با کدام فرکانس حول محورش نوسان می‌کند؟

(جواب‌ها برحسب هرتز هستند.) (برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\sqrt{\frac{q|\vec{E}_0|}{2ma}}$

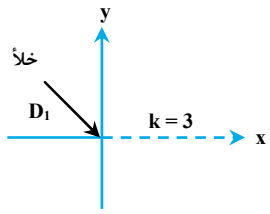
۲) $\sqrt{\frac{q|\vec{E}_0|}{\pi ma}}$

۳) $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{q|\vec{E}_0|}{ma}}$

۴) $2\sqrt{\frac{q|\vec{E}_0|}{ma}}$

۲ـ در شکل زیر ناحیه $x<0$ خلأ و ناحیه $x\geq 0$ دی‌الکتریکی خطی با ثابت دی‌الکتریک $k=3$ است. اگر بردار جابجائی در ناحیه $x<0$ در مجاورت فصل مشترک دو محیط $D_1 = 3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y$ باشد، بردار جابجایی D_2 در ناحیهٔ $x>0$ در مجاورت فصل مشترک دو محیط چیست؟

(چگالی بار سطحی آزاد در فصل مشترک دو محیط صفر است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



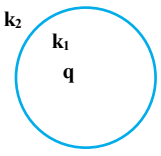
۱) $-12\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$

۲) $4\hat{a}_x - 3\hat{a}_y$

۳) $3\hat{a}_x - 12\hat{a}_y$

۴) $9\hat{a}_x - 12\hat{a}_y$

۳ـ در شکل مقابل بار نقطه‌ای q در مرکز یک کره دی‌الکتریک خطی به شعاع a و ثابت دی‌الکتریک k_1 قرار دارد. چنانچه محیط خارج از دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک k_2 پر شده باشد، چگالی بارهای قطبیده روی سطح کره کدام گزینه است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



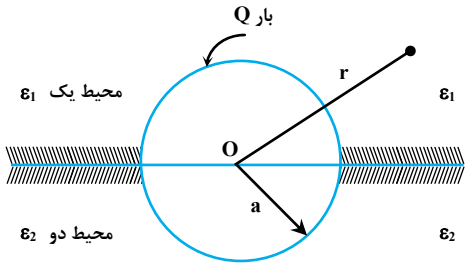
۱) $\frac{q}{4\pi a^2}\left[\frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1}\right]$

۲) $\frac{q}{4\pi a^2}\left[\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}\right]$

۳) $\frac{q}{4\pi a^2}\left[\frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2}\right]$

۴) $\frac{q}{4\pi a^2}\left[\frac{k_1 k_2}{k_2 + k_1}\right]$

۴ـ یک کره رسانا به شعاع a با بار الکتریکی Q به نحوی قرار گرفته که مرکز آن در مبدأ مختصات است. شدت (توانایی) میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره، $r>a$، چقدر است؟ (در محیط یک) (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$

۲) $\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$

۳) $\frac{Q\varepsilon_1}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$

۴) $\frac{Q\varepsilon_1}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

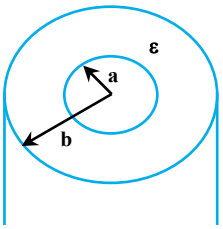
۵ـ در یک کره عایق، چگالی حجمی بارهای پلاریزه (قطبی شده) یکنواخت و برابر با ρ_b می‌باشد، بردار قطبی شدگی $\vec{P}$ داخل کره کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{-\rho_b}{۳} r\hat{a}_r$ ۲) $\frac{-\rho_b}{۳}\frac{۱}{r^۲}\hat{a}_r$ ۳) $\frac{-\rho_b}{۳}\frac{۱}{r^۳}\hat{a}_r$ ۴) $\frac{-\rho_b}{۳r}\frac{۱}{r}\hat{a}_r$

۶ـ اگر در ناحیه $z>۰$ که در آن $\varepsilon_r = ۲$ است $\vec{E} = \hat{a}_x - ۳\hat{a}_y + ۵\hat{a}_z$ ، زاویه‌ای که میدان الکتریکی در ناحیه $z \le ۰$ با $\varepsilon_r = ۵$ با سطح جدائی دو محیط می‌سازد تقریباً چند درجه است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲۹° ۲) $۳۵/۸^\circ$ ۳) $۵۴/۲^\circ$ ۴) ۶۱°

۷ـ در یک کابل هم محور، ضریب عایقی ماده بین دو رسانا ε چگونه انتخاب شود تا اندازه میدان الکتریکی درون عایق کابل در همه نقاط یکسان باشد؟ (برق ـ سراسری ۸۲)



۱) ε برابر $\varepsilon_۰$ باشد.

۲) ε عایق متناسب با $\frac{۱}{r^۲}$ باشد.

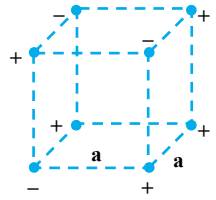
۳) ε متناسب با $\frac{۱}{r}$ باشد.

۴) هرگز در هیچ شرایطی اندازه میدان ثابت نمی‌باشد.

۸ـ روی سطح کره‌ای رسانا به شعاع a در محدوده $a < R \le ۲a$ عایق با ثابت یکنواخت ε قرار دارد. اگر در ناحیهٔ فضای آزاد $R > ۲a$ میدان الکتریکی برابر $\bar{E} = \frac{E_۰}{r^۲}\hat{r}$ باشد، چگالی بار سطحی ρ_s روی کره چند $\frac{C}{m^۲}$ است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)

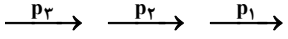
۱) $\frac{\varepsilon E_۰}{a^۲}$ ۲) $\frac{\varepsilon E_۰}{\varepsilon_۰ a^۲}$ ۳) $\frac{\varepsilon_۰ E_۰}{\varepsilon a^۲}$ ۴) $\frac{\varepsilon_۰ E_۰}{a^۲}$

۹ـ هشت بار مطابق شکل روی رأس‌های یک مکعب مستطیل به ضلع a قرار دارند. رفتار تابع پتانسیل الکتریکی این مجموعه در نقاطی که در فاصله $a << r$ از مرکز مکعب قرار دارند، کدام است؟ اندازه بارها یکسان است. (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



۱) $\frac{۱}{r^۲}$ ۲) $\frac{۱}{r^۳}$ ۳) $\frac{۱}{r^۴}$ ۴) $\frac{۱}{r^۵}$

۱۰ـ کدام یک از گزینه‌های زیر برای سه دو قطبی که مطابق شکل در یک امتداد قرار گرفته‌اند،درست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



۱) نیروی بین دو قطبی‌های $p_۱$ و $p_۳$ جاذبه و نیروی بین دو قطبی‌های $p_۲$ و $p_۳$ دافعه است.

۲) نیروی بین دو قطبی‌های $p_۱$ و $p_۲$ دافعه و نیروی بین دو قطبی‌های $p_۲$ و $p_۳$ جاذبه است.

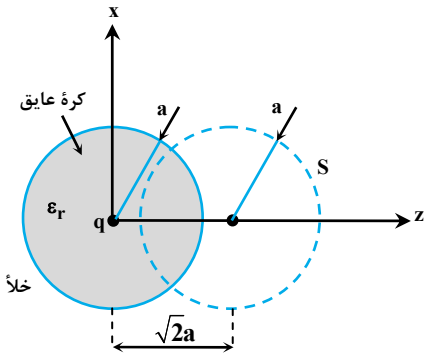
۳) نیروی بین دو قطبی‌های $p_۱$ و $p_۲$ جاذبه و نیروی بین دو قطبی‌های $p_۲$ و $p_۳$ جاذبه است.

۴) نیروی بین دو قطبی‌های $p_۱$ و $p_۲$ دافعه و نیروی بین دو قطبی‌های $p_۳$ و $p_۱$ دافعه است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ بار نقطه‌ای q در مرکز یک کرهٔ عایق به شعاع a قرار گرفته است. ضریب عایقی کره $\varepsilon_\circ\varepsilon_r$ فرض می‌شود. این مجموعه در فضای خالی قرار می‌گیرد. کدام گزینه حاصل انتگرال $\oint_S \varepsilon_\circ \vec{E}d\vec{s}$ است که در آن S سطح کروی نشان داده شده در شکل زیر است؟ (برق ـ سراسری ۸۳)



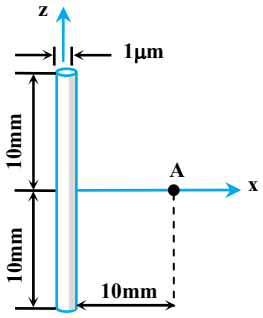
۱) $-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\frac{2-\sqrt{2}}{4}q$

۲) $\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\frac{2-\sqrt{2}}{4}q$

۳) $-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\frac{2-\sqrt{2}}{2}q$

۴) $\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\frac{2-\sqrt{2}}{2}q$

۱۲ـ یک میله الکتریت با سطح مقطع دایروی و با ابعاد نشان داده شده در شکل مفروض است. بردار پلاریزاسیون برای کلیه نقاط این الکتریت $\vec{P}=2\hat{z}\frac{C}{m^2}$ می‌باشد. مطلوب است میدان الکتریکی $\vec{E}$ بر حسب $\frac{\mu V}{m}$ در نقطه A مشخص شده در شکل. (برق ـ سراسری ۸۳)



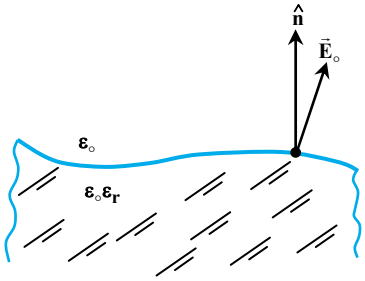
۱) $-\frac{\sqrt{2}}{1600\varepsilon_\circ}\hat{z}$

۲) $-\frac{\sqrt{2}}{400\varepsilon_\circ}\hat{z}$

۳) $-\frac{1}{800\varepsilon_\circ}\hat{z}$

۴) $-\frac{1}{200\varepsilon_\circ}\hat{z}$

۱۳ـ شکل روبرو نقطه‌ای از فصل مشترک یک محیط عایق با هوا را نشان می‌دهد. در این نقطه میدان الکتریکی در طرف هوا $\vec{E}_\circ$ است. اگر بردار واحد عمود بر فصل مشترک در این نقطه $\hat{n}$ باشد، کدام گزینه بردار پلاریزاسیون عایق را در همین نقطه نشان می‌دهد؟ (برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $\varepsilon_\circ\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}(\hat{n}.\vec{E}_\circ)\hat{n}$

۲) $\varepsilon_\circ(\varepsilon_r-1)(\hat{n}.\vec{E}_\circ)\hat{n}$

۳) $\varepsilon_\circ(\varepsilon_r-1)\vec{E}_\circ-\varepsilon_\circ\frac{(\varepsilon_r-1)^2}{\varepsilon_r}(\hat{n}.\vec{E}_\circ)\hat{n}$

۴) $\varepsilon_\circ(\varepsilon_r-1)\vec{E}_\circ+\varepsilon_\circ(\varepsilon_r-1)^2(\hat{n}.\vec{E}_\circ)\hat{n}$

۱۴ـ در مورد رساناها کدام گزینه نادرست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) در حالت الکترواستاتیک، درون یک کاواک خالی و بسته در داخل یک رسانای همگن، میدان الکتریکی دقیقاً صفر است.

۲) در صورت وجود جریان الکتریکی در رسانا میدان الکتریکی در ماده رسانا غیر صفر است.

۳) در حالت الکترواستاتیک میدان الکتریکی در داخل ماده رسانا و سطح خارجی آن صفر است.

۴) با استفاده از اثر هال می‌توان نوع حاملین جریان را تعیین کرد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۵ـ مجموعه باری داخل یک جعبه بسته وجود دارد. پتانسیل الکتریکی این توزیع بار در فواصل بسیار دور از این جعبه به شکل $\frac{۱}{r^۳}$ کاهش می‌یابد که r فاصله از جعبه است. کدام گزینه نادرست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) بار الکتریکی کل مجموعه صفر است اما ممان دو قطبی الکتریکی کل آن غیرصفر است.

۲) بار الکتریکی کل مجموعه صفر است.

۳) ممان دو قطبی الکتریکی کل مجموعه صفر است.

۴) تعدادی از مولفات تانسور گشتاور چهار قطبی این مجموعه غیرصفر است.

۱۶ـ یک ماده دی‌الکتریک با ثابت k و بردار قطبش $\vec{P}$ در یک میدان الکترواستاتیکی غیر یکنواخت E واقع شده است. نیروی وارد بر واحد حجم دی‌الکتریک کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\vec{F}=\vec{\nabla}\times(\vec{E}\times\vec{P})$

۲) $\vec{F}=\vec{\nabla}\times(\frac{۱}{۲}\vec{E}\times\vec{P})$

۳) $\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{E}\cdot\vec{P})$

۴) $\vec{F}=\vec{\nabla}(\frac{۱}{۲}\vec{E}\cdot\vec{P})$

۱۷ـ چگالی بار یک توزیع بار حجمی به شکل $\rho(r)$ است که r فاصله از مبدأ مختصات است. گشتاور دو قطبی آن کدام است؟ (Q بار کل توزیع بار و $\vec{R}=\frac{۱}{V}\int\vec{r}dv$ و V حجم توزیع بار است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۴)

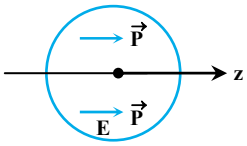
۱) $\vec{P}=۰$

۲) $\vec{P}=\frac{۱}{۲}Q\vec{R}$

۳) $\vec{P}=Q\vec{R}$

۴) $\vec{P}=۲Q\vec{R}$

۱۸ـ داخل یک کره عایق به شعاع a و ضریب دی‌الکتریک ε بردار قطبش الکتریکی یکنواخت و برابر $\vec{P}=P_۰\vec{K}$ است. میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در مرکز کره مطابق کدام گزینه است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



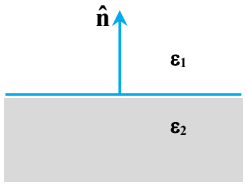
۱) پتانسیل صفر و میدان $\frac{P}{۳\varepsilon_۰}$ است.

۲) پتانسیل صفر و میدان $-\frac{P}{۳\varepsilon_۰}$ است.

۳) پتانسیل و میدان هر دو صفرند.

۴) میدان صفر و پتانسیل برابر با $\frac{Pa}{۳\varepsilon_۰}$ است.

۱۹ـ در مرز دو عایق با ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ چگالی سطحی بارهای پلاریزه ρ_{sp} است. چه رابطه‌ای بین مؤلفه‌های عمودی بردار پلاریزاسیون $\vec{P}$ دو طرف مرز برقرار است؟ (برق ـ سراسری ۸۵)



۱) $P_{n_۱}=P_{n_۲}$

۲) $P_{n_۱}=P_{n_۲}-\rho_{sp}$

۳) $P_{n_۱}=P_{n_۲}+\rho_{sp}$

۴) $P_{n_۱}=-P_{n_۲}-\rho_{sp}$

۲۰ـ کرهٔ کوچک دی‌الکتریکی با پذیرفتاری χ و شعاع a به فاصلهٔ نسبتاً زیادی $(r>>a)$ از کره رسانایی به شعاع b که در پتانسیل V می‌باشد قرار دارد. اندازه نیروی وارد بر کرهٔ دی‌الکتریک کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۲\chi b^۲V^۲}{r^۵}$

۲) $\frac{\chi abV^۲}{r^۵}$

۳) $\frac{\chi a^۲V^۲}{r^۵}$

۴) $\frac{\chi bV^۲}{r^۴}$

۲۱ـ یک دو قطبی الکتریکی بسیار کوچک با ممان دو قطبی P در مرکز یک کره فرضی به شعاع a واقع شده است. انرژی الکتریکی در ناحیه خارج از این کره فرضی کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{P^۲}{۱۸\pi\varepsilon_۰a^۳}$

۲) $\frac{P^۲}{۶\pi\varepsilon_۰a^۳}$

۳) $\frac{P^۲}{۱۲\pi\varepsilon_۰a^۳}$

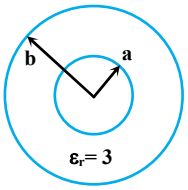
۴) $\frac{P^۲}{۳۶\pi\varepsilon_۰a^۳}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۲ـ فضای داخل یک کابل هم محور با یک عایق با ضریب عایقی نسبی $\varepsilon_r = 3$ پر شده است. اگر q_b کل بار مقید در واحد طول کابل روی سطح عایق در $r = b$ باشد و $\rho_L\ (\frac{C}{m})$ کل بار آزاد در واحد طول کابل روی سطح رسانای داخلی به شعاع a باشد، کدام گزینه برابر نسبت $\frac{q_b}{\rho_L}$ است؟

(برق ـ سراسری ۸۶)



۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۳ـ یک دو قطبی الکتریکی با ممان دو قطبی $۶\times۱۰^{-۲۰}\ m.C$ در میدان الکتریکی یکنواختی با شدت $۲\times۱۰^{۶}\ \frac{N}{C}$ قرار دارد. ابتدا ممان دو قطبی، موازی میدان الکتریکی و در حالت سکون است. اگر دو قطبی به مقدار کمی از حالت تعادل خارج شود، بسامد زاویه نوسان‌های کوچک حول محوری که از مرکز جرم دو قطبی می‌گذرد و بر صفحه دو قطبی و میدان الکتریکی عمود است چند $\frac{rad}{s}$ است؟ لختی دورانی دو قطبی حول محور مذکور $۳\times۱۰^{-۴۰}\ kgm^۲$ است. (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\sqrt{۲}\times۱۰^{۱۳}$ ۲) ۲×۱۰^{۱۳} ۳) ۴×۱۰^{۲۶} ۴) ۲×۱۰^{۲۸}

۲۴ـ اگر ρ چگالی بارهای آزاد، $\varepsilon_\circ$ گذردهی خلأ، ε گذردهی دی‌الکتریک، $\vec{E}$ میدان الکتریکی داخل دی‌الکتریک، $\vec{D}$ بردار جابجایی در دی‌الکتریک، $\vec{P}$ بردار قطبش و $\rho_p = -\vec{\nabla}.\vec{P}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$ ۲) $\vec{D} = \varepsilon_\circ\vec{E} + \vec{P}$

۳) $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}(\rho + \rho_p)$ ۴) $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}(\rho + \rho_p)$

۲۵ـ یک ماده دی‌الکتریک خطی و همگن با بردار قطبش $\vec{P}$ در یک میدان الکترواستاتیکی نایکنواخت $\vec{E}$ واقع شده است. نیروی وارد بر واحد حجم دی‌الکتریک کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\vec{F} = \vec{\nabla}(\frac{۱}{۲}\vec{E}.\vec{P})$ ۲) $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{E}.\vec{P})$

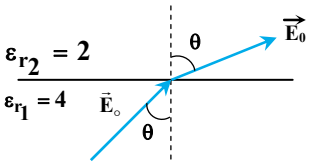
۳) $\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\frac{۱}{۲}\vec{P}\times\vec{E})$ ۴) $\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{E}\times\vec{P})$

۲۶ـ یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی $\vec{P}$ در مرکز یک کره فرضی بزرگ به شعاع a واقع شده است. انرژی الکتریکی در ناحیه خارج از کره کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{P^۲}{۶\pi^۲\varepsilon_\circ a^۳}$ ۲) $\frac{P^۲}{۶\pi\varepsilon_\circ a^۳}$ ۳) $\frac{P^۲}{۱۲\pi\varepsilon_\circ a^۳}$ ۴) $\frac{P^۲}{۱۲\pi^۲\varepsilon_\circ a^۳}$

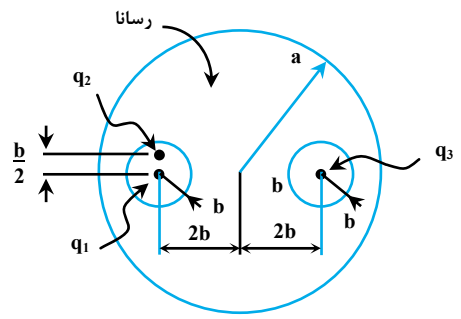
۲۷ـ مطلوب است محاسبه بار سطحی آزاد روی مرز بین دو محیط در شکل زیر: (برق ـ سراسری ۸۷)



۱) $-۲\varepsilon_\circ|\vec{E}_\circ|\cos\theta$ ۲) $-۲\varepsilon_\circ|\vec{E}_\circ|\sin\theta$

۳) $+۲\varepsilon_\circ|\vec{E}_\circ|\cos\theta$ ۴) $+۲\varepsilon_\circ|\vec{E}_\circ|\sin\theta$

۲۸ـ داخل کره‌ای به شعاع a از جنس رسانا دو حفره به شعاع‌های یکسان a و b $(a>2b)$ مطابق شکل مفروض است. بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را داخل حفرهٔ اول و بار $q_۳$ را در مرکز حفرهٔ دوم قرار می‌دهیم. الف) اندازه نیروی اعمالی $q_۳$ بر $q_۱$ و ب) اندازه نیروی اعمالی $q_۲$ بر $q_۱$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۷)



۱) الف) $\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ(۴b^۲)}$ ب) $\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ b^۲}$

۲) الف) $\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ(۴b)^۲}$ ب) $\frac{q_۱q_۲}{\pi\varepsilon_\circ b^۲}$

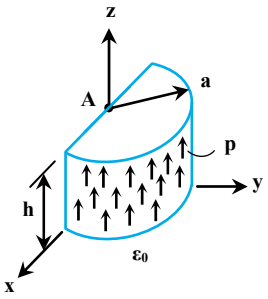
۳) الف) صفر ب) $\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ b^۲}$

۴) الف) صفر ب) $\frac{q_۱q_۲}{\pi\varepsilon_\circ b^۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۹ـ در فضای خالی دو قطبی‌های الکترولیکی میکروسکوپی هر یک با گشتاور $\vec{P} = P_0\hat{z}$، که تعداد آنها در واحد حجم n عدد است، ناحیهٔ نیم‌استوانه‌ای شکل زیر را اشغال کرده‌اند. پتانسیل الکتریکی ناشی از این دو قطبی‌ها در نقطهٔ A برابر کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۷)



۱) $\frac{np_0}{2\varepsilon_0}(a-h+\sqrt{a^2+h^2})$

۲) $\frac{np_0}{2\varepsilon_0}(a+h-\sqrt{a^2+h^2})$

۳) $\frac{np_0}{4\varepsilon_0}(a+h-\sqrt{a^2+h^2})$

۴) $\frac{np_0}{4\varepsilon_0}(a-h+\sqrt{a^2+h^2})$

۳۰ـ هم مرکز با یک کرهٔ رسانا با بار اولیه صفر به شعاع $1\,m$ یک حفرهٔ مکعبی شکل به ضلع $80\,cm$ ایجاد می‌گردد. یک لایه عایقی یکنواخت به ضخامت $20\,cm$ و قابلیت گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 2$ نیز روی سطح خارجی کره هادی را پوشانیده است. یک حلقهٔ‌بار به شعاع $25cm$ و با چگالی خطی غیر یکنواخت $\rho_L = 4\varepsilon_0 \sin^2\varphi(\frac{c}{m})$ در مرکز حفرهٔ مکعبی قرار داده می‌شود. (φ متغیر زاویه در دستگاه استوانه‌ای است) مقدار انرژی الکتریکی ذخیره شده در فضای بیرون از کره هادی کدام است ؟ (برق ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\pi\varepsilon_0}{8}$

۲) $\frac{11\pi\varepsilon_0}{96}$

۳) $\frac{11\pi\varepsilon_0}{6}$

۴) $\frac{11\varepsilon_0}{384}$

۳۱ـ دو بار نقطه‌ای مشابه q در دو انتهای میله‌ای عایق به طول 2ℓ قرار دارند. میله در صفحه‌ی xy قرار دارد و وسط آن بر مبدأ مختصات واقع است. میله با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد. در $t = 0$ میله منطبق بر محور x است. تانسور گشتاور چهارقطبی این مجموعه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)

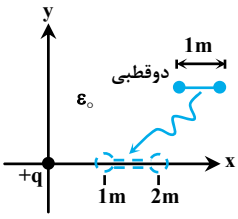
۱) $q\ell^2\begin{pmatrix} 6\cos^2(\omega t) & 3\sin(2\omega t) & 0 \\ 3\sin(2\omega t) & 6\sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

۲) $q\ell^2\begin{pmatrix} 6\cos^2(\omega t) & 3\sin^2(2\omega t) & 0 \\ 3\sin(2\omega t) & 6\sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

۳) $q\ell^2\begin{pmatrix} 6\cos^2(\omega t)-2 & 3\sin(2\omega t) & 0 \\ 3\sin(2\omega t) & 6\sin^2(\omega t)-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

۴) $q\ell^2\begin{pmatrix} 6\cos^2(\omega t)-2 & 3\sin(2\omega t) & 0 \\ 3\sin(2\omega t) & 6\sin^2(\omega t)-2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

۳۲ـ دو قطبی نشان داده شده در شکل توسط عامل خارجی از بی‌نهایت به مجاورت بار $-q$ در نقطه‌ی q واقع در مبدأ مختصات آورده می‌شود. محل نهایی دوقطبی به قسمی است که بار $+q$ در $x = 2m$ و بار $-q$ در $x = 1m$ قرار می‌گیرد. اگر $q = 1\mu C$ باشد، آنگاه کار عامل خارجی چند میلی‌ژول بوده است؟ $(\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\,\frac{F}{m})$ (برق ـ سراسری ۸۸)



۱) $-13/5$

۲) $-4/5$

۳) $+4/5$

۴) $+13/5$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۳ـ یک توزیع بار خطی با چگالی بار $\rho=\begin{cases}+\lambda & ; \circ<z<\ell\\ -\lambda & ; -\ell<z<\circ\end{cases}$ که در آن λ یک عدد ثابت است، در نظر می‌گیریم. اندازه گشتاور دو قطبی (Dipole Moment) این توزیع بار برابر است با:

(برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\lambda\ell^{۲}$ ۲) $۲\lambda\ell^{۲}$ ۳) $\frac{\lambda\ell^{۲}}{۲}$ ۴) $۴\lambda\ell^{۲}$

۳۴ـ بار الکتریکی Q درون یک کره عایق به شعاع $R_\circ$ که دارای حفره کروی به شعاع $r_\circ$ و به فاصله (مرکز از مرکز) $a_\circ$ از مرکز کره می‌باشد، به‌طور یکنواخت توزیع شده است. انرژی الکترومغناطیسی درون این حفره چقدر است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر

۲) $[\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{r_\circ}{R_\circ})^{۳}}{[۱-(\frac{r_\circ}{R_\circ})^{۳}]^{۲}}](\frac{Q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ R_\circ})$

۳) $\frac{۱}{۶}[\frac{(\frac{a_\circ}{R_\circ})^{۲}(\frac{r_\circ}{R_\circ})^{۳}}{[۱-(\frac{r_\circ}{R_\circ})^{۳}]^{۲}}](\frac{Q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ R_\circ})$

۴) $[\frac{\frac{۱}{۶}(\frac{a_\circ}{R_\circ})^{۲}}{[۱-(\frac{r_\circ}{R_\circ})^{۳}]^{۲}}](\frac{Q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ R_\circ})$

۳۵ـ دو بار نقطه‌ای با بارهای $+Q$ و $-Q$ به فاصله d از یکدیگر و به طور متقارن نسبت به مبدأ مختصات در امتداد محور z ها قرار گرفته‌اند. انرژی ذخیره شده را در ناحیه $r>a$ به دست آورید.

(برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $W_E=\frac{Q^{۲}d^{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ a^{۳}}$ ۲) $W_E=\frac{Q^{۲}d^{۲}}{۸\pi\varepsilon_\circ a^{۳}}$ ۳) $W_E=\frac{Q^{۲}d^{۲}}{۱۲\pi\varepsilon_\circ a^{۳}}$ ۴) $W_E=\frac{Q^{۲}d^{۲}}{۱۶\pi\varepsilon_\circ a^{۳}}$

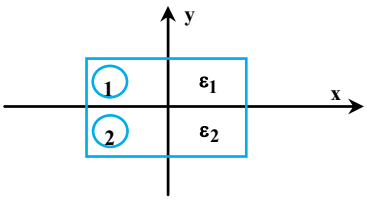
۳۶ـ شرایط مرزی را در مورد پلاریزاسیون نرمال $\vec{P}$ در مرز بین دو دی‌الکتریک $\varepsilon_{r_۱}$ و $\varepsilon_{r_۲}$ به دست آورید.

(برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{P_{n_۲}}{P_{n_۱}}=\frac{\varepsilon_{r_۱}(\varepsilon_{r_۲}-۱)}{\varepsilon_{r_۲}(\varepsilon_{r_۱}-۱)}$ ۲) $\frac{P_{n_۲}}{P_{n_۱}}=\frac{\varepsilon_{r_۱}(\varepsilon_{r_۲}-۱)}{\varepsilon_{r_۱}(\varepsilon_{r_۲}-۱)}$ ۳) $\frac{P_{n_۲}}{P_{n_۱}}=\frac{\varepsilon_{r_۲}(\varepsilon_{r_۲}-۱)}{\varepsilon_{r_۱}(\varepsilon_{r_۱}-۱)}$ ۴) $\frac{P_{n_۲}}{P_{n_۱}}=\frac{\varepsilon_{r_۱}(\varepsilon_{r_۱}-۱)}{\varepsilon_{r_۲}(\varepsilon_{r_۲}-۱)}$

۳۷ـ دو ناحیه با دی‌الکتریک‌های $\varepsilon_۱=۳\varepsilon_\circ$ و $\varepsilon_۲=\frac{۹\varepsilon_\circ}{۲}$ در مرز $y=\circ$ از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر بردار میدان الکتریکی در ناحیه ۱ به‌صورت $\vec{E}_۱=۱\circ\hat{i}-۶\hat{j}+۱۲\hat{k}(\frac{V}{m})$ باشد، نسبت چگالی انرژی در ناحیه ۲ نسبت به ناحیه ۱ کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{۱۱۷}{۸۴}$ ۲) $\frac{۸۴}{۱۱۷}$ ۳) $\frac{۴۲\circ}{۵۱۷}$ ۴) $\frac{۵۱۷}{۴۲\circ}$

۳۸ـ فضای درون یک پوسته کروی رسانا که به زمین متصل است به شعاع داخلی $R_۱$ و شعاع خارجی $R_۲$ توسط چگالی بار یکنواخت ρ پر شده است، انرژی الکترواستاتیکی سیستم کدام است؟

(فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۳\rho^{۲}}{۴۷\pi\varepsilon_\circ}R_۱^{۵}$ ۲) $\frac{۲\rho^{۲}}{۴۵\varepsilon_\circ}R_۱^{۵}$ ۳) $\frac{۳\rho^{۲}}{۴۵}(R_۱^{۵}-R_۱^{۵})$ ۴) $\frac{۳\rho^{۲}}{۴۷\pi\varepsilon_\circ}(R_۲^{۵}-R_۱^{۵})$

۳۹ـ کره‌ای رسانا به شعاع R و بار کل Q را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کنیم. نیروی لازم برای نگه داشتن این دو نیمکره در جای خود کدام است؟

(فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{Q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}$ ۲) $\frac{Q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}$ ۳) $\frac{Q^{۲}}{۱۶\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}$ ۴) $\frac{Q^{۲}}{۳۲\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}$

۴۰ـ یک دو قطبی با ممان $\bar{P}$ با یک میدان الکتریکی یکنواخت $\bar{E}$ زاویه θ می‌سازد. کار لازم جهت چرخاندن دو قطبی از $\theta=\circ$ تا زاویه θ را به‌دست آورید.

(برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $W=-PE(\cos\theta-۱)$ ۲) $W=PE(\cos\theta-۱)$ ۳) $W=PE(\cos\theta+۱)$ ۴) $W=-PE(\cos\theta+۱)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۱ـ کره فلزی بزرگی با ضریب رسانندگی g و ضریب گذردهی ε و شعاع R در نظر بگیرید. بار q را به طور یکنواخت روی کره هم‌مرکز کوچکی به شعاع $a(a<R)$ در لحظه $t=0$ قرار می‌دهیم. اتلاف انرژی حرارتی ناشی از انتقال بار چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{a^2}{8\pi\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{q^2 aR}{8\pi\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{q^2}{8\pi\varepsilon}(\frac{1}{a}-\frac{1}{R})$ ۴) $\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}(R-a)$

۴۲ـ یک استوانه عایق به شعاع a و طول L هم محور با محور zها به طور دائمی با بردار قطبش $\vec{P}=\frac{1}{r}\hat{a}_r+z\hat{k}$ قطبیده شده است. چگالی بار قطبش سطحی روی سطح جانبی استوانه چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{1}{L}$ ۲) $\frac{1}{a}$ ۳) 0 ۴) L

۴۳ـ در سطح مشترک بدون بار دو محیط دی‌الکتریک با ضرایب k_1 و k_2، نسبت مؤلفه‌های عمود بردار قطبش $(\frac{P_{n2}}{P_{n1}})$ برابر است با: (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{k_1}{k_2}$ ۲) $\frac{k_2}{k_1}$ ۳) $\frac{k_2-1}{k_1-1}$ ۴) $\frac{k_1(k_2-1)}{k_2(k_1-1)}$

۴۴ـ یک کرهٔ فلزی به شعاع R_0 که به پتانسیل الکتریکی ثابت V_0 متصل است به یک کرهٔ عایق دی‌الکتریک به شعاع a $(a<<R_0)$ و ضریب قطبش‌پذیری ملکولی a که در فاصله بسیار زیاد r $(r>>R_0)$ از آن قرار دارد چه نیروئی وارد می‌سازد؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۰)

۱) نیروی دافعه $\frac{4aR_0^2V_0^2}{r^5}$ ۲) نیروی جاذبه $\frac{4aR_0^2V_0^2}{r^5}$ ۳) نیروی دافعه $\frac{2aR_0^2V_0^2}{r^5}$ ۴) نیروی جاذبه $\frac{2aR_0^2V_0^2}{r^5}$

۴۵ـ عبارت کدام گزینه درست است؟ (برق ـ آزاد ۹۰)

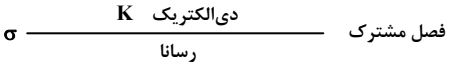
۱) بر روی یک سطح فلزی آرمانی (ایده‌آل)، مؤلفه مماسی میدان الکتریکی همواره صفر و مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی می‌تواند غیرصفر باشد.

۲) بر روی یک سطح فلزی آرمانی (ایده‌آل)، مؤلفه مماسی میدان الکتریکی و مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی هر دو صفر هستند.

۳) بر روی یک سطح فلزی آرمانی (ایده‌آل)، مؤلفه مماسی میدان الکتریکی غیرصفر و مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی صفر است.

۴) بر روی یک سطح فلزی آرمانی (ایده‌آل)، با توجه به شرایط محیط مؤلفه مماسی میدان الکتریکی و مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی هر دو غیر صفر هستند.

۴۶ـ یک دی‌الکتریک با ثابت K مطابق شکل با یک رسانا دارای چگالی بار سطحی σ در تماس می‌باشد.



چگالی بار قطبش روی سطح دی‌الکتریک در فصل مشترک دو محیط چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\sigma\frac{k}{1-k}$ ۲) $\sigma\frac{k}{1+k}$ ۳) $\sigma\frac{1-k}{k}$ ۴) $\sigma\frac{1+k}{k}$

۴۷ـ یک کره رسانای منزوی به شعاع R حامل بار q می‌باشد. چقدر انرژی پتانسیل در میدان الکتریکی این رسانای باردار ذخیره می‌شود؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ ۲) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ ۳) $\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$ ۴) $\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$

۴۸ـ ضریب شکست مغزه یک فیبر نوری استوانه‌ای شکل n_1 است و این مغزه با روکشی با ضریب شکست n_2 به طوری که $n_1>n_2$ احاطه شده است. حداکثر زاویه پرتو ورودی از خلا به فیبر با راستای محور فیبر چقدر باشد تا این پرتو در فیبر انتشار یابد؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۳)

۱) $\text{Arc}\cot\sqrt{n_1^2+n_2^2}$ ۲) $\text{Arc}\tan\sqrt{n_1^2-n_2^2}$ ۳) $\text{Arc}\sin\sqrt{n_1^2-n_2^2}$ ۴) $\text{Arc}\cos\sqrt{n_1^2+n_2^2}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۹ـ اگر N تعداد مولکول‌ها در واحد حجم و α قطبش پذیری مولکولی یک ماده باشد شرط آن که این ماده یک فروالکتریک باشد چیست؟

(فوتونیک ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}=1$

۲) $\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\ll 1$

۳) $\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\gg 1$

۴) $\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}=N_A$ (عدد آووگادرو)

۵۰ـ ضریب شکست یک محیط خطی و همسانگرد با ضریب گذردهی الکتریکی $\varepsilon(\omega)=K_e(\omega)\varepsilon_0$ و ضریب تراوایی مغناطیسی $\mu(\omega)=K_m(\omega)\mu_0$ کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۹۴)

۱) $\sqrt{K_e(\omega)K_m(\omega)}$

۲) $\frac{K_m(\omega)}{K_e(\omega)}$

۳) $\frac{K_e(\omega)}{K_m(\omega)}$

۴) $K_e(\omega)K_m(\omega)$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ گزینه «۳» انرژی یک دو قطبی $\vec{P}$ در میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}$ برابر است با: $U=-\vec{P}.\vec{E}$ $(P=qa)$

متوسط این انرژی در هر نوسان از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$U_{ave}=\frac{1}{2}qaE_0$$

از طرفی انرژی یک نوسانگر با دامنه نوسان A و فرکانس f از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$U=\frac{1}{2}mA^2.4\pi^2f^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}qaE_0=\frac{1}{2}m(\frac{a}{2})^2.4\pi^2f^2$$

$$f=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{qE_0}{ma}}$$

۲ـ گزینه «۳» با استفاده از شرایط مرزی برای مؤلفه‌ی عمودی داریم:

$$D_{2n}=D_{1n}=3\hat{a}_x$$

$$E_{2t}=E_{1t}=\frac{-4}{\varepsilon_0}\hat{a}_y \Rightarrow D_{2t}=k\varepsilon_0 E_{2t}=-12\hat{a}_y$$

برای مؤلفه‌ی مماسی می‌توان نوشت:

$$D_2=3\hat{a}_x-12\hat{a}_y$$

۳ـ گزینه «۳» هرگاه $k_1=k_2$ باشد، در این صورت انتظار داریم که چگالی بارهای قطبیده روی فصل مشترک دو محیط صفر باشد که فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۴ـ گزینه «۲» مؤلفه مماسی شدت میدان الکتریکی در فصل مشترک دو محیط پیوسته است. از آنجا که شدت میدان الکتریکی در راستای شعاع می‌باشد، لذا:

$$\begin{cases}\vec{E}_{1t}=\vec{E}_{1r}=\vec{E}_1\\ \vec{E}_{2t}=\vec{E}_{2r}=\vec{E}_2\end{cases}\Rightarrow \vec{E}_1=\vec{E}_2$$

با اعمال شکل انتگرالی قانون گاوس خواهیم داشت:

$$\oiint \vec{D}.d\vec{s}=Q \Rightarrow (\varepsilon_1E_1+\varepsilon_2E_2)2\pi r^2=Q \Rightarrow (\varepsilon_1E_1+\varepsilon_2E_2)2\pi r^2=Q \Rightarrow E_1=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

۵ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه $\rho_b=-\vec{\nabla}.\vec{P}$ داریم:

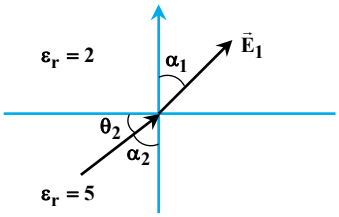
$$-\oiint \vec{P}.d\vec{s}=Q_P=\iiint \rho_b\,dv$$

$$4\pi r^2P_r=\frac{-4}{3}\pi r^3\rho_b \Rightarrow \vec{P}=\frac{-\rho_b r}{3}\hat{a}_r$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به شکل زیر ابتدا با استفاده از رابطه معرفی شده در متن درس زاویه α_2 را به دست می‌آوریم. سپس با توجه به این که در تست زاویه θ_2 خواسته شده است، با استفاده از رابطه $\theta_2 = 90^\circ - \alpha_2$ زاویه θ_2 را به دست می‌آوریم:



$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \Rightarrow tg\alpha_1 = \frac{\sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2}}{E_{z1}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{5}{2}.\frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 61^\circ$$

بنابراین زاویه‌ای که $\vec{E}_2$ با سطح جدائی دو محیط می‌سازد برابر 32° خواهد بود.

توضیح: اگر به‌جای $\vec{E} = \hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ در صورت سؤال $2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ قرار داده شود، گزینه (۱) درست است.

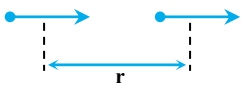
۷ـ گزینه «۳» به علت تقارن استوانه‌ای، شدت میدان الکتریکی در اطراف محور استوانه به صورت $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$ می‌باشد و لذا برای ثابت ماندن $\vec{E}$ لازم است که ε متناسب با $\frac{1}{r}$ باشد.

۸ـ گزینه «۴» از آنجایی که عایق از ابتدا بدون بار فرض شده، لذا مجموع کل بارهای مقیدی که در اثر پلاریزاسیون تشکیل می‌گردند برابر صفر می‌باشد. $(\rho_{sb} + \rho_b = 0)$؛ پس بار کل درون سطح بسته گاوسی کروی شکل با شعاع $R > 2a$ همان بار سطحی روی کره رسانا خواهد بود.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r = \frac{4\pi a^2\rho_s}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{E_0}{r^2}\hat{a}_r \Rightarrow \rho_s = \frac{\varepsilon_0 E_0}{a^2}$$

۹ـ گزینه «۳» در یک 2^n قطبی پتانسیل با ضریب $\frac{1}{r^{n+1}}$ تغییر می‌کند. بنابراین در ۸ قطبی نشان داده شده در شکل $(n = 3)$ پتانسیل با ضریب $\frac{1}{r^4}$ متناسب است.

۱۰ـ گزینه «۳» برای دو دو قطبی که در یک امتداد قرار دارند و هم جهت با یکدیگر می‌باشند نیرو از نوع جاذبه می‌باشد و برابر است با:

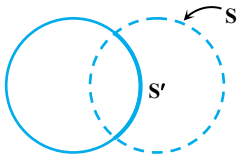


$$F = \frac{3P^2}{32\pi\varepsilon_0 r^4}$$

مثلاً می‌توان هر دو قطبی را به صورت بار منفی دید و لذا چون هر یک از دو قطبی‌های بارهای ناهمنام به هم نزدیک‌تر هستند در نتیجه نیرو به صورت جاذبه است.

$\ominus \rightarrow \oplus$

۱۱ـ گزینه «۲» انتگرال داده شده قانون گاوس است، بنابراین حاصل آن برابر با مقدار بار قرار گرفته در سطح S می‌باشد. مقدار بار قرار گرفته در سطح S برابر بار مقید سطحی ρ_{sb} و حجمی ρ_b می‌باشد؛ پس ابتدا ρ_{sb} و ρ_b را به دست می‌آوریم:



$$D = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{a}_r \ , \ E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \hat{a}_r\frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r r^2}q \Rightarrow \begin{cases} \rho_b = -\vec{\nabla}.P = 0 \\ \rho_{sb} = \vec{P}.\hat{a}_r\Big|_{r=a} = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r a^2} \end{cases}$$

$$I = \oint_S \varepsilon_0\vec{E}.d\vec{s} = \iiint \vec{\nabla}.(\vec{D} - \vec{P})dv = \iiint \rho_b dv$$

$$I = \int \rho_{sb}ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r a^2}(a^2\sin\theta d\theta d\varphi) \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r}(1 - \cos\alpha)q \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\ \frac{2 - \sqrt{2}}{4}q$$

www.modaresanesharif.ac.ir

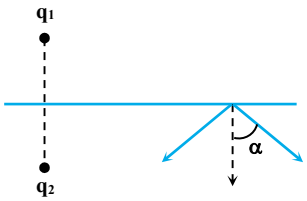
www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ گزینه «۱» چون میله بدون بار آزاد است بنابراین میدان الکتریکی در نقطه A توسط بارهای مقید حجمی و سطحی به وجود می‌آید که توسط بردار $\vec{P}$ درون میله ایجاد می‌شود. پس ابتدا باید ρ_{sb} و ρ_b را به دست آوریم:

$$\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P} = 0$$

$$\rho_{sb} = \vec{P}.\hat{a}_n = \begin{cases} 2\hat{a}_z.\hat{a}_z = 2 & \text{سطح بالایی میله} \\ 2\hat{a}_z.\hat{a}_r = 0 & \text{سطح جانبی میله} \\ 2\hat{a}_z.(-\hat{a}_z) = -2 & \text{سطح پایینی میله} \end{cases}$$

با توجه به این که سطح مقطع میله خیلی کوچک می‌باشد، پس بار روی سطح پایینی و بالایی را به صورت دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در نظر می‌گیریم و میدان الکتریکی حاصل از آن‌ها را در نقطه A به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} q_1 = 2\pi[(\frac{1}{2})^{\mu m}]^2 & \text{روی سطح بالایی} \\ q_2 = -2\pi[(\frac{1}{2})^{\mu m}]^2 & \text{روی سطح پایینی} \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{2\pi.\frac{1}{4}\times 10^{-12}}{4\pi\varepsilon_0.2\times[10^{mm}]^2} \quad \text{و} \quad E_2 = \frac{2\pi.\frac{1}{4}\times 10^{-12}}{4\pi\varepsilon_0(2\times[10^{mm}]^2)}$$

$$E_T = 2E_1\cos\alpha = 2E_1.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1600\varepsilon_0}(-\hat{a}_z)$$

۱۳ـ گزینه «۳» ابتدا میدان $\vec{E}_0$ را به مؤلفه‌های مماسی و عمودی تجزیه می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \vec{E}_{0n} + \vec{E}_{0t} \\ \vec{E}_{0n} &= (\hat{n}.\vec{E}_0)\hat{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E}_{0t} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{0n} = \vec{E}_0 - (\hat{n}.\vec{E}_0)\hat{n}$$

با استفاده از شرایط مرزی مؤلفه‌های عمودی و مماسی میدان الکتریکی درون عایق $(\vec{E}_d)$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{D}_{0n} = \vec{D}_{dn} \Rightarrow \vec{D}_{dn} = \varepsilon_0\vec{E}_{0n} = \varepsilon_0(\hat{n}.\vec{E}_0)\hat{n} \Rightarrow \vec{E}_{dn} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}(\hat{n}.\vec{E}_0)\hat{n}$$

$$\vec{E}_{0t} = \vec{E}_{dt} \Rightarrow \vec{E}_{dt} = \vec{E}_0 - (\hat{n}.\vec{E}_0)\hat{n}$$

با جمع کردن $\vec{E}_{dn}$ و $\vec{E}_{dt}$ میدان $\vec{E}_d$ را به دست می‌آوریم و با استفاده از آن بردار $\vec{P}$ حاصل می‌شود:

$$\vec{E}_d = \vec{E}_{dn} + \vec{E}_{dt} = \vec{E}_0 + (\frac{1}{\varepsilon_r} - 1)(\hat{n}.\vec{E}_0)\hat{n}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_d \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0 - \varepsilon_0\frac{(\varepsilon_r - 1)^2}{\varepsilon_r}(\hat{n}.\vec{E}_0)\hat{n}$$

۱۴ـ گزینه «۳» سایر گزینه‌ها درست است. در اثر هال با اعمال یک میدان مغناطیسی به سیم و اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل در ضخامت سیم می‌توان نوع حامل‌های بار را تعیین کرد.

۱۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم به ازای $n = 0,1,2,...$، 2^n قطبی داریم. یعنی اگر $n = 0$ باشد تک قطبی و اگر $n = 1$، دو قطبی و $n = 2$، چهار قطبی حاصل می‌شود و پتانسیل یک 2^n قطبی به صورت زیر می‌باشد:

$$V(r) \propto \frac{1}{r^{(n+1)}}$$

مثلاً برای $n = 0$، پتانسیل با $\frac{1}{r}$ متناسب می‌باشد. در اینجا وقتی می‌گوید پتانسیل با $\frac{1}{r^3}$ کاهش می‌یابد یعنی اینکه $n = 2$ می‌باشد و بنابراین با یک چهار قطبی سروکار داریم. که اولاً بار الکتریکی کل و نیز گشتاور دو قطبی توزیع بار صفر می‌شود و ثانیاً تانسورهای گشتاور چهار قطبی غیرصفر داریم.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۶ـ گزینه «۴» زیرا در این حالت می‌توان انرژی دی‌الکتریک را از رابطه‌ی $u=-\frac{1}{2}\vec{P}.\vec{E}$ به دست آورد، $\vec{F}=-\vec{\nabla}u$ می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۱» Q، بار کل توزیع باری با چگالی $\rho(r)$ می‌باشد. حجم کل توزیع بار V است و $\vec{R}=\frac{1}{V}\int\vec{r}dv$: فرض $\vec{P}=\int_v\rho(r)\vec{r}dv$

همچنین می‌دانیم که اگر بار کل صفر باشد، گشتاور دوقطبی توزیع بار به مبدأ مختصات بستگی نخواهد داشت. اما در اینجا بار کل برابر Q می‌باشد و چون $\vec{r}$ فاصله از مبدأ مختصات می‌باشد، لذا گشتاوردو قطبی توزیع بار صفر می‌شود.

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا باید مقدار بار مقید ایجاد شده روی سطح و درون کره را به دست آوریم:

$$\rho_b=-\vec{\nabla}.P=-\vec{\nabla}.(P_\circ\vec{k})=\circ \quad , \quad \rho_{sb}=\vec{P}.\hat{n}=P_\circ\vec{k}.\hat{a}_r=P_\circ\cos\theta$$

حال باید پتانسیل الکتریکی ایجاد شده توسط چگالی بار سطحی ρ_{sb} در مرکز کره را به دست آوریم (فرض می‌کنیم که مرکز کره در مرکز مختصات قرار گرفته باشد). با استفاده از تعریف پتانسیل چگالی بار پیوسته که در فصل پتانسیل الکتریکی معرفی کردیم داریم:

$$V=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{\rho_{sb}}{4\pi\varepsilon_\circ a}a^2\sin\theta d\theta d\varphi=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{P_\circ\cos\theta\sin\theta}{4\pi\varepsilon_\circ}ad\theta d\varphi=\circ$$

چون بار آزاد درون کره وجود ندارد بنابراین پتانسیل الکتریکی ایجاد شده در مرکز صفر می‌باشد. حال با استفاده از تعریف میدان الکتریکی چگالی بار پیوسته میدان را در مرکز کره به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{\rho_{sb}(-\hat{a}_r)}{4\pi\varepsilon_\circ a^2}a^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

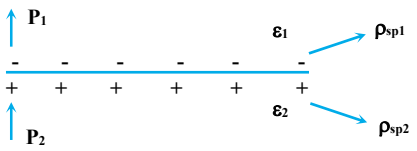
از آنجایی که $\hat{a}_r$ متغیر است باید ابتدا آن را به دستگاه دکارتی انتقال دهیم:

$$\vec{E}=-\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{P_\circ\cos\theta}{4\pi\varepsilon_\circ}(\cos\varphi\sin\theta\hat{a}_x+\sin\varphi\sin\theta\hat{a}_y+\cos\theta\hat{a}_z)\sin\theta d\theta d\varphi$$

با توجه به انتگرال بالا خیلی راحت نتیجه می‌گیریم که مؤلفه $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ میدان $\vec{E}$ صفر می‌شوند. بنابراین:

$$\vec{E}=-\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{P_\circ\cos^2\theta\sin\theta}{4\pi\varepsilon_\circ}\hat{a}_y d\theta d\varphi=-\frac{P_\circ}{3\varepsilon_\circ}\hat{a}_z=-\frac{P_\circ}{3\varepsilon_\circ}\vec{k}$$

۱۹ـ گزینه «۲» بار سطحی کل را برحسب بردارهای پلاریزاسیون به صورت زیر می‌نویسیم:



$$\rho_{sp}=\rho_{sp2}+\rho_{sp1}=\vec{P}_2.\hat{n}+\vec{P}_1.(-\hat{n})=P_{n_2}-P_{n_1}$$

$$P_{n_1}=P_{n_2}-\rho_{sp}$$

۲۰ـ گزینه «۱» برای حل به این صورت عمل می‌کنیم. از حل معادله‌ی لاپلاس و با توجه به شرایط مرزی، پتانسیل به صورت $\phi(r)=\frac{Vb}{r}$ خواهد بود، لذا برای میدان خواهیم داشت:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=+\frac{Vb}{r^2}\hat{r}$$

پس انرژی کره‌ی دی‌الکتریکی در میدان برابر است با:

$$u=\frac{1}{2}\vec{P}.\vec{E}=-\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\chi E^2=-\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\chi\frac{V^2b^2}{r^4}$$

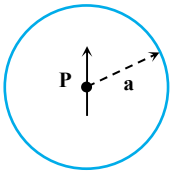
بنابراین نیروی وارد بر کره برابر است با:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}u\Rightarrow F=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\chi\frac{4V^2b^2}{r^5}=\frac{2\varepsilon_\circ\chi V^2b^2}{r^5}$$

که همان گزینه‌ی ۱ است و به نظر می‌رسد یک $\varepsilon_\circ$ جا افتاده است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir



۲۱ـ گزینه «۳» میدان در نقاط دور از دو قطبی به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{E}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_\circ r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta)$$

حال با استفاده از تعریف انرژی الکترواستاتیکی داریم:

$$W=\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\varepsilon_\circ|\vec{E}|^2\,r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr=\frac{P^2}{12\pi\varepsilon_\circ a^3}$$

۲۲ـ گزینه «۴» شدت میدان الکتریکی در فاصله $a<r<b$ ، طبق قانون گاوس از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{E}=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon r}\hat{r}\Rightarrow\vec{P}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_\circ\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\varepsilon_r r}$$

حال با استفاده از بردار $\vec{P}$ چگالی بار سطحی مقید را به دست می‌آوریم:

$$\vec{P}=\frac{2\rho_L}{6\pi r}\Rightarrow\rho_{sb}=\vec{P}.\hat{n}\big|_{r=b}=\frac{2\rho_L}{6\pi b}\qquad q_b=\rho_{sb}.2\pi b=\frac{2\rho_L}{3}\Rightarrow\frac{q_b}{\rho_L}=\frac{2}{3}$$

۲۳ـ گزینه «۲» یک راه‌حل سریع آن است که انرژی دو قطبی در میدان الکتریکی را با نوسانات کوچکی به بسامد ω مقایسه کنیم. اگر k لختی دوران باشد انرژی این نوسانات می‌بایست با انرژی دو قطبی برابر باشد بنابراین:

$$W=\frac{1}{2}PE=\frac{1}{2}k\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{PE}{k}}=2\times10^{13}$$

۲۴ـ گزینه «۴» از رابطه‌ی بردار جابه‌جایی الکتریکی و معادلات ماکسول خواهیم داشت:

$$\vec{D}=\varepsilon_\circ\vec{E}+\vec{P}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(\vec{D}-\vec{P})\Rightarrow\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(\vec{\nabla}.\vec{D}-\vec{\nabla}.\vec{P})\quad;\quad\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(\rho+\rho_p)$$

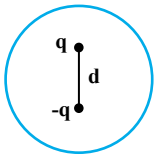
۲۵ـ گزینه «۱» انرژی در واحد حجم به صورت زیر می‌باشد:

$$W_e=\frac{1}{2}\vec{D}.\vec{E}=\frac{1}{2}(\varepsilon_\circ\vec{E}+\vec{P}).\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ|\vec{E}|^2+\frac{1}{2}\vec{E}.\vec{P}$$

جمله $\frac{1}{2}\vec{E}.\vec{P}$ انرژی مربوط به حضور دی‌الکتریک می‌باشد. از آنجا که نیرو برابر منفی گرادیان انرژی است، در نتیجه داریم:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}(\frac{1}{2}\vec{E}.\vec{P})$$

۲۶ـ گزینه «۳» شدت میدان الکتریکی در اطراف یک دوقطبی الکتریکی از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\vec{E}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_\circ r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta)\qquad|\vec{E}|^2=\frac{P^2}{16\pi^2\varepsilon_\circ^2 r^6}(4\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$W=\frac{1}{2}\iiint\varepsilon_\circ|E|^2dv=\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\frac{\varepsilon_\circ P^2(4\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{16\pi^2\varepsilon_\circ^2 r^2}r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$W=\frac{P^2.2\pi}{32\pi^2\varepsilon_\circ}\int_a^\infty\int_\circ^{\pi}\frac{(4\cos^2\theta\sin\theta d\theta+\sin^3\theta d\theta)}{r^4}dr\quad;\quad W=\frac{P^2}{16\pi\varepsilon_\circ}\int_a^\infty\frac{4}{r^4}dr=\frac{P^2}{12\pi\varepsilon_\circ a^3}$$

۲۷ـ گزینه «۱» چگالی بار سطحی با تفاضل مؤلفه‌های عمودی چگالی شار الکتریکی رابطه دارد:

$$\rho_s=(\vec{D}_2-\vec{D}_1).\vec{n}=\vec{D}_{2n}-\vec{D}_{1n}=\varepsilon_\circ\varepsilon_{r2}\vec{E}_{2n}-\varepsilon_\circ\varepsilon_{r1}\vec{E}_{1n}=2\varepsilon_\circ|\vec{E}_\circ|\cos\theta-4\varepsilon_\circ|\vec{E}_\circ|\cos\theta=-2\varepsilon_\circ|\vec{E}_\circ|\cos\theta$$

۲۸ـ گزینه «۴» شدت میدان الکتریکی در داخل هر حفره واقع در رسانا مستقل از بار الکتریکی خارج از آن می‌باشد. بنابراین بار q_1 میدان الکتریکی ناشی از q_3 را نخواهد دید و نیروی الکتریکی ناشی از آن صفر خواهد بود. همچنین نیروی الکتریکی وارد از طرف بار q_2 بر بار q_1 چنین می‌باشد:

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_\circ(\frac{b}{2})^2}=\frac{q_1q_2}{\pi\varepsilon_\circ b^2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۹ـ گزینه «۳» با استفاده از بردار پلاریزاسیون، بارهای مقید سطحی و حجمی را به دست می‌آوریم:

$$\vec{P} = n\vec{P} = n P_\circ \hat{a}_z$$

$$\rho_{sb} = \vec{P}.\hat{n} = \begin{cases} nP_\circ & z = h \\ -nP_\circ & z = \circ \end{cases}$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P} = \circ$$

از طرف دیگر، پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای سطحی نیم‌دایره‌ای شکل واقع در $z = h$ و $z = \circ$ در نقطه A به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{cases} V_۱ = \dfrac{\rho_s}{۴\varepsilon_\circ} a \\ V_۲ = \dfrac{-\rho_s}{۴\varepsilon_\circ}[\sqrt{a^۲ + h^۲} - h] \end{cases} \Rightarrow V = V_۱ + V_۲ = \frac{\rho_s}{۴\varepsilon_\circ}[a + h - \sqrt{a^۲ + h^۲}] = \frac{nP_\circ}{۴\varepsilon_\circ}[a + h - \sqrt{a^۲ + h^۲}]$$

۳۰ـ گزینه «۲» اگر انرژی الکتروستاتیک کل محیط خواسته شده بود، به دست آوردن آن کار مشکلی بود؛ ولی به دست آوردن انرژی الکتروستاتیکی خارج از کره کار بسیار ساده‌ای است، ابتدا باید میدان الکتریکی در ناحیه‌های خارج از کره را به دست آوریم. برای به دست آوردن میدان الکتریکی خارج کره باید بار درون کره را به دست آوریم. با توجه به چگالی بار خطی حلقه بار درون کره برابر است با :

$$\rho_L = \frac{d\theta}{dL} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} dQ_{in} = \rho_L dL \\ dL = r d\varphi \\ r = \circ/۲۵ \end{array}\right\} d\theta = ۴\varepsilon_\circ \sin^۲\varphi \times \circ/۲۵ d\varphi$$

با انتگرال‌گیری از dQ می‌توانیم بار الکتریکی درون کره را به دست آوریم. با توجه به اینکه بار روی یک حلقه کامل قرار گرفته است داریم: $\circ < \varphi < ۲\pi$

$$Q_\circ = \int_\circ^{۲\pi} ۴\varepsilon_\circ \sin^۲\varphi \times \circ/۲۵ d\varphi = \pi\varepsilon_\circ$$

حال با توجه به اینکه مقدار بار الکتریکی درون کره را به دست آوردیم میدان الکتریکی خارج از کره را محاسبه می‌کنیم.

$$۱ < r < ۱/۲ \Rightarrow E_۱ = \frac{Q_{in}}{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon_r r^۲} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{۴\pi\varepsilon_\circ(۲)r^۲} = \frac{۱}{۸r^۲} \quad , \quad ۱/۲ < r \Rightarrow E_۲ = \frac{Q_{in}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} = \frac{۱}{۴r^۲}$$

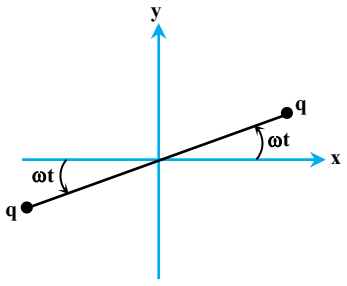
حال با توجه به میدان‌های الکتریکی، انرژی در خارج از کره به صورت مقابل می‌باشد: $W = \frac{۱}{۲}\int_۱^{۱/۲} \varepsilon_\circ\varepsilon_r |E_۱|^۲ dv + \frac{۱}{۲}\int_{۱/۲}^{\infty} \varepsilon_\circ\varepsilon_r |E_۲|^۲ dv = \frac{۱۱\pi\varepsilon_\circ}{۹۶}$

۳۱ـ گزینه «۴» تانسور گشتاور چهار قطبی الکتریکی به صورت مقابل است: $Q_{ij} = \sum_{m=۱}^{n} (۳x'_{im}x'_{jm} - \delta_{ij}r'^۲_m)q_m$

بنابراین می‌توانیم به محاسبه ممان‌ها بپردازیم:

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{Bmatrix}$$

$(x,y,z) \xrightarrow{\text{متناظر با}} i,j = ۱,۲,۳$ و m معرف تعداد بارهاست.



$$Q_{xx} = ۲.(۳(L\cos\omega t)(L\cos\omega t) - L^۲)q = ۶qL^۲\cos^۲\omega t - ۲qL^۲$$

$$Q_{yy} = ۲[۳(L\sin\omega t)(L\sin\omega t) - L^۲)]q = ۶qL^۲\sin^۲\omega t - ۲qL^۲$$

$$Q_{zz} = ۲[\circ - L^۲]q = -۲qL^۲$$

$$Q_{xz} = Q_{yz} = Q_{zx} = Q_{zy} = \circ \quad \leftarrow \text{(چون بار در امتداد محور z نداریم.)}$$

$$Q_{xy} = ۲[۳(L\cos\omega t)(L\sin\omega t)]q = ۳qL^۲(۲\sin\omega t\cos\omega t) = ۳qL^۲\sin(۲\omega t)$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = ۳qL^۲(۲\sin\omega t\cos\omega t) = ۳qL^۲\sin(۲\omega t)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

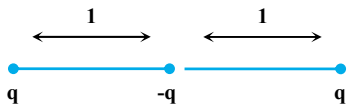
www.modaresanesharif.ac.ir

۳۲ـ گزینه «۲» در حالت اول که دو قطبی الکتریکی در بی‌نهایت قرار دارد، انرژی الکتریکی چنین می‌باشد:

$$w_1 = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} = 9\times10^9 \times[-\frac{10^{-12}}{1}]$$

هنگامی که دو قطبی در مجاورت بار نقطه‌ای قرار می‌گیرد، انرژی سیستم از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$w_2 = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$



$$w_2 = 9\times10^9\left[-\frac{q^2}{1}+\frac{q^2}{2}-\frac{q^2}{1}\right] = 9\times10^9\times(-\frac{3}{2})\times10^{-12} = -13/5\times10^{-3}$$

کار انجام شده توسط عامل خارجی، تفاضل انرژی‌ها در دو حالت فوق می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

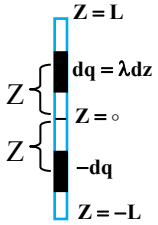
$$\Delta w = w_2 - w_1 = -4/5\times10^{-3}\ J$$

۳۳ـ گزینه «۱» ابتدا گشتاور دوقطبی جزء بار را به دست می‌آوریم:

$$dP = (dq)(2z) = (\lambda dz)2z$$

گشتاور دوقطبی کل برابر است با:

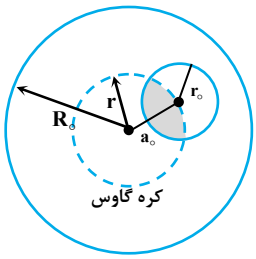
$$P = \int_0^L dP = \int_0^L 2\lambda z dz = \lambda L^2$$



۳۴ـ گزینه «۳» روش تشریحی برای حل این تست بسیار وقت‌گیر است. از این‌رو از رابطه گاوس بهره برده و میدان الکتریکی داخل حفره را می‌یابیم، سپس از $U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 dV$ استفاده می‌کنیم.

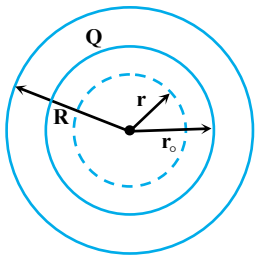
خوشبختانه این سؤال به راحتی از روش حذف گزینه‌ها حل می‌شود. فقط نکات زیر را باید بدانیم:

۱ـ بدیهی است که با صفر شدن شعاع حفره r_0 حفره از بین می‌رود، یعنی انرژی داخل آن باید صفر شود پس گزینه ۴ حذف می‌شود.



۲ـ داخل چنین حفره‌ای میدان الکتریکی هرگز صفر نمی‌شود چون شکل تقارن ندارد پس اگر $r_0 \neq 0$ باشد نباید میدان داخل حفره صفر شود، به عبارتی انرژی داخل حفره $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ در این شکل نامتقارن هرگز صفر نیست لذا گزینه ۱ نیز حذف می‌شود.

۳ـ فرض کنیم شعاع حفره همان r_0 باشد ولی حفره دقیقاً در مرکز کره قرار بگیرد یعنی $a_0 = 0$. در این صورت شکل حاصل دارای تقارن کامل است لذا میدان داخل حفره صفر خواهد شد (زیرا نمی‌توان هیچ سطح گاوسی زد که از داخل حفره بگذرد و داخل این سطح گاوسی بار الکتریکی هم قرار گیرد) بنابراین جواب مسئله باید با صفر شدن a مقدار صفر را به ما دهد که فقط گزینه ۳ است که این شرایط را ارضا می‌کند.



در شکل متقارن میدان الکتریکی داخل حفره صفر می‌شود.

۳۵ـ گزینه «۳» بارهای $+Q$ و $-Q$ تشکیل یک دو قطبی الکتریکی می‌دهند. شدت میدان الکتریکی ناشی از این دو قطبی در فاصله‌های دور به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r + \sin\theta\hat{a}_\theta)$$

اندازه میدان $\vec{E}$ برابر است با:

$$|E| = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\sqrt{(2\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2})$$

حال که اندازه $\vec{E}$ را به دست آوردیم، می‌توانیم با استفاده از رابطه زیر چگالی انرژی را به دست آوریم:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_a^\infty |E|^2\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_a^\infty \frac{Q^2d^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^6}(3\cos\theta^2+1)r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{Q^2d^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^\infty\frac{dr}{r^4}\int_0^\pi(3\cos^2\theta+1)\sin\theta d\theta = \frac{Q^2d^2}{16\pi\varepsilon_0}[-\frac{1}{3}r^{-3}]_a^\infty[-\cos^3\theta-\cos\theta]_0^\pi = \frac{Q^2d^2}{12\pi\varepsilon_0 a^3}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا بردار $\vec{P}$ را برحسب بردار $\vec{D}$ بیان می‌کنیم:

$$\frac{P_{n_2}}{P_{n_1}}=\frac{(1-\frac{1}{\varepsilon_{r_2}})D_{n_2}}{(1-\frac{1}{\varepsilon_{r_1}})D_{n_1}}=\frac{\varepsilon_{r_1}(\varepsilon_{r_2}-1)}{\varepsilon_{r_2}(\varepsilon_{r_1}-1)}(\frac{D_{n_2}}{D_{n_1}})$$

با فرض اینکه روی فصل مشترک دو محیط بار آزاد وجود نداشته باشد مؤلفه عمودی D پیوسته باقی می‌ماند. $(D_{n_1}=D_{n_2})$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{P_{n_2}}{P_{n_1}}=\frac{\varepsilon_{r_1}(\varepsilon_{r_2}-1)}{\varepsilon_{r_2}(\varepsilon_{r_1}-1)}$$

۳۷ـ گزینه «۱» با توجه به شرایط مرزی می‌توان چنین نوشت: $\vec{E}_{1t}=\vec{E}_{2t}\Rightarrow\vec{E}_{2t}=10\hat{i}+12\hat{k}$

با استفاده از شرط مرزی برای مؤلفه عمودی داریم:

$$\vec{D}_{1n}=\vec{D}_{2n}\Rightarrow\varepsilon_1\vec{E}_{1n}=\varepsilon\vec{E}_{2n}\Rightarrow 3\varepsilon_0(-6)\hat{j}=\frac{9\varepsilon_0}{2}\vec{E}_{2n}\Rightarrow\vec{E}_{2n}=-4\hat{j}$$

بنابراین:

$$\vec{E}_2=\vec{E}_{2t}+\vec{E}_{2n}=10\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k}$$

چگالی انرژی الکتریکی به صورت $\frac{1}{2}\varepsilon|E|^2$ می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$\frac{w_2}{w_1}=\frac{\frac{1}{2}\varepsilon_2|E_2|^2}{\frac{1}{2}\varepsilon_1|E_1|^2}=\frac{\frac{9}{2}\varepsilon_0(100+16+146)}{3\varepsilon_0(100+36+144)}=\frac{78}{56}=\frac{117}{84}$$

۳۸ـ گزینه «۲» طبق قانون گاوس شدت میدان الکتریکی در داخل کره چنین است: $\vec{E}=\frac{\rho_r}{3\varepsilon_0}\hat{a}_r$

با توجه به اینکه پوسته کروی زمین شده است، خواهیم داشت:

$$V(r)=\int_r^{R_1}Edr=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R_1^2-r^2)$$

لذا برای انرژی می‌توان اینگونه نوشت:

$$W=\int\frac{1}{2}\rho Vdv=\frac{1}{2}\int_0^{R_1}\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R_1^2-r^2)\rho(4\pi r^2dr)=\frac{2\rho^2R_1^5}{45\varepsilon_0}$$

۳۹ـ گزینه «۴» نیروی وارد بر سطح رسانا از رابطه مقابل به‌دست می‌آید: $\vec{F}=\frac{1}{2}\int\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}d\vec{s}$

چگالی بار سطحی کره برابر است با: $\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$

با جایگذاری به جای σ در رابطه‌ی اول و محاسبه‌ی انتگرال خواهیم داشت:

$$\vec{F}=\frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{Q}{4\pi R^2})^2(R^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{a}_R)=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta d\theta d\varphi[\sin\theta\cos\varphi\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y+\cos\theta\hat{a}_z]$$

با توجه به روابط $\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=0$ می‌توان نوشت:

$$F=\frac{Q^2}{32\pi R^2\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta)d\theta d\varphi\hat{a}_z=\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_z$$

۴۰ـ گزینه «۲» ابتدا انرژی دوقطبی را در هر دو حالت به دست می‌آوریم. اختلاف انرژی بین دو حالت برابر کار لازم می‌باشد.

$$\begin{cases}W_1=-\vec{P}.\vec{E}=-PE\cos\theta\\ W_2=-PE\cos 0=-PE\end{cases}\Rightarrow\Delta W=W_2-W_1=PE(\cos\theta-1)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۱ـ گزینه «۳» ابتدا انرژی الکترواستاتیک ذخیره شده در دو حالتی که بار روی کره کوچک‌تر و کره بزرگ‌تر قرار گرفته است را به‌دست می‌آوریم. اختلاف این دو انرژی برابر اتلاف انرژی حرارتی می‌باشد:

انرژی کره کوچکتر:

$$\left.\begin{aligned} W_۲ &= \frac{۱}{۲}qV_۲ \\ V_۲ &= \frac{q}{۴\pi\varepsilon a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_۲ = \frac{q^۲}{۸\pi a}$$

انرژی کره بزرگتر:

$$\left.\begin{aligned} W_۱ &= \frac{۱}{۲}qV_۱ \\ V_۱ &= \frac{q}{۴\pi\varepsilon R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_۱ = \frac{q^۲}{۸\pi\varepsilon R}$$

اختلاف دو انرژی برابر است با:

$$\Delta W = W_۲ - W_۱ = \frac{q^۲}{۸\pi\varepsilon}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{R}\right)$$

۴۲ـ گزینه «۲» چگالی بار قطبش سطحی با استفاده از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\rho_{sb} = \vec{P}.\hat{a}_r = \left(\frac{۱}{a}\hat{a}_r + z\hat{a}_z\right).\hat{a}_r = \frac{۱}{a}$$

۴۳ـ گزینه «۴» ابتدا $\vec{P}$ را برحسب $\vec{E}$ و $\vec{D}$ می‌نویسیم:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_۰\vec{E}$$

مؤلفه‌های عمودی $\vec{D}$ و $\vec{E}$ در مرز مشترک به صورت مقابل می‌باشند:

$$D_{۱n} = D_{۲n} \quad , \quad E_{۱n} = \frac{D_{۱n}}{\varepsilon_۰ k_۱} \quad , \quad E_{۲n} = \frac{D_{۲n}}{\varepsilon_۰ k_۲}$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه $\vec{P}$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} P_{۲n} &= D_{۲n}\left(۱ - \frac{۱}{k_۲}\right) \\ P_{۱n} &= D_{۱n}\left(۱ - \frac{۱}{k_۱}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_{۲n}}{P_{۱n}} = \frac{k_۱(k_۲ - ۱)}{k_۲(k_۱ - ۱)}$$

۴۴ـ گزینه «۲» نیرو از نوع جاذبه بوده و به صورت زیر محاسبه می‌گردد. ابتدا انرژی را محاسبه می‌کنیم و سپس با گرادیان‌گیری نیرو را به دست می‌آوریم. لذا:

$$W = -\vec{P}.\vec{E} = -a\vec{E}.\vec{E} = -a\,|\vec{E}\,|^۲$$

از طرفی بار الکتریکی کره فلزی با پتانسیل $V_۰$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$Q = ۴\pi\varepsilon_۰ R_۰ V_۰ \Rightarrow E = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} = \frac{R_۰ V_۰}{r^۲}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$W = -a\left(\frac{R_۰ V_۰}{r^۲}\right)^۲ = -\frac{aR_۰^۲ V_۰^۲}{r^۴}$$

طبق رابطه $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$ خواهیم داشت:

$$|\vec{F}| = |\vec{\nabla}W| = \frac{۴aR_۰^۲ V_۰^۲}{r^۵}$$

۴۵ـ گزینه «۱» همانطور که می‌دانیم مؤلفه مماسی میدان الکتریکی بر روی سطح یک فلز صفر می‌باشد و مؤلفه عمودی میدان الکتریکی برابر است با:

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \Rightarrow D_n = \rho_s$$

که ρ_s چگالی سطحی بار الکتریکی بر روی سطح فلز می‌باشد.

۴۶ـ گزینه «۳» میدان الکتریکی بر روی سطح یک رسانا به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰ k}\hat{a}_n \Rightarrow \vec{D} = \sigma\hat{a}_n$$

$\hat{a}_n$ بردار واحد عمود بر سطح رسانا می‌باشد. برای به‌دست آوردن چگالی بار قطبش روی سطح عایق باید بردار قطبی‌شدگی $\vec{P}$ را به‌دست آوریم:

$$\vec{D} = \varepsilon_۰\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_۰\vec{E} = \sigma\hat{a}_n - \frac{\sigma}{k}\hat{a}_n \Rightarrow \vec{P} = \sigma\frac{k-۱}{k}\hat{a}_n$$

چگالی بار قطبش روی سطح عایق برابر است با:

$$\rho_{sb} = \vec{P}.(-\hat{a}_n) = \frac{۱-k}{k}\sigma$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۷ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

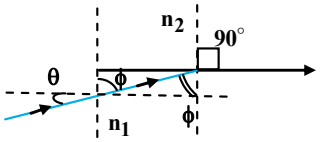
چون یک کره داریم می‌توانیم به سادگی از رابطه‌ی انرژی الکترواستاتیکی استفاده کنیم، با استفاده از تعریف انرژی الکترواستاتیک داریم:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1}q_iV_i=\frac{1}{2}q_1V_1$$

پتانسیل روی سطح کره برابر است با:

$$V_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_\circ R}\Rightarrow W=\frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_\circ R}$$

۴۸ـ گزینه «۳» مقطعی از فیبر نوری را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید:



که پرتو نوری از خلأ به فیبر نوری وارد می‌شود.

پرتو نوری با زاویه θ نسبت عمود بر مقطع استوانه (همان محور فیبر) وارد می‌شود، سپس با زاویه $90-\phi$ نسبت به محور فیبر داخل مغزی می‌شود و با زاویه ϕ به سطح مشترک دو استوانه می‌خورد و با زاویه 90 مماس بر مقطع خارج می‌شود. این زاویه (θ) بیشترین زاویه‌ای است که نور از مغزه خارج نمی‌شود، چرا که زاویه‌ی بیشتر θ باعث می‌شود که زاویه مماس تبدیل به زاویه‌ای کمتر از 90° شود و این یعنی نور وارد استوانه‌ی روکش شود. پس:

از قوانین شکست نور (نور کلاسیکی و قانون فرما) می‌توان روابط روبه‌رو را برای هر مرحله از ورود نور به مرز دو ماده مختلف نوشت.

$$\frac{\text{Sin}\theta}{\text{Sin}(90-\phi)}=\frac{n_1}{1\ (\text{ضریب شکست خلأ})}$$

$$\frac{\text{Sin}\phi}{\text{Sin}90^\circ}=\frac{n_2}{n_1}$$

$$\rightarrow \text{Sin}\phi=\frac{n_2}{n_1},\ \cos\phi=\sin\theta\times\frac{1\ (\text{ضریب شکست خلأ})}{n_1}$$

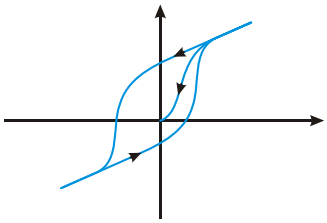
دو معادله بالا را به توان ۲ می‌رسانیم و جمع می‌کنیم.

$$\sin^2\phi+\cos^2\phi=(\frac{n_2}{n_1})^2+(\frac{1}{n_1})^2\sin^2\theta\rightarrow\sin^2\theta=n_1^2-n_2^2$$

پس:

$$\theta=\sin^{-1}(\sqrt{n_1^2-n_2^2})$$

۴۹ـ گزینه «۱» فروالکتریک یعنی، زمانی که میدان الکتریکی اعمال می‌کنید، قطبشی به همان اندازه در آن تولید می‌شود که بعد از برداشتن منبع میدان الکتریکی، این مقدار از قطبش هم‌چنان به صورت حافظه‌مند، داخل ماده باقی می‌ماند. دقیقاً مشابه فرومغناطیس. نمودار قطبش برحسب میدان الکتریکی، برای یک فروالکتریک در شکل زیر رسم شده است.



برای اینکه $\vec{P}$ هم اندازه $\vec{E}$ شود قطبش اولیه باید ضریب ۱ داشته باشد. با توجه به اینکه متوسط قطبش مولکول‌ها $\frac{1}{3}$ است. به عبارتی دیگر ثابت دی‌الکتریک ε_r در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\varepsilon_r=1+\frac{3\sum N_i\alpha_i}{3-\sum N_i\alpha_i}$$

پس، برای ∞ شدن ثابت دی‌الکتریک (وجود پسماند) باید:

$$\frac{1}{3}N\alpha=\varepsilon_\circ\rightarrow\frac{N\alpha}{3\varepsilon_\circ}=1$$

۵۰ـ گزینه «۱» طبق تعریف ضریب شکست:

$$n=\frac{C}{V}=\frac{(\sqrt{\varepsilon_\circ\mu_\circ})^{-1}}{(\sqrt{k_e(\omega)\varepsilon_\circ k_m(\omega)\mu_\circ})^{-1}}=\sqrt{k_e(\omega)k_m(\omega)}$$

که در رابطه‌ی بالا، V سرعت نور در ماده خطی و همسانگرد و C سرعت نور در خلاء است و از رابطه‌ی $V=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ به عنوان سرعت موج الکترومغناطیسی استفاده شده است.

www.modaresanesharif.ac.ir

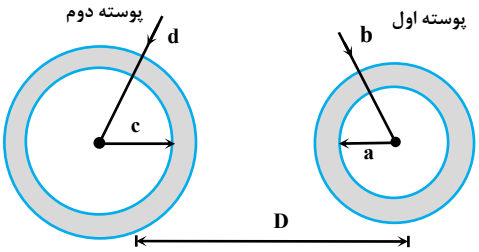
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل پنجم

«خازن‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ در فضای خالی همانند شکل، دو پوسته کروی رسانا در مجاورت یکدیگر قرار گرفته‌اند. هرگاه در مرکز پوستهٔ اول بار نقطه‌ای q قرار داده شود، پتانسیل پوستهٔ دوم نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت به ۱۰ ولت می‌رسد. اگر این بار از مرکز پوستهٔ اول به مرکز پوستهٔ دوم منتقل شود، پتانسیل پوستهٔ اول نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت چند ولت خواهد شد؟ (برق ـ سراسری ۸۰)



۱) ۱۰

۲) $۱۰\frac{b}{d}$

۳) $۱۰\frac{D^۲}{bd}$

۴) $۱۰\frac{d}{b}$

۲ـ خازنی تشکیل شده از دو رسانای کروی شکل به شعاع‌های a و b که به فاصله d از هم درون خلأ قرار دارند. $(d >> a,b)$ ظرفیت این خازن چیست؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)

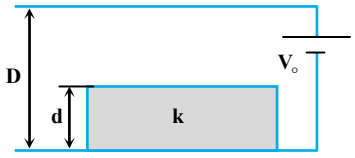
۱) $C = ۴\pi\varepsilon_۰[\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}]$

۲) $C = ۴\pi\varepsilon_۰[\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۲}{d}]^{-۱}$

۳) $C = ۴\pi\varepsilon_۰ a + ۴\pi\varepsilon_۰ b$

۴) $C = ۴\pi\varepsilon_۰[\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}-\frac{۲}{d}]^{-۱}$

۳ـ بخشی از یک خازن مسطح موازی که مساحت هر یک از دو جوشن آن A و فاصله دو جوشن D است، از دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک k و ضخامت d پر شده است. اگر خازن به اختلاف پتانسیل ثابت $V_۰$ وصل باشد، اندازه نیروی وارد بر جوشن بالایی خازن کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{k^۲\varepsilon_۰ V_۰^۲ A}{۲[k(D-d)+d]^۲}$

۲) $\frac{k^۲\varepsilon_۰ V_۰^۲ A}{[d+k(D-d)+d]^۲}$

۳) $\frac{\varepsilon_۰ V_۰^۲ A}{kD^۲}$

۴) $\frac{V_۰^۲\varepsilon_۰ A}{۲(D-d)^۲}$

۴ـ کره‌ای فلزی به شعاع a در فضای آزاد هم مرکز با مبدأ مختصات دارای پتانسیل $V_۰$ است. انرژی پتانسیل الکتریکی کل سیستم W_e چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

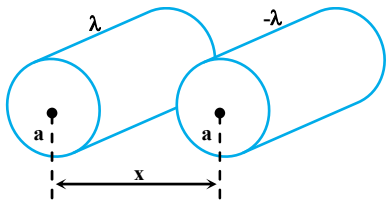
۱) $۲\pi\varepsilon_۰ a V_۰^۲$

۲) $\frac{۲\pi\varepsilon_۰ a^۲ V_۰^۲}{\sqrt{a^۲-۲}}$

۳) $\frac{۱}{۲}\pi\varepsilon_۰ a V_۰^۲$

۴) $\frac{۲\pi\varepsilon_۰ a^۲ V_۰^۲}{\sqrt{a^۲}-\sqrt{۲}}$

۵ـ دو استوانهٔ منزوی هادی بلند به شعاع‌های $a_۱$ و $a_۲$ به موازات یکدیگر و به فاصله x از هم قرار دارند. اگر فاصله x نسبت به شعاع‌های $a_۱$ و $a_۲$ بزرگ باشد ظرفیت خازن ایجاد شده برای واحد طول استوانه برابر است با $C = \pi\varepsilon_۰ \frac{۱}{\ln\frac{x}{\sqrt{a_۱ a_۲}}}$. اندازه نیروی وارد بر واحد طول که هر یک از استوانه‌ها به دیگری وارد می‌کند کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۱)



۱) $\frac{\lambda^۲}{\pi\varepsilon_۰}\frac{\sqrt{a_۱ b_۲}}{x^۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}\frac{\lambda^۲}{\pi\varepsilon_۰}\frac{\sqrt{a_۱ b_۲}}{x^۲}$

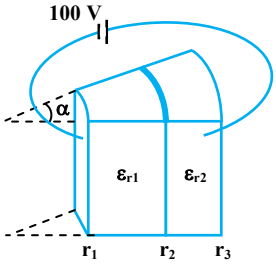
۳) $\frac{\lambda^۲}{\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{x}$

۴) $\frac{۱}{۲}\frac{\lambda^۲}{\pi\varepsilon_۰}\frac{۱}{x}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ در شکل روبرو $\varepsilon_{r_1}=5$ و ε_{r_2} شعاع داخلی هادی $r_1=2cm$ و شعاع خارجی هادی $r_3=2/5cm$ و مرز دو عایق $r_2=2/25cm$ و ولت $V_0=100$، V_1 و V_2 افت پتانسیل در هر ناحیه چند ولت است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)



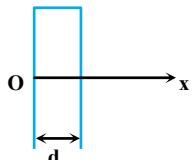
۱) $V_1=71/43$, $V_2=28/57$

۲) $V_1=28/57$, $V_2=71/43$

۳) $V_1=73/65$, $V_2=26/35$

۴) $V_1=26/35$, $V_2=73/65$

۷ـ ضریب دی‌الکتریک یک خازن مسطح موازی به شکل $k=e^{\alpha x}$ تغییر می‌کند که درآن α مقدار ثابت و x امتداد عمود بر جوشن‌ها است. ظرفیت این خازن چقدر است؟ مساحت جوشن‌ها A و فاصله دو جوشن d می‌باشد و مبدأ مختصات بر یکی از جوشن‌ها منطبق است. (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



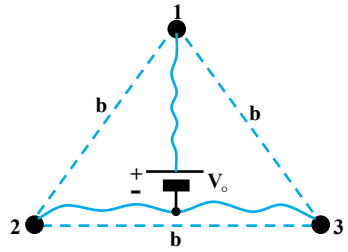
۱) $C=\varepsilon_0 A\alpha e^{-\alpha d}$

۲) $C=\varepsilon_0 A\alpha(e^{-\alpha d}-1)$

۳) $C=\dfrac{\varepsilon_0\alpha A}{1+e^{-\alpha d}}$

۴) $C=\dfrac{\varepsilon_0\alpha A}{1-e^{-\alpha d}}$

۸ـ سه سیم رسانای بسیار بلند هر یک به شعاع a که در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع b و عمود بر صفحه قرار دارند، مفروضند. توسط یک سیم نازک رساناهای ۲ و ۳ به یکدیگر متصل شده و به قطب منفی یک ولتاژ وصل می‌شوند. قطب مثبت منبع ولتاژ با سیم بسیار نازکی به رسانای ۱ اتصال می‌یابد. اگر $a \ll b$ باشد، بار الکتریکی واحد طول رسانای ۱ چند کولن بر متر خواهد بود؟ (برق ـ سراسری ۸۳)



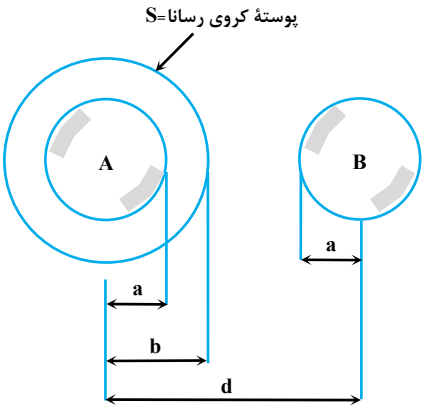
۱) $\dfrac{\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln(\frac{b}{a})}$

۲) $\dfrac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{3\ln(\frac{b}{a})}$

۳) $\dfrac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{3\ln(\frac{b}{a})}$

۴) $\dfrac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\sqrt{3}\ln(\frac{b}{a})}$

۹ـ در شکل روبرو دو کرهٔ A و B رسانا بوده و شعاع هر یک a می‌باشد. پوسته نازک کروی S به شعاع b که با کرهٔ A هم مرکز است، رسانا فرض می‌شود. فاصلهٔ کرهٔ B از مرکز پوسته d، در شرط $b \ll d$ صدق می‌کند. فضای اطراف کره‌ها خلأ می‌باشد. ظرفیت الکتریکی بین دو کرهٔ A و B کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $\dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

۲) $\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}}$

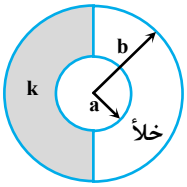
۳) $4\pi\varepsilon_0\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}}$

۴) $4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}}\right)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۰ـ فضای میان دو کره فلزی به شعاع‌های a و b (b>a) مطابق شکل توسط دی‌الکتریک k و نیم دیگر توسط خلأ پر شده است. ظرفیت این مجموعه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

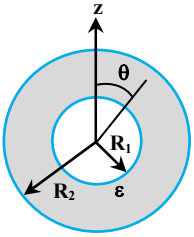


۱) $\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}ab(k+۱)}{b-a}$
۲) $\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}ab(k+۱)}{b-a}$
۳) $\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}ab(k-۱)}{b-a}$
۴) $\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}ab(k-۱)}{b-a}$

۱۱ـ دو کره رسانای کوچک به شعاع‌های a و ۲a به فاصله بسیار زیاد $d = ۲۰a$ از یکدیگر قرار دارند. کدام عبارت خازن حاصل را با تقریب بهتری به‌دست می‌دهد؟ (برق ـ سراسری ۸۴)

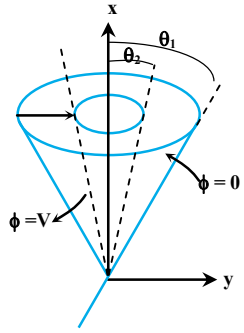
۱) $\frac{۲۰\pi\varepsilon_{\circ}a}{۷}$
۲) $\frac{\pi\varepsilon_{\circ}a}{۱۰}$
۳) $\frac{۸\pi\varepsilon_{\circ}a}{۳}$
۴) $\frac{۴۰\pi\varepsilon_{\circ}a}{۹}$

۱۲ـ خازن کروی با شعاع‌های داخلی $R_۱$ و شعاع خارجی $R_۲$ با مادهٔ دی‌الکتریک با گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_{\circ} + \varepsilon_۱\cos^۲\theta$ پر شده است که θ زاویه بردار مکان با محور z است. ظرفیت این خازن کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



۱) $\frac{۴\pi R_۱R_۲(۳\varepsilon_{\circ}+\varepsilon_۱)}{۳(R_۲-R_۱)}$
۲) $\frac{۴\pi R_۱R_۲(\varepsilon_{\circ}-\varepsilon_۱)}{(R_۲-R_۱)}$
۳) $\frac{R_۱R_۲(\varepsilon_{\circ}+\varepsilon_{\circ})}{(R_۲+R_۱)}$
۴) $\frac{۴\pi R_۱R_۲(۳\varepsilon_{\circ}+\varepsilon_۱)}{(R_۲+R_۱)}$

۱۳ـ خازن مخروطی هم محور مطابق شکل را در نظر بگیرید. زوایای مخروط‌ها $\theta_۱$ و $\theta_۲$ $(\theta_۲ > \theta_۱)$ می‌باشد. مخروط داخلی در پتانسیل ثابت است. مخروط خارجی در پتانسیل صفر قرار دارد، پتانسیل الکتریکی در ناحیه بین دو مخروط کدام است؟ $(\theta_۱ < \theta < \theta_۲)$ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

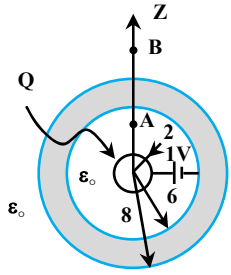


۱) $\Phi = V\frac{\ln[\tan(\frac{\theta}{۲})/\tan(\frac{\theta_۲}{۲})]}{\ln[\tan(\frac{\theta_۱}{۲})/\tan(\frac{\theta_۲}{۲})]}$
۲) $\Phi = V\frac{\ln[\tan(\frac{\theta}{۲})/\tan(\frac{\theta_۱}{۲})]}{\ln[\tan(\frac{\theta_۱}{۲})/\tan(\frac{\theta_۲}{۲})]}$
۳) $\Phi = V\frac{\ln[\tan(\frac{\theta}{۲})/\tan(\frac{\theta_۲}{۲})]}{\ln[\tan(\frac{\theta_۱}{۲})/\tan(\frac{\theta_۲}{۲})]}$
۴) $\Phi = V\frac{\ln[\tan(\frac{\theta}{۲})/\tan(\frac{\theta_۱}{۲})]}{\ln[\tan(\frac{\theta_۲}{۲})/\tan(\frac{\theta_۱}{۲})]}$

۱۴ـ یک کره فلزی به شعاع a را در یک فضای بی‌نهایت که از عایقی با ضریب دی‌الکتریک نسبی $\varepsilon_r = ۱+\frac{a}{r}$ پر شده قرار می‌دهیم. ظرفیت کره فلزی نسبت به حالتی که این کره در فضای خالی $\varepsilon_{\circ}$ قرار بگیرد، تقریباً چند برابر می‌شود؟ $(\ln۲ \approx ۰/۶۹)$ (برق ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱/۴
۲) ۱/۶
۳) ۱/۸
۴) ۲

۱۵ـ شکل زیر یک خازن کروی را نشان می‌دهد. ابعاد این خازن بر حسب متر در شکل ملاحظه می‌شوند. این خازن توسط یک منبع ولتاژ ایده‌آل ۱V شارژ می‌شود. علاوه بر این از طریق تماس، بار الکتریکی $Q = \frac{۱}{۹}\times۱۰^{-۹}$ C را به رسانای کروی مرکزی می‌دهیم. پس از برقراری تعادل الکترواستاتیک، اندازه میدان الکتریکی در نقطهٔ A واقع بر r = ۴ و نقطه B واقع بر r = ۱۰ به ترتیب برابر کدام است؟ $(\varepsilon_{\circ} = \frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹})$ (برق ـ سراسری ۸۷)

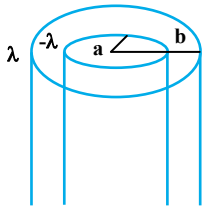


۱) $E_A = ۰$, $E_B = \frac{۱}{۱۶}$
۲) $E_A = \frac{۳}{۱۶}$, $E_B = \frac{۱}{۱۰۰}$
۳) $E_A = \frac{۱}{۴}$, $E_B = \frac{۱}{۱۰۰}$
۴) $E_A = \frac{۳}{۴}$, $E_B = ۰$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۶ـ دو پوسته‌ی استوانه‌ای رسانای بسیار طویل هم محور به شعاع b,a مطابق شکل دارای بار الکتریکی بـا چگـالی خطـی λ , $-\lambda$ اسـت. انـرژی الکتریکی ذخیره شده در واحد طول این استوانه چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)



۱) $\frac{\lambda^۲}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln(\frac{b}{a})$

۲) $\frac{\lambda^۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\ln(\frac{b}{a})$

۳) $\frac{\lambda^۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\ln(\frac{b^۲-a^۲}{ab})$

۴) $\frac{\lambda^۲}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln(\frac{b^۲+a^۲}{ab})$

۱۷ـ بین صفحات مسطح خازنی که در $z=۰$ و $z=d$ قرار دارند، ماده‌ای عایق با $\varepsilon=\varepsilon_۰(۱+\frac{z^۲}{d^۲})$ قرار دارد. اگر چگالی بار سطحی روی صفحات این خازن $\pm\rho_s(\frac{C}{m^۲})$ باشد، اختلاف ولتاژ بین صفحات خازن چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۸)

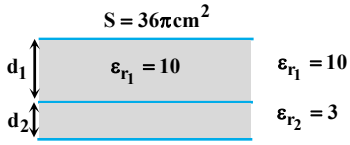
۱) $\frac{\rho_s d}{۲\varepsilon_۰}$

۲) $\frac{\rho_s}{۲\pi\varepsilon_۰}$

۳) $\frac{۲\pi\rho_s d}{\varepsilon_۰}$

۴) $\frac{\rho_s \pi d}{۴\varepsilon_۰}$

۱۸ـ مطلوب است محاسبه ظرفیت خازن داده شده را در صورتی که انرژی ذخیره شده در هر یک از نواحی دی‌الکتریک برابر بـا نصـف کـل انـرژی ذخیره شده در خازن مجموعه باشد. فرض کنید $d_۱+d_۲=۵mm$ و $\varepsilon_۰=\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹}\frac{F}{m}$ باشد. (برق ـ آزاد ۸۸)



۱) $C=۱۱۰PF$

۲) $C=۱۳۰PF$

۳) $C=۱۵۰PF$

۴) $C=۹۰PF$

۱۹ـ یک خازن کروی از دو سطح هادی کروی هم مرکز به شعاع‌های a و b $(a<b)$ تشکیل شده است. فضای بین دو کره هادی را عایقی ناهمگن با ضریب گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_۰(۱+\sin\theta)(۱+\cos^۲\varphi)$ پر کرده است. ظرفیت این خازن کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\varepsilon_۰\pi}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}(۶+\frac{۳}{۲}\pi)$

۲) $\frac{\varepsilon_۰\pi}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}(۶+\pi)$

۳) $\frac{\varepsilon_۰\pi}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}(۳+\pi)$

۴) $\frac{\varepsilon_۰\pi}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}(۶+۳\pi)$

۲۰ـ خازنی کروی متشکل از دو کره‌ی متحدالمرکز در اختیار داریم. شعاع کره بیرونی مقدار ثابت a است، ولی شعاع کره درونی می‌تواند تغییر کند. می‌خواهیم بیشترین مقدار انرژی الکتریکی را در این خازن ذخیره کنیم به‌طوری که مقدار شدت میدان الکتریکی بر روی سطح کره داخلـی ثابـت بـاقی بماند. شعاع کره‌ی داخلی چقدر باید باشد؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{a}{۵}$

۲) $\frac{a}{۴}$

۳) $\frac{۳a}{۴}$

۴) $\frac{۳a}{۵}$

۲۱ـ پتانسیل یک پوسته نازک رسانا به شعاع a مقدار ثابت $V_۰$ است. انرژی ذخیره شده در این سیستم کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

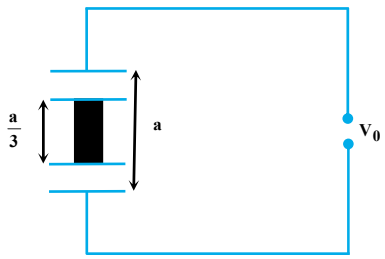
۱) $\pi\varepsilon_۰V_۰^۲a$

۲) $۲\pi\varepsilon_۰V_۰^۲a$

۳) $۳\pi\varepsilon_۰V_۰^۲a$

۴) $۴\pi\varepsilon_۰V_۰^۲a$

۲۲ـ دو خازن مطابق شکل به صورت سری بسته شده‌اند بطوری که قسمت میانی به طول $\frac{a}{۳}$ عایق است. فاصله‌ی دو صفحه‌ی بیرونی از یکدیگر a است و این صفحات به یک باتری با اختلاف پتانسیل ثابت $V_۰$ وصل شده‌اند. اگر قسمت میانی این سیستم (شامل قسمت عایق و دو صفحه چسـبیده بـه آن) برداشته شود. انرژی ذخیره شده در سیستم چقدر تغییر می‌کند؟ (مساحت صفحات A است) (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{A\varepsilon_۰V_۰^۲}{a}$

۲) $\frac{۳A\varepsilon_۰V_۰^۲}{۴a}$

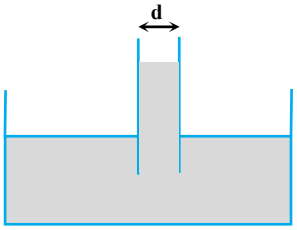
۳) $\frac{A\varepsilon_۰V_۰^۲}{۴a}$

۴) $\frac{۵A\varepsilon_۰V_۰^۲}{۹a}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۳ـ خازنی با صفحات موازی که از یکدیگر فاصله d دارند را مطابق شکل به طور عمودی درون مایعی دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک k و چگالی ρ فرو می‌کنیم. اگر دو سر خازن به یک باتری با پتانسیل V وصل باشد، مایع دی‌الکتریک تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{V^2(k-1)}{2\rho g d^2}$
۲) $\frac{V^2(k-1)}{8\pi\rho g d^2}$
۳) $\frac{V^2(k-1)}{4\pi\rho g d^2(k+1)}$
۴) $\frac{V^2(k-1)}{2\rho g d^2(k+1)}$

۲۴ـ دو پوسته‌ی کروی به شعاع a به فاصله $d \gg a$ از یکدیگر قرار دارند. ظرفیت این مجموعه کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{4\pi\varepsilon_0 a^2}{d}$
۲) $\frac{2\pi\varepsilon_0 a^2}{d}$
۳) $4\pi\varepsilon_0 a$
۴) $2\pi\varepsilon_0 a$

۲۵ـ دو پوسته‌ی استوانه‌ای طویل و هم محور به شعاع‌های R_1 و R_2 در نظر بگیرید که بین آنها توسط هوا پر شده است. $(R_1 < R_2)$ به ازای کدام گزینه انرژی ذخیره شده در این خازن، قبل از فروشکست هوا، بیشترین مقدار را دارد؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $R_2 = \sqrt{e}R_1$
۲) $R_2 = (e-1)R_1$
۳) $R_2 = eR_1$
۴) $R_2 = e^2R_1$

۲۶ـ ظرفیت متقابل دو حلقه سیم که در صفحه‌ی $z=0$ قرار دارند برابر C است. اگر ناحیه $z<0$ را توسط ماده‌ای دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک k پر کنیم، کدام گزینه نشان دهنده ظرفیت جدید این مجموعه است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $(\frac{k+3}{4})$
۲) $(\frac{k+3}{4})^2$
۳) $(\frac{k+1}{2})C$
۴) $\frac{k}{2}C$

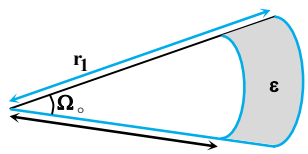
۲۷ـ یک کره هادی به شعاع $1cm$ دارای ظرفیت C می‌باشد. روی کره، عایقی به ضخامت $1cm$ قرار می‌دهیم. اگر $\varepsilon_r = 2$ باشد، C را به‌دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $C = \frac{0/32\pi\varepsilon_0}{3}$
۲) $C = \frac{0/16\varepsilon_0}{3}$
۳) $C = \frac{0/16\pi\varepsilon_0}{3}$
۴) $C = \frac{0/32\varepsilon_0}{3}$

۲۸ـ خازن مسطحی با مواد اتلافی در دست است. فاصله بین دو جوشن خازن $2d$ مفروض است. از صفر تا d، دی‌الکتریک دارای ضریب ε_1 و σ_1 و از d تا $2d$ دارای ضرایب ε_2 و σ_2 می‌باشد. اگر اختلاف پتانسیل بین دو جوشن خازن برابر با V باشد، چگالی بار سطحی در مرز بین دو دی‌الکتریک را به‌دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $\rho_2 = \frac{\varepsilon_2\sigma_2 - \varepsilon_1\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}.\frac{V}{d}$
۲) $\rho_S = \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}.\frac{V}{d}$
۳) $\rho_S = \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2}{2(\sigma_1+\sigma_2)}.\frac{V}{d}$
۴) $\rho_S = \frac{\varepsilon_2\sigma_2 - \varepsilon_1\sigma_1}{2(\sigma_1+\sigma_2)}.\frac{V}{d}$

۲۹ـ قطعه‌ای از یک مخروط با زاویه فضایی Ω_0 و محدود به قسمتی از دو کره به شعاع‌های r_1 و r_2 که به اختلاف پتانسیل $\Delta\phi$ متصل می‌باشد، در نظر بگیرید. ظرفیت خازنی با یک دی‌الکتریک به ضریب ε برای چنین حالتی عبارتست از: (فیزیک ـ آزاد ۸۹)



۱) $\varepsilon\Omega_0(\frac{r_1r_2}{r_2-r_1})$
۲) $(\frac{1}{\varepsilon\Omega_0})(\frac{r_1r_2}{r_1-r_2})$
۳) $(\frac{1}{\varepsilon\Omega_0})(\frac{r_1-r_2}{r_1r_2})$
۴) $\frac{r_1r_2}{\varepsilon_0\Omega_0}$

۳۰ـ فرض کنید سطوح یک خازن تخت در نقاط $x=0$ و $x=1$ قرار گرفته‌اند و به ترتیب در پتانسیل‌های صفر و ۱۰۰ ولت قرار دارند. اگر گذردهی الکتریکی میان صفحات این خازن متغیر و به صورت $\varepsilon = \varepsilon_0(1+x)^2$ باشد، تغییرات ولتاژ میان صفحات چگونه است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $100\sin\frac{\pi x}{2}$
۲) $100(1+x^2)-100x$
۳) $100x$
۴) $\frac{400}{\pi}\tan^{-1}x$

۳۱ـ اختلاف پتانسیل بین صفحات یک خازن با صفحات موازی و ظرفیت $20\mu f$ با چه آهنگی باید تغییر کند تا جریان جابجایی برابر $1/5A$ شود؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $75\times10^5\ \frac{V}{s}$
۲) $7/5\times10^5\ \frac{V}{s}$
۳) $75\times10^{-5}\ \frac{V}{s}$
۴) $7/5\times10^{-5}\ \frac{V}{s}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۲ـ یک کرهٔ رسانا به شعاع a و پتانسیل V_0 در فضای آزاد قرار دارد. این کره را در محیطی به ضریب گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\frac{a^2}{r^2})$ قرار می‌دهیم. میزان تغییر انرژی ذخیره‌شده در سیستم Δw طی این فرآیند چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $(\frac{\pi}{4}-1)2\pi\varepsilon_0 aV_0^2$ ۲) $(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})2\pi\varepsilon_0 aV_0^2$ ۳) $(\frac{\pi}{2}-1)2\pi\varepsilon_0 aV_0^2$ ۴) $(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2})2\pi\varepsilon_0 aV_0^2$

۳۳ـ یک خازن مسطح در دست است. صفحهٔ زیرین خازن در صفحهٔ $z=0$ و صفحهٔ بالایی آن در صفحهٔ $z=h$ قرار گرفته است. مساحت هر صفحه A فرض می‌شود. بین دو صفحهٔ این خازن یک عایق غیرهمگن با ضریب گذردهی نسبی به صورت $\varepsilon_r = (1+a^2z^2)$ قرار دارد. ظرفیت این خازن با فرض $A >> h^2$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{2\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(2ah)}$ ۲) $\frac{\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(ah)}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(2\sqrt{2}ah)}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(\sqrt{2}ah)}$

۳۴ـ یک خازن متغیر دارای ظرفیت بیشینه ۱۰۰pF و ظرفیت کمینه ۱۰pF است. در حالی که ظرفیت آن بیشینه است، آن را تا پتانسیل ۳۰۰V شارژ می‌کنیم و سپس ظرفیت خازن را کمینه می‌کنیم. کار مکانیکی لازم برای این تغییر چقدر است؟ (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) ۴/۵μJ ۲) ۴/۵mJ ۳) ۴۰/۵μJ ۴) ۴۰/۵mJ

۳۵ـ یک خازن تخت که هر صفحه آن دارای مساحت A و فاصله جدایی صفحات d می‌باشد را در نظر بگیرید. اگر اندازه بار روی صفحات خازن q باشد، صفحات خازن با چه نیرویی همدیگر را جذب می‌کنند؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{q^2}{\varepsilon_0 d^2}$ ۲) $\frac{q^2}{2\varepsilon_0 d^2}$ ۳) $\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}$ ۴) $\frac{q^2}{\varepsilon_0 A}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ گزینه «۱» اگر بارهای الکتریکی در مرکز پوسته‌ها در حالت اول با q_1 و q_2 و پتانسیل پوسته‌ها در حالت اول با V_1 و V_2 نشان داده شوند و همین کمیت‌ها در حالت دوم با q'_1، q'_2، V'_1 و V'_2 بیان شوند، خواهیم داشت:

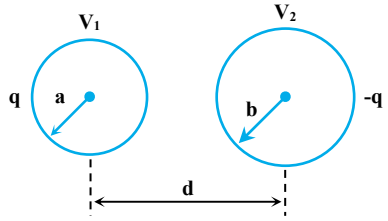
$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = 0 \\ V_1 = V_2 \\ V_2 = 10 \end{cases} \text{(حالت اول)} \qquad \begin{cases} q'_1 = 0 \\ q'_2 = q \\ V'_1 = V'_1 \\ V'_2 = V'_2 \end{cases} \text{(حالت دوم)}$$

طبق قضیه هم‌پاسخی گرین خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{2} q_i V'_i = \sum_{i=1}^{2} q'_i V_i \Rightarrow q_1 V'_1 + 0 = 0 + q \times (10) \Rightarrow V'_1 = 10$$

به عبارت دیگر پتانسیل پوسته اول نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت در حالت دوم، برابر ۱۰ ولت خواهد بود.

۲ـ گزینه «۴» با توجه به قضیه جمع آثار می‌توان نوشت:

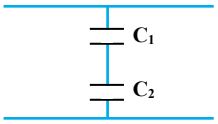


$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ V_2 = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \end{cases} \Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2$$

بنابراین برای اختلاف پتانسیل و به تبع آن ظرفیت خازن خواهیم داشت:

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}\right] \qquad C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا باید انرژی ذخیره شده در خازن را به دست آوریم و سپس با به دست آوردن $\frac{dW}{dD}$ مقدار نیروی وارد بر صفحه‌ها به دست می‌آید. برای به دست آوردن انرژی ذخیره شده نیاز به ظرفیت معادل خازن داریم. با توجه به شکل زیر این خازن متشکل از دو خازن سری C_1 و C_2 می‌باشد که مقدار ظرفیت آن برابر است با:



$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{D-d} \\ C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 K A}{d} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{k\varepsilon_0 A}{K(D-d)+d} \Rightarrow U = \frac{1}{2}CV^2$$

بنابراین برای نیروی وارد بر جوشن بالایی داریم:

$$F = \frac{dU}{dD} = \frac{-k^2\varepsilon_0 A V_0^2}{2[k(D-d)+d]^2}$$

۴ـ گزینه «۱» ظرفیت یک خازن منفرد به شعاع a عبارت است از: $C = 4\pi\varepsilon_0 a$. بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W = \frac{1}{2}CV_0^2 = 2\pi\varepsilon_0 a V_0^2$$

۵ـ گزینه «۴» ابتدا به محاسبه‌ی ظرفیت خازن می‌پردازیم که با توجه به رابطه‌ی داده شده در صورت سؤال محاسبه‌ی آن ساده است و سپس با در دست داشتن ظرفیت محاسبه‌ی انرژی و به تبع آن نیرو کار دشواری نخواهد بود.

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x}{\sqrt{a_1 a_2}} \qquad ; \qquad F = -\frac{\partial U}{dx} = \frac{-1}{2}\frac{\lambda^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ گزینه «۳» ظرفیت یک خازن استوانه‌ای به طول L و شعاع داخلی $r_۱$ و شعاع خارجی $r_۲$ از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$C=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}\varepsilon_{r}L}{\ln(\frac{r_۲}{r_۱})}$$

در این مسئله خواهیم داشت:

$$C_۲=\frac{\alpha}{۲\pi}\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}\varepsilon_{r_۲}L}{\ln(\frac{۲/۵}{۲/۲۵})}=\alpha L\varepsilon_{\circ}(۴۷/۴۵)F \quad \text{و} \quad C_۱=\frac{\alpha}{۲\pi}\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}\varepsilon_{r_۱}L}{\ln(\frac{۲/۲۵}{۲})}=\alpha L\varepsilon_{\circ}(۱۶/۹۸)F$$

$$\begin{cases}Q=C_۱V_۱=C_۲V_۲\\ V_۱+V_۲=۱۰۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_۱=۷۳/۶۵\\ V_۲=۲۶/۳۵\end{cases}$$

۷ـ گزینه «۴» با توجه به رابطه انتگرالی خازن‌های سری که در متن درس معرفی شد داریم:

$$\frac{۱}{C}=\int\frac{dx}{\iint\varepsilon ds}=\int\frac{dx}{k\varepsilon_{\circ}A}=\frac{۱}{\varepsilon_{\circ}A}\int_{\circ}^{d}e^{-\alpha x}dx=\frac{۱}{\varepsilon_{\circ}\alpha A}(۱-e^{-\alpha d}) \quad ; \quad C=\frac{\varepsilon_{\circ}A\alpha}{۱-e^{-\alpha d}}$$

۸ـ گزینه «۲» ابتدا اختلاف پتانسیل بین سیم‌ها را به دست می‌آوریم:

$$V_{۲۱}=\frac{\rho_{L_۱}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{a}{b}+\frac{\rho_{L_۲}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad V_{۳۱}=\frac{\rho_{L_۱}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{a}{b}+\frac{\rho_{L_۳}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a}$$

از آنجا که $\rho_{L_۱}=-(\rho_{L_۲}+\rho_{L_۳})$ بنابراین خواهیم داشت:

$$V_{۲۱}=\frac{۲\rho_{L_۲}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a}+\frac{\rho_{L_۳}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad V_{۳۱}=\frac{\rho_{L_۲}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a}+\frac{۲\rho_{L_۳}}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a}$$

از حل معادلات فوق داریم:

$$\rho_{L_۲}=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln\frac{b}{a}}V_{۲۱}-\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln\frac{b}{a}}V_{۳۱} \quad \text{و} \quad \rho_{L_۳}=-\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln\frac{b}{a}}V_{۲۱}+\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln\frac{b}{a}}V_{۳۱}$$

با توجه به اینکه $V_{۲۱}=V_۲-V_۱$ و $V_{۳۱}=V_۳-V_۱$، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\rho_{L_۲}=-\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}V_۱+\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}V_۲-\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}V_۳\\ \rho_{L_۳}=-\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}V_۱-\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}V_۲+\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}V_۳\end{cases}$$

بنابراین:

$$C_{۲۲}=C_{۳۳}=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}$$

طبق تقارن مسئله، باید داشته باشیم:

$$C_{۱۱}=C_{۲۲}=C_{۳۳}=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}$$

بار واحد طول رسانای ۱ برابر است با:

$$\rho_{L_۱}=C_{۱۱}V_۱+C_{۱۲}V_۲+C_{۱۳}V_۳$$

ولتاژ رسانای ۱ برابر $V_{\circ}$ و ولتاژ رساناهای ۲و۳ صفر می‌باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\rho_{L_۱}=C_{۱۱}V_۱=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۳\ln(\frac{b}{a})}V_{\circ}$$

۹ـ گزینه «۲» اگر بارهای الکتریکی $+Q$ و $-Q$ را بر روی کره‌های هادی A و B در نظر بگیریم، پتانسیل الکتریکی بر روی هر یک از کره‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases}V_A\simeq\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a}-\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}d}\\ V_B\simeq\frac{-Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a}+\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}d}\end{cases}\Rightarrow V_A-V_B=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{d})$$

بنابراین، ظرفیت الکتریکی خازن موردنظر از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{d}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۰ـ گزینه «۱» **روش اول:** ظرفیت الکتریکی در حالتی که $k=1$ باشد (کل فضای میان دو کره خلأ می‌باشد) عبارت است از $C=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$ که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

روش دوم: با توجه به این که مرز مشترک دو دی‌الکتریک بر صفحه‌های خازن عمود می‌باشد، بنابراین آن‌ها تشکیل دو خازن موازی را می‌دهند که ظرفیت آن‌ها برابر است با:

$$C_1=\frac{2\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \quad ; \quad C_2=\frac{2\pi\varepsilon_0 kab}{b-a}$$

در نتیجه ظرفیت معادل آن‌ها برابر است با: $C=C_1+C_2 \Rightarrow C=\frac{2\pi\varepsilon_0 ab(k+1)}{b-a}$

۱۱ـ گزینه «۱» **روش اول:** به علت این که $d>>a$ است، هر کدام از کره‌ها را می‌توانیم یک خازن فرض کنیم. از این‌رو دو خازن سری داریم.

با توجه به رابطه ظرفیت خازن کروی، برای هر کدام از کره‌ها خواهیم داشت:

$$C_1=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{20a}} \qquad C_2=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{2a}-\frac{1}{20a}}$$

ظرفیت خازن معادل دو خازن سری به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $\frac{1}{C_T}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{19}{20a}+\frac{9}{20a})=\frac{7}{20\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow C_T=\frac{20\pi\varepsilon_0 a}{7}$

روش دوم: بار $+q$ و $-q$ را روی کره‌ها قرار می‌دهیم، بنابراین پتانسیل الکتریکی بین آن‌ها برابر مجموع دو پتانسیل ایجاد شده توسط بارهای $+q$ و $-q$ است.

$$V=V_1+V_2 \Rightarrow V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{d})+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{2a}-\frac{1}{d}) \Rightarrow V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}(\frac{3}{2}-\frac{1}{10})=\frac{7q}{20\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow C=\frac{q}{V}=\frac{20\pi\varepsilon_0 a}{7}$$

۱۲ـ گزینه «۱» با توجه به رابطه‌ی انتگرالی ظرفیت خازن و با استفاده از رابطه‌ی داده شده برای گذردهی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\varepsilon_0+\varepsilon_1\cos^2\theta)r^2\sin\theta d\theta d\varphi}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{2\pi r^2(2\varepsilon_0+\frac{2}{3}\varepsilon_1)}=\frac{R_2-R_1}{4\pi R_1R_2(\varepsilon_0+\frac{1}{3}\varepsilon_1)} \Rightarrow C=\frac{4\pi R_1R_2(3\varepsilon_0+\varepsilon_1)}{3(R_2-R_1)}$$

۱۳ـ گزینه «۳» در فضای بین دو مخروط معادله لاپلاس صادق است. بنابراین می‌توان نوشت: $\nabla^2V=0 \Rightarrow V=k_1\ln(tg\frac{\theta}{2})+k_2$

$$\theta=\theta_1 \Rightarrow V=k_1\ln(tg\frac{\theta_1}{2})+k_2 \qquad \theta=\theta_2 \Rightarrow 0=k_1\ln(tg\frac{\theta_2}{2})+k_2$$

با حل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت: $k_2=\frac{-V\ln(tg\frac{\theta_2}{2})}{\ln[tg(\frac{\theta_1}{2})/tg(\frac{\theta_2}{2})]}$ و $k_1=\frac{V}{\ln[tg(\frac{\theta_1}{2})/tg(\frac{\theta_2}{2})]}$

۱۴ـ گزینه «۱» اگر دقت کنید در حالتی که کره فلزی در فضای خالی ε_0 قرار دارد ظرفیت کره برابر $C_1=4\pi\varepsilon_0 a$ می‌باشد.

در حالت دیگر که فضای اطراف کره رسانا را عایقی با ضریب دی‌الکتریک نسبی $\varepsilon_r=1+\frac{a}{r}$ پر کرده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C_2}=\int_a^{\infty}\frac{dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_0(1+\frac{a}{r})r^2\sin\theta d\theta d\varphi}$$

$$\frac{1}{C_2}=\int_a^{\infty}\frac{dr}{4\pi\varepsilon_0 r(r+a)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_a^{\infty}[\frac{dr}{r}-\frac{dr}{r+a}]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}[\ln r-\ln(r+a)]_a^{\infty}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln 2 \Rightarrow C_2=\frac{4\pi\varepsilon_0 a}{\ln 2}$$

بنابراین می‌توان نوشت: $\frac{C_2}{C_1}=\frac{1}{\ln 2}=1/4$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۵ـ گزینه «۲» همان‌طور که صورت سؤال گفته، خازن کروی است، پس داریم:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}}=۱۲\pi\varepsilon_{\circ}\Rightarrow q=CV=۱۲\pi\varepsilon_{\circ}$$

از آنجا که ولتاژ دو سر خازن ثابت بوده و ابعاد خازن نیز هیچ تغییری نمی‌کند، لذا در حالت دوم نیز پس از برقراری تعادل الکترواستاتیکی بار کلی روی رسانای مرکزی همچنان $۱۲\pi\varepsilon_{\circ}$ خواهد بود.

اگر دو سطح گاوسی کروی شکل به شعاع‌های $r=۴$ و $r=۱۰$ در نظر بگیریم، بار کلی درون آن سطوح به ترتیب q و Q خواهد بود و لذا می‌توان نوشت:

$$E_A=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}}=\frac{۱۲\pi\varepsilon_{\circ}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(۱۶)}=\frac{۳}{۱۶}\qquad E_B=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}}=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(۱۰۰)}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

۱۶ـ گزینه «۲» در واقع از توصیف صورت سؤال واضح است که شکل داده شده یک خازن استوانه‌ای با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است بنابراین:

$$C=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{\ln(\frac{b}{a})}\quad;\quad W=\frac{۱}{۲}\frac{\lambda^{۲}}{C}=\frac{\lambda^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a}$$

۱۷ـ گزینه «۴» شدت میدان الکتریکی در اطراف صفحات رسانای خازن چنین خواهد بود:

$$|\vec{E}|=\frac{\rho_s}{\varepsilon}=\frac{\rho_s}{\varepsilon_{\circ}(۱+\frac{z^{۲}}{d^{۲}})}$$

در نتیجه اختلاف ولتاژ بین صفحات خازن برابر است با:

$$|\Delta V|=|\int_{\circ}^{d}\vec{E}.d\vec{\ell}|=\int_{\circ}^{d}\frac{\rho_s}{\varepsilon_{\circ}(۱+\frac{z^{۲}}{d^{۲}})}dz=\frac{\rho_s d^{۲}}{\varepsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{d}\text{Arc}\tan\frac{z}{d}\right]_{\circ}^{d}=\frac{\rho_s d}{\varepsilon_{\circ}}\text{Arc}\tan ۱=\frac{\rho_s\pi d}{۴\varepsilon_{\circ}}$$

۱۸ـ گزینه «۲» انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با:

$$W=\frac{۱}{۲}\frac{Q^{۲}}{C}$$

باید ظرفیت هر لایه دو برابر ظرفیت کل باشد.

$$\frac{\varepsilon_{\circ}\varepsilon_{r_۱}A}{d_۱}=\frac{\varepsilon_{\circ}\varepsilon_{r_۲}A}{d_۲}\Rightarrow\frac{۱۰}{d_۱}=\frac{۳}{d_۲}\quad,\quad d_۱+d_۲=۵\Rightarrow d_۱=d_۲=\frac{۵۰}{۱۳}$$

ظرفیت خازن در ناحیه $d_۱$ برابر است با:

$$C_۱=\frac{\varepsilon_{\circ}\varepsilon_{r_۱}S}{d_۱}=\frac{\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{۹}\times۱۰\times۳۶\pi\times۱۰^{-۴}}{\frac{۵۰}{۱۳}\times۱۰^{-۳}}=\frac{۱۳}{۵۰}\times۱۰^{-۹}$$

$$C_{\text{کل}}=\frac{c_۱}{۲}=\frac{۱۳}{۱۰۰}\times۱۰^{-۹}=۱۳۰\text{PF}$$

۱۹ـ گزینه «۱» فضای بین دو کره مانند خازن‌های سری عمل می‌کنند. بنابراین با استفاده از رابطه انتگرالی برای خازن‌های سری داریم:

$$\frac{۱}{C}=\int_a^b\frac{dr}{\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}\varepsilon_{\circ}(۱+\sin\theta)(۱+\cos^{۲}\varphi)r^{۲}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}\Rightarrow\frac{۱}{C}=\frac{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}{\varepsilon_{\circ}\int_{\circ}^{\pi}(۱+\sin\theta)\sin\theta\,d\theta\int_{\circ}^{۲\pi}(۱+\cos^{۲}\varphi)\,d\varphi}$$

$$\frac{۱}{C}=\frac{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}{\varepsilon_{\circ}\int_{\circ}^{\pi}(\sin\theta+\sin^{۲}\theta)\,d\theta\int_{\circ}^{۲\pi}(۱+\cos^{۲}\varphi)\,d\varphi}=\frac{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}{\varepsilon_{\circ}[۲+\frac{\pi}{۲}][۳\pi]}\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_{\circ}\pi[۶+\frac{۳}{۲}\pi]}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۰ـ گزینه «۳» شدت میدان الکتریکی بر روی سطح کره داخلی بر طبق قانون گاوس چنین خواهد بود: $E=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}}$

برای اینکه شدت میدان الکتریکی ثابت باشد، لازم است داشته باشیم: $E=\text{ثابت} \Rightarrow Q=Kr^{۲}$ (k مقدار ثابت)

با محاسبه انرژی ذخیره شده در خازن خواهیم داشت:

$$W=\frac{۱}{۲}\frac{Q}{C}=\frac{۱}{۲}\frac{k^{۲}r^{۴}}{\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{r}-\frac{۱}{a}}}=\frac{۱}{۲}\frac{k^{۲}r^{۳}(a-r)}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a}$$

برای اینکه بیشترین مقدار انرژی الکتریکی در خازن ذخیره شود، لازم است که $\frac{\partial W}{\partial r}=\circ$ بنابراین:

$$\frac{\partial W}{\partial r}=\circ \Rightarrow ۳r^{۲}(a-r)-r^{۳}=\circ \quad ; \quad ۳r^{۲}a-۳r^{۳}-r^{۳}=\circ \Rightarrow r=\frac{۳a}{۴}$$

۲۱ـ گزینه «۲» ظرفیت الکتریکی پوسته کروی رسانا برابر است با: $C=۴\pi\varepsilon_{\circ}a$

در نتیجه برای انرژی ذخیره شده داریم: $W=\frac{۱}{۲}CV_{\circ}^{۲}=۲\pi\varepsilon_{\circ}V_{\circ}^{۲}a$

۲۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا ظرفیت خازن را در حالتی که عایق قرار دارد می‌یابیم و سپس ظرفیت را در زمانی که این عایق برداشته شود به دست می‌آوریم. لذا برای اختلاف انرژی خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{C_{۱}}=\frac{۲a}{۳\varepsilon_{\circ}A}+\frac{a}{۳\varepsilon A}=\frac{a}{۳A}(\frac{۲}{\varepsilon_{\circ}}+\frac{۱}{\varepsilon}) \Rightarrow C_{۱}=\frac{\varepsilon_{\circ}A}{a}\frac{۳\varepsilon}{۲\varepsilon+\varepsilon_{\circ}} \ , \ C_{۲}=\frac{\varepsilon_{\circ}A}{a}$$

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲} \Rightarrow \Delta U=\frac{۱}{۲}\frac{\varepsilon_{\circ}A}{a}(\frac{\varepsilon_{\circ}-\varepsilon}{۲\varepsilon+\varepsilon_{\circ}})V_{\circ}^{۲}$$

۲۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. هیچکدام از گزینه‌ها دارای بعد طول نمی‌باشند.

ابتدا به محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل‌ها و در نتیجه بارهای سطحی می‌پردازیم. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{هوا}: E=\frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}} \rightarrow V=\frac{\sigma d}{\varepsilon_{\circ}} \\ \text{دی‌الکتریک}: E'=\frac{\sigma'}{\varepsilon} \rightarrow V'=\frac{\sigma' d}{\varepsilon} \end{array}\right\} \rightarrow V=V' \rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}}=\frac{\sigma'}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma'=k\sigma$$

اما برای مقدار بار روی سطح می‌توان نوشت: $Q=\sigma' hx+\sigma(\ell-h)x=k\sigma hx+\sigma(\ell-h)x=\sigma h(k-۱)x+\sigma\ell x$

با توجه به اختلاف پتانسیل و مقدار بار روی سطح خواهیم داشت: $C=\frac{Q}{V}=\frac{\sigma h(k-۱)x+\sigma\ell x}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_{\circ}}}=\frac{\varepsilon_{\circ}((k-۱)h+\ell)x}{d}$

و از آنجا که نیرو برابر با گرادیان انرژی است داریم: $F_e=\frac{۱}{۲}V^{۲}\frac{dC}{dh}=\frac{\varepsilon_{\circ}V^{۲}(k-۱)x}{۲d}=mg=\rho(xdh)g \Rightarrow h=\frac{\varepsilon_{\circ}V^{۲}(k-۱)}{۲\rho gd^{۲}}$

۲۴ـ گزینه «۴» در این حالت می‌توان از رابطه‌ی ظرفیت خازن به صورت زیر استفاده کرد که در آن فرض بر این است که $d \gg a$ است؛ لذا $\frac{۱}{a} \gg \frac{۱}{d}$ خواهد بود بنابراین می‌توان نوشت:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a}-\frac{۲}{d}}=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{\frac{۲}{a}-\frac{۲}{d}} \simeq ۲\pi\varepsilon_{\circ}a$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۵ـ گزینه «۱» ظرفیت خازن استوانه‌ای به صورت روبرو می‌باشد:

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_\circ}{\ln\frac{b}{a}}$$

لذا برای بیشینه مقدار انرژی ذخیره شده ابتدا مقدار آن را به دست می‌آوریم و سپس مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم و اکسترمم آن را می‌یابیم.

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{(\lambda 2\pi b)^2\ln\frac{b}{a}}{2\pi\varepsilon_\circ}\quad;\quad \frac{dW}{db}=\circ\Rightarrow 2b\ln\frac{b}{a}+b=\circ\quad;\quad \ln\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{e}\Rightarrow b=a\sqrt{e}$$

۲۶ـ گزینه «۳» طبق قانون گاوس، شدت میدان الکتریکی در حالت اول چنین است:

$$\oint\vec{E}.d\vec{s}=Q\ \Rightarrow\varepsilon_\circ\int_{\text{نیمه فوقانی}}\vec{E}.d\vec{s}+\varepsilon_\circ\int_{\text{نیمه پایینی}}\vec{E}.d\vec{s}=Q$$

$$\int\vec{E}.d\vec{s}=\frac{Q}{2\varepsilon_\circ}\qquad(1)$$

در حالت دوم، خواهیم داشت:

$$\oint\vec{E}'.d\vec{s}=Q\Rightarrow\varepsilon_\circ\int_{\text{نیمه فوقانی}}\vec{E}'.d\vec{s}+K\varepsilon_\circ\int_{\text{نیمه پایینی}}\vec{E}'.d\vec{s}=Q$$

$$\int\vec{E}'.d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ(k+1)}\qquad(2)$$

با توجه به معادلات ۱و ۲ می‌توان نتیجه گرفت که میدان الکتریکی در حالت دوم $(\frac{2}{k+1})$ برابر میدان الکتریکی در حالت اول است. بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی نیز در حالت دوم $(\frac{2}{k+1})$ برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی در حالت اول خواهد بود. بنابراین:

$$C'=\frac{Q}{\Delta V'}=\frac{Q(k+1)}{2\Delta V}=\frac{(k+1)}{2}=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{(k+1)}{2}C$$

۲۷ـ گزینه «۳» با استفاده از فرمول ظرفیت معادل خازن‌های سری خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{\frac{1}{\circ/1}-\frac{1}{\circ/\circ2}}{4\pi(2\varepsilon_\circ)}+\frac{\frac{1}{\circ/\circ2}-\frac{1}{\infty}}{4\pi\varepsilon_\circ}=\frac{100}{16\pi\varepsilon_\circ}+\frac{100}{8\pi\varepsilon_\circ}\ \Rightarrow C=\frac{\circ/16\pi\varepsilon_\circ}{3}$$

۲۸ـ گزینه «۲» مقاومت الکتریکی مجموعه چنین خواهد بود:

$$R=\frac{d}{\sigma_1 A}+\frac{d}{\sigma_2 A}=\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2 A}$$

$$I=\frac{V}{R}\ \Rightarrow\ J=\frac{I}{A}=(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2})(\frac{V}{d})$$

در نتیجه چگالی بار سطحی در مرز بین دو دی‌الکتریک برابر است با:

$$\rho_S=(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1})J=(\frac{\varepsilon_2\sigma_1-\varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2})(\frac{V}{d})$$

۲۹ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. داخل شکل صورت سؤال فقط r_1 مشخص شده است. ما با فرض این که شعاع کوچک‌تر r_2 باشد تست را حل می‌کنیم. با استفاده از رابطه انتگرالی برای خازن‌های سری داریم:

$$\frac{1}{C}=\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{\int\int\varepsilon ds}=\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{r^2\varepsilon\underbrace{\int\int\sin\theta d\varphi d\theta}_{\Omega_\circ}}=\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{r^2\varepsilon\Omega_\circ}\Rightarrow\frac{1}{C}=\frac{1}{\varepsilon\Omega_\circ}(\frac{1}{r})_{r_1}^{r_2}=\frac{1}{\varepsilon\Omega_\circ}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1})=\frac{1}{\varepsilon\Omega_\circ}\frac{r_1-r_2}{r_1r_2}\Rightarrow C=\varepsilon\Omega_\circ\frac{r_1r_2}{r_1-r_2}$$

اگر جای r_1 و r_2 را عوض کنیم گزینه (۱) درست خواهد بود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۰ـ گزینه «۴» چون خازن تخت داریم، تغییرات میدان الکتریکی در جهت $\hat{a}_x$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\vec{E} = E_x \hat{a}_x$$

دربین صفحات خازن بار الکتریکی وجود ندارد، پس می‌توان نوشت:

$$\vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E}) = ۰ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_۰(۱+x^۲)E_x) = ۰ \Rightarrow E_x = \frac{k}{(۱+x^۲)}$$

طبق تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{\ell} = -\int E_x dx = -\int \frac{k}{(۱+x^۲)} dx = -k\tan^{-۱}x + C$$

در رابطه فوق k و C مقدارهای ثابت می‌باشند که با استفاده از شرایط مرزی داده شده خواهیم داشت:

$$V(۰) = ۰ \Rightarrow C = ۰$$

$$V(۱) = ۱۰۰ \Rightarrow -k\tan^{-۱}(۱) = ۱۰۰ \Rightarrow k = -\frac{۴۰۰}{\pi}$$

با جایگذاری k در V داریم:

$$V(x) = \frac{۴۰۰}{\pi}\tan^{-۱}x$$

۳۱ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. جریان جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \int_s \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.d\vec{s} = \frac{\partial D}{\partial t}A$$

A مساحت صفحه خازن می‌باشد. رابطه بین پتانسیل و میدان الکتریکی بین صفحات خازن به صورت زیر می‌باشد:

$$Ed = V \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t}d = \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t}A \times \frac{d}{\varepsilon A} = \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{۱}{C}\frac{\partial D}{\partial t}A = \frac{۱}{۲۰\times۱۰^{-۶}} ۱/۵ = ۰/۷۵\times۱۰^{۵}\ \frac{V}{s}$$

۳۲ـ گزینه «۱» در حالت اول خواهیم داشت:

$$Q = ۴\pi\varepsilon_۰ aV_۰ \quad ; \quad C = ۴\pi\varepsilon_۰ a$$

در حالت دوم داریم:

$$\frac{۱}{C'} = \int_a^{\infty} \frac{dr}{\varepsilon_۰(۱+\frac{a^۲}{r^۲})۴\pi r^۲} = \frac{\pi}{۱۶\pi\varepsilon_۰ a} = \frac{۱}{۱۶\varepsilon_۰ a} \quad ; \quad W' - W = \frac{۱}{۲}[\frac{Q^۲}{C'} - \frac{Q^۲}{C}] = (\frac{\pi}{۴} - ۱)۲\pi\varepsilon_۰ aV_۰^۲$$

۳۳ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول ساختاری خازن داریم:

$$\frac{۱}{C} = \int_۰^h \frac{dz}{A\varepsilon_۰(۱+a^۲z^۲)} = \frac{\tan^{-۱}(ah)}{\varepsilon_۰ Aa}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\varepsilon_۰ Aa}{\tan^{-۱}(ah)}$$

۳۴ـ گزینه «۳» مقدار بار ذخیره شده در حالت اول برابر است با:

$$Q_۱ = C_۱V_۱ = ۱۰۰\times۱۰^{-۱۲}\times۳۰۰ = ۳\times۱۰^{-۸}$$

برای انرژی ذخیره شده در حالت اول خواهیم داشت:

$$W_۱ = \frac{۱}{۲}CV^۲ = ۴/۵\times۱۰^{-۶}$$

در حالت دوم بار روی صفحه‌های خازن تغییر نکرده است و فقط ظرفیت تغییر یافته، بنابراین انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با:

$$W_۲ = \frac{Q_۲^۲}{۲C_۲} = ۴۵\times۱۰^{-۶}$$

کار انجام شده برابر اختلاف انرژی ذخیره شده در دو حالت می‌باشد:

$$\Delta W = W_۲ - W_۱ = ۴۰/۵\,\mu J$$

۳۵ـ گزینه «۴» ابتدا ظرفیت خازن را حساب کرده، سپس با استفاده از آن پتانسیل صفحات خازن را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} C &= \varepsilon_۰\frac{A}{d} \\ V &= \frac{Q}{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \frac{qd}{\varepsilon_۰ A}$$

میدان بین صفحه‌های خازن برابر است با:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_۰ A}$$

با استفاده از تعریف نیروی الکتریکی داریم:

$$F = Eq = \frac{q^۲}{\varepsilon_۰ A}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

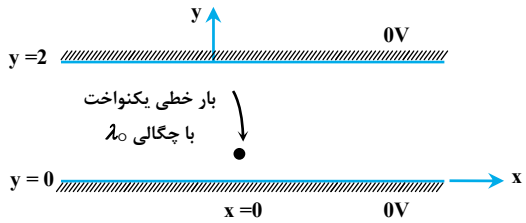
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل ششم

«معادله پواسون و لاپلاس»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ بار خطی یکنواخت به چگالی λ_0، همانند شکل، به موازات محور z و در وسط دو صفحهٔ رسانای موازی که دارای پتانسیل صفر هستند، واقع گردیده است. چنانچه در نقطهٔ A به مختصات $(x,y)=(2,1)$ پتانسیل الکتریکی $0/1V$ باشد، پتانسیل در نقطهٔ $(x,y)=(22,1)$ تقریباً با کدام گزینه برابر است؟ (راهنمایی: نقطهٔ A نسبت به بار خطی بسیار دور است) (برق ـ سراسری ۸۰)



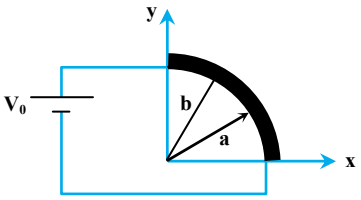
۱) $\frac{e^{-\pi}}{10}$

۲) $\frac{\lambda_0}{10\varepsilon_0}e^{-\pi}$

۳) $0/1(1-\ln\frac{22}{20})$

۴) $0/1-\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{22}{20}$

۲ـ بین دو انتهای یک قطعه فلزی همگن که بخشی از یک پوسته دایره‌ای شکل به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است (مطابق شکل)، اختلاف پتانسیل V_0 برقرار شده است. اندازه میدان الکتریکی در نقطه‌ای داخل فلز با مختصات قطبی (r,ϕ) چیست؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



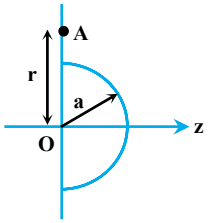
۱) $\frac{2V_0}{\pi}$

۲) $\frac{2V_0}{\pi r}\varphi$

۳) $\frac{2V_0}{\pi r}$

۴) $\frac{2V_0 r}{\pi}$

۳ـ قسمتی از یک صفحه مسطح رسانا مطابق شکل به صورت نیمکره‌ای به شعاع a درآمده است. پتانسیل الکتریکی در ناحیه $z>0$ (خارج از صفحه) در مختصات کروی از رابطه $\phi(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta(1-\frac{a^3}{r^3})$ به دست می‌آید. چگالی بار سطحی در نقطه A روی قسمت مسطح رسانا به فاصله r از مبدأ مختصات کدام گزینه است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



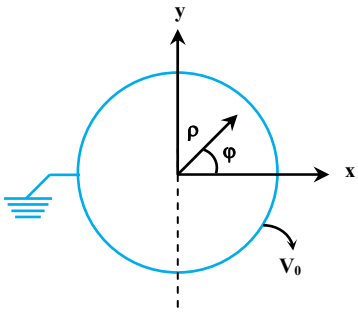
۱) صفر

۲) $\varepsilon_0 E_0(1-\frac{a^3}{r^3})$

۳) $\varepsilon_0 E_0(1+\frac{2a^3}{r^3})$

۴) $2\varepsilon_0 E_0(1-\frac{a^3}{r^3})$

۴ـ شکل جواب معادله لاپلاس در داخل دو نیم استوانه طویل با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل زیر چگونه است؟ (A_n, B_n و D ضرایب ثابت هستند.) (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $V(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_n(\rho)$

۲) $V(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n J_n(\rho)$

۳) $V(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^n\cos n\varphi+\frac{V_0}{2}$

۴) $V(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n\cos n\varphi+B_n\rho^n\sin n\varphi)+D\ln\rho$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۵ـ دو پوسته طویل استوانه‌ای باردار هم محور به شعاع‌های a و b به ترتیب دارای پتانسیل‌های ϕ_a و ϕ_b هستند. اگر $b > a$ باشد پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از محور استوانه $(a < r < b)$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\phi = \phi_a + \phi_b \frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{b}{a})}$

۲) $\phi = \phi_b + (\phi_a - \phi_b)\frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{a}{b})}$

۳) $\phi = \phi_b + (\phi_b - \phi_a)\frac{\ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{r}{a})}$

۴) $\phi = \phi_a + (\phi_b - \phi_a)\frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{b}{a})}$

۶ـ بار الکتریکی داخل پوستهٔ کروی نازکی به شعاع R صفر است. اگر پتانسیل الکتریکی روی سطح پوسته به شکل $V = V_\circ \cos^2\theta$ باشد، پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟ ($V_\circ$ مقدار ثابتی است). (فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $V_\circ$

۲) $\frac{V_\circ}{3}$

۳) $\frac{V_\circ}{2}$

۴) صفر

۷ـ دو کرهٔ هادی هم مرکز به شعاع‌های a و b $(b > a)$ مفروضند. کرهٔ کوچکتر متصل به پتانسیل $V_\circ$ و کرهٔ بزرگتر متصل به زمین است. میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز دو کره و $a < r < b$ توسط کدام رابطه داده می‌شود؟ ($\hat{r}$ بردار یکه شعاعی است). (فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{(b-a)V_\circ}{r^2}\hat{r}$

۲) $\frac{abV_\circ}{b-a}\frac{1}{r^2}\hat{r}$

۳) $\frac{a}{b}\frac{V_\circ}{r}\hat{r}$

۴) $\frac{abV_\circ}{a+b}\frac{1}{r^2}\hat{r}$

۸ـ در ناحیه‌ای از فضا که شامل مبدأ مختصات نمی‌باشد، چگالی بارهای الکتریکی به شکل $\rho = \rho_\circ(\frac{a}{r})^2$ است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای در این ناحیه در مختصات کروی (r,θ,φ) کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}\frac{1}{r^2}$

۲) $\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}r$

۳) $-\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ r}$

۴) $-\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}\ln r$

۹ـ میدان الکتریکی در نقاطی روی سطح کره‌ای به شعاع R به شکل $E = E_\circ \sin\varphi(\hat{i}+\hat{j})$ است. مقدار بار الکتریکی داخل این کره کدام است؟ (φ مختصه دستگاه کروی و $E_\circ$ مقدار ثابتی است). (فیزیک ـ سراسری ۸۲)

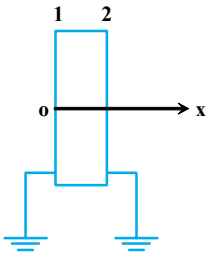
۱) صفر

۲) $\frac{\pi^2}{2}\varepsilon_\circ E_\circ R^2$

۳) $\frac{1}{2}\varepsilon_\circ E_\circ R^2$

۴) $4\pi\varepsilon_\circ E_\circ R^2$

۱۰ـ فضای بین دو صفحه بزرگ هادی موازی و متصل به زمین و به فاصله d از یکدیگر توسط یک توزیع بار حجمی به چگالی $\rho(x) = \rho_\circ x$ پر شده است. ($\rho_\circ$ ثابت و x امتداد عمود بر صفحات می‌باشد). پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای بین دو صفحه و به فاصله x از صفحه ۱ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



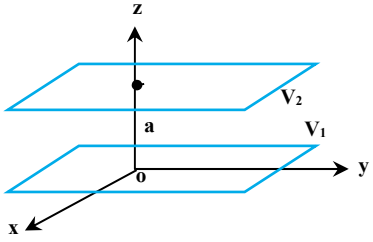
۱) $\frac{\rho_\circ}{4\varepsilon_\circ}(x^2 - xd^2)$

۲) $\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}[x^2 - 2xd]$

۳) $\frac{\rho_\circ}{6\varepsilon_\circ}[xd^2 - x^3]$

۴) $\frac{\rho_\circ}{6\varepsilon_\circ}[2xd^2 - x^3 - dx^2]$

۱۱ـ دو صفحه هادی بسیار بزرگ یکی منطبق بر $z = \circ$ و پتانسیل آن V_1 است و دیگری منطبق بر $z = a$ و پتانسیل آن V_2 است. فضای میان دو صفحه خلأ است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات (x,y,z) در بین این دو صفحه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



۱) $[V_1 + [\frac{V_2 - V_1}{a}]z]\sin[\frac{x}{a}]\sin[\frac{y}{a}]$

۲) $V_1 + (V_2 - V_1)\sin[\frac{\pi z}{2a}]$

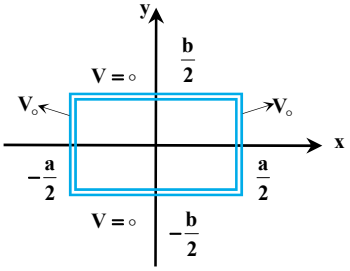
۳) $V_1 + \frac{(V_2 - V_1)}{\sin ha}\sinh z$

۴) $V_1 + [\frac{V_2 - V_1}{a}]z$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ اگر بخواهیم توزیع پتانسیل را در داخل شکل زیر به دست بیاوریم، کدام‌یک از جواب‌های زیر می‌تواند مناسب باشد؟ (برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $\sum A_n \cos(k_n x)\cos(k_n y)$

۲) $\sum A_n \cosh(k_n x)\cosh(k_n y)$

۳) $\sum A_n \cos(k_n x)\cosh(k_n y)$

۴) $\sum A_n \cosh(k_n x)\cos(k_n y)$

۱۳ـ پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا در مختصات کروی به شکل $V(r,\theta,\phi)=\frac{1}{r}\sin\theta\sin\phi$ است. نیرویی که به بار ۱۶μc در نقطه‌ای به مختصات $(r=2,\theta=\frac{\pi}{3},\phi=\frac{\pi}{6})$ وارد می‌شود چند میکرو نیوتن است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\sqrt{10}$ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۴ـ ضریب دی‌الکتریک یک محیط نامحدود در سیستم کروی به فرم $\varepsilon(r)=\varepsilon_\circ(1+\frac{a}{r})$ است (که در آن a یک مقدار ثابت است). کره کوچک رسانایی به شعاع R که دارای بار q می‌باشد در این محیط قرار می‌گیرد. پتانسیل الکتریکی حاصل از کره در ناحیه r>R کدام است؟ (r فاصله از مرکز کره است)

(فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{1}{r+a}$ ۲) $\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r}\ln(\frac{r}{r+a})$ ۳) $\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ a}(1+\frac{a}{r})$ ۴) $\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ a}\ln(1+\frac{a}{r})$

۱۵ـ در مورد دو جواب معادله لاپلاس که هر دو در شرایط مرزی یکسان صدق کنند کدام گزینه درست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) یا با هم مساوی‌اند یا اختلاف آن‌ها عدد ثابتی غیر صفر است.

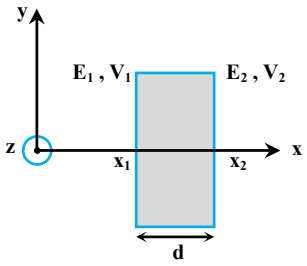
۲) حتماً با هم مساوی‌اند.

۳) اختلاف آن‌ها می‌تواند تابع دلخواهی از مکان باشد.

۴) بستگی به نوع شرایط مرزی ممکن است مساوی باشند یا اختلاف آن‌ها تابع دلخواهی از مکان باشد.

۱۶ـ مطابق شکل یک قطعه دی‌الکتریک با چگالی بار یکنواخت ρ و ضخامت d مفروض است. با فرض اینکه میدان الکتریکی فقط تابعی از مختصهٔ x است و در $x=x_1$ میدان الکتریکی $E_x=E_1$ و پتانسیل $V=V_1$ است. اختلاف پتانسیل دو سطح قطعه $\Delta V=V_1-V_2$ کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۴)



۱) $-\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_\circ}-E_1 d$ ۲) $\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_\circ}+E_1 d$

۳) $E_1 d-\frac{\rho d^2}{3\varepsilon_\circ}$ ۴) $E_1 d$

۱۷ـ در فضای خالی روی سطح کره‌ای به شعاع a چگالی بارهای سطحی الکتریکی به صورت $\sigma=\sigma_\circ\cos\theta$ فرض شده است ($\sigma_\circ$ ثابت است). پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره به صورت زیر به‌دست آمده است:

$$\begin{cases} V_i = Ar\cos\theta & r<a \\ V_\circ = \frac{B}{r^2}\cos\theta & r>a \end{cases}$$

ضرایب A و B به ترتیب عبارتند از: (برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\sigma_\circ a^2}{3\varepsilon_\circ}, \frac{\sigma_\circ}{3\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{\sigma_\circ a^2}{3\varepsilon_\circ}, \frac{\sigma_\circ}{3a\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{\sigma_\circ a^4}{\varepsilon_\circ}, \frac{\sigma_\circ a}{\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{\sigma_\circ a^3}{\varepsilon_\circ}, \frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_\circ}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۸ـ پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره‌ای عایق به شعاع R و ضریب دی‌الکتریک ε، برابر است با:

$$V(r,\theta)=\begin{cases}-\dfrac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 r\cos\theta & r<R\\ [\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}(\dfrac{R}{r})^3-1]E_0 r\cos\theta & r>R\end{cases}$$

چگالی بار القایی روی سطح کره کدام است؟ (مبدأ مختصات منطبق بر مرکز کره است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\dfrac{3(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$ ۲) $\dfrac{3(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\varepsilon_0 E_0\cos\theta$ ۳) $\dfrac{4\varepsilon_0\varepsilon}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$ ۴) $\dfrac{3\varepsilon_0\varepsilon}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$

۱۹ـ پتانسیل الکتریکی در خارج از کرهٔ توخالی به شعاع R در مختصات کروی به شکل $V(r,\theta)=V_0(1+\dfrac{R}{r}\sin\theta)$ است. مبدأ مختصات بر مرکز کره منطبق است. بار کل روی سطح کره کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) $\pi^2\varepsilon_0 RV_0$ ۳) $4\pi\varepsilon_0 RV_0$ ۴) $-\pi^2\varepsilon_0 RV_0$

۲۰ـ حفره‌ای کروی به شعاع R در یک محیط عایق با ضریب دی‌الکتریک K وجود دارد. یک دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ را در مرکز حفره قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی در خارج از حفره $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3}{2K+1}[\dfrac{3\vec{r}(\vec{r}.\vec{p})}{r^5}-\dfrac{\vec{p}}{r^3}]$ است. میدان الکتریکی در داخل حفره کدام است؟ ($\vec{r}$ بردار مکان نسبت به مرکز حفره است.)

(فیزیک ـ سراسری ۸۷)

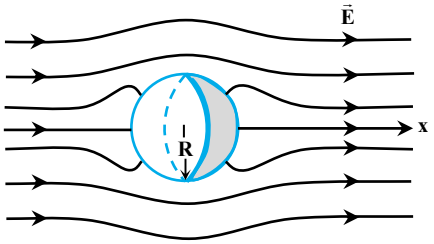
۱) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{K-1}{2K+1}\dfrac{\vec{P}}{R^3}$

۲) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\dfrac{3\vec{r}(\vec{r}.\vec{p})}{r^5}-\dfrac{\vec{p}}{r^3}-\dfrac{2(K-1)}{2K+1}\dfrac{\vec{P}}{R^3}]$

۳) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\dfrac{3\vec{r}(\vec{r}.\vec{p})}{r^5}-\dfrac{\vec{p}}{r^3}]$

۴) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\dfrac{3\vec{r}(\vec{r}.\vec{p})}{r^5}-\dfrac{\vec{p}}{r^3}+\dfrac{2(K-1)}{2K+1}\dfrac{\vec{P}}{R^3}]$

۲۱ـ پوسته کروی فلزی به شعاع R را در معرض میدان الکتریکی ثابت و یکنواخت $\vec{E}=E_0\hat{a}_x$ قرار می‌دهیم. نیرویی که دو نیمکره راست و چپ تشکیل‌دهنده این پوسته کروی به یکدیگر وارد می‌کنند، چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)



۱) صفر

۲) $\dfrac{9\pi\varepsilon_0}{4}R^2E_0^2$

۳) $\dfrac{9\pi\varepsilon_0}{2}R^2E_0^2$

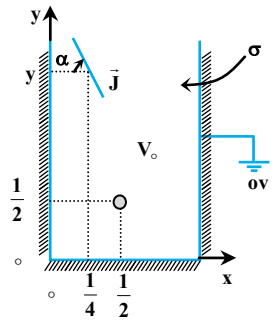
۴) $\dfrac{9\pi\varepsilon_0}{8}R^2E_0^2$

۲۲ـ با فرض $\rho=\rho_0\dfrac{a}{r}\dfrac{c}{m^3}$ درمختصات کروی، پتانسیل را به صورت تابعی از r به دست آورید. فرض کنید پتانسیل در $r=0$ برابر با صفر باشد.

(برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $V=\dfrac{-\rho_0 ar}{2\varepsilon_0}$ ۲) $V=\dfrac{\rho_0 ar}{2\varepsilon_0}$ ۳) $V=\dfrac{-\rho_0 ar}{\varepsilon_0}$ ۴) $V=\dfrac{\rho_0 ar}{\varepsilon_0}$

۲۳ـ یک استوانه رسانا که به ولتاژ مستقیم V_0 متصل است همانند شکل در محل $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ در داخل یک کانال آب با رسانائی σ قرار دارد. دیواره‌های کانال یعنی صفحات $x=0, x=1$ و $y=0$ همگی در پتانسیل صفر ولت قرار دارند. زاویه خطوط چگالی جریان $\vec{J}$ در داخل آب در محل $x=\frac{1}{4}$ برای $y\gg 1$ که در شکل با α نشان داده شده، کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)



۱) $\dfrac{\pi}{6}$

۲) $\dfrac{\pi}{4}$

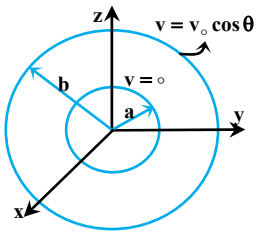
۳) $\dfrac{\pi}{3}$

۴) $\dfrac{\pi}{8}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۴ـ دو سطح کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b $(b > a)$ و پتانسیل‌های الکتریکی صفر و $V_\circ \cos\theta$ مطابق شکل مفروض است. پتانسیل در فضای بین دو کره در مختصات کروی کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)



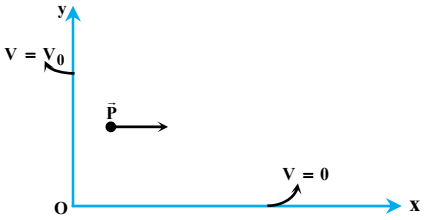
۱) $\frac{V_\circ a^2 \cos\theta}{b^3 - a^3}(r - \frac{a^3}{r^2})$

۲) $\frac{V_\circ b^2 \cos\theta}{b^3 - a^3}(r - \frac{a^3}{r^2})$

۳) $\frac{V_\circ b \cos\theta}{b^2 - a^2}(r - \frac{a^3}{r^2})$

۴) $\frac{V_\circ a \cos\theta}{b^2 - a^2}(r - \frac{a^3}{r^2})$

۲۵ـ ممان دو قطبی الکتریکی $\vec{p} = (p_x, \circ, \circ)$ در نقطه $(۱, ۲, \circ)$ در دستگاه مختصات دکارتی قرار دارد. صفحات $x = \circ$ و $y = \circ$ دارای پتانسیل ثابت و یکنواخت با مقادیر نشان داده شده در شکل هستند. پتانسیل الکترواستاتیکی در ناحیه $(x, y > \circ)$ کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{V_\circ}{\pi} \text{Arctg}(\frac{y}{x})$

۲) $\frac{V_\circ}{\pi} \text{Arc}\sin(\frac{y}{x})$

۳) $\frac{V_\circ}{2\pi} \text{Arc}\sin(\frac{y}{x})$

۴) $\frac{2V_\circ}{\pi} \text{Arctg}(\frac{y}{x})$

۲۶ـ بار سطحی با چگالی $\rho_s = \sigma \cos\beta x$ کولن بر مترمربع روی صفحهٔ $y = \circ$ توزیع شده است. معادلهٔ خطوط میدان الکتریکی در نیم‌فضای $y > \circ$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

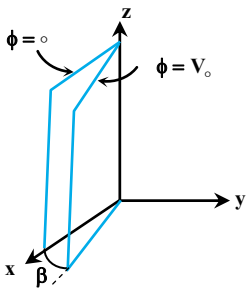
۱) $e^{-\beta y} |\sin\beta x| =$ ثابت

۲) $e^{-\beta y} |\cos\beta x| =$ ثابت

۳) $e^{-\beta y} |\text{cosec}\beta x| =$ ثابت

۴) $e^{-\beta y} |\sec\beta x| =$ ثابت

۲۷ـ یک خازن از دو صفحه مسطح نیمه نامتناهی که زاویه بین آنها β است تشکیل شده است. یکی از دو صفحه خازن در پتانسیل صفر و دیگری در پتانسیل ثابت $V_\circ$ نگه داشته شده است. میدان الکتریکی در ناحیه میان صفحات خازن کدام است؟ ($\hat{\rho}$ و $\hat{\varphi}$ بردار یکه‌های مربوط به مختصات استوانه‌ای ρ و φ است.) (فیزیک ـ سراسری ۹۰)



۱) $-\frac{V_\circ}{\beta\rho}\hat{\rho}$

۲) $-\frac{V_\circ \beta}{\rho}\hat{\rho}$

۳) $-\frac{V_\circ \varphi}{\beta\rho}\hat{\varphi}$

۴) $-\frac{V_\circ}{\beta\rho}\hat{\varphi}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه نقطه A نسبت به بار خطی بسیار دور است لذا می‌توان پتانسیل الکتریکی ناشی از بار خطی را تقریباً صفر در نظر گرفت.

از طرفی برای به‌دست آوردن پتانسیل در بین دو صفحه می‌توان از جواب‌های معادله لاپلاس استفاده کرد. چون فضای بین دو صفحه در جهت $+x$ و $-x$ نامحدود می‌باشد، بنابراین جواب معادله لاپلاس در جهت x به صورت نمایی می‌باشد و به خاطر کراندار بودن پتانسیل باید مقدار آن در $+\infty$ و $-\infty$ صفر باشد، بنابراین جمله مربوط به x در جواب به صورت $e^{-\lambda_n|x|}$ می‌باشد.

چونکه پتانسیل در جهت x نمایی شد بنابراین با توجه به جواب‌های معادله لاپلاس جواب در جهت y باید مثلثاتی باشد. پتانسیل در $y=0$ صفر می‌باشد پس در نتیجه جواب در جهت y به صورت $\sin\lambda_n y$ می‌باشد. همچنین پتانسیل در $y=2$ هم صفر می‌باشد با توجه به ریشه‌های sin مقدار $\lambda_n=\frac{n\pi}{2}$ می‌باشد ($2\lambda_n=n\pi$). با ضرب جواب‌های به دست آمده خواهیم داشت:

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n|x|}\sin\lambda_n y \quad , \quad \lambda_n=\frac{n\pi}{2}$$

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{2}|x|}\sin\frac{n\pi y}{2}$$

برای $x>0$ می‌توانیم قدر مطلق توان جمله نمایی را حذف کنیم.

به ازای مقادیر بزرگ x فقط جمله اول (به ازای $n=1$) قابل اهمیت بوده و لذا با یک تقریب مناسب می‌توان چنین نوشت:

$$V(x,y)=A_1 e^{-\frac{\pi}{2}x}\sin\frac{\pi y}{2}$$

طبق شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$V(20,1)=0/1=A_1 e^{-10\pi}\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow A_1=\frac{e^{10\pi}}{10}$$

$$V(22,1)=A_1 e^{-11\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{e^{-\pi}}{10}$$

۲ـ گزینه «۳» پتانسیل فقط تابعی از ϕ می‌باشد بنابراین می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 V=0\Rightarrow\frac{d^2V}{d\varphi}=0\Rightarrow V=A\varphi+B$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$A=\frac{2V_0}{\pi} \quad و \quad B=0$$

$$V=\frac{2V_0}{\pi}\phi \quad \Rightarrow E=|-\vec{\nabla}V|=|-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}|=\frac{2V_0}{\pi r}$$

۳ـ گزینه «۲» با توجه به میدان داده شده و با توجه به این که میدان در درون یک رسانا برابر صفر است داریم:

$$\sigma=\varepsilon_0 E_n=\varepsilon_0(-\vec{\nabla}\varphi)=\varepsilon_0(-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\varepsilon_0 E_0(1-\frac{a^3}{r^3})$$

۴ـ گزینه «۳» معادله لاپلاس در داخل دو نیم استوانه برقرار است. مقدار ولتاژ در مرکز استوانه ($\rho=0$) برابر است با $\frac{V_0+0}{2}=\frac{V_0}{2}$، که فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

چون طول استوانه در جهت z بی‌نهایت گرفته شده است بنابراین پتانسیل در جهت z تغییر نمی‌کند و با توجه به شرایط مرزی داده شده پتانسیل درون استوانه در جهت ρ و φ تغییر می‌کند. بنابراین همان‌طور که قبلاً بیان کردیم جواب معادله لاپلاس که وابسته به ρ و φ باشد به صورت زیر می‌باشد:

$$V(\rho,\varphi)=A'_0+A''_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n\cos\lambda_n\varphi+B_n\sin\lambda_n\varphi)(C_n\rho^{\lambda_n}+C'_n\rho^{-\lambda_n})$$

از آنجایی که پتانسیل درون استوانه خواسته شده است و پتانسیل در درون استوانه باید کراندار باشد بنابراین ضرایب C'_n و A''_0 باید صفر باشند (برای $\rho=0$ این دو جمله بی‌نهایت می‌شوند). همچنین با توجه به این که پتانسیل در روی دو نیم‌کره نسبت به φ زوج باشد در نتیجه B_n باید صفر باشد (چون cos زوج و sin فرد می‌باشد) که جواب به صورت مقابل خواهد شد:

$$V(\rho,\varphi)=A'_0+\sum_{n=1}^{\infty}A'_n C_n\rho^{\lambda_n}\cos\lambda_n\varphi$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

چون استوانه به طور کامل وجود دارد $\lambda_n = n$ می‌باشد. برای به دست آوردن $A'_\circ$ پتانسیل در مرکز استوانه را $(\rho = \circ)$ با استفاده از قضیه مقدار میانگین که قبلاً معرفی کردیم به دست می‌آوریم.

$$V(\circ,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} V(\rho,\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}(V_\circ\pi + \circ\times\pi) = \frac{V_\circ}{2}$$

اگر فرض کنیم که $A'_n C_n = A_n$ باشد جواب به صورت مقابل خواهد بود:

$$V(\rho,\varphi) = \frac{V_\circ}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^n \cos n\varphi$$

۵ـ گزینه «۴» **روش اول:** فقط گزینه ۴ در شرایط مرزی مسأله صدق می‌کند.

روش دوم: چون محیط همگن می‌باشد و شرایط مرزی داده شده است بنابراین با استفاده از معادله لاپلاس می‌توانیم پتانسیل در بین دو استوانه را به دست آوریم. با توجه به شرایط مرزی داده شده نتیجه می‌گیریم که پتانسیل فقط تابعی از r می‌باشد و با تغییر φ و z ثابت می‌ماند. پس با استفاده از رابطه‌ای که در متن درس به دست آوردیم داریم:

$$\nabla^2\varphi = \circ \Rightarrow \varphi = k_1 \ln r + k_2$$

حال با اعمال شرایط مرزی مقدار k_1 و k_2 را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} r = a \Rightarrow \varphi_a = k_1 \ln a + k_2 \\ r = b \Rightarrow \varphi_b = k_1 \ln b + k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = (\varphi_b - \varphi_a)\dfrac{1}{\ln\frac{b}{a}} \\ k_2 = \varphi_a - (\varphi_b - \varphi_a)\dfrac{\ln a}{\ln\frac{b}{a}} \end{array}\right.$$

با جایگذاری k_1 و k_2 در رابطه φ داریم:

$$\varphi = \varphi_a + (\varphi_b - \varphi_a)\frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}}$$

۶ـ گزینه «۲» پتانسیل در مرکز کره میانگین پتانسیل روی سطح کره می‌باشد:

$$V_\circ = \frac{1}{4\pi}\int V d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi} V_\circ \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{V_\circ}{3}$$

زیرا پتانسیل در درون کره در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند و بنابراین قضیه‌ی مقدار میانگین صادق است.

۷ـ گزینه «۲» می‌دانیم $\vec{E} \propto \frac{1}{r^2}$ است. پس گزینه ۳ قطعاً نادرست است.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = \circ \rightarrow V = -\frac{k_1}{r} + k_2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = a \rightarrow V = V_\circ \rightarrow -\frac{k_1}{a} + k_2 = V_\circ \\ r = b \rightarrow V = \circ \rightarrow -\frac{k_1}{b} + k_2 = \circ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{ab}{a-b}V_\circ \\ k_2 = \dfrac{a}{a-b}V_\circ \end{array}\right.$$

$$V = \frac{aV_\circ}{a-b}(\frac{-b}{r} + 1)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -(\frac{\partial V}{\partial r}) = -\frac{aV_\circ}{a-b}(\frac{+b}{r^2})\hat{a}_r = \frac{abV_\circ}{(b-a)r^2}\hat{a}_r$$

۸ـ گزینه «۴» با استفاده از معادله پواسون داریم:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_\circ}$$

با استفاده از شکل لاپلاسی در مختصات کروی و فرض این که V تنها تابعی از r است، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = \frac{-\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ r^2}$$

بنابراین با انتگرال‌گیری متوالی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = \frac{-\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow r^2\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-\rho_\circ a^2 r}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ r} \Rightarrow V = \frac{-\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}\ln r$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۹ـ گزینه «۲» با در نظر گرفتن کره به شعاع R به عنوان یک سطح گاوسی می‌توانیم مقدار بار الکتریکی درون کره را به دست آوریم:

$$q=\varepsilon_{\circ}\oiint \vec{E}.d\vec{s}=\varepsilon_{\circ}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}E_{\circ}\sin\varphi(\hat{i}+\hat{j}).R^{2}\sin\theta d\theta d\varphi\hat{r}$$

برای حل این انتگرال $\hat{r}$ را باید به مختصات دکارتی انتقال داد:

$$\hat{r}=\cos\varphi\sin\theta\hat{i}+\sin\varphi\sin\theta\hat{j}$$

با قرار دادن $\hat{r}$ در انتگرال داریم:

$$q=\varepsilon_{\circ}E_{\circ}R^{2}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}(\sin\varphi\cos\varphi\sin^{2}\theta+\sin^{2}\varphi\sin^{2}\theta)d\theta d\varphi=\varepsilon_{\circ}E_{\circ}R^{2}\frac{\pi^{2}}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۳» با استفاده از معادله پواسون داریم:

$$\nabla^{2}V=-\frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}}=-\frac{\rho_{\circ}x}{\varepsilon_{\circ}}\Rightarrow V=\frac{-\rho_{\circ}x^{3}}{6\varepsilon_{\circ}}+K_{1}x+K_{2}$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$V(\circ)=\circ\Rightarrow K_{2}=\circ\ ;\ V(d)=\circ\Rightarrow\frac{-\rho_{\circ}d^{3}}{6\varepsilon_{\circ}}+K_{1}d=\circ\Rightarrow K_{1}=\frac{\rho_{\circ}d^{2}}{6\varepsilon_{\circ}}$$

بنابراین پتانسیل به صورت زیر در می‌آید:

$$V=\frac{-\rho_{\circ}x^{3}}{6\varepsilon_{\circ}}+\frac{\rho_{\circ}d^{2}}{6\varepsilon_{\circ}}x=\frac{\rho_{\circ}}{6\varepsilon_{\circ}}(xd^{2}-x^{3})$$

۱۱ـ گزینه«۴» چون فرض شده است صفحه در امتداد x و y خیلی بزرگ می‌باشد، بنابراین پتانسیل در بین دو صفحه به x و y وابسته نیست و فقط وابسته به z می‌باشد. بنابراین با استفاده از معادله لاپلاس تک متغیره داریم:

$$\nabla^{2}V=\circ\Rightarrow\frac{d^{2}V}{dZ^{2}}=\circ\Rightarrow V=AZ+B$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آید:

$$\begin{cases}Z=\circ\Rightarrow V=V_{1}\\ Z=a\Rightarrow V=V_{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{V_{2}-V_{1}}{a}\\ B=V_{1}\end{cases}$$

۱۲ـ گزینه «۴» **روش اول:** شرایط مرزی در راستای y دو بار صفر شده است. بنابراین نمی‌تواند بر حسب y به صورت هیپربولیکی باشد. (گزینه‌های ۲و ۳ نادرست‌اند) همچنین پاسخ معادله لاپلاس نمی‌تواند بر حسب هر دو متغیر به یک فرم باشد. به عبارت دیگر اگر بر حسب y مثلثاتی باشد، الزاماً بر حسب x هیپربولیکی خواهد بود. (گزینه ۱ نادرست است.)

روش دوم: در این مسأله شرایط مرزی در هر دو جهت x و y متناوب (تکراری) می‌باشد بنابراین با توجه به توضیح‌هایی که قبلاً دادیم نتیجه می‌گیریم که پتانسیل در هر دو جهت باید مثلثاتی باشد که این نتیجه اشتباه است، چون طبق دسته جواب‌هایی که برای معادله لاپلاس در مختصات دکارتی به دست آوردیم، پتانسیل در یک جهت باید مثلثاتی و در جهت دیگر هیپربولیکی (یا نمایی) باشد. با توجه به این که مرزهای محیط کاملاً مشخص شده است و یک محیط کراندار می‌باشد، بنابراین به جای جمله نمایی، جمله هیپربولیکی خواهیم داشت. در جهت y به خاطر وجود دو صفر جواب به صورت مثلثاتی می‌باشد ($\cosh$ ریشه ندارد و $\sinh$ فقط یک ریشه در صفر دارد). همچنین در مبدأ مختصات پتانسیل مخالف صفر می‌باشد؛ بنابراین جمله مثلثاتی $\sin$ نیست و به صورت $\cos(k_{n}y)$ می‌باشد که مقدار k را با استفاده از شرایط مرزی می‌توانیم به دست آوریم.

جواب در جهت x هیپربولیکی است. همان‌طور که گفتیم پتانسیل در مبدأ مختصات صفر نمی‌باشد. بنابراین جواب در جهت x باید به صورت $\cosh(k_{n}x)$ باشد. در نتیجه فقط گزینه ۴ درست است.

۱۳ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن نیروی وارد بر یک بار الکتریکی باید میدان الکتریکی در محل بار را به دست آوریم. چون پتانسیل الکتریکی داده شده است، ابتدا با استفاده از رابطه $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از رابطه $F=qE$ مقدار نیروی وارد بر بار را محاسبه می‌کنیم.

$$E=-\vec{\nabla}V=-(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{a}_{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{a}_{\varphi})$$

با استفاده از شکل عملگر گرادیان در مختصات کروی می‌توان نوشت:

$$E=\frac{1}{r^{2}}\sin\theta\sin\varphi\hat{a}_{r}-\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\sin\varphi\hat{a}_{\theta}-\frac{1}{r^{2}}\cos\varphi\hat{a}_{\varphi}$$

لذا برای نیرو خواهیم داشت:

$$F=qE=4\mu N$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۴ـ گزینه «۴» با استفاده از رابطه‌ی داده شده برای ضریب دی‌الکتریک خواهیم داشت:

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon r^{۲}}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} r(a+r)}$$

لذا برای پتانسیل با انتگرال‌گیری از $\vec{E}$ به دست می‌آید:

$$V=-\int E.dr=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a}\ln(۱+\frac{a}{r})$$

۱۵ـ گزینه «۲» جواب معادله لاپلاس که در شرایط مرزی معین صدق می‌کند، یکتاست.

۱۶ـ گزینه «۱» با استفاده از معادله پواسون و فرض تک متغیره بودن میدان الکتریکی داریم:

$$\nabla^{۲}V=-\frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}}$$

لذا با فرض وابستگی V به x و انتگرال‌گیری از معادله‌ی لاپلاس می‌توان نوشت:

$$V=\frac{-\rho}{۲\varepsilon_{\circ}}x^{۲}+K_{۱}x+K_{۲}$$

در نهایت با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{cases}-\frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}}\frac{x_{۱}^{۲}}{۲}+K_{۱}x_{۱}+K_{۲}=V_{۱}\\ E_{۱}=\frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}}x_{۱}-K_{۱}\Rightarrow K_{۱}=\frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}}x_{۱}-E_{۱}\end{cases}\Rightarrow V_{۲}=\frac{-\rho}{\varepsilon_{\circ}}\frac{x_{۲}^{۲}}{۲}+K_{۱}x_{۲}+K_{۲}\Rightarrow V_{۲}-V_{۱}=\frac{-\rho d^{۲}}{۲\varepsilon_{\circ}}-dE_{۱}$$

۱۷ـ گزینه «۱» با توجه به این که پتانسیل در دو ناحیه داده شده و مقدار چگالی بار سطحی روی مرز دو ناحیه مشخص است می‌توانیم ابتدا با استفاده از رابطه $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ میدان الکتریکی در هر ناحیه را به دست آوریم و سپس با استفاده از شرایط مرزی مقدار ضریب ثابت A و B را به دست آوریم:

$$E_{i}=-\vec{\nabla}V_{i}=-A\cos\theta\hat{a}_{r}+A\sin\theta\hat{a}_{\theta}$$

$$E_{\circ}=-\vec{\nabla}V_{o}=\frac{۲B}{r^{۳}}\cos\theta\hat{a}_{r}+\frac{B}{r^{۳}}\sin\theta\hat{a}_{\theta}$$

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$D_{ro}-D_{ri}=\sigma\Rightarrow\frac{۲B\varepsilon_{\circ}\cos\theta}{a^{۳}}+\varepsilon_{\circ}A\cos\theta=\sigma_{\circ}\cos\theta\qquad(۱)$$

از طرفی مقدار پتانسیل الکتریکی روی مرز مشترک یکسان می‌باشد.

$$A\cos\theta=\frac{B}{a^{۲}}\cos\theta\Rightarrow B=Aa^{۲}\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}A=\frac{\sigma_{\circ}}{۳\varepsilon_{\circ}}\qquad B=\frac{\sigma_{\circ}a^{۲}}{۳\varepsilon_{\circ}}$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا با استفاده از پتانسیل داده شده میدان الکتریکی هر دو ناحیه را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از شرایط مرزی چگالی بار القایی روی سطح کره را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{E}(r,\theta)=\begin{cases}-\vec{\nabla}(-\frac{۳\varepsilon_{\circ}}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}E_{\circ}r\cos\theta) & r<R\\ -\vec{\nabla}([\frac{\varepsilon-\varepsilon_{\circ}}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}(\frac{R}{r})^{۳}-۱]E_{\circ}r\cos\theta) & r>R\end{cases}$$

دقت کنید با توجه به شرط مرزی $D_{۲n}-D_{۱n}=\sigma$ فقط به مؤلفه میدان عمود بر سطح (E_r) نیاز داریم:

$$E_{r}(r,\theta)=\begin{cases}\frac{۳\varepsilon_{\circ}}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}E_{\circ}\cos\theta & r<R\\ [۲\frac{\varepsilon-\varepsilon_{\circ}}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}(\frac{R}{r})^{۳}+۱]E_{\circ}\cos\theta & r>R\end{cases}$$

اگر فرض کنیم که ضریب دی‌الکتریک کره ε باشد با اعمال شرط مرزی در $r=R$ داریم:

$$D_{ro}-D_{ri}=\sigma\Rightarrow\sigma=\varepsilon_{\circ}[۲\frac{\varepsilon-\varepsilon_{\circ}}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}+۱]E_{\circ}\cos\theta-\varepsilon\frac{۳\varepsilon_{\circ}}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}E_{\circ}\cos\theta\Rightarrow\sigma=\frac{۳(\varepsilon-\varepsilon_{\circ})}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}\varepsilon_{\circ}E_{\circ}\cos\theta=\circ$$

www.modaresanesharif.ac.ir

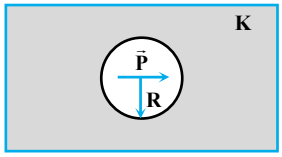
www.modaresanesharif.ac.ir

۱۹ـ گزینه «۲» ابتدا میدان الکتریکی را با استفاده از رابطه $\vec{E}=-\nabla V$ به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از قانون گاوس مقدار بار روی کره را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=\frac{V_\circ R}{r^2}\sin\theta\hat{r}-\frac{1}{r}\frac{V_\circ R}{r}\cos\theta\hat{\theta}$$

با استفاده از شکل گرادیان در مختصات کروی داریم:

$$Q=\varepsilon_\circ\oiint\vec{E}.d\vec{s}=\varepsilon_\circ\oiint(\frac{V_\circ R}{r^2}\sin\theta)r^2\sin\theta d\theta d\varphi=\varepsilon_\circ\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}V_\circ R\sin^2\theta d\theta d\varphi=\pi^2\varepsilon_\circ RV_\circ$$



۲۰ـ گزینه «۴» برای حل این مساله از هماهنگ‌های کروی استفاده می‌کنیم و چون در فاصله بی‌نهایت از حفره بایستی پتانسیل الکتریکی صفر شود، لذا پتانسیل در خارج از کره متناسب با پتانسیل یک دو قطبی الکتریکی است.

حال برای پیدا کردن میدان الکتریکی در داخل حفره از شرایط مرزی زیر استفاده می‌نماییم:

میدان الکتریکی خارج از حفره: $\vec{E}_{out}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{3}{2K+1}[\frac{3\vec{r}(\vec{r}.\vec{p})}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}]$

پتانسیل در دو ناحیه با استفاده از معادله لاپلاس و شرایط مرزی و تقارن در مسأله به صورت زیر می‌باشد:

پتانسیل داخل حفره $\varphi_{in}=A_1 r\cos\theta+\frac{C_1}{r^2}\cos\theta$

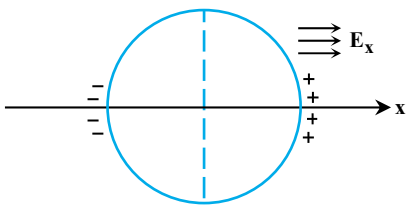
پتانسیل خارج حفره $\varphi_{out}=\frac{C_1'}{r^2}\cos\theta$, $C_1'=\frac{p}{4\pi\varepsilon_\circ}$

شرط مرزی اول در دو محیط: $\varphi_{in}\Big|_{r=R}=\varphi_{out}\Big|_{r=R}\Rightarrow A_1R+\frac{C_1}{R^2}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{1}{R^2}$

شرط مرزی دوم در دو محیط: $D_{2n}-D_{1n}=\sigma$ چون $\sigma=\circ\Rightarrow D_{2n}=D_{1n}\Rightarrow K\varepsilon_\circ\vec{E}_{out_\perp}|_{r=R}=\varepsilon_\circ\vec{E}_{in_\perp}|_{r=R}\Rightarrow KE_{2n}|_{r=R}=E_{1n}|_{r=R}$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1=\varphi_2\xrightarrow{\text{شرط مرزی}}A_1R+\frac{C_1}{R^2}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{1}{R^2}\\ D_{2n}=D_{1n}\xrightarrow{\text{شرط مرزی}}A_1-\frac{2C_1}{R^3}=\frac{-kp}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{2}{R^3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_1=\frac{2}{3}\frac{(1-K)p}{4\pi\varepsilon_\circ R^3}\ ,\ C_1=\frac{p}{4\pi\varepsilon_\circ R^2}\frac{1}{3}(1+2K)$$

لذا تنها گزینه‌ای که طبق شرایط مرزی می‌باشد و شرایط مرزی را برآورده می‌کند، گزینه (۴) است.



۲۱ـ گزینه «۲» وقتی یک کره رسانا در معرض یک میدان الکتریکی یکنواخت $E_\circ$ قرار می‌گیرد، یک بار سطحی القایی روی کره رسانا القا می‌شود که عبارت است از:

$$\sigma=3\varepsilon_\circ E_\circ\cos\theta$$

و مثل این است که کره رسانا به دو نیمکره با چگالی بار σ تقسیم شده و هر کدام به هم نیرویی وارد می‌کنند که برابر است با:

$$d\vec{F}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_\circ}ds\hat{n}$$

که ds جزء سطح و $\hat{n}=\hat{r}$ بردار یکه عمود بر سطح کره است.

لذا مقدار نیروی وارد بر پوسته برابر است با:

$$\vec{F}=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2\varepsilon_\circ}9\varepsilon_\circ^2E_\circ^2\cos^2\theta)(R^2\sin\theta d\theta d\varphi)(\sin\theta\cos\varphi\hat{x}+\sin\theta\sin\varphi\hat{y}+\cos\theta\hat{z})$$

اما انتگرال روی φ برای مؤلفه‌ی $\hat{x}$ و $\hat{y}$ صفر است لذا خواهیم داشت:

$$\vec{F}=\frac{9}{2}\varepsilon_\circ E_\circ^2R^2(2\pi)\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3\theta d\theta\hat{z}=\frac{9\varepsilon_\circ\pi E_\circ^2R^2}{4}\hat{z}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۲ـ گزینه «۱» با استفاده از معادله پواسون خواهیم داشت:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = \frac{-\rho}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = -\rho_\circ \frac{a}{r\varepsilon_\circ}$$

از حل معادله فوق می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = \frac{-\rho_\circ a r}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow r^2\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-\rho_\circ a r^2}{2\varepsilon_\circ} + k_1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-\rho_\circ a}{2\varepsilon_\circ} + \frac{k_1}{r^2} \Rightarrow V = \frac{-\rho_\circ a r}{2\varepsilon_\circ} - \frac{k_1}{r} + k_2$$

با توجه به اینکه پتانسیل در $r = \circ$ برابر صفر فرض شده است، بنابراین داریم:

$$k_1 = k_2 = \circ \Rightarrow V = \frac{-\rho_\circ a r}{2\varepsilon_\circ}$$

۲۳ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $y >> 1$ می‌باشد، بنابراین می‌توان از اثر استوانه رسانا در نقطه‌ای به مختصات $(\frac{1}{4}, y)$ صرفنظر کرد. بنابراین پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات $(\frac{1}{4}, y)$ در واقع پتانسیل الکتریکی داخل کانال آب با شرایط مرزی داده شده می‌باشد. طبق روش تفکیک متغیرها، پتانسیل الکتریکی در داخل کانال از حل معادله لاپلاس به صورت مقابل به دست خواهد آمد:

$$\nabla^2 V = \circ \Rightarrow V = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\, e^{-\lambda_n y} \sin \lambda_n x$$

با صرفنظر کردن از جملات دوم به بالاتر، تقریباً می‌توان چنین نوشت:

$$V \simeq k_1 e^{-\pi y} \sin \pi x \qquad (\lambda_n = \frac{n\pi}{1})$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -(k\pi e^{-\pi y}\cos \pi x)\hat{a}_x + (k\pi e^{-\pi y}\sin \pi x)\hat{a}_y$$

در نقطه‌ای به مختصات $(\frac{1}{4}, y)$ داریم:

$$\vec{E} = \frac{-k\pi\sqrt{2}}{2} e^{-\pi y}\, \hat{a}_x + \frac{k\pi\sqrt{2}}{2} e^{-\pi y}\, \hat{a}_y$$

طبق رابطه $\vec{J} = \sigma \vec{E}$، جهت خطوط چگالی جریان همان جهت $\vec{E}$ خواهد بود، بنابراین زاویه خواسته شده برابر است با:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

۲۴ـ گزینه «۲» پتانسیل الکتریکی در فضای بین دو کره از حل معادله لاپلاس به‌دست می‌آید. از طرفی جواب معادله لاپلاس با توجه به شرایط مرزی داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$v(r,\theta) = \sum_{n=\circ}^{\infty} [A_n r^n P_n(\cos\theta) + \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)]$$

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$V(b,\theta) = V_\circ \cos\theta = V_\circ\, P_1(\cos\theta) \Rightarrow A_1 b + \frac{B_1}{b^2} = V_\circ$$

$$V(a,\theta) = \circ \Rightarrow A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = \circ$$

از حل معادلات فوق خواهیم داشت:

$$A_1 = \frac{V_\circ b^2}{b^3 - a^3} \quad , \quad B_1 = \frac{-V_\circ b^2 a^3}{b^3 - a^3}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$V(r\ ,\theta) = \frac{V_\circ b^2}{b^3 - a^3} r^3 \cos\theta - \frac{V_\circ b^2 a^3}{b^3 - a^3}(\frac{1}{r^2})\cos\theta = \frac{V_\circ b^2 \cos\theta}{b^3 - a^3}(r - \frac{a^3}{r^2})$$

تذکر: با بررسی شرایط مرزی نیز خواهیم دید که فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۲۵ـ گزینه «۴» ابتدا با حل معادله‌ی لاپلاس پتانسیل را در ناحیه‌ی مدنظر پیدا می‌کنیم. این کار را در دستگاه قطبی مسطح انجام می‌دهیم و با توجه به شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$V = K_1\theta + K_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \circ \Rightarrow V = \circ \Rightarrow K_2 = \circ \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = V_\circ \Rightarrow K_1 = \frac{2V_\circ}{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{2V_\circ}{\pi}\theta$$

از طرفی $\theta = \text{Arctg}(\frac{y}{x})$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$V = \frac{2V_\circ}{\pi}\text{Arctg}(\frac{y}{x})$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۶ـ گزینه «۱» در ناحیه $y>0$ بار الکتریکی وجود ندارد. بنابراین داریم:

$$\nabla^2 V=0 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، طبق شرایط مرزی می‌توان نوشت:

$$(\vec{D}_2-\vec{D}_1).\hat{n}\Big|_{y=0}=\rho_s=\sigma\cos\beta x \quad , \quad (\frac{\partial V_1}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial y})=\sigma\cos\beta x \qquad (2)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$V=k\,e^{-\beta y}\cos\beta x$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=\underbrace{k\beta e^{-\beta y}\sin\beta x}_{E_x}\,\hat{a}_x+\underbrace{k\beta e^{-\beta y}\cos\beta x}_{E_y}\,\hat{a}_y \quad , \quad \frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}\Rightarrow\frac{dx\cos\beta x}{\sin\beta x}=dy$$

$$\ln|\sin\beta x|=\beta y+c\Rightarrow e^{-\beta y}|\sin\beta x|=\text{ثابت}$$

۲۷ـ گزینه «۴» با استفاده از مختصات استوانه‌ای، به دلیل بزرگی صفحات، پتانسیل فقط وابسته به φ است و مستقل از ρ و z می‌باشد. از این‌رو معادلهٔ لاپلاس عبارت است از:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}=0\rightarrow\phi(\varphi)=a\varphi+b$$

با اعمال شرایط مرزی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\phi(\varphi=0)=0\rightarrow b=0\\ \phi(\varphi=\beta)=V_0\rightarrow a=\dfrac{V_0}{\beta}\end{cases}\Rightarrow\phi(\varphi)=\frac{V_0}{\beta}\varphi$$

بنابراین برای میدان خواهیم داشت:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}=-\frac{V_0}{\beta\rho}\hat{\varphi}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

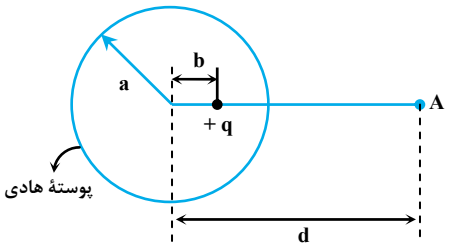
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل هفتم

«روش تصاویر»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم

۱ـ بار q در داخل پوسته‌ای هادی به شعاع a و در فاصله b از مرکز آن قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در فاصلهٔ $d\ (d > a)$ از مرکز کره و در همان جهت بار q (نقطه A) چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ a}$

۲) $V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ d}$

۳) $V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ (d-a)}$

۴) $V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ (d-b)}$

۲ـ نیم فضای $z \le \circ$ رسانای کامل است. یک بار رشته‌ای با چگالی خطی یکنواخت $\lambda(\frac{c}{m})$ موازی با صفحهٔ xoy و به فاصلهٔ یک متری از آن در صفحهٔ xoz واقع است. مقدار بار القاء شده روی صفحه در فاصلهٔ نواری شکل $|y| \le 1$ و بر واحد طول آن چند کولن است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

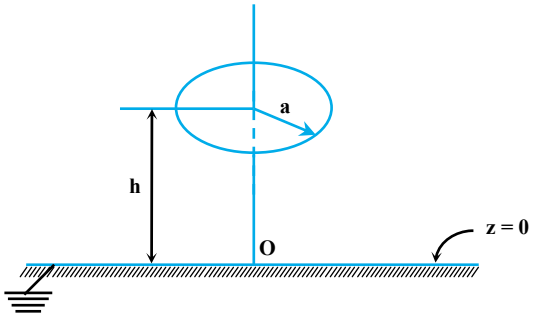
۱) $-\frac{\lambda}{4}$

۲) $-\frac{\lambda}{\pi}$

۳) $-\frac{\lambda}{2}$

۴) $-\frac{2\lambda}{\pi}$

۳ـ حلقه‌ای به شعاع a با چگالی بار خطی ρ_ℓ به موازات صفحه هادی زمین شده $z = \circ$ و با فاصله h از آن قرار گرفته است. چگالی بار الکتریکی سطحی در نقطه O درست در زیر مرکز دایره، با کدام گزینه برابر است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)



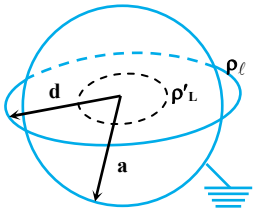
۱) $\frac{h^2\rho_\ell}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$

۲) $-\frac{-a^2\rho_\ell}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$

۳) $\frac{a^2h\rho_\ell}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$

۴) $-\frac{ah\rho_\ell}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$

۴ـ یک حلقه با چگالی بار خطی یکنواخت ρ_L به شعاع d هم مرکز با کره هادی به شعاع a، $(d > a)$ می‌باشد و کره در پتانسیل صفر قرار دارد، چگالی بار خطی حلقه تصویر ρ'_L چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)



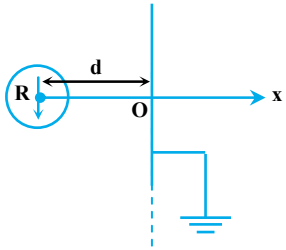
۱) $-\frac{d}{a}\rho_L$

۲) $-\rho_L$

۳) $-\frac{a}{d}\rho_L$

۴) $-\frac{a^2}{d^2}\rho_L$

۵ـ استوانه رسانای طویلی که دارای بار الکتریکی با چگالی λ کولن در واحد طول خود است موازی صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. فاصله محور استوانه از صفحه رسانا d و شعاع استوانه R است. صفحه رسانا منطبق بر صفحه $x = \circ$ است. چگالی بار الکتریکی سطحی در روی صفحه رسانا در نقطه‌ای به مختصات $(\circ, y, z)$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



۱) صفر

۲) $-\frac{\lambda R}{\varepsilon_\circ}$

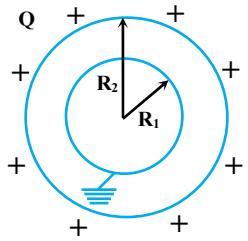
۳) $\frac{-\lambda d}{\pi(d^2+y^2+z^2)}$

۴) $\frac{-\lambda d}{\pi(R^2+y^2+z^2)}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ در فضای خالی بار Q به طور یکنواخت بر روی کره‌ای به شعاع R_2 پخش شده است. این کره، کرهٔ رسانائی به شعاع R_1 که زمین شده است را احاطه می‌کند میدان الکتریکی در فضای بین دو کره برابرا ست با: (برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $E_r = -\frac{Q\frac{R_2}{R_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

۲) $E_r = -\frac{(1-\frac{R_1}{R_2})Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

۳) $E_r = -\frac{R_1}{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

۴) $E_r = \frac{(1-\frac{R_1}{R_2})Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

۷ـ بار نقطه‌ای q به فاصله $2a$ از مرکز یک کره رسانای زمین شده به شعاع a قرار گرفته است. نیروی وارد بر کره از طرف بار q برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۳)

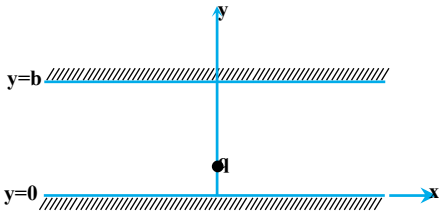
۱) $\frac{-q^2}{9\pi\varepsilon_0 a^2}$

۲) $\frac{-q^2}{36\pi\varepsilon_0 a^2}$

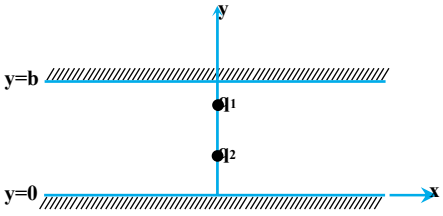
۳) $\frac{-2q^2}{9\pi\varepsilon_0 a^2}$

۴) $\frac{-q^2}{18\pi\varepsilon_0 a^2}$

۸ـ دو صفحهٔ رسانای موازی و نامتناهی که به پتانسیل صفر ولت متصل شده‌اند، همانند شکل مفروض‌اند. در شکل (الف) بار $q = 2C$ در نقطهٔ $(x,y,z) = (0,a,0)$ قرار گرفته است و کل بار القاء شده روی صفحهٔ $y = 0$ برابر $-\frac{3}{2}C$ می‌باشد. اگر نظیر شکل (ب) بار نقطه‌ای $q_1 = -3C, q_2 = 5C$ به ترتیب درنقاط $(0,b-a,0)$ و $(0,\frac{b}{2},0)$ قرار گیرند، کل بار القایی روی صفحهٔ $y = 0$ چند کولن است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)



(الف)



(ب)

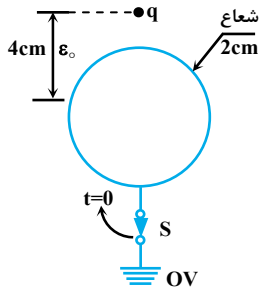
۱) -1

۲) -2

۳) $-\frac{7}{4}$

۴) $-\frac{13}{4}$

۹ـ کرهٔ رسانایی از طریق کلید S به زمین ایده‌آل با پتانسیل صفر ولت متصل شده است. بار نقطه‌ای $q = 2nC$ در مجاورت این کره در محل نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. کلید S در زمان $t = 0$ باز می‌شود و سپس بار نقطه‌ای q به آرامی به نقطه‌ای در بی‌نهایت منتقل می‌گردد. پتانسیل کره پس از این فرآیند چند ولت خواهد بود؟ $(\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ \frac{F}{m})$ (برق ـ سراسری ۸۴)



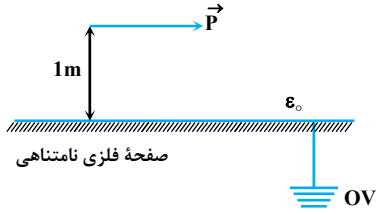
۱) -225

۲) -450

۳) -900

۴) $-2/25\times 10^4$

۱۰ـ یک دو قطبی الکتریکی دیفرانسیلی با گشتاور $|\vec{p}| = 2$ کولن متر از نقطه‌ای در بی‌نهایت به فاصلهٔ یک متری از یک صفحهٔ فلزی نامتناهی منتقل می‌شود. فرض کنید همانند شکل، صفحهٔ فلزی زمین شده، و دو قطبی به موازات آن استقرار یافته است. کار انجام شده توسط عامل خارجی چند ژول بوده است؟ $(\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ \frac{F}{m})$ (برق ـ سراسری ۸۴)



۱) $4/5\times 10^{+9}$

۲) $-4/5\times 10^{+9}$

۳) $1/125\times 10^{+9}$

۴) $-1/125\times 10^{+9}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ یک بار q در فاصلهٔ r از مرکز کره‌ای رسانا که به زمین متصل است قرار دارد. مقدار کار لازم برای بردن این بار به بی‌نهایت چقدر است؟ ($r > a$ و شعاع کره a است) (فیزیک ـ سراسری ۸۴)

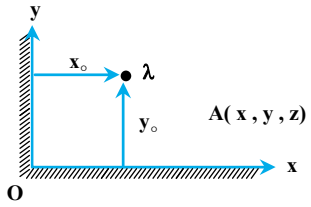
۱) $\frac{q^۲a}{۴\pi\varepsilon_۰(r^۲-a^۲)}$

۲) $\frac{q^۲a}{۸\pi\varepsilon_۰(a^۲-r^۲)}$

۳) $\frac{q^۲a}{۴\pi\varepsilon_۰(a^۲-r^۲)}$

۴) $\frac{q^۲a}{۸\pi\varepsilon_۰(r^۲-a^۲)}$

۱۲ـ در فضای میان دو صفحهٔ رسانای عمود بر هم میلهٔ باردار نازک بسیار طویلی با چگالی یکنواخت λ موازی فصل مشترک دو صفحه قرار دارد، فاصله میله از دو صفحه مطابق شکل است. پتانسیل الکتریکی دو صفحه صفر است. پتانسیل الکتریکی در نقطه A با مختصات (x,y,z) در بین دو صفحه کدام است؟ $r_۱^۲=(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲$ ، $r_۲^۲=(x+x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲$ و $r_۳^۲=(x-x_۰)^۲+(y+y_۰)^۲$ ، $r_۴^۲=(x+x_۰)^۲+(y+y_۰)^۲$ (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



۱) $\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln\frac{r_۲r_۳}{r_۱r_۴}$

۲) $\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln\frac{r_۱r_۲}{r_۳r_۴}$

۳) $\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln\frac{r_۱r_۳}{r_۲r_۴}$

۴) $\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln\frac{r_۴r_۳}{r_۱r_۲}$

۱۳ـ به یک کرهٔ رسانا به شعاع a ، بار Q را اعمال می‌کنیم. یک بار نقطه‌ای Q دیگر را به فاصله $۲a$ از مرکز کره رسانا در نظر می‌گیریم. اندازهٔ نیروی وارد بر این بار نقطه‌ای برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۵)

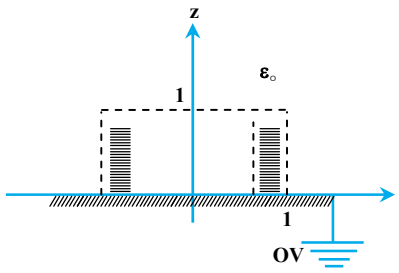
۱) $\frac{Q^۲}{۱۴۴\pi\varepsilon_۰a^۲}$

۲) $\frac{۱۷Q^۲}{۱۴۴\pi\varepsilon_۰a^۲}$

۳) $\frac{۱۱Q^۲}{۲۸۸\pi\varepsilon_۰a^۲}$

۴) $\frac{۴۳Q^۲}{۲۸۸\pi\varepsilon_۰a^۲}$

۱۴ـ فضای درون یک استوانه به شعاع واحد و ارتفاع واحد توسط دو قطبی‌های میکروسکوپی اشغال شده است. بردار پلاریزاسیون برای این توزیع $\vec{P}=P_۰\hat{z}$ که در آن $P_۰=\frac{۱۰^{-۹}}{۳۶\pi}\frac{C}{m^۲}$ است. این استوانه نظیر شکل، در بالای یک صفحهٔ نامحدود رسانا با پتانسیل صفر ولت قرار دارد، و فضای اطراف آن خلأ است. کدام گزینه برابر میدان الکتریکی در مرکز قاعدهٔ پایینی استوانه بر حسب $\frac{V}{m}$ است؟ $(\varepsilon_۰=\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹}\frac{F}{m})$ (برق ـ سراسری ۸۵)



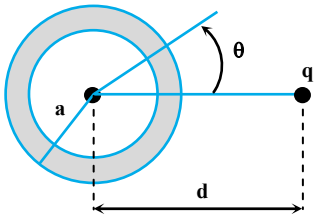
۱) $(\sqrt{۲}-۱)\hat{a}_z$

۲) $(\sqrt{۲}-۲)\hat{a}_z$

۳) $(\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۱)\hat{a}_z$

۴) $(\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}-\frac{۱}{۲})\hat{a}_z$

۱۵ـ اگر بار q در فاصله d از مرکز یک پوسته کروی رسانا با شعاع خارجی a قرار گیرد $(d > a)$، چگالی بارهای سطحی روی جدار خارجی و داخلی پوسته به ترتیب: (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



۱) ثابت است، متناسب است با θ.

۲) متناسب است با θ ، ثابت است.

۳) متناسب است با θ ، صفر است.

۴) صفر است، متناسب است با θ.

۱۶ـ کره‌ای به شعاع a از جنس رسانا با پتانسیل $V_۰$ در فضا وجود دارد. این کره ایزوله است. حال بار مثبت $q_۱+$ را در فاصله $R_۱ (R_۱ > a)$ از مرکز کره قرار می‌دهیم. پتانسیل کره چقدر خواهد شد؟ (برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $V_۰+\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰a}$

۲) $V_۰+\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰R_۱}$

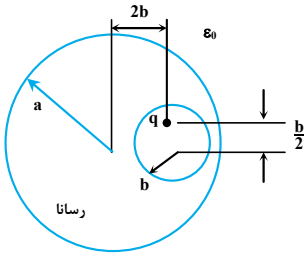
۳) $\frac{q_۱-\frac{a}{R_۱}q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰a}$

۴) $\frac{q_۱+\frac{a}{R_۱}q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰a}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ کره‌ای ایزوله به شعاع a از جنس رسانا با حفره‌ای کروی به شعاع b مطابق شکل مفروض است. بار نقطه‌ای q را در فاصله $\frac{b}{2}$ از مرکز حفره قرار داده‌ایم. پتانسیل در مرکز حفره چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۶)



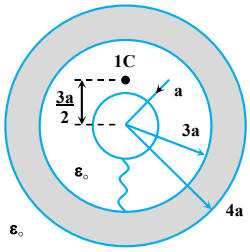
۱) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2b)}$

۲) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}$

۳) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\frac{b}{2}}$

۴) $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{b}+\frac{1}{a})$

۱۸ـ در مجموعهٔ شکل زیر، کرهٔ رسانای مرکزی توسط یک سیم بسیار نازک به پوستهٔ رسانای کروی متصل شده است. بار نقطه‌ای $1C$ در فاصلهٔ $\frac{3}{2}a$ از کرهٔ مرکزی قرار دارد. در عین حال $1C$ بار دیگر به پوستهٔ کروی اعمال می‌شود، پتانسیل کرهٔ مرکزی کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۶)



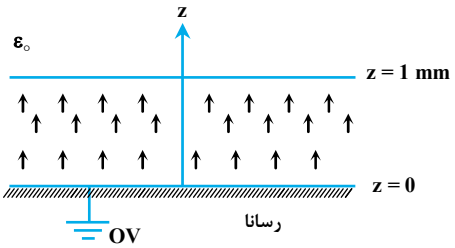
۱) $\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 a}$

۲) $\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a}$

۳) $\frac{1}{16\pi\varepsilon_0 a}$

۴) $\frac{11}{48\pi\varepsilon_0 a}$

۱۹ـ در شکل زیر، صفحه‌ی $z=0$ یک صفحهٔ رسانای نامتناهی با پتانسیل الکتریکی صفر ولت است. ناحیهٔ $z>0$ فضای خالی است و بخش $0\le z\le 1mm$ این ناحیه توسط دو قطبی‌های الکتریکی میکروسکوپی اشغال شده است. گشتاور هر یک از دو قطبی‌های میکروسکوپی $\vec{P}=\hat{a}_z 2\times10^{-18}$ [Cm] است و تعداد آنها در واحد حجم 10^{11} است. پتانسیل الکتریکی ناشی از این دوقطبی‌ها در نقطهٔ $(x,y,z)=(0,0,0/5mm)$ چند ولت است؟ $(\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\ \frac{F}{m})$ (برق ـ سراسری ۸۶)



۱) $18\pi\times10^{-12}$

۲) $18\pi\times10^{-1}$

۳) $36\pi\times10^{-12}$

۴) $36\pi\times10^{-1}$

۲۰ـ بار نقطه‌ای q به فاصله d از مرکز کره رسانای بدون باری به شعاع R قرار دارد $(d>R)$. اندازه نیرویی که به کره رسانا وارد می‌شود کدام است؟ $(k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0})$ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر

۲) $kq^2(\frac{d}{R^3}-\frac{R}{d^3})$

۳) $\frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}$

۴) $kq^2\frac{R^3(2d^2-R^2)}{d^3(d^2-R^2)^2}$

۲۱ـ بار نقطه‌ای q به فاصله a از یک صفحه هادی نامتناهی قرار دارد. انرژی الکتروستاتیکی این دستگاه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$

۲) $-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$

۳) $\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$

۴) $\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۲ـ کره‌ای به شعاع a از جنس رسانا با پتانسیل V_0 در فضای آزاد مفروض است. این کره ایزوله است. حال بار مثبت $+q_1$ را به فاصله $3a$ از مرکز این کره قرار می‌دهیم به طوری که کل نیروی اعمالی بر آن صفر شود. مقدار پتانسیل V_0 چقدر بوده است؟ $(\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ \frac{F}{m})$ (برق ـ سراسری ۸۷)

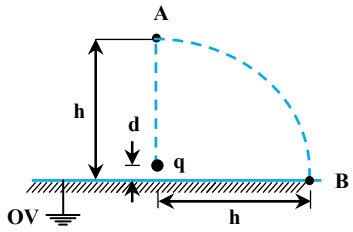
۱) $\frac{64\times 10^9}{51a}q_1$

۲) $\frac{51\times 10^9}{64a}q_1$

۳) $\frac{q_1+\frac{1}{3}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$

۴) $\frac{q_1-\frac{1}{3}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$

۲۳ـ بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ بسیار کوچک d از یک صفحه رسانای نامحدود با پتانسیل صفر قرار گرفته است. اندازه میدان الکتریکی در نقطهٔ A بالای صفحه در مقایسه با میدان نقطهٔ B در فاصلهٔ h از پای عمود در صفحهٔ افقی برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۷)



۱) $E_B = E_A$

۲) $E_A = \sqrt{2}E_B$

۳) $E_A = 2E_B$

۴) $E_B = 2E_A$

۲۴ـ بار نقطه‌ای Q به فاصله‌ی نزدیک x از یک صفحه‌ی رسانای نامتناهی قرار دارد. انرژی الکترواستاتیکی این سیستم (با صرف‌نظر از خود انرژی) کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x}$

۲) $-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 x}$

۳) $\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 x}$

۴) $-\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x}$

۲۵ـ بار الکتریکی Q در بالای صفحه‌ی هادی بی‌نهایت به فاصله d از آن قرار گرفته است. فرض کنید نقطه O در صفحه‌ی هادی در محل کوتاه‌ترین فاصله نسبت به بار باشد. به مرکز O دایره‌ای در صفحه‌ی هادی ترسیم می‌کنیم. اگر شعاع دایره a باشد، مطلوب است محاسبه a به قسمی که داخل این دایره یک چهارم کل بار القایی صفحه‌ی هادی بی‌نهایت وجود داشته باشد. (برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}d$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}d$

۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}d$

۴) $\frac{\sqrt{7}}{3}d$

۲۶ـ پوسته کروی توخالی از ماده‌ای رسانا بدون بار اولیه به شعاع a هم مرکز با مبدأ مختصات که زمین نشده است، مفروض است. بار مثبت q_1 خارج کره در فاصله‌ی R_1 از مرکز کره روی محور xها قرار دارد. بار منفی q_2 داخل کره با قدرمطلق $q_1\frac{a}{R_1}$ در فاصله $R_2 = \frac{a^2}{R_1}$ از مرکز روی محور xهای مثبت قرار دارد. پتانسیل خارج پوسته‌ی کروی در نقطه‌ای به فاصله x از مرکز پوسته چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{q_1}{|x-R_1|}\}$

۲) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{q_1}{|x-R_1|}-\frac{q_2}{|x-R_2|}\}$

۳) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{q_1}{|x-R_1|}+\frac{q_2}{|x-R_2|}\}$

۴) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{q_1}{|x-R_1|}-\frac{q_2}{|x-R_2|}+\frac{q_2}{|x|}\}$

۲۷ـ بار الکتریکی $+Q$ در بالای صفحه‌ای هادی بی‌نهایت بزرگ به فاصله d از آن قرار گرفته است. فرض کنید نقطه p در صفحه هادی در کوتاه‌ترین طول به بار الکتریکی باشد. به مرکز p و شعاع a دایره‌ای در صفحه هادی ترسیم می‌کنیم. شعاع a را طوری تعیین نمائید که داخل این دایره، یک چهارم کل بار القائی صفحه هادی، وجود داشته باشد. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $a = \frac{\sqrt{7}}{5}d$

۲) $a = \frac{\sqrt{5}}{3}d$

۳) $a = \frac{\sqrt{7}}{3}d$

۴) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$

۲۸ـ بار نقطه‌ای مثبت Q در میدان الکتریکی یکنواخت $E_0\bar{a}_x$ به فاصله x از صفحه هادی متصل به زمین قرار گرفته است. صفحه هادی در صفحه $x = 0$ می‌باشد. به ازای چه میزانی از x، نیروی وارده بر بار صفر می‌شود؟ (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $x = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E_0}}$

۲) $x = \sqrt{\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 E_0}}$

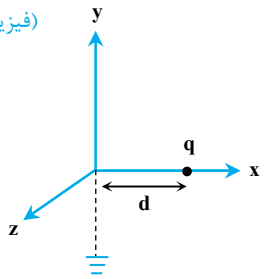
۳) $x = \sqrt{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 E_0}}$

۴) $x = \sqrt{\frac{Q}{32\pi\varepsilon_0 E_0}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۹ـ بار نقطه‌ای q را در فاصلهٔ d از یک صفحهٔ رسانای نامتناهی متصل به زمین در نظر بگیرید. اگر مختصات این بار نقطه‌ای (d , ۰ , ۰) باشد، R شعاع دایرهٔ فرضی به مرکز مبدأ مختصات برروی صفحهٔ رسانا چقدر باشد به‌طوری که $\frac{۱}{۵}$ کل بار صفحهٔ رسانا در داخل این دایرهٔ فرضی باشد؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۰)



۱) $\frac{۱}{۵}d$
۲) $\frac{\sqrt{۳۹}}{۸}d$
۳) $\frac{۳}{۴}d$
۴) $\frac{\sqrt{۱۹}}{۹}d$

۳۰ـ یک بار نقطه‌ای (−q) در فاصله d از یک صفحه تخت رسانا متصل به زمین قرار گرفته است. چگالی بار سطحی روی صفحه در فاصله D از بار نقطه‌ای چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{q}{۴\pi D}$
۲) $\frac{qD^۲}{۲\pi}$
۳) $\frac{qd}{۲\pi D^۲}$
۴) $\frac{qd}{۲\pi D^۲}$

۳۱ـ بار نقطه‌ای +q در فاصله مساوی از دو صفحه فلزی بی‌نهایت وسیع زمین شده با فاصله x از هم قرار دارد. اندازه نیروی الکتریکی وارد بر این بار چقدر است؟ (برق ـ آزاد ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۸\pi\varepsilon_۰}\frac{q^۲}{x^۲}$
۲) $\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q^۲}{x^۲}$
۳) $\frac{۱}{۲\pi\varepsilon_۰}\frac{q^۲}{x^۲}$
۴) صفر

۳۲ـ کره‌ای فلزی به شعاع a مفروض است. بار سطحی یکنواخت ρ_{sl} روی سطح کره‌ای به شعاع b(b > a) و هم مرکز با کره فلزی در فضای آزاد وجود دارد اگر کره فلزی بدون بار باشد چه پتانسیلی روی آن القاء می‌شود؟ (برق ـ آزاد ۹۲)

۱) صفر
۲) $\frac{b\rho_{sl}}{\varepsilon_۰}$
۳) $\frac{b^۲\rho_{sl}}{\varepsilon_۰}$
۴) $\frac{ab\rho_{sl}}{۴\varepsilon_۰}$

۳۳ـ حلقه باری با چگالی یکنواخت خطی ρ_ℓ و به شعاع a به موازات صفحه هادی زمین شده‌ای و به فاصله h از آن قرار دارد. چگالی بار در نقطه‌ای درست زیر مرکز و روی زمین چقدر است؟ (برق ـ آزاد ۹۲)

۱) $\frac{h^۲\rho_l}{[a^۲+h^۲]^{\frac{۳}{۲}}}$
۲) $\frac{-a^۲\rho_l}{[a^۲+h^۲]^{\frac{۳}{۲}}}$
۳) $\frac{a^۲\rho_l}{[a^۲+h^۲]^{\frac{۳}{۲}}}$
۴) $\frac{-ah\rho_l}{[a^۲+h^۲]^{\frac{۳}{۲}}}$

۳۴ـ بار نقطه‌ای q در فاصله ۲a از مرکز کره رسانای کامل بدون بار و به شعاع a قرار دارد. انرژی کل سیستم چقدر است؟ (برق ـ آزاد ۹۲)

۱) $\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰a}$
۲) $\frac{-q^۲}{۹۶\pi\varepsilon_۰a}$
۳) $\frac{۱۶q^۲}{\pi\varepsilon_۰a}$
۴) $\frac{q^۲}{۱۶\pi\varepsilon_۰a}$

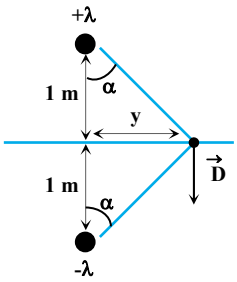
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم

۱ـ گزینه «۲» با توجه به اثر القائی بار $+q$ روی پوسته هادی، باری به اندازه $+q$ روی سطح خارجی پوسته القاء می‌گردد و چون کل پوسته هم پتانسیل است بنابراین پتانسیل آن برابر $\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a}$ می‌باشد. در نتیجه فیزیک مسأله همانند آن است که بار q در مرکز پوسته متمرکز شده است و در نتیجه پتانسیل در نقطه A برابر $\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}d}$ می‌باشد.

۲ـ گزینه «۳»



$$\vec{D}=\frac{\rho_{\ell}}{۲\pi\sqrt{y^{۲}+۱}}\cos\alpha(-\hat{a}_z)+\frac{\rho_{\ell}}{۲\pi\sqrt{y^{۲}+۱}}\cos\alpha(-\hat{a}_z)=-\frac{\lambda}{\pi(y^{۲}+۱)}=\rho_s$$

$$q=\int_{\circ}^{۱}\int_{-۱}^{۱}\rho_s dydx=\frac{-\lambda}{۲}$$

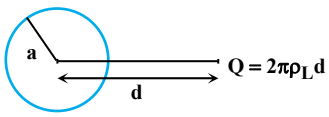
۳ـ گزینه «۴» هرگاه شعاع حلقه بسیار کوچک باشد، چون بار روی حلقه ناچیز می‌شود، لذا انتظار می‌رود که چگالی بار الکتریکی سطحی در نقطه O صفر باشد (گزینه ۱ نادرست است). همچنین هرگاه h بسیار کوچک باشد، نقطه O تقریباً در مرکز حلقه باردار و تصویر آن واقع می‌شود که به علت تقارن و اثر مخالف حلقه و تصویر آن، چگالی بار الکتریکی صفر می‌گردد. فقط گزینه ۴ این ویژگی را دارد. اگر $D_{n۱}$ و $D_{n۲}$ چگالی شار الکتریکی حلقه و تصویر آن باشد خواهیم داشت: $\rho_s=\varepsilon_{\circ}E_n=D_n$

$$D_n=D_{n۱}+D_{n۲}=-۲\frac{a\rho_{\ell}h}{۲(a^{۲}+h^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{-a\rho_{\ell}h}{(a^{۲}+h^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

۴ـ گزینه «۱» همان طور که می‌بینید بار خطی به طور یکنواخت و متقارن حول کره قرار دارد، پس می‌توانیم از شبیه‌سازی یا همان مدل‌سازی خودمان استفاده کنیم. برای این کار ابتدا بار Q را به دست می‌آوریم.

$$Q=\int\rho_L\,dl=\int_{\phi=\circ}^{۲\pi}\rho_L.R\,d\phi=\rho_L\,d[\Phi]_{\phi=\circ}^{۲\pi}=۲\pi\rho_L\,d$$

پس در واقع شکل مسأله را به صورت زیر تبدیل کردیم.



حال بار تصویر Q' را به دست می‌آوریم.

$$Q'=\frac{-a}{d}Q=-\frac{a}{d}.۲\pi\rho_L d=-۲\pi\rho_L a$$

ولی مسأله از ما چگالی بار خطی ρ'_L را می‌خواهد. پس می‌توان نوشت:

$$Q'=\int\rho'_L\,dl'\Rightarrow\rho'_L=\frac{Q'}{\int dl'}=\frac{Q'}{\int_{\phi'=\circ}^{۲\pi}R'd\phi'}$$

(ρ'_L ثابت)

$$\rho'_L=\frac{-۲\pi\,\rho_L a}{\frac{a^{۲}}{d}.۲\pi}=-\frac{d}{a}\rho_L$$

شعاع R' نیز همان $d'=\frac{a^{۲}}{d}$ می‌باشد.

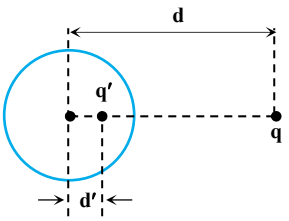
۵ـ گزینه «۳» واضح است که با افزایش فاصله استوانه باردار از صفحه زمین شده مقدار بار القائی کاهش می‌یابد که فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد. همچنین بیشترین تراکم بار القائی در مرکز صفحه زمین شده (که دارای کمترین فاصله نسبت به استوانه باردار می‌باشد) می‌باشد و با افزایش y و z از میزان آن کاسته می‌شود.

۶ـ گزینه «۳» هرگاه شعاع کره بیرونی بسیار بزرگ باشد $(R_۲\to\infty)$ در این صورت اثر القائی کره بیرونی بر کره داخلی ناچیز می‌گردد و لذا شدت میدان الکتریکی در فضای بین دو کره صفر خواهد شد که فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ گزینه «۴» نیروی وارد بر کره برابر با نیرویی می‌باشد که به تصویر بار q وارد می‌شود. بنابراین ابتدا تصویر بار را پیدا می‌کنیم:



$$q' = -\frac{a}{d}q = -\frac{q}{۲}$$

$$d' = \frac{a^۲}{d} = \frac{a}{۲}$$

$$F = \frac{qq'}{۴\pi\varepsilon_۰(d-d')^۲} = \frac{-q^۲}{۱۸\pi\varepsilon_۰a^۲}$$

۸ـ گزینه «۴» با توجه به شکل (الف)، کل بار القاء شده روی دو صفحه رسانا باید برابر ۲- کولن باشد لذا سهم بار القائی صفحه نزدیکتر $(y=۰)$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ و سهم صفحه دورتر $(y=b)$ $\frac{-۱}{۲}$ خواهد بود.

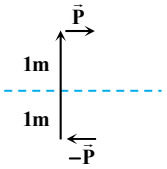
در شکل (ب) بار $q_۲ = ۵C$ به نسبت برابر روی هر دو صفحه بار منفی القاء می‌کند اما بار $q_۱ = -۳C$ به نسبت ۳ به ۱ (۳ سهم صفحه نزدیکتر و ۱ سهم صفحه دورتر) بار مثبت القا می‌کند. لذا داریم:

$$y=۰ \text{ کل بار القائی روی صفحه} = \frac{-۱}{۲}(۵) + \frac{۱}{۴}(-۳) = \frac{-۱۳}{۴}C$$

۹ـ گزینه «۲» در اثر القاء الکتریکی باری به اندازه $q' = \frac{-a}{d}q = \frac{-۲}{۴}q = -۱^{nc}$ روی کره رسانا القاء می‌گردد. به علت اینکه ابتدا کلید S را باز می‌کنیم و سپس بار q را دور می‌کنیم، بار القاء شده روی کره تغییری نمی‌کند (سیستم از مولد جدا است). بار q به بی‌نهایت منتقل شده لذا پتانسیل کره رسانا فقط ناشی از بار القائی روی خود آن می‌باشد.

$$V = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰a} = \frac{-۱\times۱۰^{-۹}}{۴\pi(\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹})(۲\times۲۰^{-۲})} = -۴۵۰\,v$$

۱۰ـ گزینه «۲» توجه کنید که یک دو قطبی از دو بار نقطه‌ای مساوی ولی ناعلامت که به فاصله معینی از یکدیگر قرار دارند تشکیل شده است. پس:



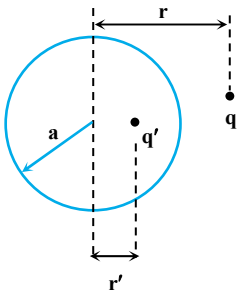
حال تصویر دو بار نقطه‌ای را رسم و صفحه را حذف می‌کنیم.

طبق نکته گفته شده در بخش کار الکتریکی، کار لازم برای انتقال یک دو قطبی به صورت مقابل است: $W = -|\vec{P}||\vec{E}|$

پس فقط کافی است که میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از یک دو قطبی محاسبه شود (جهت یادآوری قسمت دو قطبی‌ها را مجدداً مرور کنید).

$$W = -|\vec{P}|\frac{|\vec{P}|}{۴\pi\varepsilon_۰r^۳} \Rightarrow W = -۲\times\frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰(۲)^۳} = \frac{-۱}{۸\pi\varepsilon_۰} = -\frac{۱}{۲}k = -\frac{۱}{۲}\times۹\times۱۰^۹ = -۴/۵\times۱۰^۹$$

۱۱ـ گزینه «۴» مقدار بار تصویر و محل آن برابر است با:



$$r' = \frac{a^۲}{r} \quad , \quad q' = -\frac{a}{r}q$$

بنابراین نیروی وارد بر بار از کره برابر با نیروی وارد از طرف بار تصویر است و برابر است با:

$$F_e = \frac{qq'}{۴\pi\varepsilon_۰(r-r')^۲} = \frac{-\frac{a}{r}q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰(r-\frac{a^۲}{r})^۲} \Rightarrow F_e = \frac{-arq^۲}{۴\pi\varepsilon_۰(r^۲-a^۲)^۲}$$

برای انتقال بار فوق باید نیرویی برابر $F_m = -F_e$ به بار q وارد نماییم و لذا خواهیم داشت:

$$W = \int_r^\infty F_m.dr = \frac{q^۲a}{۸\pi\varepsilon_۰(r^۲-a^۲)}$$

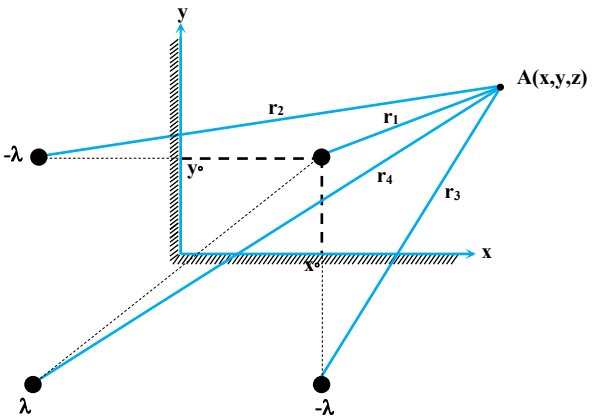
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ گزینه «۱» پتانسیل در فاصله r از یک بار خطی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{r_\circ}{r}$$

($r_\circ$: فاصله نقطه مرجع تا بار خطی)



با توجه به روش تصاویر علاوه بر بار خطی λ ، ۳ بار خطی تصویری نیز به وجود می‌آید،

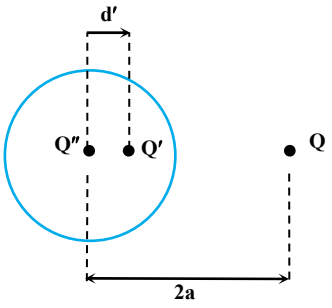
پس می‌توان نوشت:

$$V_T=\frac{\lambda}{2\lambda\varepsilon_\circ}\ln\frac{r_\circ}{r_1}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{r_\circ}{r_4}-\frac{\lambda}{2\lambda\varepsilon_\circ}\ln\frac{r_\circ}{r_2}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{r_\circ}{r_3}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{r_2r_3}{r_1r_4}$$

۱۳ـ گزینه «۳» مطابق روش تصاویر مقدار بار القاء شده توسط بار نقطه‌ای Q روی کره هادی Q' می‌باشد:

$$Q'=-\frac{a}{d}Q=-\frac{Q}{2}$$

اما از آنجا که کره رسانا از ابتدا دارای بار Q کلی است، لذا ناچاریم یک بار نقطه‌ای به اندازه Q'' در مرکز کره در نظر بگیریم به طوری که $Q''+Q'=Q$.



$$\begin{cases}d'=\dfrac{a^2}{d}=\dfrac{a^2}{2a}=\dfrac{a}{2}\\ Q''=\dfrac{3Q}{2}\end{cases}$$

$$\vec{F}=[\frac{QQ''}{4\pi\varepsilon_\circ(2a)^2}+\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_\circ(2a-\frac{a}{2})^2}]\hat{a}_y=\frac{11Q^2}{288\pi\varepsilon_\circ a^2}\hat{a}_y$$

۱۴ـ گزینه «۳»

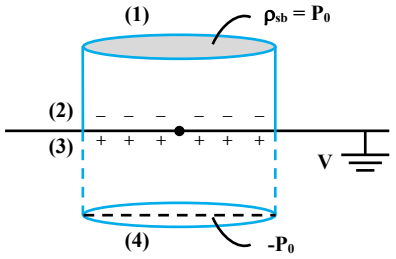
چگالی بار حجمی مقید $=-\vec{\nabla}.\vec{P}=0$

چگالی بار سطحی مقید $=\rho_{sb}=\vec{P}.\hat{n}=\begin{cases}P_\circ\hat{a}_z.\hat{a}_z=P_\circ & \text{(روی سطح بالائی استوانه)}\\ P_\circ\hat{a}_z.(-\hat{a}_z)=-P_\circ & \text{(روی سطح پائینی استوانه)}\end{cases}$

از طرفی میدان الکتریکی ناشی از یک قرص دایره‌ای باردار با چگالی یکنواخت ρ_s روی محور آن در فاصله z از مرکز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ}[1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}]\hat{a}_z$$

با در نظر گرفتن استوانه تصویری معادل در طرف دیگر صفحه رسانای زمین شده خواهیم داشت:

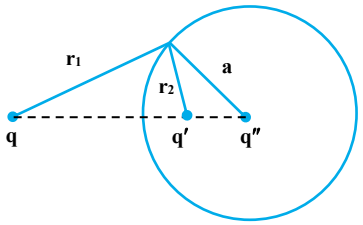


$$\begin{cases}\vec{E}_1=\dfrac{P_\circ}{2\varepsilon_\circ}(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}})(-\hat{a}_z)\\ |\vec{E}_2|=|\vec{E}_3|=0\\ \vec{E}_4=\dfrac{-P_\circ}{2\varepsilon_\circ}(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}})(\hat{a}_z)\end{cases}\Rightarrow\vec{E}=\sum\vec{E}_i=(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)\hat{a}_z$$

۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه شدت میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است، لذا طبق قانون گاوس لازم است که چگالی بارهای سطحی روی جدار داخلی پوسته صفر باشد. بنابراین بارهای روی پوسته خارجی طوری خود را بازآرایی خواهند کرد که این اتفاق بیفتد و لذا بار سطحی روی جدار خارجی θ وابسته است و روی جدار داخلی صفر است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir



۱۶ـ گزینه «۲» بر طبق روش تصاویر، تصویر بار q_1 عبارت است از بار $q' = -\frac{a}{R_1}q_1$. همچنین بـدلیل اینکه کره هادی ایزوله است ناچاریم بار q'' را در مرکز کره به گونه‌ای در نظر بگیریم که رابطـه مقابـل برقرار باشد:

$$q' + q'' = 4\pi\varepsilon_0 a V_0$$

بنابراین:

$$q'' = 4\pi\varepsilon_0 a V_0 - q' = 4\pi\varepsilon_0 a V_0 + \frac{a}{R_1}q_1$$

پتانسیل کره هادی عبارت است از پتانسیل ناشی از بارهای q و q' و q'' و لذا:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0 + \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 a} = V_0 + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

روش تستی: هرگاه $R_1 \to \infty$ انتظار داریم که پتانسیل کره همان مقدار V_0 باقی بماند که فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

۱۷ـ گزینه «۴» بدیهی است که افزایش یا کاهش شعاع رسانا موجب تغییر پتانسیل الکتریکی در مرکز حفره می‌گردد که فقط گزینه ۴ این ویژگی را دارد.

۱۸ـ گزینه «۲» بار کل درون سطح بسته کروی به شعاع $r > 4a$ برابر ۲ کولن است. با در نظر گرفتن سطح گاوسی کروی به شعاع $r > 4a$ خواهیم داشت:

$$\oiint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$V|_{r=4a} - V|_{r=\infty} = -\int_{\infty}^{4a} \vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow V|_{r=4a} - 0 = -\int_{\infty}^{4a} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr \Rightarrow V|_{r=4a} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

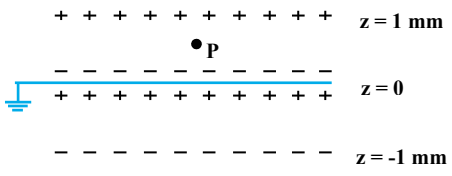
پتانسیل کره مرکزی با پتانسیل پوسته رسانای کروی یکسان است.

۱۹ـ گزینه «۴» بردار قطبی شدگی ناحیه $0 \le z \le 1\text{mm}$ عبارت است از:

$$\vec{P} = \lim \frac{\sum_{i}^{n\Delta V} \vec{P}_i}{\Delta V} = n\vec{P}_i = 2\times10^{-18}\times10^{11}\,\hat{a}_z = 2\times10^{-7}\,\hat{a}_z$$

چگالی بارهای حجمی و سطح مقید عبارتند از:

$$\begin{cases} \rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P} = 0 \\ \rho_{sb} = \vec{P}.\hat{n} = \begin{cases} 2\times10^{-7}\,\hat{a}_z.\hat{a}_z & z = 1\text{mm} \\ 2\times10^{-7}\,\hat{a}_z.(-\hat{a}_z) & z = 0 \end{cases} \end{cases}$$



طبق روش تصاویر، اثر القائی بارهای سطحی مقید واقع در $z = 1\text{mm}$ و $z = 0$ را می‌توان با بارهای سطحی هم‌اندازه و از نوع مخالف به ترتیب در $z = -1\text{mm}$ و $z = 0$ مدل‌سازی کرد.

پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای سطحی واقع در $z = 0$ اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

پتانسیل الکتریکی ناشی از بار سطحی واقع در $z = 1\text{mm}$ در نقطه $z = 0/5\text{mm}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_{P1} = -\int_{1\times10^{-3}}^{0/5\times10^{-3}} \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0}\,dz = \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0}(10^{-3} - 0/5\times10^{-3}) = \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0}\times0/5\times10^{-3}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از بار سطحی واقع در $z = -1\text{mm}$ در نقطه $z = 0/5\text{mm}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_{P2} = -\int_{1\times10^{-3}}^{1/5\times10^{-3}} \left(\frac{-\rho_{sb}}{2\varepsilon_0}\right)dz = \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0}(1/5\times10^{-3} - 10^{-3}) = \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0}\times0/5\times10^{-3}$$

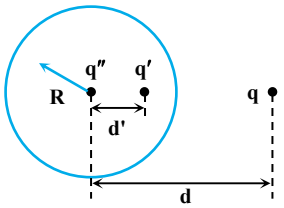
بنابراین پتانسیل الکتریکی کل در نقطه $z = 0/5\text{mm}$ برابر است با:

$$V_P = V_{P1} + V_{P2} = \frac{\rho_{sb}}{2\varepsilon_0}\times10^{-3} = 36\pi\times10^{-1}\ \text{(ولت)}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به روش تصاویر خواهیم داشت:



$$q' = -\frac{R}{d}q$$

$$d' = \frac{R^2}{d}$$

از آنجا که کره رسانا بدون بار است و لازم است یک بار q'' را در مرکز کره قرار دهیم به طوری که $q'' = -q'$ باشد. بنابراین می‌توانیم نیروی وارد بر بار q را حاصل از دو بار q' و q'' بدانیم. پس می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{q'} = \frac{kqq'\hat{a}_x}{(d-d')^2} = \frac{-k\frac{R}{d}q^2\hat{a}_x}{(d-\frac{R^2}{d})^2} = \frac{-kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}\hat{a}_x \quad ; \quad \vec{F}_{q''} = \frac{kqq''}{d^2}\hat{a}_x = \frac{k\frac{R}{d}q^2}{d^2}\hat{a}_x = \frac{kRq^2}{d^3}\hat{a}_x$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{q'} + \vec{F}_{q''} = (\frac{kRq^2}{d^3} - \frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2})\hat{a}_x \quad ; \quad |\vec{F}| = kq^2\frac{R^3(2d^2-R^2)}{d^3(d^2-R^2)^2}$$

۲۱ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

با استفاده از روش حل تصویری بارها، می‌دانیم که باری مساوی و مختلف‌العلامت در صفحه رسانا القاء می‌شود، یعنی یک بار $-q$ به فاصله a از صفحه رسانای نامتناهی در پشت صفحه ایجاد می‌شود (تصویر می‌شود).

چون صفحه رسانا فضا را به دو قسمت یعنی دو نیم فضا تقسیم می‌کند، همچنین میدان الکتریکی فقط در طرفی وجود دارد که بار حقیقی q قرار دارد پس داریم:

$$U = \frac{1}{2}(q\varphi) \Rightarrow u = \frac{1}{2}(q.\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2a)}) \Rightarrow u = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

۲۲ـ گزینه «۲» طبق روش تصاویر، اثر القائی بار q_1 را می‌توان توسط بار $q' = \frac{-q_1}{3}$ که در فاصله $d' = \frac{a}{3}$ از مرکز کره قرار دارد، مدل‌سازی نمود. همچنین بدلیل اینکه کره ایزوله می‌باشد، لازم است که بار $Q = \frac{q_1}{3} + 4\pi\varepsilon_0 aV_0$ را در مرکز کره در نظر بگیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{F} = \frac{kq'_1q_1}{(\frac{8a}{3})^2}\hat{a}_x + \frac{kQq_1}{(3a)^2}\hat{a}_x = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{3(\frac{8a}{3})^2} = \frac{\frac{q_1}{3} + 4\pi\varepsilon_0 a\varepsilon V_0}{(3a)^2} \Rightarrow V_0 = \frac{51\times10^9}{64a}q_1$$

۲۳ـ گزینه «۳» طبق روش تصاویر، اثر القایی بار q بر روی رسانا را می‌توان با بار $-q$ در طرف دیگر صفحه و در فاصله d از آن مدل‌سازی نمود. بار q و تصویر آن تشکیل یک دوقطبی الکتریکی را می‌دهند که شدت میدان الکتریکی در اطراف آن به صورت زیر خواهد بود:

$$E = \frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta)$$

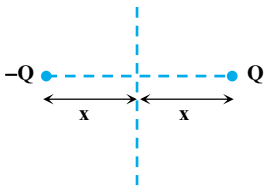
بنابراین خواهیم داشت:

$$E_A = \frac{4qd}{4\pi\varepsilon_0 h^3} \quad , \quad E_B = \frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 h^3} \Rightarrow E_A = 2E_B$$

۲۴ـ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از تئوری تصاویر به جای صفحه تصویر بار Q را قرار می‌دهیم که به اندازه $-Q$ می‌باشد.

حال ابتدا پتانسیل در نقطه Q را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از رابطه انرژی الکترواستاتیکی انرژی در کل محیط را محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 2x}$$



اما انرژی را می‌بایست در نیمی از فضا محاسبه کنیم، چون میدان به درون فضای رسانا نفوذ نمی‌کند بنابراین داریم:

$$W = \frac{1}{2}\times Q\times V \Rightarrow W_e = \frac{-Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x}$$

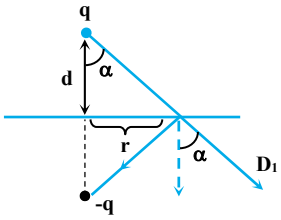
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۵ـ گزینه «۴»

$$|\vec{D}_n| = ۲|D_۱|\cos\alpha = \frac{۲q}{۴\pi(r^۲+d^۲)} \times \frac{d}{\sqrt{d^۲+r^۲}}$$

$$|\vec{D}_n| = \frac{qd}{۲\pi(r^۲+d^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$



چگالی بار القایی از رابطه روبرو به‌دست می‌آید:

$$\rho_S = |\vec{D}_n| = \frac{-qd}{۲\pi(r^۲+d^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

کل بار القاء شده روی سطح هادی نیز برابر $-q$ می‌باشد. بنابراین طبق فرض مسأله می‌توان چنین نوشت:

$$\iint \rho_S\, ds = \frac{-q}{۴} \Rightarrow \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{a} \frac{d}{۲\pi(r^۲+d^۲)^{\frac{۳}{۲}}} r\,dr\,d\varphi = \frac{۱}{۴}$$

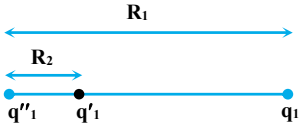
$$d\left[-\frac{۱}{\sqrt{r^۲+d۲}}\right]_{۰}^{a} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{d}{\sqrt{a^۲+d^۲}} = \frac{۳}{۴}$$

از حل معادله فوق داریم:

$$\frac{d^۲}{a^۲+d^۲} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow ۹a^۲ = ۷d^۲ \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۷}}{۳}d$$

۲۶ـ گزینه «۳» از خاصیت جمع آثار استفاده می‌کنیم.

در حالت اول، فقط بار $q_۱$ واقع در خارج کره را در نظر می‌گیریم. در این صورت بر طبق روش تصاویر، ناچاریم اثر القایی بار $q_۱$ را توسط بارهای $q'_۱$ و $q''_۱$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی نماییم.



$$\begin{cases} q'_۱ = -\frac{a}{R_۱}q_۱ = q_۲ \\ q''_۱ = \frac{a}{R_۱}q_۱ = -q_۲ \\ R_۲ = \frac{a^۲}{R_۱} \end{cases}$$

در این حالت پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله x از مرکز کره چنین خواهد بود:

$$V_۱ = \frac{q''_۱}{۴\pi\varepsilon_۰|x|} + \frac{q'_۱}{۴\pi\varepsilon_۰|x-R_۲|} + \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰|R_۱-x|}$$

در حالت دوم، فقط بار $q_۲$ واقع در داخل کره را در نظر می‌گیریم. بر طبق خاصیت رسانایی کره، از دیدگاه ناظر خارج از کره، چنین به نظر خواهد آمد که بار $q_۲$ در مرکز کره قرار دارد. بنابراین:

$$V_۲ = \frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰|x|}$$

در نتیجه پتانسیل الکتریکی کل در نقطه‌ای به فاصله x از مرکز کره برابر است با:

$$V = V_۱ + V_۲ = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰|R_۱-x|} + \frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰|x-R_۲|} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left\{\frac{q_۱}{|x-R_۱|} + \frac{q_۲}{|x-R_۲|}\right\}$$

۲۷ـ گزینه «۳» برای حل این مسأله از روش تصویر استفاده می‌کنیم و برای به دست آوردن بار القایی روی صفحه، باید ρ_S را بدانیم که مقدار آن برابر است با:

$$\rho_S = \frac{-Qd}{۲\pi(d^۲+r^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

حال بار داخل دایره به شعاع a باید به اندازه $\frac{Q}{۴}$ باشد یعنی:

$$Q' = \int_{r=۰}^{a}|\rho_S|ds = \frac{Q}{۴} \Rightarrow \int_{\phi=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{a}\frac{Qd}{۲\pi(d^۲+r^۲)^{\frac{۳}{۲}}}.r\,dr\,d\phi = \frac{Qd}{۲\pi}\left[\frac{-۱}{\sqrt{d^۲+r^۲}}\right]_{r=۰}^{a}[\phi]_{\phi=۰}^{۲\pi}$$

$$\frac{Qd}{۲\pi}\times\left[\frac{۱}{d}-\frac{۱}{\sqrt{d^۲+a^۲}}\right]\times۲\pi = \frac{Q}{۴} \to ۱-\frac{d}{\sqrt{d^۲+a^۲}} = \frac{۱}{۴} \to \frac{۳}{۴} = \frac{d}{\sqrt{d^۲+a^۲}} \to \frac{۹}{۱۶} = \frac{d^۲}{d^۲+a^۲} \to ۹a^۲ = ۷d^۲ \to a = \frac{\sqrt{۷}d}{۳}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۸ـ گزینه «۲» طبق روش تصاویر، یک بار نقطه‌ای $-Q$ را در طرف دیگر صفحه رسانا در نظر می‌گیریم. بنابراین:

نیروی ناشی از میدان الکتریکی برابر است با: $F_۱ = E_۰ Q$

نیروی ناشی از بار $-Q$ برابر است با: $F_۲ = -\frac{Q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰(۲x)^۲}$

$$F = F_۱ + F_۲ = ۰ \Rightarrow E_۰ Q = \frac{Q^۲}{۱۶\pi x^۲} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{Q}{۱۶\pi\varepsilon_۰ E_۰}}$$

۲۹ـ گزینه «۳» در مورد مسأله بار نقطه‌ای q در مقابل صفحه رسانا، چگالی بار سطحی روی صفحهٔ رسانا به صورت زیر می‌باشد و به راحتی قابل محاسبه است.

$$\sigma = \frac{-qd}{۲\pi(d^۲ + z^۲ + y^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{-qd}{۲\pi(d^۲ + r^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

که در آن r مختصات شعاعی در دستگاه استوانه‌ای می‌باشد. حال می‌خواهیم R شعاع یک دایرهٔ فرضی روی صفحهٔ رسانا را طوری به دست آوریم که $\frac{۱}{۵}$ کل بار صفحهٔ رسانا در داخل این دایرهٔ فرضی باشد و نیز می‌دانیم که بار کل روی صفحهٔ رسانا برابر $(-q)$ می‌باشد.

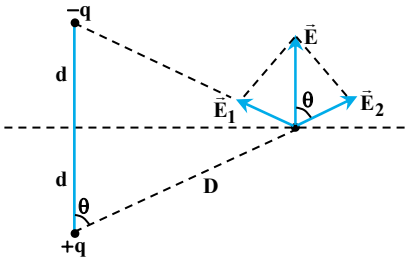
$$Q = \int \sigma \, da \rightarrow \frac{۱}{۵}(-q) = \int_۰^R \frac{-qd}{۲\pi(d^۲ + r^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \times ۲\pi r \, dr \rightarrow \frac{۱}{۵} = d\int_۰^R \frac{r\,dr}{(d^۲ + r^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

با محاسبه‌ی انتگرال و ساده‌سازی می‌توانیم مقدار R را محاسبه کنیم.

$$\rightarrow \frac{۱}{۵d} = -\frac{۱}{\sqrt{d^۲ + r^۲}}\Big|_۰^R = \frac{۱}{d} - \frac{۱}{\sqrt{d^۲ + R^۲}} \rightarrow \frac{۴}{۵d} = \frac{۱}{\sqrt{d^۲ + R^۲}} \rightarrow \frac{۱۶}{۲۵d^۲} = \frac{۱}{d^۲ + R^۲}$$

$$\rightarrow ۲۵d^۲ = ۱۶d^۲ + ۱۶R^۲ \rightarrow ۹d^۲ = ۱۶R^۲ \rightarrow R = \frac{۳}{۴}d$$

۳۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. گزینه‌های ۳ و ۴ مثل هم می‌باشند احتمالاً توان D یکی از این گزینه‌ها به جای عدد ۳ اشتباهاً ۲ چاپ شده است. ابتدا تصویر بار را در طرف دیگر صفحه در نظر می‌گیریم و صفحه رسانا را حذف می‌کنیم. سپس میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی صفحه به فاصله D از بار را به‌دست می‌آوریم:



$$|\vec{E}_۱| = |\vec{E}_۲| \quad , \quad \cos\theta = \frac{d}{D}$$

اندازه میدان الکتریکی کل در نقطه مورد نظر برابر است با:

$$\left.\begin{aligned} |E| &= ۲\cos\theta\,|E_۱| = ۲\frac{d}{D}|E_۱| \\ |E_۱| &= |E_۲| = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ D^۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |E| = \frac{dq}{۲\pi\varepsilon_۰ D^۳}$$

چگالی بار سطحی روی یک سطح رسانا به صورت روبرو به‌دست می‌آید: $|E| = \frac{\rho_s}{\varepsilon_۰} \Rightarrow \rho_s = \varepsilon_۰ |E|$

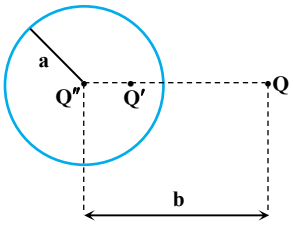
با جایگذاری E در رابطه بالا داریم: $\rho_s = \frac{dq}{۲\pi D^۳}$

۳۱ـ گزینه «۴» به علت تقارن، نیروی وارد بر بار نقطه‌ای از طرف یکی از صفحه‌ها، برابر و در خلاف جهت نیروی وارد بر آن بار از طرف صفحه دیگر است. بنابراین نیرویی بر بار نقطه‌ای وارد نمی‌شود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۲ـ گزینه «۲» می‌توان بار سطحی با چگالی ρ_{sl} را به صورت بار نقطه‌ای Q مدل‌سازی کرد. بار Q برابر است با:



$$Q = 4\pi b^2 \rho_{sl}$$

تصویر بار Q روی کره فلزی، بار Q' می‌باشد:

$$Q' = -\frac{a}{b}Q = -4\pi ab\rho_{sl}$$

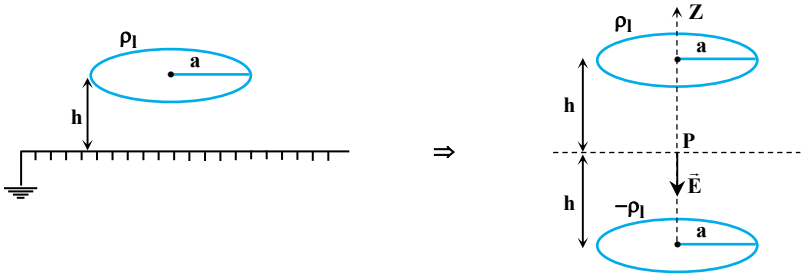
از آن جا که کره بدون بار می‌باشد، بار Q'' به صورت زیر درون کره ایجاد می‌شود:

$$Q'' = -Q' = 4\pi ab\rho_{sl}$$

بارهای Q و Q' مجموعاً پتانسیل صفر را روی کره ایجاد می‌کنند و تنها عامل ایجاد پتانسیل روی کره، بار Q'' می‌باشد:

$$V = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{b\rho_{sl}}{\varepsilon_\circ}$$

۳۳ـ گزینه «۴» با استفاده از قضیه تصاویر، شکل را مدل‌سازی می‌کنیم:



میدان الکتریکی ناشی از حلقه بالایی در نقطه P برابر است با:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho_l ah}{2\varepsilon_\circ(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

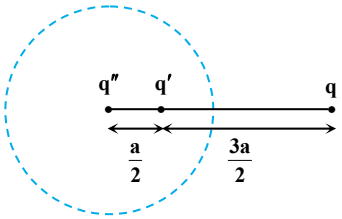
میدان ناشی از حلقه پایینی هم اندازه و هم جهت میدان حلقه بالایی است:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\rho_l ah}{\varepsilon_\circ(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z \Rightarrow E_n = -\frac{\rho_l ah}{\varepsilon_\circ(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

چگالی بار سطحی روی فلز در نقطه P برابر است با:

$$\sigma = \varepsilon_\circ E_n = -\frac{\rho_l ah}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۳۴ـ گزینه «۴» با استفاده از روش تصاویر می‌توان تصویر بار q روی کره بدون بار فلزی را به صورت زیر تعیین کرد:



$$q'' = -q' = \frac{q}{2}$$

کار انجام شده برای قرار گرفتن این سه بار را کنار همدیگر به دست می‌آوریم:

$$W = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3)$$

$$q_1 = q\ ,\ V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q'}{\frac{3a}{2}} + \frac{q''}{2a}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{12a}$$

$$q_2 = q' = -\frac{q}{2}\ ,\ V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q}{\frac{3a}{2}} + \frac{q''}{\frac{a}{2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{5q}{3a}$$

$$q_3 = q'' = \frac{q}{2}\ ,\ V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q'}{\frac{a}{2}} + \frac{q}{2a}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{a}{2a} \Rightarrow W = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_\circ a}$$

در نتیجه انرژی کل سیستم برابر $\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_\circ a}$ می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل هشتم

«جریان‌های الکتریکی دائم»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هشتم

۱ـ ناحیه $a < r < b$ از ماده‌ای با رسانایی $\sigma(r) = \frac{k}{r}$ پر شده است که در آن r شعاع دستگاه کروی و a، b و k مقادیر ثابتی هستند. اگر سطح $r = a$ در پتانسیل V_0 و سطح $r = b$ در پتانسیل صفر باشد، چگالی جریان در این ناحیه کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۰)

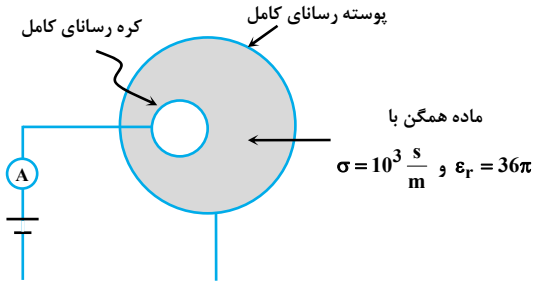
۱) $\frac{kV_0}{r^2 \ln\frac{b}{a}}$

۲) $\frac{kV_0}{ar}\ln\frac{b}{a}$

۳) $\frac{kV_0 \ln\frac{b}{a}}{r^2}$

۴) $\frac{kV_0}{br\ln\frac{b}{a}}\hat{r}$

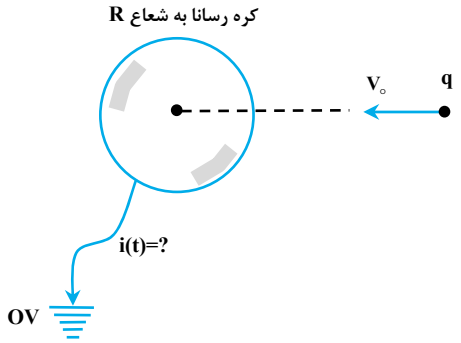
۲ـ اگر آمپرمتر در شکل زیر ۱۰ آمپر را نشان دهد، مقدار کل بار جمع شده بر روی کره‌ی داخل چند کولن بوده است؟ (برق ـ سراسری ۸۰)



$(\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \frac{F}{m})$

۱) صفر
۲) $10\,\mu C$
۳) $10\,pC$
۴) $2pC$

۳ـ بار نقطه‌ای q با سرعت بسیار کم V_0 در امتداد یکی از شعاع‌های یک کره‌ی رسانا، به آن نزدیک می‌شود. کره با سیم بسیار نازکی به پتانسیل صفر متصل است. اگر قبل از حرکت، فاصلهٔ q با مرکز کره D بوده باشد و شعاع کره R فرض شود، جریان $i(t)$ قبل از رسیدن q به کره کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{RqV_0}{(D - V_0 t)^2}$

۲) $\frac{Rq}{(D - V_0 t)t}$

۳) $-\frac{RqV_0}{(D - V_0 t)^2}$

۴) $-\frac{Rq}{(D - V_0 t)t}$

۴ـ در لحظه $t = 0$ درون یک جسم هادی با رسانایی ویژه σ و نفوذپذیری ε_0 بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی حجمی ثابت ρ_0 رها می‌شود. در لحظه $t = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\ln 2$ درون کره‌ای به شعاع a چقدر بار وجود دارد؟ (برق ـ سراسری ۸۰)

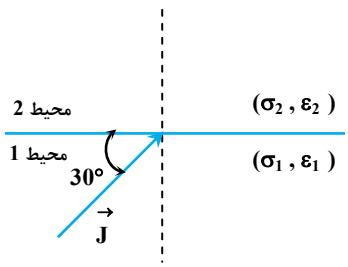
۱) $Q = 4\pi a^3 \rho_0$

۲) $Q = \frac{2\pi a^3 \rho_0}{3}$

۳) $Q = \frac{4\pi a^3 \rho_0}{3}$

۴) $Q = \frac{8\pi}{3} a^3 \rho_0$

۵ـ چگالی جریان $\vec{J}$ با زاویه 30° نسبت به مرز بین دو محیط ۱ و ۲ از محیط ۱ به محیط ۲ وارد می‌شود. مشخصات محیط‌های ۱ و ۲ به ترتیب عبارتند از $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ و $(\sigma_2, \varepsilon_2)$. چگالی بار سطحی در مرز بین دو محیط چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $\rho_S = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\left|\vec{J}\right|$

۲) $\rho_S = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\left|\vec{J}\right|$

۳) $\rho_S = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\left|\vec{J}\right|$

۴) $\rho_S = \frac{-1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\left|\vec{J}\right|$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

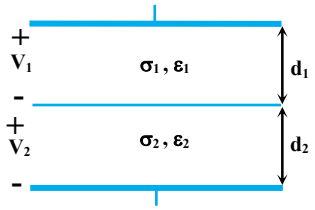
۶ـ در شرایطی که چگالی بار الکتریکی در هر نقطه از فضا در طول زمان ثابت است (حالت پایا)، کدام رابطه همواره صادق است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $J = gE$　　۲) $\vec{\nabla} \times J = 0$　　۳) $\vec{\nabla}.E = 0$　　۴) $\vec{\nabla}.J = 0$

۷ـ همانند شکل، عایق خازن مسطحی از دو لایه عایق به ترتیب با ضریب نفوذپذیری الکتریکی ε_1 و ε_2 و رسانای ویژه σ_1 و σ_2 و ضخامت d_1 و d_2 تشکیل شده است. اگر خازن به ولتاژ مستقیم V وصل شود، در رژیم دائمی نسبت ولتاژ دو قسمت عایق V_1 و V_2 برابر است با:

(برق ـ سراسری ۸۳)

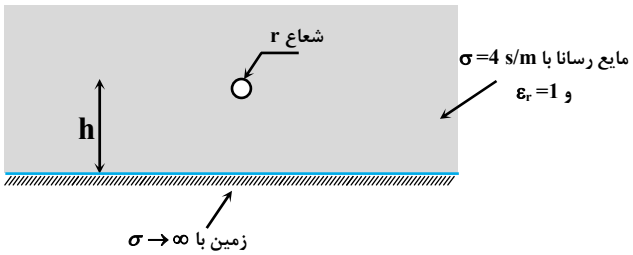


۱) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sigma_2 d_1}{\sigma_1 d_2}$　　۲) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$

۳) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$　　۴) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sigma_2 \varepsilon_1}{\sigma_1 \varepsilon_2}$

۸ـ یک کره‌ی رسانای کامل به شعاع r همانند شکل در ارتفاع h از یک زمین رسانای کامل واقع شده است، به قسمی که $r << h$، فرض کنید محیط اطراف کره با مایعی رسانا با $\sigma = 4 \frac{S}{m}$ و $\varepsilon_r = 1$ پر شده باشد. اگر توسط یک باتری اختلاف پتانسیل کره نسبت به زمین در سطح یک ولت نگه داشته شود، توان تلف شده در مایع از کدام رابطه‌ی زیر به دست می‌آید؟

(برق ـ سراسری ۸۳)

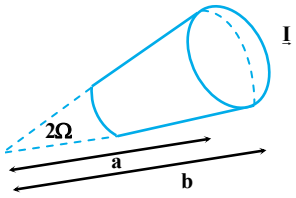


۱) $\frac{8\pi}{\frac{1}{r} + \frac{1}{2h}}$　　۲) $\frac{16\pi}{\frac{1}{r} + \frac{1}{2h}}$

۳) $\frac{8\pi}{\frac{1}{r} - \frac{1}{2h}}$　　۴) $\frac{16\pi}{\frac{1}{r} - \frac{1}{2h}}$

۹ـ یک جسم هادی مطابق شکل از تقاطع یک زاویه‌ی فضایی Ω با دو سطح کروی هم مرکز به شعاع‌های a و b به وجود آمده است و از آن یک جریان شعاعی می‌گذرد. مقاومت الکتریکی این جسم کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۳)

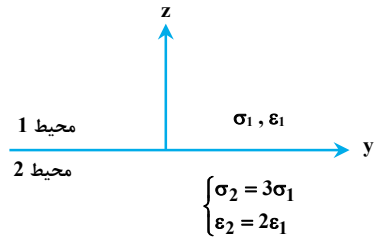


۱) $R = \frac{1}{2\pi g \Omega} \ln \frac{b}{a}$　　۲) $R = \frac{1}{g\Omega}[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}]$

۳) $R = \frac{1}{4\pi g \Omega}(1 - \frac{b}{a})$　　۴) $R = \frac{\Omega}{\pi g}(b - a)$

۱۰ـ ناحیه $z > 0$ از محیط همگن با ضرایب ε_1, σ_1 و ناحیه $z < 0$ از محیطی با ضرایب σ_2 و ε_2 مفروض است. اگر در محیط ۱ داشته باشیم $\vec{J} = J_0(\hat{x} + 2\hat{y} + 6\hat{z})$، چگالی بارسطحی را در $z = 0$ به‌دست آورید.

(برق ـ سراسری ۸۴)



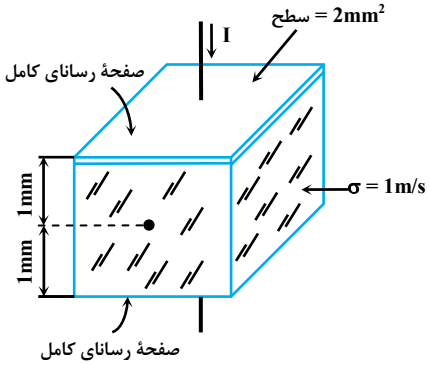
۱) $\frac{2\varepsilon_2 J_0}{\sigma_1}$　　۲) $\frac{2\varepsilon_1 J_0}{\sigma_1}$

۳) $2(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2})J_0$　　۴) $(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2})J_0$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ جریان مستقیم $I = ۱۰\,mA$ از درون مقاومت نشان داده شده در شکل عبور می‌کند. مطلوب است $|\vec{E}|$ برای نقطهٔ A در شکل که بلافاصله در خارج از ماده تشکیل‌دهنده‌ی مقاومت قرار دارد. (برق ـ سراسری ۸۴)



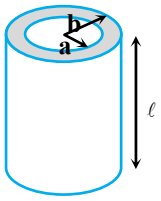
۱) $۲/۵\frac{V}{m}$

۲) $۵\frac{V}{m}$

۳) $۲/۵\frac{kV}{m}$

۴) $۵\frac{kV}{m}$

۱۲ـ یک قطعه لوله فلزی استوانه‌ای توخالی بسیار بلند به طول ℓ و به شعاع‌های قاعده درونی a و بیرونی b (طبق شکل) و ضریب مقاومت الکتریکی ویژه $\rho_\circ$ را در نظر بگیرید. مقاومت الکتریکی این قطعه فلز وقتی یک اختلاف پتانسیل الکتریکی خارجی بین دو سطح جانبی درونی و بیرونی آن وجود داشته باشد، کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



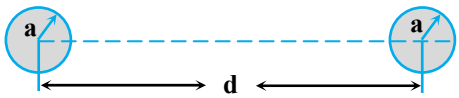
۱) $\frac{\rho_\circ \ell}{\pi(b^۲ - a^۲)}$

۲) $\frac{\rho_\circ}{۲\pi}\cdot\frac{\ell}{ab}$

۳) $\frac{\rho_\circ}{۲\pi\ell}(\frac{b}{a})^۲$

۴) $\frac{\rho_\circ}{۲\pi\ell}\ln(\frac{b}{a})$

۱۳ـ دو کره بسیار کوچک رسانا به شعاع‌های a به فاصله نسبتاً زیاد $(d >> a)$ و در یک محیط اهمی همگن با رسانایی g و تراوایی $\varepsilon_\circ$ قرار دارند، R مقاومت الکتریکی محیط بین دو کره کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



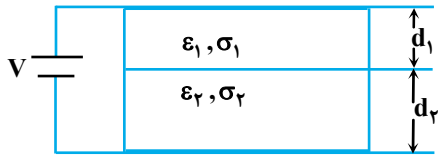
۱) $\frac{ad}{۲\pi\varepsilon_\circ g(d-a)}$

۲) $\frac{d-a}{۴\pi gad}$

۳) $\frac{d-a}{۴\pi\varepsilon_\circ gad}$

۴) $\frac{d-a}{۲\pi gad}$

۱۴ـ نیروی محرکه V به دو سر یک خازن مسطح که سطوح آن دارای مساحت S می‌باشد اعمال می‌شود. فاصله بین صفحات هادی با دو دی‌الکتریک متفاوت با ضخامت‌های $d_۱$ و $d_۲$ و گذردهی‌های $\varepsilon_۱, \varepsilon_۲$ و ضریب هدایت‌های $\sigma_۱, \sigma_۲$، پر شده است. چگالی جریان بین دو صفحه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



۱) $J = \frac{\sigma_۱\sigma_۲ V}{(\sigma_۱ d_۱ + \sigma_۲ d_۲)}$

۲) $J = \frac{\sigma_۱\sigma_۲ E}{(\sigma_۱ d_۱ + \sigma_۲ d_۲)}$

۳) $J = \frac{\sigma_۱\sigma_۲ V}{(\sigma_۲ d_۱ + \sigma_۱ d_۲)}$

۴) $J = \frac{\sigma_۱ V}{\sigma_۲ d_۱} + \frac{\sigma_۲ V}{\sigma_۱ d_۲}$

۱۵ـ چنانچه رسانایی عایق غیرکامل یک کابل هم محور، غیریکنواخت و به صورت $\sigma = \frac{\sigma_\circ}{۱+\frac{a}{r}}$ باشد، مقاومت موازی در واحد طول کابل فوق کدام است؟ (a و b به ترتیب شعاع هادی داخلی و بیرونی کابل است.) (برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۲\pi\sigma_\circ}[\ln\frac{۲b}{a^۲} + \frac{b-a}{b}]$

۲) $-\frac{۱}{۲\pi\sigma_\circ}[ab - \frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲)]$

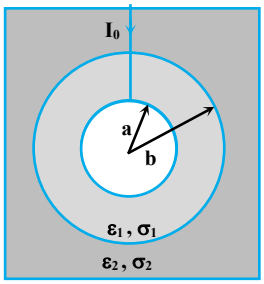
۳) $\frac{۱}{۲\pi\sigma_\circ}[\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{b}]$

۴) $-\frac{۱}{۲\pi\sigma_\circ}[a^۲ b - \frac{۱}{۲}(a^۲ + b)]$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۶ـ همانند شکل به کره‌ی رسانای کاملی به شعاع a از طریق سیم بی‌نهایت نازکی جریان مستقیم I_0 وارد می‌شود. ناحیهٔ اول $(a < r < b)$ و دوم $(b < r)$ به ترتیب با مواد $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ و $(\varepsilon_2, \sigma_2)$ پر شده است. چگالی شار الکتریکی $\vec{D}$ در $r = b^+$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۵)



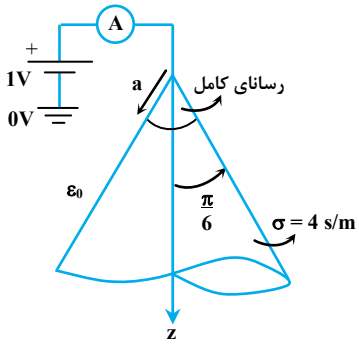
۱) $\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\frac{I_0}{4\pi b^2}\hat{a}_r$

۲) $(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2})\frac{I_0}{4\pi b^2}\hat{a}_r$

۳) $-(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2})\frac{I_0}{4\pi b^2}\hat{a}_r$

۴) $(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2})\frac{I_0}{4\pi b}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})\hat{a}_r$

۱۷ـ ناحیه‌ی $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ از دستگاه مختصات کروی را در نظر بگیرید. بخش $r < a$ از این ناحیه با یک رسانای کامل و بخش $r \ge a$ این ناحیه با ماده‌ای به رسانایی $\sigma = 4\frac{S}{m}$ پر شده است. اگر همانند شکل، رسانای کامل به منبع ولتاژ ایده‌آل ۱ ولت متصل شود، آمپر متر چه جریانی را نشان خواهد داد؟ (برق ـ سراسری ۸۶)



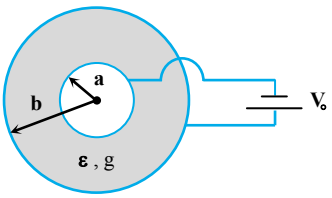
۱) $\frac{\pi}{a}(2-\sqrt{3})$

۲) $\pi(2-\sqrt{3})a$

۳) $4\pi(2-\sqrt{3})a$

۴) $\frac{4\pi}{a}(2-\sqrt{3})$

۱۸ـ بین دو پوسته‌ی استوانه‌ای هم‌محور و طویل به شعاع‌های a و b دی‌الکتریکی با گذردهی ε و رسانندگی ویژه $g = \frac{g_0}{\rho}$ قرار دارد (ρ فاصله شعاعی تا محور استوانه و g_0 ثابت است). در صورتی که اختلاف پتانسیل V_0 بین دو پوسته اعمال شود، جریان نشتی بین دو پوسته در واحد طول استوانه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)



۱) $\frac{2\pi g_0}{(b-a)}V_0$

۲) $\frac{2\pi g_0}{\ln(\frac{b}{a})}V_0$

۳) $\frac{2\pi g_0 ab}{b^3-a^3}V_0$

۴) $\frac{2\pi g_0}{b^3-a^3}V_0$

۱۹ـ یکی از راه‌های توصیف رسانش خوب یک قطعه فلز تعیین مقدار ثابت زمانی تخلیه الکتریکی بارهای الکتریکی آزاد قرار داده شده روی آن قطعه فلز می‌باشد که معمولاً به سرعت پخش شده و به نقاط تیز آن قطعه فلز رفته و از آنجا به‌تدریج آزاد می‌گردند. اگر $\varepsilon = K_e\varepsilon_0$ ضریب دی‌الکتریکی و σ ضریب رسانش الکتریکی و n_e چگالی تعداد الکترون‌های آزاد آن قطعه فلز باشد، این مقدار ثابت زمانی چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\varepsilon}{\sigma}$

۲) $2\frac{\varepsilon}{\sigma}$

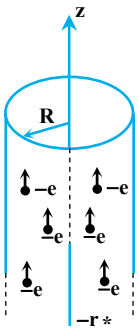
۳) $2\pi\sqrt{\frac{m_e\varepsilon}{e^2 n_e}}$

۴) $4\pi\sqrt{\frac{m_e\varepsilon}{e^2 n_e}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۰: در یک لوله خلأ به شکل استوانه قائم و به شعاع مقطع R الکترون‌ها با بار $q=-e$ و با چگالی تعداد ثابت و یکنواخت n_e و با سرعت یکسان و ثابت $\vec{v}=v_e\hat{e}_z$ همگی به سمت بالا (جهت مثبت محور z) در حرکت هستند. میدان‌های الکتریکی $(\vec{E}(r))$ و مغناطیسی $(\vec{B}(r))$ درون این لوله برای $0\le r\le R$ به ترتیب کدامند؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)



۱) $-\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\ ,\ \frac{en_e}{2\varepsilon_0}\vec{r}$

۲) $\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\ ,\ -\frac{en_e}{2\varepsilon_0}\vec{r}$

۳) $\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\ ,\ \frac{en_e}{\varepsilon_0}\vec{r}$

۴) $-\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\ ,\ -\frac{en_e}{\varepsilon_0}\vec{r}$

۲۱ـ اگر چگالی بار حجمی به صورت $\rho=\frac{\cos\omega t}{r^2}\frac{c}{m^3}$ در مختصات کروی داده شده باشد، مطلوب است محاسبه چگالی جریان الکتریکی $\vec{J}\ \frac{A}{m^2}$، فرض کنید $\vec{J}$ تابعی از ϕ و θ نباشد. (برق ـ آزاد ۸۸)

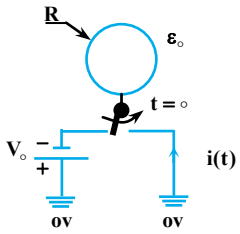
۱) $\vec{J}=(\frac{\omega}{r}\sin\omega t+\frac{c_1}{r})\hat{a}_r$

۲) $\vec{J}=(\frac{\omega}{r^2}\sin\omega t+\frac{c_1}{r^2})\hat{a}_r$

۳) $\vec{J}=(\frac{\omega}{r}\sin\omega t+\frac{c_1}{r^2})\hat{a}_r$

۴) $\vec{J}=(\frac{\omega}{r^2}\sin\omega t+\frac{c_1}{r})\hat{a}_r$

۲۲ـ کره‌ای رسانا به شعاع $R=2m$ در فضای خالی قرار گرفته است. همانند شکل این کره برای مدت زمان طولانی به منبع ولتاژ مستقیم $V_0=10V$ با علامت نشان داده شده در شکل متصل بوده است. در لحظه $t=0$ همانند شکل کره را به ولتاژ صفر متصل کرده‌ایم. حاصل انتگرال $\int_{0^-}^{\infty}-i(t')dt'$ کدام است؟ ($i(t)$ در شکل ملاحظه می‌شود) (برق ـ سراسری ۸۹)



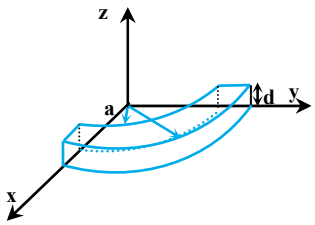
۱) $-40\pi\varepsilon_0$

۲) $40\pi\varepsilon_0$

۳) $80\pi\varepsilon_0$

۴) $-80\pi\varepsilon_0$

۲۳ـ یک میله فلزی با رسانندگی σ به شکل یک کمان ۹۰ درجه‌ای به شعاع داخلی a و خارجی b و ضخامت d مطابق شکل قرار دارد. مقاومت میله بین سطوح $z=0$ تا $z=d$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{2\ln(\frac{b}{a})}{\sigma\pi d}$

۲) $\frac{\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$

۳) $\frac{4d}{\sigma\pi(b^2-a^2)}$

۴) $\frac{2(b^2-a^2)}{\sigma\pi d^3}$

۲۴ـ دو کره رسانا در محیطی با مقاومت ویژه $\rho=5\times10^{-6}\ \Omega.m$ و گذردهی $\varepsilon=100\frac{pF}{m}$ قرار دارند. اگر مقاومت بین دو رسانا $5\times10^{-4}\ \Omega$ باشد، ظرفیت خازن حاصل چند پیکو فاراد است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۵۰

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۵ـ رسانایی به طول ℓ و ضریب رسانندگی σ در نظر بگیرید. سطح مقطع این رسانا در یک سر آن برابر A است و به طور خطی در طول رسانا افزایش می‌یابد، به طوری که در انتهای دیگر رسانا سطح مقطع $3A$ است. مقاومت این رسانا کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\ell}{\sigma A}$ ۲) $\frac{\ell}{\sigma A}\ln 3$ ۳) $\frac{\ell}{2\sigma A}\ln 3$ ۴) $\frac{\ell}{3\sigma A}$

۲۶ـ سیمی رسانا به طول $300\,m$ و سطح مقطع یکنواخت در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل دوسر سیم $1/5V$ و چگالی جریان الکتریکی $2/5\times10^{5}\ \frac{A}{m^2}$ است. ضریب رسانندگی این سیم چند $\frac{S}{m}$ است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $1/8\times10^{5}$ ۲) $2/5\times10^{5}$ ۳) $4/5\times10^{5}$ ۴) 5×10^{5}

۲۷ـ بین دو کره هادی هم مرکز به شعاع‌های a و b $(b>a)$، ماده‌ای اتلافی با ضرایب ε و σ پر شده است. مقاومت بین دو کره را بر حسب σ، ε و خازن بین دو کره C، تعیین کنید. C ظرفیت بین دو کره در حالتی است که ماده اتلافی توسط دی‌الکتریک با ضرایب ε جابجا شده باشد. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $R=\frac{2\varepsilon}{\sigma C}$ ۲) $R=\frac{\varepsilon}{2\sigma C}$ ۳) $R=\frac{\varepsilon}{4\sigma C}$ ۴) $R=\frac{\varepsilon}{\sigma c}C$

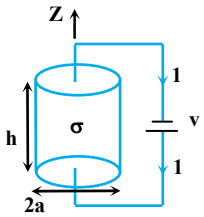
۲۸ـ بین دو صفحه هادی موازی به سطوح S و فاصله d از یکدیگر ماده‌ای با ضریب هدایتی متغیر σ پر شده است. میزان σ از σ_1 در صفحه زیرین تا σ_2 در صفحه بالایی به طور خطی تغییر می‌کند. $(\sigma_2>\sigma_1)$. مقاومت بین دو صفحه را تعیین نمائید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $R=\frac{d\ln\frac{2\sigma_2}{\sigma_1}}{S(\sigma_2-\sigma_1)}$ ۲) $R=\frac{d\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{2S(\sigma_2-\sigma_1)}$ ۳) $R=\frac{d\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{S(\sigma_2-\sigma_1)}$ ۴) $R=\frac{d\ln\frac{2\sigma_2}{\sigma_1}}{2S(\sigma_2-\sigma_1)}$

۲۹ـ ناحیه $z>0$ دارای ضریب هدایت $g=1+y$ و ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon=\varepsilon_0(1+y)$ می‌باشد. اگر جریان مستقیم در این محیط با چگالی $\vec{J}=e^{-z}j$ باشد، چگالی بار الکتریکی در این محیط چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{-\varepsilon_0 e^{-z}}{1+y}$ ۳) $2\varepsilon_0(1+y)e^{-z}$ ۴) $-\varepsilon_0 e^{-z}$

۳۰ـ فاصله‌ی بین دو دیسک دایروی به شعاع a که از جنس رسانای کامل هستند توسط ماده‌ای به رسانایی ناهمگن $\sigma=k(1+\frac{z}{h})(1+\frac{r}{a})$ پر شده که h فاصلهٔ بین دو دیسک بوده و $0\le z\le h$ و r فاصله از محور ساختار می‌باشد. مقاومت اهمی R بین دو دیسک چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)



۱) $\frac{3\ln 2}{5\pi}\frac{h}{ka^2}$ ۲) $\frac{3\ln 2}{10\pi}\frac{h}{ka^2}$ ۳) $\frac{\ln 2}{4\pi}\frac{h}{ka^2}$ ۴) $\frac{3\ln 2}{\pi}\frac{h}{ka^2}$

۳۱ـ ناحیه $z>0$ دارای ضریب هدایت $\sigma=1+y$ و ضریب عایقی $\varepsilon=\varepsilon_0(1+y)$ است. اگر جریان مستقیم در این محیط به چگالی $\vec{J}=e^{-z}\hat{a}_y$ باشد، چگالی بار الکتریکی ساکن در این محیط برابر است با: (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $-\varepsilon_0 e^{-z}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{\varepsilon_0 e^{-z}}{1+y}$ ۴) $2\varepsilon_0(1+y)e^{-z}$

۳۲ـ یک سیم به قطر $0/2$ متر شامل 10^{28} الکترون بر متر مکعب می‌باشد. برای یک جریان الکتریکی 100 آمپری، سرعت سوق برای الکترون‌های آزاد چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $2\times10^{-4}\ \frac{m}{s}$ ۲) $5\times10^{-10}\ \frac{m}{s}$ ۳) $1\times10^{-18}\ \frac{m}{s}$ ۴) $0/6\times10^{-29}\ \frac{m}{s}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۳ـ یک مولد ac با مقاومت داخلی Z_I به یک مصرف کننده با مقاومت ظاهری Z_L به طور متوالی وصل شده است. در چه موقعی حداکثر توان به مقاومت ظاهری مصرف کننده منتقل می‌گردد؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $Z_L = Z_I^*$ ۲) $Z_L = Z_I$ ۳) $Z_L = -Z_I$ ۴) $Z_L = ۲Z_I$

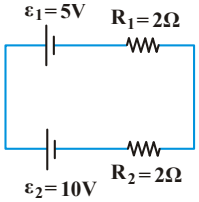
۳۴ـ یک مدار RCL سری شامل القاییدگی $L = ۱۲mH$ و ظرفیت $C = ۱/۶\mu F$ و مقاومت $R = ۱/۵\Omega$ است. در این مدار در چه زمانی دامنه نوسانات بار الکتریکی به ۵۰٪ مقدار اولیه می‌رسد؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) ۰/۰۱۱s ۲) ۰/۱۱s ۳) ۱/۱s ۴) ۱۱s

۳۵ـ یک جسم کروی و همگن و خطی دارای ضریب رسانندگی g و گذردهی ε و چگالی حجمی بار آزاد اولیه ρ_0 می‌باشد. میدان الکتریکی در نقاط داخل سیم بر حسب زمان چگونه تغییر می‌کند؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

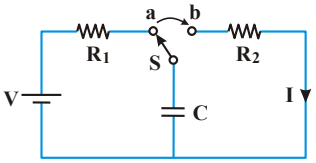
۱) $\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{\rho_0 \bar{r}}{۳\varepsilon} e^{\frac{-gt}{\varepsilon}}$ ۲) $\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{\rho_0 \bar{r}}{۶\varepsilon} e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$ ۳) $\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{\rho_0 \bar{r}}{۳\varepsilon} e^{\frac{-\varepsilon}{g}t}$ ۴) $\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{\rho_0 \bar{r}}{۶\varepsilon} e^{\frac{-\varepsilon}{g}t}$

مثال ۳۶: باتری ε_1 با مقاومت داخلی R_1 را به باتری ε_2 با مقاومت داخلی R_2 به طور موازی بسته و در یک مدار الکتریکی قرار می‌دهیم. نیروی محرکه و مقاومت داخلی باتری معادل کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۱)



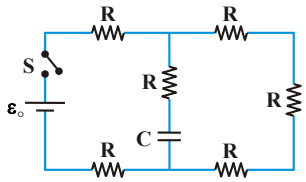
۱) ۱۵v و ۱/۲Ω
۲) ۷v و ۱/۲Ω
۳) ۱۵v و ۵Ω
۴) ۷v و ۵Ω

مثال ۳۷: در مدار شکل زیر ابتدا برای مدتی طولانی کلید S در وضعیت a قرار داشته است، سپس در لحظه $t = ۰$ کلید را در وضعیت b قرار می‌دهیم. معادله شدت جریان I کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۳)



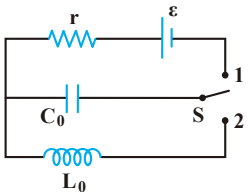
۱) $\frac{V}{R_۲} e^{-\frac{t}{(R_۲C)}}$ ۲) $\frac{V}{R_۲}(۱-e^{-\frac{t}{(R_۲C)}})$
۳) $\frac{V}{R_۱+R_۲}(۱-e^{-\frac{t}{(R_۱+R_۲)C}})$ ۴) $\frac{V}{R_۱+R_۲} e^{-\frac{t}{(R_۱+R_۲)C}}$

مثال ۳۸: در مدار شکل زیر نیروی محرکه باطری ε_0، ظرفیت خازن C و مقاومت الکتریکی تمام مقاومت‌ها برابر R است. در ابتدا خازن خالی است. با بستن کلید S در لحظه $t = ۰$ توان مصرفی باطری برابر $P(۰)$ می‌شود. توان مصرفی نهایی باطری (در لحظه $t \to \infty$) چند برابر توان مصرفی $P(۰)$ است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۳)



۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$
۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۰}$

مثال ۳۹: در مدار شکل زیر ابتدا کلید S در حالت (۱) قرار می‌گیرد تا خازن کاملاً پر شود. سپس کلید S در لحظه $t = ۰$ از حالت (۱) به حالت (۲) برده می‌شود. اندازه شدت جریان الکتریکی در سیم‌پیچ L_0 در لحظه $t = \frac{\pi}{۲}\sqrt{L_0 C_0}$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۳)



۱) $\varepsilon\sqrt{\frac{C_0}{۲L_0}}$ ۲) $\varepsilon\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$
۳) $\varepsilon\sqrt{\frac{۲C_0}{L_0}}$ ۴) $\frac{\varepsilon}{۲}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$

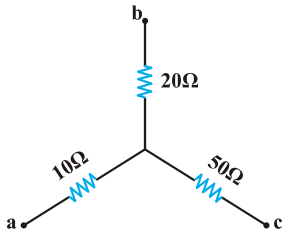
www.modaresanesharif.ac.ir

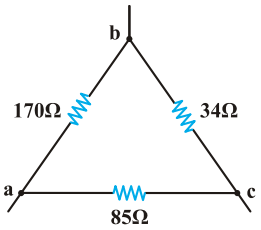
www.modaresanesharif.ac.ir

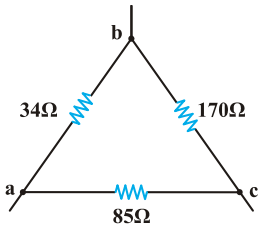
۴۰ـ اگر u چگالی حجمی انرژی امواج الکترومغناطیسی، $\vec{v}_p$ سرعت انتشار امواج، $\vec{S}$ شار انرژی امواج در واحد سطح، $\vec{J}$ چگالی جریان الکتریکی و ρ چگالی حجمی بار الکتریکی باشد، کدام رابطه درست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۴)

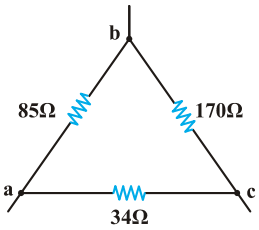
۱) $\vec{S} = u\vec{J}$ ۲) $u = \rho\vec{S}.\vec{J}$ ۳) $\vec{J} = \rho\vec{v}_p$ ۴) $\vec{S} = u\vec{v}_p$

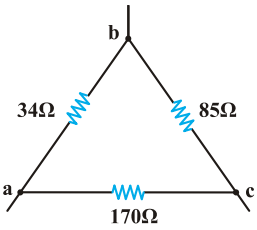
۴۱ـ مدار معادل با مدار شکل زیر کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۴)



۱)


۲)


۳)


۴)


۴۲ـ یک سلول خورشیدی که سطح جلویی آن $15cm^2$ است وقتی در معرض نور خورشید با شار انرژی $1/2\times10^3\ W/m^2$ قرار می‌گیرد، جریان الکتریکی $0/3A$ با اختلاف ولتاژ $1/5V$ تحویل می‌دهد. بازده تبدیل انرژی نوری به انرژی الکتریکی این سلول خورشیدی چند درصد است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۴)

۱) ۳/۷۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲۵

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

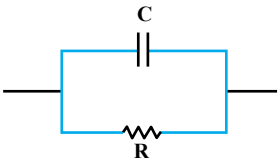
پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هشتم

۱ـ گزینه «۱» ابتدا مقاومت محیط را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از قانون اهم جریان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم.

$$R=\int\frac{dr}{\iint\sigma ds}=\int_a^b\frac{dr}{4\pi r^2.\frac{k}{r}}=\frac{1}{4\pi k}\ln\frac{b}{a}$$

$$I=\frac{v_\circ}{R}=\frac{4\pi kV_\circ}{\ln\frac{b}{a}}\quad,\quad J=\frac{I}{4\pi r^2}=\frac{kV_\circ}{r^2\ln\frac{b}{a}}$$

۲ـ گزینه «۳» به دلیل اینکه ماده همگن بین کره رسانای داخلی و پوسته رسانای خارجی از نوع عایق **ناقص** می‌باشد، پس می‌توانیم آن را توسط یک مقاومت و یک خازن موازی با هم مدل‌سازی کنیم.



از طرف دیگر ثابت زمانی یک عایق ناقص برابر $(RC=\frac{\varepsilon}{\sigma})$ می‌باشد:

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9})(36\pi)}{10^3}=10^{-12}$$

کل بار جمع شده بر روی کره داخلی از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$Q=CV=CRI=10^{-12}\times10=10\,pC$$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به تعریف جریان، تغییرات بار الکتریکی نسبت به زمان برابر با جریان می‌باشد:

$$I=\frac{dq'}{dt}$$

q' مقدار بار القاء شده در کره می‌باشد. برای به دست آوردن q' با توجه به این که کره در پتانسیل ثابت صفر قرار گرفته است از روش تصویر بار نقطه‌ای که در فصل هشتم معرفی کردیم، استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم فاصله بار q تا مرکز در هر زمان دلخواه برابر x باشد مقدار بار q' برابر است با:

$$q'=-\frac{R}{x}q$$

چون فاصله اولیه بار تا مرکز کره D و سرعت بار $V_\circ$ می‌باشد، بنابراین می‌توان x را به صورت $x=D-V_\circ t$ تعریف کرد. با جایگذاری x در q' و مشتق گرفتن نسبت به زمان داریم:

$$i(t)=\frac{d}{dt}(\frac{-R}{X}q)=\frac{d}{dt}(\frac{-Rq}{D-V_\circ t})=\frac{-RqV_\circ}{(D-V_\circ t)^2}$$

۴ـ گزینه «۲» واضح است که در لحظه اول، کل بار درون یک کره به شعاع a برابر است با $Q=\frac{4}{3}\pi\rho_\circ a^3$. همچنین در لحظه $t=\infty$ کل بار روی سطح خارجی فلز تجمع می‌یابد و بار درون آن صفر می‌گردد و لذا:

$$Q(t)=Q(\infty)+[Q(t=\circ)-Q(t=\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{4}{3}\pi a^3\rho_\circ e^{-\frac{t}{\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma}}}\xrightarrow{t=\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma}Ln2}Q=\frac{2\pi a^3\rho_\circ}{3}$$

۵ـ گزینه «۲» با استفاده از شرط مرزی مؤلفه عمودی بردار $\vec{D}$ داریم:

$$\rho_s=D_{n2}-D_{n1}=\varepsilon_2E_{n2}-\varepsilon_1E_{n1}=\frac{\varepsilon_2|J_{n2}|}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1|J_{n1}|}{\sigma_1}$$

از طرفی $J_{n1}=J_{n2}$ و لذا می‌توان نوشت:

$$(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1})|J_{n1}|=(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1})|\vec{J}|\sin30^\circ=\frac{1}{2}(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1})|\vec{J}|$$

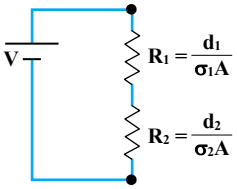
۶ـ گزینه «۴» با توجه به معادله‌ی پیوستگی $\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\circ$ و اینکه چگالی بار در هر نقطه از فضا در طول زمان ثابت است داریم:

$$\vec{\nabla}\cdot J=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\circ$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ گزینه «۱»



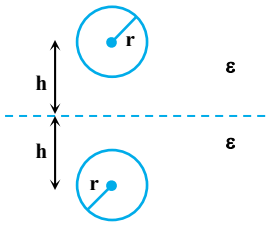
روش اول: در دو مقاومت سری نسبت ولتاژها با نسبت مقاومت‌ها برابر است و از طرفی مقاومت با طول نسبت مستقیم و با رسانایی نسبت عکس دارد، بنابراین فقط گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{\sigma_۲ d_۱}{\sigma_۱ d_۲}$$

روش دوم: با استفاده از روش تقسیم ولتاژ $V_۱$ و $V_۲$ را برای دو مقاومت سری به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned}V_۱&=\frac{R_۱}{R_۱+R_۲}V\\ V_۲&=\frac{R_۲}{R_۱+R_۲}V\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{R_۱}{R_۲}\Rightarrow\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{\sigma_۲ d_۱}{\sigma_۱ d_۲}$$

۸ـ گزینه «۴» با توجه به روش تصاویر، یک کره دیگر در سمت پایین صفحه به فاصله h از صفحه در نظر می‌گیریم.



همان‌طور که در فصل مربوط به خازن بیان کردیم ظرفیت بین دو کره به فاصله ۲h و شعاع r به صورت زیر می‌باشد:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{r}+\frac{۱}{r}-\frac{۲}{۲h}}$$

حال با استفاده از رابطه بین ظرفیت و مقاومت الکتریکی یک دی‌الکتریک داریم:

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}\Rightarrow R=\frac{\varepsilon}{C\sigma}\ ,\ \varepsilon_r=۱\Rightarrow\varepsilon=\varepsilon_۰$$

با جایگذاری ظرفیت خازن بین دو کره در رابطه فوق مقاومت الکتریکی بین این دو کره را به دست می‌آوریم:

$$R=\frac{\frac{۱}{r}-\frac{۱}{۲h}}{۸\pi}$$

مقاومت بین کره و زمین نصف مقدار مقاومت فوق می‌باشد:

$$R'=\frac{۱}{۲}R\Rightarrow P=\frac{V^۲}{R'}=\frac{۱۶\pi}{\frac{۱}{r}-\frac{۱}{۲h}}$$

۹ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه‌ی انتگرال مقاومت و با توجه به این که برای این مسأله $\int_S ds=\int r^۲ d\Omega=r^۲\Omega$ است، داریم:

$$R=\int_a^b\frac{dL}{\iint gds}=\int_a^b\frac{dr}{gr^۲\Omega}=\frac{۱}{g\Omega}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})$$

۱۰ـ گزینه «۲» با استفاده از شرایط مرزی، خواهیم داشت:

$$\rho_S=(\vec{D}_۱-\vec{D}_۲).\hat{a}_n=(\varepsilon_۱\vec{E}_۱-\varepsilon_۲\vec{E}_۲).\hat{a}_z=(\frac{\varepsilon_۱}{\sigma_۱}\vec{J}_۱-\frac{\varepsilon_۲}{\sigma_۲}\vec{J}_۲).\hat{a}_z=\frac{\varepsilon_۱}{\sigma_۱}J_{۱z}-\frac{\varepsilon_۲}{\sigma_۲}J_{۲z}$$

از طرفی با توجه به اینکه مؤلفه عمودی چگالی جریان در عبور از فصل مشترک دو محیط پیوسته است، می‌توان چنین نوشت: $(J_{۱z}=J_{۲z})$

$$\rho_S=(\frac{\varepsilon_۱}{\sigma_۱}-\frac{\varepsilon_۲}{\sigma_۲})J_{۱z}=(\frac{\varepsilon_۱}{\sigma_۱}-\frac{۲\varepsilon_۱}{۳\sigma_۱})۶J_۰=\frac{۲\varepsilon_۱J_۰}{\sigma_۱}$$

۱۱ـ گزینه «۴» با استفاده از قانون اهم پتانسیل دو سر مقاومت را به دست می‌آوریم:

$$V=RI=\frac{L}{\sigma A}.I=\frac{۲\times۱۰^{-۲}}{۱\times۲\times۱۰^{-۴}}\times۱۰\times۱۰^{-۲}=۱۰$$

حال با رابطه $E=\frac{V}{d}$ می‌توانیم میدان‌الکتریکی را به دست آوریم:

$$E=\frac{V}{d}=\frac{۱۰}{۲\times۱۰^{-۲}}=۵\frac{kv}{m}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ گزینه «۴»

روش اول: هرگاه a و b با هم برابر باشند انتظار داریم که مقاومت بین دو سطح جانبی استوانه برابر صفر گردد که فقط گزینه ۴ این ویژگی را دارد.

روش دوم: با استفاده از رابطه انتگرالی که برای مقاومت در متن درس معرفی کردیم داریم:

$$R=\int_a^b \frac{\rho_\circ dv}{\int_\circ^{\ell}\int_\circ^{2\pi} rd\varphi dz}=\int_a^b \frac{\rho_\circ dr}{2\pi\ell r}=\frac{\rho_\circ}{2\pi l}\ln\frac{b}{a}$$

۱۳ـ گزینه «۴» همان‌طور که در فصل خازن بیان کردیم ظرفیت الکتریکی بین دو کره به صورت زیر می‌باشد:

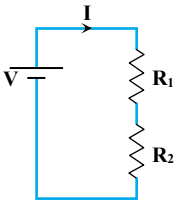
$$C=\frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{2}{d}}=\frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{2}{a}-\frac{2}{d}}=\frac{(2\pi\varepsilon_\circ)ad}{d-a}$$

حال با استفاده از رابطه بین ظرفیت و مقاومت الکتریکی یک دی‌الکتریک می‌توانیم مقاومت بین دو کره را به دست آوریم:

$$RC=\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma}\Rightarrow R=\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma}\times\frac{1}{C}=\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma}\times\frac{d-a}{(2\pi\varepsilon_\circ)ad}=\frac{d-a}{2\pi\sigma ad}$$

تذکر: گزینه ۱ به وضوح نادرست است زیرا مقاومت با رسانندگی نسبت عکس دارد.

۱۴ـ گزینه «۳» دو دی‌الکتریک همانند دو خازن سری عمل می‌کنند که مقدار مقاومت آن‌ها برابر است با:



$$R_1=\frac{d_1}{\sigma_1 S}\quad,\quad R_2=\frac{d_2}{\sigma_2 S}$$

با توجه به این که دو خازن سری هستند مقاومت معادل آن‌ها برابر با $R=R_1+R_2$ می‌باشد.

با استفاده از قانون اهم مقدار جریان الکتریکی (I) به صورت زیر در می‌آید:

$$I=\frac{V}{R}=\frac{V}{R_1+R_2}=\frac{V}{\frac{d_1}{\sigma_1 s}+\frac{d_2}{\sigma_2 s}}=\frac{\sigma_1\sigma_2 SV}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

با استفاده از تعریف $J=\frac{I}{S}$ چگالی جریان بین دو صفحه به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$J=\frac{\sigma_1\sigma_2 V}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

۱۵ـ گزینه «۳» مسأله به صورت یک سری مقاومت سری می‌باشد که با استفاده از رابطه انتگرالی برای مقاومت‌های سری داریم:

$$R=\int_a^b \frac{dr}{\int_\circ^1\int_\circ^{2\pi}\sigma r d\varphi dz}=\frac{1}{2\pi\sigma_\circ}\int_a^b\frac{(1+\frac{a}{r})}{r}dr=\frac{1}{2\pi\sigma_\circ}[\ln\frac{b}{a}+\frac{b-a}{b}]$$

۱۶ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ داریم:

$$\vec{J}=\frac{I_\circ}{4\pi R^2}\hat{a}_R\qquad \vec{E}_2=\frac{I_\circ}{4\pi\sigma_2 R^2}\hat{a}_R$$

حال می‌توانیم با استفاده از رابطه $\vec{D}=\varepsilon_2\vec{E}$ مقدار $\vec{D}$ را به دست آوریم:

$$\vec{D}_2=\varepsilon_2\vec{E}_2\Rightarrow \vec{D}_2\Big|_{r=b}=\frac{\varepsilon_2 I_\circ}{4\pi\sigma_2 b^2}\hat{a}_R$$

۱۷ـ گزینه «۳» چون ناحیه $r<a$ رسانای کامل می‌باشد مقاومت آن صفر است. بنابراین برای به دست آوردن مقاومت محیط مورد نظر کافی است مقاومت ناحیه $r>a$ را به دست آوریم.

$$R=\int\frac{dr}{\iint\sigma ds}=\int_a^\infty\frac{dr}{\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{6}}\sigma r^2\sin\theta d\theta d\varphi}\Rightarrow R=\int_a^\infty\frac{dr}{2\pi\sigma r^2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{1}{4\pi(2-\sqrt{3})}\int_a^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{1}{4\pi a(2-\sqrt{3})}$$

حال می‌توانیم با استفاده از قانون آمپر، جریان را به دست آوریم:

$$I=\frac{V}{R}=\frac{1}{R}=4\pi(2-\sqrt{3})a$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۸ـ گزینه «۱» ابتدا مقاومت بین دو پوسته را به دست می‌آوریم، سپس با استفاده از قانون آمپر جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$R=\int\frac{d\rho}{\iint\frac{g}{\rho}\rho d\varphi dz}=\int_a^b\frac{d\rho}{\int_0^1\int_0^{2\pi}gd\varphi dz}=\frac{b-a}{g_0 2\pi}$$

$$I=\frac{V_0}{R}=\frac{2\pi g_0 V_0}{b-a}$$

۱۹ـ گزینه «۱» معادله پیوستگی بار برابر است با:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

با ترکیب معادله‌ی پیوستگی و معادله‌ی اول ماکسول خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma\vec{\nabla}.\vec{E}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\\&\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\sigma\rho}{\varepsilon}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\rho(r,t)=\rho_0(r)e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}}\Rightarrow t_c=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

ثابت زمانی t_c، معیاری است از سرعت نزدیک شدن محیط رسانا به حالت تعادل الکترواستاتیکی.

۲۰ـ گزینه «۲» چون چگالی تعداد الکترون‌ها، n_e، در همه جای استوانه ثابت و یکنواخت می‌باشد و همچنین سرعت حرکت الکترون $V_e\hat{k}$ یکسان و ثابت است لذا داریم:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}.\vec{J}=0\qquad\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\vec{\nabla}.\vec{J}=0$$

پس به نوعی می‌توان چگالی بار $-n_e$ را در درون استوانه ثابت و ساکن در نظر گرفت پس می‌توانیم برای محاسبه میدان $\vec{E}$ از قانون گاوس استفاده کنیم:
L: طول استوانه است

$$\oint\vec{E}.\hat{n}da=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad,\quad Q=\int_v\rho dV\Rightarrow E.2\pi rL=-\frac{n_e e}{\varepsilon_0}\pi r^2L\Rightarrow\vec{E}=-\frac{n_e e}{2\varepsilon_0}\vec{r}$$

.

و می‌دانیم که رابطه $\vec{B}$ برای ذرات باردار متحرک با $\vec{E}$ به صورت روبرو می‌باشد:

$$\vec{B}=\frac{\vec{V}}{c}\times\frac{\vec{E}}{c}$$

۲۱ـ گزینه «۳» با استفاده از معادله پیوستگی بار می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=\frac{-\partial\rho}{\partial t}=\frac{\omega\sin\omega t}{r^2}$$

چون J تابعی از θ و φ نمی‌باشد بنابراین دیورژانس آن به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2J)=\frac{\omega\sin\omega t}{r^2}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}(r^2J)=\omega\sin\omega t$$

$$r^2J=r\omega(\sin\omega t)+c_1\Rightarrow\vec{J}=(\frac{\omega\sin\omega t}{r}+\frac{c_1}{r^2})\hat{a}_r$$

۲۲ـ گزینه «۳» بار ذخیره شده در کره در حالت اول به صورت روبرو می‌باشد:

$$Q_1=4\pi\varepsilon_0 R V_0=-80\pi\varepsilon_0$$

در حالت دوم بار کره برابر است با:

$$Q_2=0$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q_2(\infty)-Q_1(\bar{\circ})=\int_{\bar{\circ}}^{\infty}i(t)dt\Rightarrow 0-(-80\pi\varepsilon_0)=\int_{\bar{\circ}}^{\infty}i(t')dt'=80\pi\varepsilon_0$$

۲۳ـ گزینه «۳» با استفاده از رابطه $R=\frac{L}{\sigma A}$ خواهیم داشت:

$$L=d\quad,\quad A=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)$$

بنابراین مقاومت میله خواسته شده برابر است با:

$$R=\frac{d}{\sigma\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)}=\frac{4d}{\sigma\pi(b^2-a^2)}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۴ـ گزینه «۲» از رابطه $RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}=\rho\varepsilon$ خواهیم داشت:

$$C=\frac{\rho\varepsilon}{R}=\frac{۵\times۱۰^{-۶}\times۱۰۰\times۱۰^{-۱۲}}{۵\times۱۰^{-۴}}=۱\times۱۰^{-۱۲}\,F=۱PF$$

۲۵ـ گزینه «۳» سطح مقطع رسانا را می‌توان به صورت مقابل در نظر گرفت:

$$S=k_۱x+k_۲$$

بنابراین با توجه به اینکه $x=۰$ سطح مقطع برابر A است و در $x=l$ این سطح به $۳A$ می‌رسد، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} x=۰\Rightarrow S=A\Rightarrow K_۲=A \\ x=l\Rightarrow S=۳A\Rightarrow K_۱=\frac{۲A}{l}\end{array}\right\}\Rightarrow S=\frac{۲A}{l}x+A$$

لذا با توجه به رابطه‌ی دیفرانسیلی مقاومت و ثابت ماندن σ در طول l با انتگرال‌گیری داریم:

$$dR=\frac{dx}{\sigma S}=\frac{dx}{\sigma[\frac{۲A}{l}x+A]}\quad;\quad R=\int_۰^l dR=\frac{۱}{\sigma}\int_۰^l\frac{ds}{\frac{۲A}{l}x+A}=\frac{l}{۲A\sigma}\ln۳$$

۲۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

با ترکیب قانون اهم $R=\frac{\Delta V}{I}$ و رابطه فیزیکی مقاومت به صورت $R=\frac{\ell}{\sigma A}$ می‌توان رسانندگی را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\ell}{\sigma A}=R=\frac{\Delta V}{I}\Rightarrow\sigma=\frac{I\ell}{(\Delta V)A}=\frac{۲/۵\times۱۰^{۵}\times۳۰۰}{۱/۵}=۵\times۱۰^{۷}\,(\frac{s}{m})$$

۲۷ـ گزینه «۴» با توجه به رابطه ثابت زمانی داریم:

$$\tau=RC=\frac{\rho}{\sigma}\Rightarrow R=\frac{\varepsilon}{\sigma C}$$

۲۸ـ گزینه «۳» رسانایی ویژه ماده را می‌توان به صورت رابطه خطی روبرو نوشت:

$$\sigma=\frac{\sigma_۲-\sigma_۱}{d}z+\sigma_۱$$

با استفاده از رابطه انتگرالی برای مقاومت‌های سری داریم:

$$R=\int_۰^d\frac{dz}{\sigma S}=\frac{۱}{S}\int_۰^d\frac{dz}{\frac{\sigma_۲-\sigma_۱}{d}z+\sigma_۱}=\frac{d}{S(\sigma_۲-\sigma_۱)}\ln\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}$$

۲۹ـ گزینه «۱» ابتدا میدان الکتریکی در این محیط را با استفاده از رابطه مقابل به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{J}=g\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\vec{J}}{g}=\frac{e^{-z}}{۱+y}\hat{a}_y$$

حال می‌توانیم با استفاده از رابطه سوم معادلات ماکسول چگالی بار الکتریکی در محیط را محاسبه کنیم:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho\Rightarrow\vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E})=\rho\Rightarrow\rho=\vec{\nabla}.(\varepsilon_۰(۱+y)\frac{e^{-z}}{۱+y}\hat{a}_y)=\vec{\nabla}.(\varepsilon_۰e^{-z}\hat{a}_y)=۰$$

۳۰ـ گزینه «۱» با توجه به فرمول ساختاری مقاومت الکتریکی می‌توان چنین نوشت:

$$R=\int_۰^h\frac{dz}{\int_۰^a\int_۰^{۲\pi}k(۱+\frac{z}{h})(۱+\frac{r}{a})rd\varphi dr}\quad;\quad R=\int_۰^h\frac{۶h\,dz}{۱۰\pi ka^۲(z+h)}=\frac{۳\ln۲}{۵\pi}\frac{h}{ka^۲}$$

۳۱ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که چگالی جریان داده شده است ابتدا میدان الکتریکی را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\frac{e^{-z}}{۱+y}\hat{a}_y$$

حال با استفاده از رابطه زیر چگالی بار الکتریکی را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho\Rightarrow\vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E})=\rho\Rightarrow\vec{\nabla}.(\varepsilon_۰e^{-z}\hat{a}_y)=\rho\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_۰e^{-z})=\rho\Rightarrow\rho=۰$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۲ـ گزینه «۱» با استفاده از تعریف چگالی جریان داریم:

$$J = NeV$$

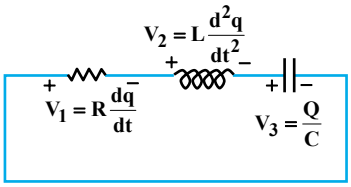
در این فرمول V سرعت الکترون و J چگالی جریان می‌باشد.

بنابراین سرعت سوق برابر است با:

$$\frac{I}{\pi r^2} = NeV \Rightarrow \frac{100}{\pi \times (0/01)^2} = 10^{20} \times 1/6^{-19} \times V \Rightarrow V = 2 \times 10^{-4} \frac{m}{s}$$

۳۳ـ گزینه «۱» طبق قضیه انتقال بیشترین توان، وقتی بیشترین توان به مقاومت ظاهری انتقال می‌یابد که برابر مزدوج مقاومت داخلی مولد باشد.

۳۴ـ گزینه «۱» ابتدا معادله دیفرانسیل مربوط به بار الکتریکی را می‌نویسیم:



$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$12 \times 10^{-3}\frac{d^2q}{dt^2} + 1/5\frac{dq}{dt} + \frac{10^6}{1/6}q = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل بالا برابر است با:

$$\frac{-1/5 \pm \sqrt{2/25 - 4 \times \frac{12}{1/6} \times 10^3}}{2 \times 12 \times 10^{-3}} = -62/5 \pm i\lambda$$

خوشبختانه نیازی به محاسبه‌ی دقیق λ نداریم.

ضریب میرایی برابر $62/5$ می‌باشد بنابراین می‌توان نوشت:

$$q = q_0 e^{-62/5t}\cos\lambda t$$

اگر بخواهیم دامنه نوسان بار الکتریکی به 50% مقدار اولیه خود برسد داریم:

$$\frac{1}{2}q_0 = q_0 e^{-62/5t} \Rightarrow t = 0/011s$$

۳۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم که در یک جسم تغییر چگالی بار الکتریکی به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

چون جسم کروی است بنابراین تغییرات چگالی در جهت شعاعی بوده و بارها به سمت پوسته کره حرکت می‌کنند. بنابراین در کره میدان الکتریکی در جهت شعاعی ایجاد می‌شود:

$$\vec{E} = E_r\hat{a}_r \Rightarrow \vec{D} = D_r\hat{a}_r$$

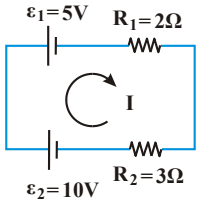
با استفاده از قانون گاوس داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

با حل معادله بالا خواهیم داشت:

$$D_r = \frac{\rho_0 r}{3}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\hat{a}_r = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

۳۶ـ گزینه «۲» ابتدا جریان الکتریکی درون حلقه را پیدا می‌کنیم.



با استفاده از قانون کیرشهف داریم:

$$10(V) - 5(V) - 2I - 3I = 0 \rightarrow I = 1(A)$$

پس پتانسیل الکتریکی معادل برابر است با:

$$5(V) + 2(\Omega) \times 1(A) = 7(v)$$

اما مقاومت معادل، حاصل مقاومت موازی R_1 و R_2 است:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6}{5} = 1/2\ \Omega$$

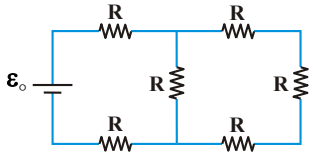
۳۷ـ گزینه «۱» تا قبل از اتصال کلید به b، خازن ولتاژ V را می‌گیرد (جریانی از مدار عبور نمی‌کند). بعد از اتصال تا مدت زمان زیاد، دوباره جریان قطع خواهد شد، چرا که خازن اجازه این کار را نمی‌دهد. پس در زمان ∞، جریان صفر است. اما زمان گذار R_2C است. پس داریم:

$$I = \frac{V}{R_2}e^{-\frac{t}{R_2C}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

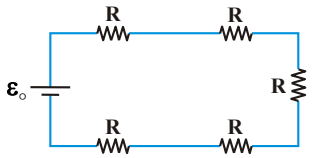
۳۸ـ گزینه «۴» در لحظه‌ی $t=0$، خازن اتصال کوتاه است، پس مدار مطابق شکل است، پس می‌توان نوشت:



$$P(0)=\varepsilon_0 I \quad \text{که} \quad I=\frac{\varepsilon_0}{3R\,||\,R+2R}=\frac{4}{11}\frac{\varepsilon_0}{R}$$

$$\Rightarrow P(0)=\frac{4}{11}\frac{\varepsilon_0^2}{R}$$

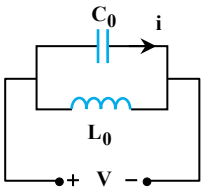
در $t=\infty$، خازن اتصال باز است:



$$P(\infty)=\varepsilon_0\frac{\varepsilon_0}{5R}=\frac{1}{5}\frac{\varepsilon_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{P(\infty)}{P(0)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{11}}=\frac{11}{20}$$

۳۹ـ گزینه «۲» ابتدا خازن با ولتاژ ε_0 پر می‌شود. پس $V_{C_0}(t=0)=\varepsilon_0$. اما پس از اتصال به سلف داریم:



از روابط ولتاژ و جریان خازن و سلف معادلات زیر برقرار است.

$$C_0\frac{dV}{dt}=i \qquad L_0\frac{di}{dt}=V \Rightarrow L_0C_0\frac{d^2V}{dt^2}=V$$

با حل معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$V=A\sin(\omega_0 t+\alpha) \quad \text{در} \quad t=0 \quad V(0)=A\sin\alpha=\varepsilon_0 \quad (1)$$

که $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$ است.

اما در $t=0$ جریان الکتریکی صفر است.

$$i=\frac{dV}{dt}C_0=A\omega_0C_0\cos(\omega_0 t+\alpha)$$

و از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$i(0)=A\omega_0C_0\cos(\alpha)=0\rightarrow\alpha=90^\circ\rightarrow A=\varepsilon_0$$

حالا جریان الکتریکی را با داشتن A و α به دست می‌آوریم:

$$i\left(t=\frac{\pi}{2}\sqrt{L_0C_0}\right)=C_0A\omega_0\cos\left(\omega_0\frac{\pi}{2}\sqrt{L_0C_0}+90\right)=\varepsilon\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$$

۴۰ـ گزینه «۴» بردار پوئینتینگ در راستای جهت انتشار است و اندازه آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{\mu_0}\frac{n}{c}E^2$$

چگالی انرژی نیز برابر است با:

$$u=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)^2E^2$$

با ترکیب دو رابطه u و S خواهیم داشت:

$$S=\frac{c}{n}u$$

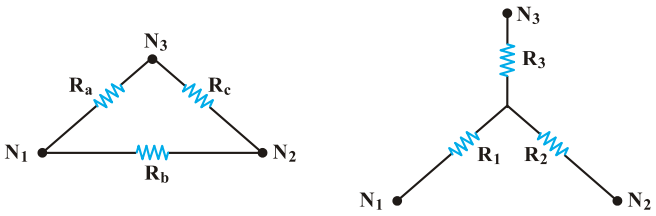
اگر سرعت فاز موج تخت را به صورت برداری در جهت انتشار با بزرگی V_p به صورت $V_p=\frac{c}{n}$ تعریف کنیم به‌دست خواهد آمد: $\vec{S}=u\vec{v}_p$

گزینه ۳ اشتباه است زیرا باید به صورت $\vec{J}=\rho\vec{V}$ تعریف شود که در آن $\vec{V}$ سرعت بارهای الکتریکی است و با سرعت انتشار امواج تفاوت دارد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۱ـ گزینه «۲» از تبدیل ستاره مثلث داریم:



$\Delta \to Y$

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \ , \ R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \ , \ R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$Y \to \Delta$

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1} \ , \ R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \ , \ R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

در این مسئله Y داده شده و Δ خواسته شده. پس داریم:

$$R_a = \frac{۲۰\times۱۰+۲۰\times۵۰+۵۰\times۱۰}{۱۰} = ۱۷۰\Omega \quad و \quad R_b = \frac{۱۷۰۰}{۲۰} = ۸۵\Omega \quad و \quad R_c = \frac{۱۷۰۰}{۵۰} = ۳۴\Omega$$

۴۲ـ گزینه «۴» انرژی الکتریکی $U_e = IV = ۰/۴۵w$ چرا که $۱/۵v \times ۰/۳A = ۰/۴۵w$ است. اما انرژی الکترومغناطیس دریافت شده برابر است با:

$$V_{em} = ۱۵cm^۲ \times ۱/۲\times۱۰^۳ \frac{w}{m^۲} = ۱۵\times۱۰^{-۴}\ m^۲ \times ۱/۲\times۱۰^۳ \frac{w}{m^۲} = ۱/۸w$$

پس بازده برابر است با:

$$\frac{۰/۴۵}{۱/۸}\times۱۰۰ = ۲۵\%$$

www.modaresanesharif.ac.ir

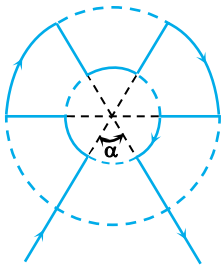
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل نهم

«میدان مغناطیسی ساکن»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل نهم

۱ـ با توجه به شکل زیر چنانچه سیم حامل جریان I باشد و شعاع‌های دایره‌های داخلی و خارجی به ترتیب $1m$ و $2m$ باشند، چگالی شار مغناطیسی B در مرکز O با کدام گزینه برابر است؟ $(\alpha = 45^\circ)$ (برق ـ سراسری ۸۱)



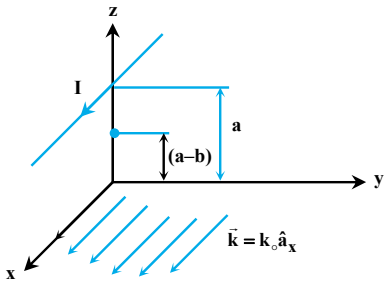
۱) $\frac{11\mu_\circ I}{32}$ و به سمت خارج صفحه

۲) $\frac{11\pi\mu_\circ I}{16}$ و به سمت خارج صفحه

۳) $\frac{11\mu_\circ I}{32}$ و به سمت داخل صفحه

۴) $\frac{11\pi\mu_\circ I}{36}$ و به سمت داخل صفحه

۲ـ جریان سطحی با چگالی $\vec{k} = k_\circ \hat{a}_x$ در صفحهٔ xy جاری است. یک سیم رسانای مستقیم حامل جریان I در جهت x در ارتفاع a بالای این جریان سطحی قرار دارد. جریان سیم I چقدر باید باشد تا میدان مغناطیسی B در نقطه P به فاصله $(a-b)$ روی محور z صفر شود؟ (برق ـ سراسری ۸۱)



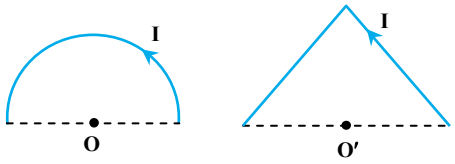
۱) $\pi k_\circ$

۲) $\pi b k_\circ$

۳) $\frac{1}{2}\pi b k_\circ$

۴) $2\pi(a-b)k_\circ$

۳ـ قطعه سیم نازکی به طول ℓ با جریان I را یکبار به صورت نیم‌دایره و یکبار به صورت نصف مربع مطابق شکل در صفحهٔ کاغذ فرض می‌کنیم. شدت میدان مغناطیسی در نقطه O ..... (برق ـ سراسری ۸۲)



۱) با شدت میدان مغناطیسی در نقطه O' قابل مقایسه نیست.

۲) با شدت میدان مغناطیسی در نقطه O' مساوی است.

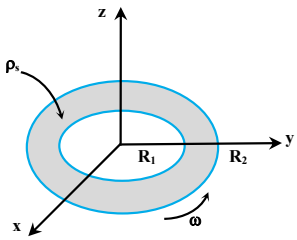
۳) بزرگتر از شدت آن در نقطه O' است.

۴) کوچکتر از شدت آن در نقطه O' است.

۴ـ جریان سطحی $\vec{k} = k_\circ \hat{a}_y (\frac{A}{m})$ روی صفحهٔ xoy برقرار است و $k_\circ$ ثابت است. شار مغناطیسی عبوری از مستطیلی که مختصات گوشه‌های آن $(\circ,1,1)$ و $(1,\circ,1)$ و $(\circ,1,\circ)$ و $(1,\circ,\circ)$ می‌باشد با کدام گزینه برابر است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\mu_\circ k_\circ$ ۲) $\frac{\mu_\circ k_\circ}{2}$ ۳) $\mu_\circ k_\circ \sqrt{2}$ ۴) $\frac{\mu_\circ k_\circ \sqrt{2}}{2}$

۵ـ در فضای خالی یک طوق دایره‌ای به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 در صفحه xy با مرکز منطبق بر مبدأ مطابق شکل بار سطحی ثابت ρ_s دارد و با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z در جهت $\hat{\varphi}$ دوران می‌کند. میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در مبدأ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)



۱) $\rho_s \omega \pi R_2^2 \hat{a}_z$

۲) $\rho_s \omega \pi R_1^2 \hat{a}_z$

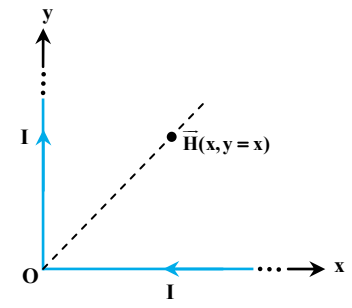
۳) $\frac{\rho_s \omega}{2}\pi(R_2^2 + R_1^2)\hat{a}_z$

۴) $\frac{1}{2}\rho_s \omega (R_2 - R_1)\hat{a}_z$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ یک سیم مطابق شکل بر محور $x>0$ و $y>0$ منطبق است و جریان مستقیم I حمل می‌کند. شدت میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در یک نقطه روی خط $x=y$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۵)



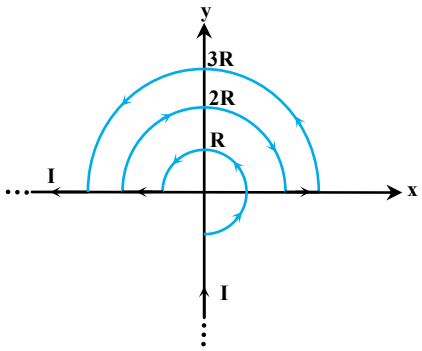
۱) $\vec{H}=\frac{-I}{4\pi x}\sqrt{2}\hat{a}_z$

۲) $\vec{H}=\frac{-I}{2\pi\sqrt{2}x}(2-\sqrt{2})\hat{a}_z$

۳) $\vec{H}=\frac{-I}{4\pi\sqrt{2}x}(2-\sqrt{2})\hat{a}_z$

۴) $\vec{H}=\frac{-I}{4\pi x}(2+\sqrt{2})\hat{a}_z$

۷ـ سیمی حامل جریان $I=3A$ به صورت زیر در نظر بگیرید. چنانچه $R=10cm$ باشد، چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ در مبدأ برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۵)



۱) $3\mu_0\hat{a}_z$

۲) $10\mu_0\hat{a}_z$

۳) $20\mu_0\hat{a}_z$

۴) $30\mu_0\hat{a}_z$

۸ـ در ناحیهٔ $-a<z<a$ از فضای خالی چگالی جریان حجمی یکنواخت $\vec{J}=J_0\hat{a}_x(\frac{A}{m^2})$ برقرار است. میدان $\vec{H}$ در نقطه $(0,0,2a)$ عبارت است از: (برق ـ سراسری ۸۵)

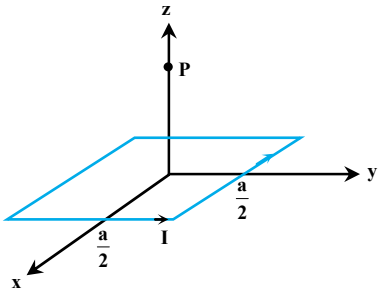
۱) $-2J_0a\hat{a}_y$

۲) $+J_0a\hat{a}_y$

۳) $-J_0a\hat{a}_y$

۴) $+2J_0a\hat{a}_y$

۹ـ در فضای خالی، قاب مربعی به ضلع a مطابق شکل حامل جریان I است. $\vec{H}$ شدت میدان مغناطیسی در نقطه $P(0,0,a)$ روی محور قاب چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۶)



۱) $\vec{H}=\frac{I}{4a}\hat{a}_z$

۲) $\vec{H}=\frac{I}{2\pi a}\hat{a}_z$

۳) $\vec{H}=\frac{2\sqrt{6}I}{15\pi a}\hat{a}_z$

۴) $\vec{H}=\frac{2I}{a\sqrt{2}}\hat{a}_z$

۱۰ـ پوسته‌ی استوانه‌ی بسیار طویلی به شعاع R که محور آن همان محور z است، دارای چگالی بار سطحی σ می‌باشد. این پوسته با سرعت زاویه‌ای ω به صورت پادساعتگرد حول محور خود در حال دوران است. میدان مغناطیسی درون پوسته، در دستگاه مختصات استوانه‌ای کدام است؟ (ρ فاصله‌ی یک نقطه در داخل استوانه تا محور z است). (فیزیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\mu_0\sigma\omega R\hat{k}$

۲) $\mu_0\sigma\omega R\hat{k}$

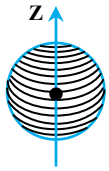
۳) $\mu_0\sigma\omega R\ln(\frac{\rho}{R})\hat{k}$

۴) $-\mu_0\sigma\omega R\ln(\frac{\rho}{R})\hat{k}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ سیم نازکی N دور به صورت دایره‌هایی نزدیک به هم بر روی سطح کره چوبی به شعاع a پیچیده شده است (N عدد بسیار بزرگی است). صفحات دایره‌ها بر محور z عموداند و سطح کره را یک بار کاملاً می‌پوشانند. اگر جریان I در این سیم وجود داشته باشد، میدان مغناطیسی در مرکز کره کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)



۱) $\frac{\mu_\circ IN}{۴a}$
۲) $\frac{۵\mu_\circ IN}{۲a}$
۳) $\frac{۳\mu_\circ IN}{۲a}$
۴) $\frac{\mu_\circ IN}{۲a}$

۱۲ـ تعداد زیادی فیلامان جریانی به طول بی‌نهایت در صفحه $x=\circ$ در نقاط $n=\circ,\pm۱,\pm۲,...$ و $y=n$ واقع شده‌اند. از هریک از فیلامان‌ها، جریان $۱A$ در جهت $\bar{a}_z$ عبور می‌کند. مطلوب است محاسبه $|\vec{H}|$ را در $(x,\circ,\circ)$.

۱) $|\vec{H}|=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{e^{۲x}-۱}$
۲) $|\vec{H}|=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{e^{۲\pi x}+۱}$
۳) $|\vec{H}|=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{e^{۲x}+۱}$
۴) $|\vec{H}|=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{e^{۲\pi x}-۱}$

۱۳ـ یک کابل هم‌محور دارای شعاع هادی داخلی a و شعاع‌های هادی خارجی b و $(c>b)c$ می‌باشد. هر دو هادی دارای مقاومت R اهم در طول ℓ می‌باشد. اگر نسبت H_φ در $r=b$ به H_φ در $r=a$ برابر با $۰/۵$ باشد، c را برحسب a تعیین نمائید.

۱) $\sqrt{۵}\,a$
۲) $c=\sqrt{۳}a$
۳) $c=۲a$
۴) $c=۴a$

۱۴ـ جریان ثابت $J_s\hat{a}_\phi \frac{A}{m}$ در سطح پوسته کره‌ای به شعاع R جاری است. شدت میدان مغناطیسی در مرکز کره را به‌دست آورید.

۱) $\bar{H}=\frac{\pi J_s}{۴}\hat{a}_\theta$
۲) $\bar{H}=\frac{\pi J_s}{۲}\hat{a}_\theta$
۳) $\bar{H}=\frac{\pi J_s}{۴}\hat{a}_z$
۴) $\bar{H}=\frac{\pi J_s}{۲}\hat{a}_z$

۱۵ـ از پوسته استوانه‌ای هادی کابلی به شعاع سطح مقطع a و طول L، جریان سطحی $J_s\hat{a}_\phi \frac{A}{m}$ عبور می‌کند. محور استوانه در امتداد محور zها و به طور مشابه از $-\frac{L}{۲}$ تا $\frac{L}{۲}$ در جهت z قرار گرفته است. شدت میدان مغناطیسی را روی محور zها و در $z=\circ$ به‌دست آورید.

۱) $H_z=\frac{J_sL}{۲\sqrt{L^۲+۴a^۲}}$
۲) $H_z=\frac{J_sL}{\sqrt{a^۲+۴L^۲}}$
۳) $H_z=\frac{J_sL}{۲\sqrt{a^۲+۴L^۲}}$
۴) $H_z=\frac{J_sL}{\sqrt{L^۲+۴a^۲}}$

۱۶ـ دو حلقه رسانای هم‌مرکز به شکل دایره به شعاع‌های R و $۲R$ با جریان‌های هم‌جهت $I_۱$ و $I_۲$ در بین صفحه $z=\circ$ مفروضند. اگر هر حلقه در مرکز خود میدان مغناطیسی یکسان تولید کند، رابطه بین $I_۱$ و $I_۲$ کدام است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $I_۱=I_۲$
۲) $I_۱=\frac{۱}{۲}I_۲$
۳) $I_۱=۲I_۲$
۴) $I_۱=\sqrt{۲}I_۲$

۱۷ـ جریان I در داخل یک حلقه به شعاع b یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند. در یک نقطه ثابت و در فاصله خیلی دور از حلقه، میدان مغناطیسی متناسب با کدام ترکیب I و b می‌باشد؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

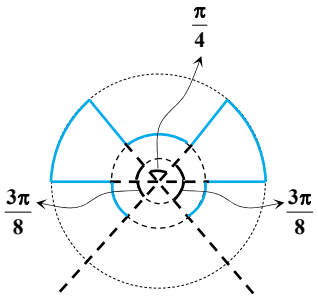
۱) Ib
۲) $Ib^۲$
۳) $\frac{I}{b}$
۴) $\frac{I}{b^۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل نهم

۱ـ گزینه «۳» چگالی شار مغناطیسی ناشی از قطعه‌ای از دایره به شعاع a که از مرکز تحت زاویه β دیده می‌شود و حامل جریان I است به صورت $B=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi a}\beta$ می‌باشد. با توجه به مقدار α که داده شده است، مقدار زاویه قطعه‌های دایره برابر است با:



$$\frac{\pi-\alpha}{۲}=\frac{۳\pi}{۸}\,i$$

لذا خواهیم داشت:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\left[\frac{۲\times\frac{۳\pi}{۸}}{۱}+\frac{۲\times\frac{۳\pi}{۸}}{۲}+\frac{\frac{\pi}{۴}}{۱}\right]=\frac{۱۱\mu_\circ I}{۳۲}$$

(جهت $\vec{B}$ نیز طبق قانون دست راست به طرف داخل صفحه می‌باشد.)

۲ـ گزینه «۲» چگالی شار مغناطیسی ناشی از جریان سطحی در نقطه P از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{B}_۱=\frac{\mu_\circ}{۲}\vec{k}\times\hat{n}=\frac{\mu_\circ}{۲}(k_\circ\hat{x})\times\hat{z}=-\frac{\mu_\circ}{۲}k_\circ\hat{y}$$

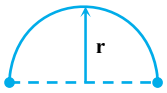
چگالی شار مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان در نقطه P را نیز از رابطه مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{B}_۲=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi(b)}\hat{y}$$

بنابراین برای صفر شدن $\vec{B}$ در نقطه P لازم است که:

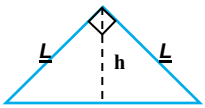
$$\frac{\mu_\circ I}{۲\pi b}=\frac{\mu_\circ k_\circ}{۲}\Rightarrow I=\pi b k_\circ$$

۳ـ گزینه «۴» شدت میدان در شکلی بزرگتر است که مؤلفه عمودی بزرگتری داشته باشد.



$$\pi r=L$$

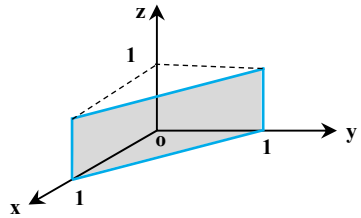
$$r=\frac{L}{\pi}\quad\text{(تصویر عمودی)}$$



$$h=\frac{L}{۲}\sin ۴۵=\frac{L}{۲}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{L}{۲\sqrt{۲}}\quad\text{(تصویر عمودی)}$$

از آن جا که $\frac{L}{\pi}<\frac{L}{۲\sqrt{۲}}$ بنابراین گسترش عمودی شکل مربعی بزرگتر از شکل دایره‌ای بوده و لذا گزینه ۴ صحیح است.

۴ـ گزینه «۲» چگالی شار مغناطیسی ناشی از جریان سطحی $\vec{k}$ برابر است با:



$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{۲}\vec{k}\times\hat{n}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}\mu_\circ k_\circ\hat{x} & z>\circ\\ \frac{-۱}{۲}\mu_\circ k_\circ\hat{x} & z<\circ\end{cases}$$

شار گذرنده از مستطیل موردنظر برابر است با:

$$\psi=\iint\vec{B}.d\vec{s}=\iint(\tfrac{۱}{۲}k_\circ\mu_\circ\hat{x}).(ds_x\hat{x}+ds_y\hat{y})=\tfrac{۱}{۲}k_\circ\mu_\circ\iint ds_x=\tfrac{۱}{۲}k_\circ s_x=\tfrac{۱}{۲}k_\circ\mu_\circ$$

(S_x، تصویر صفحه مستطیل شکل موردنظر روی صفحه yoz می‌باشد)

۵ـ گزینه «۴»

روش اول: هرگاه $R_۱=R_۲$ باشد، انتظار می‌رود که به علت ناچیز شدن جریان الکتریکی میدان مغناطیسی تولیدی نیز صفر گردد که فقط گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم: با توجه به سرعت زاویه‌ای داده شده سرعت یک نقطه بر روی حلقه برابر است با:

$$\vec{V}=r'\omega\hat{a}_\varphi$$

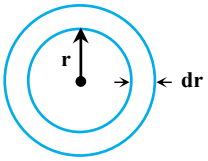
برای به دست آوردن میدان مغناطیسی $\vec{H}$ ابتدا باید مقدار جریان روی حلقه را پیدا کنیم. با استفاده از تعریف چگالی جریان که در فصل‌های پیش معرفی کردیم داریم:

$$\vec{J}=\rho_s\vec{V}=\rho_s r'\omega\hat{a}_\varphi$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

برای به دست آوردن $\vec{H}$ ابتدا یک جزء دیفرانسیل حلقه به ضخامت dr را مانند شکل زیر در نظر می‌گیریم که میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در مرکز آن همان‌طور که قبلاً به دست آوردیم برابر است با:



$$d\vec{H}=\frac{1}{\mu_\circ}d\vec{B}\Rightarrow d\vec{H}=\frac{I}{2r'}\hat{a}_z$$

با توجه به تعریف چگالی جریان $J=\frac{I}{dr'}$ مقدار جریان را به دست می‌آوریم و در رابطه بالا قرار می‌دهیم.

$$\left.\begin{matrix}I=Jdr'\\ \vec{J}=\rho_s r'\omega\hat{a}_\varphi\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\vec{H}=\frac{\rho_s r'\omega dr'}{2r'}\hat{a}_z=\frac{1}{2}\rho_s\omega dr'\hat{a}_z$$

توجه شود که $d\vec{H}$ از قانون بیوساوار به دست می‌آید:

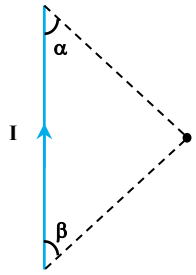
$$d\vec{L}'\times(\vec{r}-\vec{r}')\overset{\vec{r}=\circ}{=\!=}r'd\varphi\hat{a}_\varphi\times(-r')\hat{a}_r$$

پس جهت $d\vec{H}$، در راستای $\hat{a}_z$ می‌باشد.

حال با انتگرال‌گیری روی بازه $R_1<r<R_2$ از رابطه $d\vec{H}$ داریم:

$$\vec{H}=\int_{R_1}^{R_2}d\vec{H}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\rho_s\omega dr'\hat{a}_z=\frac{1}{2}\rho_s\omega(R_2-R_1)\hat{a}_z$$

۶ـ گزینه «۴» میدان مغناطیسی در اطراف یک قطعه سیم از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\vec{H}=\frac{I}{4\pi r}(\cos\alpha+\cos\beta)$$

$$\begin{cases}\vec{H}_{oy}=\frac{I}{4\pi x}(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\circ)(-\hat{a}_z)\\ \vec{H}_{ox}=\frac{I}{4\pi x}(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\circ)(-\hat{a}_z)\end{cases}$$

$$H_T=\vec{H}_{oy}+\vec{H}_{ox}=\frac{-I}{4\pi x}(2+\sqrt{2})\hat{a}_z$$

۷ـ گزینه «۲» شدت میدان مغناطیسی در امتداد سیم حامل جریان صفر است و لذا فقط میدان مغناطیسی ناشی از کمان‌های دایره‌ای را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{B}=[\frac{\mu_\circ I}{2R}\times\frac{3}{4}-\frac{\mu_\circ I}{4R}\times\frac{1}{2}+\frac{\mu_\circ I}{6R}\times\frac{1}{2}]\hat{a}_z=10\mu_\circ\hat{a}_z$$

مقدار میدان مغناطیسی در مرکز یک کمان به زاویه α از یک دایره به شعاع R برابر است با:

$$B=\frac{\mu_\circ I}{2R}\frac{\alpha}{2\pi}$$

۸ـ گزینه «۳» شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک توزیع جریان سطحی با چگالی $\vec{J}_s$ برابر $\vec{H}=\frac{1}{2}\vec{J}_s\times\hat{a}_n$ می‌باشد.

اگر حجم موردنظر را به صورت لایه‌های دیفرانسیلی به ضخامت dz در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$d\vec{H}=\frac{1}{2}J_\circ dz(-\hat{a}_y)$$

$$\vec{H}=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}J_\circ dz\hat{a}_x\times\hat{a}_z=J_\circ a(-\hat{a}_y)$$

۹ـ گزینه «۳» با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:

$$(\frac{a}{2})^2+a^2=r^2\Rightarrow r=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

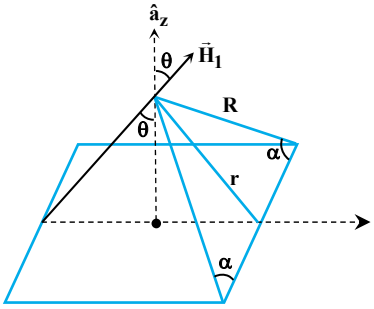
$$r^2+(\frac{a}{2})^2=R^2\Rightarrow R=\frac{\sqrt{6}}{2}a\quad,\quad\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک ضلع مربع برابر است با:

$$\vec{H}_1=\frac{I}{4\pi r}(\cos\alpha+\cos\alpha)=\frac{I}{4\pi(\frac{\sqrt{5}}{2}a)}(2\frac{\sqrt{6}}{6})$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir



مؤلفه افقی بردار $\vec{H}$ ناشی از چهار ضلع مربع به علت تقارن اثر یکدیگر را حذف می‌کنند و فقط مؤلفه عمودی در راستای $\hat{z}$ باقی می‌ماند:

$$H_{1z} = H_1 \sin\theta = H_1(\frac{\sqrt{5}}{5})$$

$$H_z = 4H_{1z} = \frac{2\sqrt{6}\,I}{15\pi a} \Rightarrow \vec{H} = \frac{2\sqrt{6}\,I}{15\pi a}\hat{a}_z$$

۱۰ـ گزینه «۲» پوسته استوانه‌ای دوار شبیه سیملوله‌ای می‌باشد که چگالی جریان سطحی آن به صورت روبرو است:

$$nI = \sigma V = \sigma R\omega$$

بنابراین داریم:

$$\vec{B} = \mu_\circ nI\hat{k} = \mu_\circ \sigma R\omega\hat{k}$$

۱۱ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال باید المان‌ها را به صورت حلقه در نظر بگیریم و روی میدان حاصل از تک‌تک آن‌ها انتگرال‌گیری کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$dB = \frac{\mu_\circ (dI)r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_\circ (dI)(a\sin\theta)^2}{2[(a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_\circ (\frac{NI}{\pi}d\theta)a^2\sin^2\theta}{2a^3}$$

$$B = \int_\circ^\pi dB = \frac{\mu_\circ NI}{2\pi a}\int_\circ^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\mu_\circ NI}{4a}$$

۱۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. به ازای $x \to \infty$ باید $H = \circ$ گردد که هیچکدام از گزینه‌ها این ویژگی را ندارد.

۱۳ـ گزینه «۱» از آنجا که مقاومت الکتریکی دو کابل با هم برابر می‌باشند، داریم:

$$R_1 = R_2 \Rightarrow \pi a^2 = \pi(c^2-b^2)$$

میدان $H\varphi$ در $r=b$ دو برابر $H\varphi$ در $r=c$ است:

$$\frac{I}{2\pi a} = 2(\frac{I}{2\pi b}) \Rightarrow b = 2a$$

بنابراین با توجه به روابط فوق خواهیم داشت:

$$c = \sqrt{5}a$$

۱۴ـ گزینه «۳» با در نظرگرفتن جزءهای دیفرانسیلی حلقه‌ای شکل از کره خواهیم داشت:

$$H = \int_\circ^\pi \frac{(J_s)(R^2\sin^2\theta)}{2R^3}(Rd\theta)\hat{a}_z = \frac{\pi J_s}{4}\hat{a}_z$$

۱۵ـ گزینه «۴» با در نظرگرفتن جزءهای دیفرانسیلی حلقه‌ای شکل از استوانه خواهیم داشت:

$$H = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{J_s a^2}{2[a^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}dz = J_s[\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}]_\circ^{\frac{L}{2}} = \frac{J_s L}{\sqrt{L^2+4a^2}}$$

هر کدام را می‌توانیم به صورت حلقه‌ی حامل جریان در نظر بگیریم و از رابطه‌ی مربوط به حلقه، مقدار میدان جزء دیفرانسیلی را به دست آوریم و سپس انتگرال بگیریم.

۱۶ـ گزینه «۲» میدان مغناطیسی در مرکز یک حلقه به شعاع R با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید، لذا با استفاده از فرض سؤال خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{I_1}{2R} \\ H_2 &= \frac{I_2}{2(2R)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_1 = H_2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}I_2$$

۱۷ـ گزینه «۲» یک حلقه جریان در فاصله خیلی دور مانند یک دوقطبی مغناطیسی عمل می‌کند که میدان مغناطیسی در فاصله دور از یک دوقطبی مغناطیسی به صورت مقابل است:

$$\vec{H} = \frac{\pi b^2 I}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r + \sin\theta\hat{a}_\theta)$$

بنابراین میدان مغناطیسی متناسب با Ib^2 می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

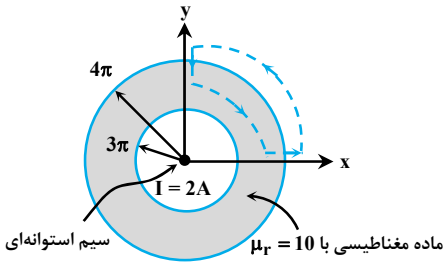
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل دهم

«قانون آمپر»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دهم

۱ـ در شکل مقابل سیم و مادهٔ مغناطیسی در امتداد محور z کشیده شده‌اند. اگر جهت جریان در سیم خارج از صفحهٔ کاغذ باشد، حاصل انتگرال $\oint \vec{B}.\vec{dl}$ روی مسیر خط‌چین چند $\frac{Wb}{m}$ است؟ (ابعاد داده شده به متر بوده و $\mu_\circ = 4\pi\times10^{-7}\frac{H}{m}$ است). (برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $-18\pi\times10^{-7}$

۲) $18\pi\times10^{-7}$

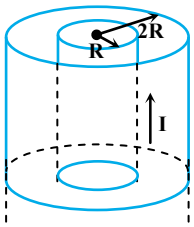
۳) $-22\pi\times10^{-7}$

۴) $22\pi\times10^{-7}$

۲ـ در منطقه‌ای یک میدان مغناطیسی به شدت $H = ar\sin\hat{a}_\varphi$ (برحسب مختصات کروی) برقرار است. شدت جریان گذرنده از سطح حلقه‌ای به شعاع واحد و واقع در صفحه xoy و هم‌مرکز با مبدأ مختصات چقدر است؟ a عدد ثابتی است. (فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{2}a$ ۳) πa ۴) $2\pi a$

۳ـ پوسته استوانه‌ای رسانای غیرمغناطیسی طویلی دارای شعاع داخلی R و شعاع بیرونی $2R$ است. جریان I از این پوسته می‌گذرد و چگالی جریان یکنواخت است. اندازه میدان مغناطیسی در فاصله $\frac{3}{2}R$ از محور استوانه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)



۱) $\frac{\mu_\circ I}{3\pi R}$ ۲) $\frac{\mu_\circ I}{4\pi R}$

۳) $\frac{5\mu_\circ I}{18\pi R}$ ۴) $\frac{5\mu_\circ I}{36\pi R}$

۴ـ از یک سیم استوانه‌ای غیرمغناطیسی به شعاع سطح مقطع $10\,cm$ و طول $100\,m$ جریان کل $10\pi A$ می‌گذرد. اگر برای $\rho < 10\,cm$ ، $\vec{H} = k\rho^2\hat{a}_\varphi$ باشد، که k یک ثابت و ρ فاصله از محور استوانه است، مقدار k چند $\frac{A}{m^3}$ است؟ (راستای محور استوانه را محور z در نظر بگیرید) (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $1/5\times10^4$ ۲) 5×10^{-2} ۳) 2×10^5 ۴) 5×10^3

۵ـ در فضای خالی روی صفحه xoy جریان سطحی یکنواخت $\vec{K} = K_\circ\hat{a}_x$ برقرار است. اندازهٔ شار مغناطیسی گذرنده از مربعی به سطح $1m^2$ در صفحهٔ xoz برابر کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\mu_\circ K_\circ}{2}$ ۲) $\mu_\circ K_\circ$ ۳) $2\mu_\circ K_\circ$ ۴) $4\mu_\circ K_\circ$

۶ـ درون یک استوانه فلزی طویل به شعاع سطح مقطع R یک حفره استوانه‌ای وجود دارد که محور آن موازی محور استوانه و به فاصله $\vec{a}$ از آن قرار دارد. اگر درون این حفره میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت برابر با $\vec{B} = C_\circ\vec{a}$ وجود داشته باشد، چه نتیجه‌گیری فیزیکی می‌توان از این امر نمود؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت خارجی به درون استوانه فلزی و حفره نفوذ کرده است.

۲) جریان الکتریکی سطحی عرضی ثابتی به دور استوانه می‌چرخد که چگالی طولی آن برابر $J_{\text{سطحی عرضی}} = \frac{C_\circ R}{2\pi\mu_\circ}$ می‌باشد.

۳) جریان الکتریکی حجمی ثابتی در امتداد محور استوانه فلزی و با چگالی $J_{\text{حجمی}} = \frac{2C_\circ}{\pi\mu_\circ}$ از آن می‌گذرد.

۴) جریان الکتریکی سطحی طولی ثابتی در امتداد محور استوانه فلزی و با چگالی $J_{\text{سطحی طولی}} = \frac{2C_\circ}{\pi\mu_\circ}$ از آن می‌گذرد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ در مختصات استوانه‌ای، $\vec{J} = J_0 \exp[-\frac{r}{a}]\hat{a}_z \frac{A}{m^2}$ داده شده است. به‌دست آورید $\vec{H}$ را در $r = \frac{a}{2}$. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\vec{H} = J_0[2a(1+\frac{1}{\sqrt{e}}) - \frac{a}{\sqrt{e}}]\hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{H} = J_0[2a(1+\frac{1}{\sqrt{e}}) + \frac{a}{\sqrt{e}}]\hat{a}_\varphi$

۳) $\vec{H} = J_0[2a(1-\frac{1}{\sqrt{e}}) + \frac{a}{\sqrt{e}}]\hat{a}_\varphi$

۴) $\vec{H} = J_0[2a(1-\frac{1}{\sqrt{e}}) - \frac{a}{\sqrt{e}}]\hat{a}_\varphi$

۸ـ استوانه هادی بطول بی‌نهایت با مقطع دایره‌ای به شعاع R و مرکز مبدأ مختصات در دست است. استوانه‌ای خارج از مرکز توخالی به شعاع $a < R$ در استوانه هادی ایجاد شده است. فاصله مرکز سطح مقطع دایره‌ای استوانه توخالی تا مبدأ مختصات $b > a$ می‌باشد. اگر جریان I از استوانه عبور نماید شدت میدان مغناطیسی را داخل استوانه توخالی به‌دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $H = \frac{Ib}{\pi(R^2 - a^2)}$

۲) $H = \frac{Ia}{2\pi(R^2 - b^2)}$

۳) $H = \frac{Ia}{\pi(R^2 - b^2)}$

۴) $H = \frac{Ib}{2\pi(R^2 - a^2)}$

۹ـ یک استوانهٔ نامحدود از جنس فروالکتریک دارای پلاریزاسیون با قطبش دائمی $\vec{P}(r) = (1-\frac{r}{a})\hat{r}$ می‌باشد که در آن a شعاع استوانه و r فاصله از محور استوانه است. این استوانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود در جهت مثلثاتی می‌چرخد. شدت میدان مغناطیسی $\vec{H}$ درون استوانه یعنی برای $0 < r < a$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $\omega(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$

۲) $\frac{\omega}{r}(1-\frac{r}{a})\hat{z}$

۳) $\omega r(1-\frac{r}{a})\hat{z}$

۴) $\omega r(1+\frac{r}{a})\hat{z}$

۱۰ـ چگالی جریان در درون یک سیم استوانه‌ای دراز توپر به شعاع a در جهت محور سیم و به طور خطی بر حسب فاصله شعاعی r از محور سیم طبق رابطه $J = J_0 \frac{r}{a}$ تغییر می‌کند. میدان مغناطیسی در درون سیم چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

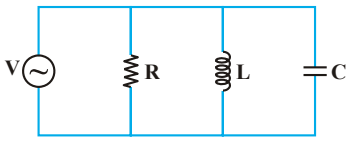
۱) $\frac{\mu_0 J_0 r^2}{2a^2}$

۲) $\frac{\mu_0 J_0 r^2}{3a}$

۳) $\frac{3\mu_0 J_0 r}{a^2}$

۴) $\frac{3\mu_0 J_0 r^2}{a}$

۱۱ـ در مدار زیر اگر $V = V_0 \cos \omega t$ باشد، اندازه‌ی مقاومت ظاهری معادل مدار، کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۵)



۱) $\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

۲) $R\sqrt{1 + R^2(\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$

۳) $\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$

۴) $\frac{R}{\sqrt{1 + R^2(\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

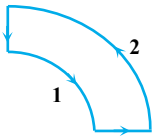
پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دهم

۱ـ گزینه «۱» با توجه به قانون مداری آمپر، شدت میدان مغناطیسی در اطراف سیم بلند عبارت است از: $\vec{H}=\frac{I}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi$

چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ در داخل و خارج ماده مغناطیسی به صورت زیر خواهد بود:

(خارج ماده مغناطیسی) $\vec{B}_۲=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi$ (داخل ماده مغناطیسی) $\vec{B}_۱=\frac{۱\circ\mu_\circ I}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi$

با تجزیه مسیر نقطه چین به مسیرهای مختلف مطابق شکل زیر خواهیم داشت:



$$\oint\vec{B}.d\vec{l}=\underbrace{\int\vec{B}.d\vec{l}}_{\text{مسیر افقی}}+\underbrace{\int\vec{B}.d\vec{l}}_{\text{مسیر عمودی}}+\underbrace{\int\vec{B}.d\vec{l}}_{\text{مسیر ۱}}+\underbrace{\int\vec{B}.d\vec{l}}_{\text{مسیر ۲}}$$

با توجه اینکه $\vec{B}$ در راستای $\hat{a}_\varphi$ می‌باشد، حاصل انتگرال فوق روی مسیرهای افقی و عمودی صفر خواهد بود. ($\vec{B}$ بر $d\vec{l}$ عمود می‌باشد.)

$$\oint\vec{B}.d\vec{l}=\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱\circ\mu_\circ I}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi.(-rd\varphi\hat{a}_\varphi)+\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi.(rd\varphi\hat{a}_\varphi)=-۱۸\pi\times۱\circ^{-۷}$$

دقت کنید که در صورت سؤال $H=ar\sin\theta\hat{a}_\phi$ می‌باشد. θ جاافتاده است.

۲ـ گزینه «۴» می‌دانیم که برای به دست آوردن جریان طبق قانون آمپر می‌بایست از میدان مغناطیسی روی مسیری بسته انتگرال بگیریم. پس داریم:

$$I=\oint\vec{H}.d\vec{l}=\oint(ar\sin\theta)\hat{a}_\varphi.(rd\varphi\hat{a}_\varphi)=\int_{\varphi=\circ}^{\varphi=۲\pi}(ar^۲\sin\theta)d\varphi$$

چون حلقه در صفحهٔ xoy واقع است، لذا $\theta=\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد. همچنین بنا به فرض مسأله $r=۱$ است، بنابراین می‌توان نوشت: $I=\int_\circ^{۲\pi}ad\varphi=۲\pi a$

۳ـ گزینه «۴» حل این مسأله با استفاده از قانون آمپر بسیار ساده‌تر خواهد بود، خواهیم داشت:

$$\oint\vec{B}.d\vec{l}=\mu_\circ I_{in}\Rightarrow B.۲\pi(\frac{۳}{۲}R)=\frac{\mu_\circ I[\pi(\frac{۳}{۲}R)^۲-\pi R^۲]}{\pi[(۲R)^۲-R^۲]}$$

$$B=\frac{۵\mu_\circ I}{۳۶\pi R}$$

۴ـ گزینه «۴» با توجه به قانون آمپر داریم: $\oint\vec{H}.d\vec{l}=I_{in}\quad;\quad\oint(k\rho^۲\hat{a}_\varphi).(\rho d\varphi\hat{a}_\varphi)=I_{in}$

که در آن از این حقیقت استفاده شده است که $d\vec{l}=d\rho\hat{a}_\rho+\rho d\varphi\hat{a}_\varphi+dz\hat{a}_z$.

$$\oint k\rho^۲d\varphi=I_{in}\Rightarrow ۲\pi k\rho^۳=I_{in}$$

به ازای $\rho=۱\circ cm$ خواهیم داشت: $۲\pi k(\circ/۱)^۳=۱\circ\pi\Rightarrow k=۵\times۱\circ^۳$

۵ـ گزینه «۱» میدان مغناطیسی ناشی از یک صفحه جریان با جریان $\vec{K}$ از رابطه $\vec{H}=\frac{۱}{۲}\vec{K}\times\hat{a}_n$ به دست می‌آید که $\hat{a}_n$ بردار عمود بر صفحه است:

$$\vec{K}=K_\circ\hat{a}_x$$

$$\vec{H}=\frac{۱}{۲}\vec{K}\times\hat{a}_n=\begin{cases}\frac{۱}{۲}K_\circ\hat{a}_x\times\hat{a}_z & z>\circ\\ \frac{۱}{۲}K_\circ\hat{a}_x\times(-\hat{a}_z) & z<\circ\end{cases}\quad;\quad\vec{B}=\mu_\circ\vec{H}=\begin{cases}-\frac{۱}{۲}\mu_\circ K_\circ\hat{a}_y & z>\circ\\ \frac{۱}{۲}\mu_\circ K_\circ\hat{a}_y & z<\circ\end{cases}$$

بنابراین شار گذرنده از مربعی با سطح $۱m^۲$ برابر است با: $|Q|=|\vec{B}.\vec{S}|=\frac{۱}{۲}\mu_\circ K_\circ$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ گزینه «۳» چون میدان $\vec{B}$ درون حفره ثابت و یکنواخت می‌باشد در نتیجه: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$. لذا میدان می‌بایست یا حاصل از یک جریان حجمی در امتداد محور استوانه باشد (مثل یک سیم دارای ضخامت) و یا حاصل از یک جریان سطحی روی سطح استوانه (مثل یک سیم‌لوله). اما وجود یک جریان حجمی در درون حفره می‌تواند مانند یک سیم درون خود استوانه‌ی فلزی نیز میدان مغناطیسی ایجاد کند که نه در صورت سؤال بدان اشاره شده و نه می‌تواند وجود داشته باشد، اما جریان الکتریکی سطحی عرضی داده شده در گزینه‌ی ۲ می‌تواند میدانی را درون استوانه تولید کند و میدان در خارج آن نیز صفر شود لذا گزینه‌ی (۳) درست است.

۷ـ گزینه «۴» با استفاده از شکل انتگرالی قانون آمپر می‌توان چنین نوشت:

$$\oint\vec{H}.d\vec{\ell}=\iint\vec{J}.d\vec{s}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\vec{J}.(rdrd\varphi\hat{a}_z)$$

$$H(2\pi r)=2\pi J_0\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-\frac{r}{a}}rdr\ \Rightarrow H(2\pi r)=2\pi J_0[-are^{-\frac{r}{a}}-a^2e^{-\frac{r}{a}}]_0^{\frac{a}{2}}$$

به ازای $r=\frac{a}{2}$ خواهیم داشت:

$$H(2\pi\frac{a}{2})=2\pi J_0[-a(\frac{a}{2})e^{-\frac{1}{2}}-a^2e^{-\frac{1}{2}}+a^2]$$

$$\vec{H}=J_0[2a-2a\frac{1}{\sqrt{e}}-a\frac{1}{\sqrt{e}}]\hat{a}_\varphi\ \Rightarrow\vec{H}=J_0[2a(1-\frac{1}{\sqrt{e}})-\frac{a}{\sqrt{e}}]\hat{a}_\varphi$$

۸ـ گزینه «۴» شدت میدان مغناطیسی در مرکز حفره استوانه‌ای از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$|\vec{H}|=|\frac{\vec{J}\times\overrightarrow{oo'}}{2}|=\frac{Jb}{2}=\frac{Ib}{2\pi(R^2-a^2)}$$

۹ـ گزینه «۳» با استفاده از بردار قطبی شدگی، بارهای مقید سطحی و حجمی ماده فروالکتریک را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{sp}=\vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=a}=\vec{P}\cdot\hat{a}_r\Big|_{r=a}=0\ ;\quad\rho_p=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r)=\frac{2}{a}-\frac{1}{r}\ ;\quad\vec{J}_s=\rho_p r\omega dr\hat{a}_\varphi=(\frac{2}{a}-\frac{1}{r})r\omega dr\hat{a}_\varphi$$

استوانه نامحدود دوار را می‌توان به منزله یک سمیلوله در نظر گرفت. با توجه به اینکه میدان مغناطیسی در خارج سمیلوله برابر صفر و در داخل آن برابر J_s می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\vec{H}=\int_r^a(\frac{2}{a}-\frac{1}{r})r\omega dr\hat{a}_z\ \Rightarrow\ \vec{H}=\omega r(1-\frac{r}{a})\hat{a}_z$$

۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به قانون آمپر داریم:

$$\oint\vec{B}.d\vec{l}=\mu_0 I\ \Rightarrow B(2\pi r)=\mu_0 I\ \Rightarrow B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

با استفاده از تعریف چگالی جریان می‌توان مقدار I را در درون سیم به‌دست آورد.

$$J=\frac{dI}{ds}\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\int_0^{r}Jds=\int_0^{2\pi}\int_0^{r}J_0\frac{r}{a}r\,dr\,d\varphi$$

$$I=\frac{2\pi J_0}{a}\frac{r^3}{3}\Big|_0^r=\frac{2\pi J_0}{3a}r^3$$

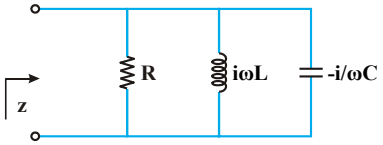
با جایگذاری I در رابطه B داریم:

$$B=\frac{\mu_0 J_0 r^2}{3a}$$

۱۱ـ گزینه «۴» کافی است از تعریف $z=R'+iX$ که z امپدانس معادل مدار، X راکتانس و R مقاومت است، $|z|$ را پیدا کنیم.

المان	Z
R	R
L	$i\omega L$
C	$\frac{-i}{\omega C}$

امپدانس هر المان مدار به‌صورت مقابل است، که ω فرکانس زاویه‌ای است.



$$\Rightarrow z=R\,||\,i\omega L\,||\,\frac{-i}{\omega C}$$

$$z=\frac{\left[\frac{R(i\omega L)}{R+i\omega L}\right]\left[\frac{-i}{\omega C}\right]}{(\frac{R(i\omega L)}{R+i\omega L})+(\frac{-i}{\omega C})}=\frac{\omega RL}{iR\omega^2LC-iR+\omega L}=\frac{\omega RL}{\omega L+i(RLC\omega^2-R)}$$

$$|z|=\frac{LR\omega}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2(\omega^2LC-1)^2}}=\frac{R}{\sqrt{1+R^2(\omega C-\frac{1}{\omega L})}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

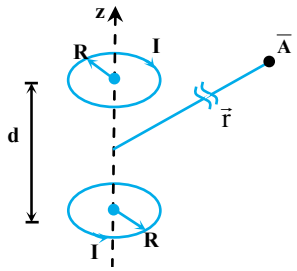
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل یازدهم

«پتانسیل مغناطیسی برداری و پتانسیل مغناطیسی اسکالر»

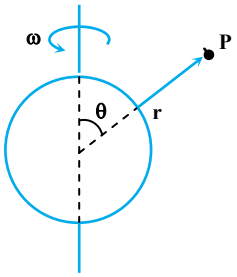
تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل یازدهم

۱ـ فاصله مراکز دو حلقه سیم دایروی مشابه از یکدیگر d بوده و جریان حلقه‌ها نظیر شکل مساوی و مختلف‌العلامت است. در فواصل بسیار دور، یعنی $d \ll r$ و $R \ll r$، بردار پتانسیل $\vec{A}$ با کدام گزینه متناسب است؟ (برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{1}{r^2}$
۲) $\frac{1}{r^3}$
۳) $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$
۴) $\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}$

۲ـ کره‌ای به شعاع a با چگالی بار سطحی یکنواخت σ (بار محکم به کره چسبیده است) حول محوری که از مرکزش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. پتانسیل عددی مغناطیسی آن ϕ^* در نقطه P بیرون کره و به فاصله r از مرکز آن کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{\sigma\omega a^4}{3}\frac{\cos\theta}{r^2}$
۲) $\frac{\sigma\omega a^4}{3}\frac{\sin\theta}{r^2}$
۳) $\frac{\sigma\omega a^4}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}$
۴) $\frac{\pi\sigma\omega a^4}{8}\frac{\cos\theta}{r^2}$

۳ـ مدار مغناطیسی با فاصله هوائی $0/5cm$ در دست است. اگر در مدار مغناطیسی $\vec{B} = 0/8\frac{Wb}{m^2}$ باشد، مقدار V_m در دو طرف فاصله هوائی کدام است؟ سطح مقطع مدار مغناطیسی را $4/0cm^2$ را در نظر بگیرید. (برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\approx 1592A-T$
۲) $\approx 3183A-T$
۳) $\approx 4773A-T$
۴) $\approx 6362A-T$

۴ـ پتانسیل برداری در ناحیه‌ای از فضا در مختصات استوانه‌ای به شکل $\vec{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi\rho}\hat{a}_\varphi$ است که در آن Φ_0 مقدار ثابتی است. میدان مغناطیسی در این ناحیه کدام است؟ (ρ و φ و z مختصه یک نقطه در مختصات استوانه و $\hat{a}_\varphi, \hat{a}_\rho$ و $\hat{a}_z$ بردار یکه‌های متناظر با این مختصات است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر
۲) $\frac{\Phi_0}{2\pi\rho^2}\hat{a}_z$
۳) $\frac{-\Phi_0}{2\pi\rho^3\sin\varphi}\hat{a}_z$
۴) $\frac{-\Phi_0}{2\pi\rho^2}\hat{a}_\rho$

۵ـ در فضای خالی از یک سیم‌پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیملوله) به شعاع a جریان ثابت I می‌گذرد. تعداد دورهای سیم‌پیچ بسیار زیاد و n دور بر واحد طول فرض می‌شود. پتانسیل برداری $\vec{A}$ داخل سیم‌پیچ و در فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از محور آن (محور z) با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $\mu_0 nIa\hat{a}_\varphi$
۲) $\frac{\mu_0 nIa^2}{4}\hat{a}_\varphi$
۳) $\frac{\mu_0 nIa}{4}\hat{a}_\varphi$
۴) $\frac{\mu_0 nIa}{2}\hat{a}_\varphi$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ سیملوله‌ای به شعاع R حامل جریان I و دارای N دور در واحد طول است. پتانسیل برداری در فاصله $r < R$ از محور سیملوله کدام است؟ (محور سیملوله در امتداد محور Z و از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده شده است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۴)

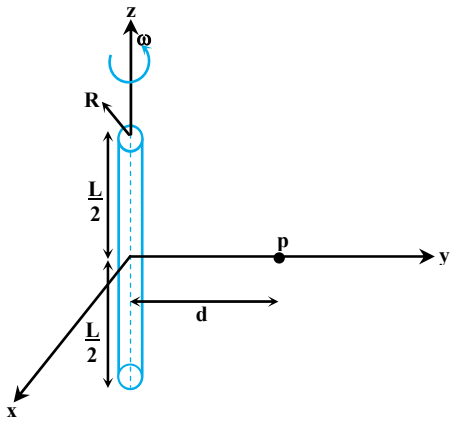
۱) $\vec{A} = \frac{\mu_\circ NI}{2}\frac{R^2}{r}\hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{A} = \frac{\mu_\circ NI}{2}\hat{a}_\varphi$

۳) $\vec{A} = \frac{\mu_\circ NI}{2} r\hat{a}_\varphi$

۴) $\vec{A} = \frac{\mu_\circ NI}{2}\frac{r^2}{R}\hat{a}_\varphi$

۷ـ یک پوستهٔ استوانه‌ای به شعاع R و طول L و چگالی بار سطحی σ، با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود، در حال دوران است. پتانسیل برداری $\vec{A}$، در نقطه P، به فاصلهٔ d از وسط استوانه، کدام است؟ (فرض کنید $d >> R$) (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



۱) $-\frac{\mu_\circ\sigma\omega R^3 L}{2d\sqrt{4d^2+L^2}}\hat{a}_x$

۲) $\frac{\mu_\circ\sigma\omega R^3 L}{2d\sqrt{4d^2+L^2}}\hat{a}_x$

۳) $\frac{\mu_\circ\sigma\omega R^3 L}{(4d^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_x$

۴) $-\frac{\mu_\circ\sigma\omega R^3 L}{(4d^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_x$

۸ـ از یک حلقه به شعاع a که در صفحه‌ی xy قرار دارد و مرکز آن در مبدأ مختصات است، جریان ثابت I عبور می‌کند. پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای در نقطه‌ی $(\circ,\circ,z)$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{I}{2}$

۲) $\frac{I}{2}[1+\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}]$

۳) $\frac{I}{2}[1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}]$

۴) $\frac{I}{2}[\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}]$

۹ـ به دست آورید بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ را در داخل سیم استوانه‌ای هادی به شعاع a که محور آن در جهت محور z ها قرار گرفته و از سیم جریان I در جهت $\vec{a}_z$ عبور می‌کند؟ (برق ـ آزاد ۸۸)

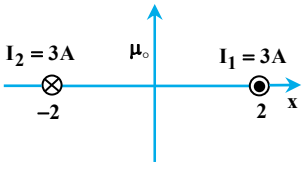
۱) $\vec{A} = [\frac{\mu_\circ I}{2\pi}(1-\frac{r^2}{a^2}) + c\ln\frac{r}{a}]\hat{a}_z$

۲) $\vec{A} = [\frac{\mu_\circ I}{4\pi}(1-\frac{r^2}{a^2}) + c\ln\frac{r}{a}]\hat{a}_z$

۳) $\vec{A} = [\frac{\mu_\circ I}{2\pi}(1+\frac{r^2}{a^2}) + c\ln\frac{r}{a}]\hat{a}_z$

۴) $\vec{A} = [\frac{\mu_\circ I}{2\pi}(1+\frac{r^2}{a^2}) + c\ln\frac{r}{a}]\hat{a}_z$

۱۰ـ جریان‌های رشته‌ای I_1 و I_2 به موازات محور z همانند شکل در فضای خالی ایجاد شده‌اند. محل، جهت و مقدار دو جریان رشته‌ای در شکل داده شده است. اگر $\vec{A}$ بردار پتانسیل مغناطیسی ناشی از این دو جریان باشد، آنگاه مقدار مشتق نسبی $\frac{\partial}{\partial x}\vec{A}_z$ در نقطه $(\circ,\circ,\circ)$ کدام است؟ ($\mu_\circ = 4\pi\times10^{-7}\frac{H}{m}$ می‌دانیم) (برق ـ سراسری ۸۹)



۱) -6×10^{-7}

۲) 3×10^{-7}

۳) -3×10^{-7}

۴) 6×10^{-7}

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ از یک سیم‌پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیملوله) جریان ثابت I می‌گذرد. تعداد دورها بسیار زیاد و n دور بر واحد طول فرض می‌شود. بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ خارج از سیم‌پیچ و در فاصله‌ی r از محور آن (محور z) با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (شعاع سیم‌پیچ را a و جهت جریان آن را $\hat{\varphi}$ فرض کنید.) (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\mu_\circ nIa^2}{2r}\hat{a}_\varphi$ ۲) $\frac{\mu_\circ nIr}{2}\hat{a}_\varphi$ ۳) $\frac{\mu_\circ nIa}{2}\hat{a}_\varphi$ ۴) $\frac{\mu_\circ nIa^2}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

۱۲ـ در فضای خالی جریان سطحی با چگالی $\vec{J}_s = \cos(\beta y)\hat{a}_z$ بر روی صفحه $x = \circ$ قرار دارد. معادله خطوط میدان مغناطیسی در نیم فضای $x > \circ$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $e^{\beta x}\left|\cos\beta y\right| = const.$ ۲) $e^{-\beta x}\left|\sin\beta y\right| = const.$ ۳) $e^{-\beta x}\left|\cos\beta y\right| = const.$ ۴) $e^{\beta x}\left|\sin\beta y\right| = const.$

۱۳ـ مطلوب است تعیین بردار پتانسیل مغناطیسی $|A|$ در یک هادی استوانه‌ای به شعاع سطح مقطع a که جریان I را از خود عبور می‌دهد. فرض کنید $A = \circ$ در $r = a$ باشد. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{1}{2\pi}(1-\frac{r^2}{a^2})$ ۲) $\frac{1}{4\pi}(1-\frac{r}{a})^2$ ۳) $\frac{1}{4\pi}(1-\frac{r^2}{a^2})$ ۴) $\frac{1}{2\pi}(1-\frac{r}{a})^2$

۱۴ـ شدت میدان مغناطیسی در نیم فضای $-\infty < x < \circ$ که هیچ جریان الکتریکی در آن وجود ندارد به صورت $\vec{H} = e^{-bx}[3\sin 2y\hat{x} + a\cos 2y\hat{a}_y]$ داده شده که در آن a و b اعداد ثابت و مجهول هستند. پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A} = A_z(x,y)\hat{a}_z$ در این ناحیه کدام است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $A_z = \frac{3}{2}\mu_\circ e^{2x}\sin 2y + c$ ۲) $A_z = -\frac{3}{2}\mu_\circ e^{-2x}\sin 2y + c$

۳) $A_z = \frac{3}{2}\mu_\circ e^{2x}\cos 2y + c$ ۴) $A_z = -\frac{3}{2}\mu_\circ e^{-2x}\cos 2y + c$

۱۵ـ رابطه شار مغناطیسی (Magnetic Flux) و انتگرال بردار پتانسیل مغناطیسی در کدام گزینه به درستی گزارش شده است؟ (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $\psi = \oint_s \bar{A}.ds$ ۲) $\psi = \oint_v \frac{\mu_\circ.A}{4\pi R}$ ۳) $\psi = \oint_v \nabla\bar{A}.dv$ ۴) $\psi = \oint_L \bar{A}.d\ell$

۱۶ـ برای یک حلقه حامل جریان I و شعاع a، پتانسیل اسکالر مغناطیسی برای نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصله Z از مرکز آن، رابطه پتانسیل اسکالر مغناطیسی عبارت است از: (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}I(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}})$ ۲) $\frac{1}{2}I\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}$ ۳) $\frac{1}{2}I\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$ ۴) $\frac{1}{2}I(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}})$

۱۷ـ پتانسیل برداری یک توزیع بار متغیر با زمان در مکان $\vec{r}$ از فضا در لحظه t برابر است با $\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_\circ}{4\pi r}\vec{p}(t-\frac{r}{c})$ که در آن $\vec{p}(t-\frac{r}{c})$ بردار ممان دو قطبی الکتریکی در زمان تأخیری $(t-\frac{r}{c})$ است. میدان مغناطیسی در منطقه تابش کدام است؟ c تندی نور در خلأ است. (فوتونیک ـ سراسری ۹۲)

۱) $-\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{\vec{r}\times\dot{\vec{p}}}{r^3}$ ۲) $-\frac{\mu_\circ}{4\pi c}\frac{\vec{r}\times\ddot{\vec{p}}}{r^2}$ ۳) $-\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}}{r^2}$ ۴) $-\frac{\mu_\circ}{4\pi c}\frac{\ddot{\vec{p}}}{r}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل یازدهم

۱ـ گزینه «۲» پتانسیل برداری مغناطیسی ناشی از یک 2^n قطبی مغناطیسی با $\frac{1}{r^{n+1}}$ متناسب است. چون شکل نشان داده شده یک چهارقطبی مغناطیسی می‌باشد بنابراین $n=2$ است.

۲ـ گزینه «۱» با توجه به رابطه‌ای که در متن درس معرفی کردیم داریم: (برای یک دو قطبی مغناطیسی پتانسیل اسکالر به صورت زیر می‌باشد.)

$$\phi(r)=\frac{\vec{m}.\hat{a}_r}{4\pi r^2}$$

با در نظر گرفتن یک جزء سطحی روی پوسته کروی خواهیم داشت:

$$dI=\frac{dQ}{dt}=\frac{\sigma a^2\sin\theta d\theta d\varphi}{dt}=a^2\sigma\sin\theta d\theta\omega$$

با استفاده از این که $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$ است برای جریان می‌توان نوشت: $d\vec{m}=\pi r^2 dI\,\hat{a}_z=\sigma\pi a^4\sin^3\theta d\theta\omega\hat{a}_z \quad ; \quad \vec{m}=\int d\vec{m}=\frac{4}{3}\pi a^4\omega\sigma\hat{a}_z$

بنابراین برای دو قطبی مغناطیسی حاصل از جزء دیفرانسیلی حلقه شکل به دست می‌آید:

$$\phi(r)=\frac{4}{3}\frac{\pi a^4\omega\sigma}{4\pi r^3}(\hat{a}_z.\hat{a}_r)=\frac{\omega a^4\sigma}{3r^3}(r\cos\theta)=\frac{\omega a^4\sigma}{3}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

۳ـ گزینه «۲» ابتدا باید مقاومت ناحیه هوایی را به دست آوریم:

$$R_{air}=\frac{L_{air}}{\mu_\circ S}=\frac{0/5\times10^{-2}}{(4\pi\times10^{-7})4\times10^{-4}}=\frac{0/5}{16\pi}\times10^9$$

برای به دست آوردن مقدار V_m نیاز به Ψ داریم:

$$\Psi=BS=0/8\times(4\times10^{-4})=3/2\times10^{-4}\ wb$$

$$V_m=\Psi R_{air}=\frac{10^4}{\pi}\cong3184/7$$

۴ـ گزینه «۱» چون مقدار $\vec{A}$ داده شده است می‌توانیم با استفاده از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ مقدار $\vec{B}$ را به دست آوریم، در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{a}_\rho & \rho\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{a}_\rho & \rho\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{\phi_\circ}{2\pi} & 0\end{vmatrix}=0$$

۵ـ گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانیم میدان مغناطیسی داخل سیم‌پیچ برابر است با $\vec{B}=\mu_\circ nI\hat{a}_z$. حال با داشتن $\vec{B}$ می‌توانیم از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ مقدار $\vec{A}$ را به دست آوریم. از آنجایی که جریان در جهت $\hat{a}_\varphi$ می‌باشد، بنابراین $\vec{A}$ هم در جهت $\hat{A}_\varphi$ خواهد بود یعنی مؤلفه‌های A_z و A_r صفر می‌باشند.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & rA\varphi & 0\end{vmatrix}=\mu_\circ nI\hat{a}_z\Rightarrow A_\varphi=\frac{r}{2}\mu_\circ nI\Rightarrow\vec{A}=\frac{r}{2}\mu_\circ nI\hat{a}_\varphi$$

$$r=\frac{a}{2}\Rightarrow\vec{A}=\frac{a}{4}\mu_\circ nI\hat{a}_\varphi$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانیم میدان مغناطیسی سیملوله برابر $\vec{B}=\mu_{\circ}NI\hat{a}_z$ می‌باشد بنابراین با استفاده از رابطه $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=B \Rightarrow \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_r & rA_\varphi & A_z\end{vmatrix}=\vec{B}$$

چون جریان داخل سیملوله در جهت φ می‌باشد بنابراین $\vec{A}$ در جهت $\hat{\varphi}$ خواهد بود و مؤلفه‌های A_z و A_r آن صفر می‌باشند بنابراین:

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \circ & rA_\varphi & \circ\end{vmatrix}=\vec{B} \Rightarrow -\frac{\partial A\varphi}{\partial z}\hat{a}_r+\frac{\partial(rA_\varphi)}{r\partial r}\hat{a}_z=\vec{B}$$

چون $\vec{B}=\mu_{\circ}NI\hat{a}_z$ فقط مؤلفه در جهت $\hat{a}_z$ دارد بنابراین در رابطه بالا $\frac{\partial A\varphi}{\partial z}$ صفر می‌باشد یعنی مؤلفه $A\varphi$ در جهت z تغییراتی ندارد. چون‌که سیملوله در جهت z تا بی‌نهایت ادامه دارد و تغییراتی در این جهت ندارد، انتظار داریم که $\vec{A}$ از z مستقل باشد.

$$\frac{\partial(rA\varphi)}{r\partial r}=\mu_{\circ}NI \Rightarrow rA\varphi=\int r\mu_{\circ}NIdr \Rightarrow A\varphi=\frac{\mu_{\circ}NIr}{2}+\frac{C}{r}$$

در رابطه بالا C یک مقدار ثابت می‌باشد. برای به دست آوردن مقدار C باید مرجع پتانسیل را مشخص کنیم. چون سیملوله تا بی‌نهایت ادامه دارد، پتانسیل در بی‌نهایت نمی‌تواند صفر شود. اگر فرض کنیم $r_{\circ}$ مرجع پتانسیل باشد، خواهیم داشت:

$$\vec{A}(r=r_{\circ})=\circ \Rightarrow \frac{\mu_{\circ}NIr_{\circ}}{2}+\frac{C}{r_{\circ}}=\circ \Rightarrow C=-\frac{\mu_{\circ}NIr_{\circ}^{2}}{2}$$

حال با جایگذاری C در $\vec{A}$ خواهیم داشت:

$$\vec{A}=\frac{\mu_{\circ}NI}{2}(r-\frac{r_{\circ}^{2}}{r})\hat{a}_\varphi$$

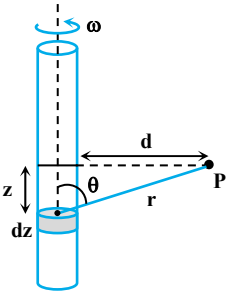
اگر فرض کنیم $r_{\circ}=\circ$ باشد فقط گزینه (۳) می‌تواند درست باشد.

۷ـ گزینه «۱» ابتدا جریان روی استوانه را به دست می‌آوریم. با استفاده از تعریف جریان $(I=\frac{dq}{dt})$ می‌توانیم آن را محاسبه کنیم. برای به دست آوردن dq با توجه به چگالی بار سطحی روی سطح استوانه (σ) و تعریف چگالی بار سطحی داریم:

$$\sigma=\frac{dq}{dS} \Rightarrow dq=\sigma dS$$

چون در مختصات استوانه‌ای هستیم $dS=Rd\varphi dz$ می‌باشد. با قرار دادن dq در رابطه جریان خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}I&=\frac{\sigma dS}{dt}=\frac{\sigma Rd\varphi dz}{dt}\\ \omega&=\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}\right\} \Rightarrow I=\sigma R\omega dz$$



این جریان $\mathbf{I}$ مقدار جریان روی یک حلقه از استوانه به ضخامت dz می‌باشد که در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر این حلقه‌ها به ضخامت dz را به عنوان جزء دیفرانسیلی در نظر بگیریم، هر کدام از آن‌ها مانند یک دو قطبی مغناطیسی عمل می‌کنند. با توجه به رابطه پتانسیل دو قطبی مغناطیسی، مقدار پتانسیل برداری ناشی از هر حلقه برابر است با:

$$d\vec{A}=\frac{\mu_{\circ}d\vec{m}\times\hat{a}_r}{4\pi r^{2}}=\frac{\mu_{\circ}dm\sin\theta}{4\pi r^{2}}\hat{a}_\varphi$$

چون جریان در جهت $\hat{a}_\varphi$ می‌باشد بنابراین $\vec{A}$ هم در جهت $\hat{a}_\varphi$ خواهد بود. در رابطه بالا $d\vec{m}=\pi R^{2}I\hat{a}_z$ می‌باشد. با جایگذاری $d\vec{m}$ در رابطه بالا داریم:

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

$$\left.\begin{aligned} d\vec{A} &= \frac{\mu_\circ \pi R^2 I \sin\theta}{4\pi r^2}\hat{a}_\varphi \\ I &= \sigma R \omega dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{dA} = \frac{\mu_\circ \pi \sigma R^3 \omega \sin\theta dz}{4\pi r^2}$$

r و θ کمیت‌های دستگاه کروی هستند در حالی که dz در مختصات استوانه‌ای (یا دکارتی) می‌باشد، پس باید ابتدا دستگاه مختصات همه کمیت‌ها را یکسان کنیم و سپس از رابطه $d\vec{A}$ انتگرال بگیریم.

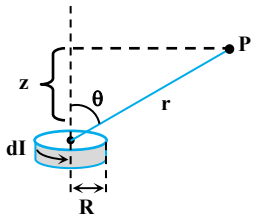
با توجه به شکل، r و $\sin\theta$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} r^2 = z^2 + d^2 \\ \sin\theta = \dfrac{d}{\sqrt{z^2+d^2}} \end{cases}$$

حال با جایگذاری مقادیر بالا در رابطه $d\vec{A}$ داریم:

$$d\vec{A} = \frac{(\mu_\circ \pi R^3 \sigma \omega d)}{4\pi (z+d^2)^{\frac{3}{2}}} dz \hat{a}_\varphi$$

با انتگرال‌گیری از $d\vec{A}$ روی بازه $-\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}$ مقدار $\vec{A}$ را به دست می‌آوریم. توجه کنید که نیاز به تبدیل $\hat{a}_\varphi$ به مختصات دکارتی نیست چون وابسته به dz نمی‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$\vec{A} = \frac{\mu_\circ \sigma R^3 \omega d}{4} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz}{(z^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_\varphi$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_\circ \sigma R^3 \omega d}{2} \int_\circ^{\frac{L}{2}} \frac{dz \hat{a}_\varphi}{(z^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_\circ \sigma R^3 \omega d \hat{a}_\varphi}{2} \left[\frac{z}{d^2\sqrt{z^2+d^2}}\right]_\circ^{\frac{L}{2}} = \frac{\mu_\circ \sigma R^3 \omega L}{2d\sqrt{4d^2+L^2}} \hat{a}_\varphi$$

در نقطه P بردار $\hat{a}_\varphi$ در جهت $-\hat{i}$ می‌باشد.

۸ـ گزینه «۳» با استفاده از رابطه V_m می‌توان نوشت:

$$V_m = \frac{I\Omega}{4\pi} = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

V_m پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای یک حلقه جریان روی محور z می‌باشد.

۹ـ گزینه «۲» می‌توانیم از رابطه $\nabla^2\vec{A} = -\mu_\circ \vec{J}$ استفاده کنیم. قبل از استفاده از این معادله با استفاده از چند نکته می‌توان آن را ساده کرد. چون جریان در جهت z می‌باشد بنابراین $\vec{A}$ فقط مؤلفه A_z را خواهد داشت. پس رابطه برداری بالا تبدیل به رابطه اسکالر می‌شود. $\nabla^2 A_z = -\mu_\circ J_z$

با توجه به این که جریان در جهت $\hat{a}_z$ روی استوانه به طور یکنواخت می‌باشد و تا بی‌نهایت ادامه دارد بنابراین $\frac{\partial}{\partial z} = \circ$ می‌باشد، یعنی تغییرات در جهت z نداریم. همچنین در جهت $\hat{a}_\varphi$ هم به خاطر تقارن استوانه تغییرات نداریم یعنی $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \circ$ می‌باشد. در نتیجه فقط تغییرات در جهت $\hat{a}_r$ داریم و معادله بالا به صورت زیر ساده خواهد شد $(J = \frac{I}{\pi a^2})$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = \frac{-\mu_\circ I r}{\pi a^2}$$

$$\frac{r\partial A_z}{\partial r} = \frac{-\mu_\circ I r^2}{2\pi a^2} + c_1 \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{-\mu_\circ I r}{2\pi a^2} + \frac{c_1}{r}$$

$$A_z = \frac{-\mu_\circ I r^2}{4\pi a^2} + c_1 \ln r + c_2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

به ازای $r=a$ مقدار پتانسیل مغناطیسی بردار را برابر صفر در نظر می‌گیریم.

$$A_z|_{r=a}=0 \Rightarrow \frac{-\mu_0 I a^2}{4\pi a^2}+c_1 \ln a+c_2=0 \quad , \quad c_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi}-c_1 \ln a$$

$$\vec{A}=(\frac{-\mu_0 I r^2}{4\pi a^2}+c\ln r+\frac{\mu_0 I}{4\pi}-c\ln a)\hat{a}_z=[\frac{\mu_0 I}{4\pi}(1-\frac{r^2}{a^2})+c\ln\frac{r}{a}]\hat{a}_z$$

۱۰ـ گزینه «۴» با استفاده از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix}=(\frac{\partial A_z}{\partial y})\hat{a}_x-(\frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{a}_y$$

در نقطه $(0,0,0)$ مقدار $\vec{B}$ را می‌توان با توجه به قانون بیوساوار به صورت روبرو نوشت:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}(-\hat{a}_y)+\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}(-\hat{a}_y)=\frac{3\mu_0}{2\pi}(-\hat{a}_y)$$

بنابراین در نقطه $(0,0,0)$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{a}_x-\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{a}_y=\frac{-3\mu_0}{2\pi}\hat{a}_y$$

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\frac{\partial A_z}{\partial y}=0\\ \frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{3\mu_0}{2\pi}=6\times10^{-7}\end{cases}$$

۱۱ـ گزینه «۱» چگالی شار مغناطیسی در داخل و خارج سیملوله به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{B}=\begin{cases}\mu_0 n I\hat{a}_z & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

با استفاده از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\hat{a}_z=\begin{cases}\mu_0 n I\hat{a}_z & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

از حل معادلات فوق داریم:

$$\vec{A}=\begin{cases}\frac{\mu_0 n I r}{2}\hat{a}_\varphi & r<a\\ \frac{k}{r}\hat{a}_\varphi & r>a\end{cases}$$

طبق شرط پیوستگی $\vec{A}$ روی مرز $r=a$ می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\mu_0 n I a}{2}=\frac{k}{a}\Rightarrow k=\frac{\mu_0 n I a^2}{2}$$

بنابراین در $r>a$ داریم:

$$\vec{A}=\frac{k}{r}\hat{a}_\varphi=\frac{\mu_0 n I a^2}{2r}\hat{a}_\varphi$$

۱۲ـ گزینه «۳» در ناحیه $x>0$ جریان آزاد نداریم، بنابراین می‌توان چنین نوشت:

$$\nabla^2 A_z=A_z=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}=0$$

با حل معادله فوق به روش تفکیک متغیرها و شرط کرانداری پاسخ در $x=\infty$ و تقارن زوج پاسخ نسبت به متغیر y خواهیم داشت:

$$\vec{A}_z=k\,e^{-Bx}\cos\beta y\,\hat{a}_z$$

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=[-k\beta e^{-\beta x}\sin\beta y]\hat{a}_x+[k\beta e^{-\beta x}\cos\beta y]\hat{a}_y$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

معادله خطوط میدان مغناطیسی از حل معادله مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{dx}{B_x}=\frac{dy}{B_y}\Rightarrow\frac{dx}{-\sin\beta y}=\frac{dy}{\cos\beta y}\qquad \beta dx=\frac{-\beta\sin\beta y\,dy}{\cos\beta y}\quad Bx+C_1=\ln|\cos\beta y|$$

بنابراین داریم:

$$|\cos\beta y|=e^{\beta x+C_1}=C_2\,e^{\beta x}\Rightarrow e^{-\beta x}|\cos\beta y|=C_2=\text{مقدار ثابت}$$

۱۳ـ گزینه «۳» در ناحیه $r<a$ با توجه به قانون آمپر خواهیم داشت:

$$B=\frac{\mu_\circ Ir}{2\pi a^2}\Rightarrow B=\vec{\nabla}\times A\Rightarrow\frac{\partial A}{\partial r}=\frac{-\mu_\circ Ir}{2\pi a^2}\qquad A=\frac{-\mu_\circ Ir^2}{4\pi a^2}+c$$

به ازای $r=a$ مقدار A برابر صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$c=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\Rightarrow A=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}(1-\frac{r^2}{a^2})$$

۱۴ـ گزینه «۴» در ناحیه بدون جریان آزاد داریم:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{H}=\circ\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab=-6\\ 3b=-2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}$$

از طرفی با توجه به رابطه $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\mu\vec{H}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{\partial A_z}{\partial y}=3\mu_\circ e^{-2x}\sin 2y\\ \frac{\partial A_z}{\partial x}=3\mu_\circ e^{-2x}\cos 2y\end{cases}\Rightarrow A_z=-\frac{3}{2}\,\mu_\circ e^{-2x}\cos 2y+c$$

۱۵ـ گزینه «۴» شار مغناطیسی به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\psi=\int_s\vec{B}.d\vec{s}$$

با جایگذاری رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\psi=\int_s\vec{\nabla}\times\vec{A}.d\vec{s}$$

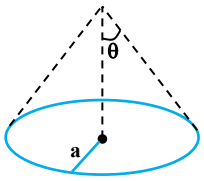
با استفاده از قضیه استوکس داریم:

$$\psi=\int_s\vec{\nabla}\times\vec{A}.d\vec{s}=\oint_c\vec{A}.d\vec{\ell}$$

۱۶ـ گزینه «۱» پتانسیل اسکالر مغناطیسی در نقطه z روی محور حلقه به صورت مقابل می‌باشد:

$$V_m=\frac{I\Omega}{4\pi}$$

Ω زاویه فضای نقطه z نسبت به مدار حامل جریان است. که مقدار آن به صورت زیر می‌باشد:



$$\Omega=2\pi(1-\cos\theta)=2\pi(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+z^2}})$$

بنابراین مقدار V_m برابر است با:

$$V_m=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}})$$

۱۷ـ گزینه «۲» می‌دانیم میدان الکتریکی از رابطه‌ی $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}V$ به دست می‌آید. و میدان مغناطیسی هم از رابطه‌ی $B=\frac{\hat{n}\times\vec{E}}{c}$ که $\hat{n}$ جهت انتشار است، محاسبه می‌شود. در اینجا جهت انتشار، همان $\hat{r}$ است.

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\mu_\circ}{4\pi r}\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\qquad \vec{B}=\frac{\hat{r}\times\vec{E}}{c}=\frac{-\mu_\circ}{4\pi c}\frac{\hat{r}\times\ddot{\vec{p}}}{r}=\frac{-\mu_\circ}{4\pi c}\frac{\hat{r}\times\ddot{\vec{p}}}{r^2}$$

در این محاسبات ترم‌های کوچک حذف شده است (جمله‌ای که $\frac{1}{r^3}$ دارد با توجه به محاسبه در فواصل دور در مقابل ترم دیگر حذف شده است).

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل دوازدهم

«مواد مغناطیسی ــ مغناطیس‌شدگی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوازدهم

۱ــ اگر مقدار ثابت حقیقی χ در رابطهٔ $\mathbf{M}=\chi\mathbf{H}$ ..... باشد ماده را دیامغناطیس و اگر مقدار آن ..... باشد ماده را پارامغناطیس گویند.

(فیزیک ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ـ مثبت و بسیار کوچکتر از یک

۲) صفر ـ منفی و قدر مطلق آن بسیار کوچکتر از یک

۳) مثبت و بسیار کوچکتر از یک ـ منفی و قدر مطلق آن بسیار کوچکتر از یک

۴) منفی و قدر مطلق آن بسیار کوچکتر از یک ـ مثبت و بسیار کوچکتر از یک

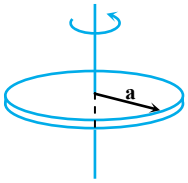
۲ــ در یک ماده مغناطیسی با تراوائی نسبی ۳۰۰۰، بردار مغناطیس شوندگی به شکل $۱۰\mathbf{M}_{\circ}\mathbf{T}$ (برحسب مختصات کروی) داده شده است، چگالی جریان مغناطیس شوندگی کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) $۱۰\,M.\hat{a}_{\theta}$ ۳) $۳۰۰M.\hat{a}_{\varphi}$ ۴) $۳\times۱۰^{۴}\,M.\hat{a}_{\theta}$

۳ــ یک قرص به شعاع a و چگالی بار سطحی یکنواخت σ حول محور عمود بر صفحه آن که از مرکزش عبور می‌کند با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. اندازه ممان دوقطبی مغناطیسی این قرص کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۲)



۱) $\pi\omega\sigma a^{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}\pi\omega\sigma a^{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}\pi\omega\sigma a^{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\pi\omega\sigma a^{۴}$

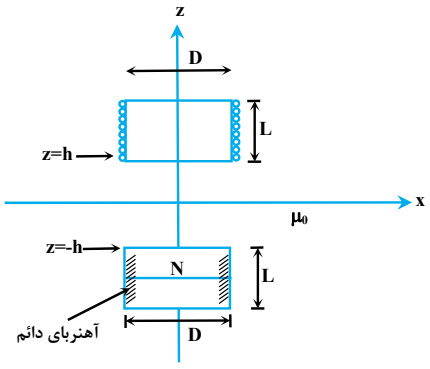
۴ــ در فضای خالی در ناحیه $a<r<b$، $|z|<\frac{L}{۲}$ از دستگاه مختصات استوانه‌ای دو قطبی‌های مغناطیسی با چگالی حجمی $\vec{M}=\frac{a}{r}\hat{a}_r$ توزیع شده‌اند. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از این دو قطبی‌ها در صفحه $z=۰$ در نقاط بسیار دور(یعنی $r>>L$ و $r>>b$) چه وابستگی به r نشان می‌دهد و چه جهتی دارد؟

(برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۱}{r^{۴}}\hat{a}_r$ ۲) $\frac{۱}{r^{۳}}\hat{a}_{\varphi}$ ۳) $\frac{۱}{r^{۴}}\hat{a}_{\varphi}$ ۴) $\frac{۱}{r^{۳}}\hat{a}_r$

۵ــ همانند شکل، یک سیم‌پیچ هوایی با سطح مقطع دایروی به قطر D و طول L در بالای یک آهنربای دائمی با سطح مقطع دایروی به قطر D و طول L واقع شده است. سیم‌پیچ از سیم‌های بسیار نازک با فشردگی زیاد ۱۰ دور در هر میلی‌متر تشکیل شده است. اگر بردار مغناطیس‌شدگی آهنربای دائم $\vec{M}=۳\hat{a}_z[\frac{A}{m}]$ باشد، جریان عبوری از سیم‌پیچ چه اندازه و جهتی داشته باشد تا میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مبدأ مختصات صفر شود؟

(برق ـ سراسری ۸۴)



۱) $۳۰\mu A$ در جهت $-\hat{a}_{\varphi}$

۲) $۳۰\mu A$ در جهت $+\hat{a}_{\varphi}$

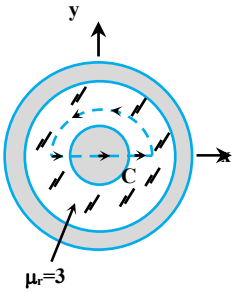
۳) $۰/۳mA$ در جهت $-\hat{a}_{\varphi}$

۴) $۰/۳mA$ در جهت $+\hat{a}_{\varphi}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ فضای داخلی کابل هم محور نشان داده شده در شکل با یک مادهٔ مغناطیسی به ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی $\mu_r = ۳$ پر شده است. جریان رسانای مرکزی کابل $I = ۲A$ (به داخل صفحهٔ کاغذ) و جریان رسانای خارجی آن $I = ۲A$ (به خارج صفحهٔ کاغذ) است. حاصل انتگرال $\oint_C \vec{M}.d\vec{\ell}$ روی مسیر C مشخص شده در شکل کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)



۱) ۲-

۲) ۳-

۳) ۴-

۴) ۶-

۷ـ بردار مغناطیس شدگی در حجم کره‌ای به شعاع R به صورت $\vec{M} = M_\circ \hat{a}_z$ ($M_\circ$ ثابت است) داده شده است. میدان $\vec{H}$ در مرکز کره چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)

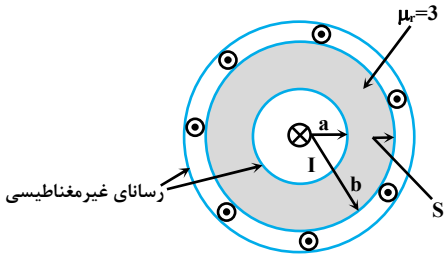
۱) $\frac{M_\circ \hat{a}_z}{۳}$

۲) $-\frac{M_\circ}{۳}\hat{a}_z$

۳) $-\frac{۲M_\circ}{۳}\hat{a}_z$

۴) $\frac{۲M_\circ}{۳}\hat{a}_z$

۸ـ فضای داخلی یک کابل هم محور همانند شکل با یک ماده مغناطیسی پر شده است. اگر I_{bound} کل جریان مقید برون سوی موجود روی سطح S (یعنی سطح استوانه‌ای به شعاع b) بوده و I جریان یکنواخت درون سوی رسانای مرکزی کابل باشد، کدام گزینه برابر با نسبت $\frac{I_{bound}}{I}$ خواهد بود؟ (برق ـ سراسری ۸۵)



۱) ۲-

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۳-

۹ـ هم خط شدن دو قطبی‌های الکتریکی در یک ماده دی‌الکتریک در حضور یک میدان الکتریکی خارجی و هم خط شدن دو قطبی‌های مغناطیسی در یک ماده پارامغناطیس در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی را با هم مقایسه کنید؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)

۱) در هر دو حالت هم خط شدن دو قطبی‌ها سبب افزایش میدان اولیه می‌شود.

۲) در هر دو حالت هم خط شدن دو قطبی‌ها سبب کاهش میدان اولیه می‌شود.

۳) هم خط شدن دو قطبی‌های مغناطیسی، میدان مغناطیسی اولیه را کاهش می‌دهد. اما هم خط شدن دو قطبی‌های الکتریکی، میدان الکتریکی اولیه را افزایش می‌دهد.

۴) هم خط شدن دو قطبی‌های مغناطیسی، میدان مغناطیسی اولیه را افزایش می‌دهد. اما هم خط شدن دو قطبی‌های الکتریکی، میدان الکتریکی اولیه را کاهش می‌دهد.

۱۰ـ ناحیه $a < r < b$ در مختصات استوانه‌ای را یک ماده مغناطیسی غیرهمگن اشغال می‌کند. یک رشته سیم نازک، که حامل جریان I در جهت مثبت z و در امتداد محور z است، میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi a}\hat{a}_\varphi$ را در این ماده ایجاد می‌کند. جریان مقید سطحی $\vec{J}_{ms}$ روی سطح $r = b$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰

۲) $\frac{I}{۲\pi b}\hat{a}_z$

۳) $\frac{I(a+b)}{۲\pi ab}\hat{a}_z$

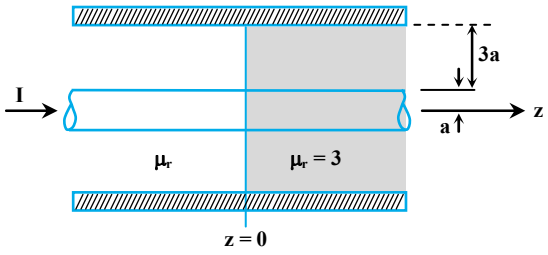
۴) $\frac{I(a-b)}{۲\pi ab}\hat{a}_z$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ شکل زیر یک کابل هم محور متقارن را نشان می‌دهد که بخش $z > 0$ آن با یک مادهٔ مغناطیسی با $\mu_r = 3$ پر شده است. اگر جریان عبوری از رسانای مرکزی این کابل $I = 2A$ باشد، کدام گزینه جریان مقید سطحی در فاصلهٔ $2a$ از محور سیم، روی فصل مشترک $z = 0$ را نشان می‌دهد؟

(برق ـ سراسری ۸۶)

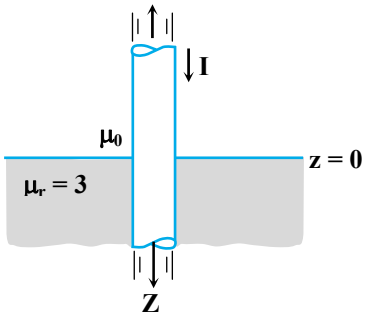


۱) $-\frac{2}{\pi a}\hat{a}_r$ ۲) $-\frac{1}{\pi a}\hat{a}_r$

۳) $\frac{2}{\pi a}\hat{a}_\varphi$ ۴) $\frac{1}{\pi a}\hat{a}_\varphi$

۱۲ـ یک سیم از ماده‌ای غیر مغناطیسی با سطح مقطع دایروی به شعاع a در داخل یک نیم فضای پر شده از ماده مغناطیسی با $\mu_r = 3$ قرار دارد. با فرض آنکه طول سیم بی‌نهایت بوده و جریان عبوری از آن $I = 2A$ باشد، جریان مقید سطحی در فاصلهٔ $2a$ از محور سیم روی فصل مشترک $z = 0$ چند آمپر بر متر است؟

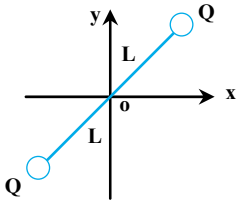
(برق ـ سراسری ۸۷)



۱) $-\frac{2}{\pi a}\hat{a}_r$ ۲) $-\frac{1}{\pi a}\hat{a}_r$

۳) $\frac{1}{\pi a}\hat{a}_r$ ۴) $\frac{2}{\pi a}\hat{a}_r$

۱۳ـ دو بار نقطه‌ای Q واقع در دو سر میله‌ی عایقی به طول $2L$ در صفحه‌ی xoy (نقطه‌ی o وسط میله قرار دارد) مطابق شکل در حال چرخیدن با تندی ω به دور محور z (عمود بر صفحه‌ی xoy) به صورت پادساعتگردند. بردار گشتاور دو قطبی مغناطیسی این مجموعه چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)



۱) $\vec{\mu} = -QL^2\omega\hat{a}_z$ ۲) $\vec{\mu} = -\frac{1}{2}QL^2\omega\hat{a}_z$

۳) $\vec{\mu} = QL^2\omega\hat{a}_z$ ۴) $\vec{\mu} = \frac{1}{2}QL^2\omega\hat{a}_z$

۱۴ـ روی یک صفحه (دیسک) دایره شکل به شعاع a چگالی جریان سطحی گردش $\vec{K} = 2r\hat{a}_\varphi(\frac{A}{m})$ برقرار است که در آن r فاصله از مرکز دایره می‌باشد. اندازه گشتاور دوقطبی مغناطیسی (Magnetic Dipole Moment) این دیسک برابر است با:

(برق ـ سراسری ۸۸)

۱) πa^4 ۲) $\frac{\pi a^4}{2}$ ۳) $2\pi a^4$ ۴) $\frac{\pi a^4}{3}$

۱۵ـ در فضای خالی در ناحیه کروی $r \le a$ مغناطیس شدگی با چگالی یکنواخت $\vec{M} = M_\circ\hat{a}_z$ موجود است. مقدار تابع پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m ناشی از این مغناطیس شدگی در نقطه $(r = 2a, \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi = 0)$ چقدر است؟(فرض کنید مرجع پتانسیل در بی‌نهایت است.)

(برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{M_\circ a}{3}$ ۲) $\frac{2M_\circ a\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{M_\circ a\sqrt{2}}{6}$ ۴) $\frac{M_\circ a\sqrt{2}}{24}$

۱۶ـ یک استوانه نامتناهی از جنس ماده‌ای دیامغناطیس (diamagnetic) با $\mu_r = \frac{1}{2}$ ناحیه $r \le a$ یک دستگاه مختصات استوانه‌ای را اشغال کرده است. روی سطح $r = 2a$ جریان سطحی الکتریکی با چگالی ثابت $2\frac{A}{m}$ در جهت $\hat{a}_\varphi$ در گردش است. مطلوب است تعیین چگالی جریان مقید (bound) سطحی روی استوانه‌ی دیامغناطیس یعنی روی $r = a$ برحسب $\frac{A}{m}$.

(برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\hat{a}_\varphi$ ۲) $+\hat{a}_\varphi$ ۳) $+3\hat{a}_\varphi$ ۴) $-3\hat{a}_\varphi$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ کره عایق به شعاع R دارای توزیع کاملا یکنواخت بار الکتریکی به مقدار کل Q با تندی دورانی ثابت $\vec{\Omega}$ در حال چرخیدن بـه دور یکـی از محورهـای تقارن خود است. ممان دوقطبی مغناطیسی تولید شده در اثر دوران این کره کدام است؟ ($\hat{e}$ بردار یکه در امتداد محور دوران است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{5}Q\Omega R^2\hat{e}$ ۲) $\frac{1}{4}Q\Omega R^2\hat{e}$ ۳) $\frac{1}{3}Q\Omega R^2\hat{e}$ ۴) $\frac{1}{2}Q\Omega R^2\hat{e}$

۱۸ـ یک سیم استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع مقطع R دارای بردار مغناطیسی $\vec{M}(r)=k_0 r^2\hat{e}_\varphi$ مـی‌باشـد (کـه در آن k_0 ثابـت مـی‌باشـد). میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}(r)$ در درون سیم استوانه‌ای $(0\le r\le R)$ و بیرون آن $(R\le r<\infty)$ به ترتیب از راست به چپ چگونه هسـتند؟ محـور z در امتداد محور استوانه است و مختصات استوانه‌ای (r,φ,z) است. (فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\mu_0 k_0 r^2\hat{e}_\varphi$ و صفر ۲) $2\mu_0 k_0\frac{R^3}{r}\hat{e}_\varphi$ و $\mu_0 k_0 r^2\hat{e}_\varphi$

۳) $\frac{5}{3}\mu_0 k_0\frac{R^3}{r}\hat{e}_\varphi$ و $\frac{2}{3}\mu_0 k_0 r^2\hat{e}_\varphi$ ۴) $-\frac{1}{3}\mu_0 k_0\frac{R^3}{r}\hat{e}_\varphi$ و $\frac{2}{3}\mu_0 k_0 r^2\hat{e}_\varphi$

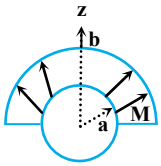
۱۹ـ یک پوسته کروی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر بگیرید که مبدأ آن در مرکز مختصات قرار گرفته است. اگر فضای میان پوسته از یک ماده مغناطیس پر شده باشد که بردار مغناطش آن $\vec{M}=M_0\hat{k}$ باشد، پتانسیل اسکالر مغناطیسی ϕ_M در مرکز این پوسته چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) صفر ۲) $4\pi M_0(b+a)$ ۳) $2\pi M_0(b+a)$ ۴) $4\pi M_0(b-a)$

۲۰ـ یک سیم‌پیچ استوانه‌ای بلند با سیم‌پیچ نازک و منظم به شعاع b و جریان I و n دور در واحد طول را که محور آن در راستای محور Z اسـت، در نظر بگیرید. یک میله استوانه‌ای به شعاع $a(a<b)$ و تراوایی μ به طور هم محور داخل سیم‌پیچ قرار می‌گیرد. اندازه بـردار مغنـاطش بـه ترتیـب از نواحی $r<a$ و $a<r<b$ عبارت است از: (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $(\frac{\mu}{\mu_0}+1)nI$ و $(\frac{\mu}{\mu_0}-1)nI$ ۲) $(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}+1)nI$ و $(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}-1)nI$ ۳) $(\frac{\mu}{\mu_0}-1)nI$ و صفر ۴) $\frac{\mu}{\mu_0}nI$ و $(\frac{\mu}{\mu_0}+1)nI$

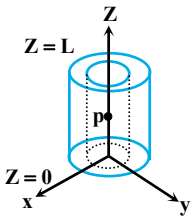
۲۱ـ یک آهنربای دائمی به شکل نیمکره‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای مغناطیس شدگی غیریکنواخت شعاعی با بردار $\vec{M}=Cr\hat{r}$ می‌باشد که در آن C یک عدد ثابت است. اندازهٔ پتانسیل برداری مغناطیسی $|\vec{A}|$ ناشی از این آهنربا در نقطه‌ای روی محور z کدام است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)



۱) $\frac{\mu_0 C}{2}(\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}})$ ۲) $\frac{\mu_0 C}{2}(\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}})$

۳) $\frac{\mu_0 C}{2}$ ۴) صفر

۲۲ـ مطابق شکل ناحیه $0\le z\le L$, $0\le\phi<2\pi$, $\frac{L}{2}\le r\le L$ توسـط دوقطبـی‌هـای مغناطیسـی بـا مغنـاطیس‌شـدگی (Magnetization) یکنواخت $M_0\hat{z}$ پر شده است و بقیه نواحی خلأ است. $\vec{B}$ چگالی شار مغناطیسی ناشی از این دو قطبی‌ها در نقطه $P(0,0,\frac{L}{2})$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)



۱) ۰

۲) $\mu_0 M_0\hat{a}_z$

۳) $\mu_0 M_0(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}})\hat{a}_z$

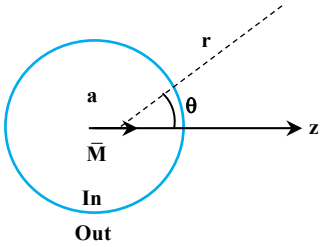
۴) $\mu_0 M_0(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}})\hat{a}_z$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۳ـ یک کره فرومغناطیس با شعاع a و مغناطش ثابت $\vec{M} = M_\circ \hat{a}_z$ در خلأ قرار دارد. میدان مغناطیسی درون و بیرون کره کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۹۰)



۱) $\vec{B}_{in} = \frac{2}{3} M_\circ \mu_\circ (\hat{a}_z + \cos\theta \hat{a}_r), \vec{B}_{out} = \frac{\mu_\circ}{3} \frac{M_\circ a^3}{r^3} (2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta)$

۲) $\vec{B}_{in} = \frac{2}{3} \mu_\circ \vec{M}, \vec{B}_{out} = \frac{\mu_\circ}{3} \frac{M_\circ a^3}{r^3} (2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta)$

۳) $\vec{B}_{in} = \frac{2}{3} M_\circ \mu_\circ (\hat{a}_z + \sin\theta \hat{a}_\theta), \vec{B}_{out} = \frac{\mu_\circ}{3} \frac{M_\circ a^3}{r^3} (2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta)$

۴) $\vec{B}_{in} = \frac{1}{3} \mu_\circ \vec{M}, \vec{B}_{out} = \frac{2\mu_\circ}{3} \frac{M_\circ a^3}{r^3} (2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta)$

۲۴ـ یک سیم مستقیم حامل جریان I در داخل یک لوله آهنی استوانه‌ای شکل به طور هم‌محور قرار گرفته است. لوله دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و هم‌چنین پذیرفتاری مغناطیسی χ_m می‌باشد. چگالی جریان مغناطش J_M این مسئله کدام است؟

(فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{I\chi_m}{2\pi} a\hat{\theta}$

۲) $\frac{I\chi_m}{2\pi r} a\hat{\theta}$

۳) $\frac{I^2\chi_m}{2\pi} a\hat{\theta}$

۴) صفر

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

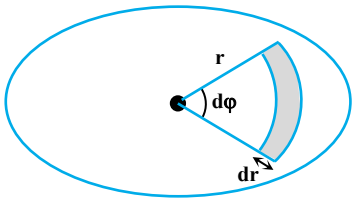
پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوازدهم

۱ـ گزینه «۴» با استفاده از تعریف مواد دیا و پارامغناطیس و رابطه $\chi_m = \mu_r - ۱$ فقط گزینه (۴) درست می‌باشد.

۲ـ گزینه «۱» اگر $\hat{a}_i$ بردار یکه در جهت $\vec{M}$ باشد داریم:

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times (۱۰ M_۰) \hat{a}_i = ۰$$

۳ـ گزینه «۴» مطابق شکل یک المان سطحی به شعاع r و زاویه مرکزی $d\varphi$ و ضخامت dr را در نظر می‌گیریم. ابتدا ممان دوقطبی مغناطیسی حاصل از المان سطحی را محاسبه می‌کنیم و سپس با گرفتن انتگرال از آن روی کل سطح مقدار ممان دوقطبی مغناطیسی قرص را به دست می‌آوریم. برای محاسبه ممان المان سطحی ابتدا باید جریان ایجاد شده توسط آن را به دست آوریم. طبق تعریف چگالی بار سطحی مقدار بار قرار گرفته روی المان سطحی برابر است با:

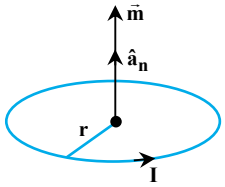


$$\sigma = \frac{dQ}{ds} \Rightarrow dQ = \sigma ds = \sigma r\, dr\, d\varphi$$

با استفاده از تعریف سرعت زاویه‌ای و جریان الکتریکی مقدار جریان حاصل از این المان سطحی را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} dI &= \frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma r\, dr\, d\varphi}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow dI = \sigma r\, dr \omega$$

این المان سطحی هنگام چرخش قرص یک حلقه جریان با مساحت $A = \pi r^۲$ را تشکیل می‌دهد.



همان طور که از قبل می‌دانیم ممان دوقطبی مغناطیسی ناشی از این حلقه جریان برابر است با:

$$d\vec{m} = AI\hat{a}_n = \pi r^۲ (\sigma r\, dr\omega) \hat{a}_z = \pi \sigma r^۳\, dr \omega \hat{a}_z$$

حال که مقدار ممان دوقطبی این المان سطحی را به دست آوردیم، با انتگرال‌گیری از آن روی کل سطح قرص، ممان دوقطبی مغناطیسی کل قرص را به دست می‌آوریم:

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \left(\int_۰^a \pi \sigma r^۳ \omega dr\right) \hat{a}_z = \frac{۱}{۴} \pi \omega \sigma a^۴ \hat{a}_z$$

۴ـ گزینه «۳» برای محاسبه میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از $\vec{M}$ ابتدا باید این دوقطبی‌ها را با جریان‌های سطحی و حجمی مغناطیسی مقید معادل کنیم.

با توجه به تعاریف چگالی جریان‌های مقید داریم:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{a}{r} \hat{a}_r\right) = ۰$$

برای محاسبه چگالی جریان سطحی مقید با توجه به شکل باید چهار سطح را در نظر بگیریم:

۱ـ سطح داخلی به شعاع a و بردار عمود بر سطح $-\hat{a}_r$:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{a}_n = \left(\frac{A}{r} \hat{a}_r\right) \times -\hat{a}_r = ۰$$

۲ـ سطح خارجی به شعاع b و بردار عمود بر سطح $\hat{a}_r$:

$$\vec{J}_{ms} = \left(\frac{A}{r} \hat{a}_r\right) \times \hat{a}_r = ۰$$

۳ـ سطح بالایی استوانه با بردار عمود بر سطح $\hat{a}_z$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{J}_{ms} &= \frac{a}{r} \hat{a}_r \times \hat{a}_z \\ \hat{z} &= \cos\hat{a}_r - \sin\theta \hat{a}_\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{J}_{ms} = -\frac{a}{r} \sin\theta \hat{a}_\varphi$$

چون صفحه بالایی با محور z زاویه $\theta = \frac{\pi}{۲}$ می‌سازد بنابراین $\vec{J}_{ms}$ برابر است با:

$$\vec{J}_{ms} = -\frac{a}{r} \sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) a_\varphi = -\frac{a}{r} a_\varphi$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴ـ سطح پایینی استوانه با بردار عمود بر سطح $-\hat{a}_z$:

$$\vec{J}_{ms}=\frac{a}{r}\hat{a}_r\times(-\hat{a}_z)=\frac{a}{r}\hat{a}_r\times(-\cos\theta a_r+\sin\theta\hat{a}_\theta)=\frac{a}{r}\sin\theta\hat{a}_\varphi$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{J}_{ms}=\frac{a}{r}\sin(\frac{\pi}{2})\hat{a}_\varphi=\frac{a}{r}\hat{a}_\varphi$$

جریان‌های سطحی واقع در صفحات $z=\frac{L}{2}$ و $z=-\frac{L}{2}$ تشکیل یک دوقطبی مغناطیسی می‌دهند. لذا عملاً با دو دوقطبی مغناطیسی مواجه هستیم که به فاصله L از یکدیگر واقع‌اند. از طرفی میدان مغناطیسی ناشی از یک 2^n قطبی مغناطیسی با ضریب $\frac{1}{r^{n+2}}$ متناسب است. لذا میدان مغناطیسی ناشی از یک ۴ قطبی مغناطیسی با ضریب $\frac{1}{r^4}$ متناسب است.

۵ـ گزینه «۳» چگالی جریان سطحی سیم‌پیچ هوایی باید در خلاف جهت چگالی جریان سطحی آهنربای دائم باشد.

چگالی جریان سطحی سیم‌پیچ برابر است با: $J_1=\frac{nI}{L}$, $J_2=\vec{M}\times\hat{a}_n=3\hat{a}_z\times\hat{a}_r=3\hat{a}_\varphi$

$$\vec{J}_2=-\vec{J}_1\Rightarrow\frac{10I}{10^{-3}}=-3\hat{a}_\varphi\Rightarrow I=0/3mA(-\hat{a}_\varphi)$$

۶ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه $\vec{M}=(\mu_r-1)\vec{H}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\oint_c\vec{M}.d\vec{\ell}=(\mu_r-1)\oint_c\vec{H}.d\vec{\ell}=2\oint_c\vec{H}.d\vec{\ell}$$

با توجه به اینکه $\vec{H}$ در جهت $-\hat{a}_\varphi$ و $d\vec{\ell}$ در جهت $+\hat{a}_\varphi$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\oint_c\vec{H}.d\vec{\ell}=-\frac{I_{in}}{2}=-1$$

توجه شود که جریان گذرنده از درون مسیر C برابر با نصف جریان کل رسانای داخلی یعنی ۱ آمپر می‌باشد. لذا: $\oint\vec{M}.d\vec{\ell}=2\oint\vec{H}.d\vec{\ell}=-2\times1=-2$

۷ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن $\vec{H}$ در مرکز کره ابتدا باید مقدار $\vec{B}$ را در مرکز کره به دست آوریم برای به دست آوردن مقدار $\vec{B}$ توسط بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ ابتدا جریان‌های سطحی و حجمی مقید ناشی از $\vec{M}$ را به دست می‌آوریم و سپس میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از این دو جریان در مرکز، را محاسبه می‌کنیم.

برای به دست آوردن جریان‌های مقید سطحی و حجمی ناشی از $\vec{M}$ با استفاده از روابط معرفی شده در متن درس داریم:

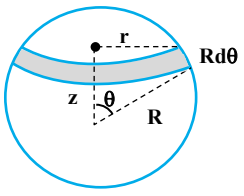
$$\vec{J}_m=\vec{\nabla}\times\vec{M}=\vec{\nabla}\times(M_\circ\hat{a}_z)=\circ$$

$$\vec{J}_{ms}=\vec{M}\times\hat{a}_n=\vec{M}\times\hat{a}_r$$

برای محاسبه $\vec{J}_{ms}$ چون $\hat{r}$ در مختصات کروی می‌باشد باید $\vec{M}$ هم به دستگاه کروی منتقل شود تا بتوانیم ضرب را انجام دهیم:

$$\left.\begin{aligned}\vec{M}&=M_\circ\hat{a}_z\\ \hat{z}&=\cos\theta\hat{a}_r-\sin\theta\hat{a}_\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{J}_{ms}=M_\circ(\cos\hat{a}_r-\sin\theta\hat{a}_\theta)\times\hat{a}_r=M_\circ\sin\theta\hat{a}_\varphi$$

بنابراین بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ فقط یک جریان سطحی $\vec{J}_{ms}$ روی سطح کره ایجاد می‌کند. در نتیجه باید بردار $\vec{B}$ حاصل از $\vec{J}_{ms}$ را در مرکز کره به دست آوریم. برای به دست آوردن $\vec{B}$ مطابق شکل زیر یک جزء دیفرانسیلی حلقه‌ای شکل روی سطح کره در نظر می‌گیریم. میدان مغناطیسی ناشی از این حلقه جریان با توجه به مطالبی که در فصل میدان مغناطیسی ساکن گفتیم به صورت زیر می‌باشد:



$$d\vec{B}=\frac{\mu_\circ Ir^2}{2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فرض کردیم که مقدار جریان حلقه I می‌باشد که با استفاده از مقدار J_{ms} ، I به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned}\vec{I}&=\vec{J}_{sm}R d\theta\\ \vec{J}_{sm}&=M_\circ \sin\theta\,\hat{a}_\varphi\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{I}=M_\circ \sin\theta\, R\, d\theta\hat{a}_\varphi$$

با توجه به شکل می‌توان مقدار r و z را برحسب شعاع کره R و θ بیان کرد:

$$r=R\sin\theta\ ,\ z=R\cos\theta$$

با جایگذاری r و z در رابطه $d\vec{B}$ خواهیم داشت:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_\circ(M_\circ R\sin\theta d\theta)(R\sin\theta)^2}{2R^3}\hat{z}=\frac{\mu_\circ M_\circ}{2}\sin^3\theta d\theta\hat{a}_z$$

حال با انتگرال گرفتن روی کل سطح کره از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\vec{B}=\int_\circ^\pi d\vec{B}=\int_\circ^\pi\frac{\mu_\circ M_\circ}{2}\sin^3\theta d\theta\hat{a}_z=\frac{2}{3}\mu_\circ M_\circ\hat{a}_z$$

در صورت تست مقدار $\vec{H}$ در مرکز کره از ما خواسته شده است بنابراین با استفاده از تعریف $\vec{H}$ داریم:

$$\left.\begin{aligned}\vec{H}&=\frac{\vec{B}}{\mu_\circ}-\vec{M}\\ \vec{B}&=\frac{2}{3}\mu_\circ M_\circ\hat{a}_z\\ \vec{M}&=M_\circ\hat{a}_z\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{H}=\frac{2}{3}M_\circ\hat{a}_z-M_\circ\hat{a}_z=-\frac{1}{3}M_\circ\hat{a}_z$$

۸ـ گزینه «۱» برای به دست آوردن جریان سطحی مقید باید بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ را درون ماده مغناطیسی پیدا کنیم. برای به دست آوردن $\vec{M}$ باید ابتدا $\vec{H}$ و $\vec{B}$ را به دست آوریم. با استفاده از قانون آمپر در ناحیه $a<r<b$ داریم:

$$\oint\vec{H}.d\vec{\ell}=I\Rightarrow\vec{H}=\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

طبق رابطه $\vec{B}=\mu_\circ\mu_r\vec{H}$ می‌توان نوشت:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ\mu_r I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi\Rightarrow\vec{B}=\frac{3\mu_\circ I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

حال می‌توانیم با استفاده از رابطه $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_\circ}-\vec{M}$ مقدار $\vec{M}$ را به دست آوریم:

$$\vec{M}=\frac{\vec{B}}{\mu_\circ}-\vec{H}\Rightarrow\vec{M}=\frac{3I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi-\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi=\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$$

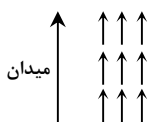
با توجه به مقدار $\vec{M}$ چگالی جریان سطحی مقید برابر است با:

$$\vec{J}_{ms}=\vec{M}\times\hat{a}_r=\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi\times\hat{a}_r\Big|_{r=b}=\frac{I}{\pi b}(-\hat{a}_z)$$

$\vec{J}_{ms}$ چگالی جریان مقید روی سطح $r=b$ می‌باشد. برای به دست آوردن جریان (I_{bound}) بر روی این سطح، از تعریف چگالی جریان سطحی استفاده می‌کنیم:

$$J_{ms}=\frac{I_{bound}}{s}=\frac{I_{bound}}{2\pi b}\Rightarrow I_{bound}=J_{ms}2\pi b\Rightarrow I_{bound}=-2I\Rightarrow\frac{I_{bound}}{I}=-2$$

۹ـ گزینه «۲» طبق تعریف مواد پارامغناطیس و مواد دی‌الکتریک گزینه ۴ درست می‌باشد. در هر دو حالت می‌توان هم خط شدن را به صورت روبرو نمایش داد که در راستای میدان است. از آنجا که در مغناطواستاتیک می‌توان از مدل گیلبرت برای دو قطبی مغناطیسی استفاده کرد یعنی یک بار منفی مغناطیسی به ابتدای بردار و یک بار مثبت مغناطیسی به انتهای بردار نسبت داد مسئله کاملاً مشابه مسئله الکترواستاتیکی دی‌الکتریک می‌شود.



www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۰ـ گزینه «۴» برای محاسبه جریان سطحی مقید $\vec{J}_{ms}$ ابتدا باید بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ را در ماده مغناطیسی به دست آوریم. برای به دست آوردن $\vec{M}$ طبق رابطه $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_\circ}-\vec{M}$ نیاز به $\vec{B}$ و $\vec{H}$ در ماده مغناطیسی داریم. میدان $\vec{B}$ در صورت سؤال داده شده است. برای به دست آوردن $\vec{H}$ می‌توانیم از قانون آمپر استفاده کنیم:

$$a<r<b \Rightarrow \oint \vec{H}.d\vec{\ell}=I \Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

حال با جایگذاری $\vec{B}$ و $\vec{H}$ در رابطه $\vec{M}=\frac{\vec{B}}{\mu_\circ}-\vec{H}$ داریم:

$$\vec{M}=\frac{\vec{B}}{\mu_\circ}-\vec{H}=(\frac{I}{2\pi a}-\frac{I}{2\pi r})\hat{a}_\varphi$$

با به دست آوردن $\vec{M}$ می‌توانیم چگالی جریان سطحی مقید را محاسبه کنیم که برابر است با:

$$\vec{J}_{ms}=\vec{M}\times\hat{a}_n\Big|_{r=b}=(\frac{1}{2\pi a}-\frac{1}{2\pi r})\hat{a}_\varphi\times\hat{a}_r=(\frac{I}{2\pi a}-\frac{I}{2\pi r})(-\hat{a}_z)$$

به ازای $r=b$ خواهیم داشت:

$$\vec{J}_{ms}=\frac{I(a-b)}{2\pi ab}\hat{a}_z$$

۱۱ـ گزینه «۲» برای محاسبه جریان مقید سطحی نیاز به بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ در ماده مغناطیسی داریم. چون که ماده مغناطیسی داده شده خطی می‌باشد می‌توانیم از رابطه $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ بردار $\vec{M}$ را به دست آوریم. پس ابتدا باید $\vec{H}$ را محاسبه کنیم. با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$a<r<3a \Rightarrow \oint \vec{H}.d\vec{\ell}=I \Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

حال که مقدار $\vec{H}$ را به دست آوردیم می‌توانیم با استفاده از روابط $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ و $\chi_m=\mu_r-1$ مقدار $\vec{M}$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\hat{M}=(\mu_r-1)\vec{H}=(3-1)\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi=\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$$

با استفاده از تعریف چگالی جریان سطحی مقید داریم:

$$\vec{J}_{sb}=\vec{M}\times\hat{a}_n=\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi\times(-\hat{a}_z)=-\frac{I}{\pi r}\hat{a}_r$$

به ازای $r=2a$ و $I=2$ خواهیم داشت:

$$\vec{J}_{sb}=\frac{-1}{\pi a}\hat{a}_r$$

۱۲ـ گزینه «۲» برای محاسبه جریان مقید سطحی نیاز به بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ در ماده مغناطیسی داریم. چون ماده مغناطیسی داده شده خطی است می‌توانیم از رابطه $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ بردار $\vec{M}$ را به دست آوریم. پس ابتدا باید $\vec{H}$ را محاسبه کنیم. با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$a<r<3a \Rightarrow \oint \vec{H}.d\vec{\ell}=I \Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

حال که مقدار $\vec{H}$ را به دست آوردیم، می‌توانیم با استفاده از روابط $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ و $\chi_m=\mu_r-1$ مقدار $\vec{M}$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\vec{M}=(\mu_r-1)\vec{H}=(3-1)\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi=\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$$

با استفاده از تعریف چگالی جریان سطحی مقید داریم:

$$\vec{J}_{sb}=\vec{M}\times\hat{a}_n=\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi\times(-\hat{a}_z)=-\frac{I}{\pi r}\hat{a}_r$$

به ازای $r=2a$ و $I=2$ خواهیم داشت:

$$\vec{J}_{sb}=\frac{-1}{\pi a}\hat{a}_r$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۳ـ گزینه «۱» دو بار وقتی حول محور z می‌چرخند همانند یک حلقه جریان عمل می‌کنند، بنابراین گشتاور دو قطبی آن‌ها مانند گشتاور یک حلقه جریان می‌باشد $(\vec{m}=IS)$. پس ابتدا باید جریان حاصل از آن‌ها را به دست آوریم:

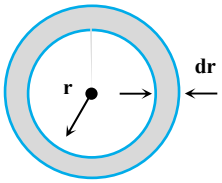
$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{۲Q}{\frac{۲\pi}{\omega}}=\frac{Q\omega}{\pi}$$

بنابراین برای دو قطبی به دست می‌آید:

$$\vec{m}=IS\hat{n}=(\frac{Q\omega}{\pi})(\pi L^{۲})(-\hat{a}_z)=-QL^{۲}\omega\hat{a}_z$$

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا مطابق شکل یک جزء دیفرانسیلی حلقه‌ای شکل از دیسک را در نظر می‌گیریم. این جزء دیفرانسیلی همانند یک دوقطبی مغناطیسی عمل می‌کند. بنابراین با به دست آوردن گشتاور مغناطیسی آن و سپس انتگرال‌گیری از این گشتاور روی کل صفحه مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی این دیسک به دست می‌آید. برای محاسبه گشتاور مغناطیسی جزء دیفرانسیل حلقه‌ای شکل ابتدا باید جریان گذرنده از آن را به دست آوریم. با استفاده از تعریف چگالی جریان داریم:

$$\vec{k}=۲r\hat{a}_\varphi \Rightarrow dI=kdr=۲rdr$$



حال مقدار گشتاور مغناطیسی بر دیفرانسیلی را با استفاده از رابطه $m=IS$ به دست می‌آوریم که S مساحت حلقه و I جریان گذرنده از آن می‌باشد. در نهایت با انتگرال‌گیری از m روی کل دیسک گشتاور دوقطبی مغناطیسی دیسک را به دست می‌آوریم:

$$dm=(\pi r^{۲})(dI)=۲\pi r^{۳}dr \Rightarrow m=\int_{۰}^{a} dm=\int_{۰}^{a} ۲\pi r^{۳}dr=\frac{\pi a^{۴}}{۲}$$

۱۵ـ گزینه «۴» کل ناحیه کروی را می‌توان به منزله یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور روبرو در نظر گرفت:

$$\vec{m}=M_{۰}(\frac{۴}{۳}\pi a^{۳})(\hat{a}_z)$$

از طرفی پتانسیل مغناطیسی اسکالر در اطراف یک دو قطبی مغناطیسی به صورت مقابل می‌باشد:

$$V_m=\frac{\vec{m}.\hat{a}_r}{۴\pi r^{۳}}=\frac{(\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}M_{۰})(\hat{a}_z.\hat{a}_r)}{۴\pi r^{۲}}=\frac{M_{۰}a^{۳}\cos\theta}{۳r^{۲}}$$

به ازای $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $r=۲a$ خواهیم داشت:

$$V_m=\frac{M_{۰}a^{۳}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{۳(۲a)^{۲}}=\frac{M_{۰}a\sqrt{۲}}{۲۴}$$

۱۶ـ گزینه «۱» چگالی شار مغناطیسی ناشی از جریان سطحی آزاد همانند چگالی شار مغناطیسی ناشی از یک سیملوله با چگالی جریان $nI=J$ محاسبه می‌گردد.

$$\vec{B}_۱=\mu_{۰}nI\hat{a}_z=۲\mu_{۰}\hat{a}_z$$

با توجه به اینکه برای فصل مشترک دو محیط، میدان مغناطیسی فقط به صورت مماسی می‌باشد، خواهیم داشت:

$$H_{۱t}=H_{۲t} \Rightarrow H_۱=H_۲=\frac{\vec{B}_۱}{\mu_{۰}}=۲\hat{a}_z$$

چون محیط دیامغناطیس است بنابراین یک محیط خطی می‌باشد و می‌توانیم از رابطه‌های $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ و $\chi_m=\mu_r-۱$ استفاده کنیم و $\vec{M}$ را به دست آوریم:

$$\vec{M}=(\mu_r-۱)\vec{H} \Rightarrow \vec{M}=(\frac{۱}{۲}-۱)\times ۲\hat{a}_z=-۱\hat{a}_z$$

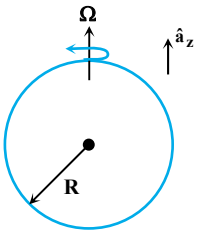
مقدار $\vec{M}$ را داریم، پس می‌توانیم مقدار چگالی جریان سطحی مقید را به دست آوریم:

$$\vec{J}_{ms}=\vec{M}\times\hat{a}_n=-\hat{a}_z\times\hat{a}_r=-\hat{a}_\varphi$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ گزینه «۱» باید از رابطه‌ی کلی ممان دو قطبی استفاده کنیم. از آنجا که جریان را می‌توان بـا $\vec{J}=\rho\vec{V}=\rho\vec{\Omega}\times\vec{r}=\rho\Omega\hat{z}\times\vec{r}=\rho\Omega r\sin\theta\hat{a}_\varphi$ نوشت خواهیم داشت:



$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int\vec{r}'\times\vec{J}(r')dv',\ \vec{J}=r'\rho\Omega\sin\theta\hat{a}_\varphi\Rightarrow\vec{m}=\frac{1}{2}\int_v r'r'\rho\Omega\sin\theta r'^2\sin^2\theta d\theta d\varphi dr'\,\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow\vec{m}=\frac{1}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho\Omega r'^4dr'\sin^3\theta\,d\theta d\varphi\hat{a}_z\Rightarrow\vec{m}=\frac{1}{2}\rho\Omega(\frac{1}{5}R^5)2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\hat{a}_z$$

بنابراین می‌توان با استفاده از رابطه‌ی چگالی بار و مقدار بار رابطه را به این صورت بر حسب Q نوشت:

$$\vec{m}=\frac{4\pi}{3}\rho\Omega\frac{1}{5}R^5\hat{a}_z\ ,\ \rho=\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}\Rightarrow\vec{m}=\frac{1}{5}Q\Omega R^2\hat{a}_z$$

۱۸ـ گزینه «۱»

روش اول: برای میدان $\vec{B}$ با استفاده از رابطه‌ی داده شده داریم: $\vec{B}(\vec{r})=-\mu_0\vec{\nabla}\varphi^*(\vec{r})+\mu_0\vec{M}(\vec{r})$ $\quad\vec{M}(r)=k_0r^2\hat{e}_\varphi$

برای به‌دست آوردن $\varphi^*(r)$ ابتدا باید ρ_M و σ_M را به‌دست آوریم: $\rho_M=-\vec{\nabla}.\vec{M}=-\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial\varphi}(k_0r^2)]=0$, $\sigma_M=\vec{M}.\hat{n}=k_0r^2\hat{e}_\varphi.\hat{k}=0$

بنابراین $\varphi^*(r)$ چه در داخل و چه در خارج استوانه برابر صفر است. $\Rightarrow\vec{B}_{in}(\vec{r})=0+\mu_0\vec{M}(\vec{r})=\mu_0k_0r^2\hat{e}_\varphi$, $\vec{B}_{out}(\vec{r})=0+0=0$

چون در بیرون استوانه مغناطشی وجود ندارد پس $\vec{M}=0$ است.

روش دوم: در این روش از چگالی جریان‌های مقید استفاده می‌کنیم. به این صورت که ماده مغناطیسی داده شده را با جریان‌های سطحی و حجمی مقید معادل می‌کنیم. با استفاده از تعریف چگالی جریان حجمی و سطحی مقید داریم:

$$\vec{J}_m=\vec{\nabla}\times\vec{M}=\vec{\nabla}\times(k_0r^2\hat{a}_\varphi)=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & k_0r^3 & 0\end{vmatrix}=3k_0r\hat{a}_z$$

$$\vec{J}_{ms}=\vec{M}\times\hat{a}_n=k_0r^2\hat{a}_\varphi\times\hat{a}_r\Big|_{r=R}=-k_0R^2\hat{a}_z$$

حال با استفاده از قانون آمپر بردار $\vec{B}$ را در داخل و خارج استوانه محاسبه می‌کنیم: $\oint\vec{H}.d\vec{\ell}=I_{in}\Rightarrow\frac{\vec{B}}{\mu_0}2\pi r=I_{in}\qquad r<R$

برای محاسبه مقدار I_{in} باید از تعریف چگالی جریان حجمی استفاده کنیم:

$$J_m=\frac{dI_{in}}{ds}\Rightarrow I_{in}=\iint_S J_m ds\Rightarrow I_{in}=\int_0^{2\pi}\int_0^r 3k_0r\,r\,dr\,d\varphi\Rightarrow I_{in}=2\pi k_0r^3$$

با جایگذاری I_{in} در قانون آمپر خواهیم داشت: $\vec{B}=\frac{\mu_0\times2\pi k_0r^3}{2\pi r^2}\hat{a}_\varphi=\mu_0k_0r^2\hat{a}_\varphi\qquad r<R$

حال برای محاسبه $\vec{B}$ در ناحیه $r>R$ باز از قانون آمپر استفاده می‌کنیم. در این حالت هر دو جریان سطحی و حجمی مقید را باید در نظر بگیریم.

$$I_S=J_{ms}\pi R\Rightarrow I_S=-k_0R^2\times2\pi R=-2\pi k_0R^3$$

$$\oint\vec{B}.d\vec{\ell}=\mu_0(I_S+I_{in}\Big|_{r=R})=\mu_0(-2\pi k_0R^3+2\pi k_0R^3)=0$$

چون کل جریان دربرگرفته شده برای مسیرهای خارج از استوانه صفر است بنابراین از قانون آمپر نتیجه می‌گیریم که بردار $\vec{B}$ در خارج استوانه صفر می‌باشد.

۱۹ـ گزینه «۱» ابتدا چگالی بارهای مغناطیسی درون کره را به‌دست می‌آوریم: $\rho_m=-\vec{\nabla}.\vec{M}=0$

$$\rho_{ms}=\vec{M}.\hat{a}_n\Rightarrow\begin{cases}r=b\Rightarrow\rho_{ms_2}=\vec{M}.\hat{a}_r=M_0\cos\theta\\ r=a\Rightarrow\rho_{ms_1}=\vec{M}.(-\hat{a}_r)=-M_0\cos\theta\end{cases}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پتانسیل اسکالر مغناطیسی ناشی از هر دو چگالی بار سطحی را در مرکز کره به‌دست می‌آوریم:

$$dV_1 = \frac{dq}{4\pi a} = \frac{\rho_{ms} ds}{4\pi a} = \frac{\rho_{ms} a \sin\theta}{4\pi} d\theta d\varphi$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا داریم:

$$V_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{-M_0 a \cos\theta \sin\theta}{4\pi} d\theta d\varphi = \frac{M_0 a}{2}\frac{\cos^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 0$$

برای چگالی بار ρ_{ms_2} هم پتانسیل صفر به‌دست می‌آید.

۲۰ـ گزینه «۳» میدان مغناطیسی درون یک سیم لوله به صورت مقابل می‌باشد:

$$B = \mu nI \Rightarrow \vec{H} = nI$$

بردار مغناطش برابر است با:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{\mu}{\mu_0} nI - nI = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1) nI$$

و برای فضای آزاد بردار مغناطش صفر به‌دست می‌آید.

۲۱ـ گزینه «۴» چگالی جریان‌های مقید سطحی و حجمی از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \hat{a}_n = \begin{cases} 0 & r = b \quad \text{سطح} \\ 0 & r = a \quad \text{سطح} \\ Cr\,\hat{a}_\varphi & \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{سطح} \end{cases}$$

با توجه به اینکه پتانسیل مغناطیسی برداری روی محور یک حلقه جریان‌دار (در جهت $\hat{\varphi}$) برابر صفر است، بنابراین پتانسیل مغناطیسی دیسک جریان‌دار (در جهت $\hat{a}_\varphi$) نیز روی محور آن صفر خواهد بود.

۲۲ـ گزینه «۳» چگالی جریان‌های مقید سطحی و حجمی به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \hat{a}_n = \begin{cases} -M_0 \hat{a}_\varphi & r = \frac{L}{2} \\ M_0 \hat{a}_\varphi & r = L \end{cases}$$

جریان‌های سطحی فوق را می‌توان همانند یک سیملوله محدود فرض کرد. با توجه به اینکه چگالی شار مغناطیسی در داخل سیملوله محدود به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{2}[\cos\alpha + \cos\beta]\hat{a}_z$$

خواهیم داشت:

چگالی شار مغناطیسی ناشی از سطح $r = L$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 M_0}{2}\left[\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{L^2 + (\frac{L}{2})^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{L^2 + (\frac{L}{2})^2}}\right]\hat{a}_z$$

چگالی شار مغناطیسی ناشی از سطح $r = \frac{L}{2}$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 M_0}{2}\left[\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2}}\right]\hat{a}_z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 M_0 (\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}})\hat{a}_z \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 M_0 (\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}})\hat{a}_z$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۳ـ گزینه «۲» به سادگی می‌توان با یافتن $\vec{B}_{in}$ پاسخ را یافت. چگالی بار مغناطیسی سطحی برابر است با:

$$\sigma_M = \hat{n}.\vec{M} = M\cos\theta$$

و برای بار حجمی داریم:

$$\rho_M = \vec{\nabla}.\vec{M} = 0$$

بنابراین برای پتانسیل مغناطیسی در درون کره خواهیم داشت:

$$\phi_M = \frac{1}{4\pi}\int da\,\frac{\sigma_M}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{Ma^2}{4\pi}\int d\varphi d(\cos\theta)\frac{\cos\theta}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

اگر فرض کنیم که $\vec{r} = r\hat{z}$ است می‌توان انتگرال را محاسبه کرد، داریم:

$$\phi_M = \frac{Ma^2}{4\pi}\int d\varphi d(\cos\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{z}}{a^{n+1}}P_n(\cos\theta)\cos\theta$$

که در آن از بسط بر حسب تابع لژاندار استفاده شده است. از تعامد چند جمله‌ای‌های لژاندار و با توجه به این که $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ است می‌توان نوشت:

$$\phi_M = \frac{Ma^2}{4\pi}2\pi\frac{2}{3}\times\frac{z}{a^2} = \frac{1}{3}Mz$$

ما به ϕ_M در کل کره نیاز داریم اما با یک حقه می‌توان آن را به دست آورد که البته همواره کار نمی‌کند. باید توجه داشت که می‌توان انتگرال را با استفاده از قضیه‌ی جمع به دقت حساب کرد، حال داریم:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_M = -\frac{1}{3}\vec{\nabla}(Mz) = -\frac{1}{3}M\hat{z} = -\frac{1}{3}\vec{M}$$

بنابراین برای $\vec{B}$ خواهیم داشت:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = \frac{2\mu_0}{3}\vec{M}$$

۲۴ـ گزینه «۴» میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان برابر است با:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

فرض کرده‌ایم که سیم روی محور z قرار گرفته است. بردار مغناطیس‌شدگی درون لوله آهنی برابر است با:

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H} = \frac{I\chi_m}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

چگالی جریان مغناطش سطحی از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$J_{ms} = \vec{M}\times\hat{a}_r = 0$$

و چگالی جریان مغناطش حجمی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$J_m = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{rI\chi_m}{2\pi r} & 0\end{vmatrix} = 0$$

www.modaresanesharif.ac.ir

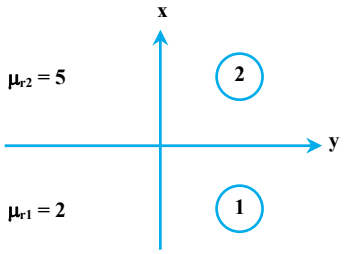
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل سیزدهم

«شرایط مرزی در مغناطیس ساکن»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سیزدهم

۱ـ فصل مشترک دو مادهٔ یکنواخت، خطی و همسان در $x = 0$ قرار دارد. جریان سطحی $\bar{k} = 5\hat{a}_y (A/m)$ در فصل مشترک جاری است. اگر $\bar{H}_1 = 4\hat{a}_x - 10\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$ باشد، مقدار $\bar{H}_2$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $1/6\hat{a}_x - 10\hat{a}_y + \hat{a}_z$

۲) $1/2\hat{a}_x - 12\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$

۳) $1/6\hat{a}_x - 15\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$

۴) $4\hat{a}_x - 15\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$

۲ـ صفحه $z = 0$ فصل مشترک دو ناحیهٔ (۱) و(۲) بوده و دارای جریان آزاد با چگالی سطحی $\vec{K} = \frac{1}{\mu_0}(-\hat{a}_x + 3\hat{a}_y)$ (آمپربر متر) می‌باشد. در ناحیهٔ (۱) $(z < 0)$ داریم $\mu_{r_1} = 2$ و در ناحیهٔ (۲) $(z > 0)$ داریم $\mu_{r_2} = 3$. اگر در ناحیهٔ (۱) داشته باشیم $\vec{B}_1 = (2\hat{a}_x - \hat{a}_y + 2\hat{a}_z)\frac{Wb}{m^2}$، بردار مغناطیس شدگی $\vec{M}_2$ در ناحیه (۲) برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۳)

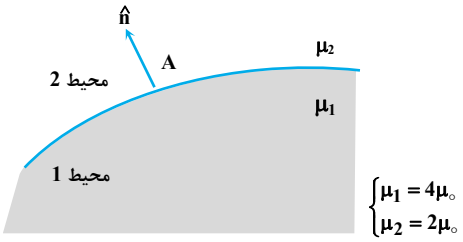
۱) $\frac{1}{\mu_0}(8\hat{a}_x + \hat{a}_y)$

۲) $\frac{1}{\mu_0}(8\hat{a}_x + \hat{a}_y + \frac{4}{3}\hat{a}_z)$

۳) $\frac{1}{\mu_0}(8\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \frac{4}{3}\hat{a}_z)$

۴) $\frac{1}{\mu_0}(8\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - \frac{4}{3}\hat{a}_z)$

۳ـ فصل مشترک دو مادهٔ مغناطیسی همگن در شکل دیده می‌شود. در نقطه A از فصل مشترک، $\hat{a}_n$ بردار واحد عمود بر فصل مشترک را نشان می‌دهد. اگر $\vec{H}_1$ میدان در نقطه A در طرف محیط اول باشد، بردار مغناطیس شدگی $\vec{M}$ در همین نقطه در طرف محیط دوم کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)



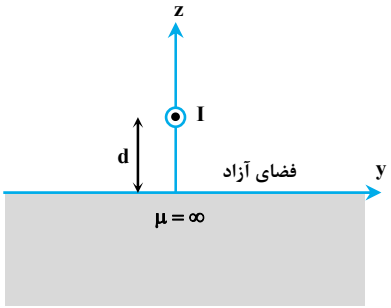
۱) $\vec{H}_1 + \hat{a}_n(\vec{H}_1.\hat{a}_n)$

۲) $\vec{H}_1 - \hat{a}_n(\vec{H}_1.\hat{a}_n)$

۳) $\vec{H}_1 + 3\hat{a}_n(\vec{H}_1.\hat{a}_n)$

۴) $3\vec{H}_1 + 3\hat{a}_n(\vec{H}_1.\hat{a}_n)$

۴ـ ناحیه $z > 0$ فضای آزاد و $z < 0$ محیطی با $\mu = \infty$ است. سیم حامل جریان I درجهت محور x در فضای آزاد به فاصلهٔ d از صفحهٔ $z = 0$ قرار دارد. نیروی وارد بر واحد طول سیم چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)



۱) $-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}\hat{a}_z$

۲) $+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}\hat{a}_z$

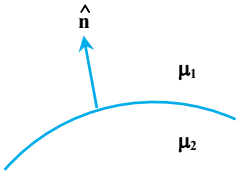
۳) $-\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\hat{a}_z$

۴) $+\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\hat{a}_z$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۵ـ در مرز دو محیط با ضرائب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 و μ_2 چگالی جریان سطحی مقید $\vec{J}_{sb}$ است. چه رابطه‌ای بین بردار چگالی دو قطبی مغناطیسی $\vec{M}$ دو طرف مرز برقرار است؟ ($\hat{a}_n$ بردار واحد قائم بر نقطه‌ای از مرز است.) (برق ـ سراسری ۸۶)



۱) $\hat{a}_n \times \vec{M}_1 = \hat{a}_n \times \vec{M}_2 + \vec{J}_{sb}$

۲) $\hat{a}_n \times \vec{M}_1 = \hat{a}_n \times \vec{M}_2 - \vec{J}_{sb}$

۳) $\hat{a}_n \times \vec{M}_1 = -\hat{a}_n \times \vec{M}_2 - \vec{J}_{sb}$

۴) $\hat{a}_n \times \vec{M}_1 = \hat{a}_n \times \vec{M}_2$

۶ـ جریان سطحی $\vec{K} = 9\hat{a}_y(\frac{A}{m})$ از صفحه $z = 0$ می‌گذرد. نفوذپذیری ناحیه $z < 0$، $\mu_1 = 4\mu_0$ و نفوذپذیری ناحیه $z > 0$، $\mu_2 = 3\mu_0$ است. اگر در ناحیه $z > 0$، $\vec{H}_2 = (3\hat{a}_x + 8\hat{a}_z)(\frac{A}{m})$ باشد، بردار میدان مغناطیسی $\vec{B}_1$ در ناحیه $z < 0$، در نزدیکی صفحه $z = 0$ کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $24\mu_0(-\hat{a}_x + \hat{a}_z)$

۲) $24\mu_0(\hat{a}_x - \hat{a}_z)$

۳) $24\mu_0(2\hat{a}_x + \hat{a}_z)$

۴) $4\mu_0(-3\hat{a}_x + 9\hat{a}_y - 8\hat{a}_z)$

۷ـ صفحه‌ی $z = 0$ مرز مشترک دو محیط است. محیط اول $(z > 0)$ دارای ضریب تراوایی $\mu_1 = 3\mu_0$ و محیط دوم $(z < 0)$ دارای ضریب تراوایی $\mu_2 = 2\mu_0$ می‌باشد. جریان سطحی $\vec{J} = (\hat{a}_x + 2\hat{a}_y)A/m$ در صفحه‌ی $z = 0$ وجود دارد. اگر شدت مغناطیسی در مرز مشترک و در ناحیه‌ی اول $\hat{H}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ باشد، $\vec{B}_2$ در مرز مشترک و در ناحیه‌ی دوم کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\mu_0(4\hat{a}_x + 3\hat{a}_z)$

۲) $\mu_0(4\hat{a}_y + 3\hat{a}_z)$

۳) $\mu_0(-4\hat{a}_y + 3\hat{a}_z)$

۴) $\mu_0(-4\hat{a}_x + 3\hat{a}_z)$

۸ـ کابل هم محور به شعاع‌های $(b > a)\, b, a$ مفروض است. محور این کابل بر محورzها منطبق است. در فضای بین دو رسانا ناحیه اول $y > 0$ و ناحیه دوم $y < 0$ به ترتیب از مواد با نفوذپذیری مغناطیسی (پرمابلیته) μ_2, μ_1 پر شده است. اگر جریان I در جهت $\hat{z}$ از رسانای داخلی عبور کند، چگالی شار مغناطیسی در دو ناحیه را به دست آورید. (برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\vec{B}_1 = \frac{\mu_1}{2\mu_2}\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \frac{2\sqrt{\mu_1\mu_2}}{(\mu_1+\mu_2)^2}\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$

۳) $\vec{B}_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_2^2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$

۴) $\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$

۹ـ مطلوب است تعیین شرط مرزی در مورد پتانسیل مغناطیسی V_m در مرز دو ماده با ضرایب نفوذ مغناطیسی μ_1 و μ_2. طول مرز را ΔL، در نظر گرفته و $B_{n_1} = B_{n_2} = B_n$ و فرض کنید هیچگونه جریان سطحی در مرز وجود نداشته باشد. (برق ـ آزاد ۸۸)

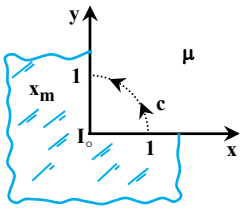
۱) $V_{m_2} - V_{m_1} = B_n(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})\Delta L$

۲) $V_{m_2} - V_{m_1} = B_n(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2})\Delta L$

۳) $V_{m_2} - V_{m_1} = B_n(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2})\frac{\Delta L}{2}$

۴) $V_{m_2} - V_{m_1} = B_n(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})\frac{\Delta L}{2}$

۱۰ـ رشته جریان یکنواخت I_0 روی محور z قرار گرفته است. همانند شکل ناحیه $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ فضای خالی و ناحیه $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi$ با یک ماده مغناطیسی همگن با حساسیت مغناطیسی $\chi_m = 3$ پرشده است. حاصل انتگرال خطی $\int_c \vec{H}.d\vec{\ell}$ روی C که ربع دایره‌ی واحد در شکل است،کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{1}{4}I_0$

۲) $\frac{4}{5}I_0$

۳) $\frac{2}{5}I_0$

۴) $\frac{4}{7}I_0$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ کدام گزینه شرایط مرزی مگنتواستاتیک را بین دو محیط مختلف به طور صحیح بیان می‌کند؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) مؤلفه میدان $\vec{B}$ موازی فصل مشترک دو محیط تغییر نمی‌کند.

۲) مؤلفه میدان $\vec{B}$ عمود بر فصل مشترک دو محیط تغییر نمی‌کند.

۳) مؤلفه میدان $\vec{H}$ عمود بر فصل مشترک دو محیط تغییر نمی‌کند.

۴) مؤلفه میدان $\vec{H}$ موازی فصل مشترک دو محیط تغییر نمی‌کند.

۱۲ـ صفحه $x = ۰$، دو محیط مغناطیسی همسانگرد را از یکدیگر جدا نموده است. در $x > ۰$، $k_{۱m} = ۵$ و در $x < ۰$، $k_{۲m} = ۲$ می‌باشد. اگر در $x < ۰$، $\frac{\vec{B}}{\mu_۰} = -۲\hat{i} + ۳\hat{j} - \hat{k}$ باشد، مطلوب است محاسبه $\vec{M}$ در $x > ۰$. (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $۲\hat{i} + ۶\hat{j} - ۰/۸\hat{k}$

۲) $-۱/۶\hat{i} + ۶\hat{j} - ۲\hat{k}$

۳) $-۲/۲\hat{i} + ۲\hat{j} - \hat{k}$

۴) $-۲/۴\hat{i} + ۳\hat{j} - ۱/۵\hat{k}$

۱۳ـ ناحیه $x > ۰$ فضای آزاد و ناحیه $x < ۰$ محیطی مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری μ است. اگر محور z نیز حامل جریان الکتریکی I باشد، آنگاه مقدار میدان مغناطیسی B در هر دو ناحیه در کدام گزینه به درستی گزارش شده است؟ (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $$B = \begin{cases} \frac{\mu_۰ I}{\pi r} & ; \quad x > ۰ \\ \frac{\mu I}{\pi r} & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

۲) $$B = \frac{I(\mu + \mu_۰)}{۴\pi r}$$

۳) $$B = \frac{I\mu\mu_۰}{\pi r(\mu + \mu_۰)}$$

۴) $$B = \begin{cases} \frac{\mu_۰ I}{۲\pi r} & ; \quad x > ۰ \\ \frac{\mu I}{۲\pi r} & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سیزدهم

۱ـ گزینه «۱» با توجه به این که $\vec{H}$ در ناحیه (۱) داده شده است بنابراین با استفاده از شرایط مرزی می‌توانیم $\vec{H}_2$ را به دست آوریم.

$$\begin{cases} B_{n1} = B_{n2} \\ \hat{a}_n \times (\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1}) = \vec{J}_s \end{cases}$$

ابتدا با استفاده از شرایط مرزی $B_{n1} = B_{n2}$ مؤلفه عمودی بر فصل مشترک را به دست می‌آوریم:

$$\mu_0 \mu_{r1} H_{x1} = \mu_0 \mu_{r2} H_{x2} \Rightarrow 2 \times 4 = 5 H_{x2}$$
$$H_{x2} = 1/6$$

با توجه به جریان سطحی داده شده با استفاده از شرط مرزی $\hat{a}_n \times (\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1}) = J_s$ مقدار H را در ناحیه (۲) به دست می‌آوریم:

$$\hat{a}_x \times (\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1}) = 5\hat{y} = \hat{a}_x \times (-5\hat{a}_z)$$
$$\vec{H}_{t2} = (-10\hat{a}_y + 6\hat{a}_z) - 5\hat{a}_z = -10\hat{a}_y + \hat{a}_z \quad , \quad \vec{H}_2 = 1/6\hat{a}_x - 10\hat{a}_y + \hat{a}_z$$

۲ـ گزینه «۲» $\hat{a}_n$ بردار عمود بر فصل مشترک و به طرف محیط ۱ می‌باشد. ابتدا مؤلفه عمودی $\vec{H}_2$ در ناحیه (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ \hat{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = J_s \end{cases}$$

ابتدا مؤلفه عمودی $\vec{H}_2$ در ناحیه (۲) را به دست می‌آوریم:

$$B_{2n} = 2\hat{a}_z \Rightarrow H_{2n} = \frac{2\hat{a}_z}{3\mu_0}$$

برای به دست آوردن مؤلفه مماسی $\vec{H}_2$ در ناحیه (۲) ابتدا فرض می‌کنیم که مؤلفه مماسی $\vec{B}_2$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\vec{B}_{t2} = a\hat{a}_x + b\hat{a}_y \Rightarrow \vec{H}_{t2} = \frac{a}{3\mu_0}\hat{a}_x + \frac{b}{3\mu_0}\hat{a}_y$$

$$(-\hat{a}_z) \times [(\frac{2\hat{a}_x}{2\mu_0} - \frac{\hat{a}_y}{2\mu_0} + \frac{2\hat{a}_z}{2\mu_0}) - (\frac{a\hat{a}_x}{3\mu_0} + \frac{b\hat{a}_y}{3\mu_0} + \frac{2\hat{a}_z}{3\mu_0})] = \vec{J}_s$$

$$\frac{-\hat{a}_y}{\mu_0} - \frac{\hat{a}_x}{2\mu_0} + \frac{a\hat{a}_y}{3\mu_0} - \frac{b\hat{a}_x}{3\mu_0} = \frac{-\hat{a}_x}{\mu_0} + \frac{3\hat{a}_y}{\mu_0} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حال که مقدار $\vec{H}_2$ را به دست آوردیم با استفاده از تعریف $\vec{M}_2$ داریم: $\vec{M}_2 = (\mu_{r2} - 1)\vec{H}_2 = \frac{8\hat{a}_x}{\mu_0} + \frac{\hat{a}_y}{\mu_0} + \frac{4}{3\mu_0}\hat{a}_z$ و $\vec{H}_2 = \frac{4\hat{a}_x}{\mu_0} + \frac{\hat{a}_y}{2\mu_0} + \frac{2}{3\mu_0}\hat{a}_z$

۳ـ گزینه «۱» با استفاده از شرایط مرزی میدان مغناطیسی و چگالی شار مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\mu_0 H_{1n} = 2\mu_0 H_{2n} \Rightarrow H_{2n} = 2H_{1n} = 2(H_1.\hat{a}_n)\hat{a}_n \\ H_{2t} = H_{1t} = H - H_{1n} = \vec{H}_1 - (\vec{H}_1.\hat{a}_n)\hat{a}_n \end{cases}$$

$$\vec{H}_2 = H_{2t} + H_{2n} = \vec{H}_1 + (H_1.\hat{a}_n)\hat{a}_n \quad \text{و} \quad \vec{M}_2 = (\mu_{r2} - 1)\vec{H}_2 = \vec{H}_1 + (\vec{H}_1.\hat{a}_n)\hat{a}_n$$

تذکر: فقط از روی مؤلفه عمودی $\vec{H}_2$ نیز می‌توان به گزینه صحیح پی برد.

$$\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n} \Rightarrow 2\mu_0 \vec{H}_{2n} = 4\mu_0 \vec{H}_{1n} \qquad \vec{H}_{2n} = 2\vec{H}_{1n} \quad , \quad \vec{M}_{2n} = (\mu_{r2} - 1)\vec{H}_{2n} = \vec{H}_{2n} = 2\vec{H}_{1n}$$

که چنین مؤلفه‌ای فقط در گزینه (۱) وجود دارد.

۴ـ گزینه «۱» با در نظر گرفتن جریان تصویری خواهیم داشت:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}(-\hat{a}_z) \quad \text{و} \quad \vec{F} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi(2d)}(-\hat{a}_z)$$

توضیح اینکه در مغناطواستاتیک، جریان تصویری هم جهت با جریان اولیه می‌باشد. همچنین نیروی بین دو سیم حامل جریان‌های I و I' که فاصله آنها از هم d است از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$F = \frac{\mu_0 II'}{2\pi d}$$

(اگر I و I' هم جهت باشند نیرو از نوع جاذبه و در غیر این صورت نیرو از نوع دافعه است.)

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۵ـ گزینه «۱» چگالی جریان سطحی مقید برابر است با:

$$\vec{J}_{sb}=\vec{M}\times\hat{a}_n$$

بنابراین چگالی جریان سطحی مقید در مرزهای نواحی ۱ و ۲ عبارتند از:

$$\left.\begin{aligned}\vec{J}_{sb_1}&=\vec{M}_1\times(-\hat{a}_n)\\ \vec{J}_{sb_2}&=\vec{M}_2\times(\hat{a}_n)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{J}_{sb}=\vec{J}_{sb_1}+\vec{J}_{sb_2}=\hat{a}_n\times\vec{M}_1-\hat{a}_n\times\vec{M}_2$$

۶ـ گزینه «۱» طبق شرایط مرزی در مغناطیس ساکن داریم:

$$\begin{array}{ll}\mu_2=3\mu_\circ & H_2=3\hat{a}_x+8\hat{a}_z\\ \mu_1=4\mu_\circ & B_1=?\end{array}\qquad \vec{k}=9\hat{a}_y\left(\frac{A}{m}\right)$$

$$B_{1n}=B_{2n}\Rightarrow 3\mu_\circ\times 8=B_{2n}=24\mu_\circ$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{H}_{1n}=\frac{\vec{B}_{2n}}{\mu_1}=6\hat{a}_z$$

اگر بردار $\vec{H}_1$ را به صورت $\vec{H}_1=a\hat{a}_x+b\hat{a}_y+6\hat{a}_z$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\hat{a}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{k}$$

$$\hat{a}_z\times(3\hat{a}_x+8\hat{a}_z-a\hat{a}_x-b\hat{a}_y-6\hat{a}_z)=9\hat{a}_y\Rightarrow a=-6\ ,\ b=\circ\Rightarrow\vec{H}_1=-6\hat{a}_x+6\hat{a}_z$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}_1=24\mu_\circ(-\hat{a}_x+\hat{a}_z)$$

۷ـ گزینه «۳» ابتدا با شرط مرزی $B_{n1}=B_{n2}$ مؤلفه عمودی $\vec{H}_2$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{B}_{n1}=\vec{B}_{n2}\Rightarrow 3\mu_\circ\hat{a}_z=\vec{B}_{n2}\Rightarrow\vec{H}_{n2}=\frac{3\mu_\circ}{2\mu_\circ}\hat{a}_z$$

اگر فرض کنیم که $\vec{H}_2$ به صورت روبه‌رو تعریف شده باشد با شرط مرزی $\hat{a}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}$ داریم:

$$\vec{H}_2=a\hat{a}_x+b\hat{a}_y+\frac{3\mu_\circ}{2\mu_\circ}\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_z\times(2\hat{a}_x-3\hat{a}_y+\hat{a}_z-a\hat{a}_x-b\hat{a}_y-\frac{3}{2}\hat{a}_z)=\hat{a}_x+2\hat{a}_y\Rightarrow 2\hat{a}_y+3\hat{a}_x-a\hat{a}_y+b\hat{a}_x=\hat{a}_x+2\hat{a}_y$$

با جایگذاری مقدار a و b در $\vec{H}_2$ مقدار $\vec{B}$ را به دست می‌آوریم:

$$b=-2\quad,\quad a=\circ$$

$$\vec{H}_2=-2\hat{a}_y+\frac{3}{2}\hat{a}_z\Rightarrow\vec{B}_2=2\mu_\circ\vec{H}_2=\mu_\circ(-4\hat{a}_y+3\hat{a}_z)$$

۸ـ گزینه «۴» با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$\oint\vec{H}.d\vec{l}=I\Rightarrow\int_\circ^{\pi}\frac{\vec{B}_1}{\mu_1}r d\varphi+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\vec{B}_2}{\mu_2}r d\varphi=I\Rightarrow\pi r\left(\frac{\vec{B}_1}{\mu_1}+\frac{\vec{B}_2}{\mu_2}\right)=I$$

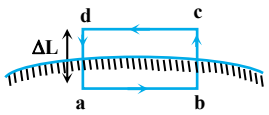
شدت میدان مغناطیسی در راستای $\hat{a}_\varphi$ می‌باشد. بنابراین بر سطح مشترک دو محیط عمود خواهد بود. از طرفی طبق شرایط مرزی می‌توان چنین نوشت:

$$B_{n1}=B_{n2}\xrightarrow{B_{1t}=B_{2t}=\circ}\vec{B}_1=\vec{B}_2$$

حال با جایگذاری تساوی بالا در نتیجه به دست آمده از قانون آمپر خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{B}_1=\vec{B}_2\\ &\frac{\vec{B}_1}{\mu_1}+\frac{\vec{B}_2}{\mu_2}=\frac{I}{\pi r}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{B}_1=\vec{B}_2=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{\pi r}\hat{a}_\varphi$$

۹ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه روی مرز، جریان سطحی وجود ندارد مؤلفه مماس H پیوسته است. $H_{1t}=H_{2t}$



$$\vec{H}=-\vec{\nabla}V_m\Rightarrow V_{m_2}-V_{m_1}=\int_1^2(\vec{\nabla}V_m).d\vec{L}\ ,\ B=\mu H\rightarrow H=\frac{B}{\mu}$$

$$V_{m_2}-V_{m_1}=-\int_2^1\vec{H}.d\vec{L}=\Delta L\left(\frac{B_n}{\mu_1}-\frac{B_n}{\mu_2}\right)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۰ـ گزینه «۴» ابتدا μ_r را با استفاده از X_m به دست می‌آوریم:

$$\mu_r = ۱ + X_m = ۴$$

طبق شرایط مرزی $B_{n۱} = B_{n۲}$ خواهیم داشت:

$$B_۱ = B_۲ \Rightarrow H_۱ = \frac{B_۱}{\mu_۰}\ ,\ H_۲ = \frac{B_۲}{۴\mu_۰}$$

با نوشتن قانون مداری آمپر داریم:

$$\int \vec{H}_۱ . d\vec{\ell} + \int \vec{H}_۲ . d\vec{\ell} = \frac{B_۱}{\mu_۰}(\frac{\pi}{۴} r) + \frac{B_۲}{۴\mu_۰}(\frac{۳\pi}{۴} r) = I_۰ \Rightarrow \frac{B_۱}{\mu_۰}[\frac{\pi}{۴} r + \frac{۳\pi}{۱۶} r] = I_۰ \Rightarrow B_۱ = \frac{\mu_۰ I_۰}{(\frac{۷\pi}{۱۶}) r} \Rightarrow H_۱ = \frac{B_۱}{\mu_۰} = \frac{۱۶ I_۰}{۷\pi r}$$

روی مسیر C خواهیم داشت: $(r = ۱)$

$$\int \vec{H} . d\vec{\ell} = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱۶ I_۰}{۷\pi r} (r\, d\varphi) = \frac{۴}{۷} I_۰$$

۱۱ـ گزینه «۲» برای یافتن شرط مرزی مناسب به معادلات ماکسول می‌پردازیم. از رابطه‌ی $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{J}$ مشخص است که مؤلفه مماسی میدان در عبور از سطح به اندازه‌ی چگالی جریان سطحی ناپیوستگی دارد. از طرفی از این نکته که تک قطبی مغناطیسی در طبیعت وجود ندارد خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = ۰ \Rightarrow B_{n_۱} = B_{n_۲}$$

۱۲ـ گزینه «۲» با استفاده از شرایط مرزی میدان مغناطیسی در محیط یک را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} \vec{B}_{۱n} &= \vec{B}_{۲n} \\ B_{۲n} &= -۲\mu_۰ \hat{a}_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B}_{۱n} = -۲\mu_۰ \hat{a}_x$$

برای مؤلفه عمودی میدان داریم:

$$\left.\begin{aligned} \vec{H}_{۱t} &= \vec{H}_{۲t} \\ \vec{H}_{۲t} &= \frac{۳\hat{a}_y - \hat{a}_z}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{H}_{۱t} = \frac{۳\hat{y} - \hat{z}}{۲} \Rightarrow \vec{B}_{۱t} = \frac{۵}{۲}\mu_۰ (۳\hat{a}_y - \hat{a}_z)$$

برای مؤلفه افقی خواهیم داشت:

$$\vec{B}_۱ = \vec{B}_{۱n} + \vec{B}_{۱t} = \mu_۰ = \mu_۰ (-۲\hat{a}_x + \frac{۱۵}{۲}\hat{a}_y - \frac{۵}{۲}\hat{a}_z)$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$\vec{H}_۱ = \frac{\vec{B}_۱}{۵\mu_۰} = (-\frac{۲}{۵}\hat{a}_x + \frac{۳}{۲}\hat{a}_y - \frac{۱}{۲}\hat{a}_z)$$

می‌توان با استفاده از رابطه مقابل $\vec{M}$ را به‌دست آوریم:

$$\vec{M}_۱ = \frac{\vec{B}_۱}{\mu_۰} - \vec{H}_۱ = -۱/۶\hat{a}_x + ۶\hat{a}_y - ۲\hat{a}_z$$

۱۳ـ گزینه «۳» با توجه به قانون مداری آمپر داریم:

$$\oint_c \vec{H} . d\vec{\ell} = I \Rightarrow H_۱(\pi r) + H_۲(\pi r) = I \Rightarrow H_۱ + H_۲ = \frac{I}{\pi r}$$

طبق شرط مرزی $B_{۱n} = B_{۲n}$ داریم:

$$\mu_۰ H_۱ = \mu H_۲ \Rightarrow H_۲ = \frac{\mu_۰}{\mu} H_۱$$

$$H_۱ + H_۲ = \frac{I}{\pi r} \Rightarrow H_۱ + \frac{\mu_۰}{\mu} H_۱ = \frac{I}{\pi r} \Rightarrow H_۱ = \frac{\mu}{\mu_۰ + \mu} \frac{I}{\pi r}$$

بنابراین چگالی شار مغناطیسی در هر دو محیط برابر است با:

$$B_۱ = B_۲ = \frac{\mu_۰ \mu}{\mu_۰ + \mu} \frac{I}{\pi r}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل چهاردهم

«القای الکترومغناطیسی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهاردهم

۱ـ یک حلقه دایره‌ای به شعاع a حامل جریان I_1 در صفحه xy و محور آن در امتداد محور z است. حلقه بسیار کوچک دیگری در نقطه $(z$ و $\circ$ و $\circ)$ با سطح ΔS طوری قرار گرفته که محور آن با محور z زاویه θ می‌سازد، اندازه تقریبی اندوکتانس متقابل بین دو حلقه، M_{12} چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $M_{12}=\frac{\mu_\circ}{2}\frac{a^2\Delta S I_1^2\cos\theta}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

۲) $M_{12}=\frac{\mu_\circ}{2}\frac{a^2\Delta S\cos\theta}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

۳) $M_{12}=\frac{\mu_\circ\pi}{2}\frac{a^2\Delta S\cos\theta}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

۴) $M_{12}=\frac{\mu_\circ}{2}\frac{a^2\Delta S I_1^2\cos\theta}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

۲ـ اگر $\vec{A}$ بردار پتانسیل مغناطیسی، V_m پتانسیل عددی مغناطیسی و $\vec{E}$ و $\vec{H}$ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی باشند، نیروی محرکه (emf) القا شده حول یک مسیر بستهٔ C با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

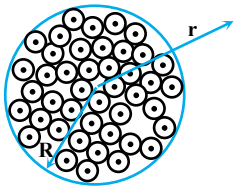
۱) $-\frac{d}{dt}\oint_c\vec{A}.d\vec{\ell}$

۲) $-\frac{d}{dt}\oint_c\vec{E}.d\vec{\ell}$

۳) $-\frac{d}{dt}\int V_m.d\vec{\ell}$

۴) $\int\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.d\vec{\ell}$

۳ـ میدان مغناطیسی استوانه‌ای شکل به شعاع R با آهنگ ثابت α در حال افزایش است. اندازه شتاب پروتونی که در نقطه‌ای به فاصله $r>R$ رها می‌شود چقدر است؟ e= اندازه بار الکترون و m_p جرم پروتون است. (فیزیک ـ سراسری ۸۱)



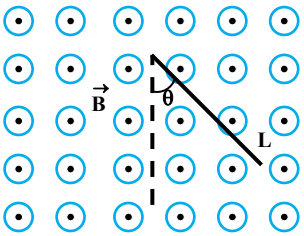
۱) $\frac{e\alpha r}{2m_p}$

۲) $\frac{eR^2\alpha}{2m_p r}$

۳) $\circ$

۴) $\frac{e\alpha r^2}{2m_p R}$

۴ـ میله‌ای به طول L مطابق شکل در میدان مغناطیسی یکنواخت B حول نقطه ثابت O نوسان می‌کند به طوری که زاویه میله در هر لحظه با محور قائم برابر است با $\theta(t)=\theta_\circ\cos(\omega t)$ که در آن ω و $\theta_\circ$ مقادیر ثابتی هستند. اندازه نیروی محرکه القایی بین دو سر میله در لحظه $t=\frac{\pi}{6\omega}$ کدام است؟ (راستای میدان B عمود بر صفحه نوسان میله است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



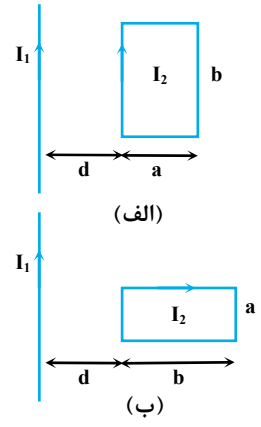
۱) $\frac{1}{4}\theta_\circ\omega BL^2$

۲) $\frac{1}{2}\theta_\circ\omega BL^2$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}\theta_\circ\omega BL^2$

۴) $\theta_\circ\omega BL^2$

۵ـ حلقه‌ای به ابعاد a و b با جریان I_2 مطابق شکل «الف» به موازات سیم بلندی با جریان I_1 و به فاصله d از آن قرار دارد. اگر حلقه را در صفحه کاغذ بچرخانیم که شکل «ب» عاید شود چقدر کار انجام داده‌اید؟ (برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $I_1I_2\frac{\mu_\circ}{2\pi}\left\{\ln\frac{(d+b)bd}{ad}\right\}$

۲) $I_1I_2\frac{\mu_\circ}{2\pi}\left\{a\ln\frac{d+b}{d}-b\ln\frac{d+a}{d}\right\}$

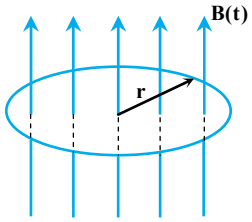
۳) $I_1I_2\frac{\mu_\circ}{2\pi}\left\{\ln\frac{(d+b)(d+a)}{bd}\right\}$

۴) $I_1I_2\frac{\mu_\circ}{2\pi}\left\{b\ln\frac{d+b}{d}-a\ln\frac{d+a}{b}\right\}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ میدان مغناطیسی یکنواخت $B(t)$ به طرف بالا، بر روی یک منطقه دایره‌ای به شعاع r مطابق شکل زیر اعمال شده است. اندازه میدان الکتریکی القا شده در لبه منطقه دایره‌ای کدام گزینه است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۳)



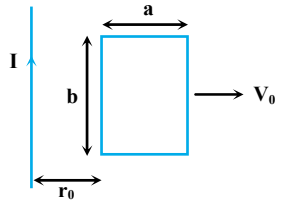
۱) $\frac{r}{2\pi}\left|\frac{dB(t)}{dt}\right|$

۲) $\frac{1}{3}r\left|\frac{dB(t)}{dt}\right|$

۳) $\frac{r}{2}\left|\frac{dB(t)}{dt}\right|$

۴) $r\left|\frac{dB(t)}{dt}\right|$

۷ـ یک حلقه مستطیل شکل به ابعاد a و b مطابق شکل با سرعت ثابت V_0 از یک سیم رسانا که از آن جریان I می‌گذرد دور می‌شود. در لحظه $t = 0$ فاصله ضلع چپ حلقه مستطیل از سیم $r = r_0$ است. نیروی محرکه القایی در حلقه در لحظه $t > 0$ که فاصله ضلع چپ حلقه از سیم r می‌باشد کدام است؟ سیم و حلقه در یک صفحه قرار دارند. (فیزیک ـ سراسری ۸۳)



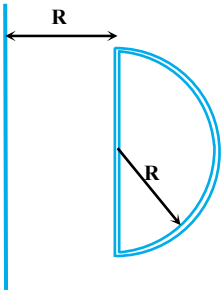
۱) $\frac{\mu_0 Iab V_0}{2\pi r(r+a)}$

۲) $\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{ab V_0}{r(r+a)}\right)$

۳) $\frac{\mu_0 I V_0}{\pi a b r(r+a)}$

۴) $\frac{\mu_0 I V_0}{2\pi}\ln[r(r+a)]$

۸ـ یک سیم بسیار بلند و یک مدار نیم‌دایره به شعاع R که قطر آن موازی با سیم است مطابق شکل در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ضریب القای متقابل M بین آن دو با کدام رابطه نشان داده می‌شود؟ (برق ـ سراسری ۸۴)



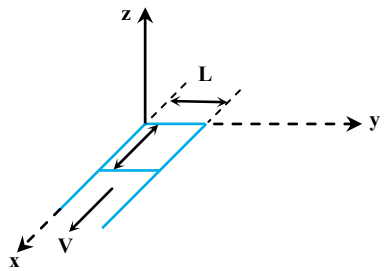
۱) $\frac{\mu_0}{2\pi}\int_0^R\sqrt{\frac{R-x}{R+x}}dx$

۲) $\frac{\mu_0}{\pi}\int_0^R\sqrt{\frac{R-x}{R+x}}dx$

۳) $\frac{2\mu_0}{\pi}\int_0^R\sqrt{\frac{R-x}{R+x}}dx$

۴) $\frac{\mu_0}{\pi}\int_0^{2R}\sqrt{\frac{R-x}{R+x}}dx$

۹ـ میله رسانای متحرکی به طول L بر روی قاب فلزی در صفحه افقی xy با سرعت ثابت $V = V_0\hat{a}_x$ در حرکت است. میدان مغناطیسی $B = B_0(2-\frac{x^2}{2L^2})\hat{K}$ در فضا وجود دارد. اگر مقاومت الکتریکی میله R و مقاومت الکتریکی ریل ناچیز باشد، در لحظه‌ای که $x = \frac{L}{2}$ است، جریانی که از میله عبور می‌کند کدام است؟ در لحظه $t = 0$ میله در $x = 0$ قرار دارد. (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



۱) $\frac{B_0 LV_0}{4R}$

۲) $\frac{15}{4}\frac{B_0 LV_0}{R}$

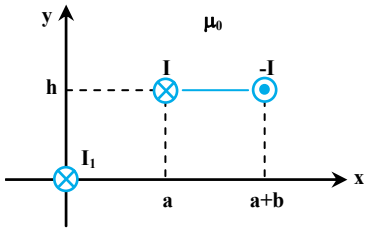
۳) $\frac{15}{8}\frac{B_0 LV_0}{R}$

۴) $\frac{B_0 LV_0}{R}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۰ـ یک رشته سیم مستقیم بی‌نهایت طویل حامل جریان I_1 در پایین سمت چپ و موازی با یک خط تلفن دو سیمه حامل جریان I قرار دارد. ضریب القای متقابل بر واحد طول بین سیم حامل جریان I_1 و خط تلفن دو سیمه کدام گزینه است؟ (برق ـ سراسری ۸۵)



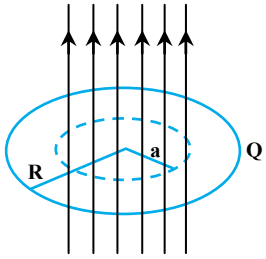
۱) $\frac{\mu_\circ}{4\pi}\ln\frac{h^2+(a+b)^2}{h^2+a^2}$

۲) $\frac{\mu_\circ}{2\pi}\ln\frac{h^2+(a+b)^2}{h^2}$

۳) $\frac{\mu_\circ}{4\pi}\ln\frac{h^2+(a+b)^2}{h^2+b^2}$

۴) $\frac{\mu_\circ}{2\pi}\ln\frac{h^2+(a+b)^2}{h^2+(b-a)^2}$

۱۱ـ حلقه‌ای از عایق کامل به شعاع R روی یک میز بدون اصطکاک افقی قرار دارد. بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی این حلقه قرار دارد. از این حلقه شار مغناطیسی یکنواخت $\phi_\circ$ در ناحیهٔ $a \le r \le \circ$ می‌گذرد که $a < R$ است. اگر میدان مغناطیسی در مدت زمان Δt خاموش شود اندازه حرکت زاویه‌ای کل القایی در حلقه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



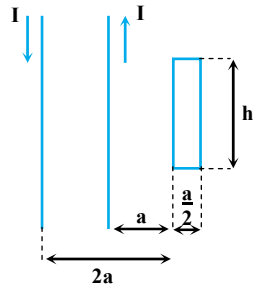
۱) صفر

۲) $\frac{Q\phi_\circ}{2\pi}$

۳) $\frac{Q\phi_\circ}{2\pi}\Delta t$

۴) $\frac{Q\phi_\circ a}{2\pi R}\Delta t$

۱۲ـ دو سیم راست موازی و طویل حامل جریان I در دو جهت مخالف هستند. جریان I با نرخ k افزایش می‌یابد. مطابق شکل، یک حلقه مستطیل شکل در مجاورت دو سیم قرار گرفته است. اگر مقاومت الکتریکی حلقه R باشد، مقدار و جهت جریان القائی در حلقه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



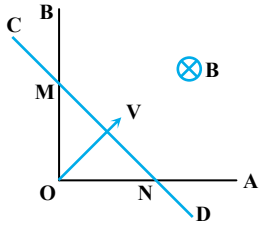
۱) $I' = \frac{\mu_\circ h}{2\pi R}k\ln(\frac{6}{5})$ و ساعتگرد

۲) $I' = \frac{\mu_\circ h}{2\pi R}k\ln(\frac{10}{3})$ و ساعتگرد

۳) $I' = \frac{\mu_\circ h}{2\pi R}k\ln(\frac{10}{3})$ و پاد ساعتگرد

۴) $I' = \frac{\mu_\circ h}{2\pi R}k\ln(\frac{6}{5})$ و پاد ساعتگرد

۱۳ـ دو سیم رسانای OA و OB بر هم عمودند. سیم رسانای نسبتاً طویل CD با سرعت ثابت V برروی OA و OB چنان حرکت می‌کند که در هر لحظه مثلث OMN متساوی‌الساقین است. در لحظه $t = \circ$ راستای سیم CD از نقطه O می‌گذرد. اگر مقاومت واحد طول هر یک از سه سیم λ باشد و میدان مغناطیسی یکنواخت B عمود بر صفحه این سه سیم اعمال شود، جریان القایی در حلقه مثلثی OMN در لحظه $t > \circ$ کدام است؟ (فرض کنید در لحظه t، هنوز سیم CD با دو سیم دیگر در تماس است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۶)



۱) $\frac{BV}{(2+\sqrt{2})\lambda}$

۲) $\frac{BV}{(1+\sqrt{2})\lambda}$

۳) $\frac{BV}{2(1+\sqrt{2})\lambda}$

۴) $\frac{2BV}{(1+\sqrt{2})\lambda}$

۱۴ـ دو سیم هادی، یکی مستقیم و بسیار طویل و دیگری به صورت حلقه‌ای به شعاع a در مجاورت یکدیگر قرار دارند. ضریب القاء متقابل، M، بین این دو سیم کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $(\frac{\mu_\circ}{4\pi})\frac{a}{4}$

۲) $(\frac{\mu_\circ}{4\pi})\frac{a}{2}$

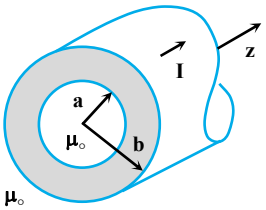
۳) $(\frac{\mu_\circ}{4\pi})a$

۴) $\mu_\circ a$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۵ـ فضای $a < r < b$ با رسانای غیرمغناطیسی پر شده است. مطابق شکل جریان I در امتداد محور z با توزیع یکنواخت در این رسانا جاری است. اندوکتانس داخلی واحد طول چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۷)



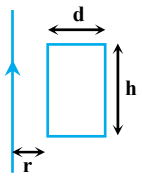
۱) $\frac{\mu_0}{8\pi a^2}\left[b^2-a^2\right]$

۲) $\frac{\mu_0\pi}{8b^2}\left[b^2-a^2\right]$

۳) $\frac{\mu_0}{4\pi(b^2-a^2)^2}\left[\frac{3}{4}a^2+a^2\ln(\frac{b}{a})+\frac{1}{4}b^2-ab\right]$

۴) $\frac{\mu_0}{2\pi(b^2-a^2)^2}\left[\frac{3}{4}a^4+a^4\ln(\frac{b}{a})+\frac{1}{4}b^4-a^2b^2\right]$

۱۶ـ یک حلقه‌ی مستطیلی شکل به ابعاد h و d به فاصله‌ی r از یک سیم راست بسیار بلند قرار دارد. القای متقابل کدام است؟ حلقه و سیم راست در یک صفحه قرار دارند. (فیزیک ـ سراسری ۸۷)



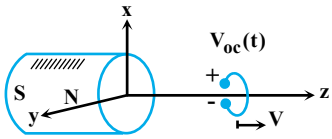
۱) $\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln(\frac{r-d}{r})$

۲) $\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln(\frac{2r-d}{r})$

۳) $\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln(\frac{r+d}{r})$

۴) $\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln(\frac{2r+d}{r})$

۱۷ـ محور یک آهن‌ربای دائمی میله‌ای همانند شکل بر محور z منطبق است. یک حلقه سیم نازک از جنس ماده‌ی غیرمغناطیسی که به صورت مدار باز است از $z=0$ با سرعت ثابت V در راستای zهای مثبت به آرامی به حرکت در می‌آید. ولتاژ مدار باز دوسر حلقه سیم $V_{oc}(t)$ در زمان‌های بزرگ چه رابطه‌ای با زمان t خواهد داشت. (برق ـ سراسری ۸۸)



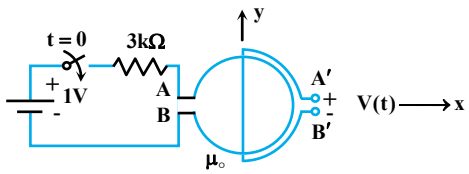
۱) $\frac{1}{t^4}$

۲) e^{-t}

۳) $\frac{1}{t^3}$

۴) e^{-vt}

۱۸ـ در فضای خالی در صفحه‌ی xy یک حلقه سیم به شکل دایره و دیگری به شکل نیم‌دایره همانند شکل بر روی یکدیگر منطبق شده‌اند. سیم‌ها از جنس رسانای غیرمغناطیسی فرض می‌شوند. در حالتی که سرهای $A'B'$ باز هستند، اندوکتانس دیده شده از سرهای AB برابر $0/6\mu H$ است. ولتاژ مدار باز $v(t)$ برای $t \geq 0$ (پس از بسته شدن کلید) کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۸)



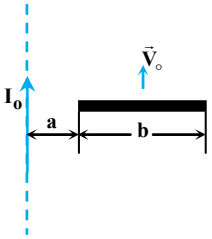
۱) $\frac{1}{6}\exp(-10^{10}\frac{t}{2})$

۲) $-\frac{1}{6}\exp(-10^{10}\frac{t}{2})$

۳) $-\frac{1}{2}\exp(-10^{10}\frac{t}{2})$

۴) $\frac{1}{2}\exp(-10^{10}\frac{t}{2})$

۱۹ـ یک تیغه فلزی (رسانا) طبق شکل با تندی ثابت V_0 به موازات یک سیم حامل جریان مستقیم ثابت I_0 در حال حرکت است. نیروی الکتروموتیو (الکتریکی) القا شده در این تیغه چقدر است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)



۱) صفر

۲) $\frac{\mu_0 I_0 V_0}{2\pi}\ln(\frac{b}{a})$

۳) $\frac{\mu_0 I_0 V_0}{2\pi}\sqrt{\frac{b^2+a^2}{ab}}$

۴) $\frac{\mu_0 I_0 V_0}{2\pi}(\frac{b^2+a^2}{ab})$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۰ـ ضریب خود القایی در واحد طول یک کابل هم‌محور که شعاع سیم‌داخلی آن a و شعاع پوسته فلزی خارجی آن b می‌باشد، چقدر است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\mu_0}{4\pi}(\frac{b}{a})$ ۲) $\frac{\mu_0}{2\pi}(\frac{b}{a})$ ۳) $\frac{\mu_0}{4\pi}\ln(\frac{b}{a})$ ۴) $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln(\frac{b}{a})$

۲۱ـ یک حلقه فلزی (مثلاً آلومینیومی) درون یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت خارجی عمود بر صفحه حلقه قرار دارد. اگر در همین حالت آن‌قدر حلقه را سرد کنیم تا ابررسانا شود، چه اتفاقی می‌افتد و کدام‌یک از عبارات زیر درست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۸)

۱) شار مغناطیسی طبق اثر معروف «مایسنر» به طور کلی از درون حلقه به بیرون آن رانده می‌شود.

۲) شار مغناطیسی طبق اثر معروف «لُندن» از درون حلقه به سمت بیرون آن رانده شده ولی در یک پوسته بسیار نازک لایه خارجی حلقه جمع می‌گردد.

۳) شار مغناطیسی درون حلقه زندانی باقی می‌ماند ولی کوانتیزه می‌شود و $\Phi_{mag}=N\Phi_0$ که در آن $N=1,2,3,...$ و $\Phi_0=\frac{h}{e}$ کوچکترین واحد کوانتومی شار مغناطیسی است.

۴) شار مغناطیسی درون حلقه باقی می‌ماند ولی کوانتیزه می‌شود و $\Phi_{mag}=N\Phi_0$ که در آن $N=1,2,3,...$ و $\Phi_0=\frac{h}{2e}$ کوچکترین واحد کوانتومی شار مغناطیسی است.

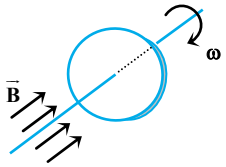
۲۲ـ یک حلقه دایروی در صفحه xy به شعاع کوچک a و مرکز مبدأ و حلقه دیگر در صفحه $x+y+3z=d$ به شعاع کوچک b و مرکز $(\frac{d}{2},\frac{d}{2},0)$ به طوری که $a,b \ll d$ می‌باشند، قرار دارند. اندازه اندوکتانس متقابل بین این دو حلقه کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\mu_0\pi^2a^2b^2}{2d^3}$ ۲) $\frac{\mu_0\pi^2a^2b^2}{\sqrt{11}d^3}$ ۳) $\frac{2\mu_0\pi a^2b^2}{\sqrt{22}d^3}$ ۴) $\frac{3\mu_0\pi a^2b^2}{\sqrt{22}d^3}$

۲۳ـ یک مدار مغناطیسی با سطح مقطع یکنواخت $2cm^2$، شامل $2mm$ فاصله هوائی و $5cm$ طول مدار مغناطیسی می‌باشد. با فرض $\mu_r=200$، اندوکتانس چنین مداری با N دور سیم بر روی آن، کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{8}{90}\mu_0N^2$ ۲) $\frac{4}{90}\mu_0N^2$ ۳) $\frac{2}{90}\mu_0N^2$ ۴) $\frac{16}{90}\mu_0N^2$

۲۴ـ مطابق شکل قرص رسانایی به شعاع a با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در میدان مغناطیسی یکنواخت ثابت B که راستای آن عمود بر صفحه قرص است دوران می‌کند. اختلاف پتانسیل بین لبه قرص و مرکز آن کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)

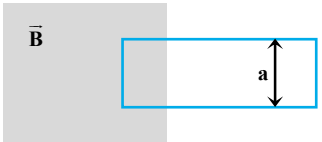


۱) $\frac{\omega Ba^2}{2}$ ۲) صفر

۳) ωBa^2 ۴) $2\omega Ba^2$

۲۵ـ قسمتی از یک قاب مستطیل شکل به عرض a و جرم m و ضریب خودالقایی L مطابق شکل در میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت B قرار دارد. فرض کنید مقاومت الکتریکی حلقه صفر است. اگر کمی حلقه را به سمت راست بکشیم شروع به نوسان می‌کند. بسامد زاویه‌ای این نوسان کدام است؟

(فیزیک ـ سراسری ۸۹)



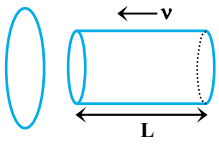
۱) $\frac{Ba^2}{\sqrt{mL}}$ ۲) $\frac{2Ba}{\sqrt{mL}}$

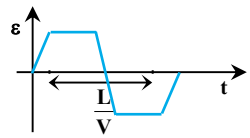
۳) $\frac{Ba}{\sqrt{mL}}$ ۴) $\frac{2Ba^2}{\sqrt{mL}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

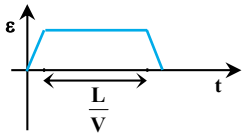
www.modaresanesharif.ac.ir

۲۶ـ مطابق شکل استوانه‌ای به طول L که دارای قطبش یکنواخت است با سرعت V از درون حلقه‌ای با شعاع کمی بزرگتر از شعاع استوانه عبور می‌کند. کدام نمودار نشان‌دهنده‌ی نیروی محرکه الکتریکی درون حلقه بر حسب زمان است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)

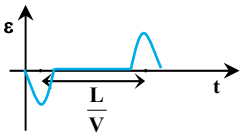




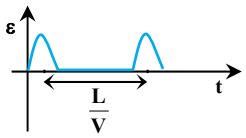
(۲)



(۱)

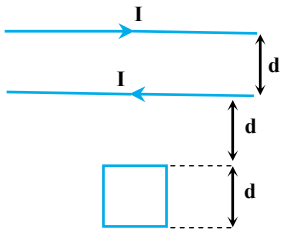


(۴)



(۳)

۲۷ـ دو سیم طویل و نازک و موازی با یکدیگر به فاصله d از هم قرار دارند. مطابق شکل قابی مربعی شکل به ضلع d و به فاصله d از سیم نزدیکتر قرار دارد. اگر جریان I با جهت‌های نشان داده شده در سیم برقرار باشد، نیروی محرکه القاء شده در قاب مربعی کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{\mu_\circ Id}{2\pi}\ln(\frac{3}{2})$

۲) $\frac{\mu_\circ Id}{4\pi}\ln(\frac{3}{2})$

۳) $\frac{\mu_\circ Id}{2\pi}\ln(\frac{4}{3})$

۴) $\frac{\mu_\circ Id}{4\pi}\ln(\frac{4}{3})$

۲۸ـ سیم‌پیچی بسیار بلند دارای n دور سیم در واحد طول است. جریان الکتریکی گذرنده از این سیم‌پیچ به صورت $I(t)=\alpha t$ افزایش می‌یابد. $(\alpha>\circ)$ میدان الکتریکی درون سیم‌پیچی کدام است؟ (محور سیم‌پیچ بر روی محور z است و جواب‌ها در مختصات استوانه‌ای (ρ,φ,z))

(فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\frac{\mu_\circ \alpha n}{2}\rho\hat{a}_\varphi$

۲) $\frac{\mu_\circ \alpha^2 n}{4}\rho\hat{a}_\varphi$

۳) $\frac{\mu_\circ \alpha n}{2}(\rho\hat{a}_\varphi+\hat{a}_\rho)$

۴) $\frac{\mu_\circ \alpha^2 n}{4}(\rho\hat{a}_\varphi+\hat{a}_\rho)$

۲۹ـ میله آهنی استوانه‌ای شکل به طول L و شعاع d را خم کرده و به شکل حلقه‌ای به شعاع R در می‌آوریم به طوری که دو سر میله که به موازات هم قرار گرفته‌اند فاصله بسیار کوچک s از یکدیگر دارند. سپس N دور سیم را به دور میله آهنی می‌پیچیم به طوری که سطح میله کاملاً پوشانده می‌شود. اگر جریان I از این سیم بگذرد، میدان مغناطیسی درون ناحیه بین دو سر میله کدام است؟ (فرض کنید $s\ll R$ و $d\ll R$ و تراوایی نسبی میله μ_r است) (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2\mu_r\mu_\circ N^2 I}{4\pi R+(\mu_r-1)^2 s}\ln(\frac{s}{d}+1)$

۲) $\frac{\mu_r\mu_\circ NI}{2\pi R+(\mu_r-1)s}\ln(\frac{s}{d}+1)$

۳) $\frac{\mu_r\mu_\circ NI}{2\pi R+(\mu_r-1)s}$

۴) $\frac{2\mu_r\mu_\circ NI}{4\pi R+3(\mu_r-1)s}$

۳۰ـ کابل هم محوری دارای صفحه انتهائی اتصال کوتاه می‌باشد، طوری که می‌تواند در امتداد هادی داخلی کابل، حرکت نماید. شعاع هادی داخلی a و خارجی b می‌باشد، ابتدای کابل در صفحه $x=\circ$ و محور آن در امتداد محور x ها قرار گرفته است. ضریب خودالقای کابل را بر حسب تابعی از x به‌دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) $L=\frac{\mu_\circ x}{2\pi^2}\ln\frac{b}{a}$

۲) $L=\frac{\mu_\circ x}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

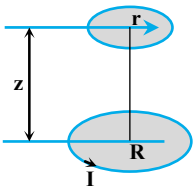
۳) $L=\frac{\mu_\circ x}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$

۴) $L=\frac{\mu_\circ x}{4\pi^2}\ln\frac{b}{a}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۱ـ مطابق شکل دو حلقه رسانای هم‌محور با شعاع‌های R و r را در نظر بگیرید $(R > r)$ حلقه بزرگ‌تر دارای جریان I می‌باشد. فرض این‌که $z \gg R$ باشد، اگر فاصله z میان دو حلقه با آهنگ ثابت $V = \frac{dz}{dt}$ در حال افزایش باشد، emf القایی در حلقه کوچک‌تر چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

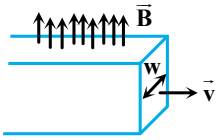


۱) $\frac{\mu_0 I\pi R^2 r^2 V}{z^4}$
۲) $\frac{3\mu_0 I\pi R^2 r^2 V}{2z^4}$
۳) $\frac{\mu_0 I\pi R^2 r^2 V}{3z^4}$
۴) $\frac{\mu_0 I\pi R^2 r^2}{3z^4}$

۳۲ـ در مرکز یک حلقهٔ جریان دایروی به شعاع b و جریان I_1، حلقهٔ جریان دایروی دیگری به شعاع $\frac{b}{100}$ و جریان I_2 به طور مایل قرار دارد، به قسمی که محور این دو حلقه با یکدیگر زاویهٔ θ_0 می‌سازند. اندازهٔ اندوکتانس متقابل M_{12} این دو حلقه چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

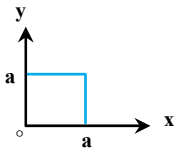
۱) $\frac{\mu_0 \pi b}{2}\sin\theta_0$
۲) $\frac{\mu_0 \pi b}{2}\cos\theta_0$
۳) $\frac{\mu_0 \pi b}{2\times 10^4}\sin\theta_0$
۴) $\frac{\mu_0 \pi b}{2\times 10^4}\cos\theta_0$

۳۳ـ یک ورقه بزرگ فلزی با رسانایی ویژهٔ σ و ضخامت w به طور عمودی داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با سرعت $\vec{v}$ (ثابت) حرکت می‌کند. اگر $\vec{v}$ بر $\vec{B}$ عمود باشد، اندازهٔ نیروی بازدارندهٔ حرکت بر واحد سطح قطعه رسانا چقدر است؟ (می‌دانیم $|\vec{B}| = B$ و $|\vec{v}| = v$) (برق ـ سراسری ۹۰)



۱) σVWB
۲) σVWB^2
۳) σV^2B^2
۴) σV^2B^2W

۳۴ـ نیروی محرکه القائی در مدار بستهٔ مربعی شکل به ضلع a وقتی خطوط شار میدان مغناطیسی متغیّر با زمان $\vec{B}(t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(t)$ از آن می‌گذرد، کدام است؟ $(|\vec{v}| = v \quad \vec{A}(t) = \frac{B_0}{a}xy(\cos^4(\omega_0 t)\hat{a}_x + \sin^4(\omega_0 t)\hat{a}_y))$ (فیزیک ـ سراسری ۹۰)



۱) $B_0\omega_0 a^2\cos\omega_0 t$
۲) $B_0\omega_0 a^2\sin\omega_0 t$
۳) $B_0\omega_0 a^2\sin 2\omega_0 t$
۴) $B_0\omega_0 a^2\cos 2\omega_0 t$

۳۵ـ دو مدار جفت شده دارای خودالقایی L_1 و L_2 ضریب القای متقابل M_{12} می‌باشند. جریان دو حلقه به ترتیب I_1 و I_2 است. نسبت $\frac{I_1}{I_2}$ چقدر باشد تا انرژی مغناطیسی ذخیره شده W_2 به حداقل برسد؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{M_{12}}{L_1}$
۲) $-\frac{M_{12}}{L_2}$
۳) $-\frac{L_2}{L_1}$
۴) $\frac{L_1}{L_2}$

۳۶ـ اندوکتانس داخلی یک سیم استوانه‌ای شکل به شعاع a که حامل جریان الکتریکی I بوده و به طور یکنواخت در سطح مقطع توزیع شده است، برابر است با: (برق ـ آزاد ۹۰)

۱) $\frac{\mu_0 I}{16\pi}$
۲) $\frac{\mu_0 I}{8\pi}$
۳) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}$
۴) $\frac{3\mu_0 I}{16\pi}$

۳۷ـ اگر میدان الکتریکی دارای رابطه زیر باشد: (برق ـ آزاد ۹۰)

$$\bar{E} = E_1\sin(\omega t - \beta z)\hat{a}_y + E_2\cos(\omega t - \beta z)\hat{a}_x$$

۱) $\bar{B} = -\frac{\beta E_1}{\omega}\sin(\omega t - \beta z)\hat{a}_x - \frac{\beta E_2}{\omega}\cos(\omega t - \beta z)\hat{a}_y$
۲) $\bar{B} = \frac{\omega}{\beta E_1}\sin(\omega t - \beta z)\hat{a}_y + \frac{\beta E_2}{\omega}\sin(\omega t - \beta z)\hat{a}_x$
۳) $\bar{B} = \frac{\beta E_2}{\omega}\cos(\omega t - \beta z)\hat{a}_x - \frac{\beta E_1}{\omega}\sin(\omega t - \beta z)\hat{a}_y$
۴) $\bar{B} = \frac{\omega}{\beta E_1}\cos(\omega t - \beta z)\hat{a}_y + \frac{\beta E_2}{\omega}\sin(\omega t - \beta z)\hat{a}_x$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۸ـ یک سیم رسانا به شکل حلقه به شعاع a در مرکز یک حلقه بزرگتر رسانا به شعاع b قرار گرفته است. حلقه بزرگتر حامل یک جریان متناوب $I(t)=I_\circ \cos\omega t$ می‌باشد. میدان مغناطیسی تولید شده به وسیله این جریان، یک emf القایی را در حلقه کوچکتر بوجود می‌آورد. اندازه این emf القایی با کدام رابطه زیر بیان می‌شود؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

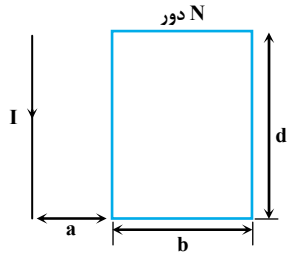
۱) $(\frac{\pi\mu_\circ I_\circ}{۲})\frac{a^۲}{b}\omega\cos\omega t$

۲) $(\frac{\pi\mu_\circ I_\circ}{۲})\frac{a^۲}{b}\omega\sin\omega t$

۳) $(\frac{\pi\mu_\circ I_\circ}{۲})\frac{b^۲}{a}\omega\sin\omega t$

۴) $(\frac{\pi\mu_\circ I_\circ}{۲})\frac{b^۲}{a}\omega\cos\omega t$

۳۹ـ مطابق شکل یک حلقه مستطیل شکل با N دور سیم در نزدیکی یک سیم طویل حامل جریان I قرار گرفته است. القاء متقابل این دو مدار چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)



۱) $\frac{\mu_\circ Nd}{۲\pi}\ln(۱+\frac{b}{a})$

۲) $\frac{\mu_\circ Nd}{۲\pi}\ln(\frac{b}{a})$

۳) $\frac{\mu_\circ Nd}{۲\pi}\ln(\frac{a}{b})$

۴) $\frac{\mu_\circ Nd}{۲\pi}\ln(۱+\frac{a}{b})$

۴۰ـ یک سیم پیچ چنبره‌ای با N دور سیم و شعاع متوسط b و شعاع سطح مقطع a می‌باشد. خودالقایی این مدار برابر است با: (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) $\mu_\circ N^۲(b^۲-\sqrt{b^۲-a^۲})$

۲) $\mu_\circ N^۲(b-\sqrt{b^۲-a^۲})$

۳) $\mu_\circ N^۲\sqrt{b^۲-a^۲}$

۴) $\mu_\circ N^۲a^۲b^۲$

۴۱ـ یک حلقه رسانای دایره‌ای شکل به شعاع R در صفحه y-z واقع و مرکز آن در نقطه $(\circ,۲R,۲R)$ است. در فضا میدان مغناطیسی غیریکنواخت وابسته به زمان $\vec{B}(y,t)=(\alpha t+\beta)\hat{i}+\gamma ty\hat{j}$ وجود دارد. بار الکتریکی Q مقید به حرکت روی این سیم است. مقدار کار انجام شده روی این بار در هر دور حرکت آن روی سیم کدام است؟ β,α و γ مقادیر ثابتی هستند. (فیزیک ـ سراسری ۹۲)

۱) $\pi R^۲\alpha Q$

۲) صفر

۳) $۲\pi R^۲\alpha Q$

۴) $\pi R^۲\alpha Q(۱+\frac{\beta}{\alpha R})$

۴۲ـ امواج الکترومغناطیسی با بسامد زاویه‌ای ω در محیطی حاوی الکترون‌های آزاد با چگالی تعداد n_e انتشار می‌یابند. چگالی جریانی که این امواج در محیط ایجاد می‌کنند کدام است؟ $\vec{E}$ بردار میدان الکتریکی امواج الکترومغناطیسی و m_e جرم یک الکترون است و از برهمکنش میان الکترون‌ها چشم‌پوشی شده است. (فوتونیک ـ سراسری ۹۴)

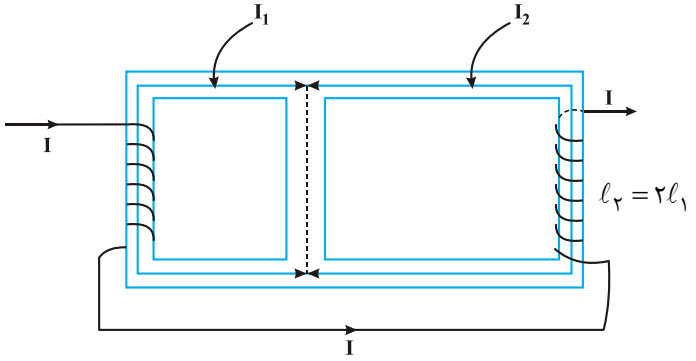
۱) $\frac{m_e e}{n_e\omega}\vec{E}$

۲) $\frac{n_e e^۲}{m_e\omega}\vec{E}$

۳) $e^{\frac{i\pi}{۲}}\frac{n_e e^۲}{m_e\omega}\vec{E}$

۴) $e^{\frac{i\pi}{۲}}\frac{m_e e^۲}{n_e\omega^۲}\vec{E}$

۴۳ـ در مدار مغناطیسی شکل زیر $\frac{N_۱}{N_۲}$ چقدر باشد تا از بازوی وسط شاری عبور نکند؟ (طول بازوی راست دو برابر طول بازوی چپ می‌باشد. و سطح مقطع بازوها یکسان است.) (دکتری ۹۴)



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۳}{۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۴ـ یک ترانسفورماتور(مبدل) ایده‌ال قرار است بین دو مدار اولیه با مقاومت کل Z_1 و مدار ثانویه با مقاومت کل Z_2 که نزدیک به هم جفت شده‌اند به کار برده شود. نسبت تعداد دورهای سیم‌پیچ مدار اولیه به تعداد دورهای سیم‌پیچ مدار ثانویه کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}$ ۲) $\frac{Z_2}{Z_1}$ ۳) $\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$ ۴) $\frac{Z_1}{Z_2}$

۴۵ـ نور به طور عمودی به مرز مشترک تخت دو محیط نارسانا می‌تابد. میدان الکتریکی پرتو بازتابی به شکل $\vec{E}'_1 = -E'_{1x}e^{-i(\omega t+kz)}\hat{i}$ است. میدان مغناطیسی بازتابی کدام است؟ n_1 ضریب شکست محیطی است که نور در آن بازتاب می‌کند و C تندی نور در خلأ است. (فوتونیک ـ سراسری ۹۲)

۱) $\vec{B}'_1 = -\frac{n_1}{C}E'_{1x}e^{-i(\omega t+kz)}\hat{j}$ ۲) $\vec{B}'_1 = \frac{n_1}{C}E'_{1x}e^{-i(\omega t+kz)}\hat{j}$

۳) $\vec{B}'_1 = -\frac{n_1}{C}E'_{1x}e^{-i(\omega t+kz)}\hat{k}$ ۴) $\vec{B}'_1 = \frac{n_1}{C}E'_{1x}e^{-i(\omega t+kz)}\hat{k}$

۴۶ـ میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی که در جهت مثبت محور zها در حال انتشار است به شکل $\vec{E} = 2E_0\cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{4})\hat{i} + E_0\cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{4})\hat{j}$ است. قطبش این موج کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۳)

۱) بیضوی چپ‌گرد ۲) بیضوی راست‌گرد ۳) دایروی چپ‌گرد ۴) خطی

۴۷ـ بردار شدت میدان مغناطیسی در یک محیط عایق همگن غیر مغناطیسی $(\mu = \mu_0)$ عبارتست از $\vec{H}(\vec{r},t) = 0/1\cos(2\pi\times10^9 t - 20\pi z)\hat{a}_x[\frac{A}{m}]$، ε_r محیط کدام است؟ (دکتری ۹۳)

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۱

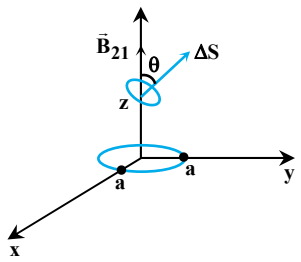
۴۸ـ در یک محیط دی‌الکتریک همگن و بدون منبع موج الکترومغناطیسی، میدان مغناطیسی به‌صورت $\vec{B} = B_0(1-i)\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{b}y)\sin\omega t\hat{e}_z$ است، که $a = 2b = \lambda_0$ و λ_0 طول موج در خلأ است. ثابت دی‌الکتریک محیط چقدر است؟ تراوایی مغناطیسی محیط μ_0 است. (فوتونیک ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۳

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهاردهم



۱ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن اندوکتانس متقابل ابتدا باید شار مغناطیسی ناشی از حلقه حامل جریان I_1 را که از حلقه کوچک عبور می‌کند به دست آوریم. چون حلقه دوم با مساحت ΔS خیلی کوچک می‌باشد بنابراین فرض می‌کنیم که شار مغناطیسی گذرنده از آن ثابت و برابر با مقدار شار در مرکز آن است. برای به دست آوردن میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در z (در مرکز دایره کوچک) از رابطه معرفی شده در فصل دهم برای حلقه استفاده می‌کنیم:

$$\vec{B}_{21}=\frac{\mu_\circ I_1 a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

حال با استفاده از تعریف شار مغناطیسی داریم: (زاویه بین $\vec{S}$ و $\vec{B}_{21}$، θ می‌باشد)

$$\psi_{21}=\vec{B}_{21}.\vec{S}_2=\frac{\mu_\circ I_1 a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta S\cos\theta$$

طبق تعریف ضریب القای متقابل خواهیم داشت:

$$L_{21}=M_{21}=\frac{\psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_\circ a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta S\cos\theta$$

۲ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و قضیه استوکس خواهیم داشت:

$$emf=-\frac{d\psi}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}.d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{A}ds \xrightarrow{\text{قضیه استوکس}} -\frac{d}{dt}\oint_c \vec{A}.d\vec{\ell}$$

۳ـ گزینه «۲» از قانون القای فاراده استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon=-\frac{d\varphi_B}{dt}=-\frac{d}{dt}(\vec{B}.\vec{A}) \quad \text{و از طرفی} \quad \frac{d\vec{B}}{dt}=\alpha \ , \ A=\pi R^2 \ \Rightarrow \varepsilon=\alpha\pi R^2$$

در نقطه r میدان مغناطیسی وجود ندارد بلکه فقط میدان الکتریکی وجود دارد و لذا نیروی وارد بر پروتون، نیروی الکتریکی است.

$$\varepsilon=\oint \vec{E}.d\vec{\ell} \Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{l}=\alpha\pi R^2 \Rightarrow E2\pi r=\alpha\pi R^2$$

لذا از قانون دوم نیوتن برای شتاب پروتون خواهیم داشت:

$$\vec{E}=\frac{\alpha R^2}{2r}\hat{a}_\varphi \qquad \vec{F}=\vec{E}q=\vec{E}e=\frac{e\alpha R^2}{2r}\hat{a}_\varphi \Rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{F}}{m_p}=\frac{e\alpha R^2}{2rm_p}\hat{a}_\varphi$$

۴ـ گزینه «۱» می‌توانیم با استفاده از رابطه $\varepsilon=\oint \vec{V}\times\vec{B}.d\vec{\ell}$ نیروی محرکه القایی درون میله را به دست آوریم. بنابراین ابتدا باید سرعت میله $(\vec{V})$ را محاسبه کنیم. با توجه به این که زاویه برحسب زمان داده شده است با استفاده از تعریف سرعت زاویه‌ای خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\frac{d\theta}{dt}\\ \theta&=\theta_\circ\cos\omega t\end{aligned}\right\}\Rightarrow\omega=-\omega\theta_\circ\sin\omega t$$

حال می‌توانیم سرعت میله را به دست آوریم:

$$\vec{V}=\omega L$$

با جایگذاری V در رابطه ε می‌توان نوشت:

$$\varepsilon=B\omega\int_\circ^L LdL=B\omega\frac{L^2}{2}=\frac{BL^2}{2}(-\theta_\circ\omega\sin\omega t)$$

به ازای $t=\frac{\pi}{6\omega}$ خواهیم داشت:

$$\varepsilon=\frac{1}{4}BL^2\theta_\circ\omega$$

۵ـ گزینه «۲» **روش اول:** هرگاه $a=b$، در این صورت شکل الف و ب یکسان بوده و عملاً تغییری در سیستم صورت نگرفته و انتظار می‌رود که کار لازم صفر باشد.

روش دوم: برای به دست آوردن کار انجام شده باید اختلاف انرژی ذخیره شده در دو حالت را به دست آوریم. برای این منظور با توجه به این که بین سیم و حلقه القای متقابل وجود دارد می‌توانیم با استفاده از رابطه $W=\frac{1}{2}LI^2$ انرژی ذخیره شده در هر کدام از سیستم‌ها را به دست آوریم. توجه شود که انرژی درون هر کدام از سیستم‌ها از مجموع انرژی ذخیره شده توسط خودالقایی سیم، خودالقایی حلقه و القای متقابل بین حلقه و سیم تشکیل شده است:

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

انرژی ذخیره شده در سیستم اول $W_{m_1}=\frac{1}{2}L_{11}I_1^2+\frac{1}{2}L_{22}I_2^2+M_{12}I_1I_2$

انرژی ذخیره شده در سیستم دوم $W_{m_2}=\frac{1}{2}L_{11}I_1^2+\frac{1}{2}L_{22}I_2^2+M'_{12}I_1I_2$

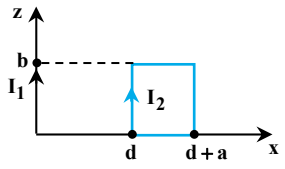
لازم به ذکر است که ضرایب خودالقایی L_{11} و L_{22} در هر دو سیستم یکسان می‌باشند چون تغییر در ساختار آن‌ها وارد نشده است. حال برای به دست آوردن کار انجام شده اختلاف انرژی بین دو سیستم را به دست می‌آوریم:

$$W=\Delta W_m=W_{m_2}-W_{m_1}=(M'_{12}-M_{12})I_1I_2$$

بنابراین برای به دست آوردن کار انجام شده تنها لازم است ضرایب القایی بین حلقه و سیم را به دست آوریم و سپس با استفاده از رابطه بالا کار را محاسبه کنیم (توجه کنید چون محیط در هر دو سیستم خطی است بنابراین $M_{12}=M_{21}$ می‌باشد). برای به دست آوردن M_{12} و M'_{12} ابتدا میدان مغناطیسی ناشی از جریان سیم را به دست می‌آوریم:

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{\ell}=\mu_\circ I_1 \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi r}$$

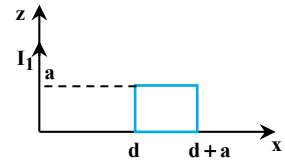
حال با استفاده از تعریف شار مغناطیسی خواهیم داشت (فرض کرده‌ایم که سیم در جهت محور z قرار دارد و حلقه در صفحه xz):



$$\phi_{12}=\int_\circ^b\int_d^{d+a}\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi x}dx\,dz=\frac{b\mu_\circ I_1}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$\phi'_{12}=\int_\circ^b\int_d^{d+b}\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi x}dx\,dz=\frac{a\mu_\circ I_1}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

با استفاده از تعریف ضریب القایی خواهیم داشت:



$$M'_{12}-M_{12}=\frac{\phi'_{12}}{I_1}-\frac{\phi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_\circ}{2\pi}(a\ln\frac{d+b}{d}-b\ln\frac{d+a}{d})$$

حال با استفاده از رابطه کار که به دست آوردیم خواهیم داشت:

$$W=(M'_{12}-M_{12})I_1I_2=I_1I_2\frac{\mu_\circ}{2\pi}(a\ln\frac{d+b}{d}-b\ln\frac{d+a}{d})$$

۶ـ گزینه «۳» از قانون القای الکترومغناطیسی فاراده استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon=-\frac{d\varphi_B}{dt}\ ,\ \varepsilon=\oint_c\vec{E}.d\vec{L}\Rightarrow\varepsilon=-\frac{d}{dt}(B(t).\pi r^2)\Rightarrow\varepsilon=-\pi r^2\frac{dB}{dt}$$

حال برای به دست آوردن $\vec{E}$ داریم:

$$\varepsilon=\oint_c\vec{E}.d\vec{\ell}=-\pi r^2\frac{dB}{dt}\Rightarrow E2\pi r=-\pi r^2\frac{dB}{dt}\Rightarrow\vec{E}=-\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt}\hat{e}_\varphi\Rightarrow|\vec{E}|=\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt}$$

۷ـ گزینه «۱» برای به دست آوردن نیروی محرکه القایی در حلقه باید تغییرات شار گذرنده از حلقه را برحسب زمان به دست آوریم. ابتدا باید میدان مغناطیسی ناشی از سیم جریان را به دست آوریم.

$$\oint\vec{B}.d\vec{\ell}=\mu_\circ I\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{2\pi r}$$

حال با استفاده از تعریف شار مغناطیسی مقدار شار گذرنده از حلقه را به دست می‌آوریم:

$$\phi=\iint_S\vec{B}.d\vec{s}=\int_\circ^b\int_{r_\circ+Vt}^{r_\circ+a+Vt}\frac{\mu_\circ I}{2\pi r}dr\,dz$$

$$r=r_\circ+V_\circ t\qquad\phi=\frac{\mu_\circ Ib}{2\pi}[\ln(a+r)-\ln r]$$

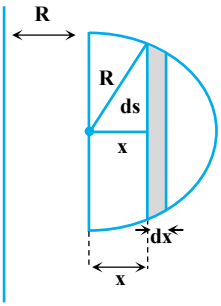
در لحظه t خواهیم داشت:

$$\varepsilon=\frac{-d\phi}{dt}=\frac{-\mu_\circ Ib}{2\pi}[\frac{V_\circ}{a+r}-\frac{V_\circ}{r}]\quad;\quad\varepsilon=\frac{\mu_\circ Ib}{2\pi}[\frac{aV_\circ}{r(a+r)}]$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۸ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن ضریب القای متقابل M باید شار مغناطیسی گذرنده از سطح نیم‌دایره را به دست آوریم. برای این منظور یک جزء دیفرانسیلی سطحی به صورت زیر تعریف می‌کنیم (dS). سپس با استفاده از تعریف شار $\phi = \iint_S \vec{B}.ds'$ شار مغناطیسی گذرنده از نیم‌دایره را به دست می‌آوریم:



$$ds = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,.dx$$

$$B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi(R+x)} \qquad \phi_{12} = \int_\circ^R \frac{\mu_\circ I}{2\pi(R+x)}.2\sqrt{R^2-x^2}\,.dx$$

با استفاده از تعریف ضریب القایی داریم:

$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I} = \frac{\mu_\circ}{\pi}\int_\circ^R \sqrt{\frac{R-x}{R+x}}\,dx$$

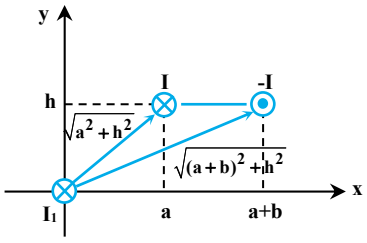
۹ـ گزینه «۳» با حرکت میله در راستای محور x شار مغناطیسی گذرنده از داخل قاب تغییر می‌کند. این تغییر شار یک نیروی محرکه القایی ایجاد کرده و آن نیز به نوبه‌ی خود سبب ایجاد جریان القایی در میله و قاب می‌شود.

$$\phi = \int B.Ldx = L\int_\circ^y B_\circ(2 - \frac{x^2}{2L^2})dx = L_\circ B_\circ(2y - \frac{y^3}{6L^2})$$

با مشتق‌گیری از این شار برای emf داریم:

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{15}{8}LB_\circ V_\circ \Rightarrow I = \frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt}$$

۱۰ـ گزینه «۱»



روش اول: برای به دست آوردن ضریب القایی متقابل باید شار مغناطیسی گذرنده از سطح بین دو سیم را به دست آوریم. ابتدا میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 را با استفاده از قانون آمپر به دست می‌آوریم:

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_\circ I_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I_1}{2\pi r}$$

حال با استفاده از تعریف ضریب القایی داریم:

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\int_\circ^1\int_{\sqrt{a^2+h^2}}^{\sqrt{(a+b)^2+h^2}} \frac{\mu_\circ I_1 drdz}{2\pi r}}{I_1} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\ln(\frac{h^2+(a+b)^2}{h^2+a^2})$$

روش دوم: فرض می‌کنیم که a به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. چون دو سیم از جریان I_1 خیلی دور شده‌اند دیگر شاری از آن‌ها عبور نخواهد کرد. بنابراین ضریب القای متقابل آن‌ها صفر خواهد بود که فقط گزینه (۱) و (۴) این شرط را برآورده می‌کنند. حال فرض کنید که $h=\circ$ باشد، یعنی دو سیم تلفن روی محور x قرار بگیرند. همچنین فرض کنید که $b=a$ باشد با این دو شرط گزینه (۴) بی‌نهایت می‌شود که مقدار نامعقولی است، چون در این شرایط ضریب القای متقابل باید یک مقدار محدود و مشخص داشته باشد. بنابراین گزینه (۱) درست می‌باشد.

۱۱ـ گزینه «۲» طبق قانون القای فاراده خواهیم داشت:

$$\oint \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi_\circ}{\Delta t}$$

برای گشتاور وارد بر بار می‌توان نوشت:

$$d\vec{\tau} = \vec{R}\times\vec{F} = \vec{R}\times\vec{E}dq = \vec{R}\times\vec{E}\lambda dL \Rightarrow \vec{\tau} = R\lambda\oint\vec{E}.d\vec{\ell}$$

بنابراین برای گشتاور به دست می‌آید:

$$\vec{\tau} = R\lambda(\frac{-d\phi}{dt}) = R\lambda\frac{\phi_\circ}{\Delta t}$$

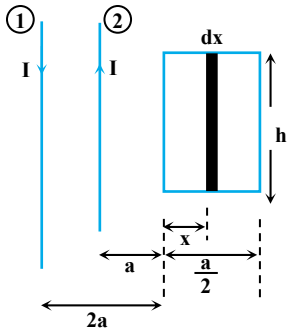
اندازه حرکت زاویه‌ای کل القائی در حلقه از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\int \tau dt = R\lambda\phi_\circ = \frac{RQ\phi_\circ}{2\pi R} = \frac{Q\phi_\circ}{2\pi}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ گزینه «۴» با محاسبه شار مغناطیسی گذرنده از حلقه مستطیل شکل ناشی از سیم‌های بلند ۱ و ۲ خواهیم داشت:



$$\phi_1 = \int_{\circ}^{\frac{a}{2}} \frac{\mu_\circ I h dx}{2\pi(2a+x)} = \frac{\mu_\circ I h}{2\pi}\ln\frac{5}{4}$$ (برون‌سو)

$$\phi_2 = \int_{\circ}^{\frac{a}{2}} \frac{\mu_\circ I h dx}{2\pi(a+x)} = \frac{\mu_\circ I h}{2\pi}\ln\frac{3}{2}$$ (درون‌سو)

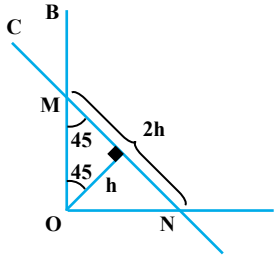
$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_\circ I h}{2\pi}\ln\frac{6}{5}$$ (درون‌سو)

بنابراین طبق قانون القای فاراده به دست می‌آید:

$$\varepsilon = \frac{-d\phi}{dt} = (\frac{\mu_\circ h}{2\pi}\ln\frac{6}{5})\frac{dI}{dt} = \frac{-\mu_\circ kh}{2\pi}\ln\frac{6}{5} \Rightarrow I' = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\mu_\circ kh}{2\pi R}\ln\frac{6}{5}$$

جهت جریان القایی نیز طبق قانون لنز پادساعتگرد می‌باشد.

۱۳ـ گزینه «۲» میله MN با سرعت V در راستای نیمساز ربع اول حرکت می‌کند بنابراین: $h = Vt$



لذا برای مساحت مثلث در هر لحظه داریم: $A = \frac{1}{2}h(2h) = h^2$

شار گذرنده از سطح مثلث OMN از رابطه مقابل به دست می‌آید: $\phi = B.A = Bh^2 = BV^2t^2$

با استفاده از تعریف نیرو محرکه القایی داریم: $|\varepsilon| = |\frac{d\phi}{dt}| = 2BV^2t$

مقاومت کل مدار مثلثی شکل OMN نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$R = \lambda[MN + OM + ON] = \lambda(2h + 2\sqrt{2}h)$$

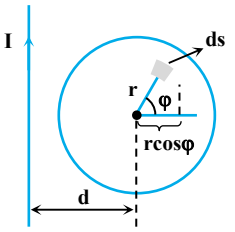
بنابراین داریم:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BV}{\lambda(1+\sqrt{2})}$$

۱۴ـ گزینه «۴» برای به دست آوردن ضریب القای متقابل باید شار گذرنده از حلقه را بیابیم. ابتدا میدان مغناطیسی ناشی از سیم را به دست می‌آوریم.

$$\oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_\circ I \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi x}$$

چون شکل دایروی است بهتر است به صورت قطبی مسئله را حل کنیم. بنابراین یک جزء دیفرانسیلی سطح dS در مختصات استوانه‌ای از سطح حلقه را در نظر می‌گیریم و برای به دست آوردن شار گذرنده از جزء دیفرانسیلی dS باید فاصله آن از سیم حامل جریان را به دست آوریم که مطابق شکل برابر $x = d + r\cos\phi$ می‌باشد.



بنابراین شار گذرنده از dS برابر است با:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi_{12} &= \vec{B}.dS \\ B &= \frac{\mu_\circ I}{2\pi(d + r\cos\varphi)} \\ dS &= r\,dr\,d\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\varphi_{12} = \frac{\mu_\circ I r\,dr\,d\varphi}{2\pi(d + r\cos\varphi)}$$

حال با انتگرال گرفتن از $d\varphi_{12}$ روی سطح حلقه می‌توانیم کل شار گذرنده از حلقه را به دست آوریم و سپس با استفاده از رابطه $M = \frac{\varphi_{12}}{I}$ ضریب القای متقابل بین حلقه و سیم را محاسبه کنیم. بنابراین:

$$\phi_{12} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\int_{\circ}^{a}\int_{\circ}^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\varphi}{d + r\cos\varphi} = \mu_\circ I[\sqrt{d^2 - a^2} - d] \Rightarrow M = \frac{\phi_{12}}{I} = \mu_\circ[\sqrt{d^2 - a^2} - d]$$

هرگاه حلقه به سیم خیلی نزدیک باشد $d = a$ است و لذا خواهیم داشت: $M = \mu_\circ a$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۵ـ گزینه «۴» برای به دست آوردن اندوکتانس داخلی ابتدا باید میدان مغناطیسی داخل هادی را به دست آوریم. با توجه به تقارن شکل برای به دست آوردن میدان مغناطیسی می‌توانیم از قانون آمپر استفاده کنیم:

$$\oint \vec{H}.d\vec{\ell} = I_{in} \Rightarrow H_\varphi(2\pi r) = I_{in}$$

برای به دست آوردن I_{in} باید ابتدا چگالی جریان داخل رسانا را به دست آوریم سپس با استفاده از رابطه $I_{in} = \iint_S Jds$ مقدار جریان I_{in} را به دست آوریم. چون که جریان به طور یکنواخت توزیع شده است چگالی جریان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi b^2 - \pi a^2} \Rightarrow I_{in} = \iint_S \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} ds$$

حال با جایگذاری I_{in} در قانون آمپر خواهیم داشت: (توجه شود که چون شکل رسانا استوانه می‌باشد $ds = r\,dr\,d\varphi$ می‌باشد)

$$H_\varphi = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\int_a^r \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} r\,dr\,d\varphi \Rightarrow H_\varphi = \frac{I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)}\hat{a}_\varphi$$

چون که فرض شده است که رسانا غیرمغناطیسی می‌باشد خواهیم داشت: $\mu = \mu_0 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)}\hat{a}_\varphi$

حال که مقدار $\vec{B}$ را برای داخل هادی به دست آوردیم می‌توانیم با استفاده از رابطه $W_m = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_V |\vec{B}|^2\, dV$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده در هادی را به دست آوریم. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول کابل از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{\mu_0 I^2(r^2 - a^2)^2}{4\pi^2 r^2(b^2 - a^2)^2} r\,dr\,d\varphi\,dz = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi(b^2 - a^2)^2}\int_a^b \frac{(r^2 - a^2)^2}{r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi(b^2 - a^2)^2}\left[\frac{3}{4}a^4 + a^4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}b^4 - a^2b^2\right]$$

بنابراین با استفاده از رابطه $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ خواهیم داشت: $L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi(b^2 - a^2)^2}\left[\frac{3}{4}a^4 + a^4 \ln\frac{b}{a} + \frac{1}{4}b^4 - a^2b^2\right]$

۱۶ـ گزینه «۳» ابتدا میدان مغناطیسی ناشی از سیم را به دست می‌آوریم و سپس شار گذرنده از حلقه را محاسبه می‌کنیم و در پایان با استفاده از رابطه $M = \frac{\phi_{12}}{I_1}$ ضریب القای متقابل را می‌یابیم.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\phi_{12} = \int_r^{d+r} \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\right) h\,dr = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi}\ln\frac{r+d}{r} \qquad ; \qquad M = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{r+d}{r}$$

۱۷ـ گزینه «۱» چگالی شار مغناطیسی در فواصل دور از یک دو قطبی مغناطیسی به صورت مقابل می‌باشد: $B = \frac{\mu_0 |\vec{m}|}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{a}_R + \sin\theta\hat{a}_\theta)$

بر طبق رابطه فوق، چگالی شار مغناطیسی در فواصل دور از یک آهنربای دائمی میله‌ای شکل متناسب با $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{z^3}$ خواهد بود. از طرفی معادله z را می‌توان بر حسب سرعت به صورت روبرو نوشت: $z = vt + z_0 = vt + 0 = vt$

بنابراین شار مغناطیسی متناسب با $\frac{1}{t^3}$ خواهد بود. $\phi \simeq B \simeq \frac{1}{z^3} \simeq \frac{1}{t^3}$

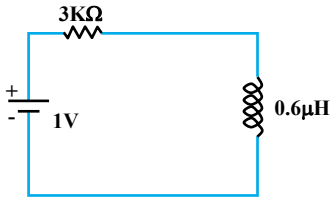
با توجه به اینکه نیروی محرکه الکتریکی القایی متناسب با مشتق شار مغناطیسی نسبت به زمان می‌باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$V_{oc}(t) \simeq \frac{d}{dt}(\phi) \simeq \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^3}\right) \simeq \frac{1}{t^4}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۸ـ گزینه «۳» طبق مفروضات مسأله، حلقه سیمی دایره‌ای شکل را می‌توان به منزله یک سلف با ضریب خودالقایی $0/6\mu H$ در نظر گرفت. بنابراین پس از بستن کلید، جریان گذرنده از این حلقه به صورت زیر خواهد بود:



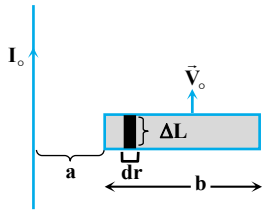
$$i(t)=\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

شار مغناطیسی گذرنده از حلقه دایره‌ای شکل برابر $\phi=Li$ خواهد بود که نصف این شار از داخل حلقه نیم دایره‌ای شکل می‌گذرد. بنابراین ولتاژ القاء شده در دو سر آن به صورت زیر خواهد بود:

$$v(t)=-\frac{d\phi'}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt}=\frac{-1}{2}\frac{d}{dt}(Li)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{R}{L}t}=-\frac{1}{2}\exp(-10^{10}\frac{t}{2})$$

۱۹ـ گزینه «۲» طبق قانون القای فاراده داریم:

$$\varepsilon=-\frac{d\varphi_B}{dt}$$



با استفاده از قانون آمپر برای میدان مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\oint\vec{B}.d\vec{\ell}=\mu_0 I\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$$

حال به محاسبه‌ی شار می‌پردازیم. با استفاده از صورت دیفرانسیلی و مقدار میدان مغناطیس مشاهده شده خواهیم داشت:

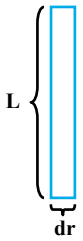
$$d\varphi_B=\vec{B}.d\vec{A}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}e_{\hat{\varphi}}.\Delta L dr\hat{e}_\varphi\Rightarrow\varphi_B=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\Delta L\int_a^b\frac{dr}{r}\Rightarrow\varphi_B=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\Delta L\ln(\frac{b}{a})\Rightarrow\varepsilon=-\frac{d}{dt}(\varphi_B)$$

بنابراین از قانون القای فاراده داریم:

$$|\varepsilon|=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln(\frac{b}{a})\frac{d}{dt}(\Delta L)\Rightarrow|\varepsilon|=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}V_0\ln(\frac{b}{a})$$

۲۰ـ گزینه «۴» (میدان مغناطیسی کابل حامل جریان) $\oint\vec{B}.d\vec{L}=\mu_0 I\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$, $L=\frac{\varphi_B}{I}$ یا و $L=\frac{d\varphi_B}{dI}$

طول کابل را L درنظر می‌گیریم.



$$d\varphi_B=\vec{B}.d\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell dr\Rightarrow\varphi_B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}L\int_a^b\frac{dr}{r}$$

بنابراین با محاسبه‌ی انتگرال برای شار به دست می‌آید:

$$\varphi_B=\frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln(\frac{b}{a})\quad,\quad L=\frac{\varphi_B}{I}=\frac{\mu_0\ell}{2\pi}\ln(\frac{b}{a})$$

چون خودالقایی در واحد طول خواسته شده است لذا داریم:

$$\frac{L}{\ell}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln(\frac{b}{a})$$

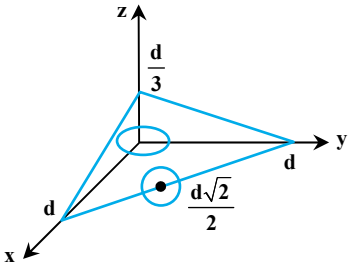
۲۱ـ گزینه «۴» یک ابررسانا در دمای T که بیشتر از دمای بحرانی T_c است مانند هر فلز معمولی دیگر رفتار می‌کند و خطوط شار مغناطیسی می‌توانند به درون آن نفوذ کنند. وقتی دما تا $T<T_c$ کاهش می‌یابد، حلقه ابررسانا می‌شود و خطوط شار مغناطیسی را دفع می‌کند. بعضی از این خطوط در حلقه به دام می‌افتند و این شار محصور شده، کوانتیده است. لذا اگر این حلقه آلومینیومی را تا دمایی کمتر از دمای بحرانی سرد کنیم، ابررسانا شده و شار مغناطیسی در داخل حلقه به دام می‌افتد.

$$\varphi_B=n\frac{2\pi\hbar}{2e}=n\frac{2\pi}{2e}\frac{h}{2\pi}=n\frac{h}{2e}\qquad n=0,\pm1,\pm2,...$$

www.modaresanesharif.ac.ir

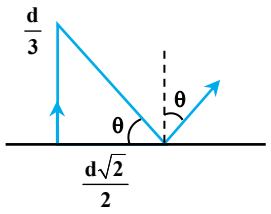
www.modaresanesharif.ac.ir

۲۲ـ گزینه «۴» هر یک از دو حلقه به منزله یک دو قطبی مغناطیسی می‌باشد. با توجه به اینکه بردار گشتاور دو قطبی مغناطیسی بر سطح حلقه عمود است، بنابراین دو قطبی‌ها را می‌توان به شکل روبرو در نظر گرفت. چگالی شار مغناطیسی ناشی از دو قطبی مغناطیسی واقع در مبدأ مختصات به صورت زیر می‌باشد:



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_\circ(\pi a^2 I)}{4\pi r^3}[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta]$$

در محل دو قطبی مغناطیسی دوم $\theta = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد بنابراین داریم:



$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_\circ(\pi a^2 I)}{4\pi(\frac{d\sqrt{2}}{2})^3}$$

شار مغناطیسی گذرنده از حلقه واقع در صفحه $x + y + 3z = d$ چنین خواهد بود:

$$\phi = B.A = |\vec{B}_1|(\pi b^2)(\cos\theta) = \frac{\mu_\circ(\pi a^2 I)(\pi b^2)}{4\pi(d\frac{\sqrt{2}}{2})^3}\left(\frac{d\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(\frac{d\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{d}{3})^2}}\right) = \frac{3\mu_\circ\pi a^2 b^2 I}{\sqrt{22}\,d^3}$$

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{3\mu_\circ\pi a^2 b^2}{\sqrt{22}\,d^3}$$

۲۳ـ گزینه «۱» ابتدا باید شار را به دست آوریم:

$$\phi = \frac{NI}{R} = \frac{NI}{\frac{L_1}{\mu_1 A} + \frac{L_2}{\mu_2 A}} = \frac{NI}{\frac{2\times10^{-3}}{\mu_\circ\times2\times10^{-4}} + \frac{5\times10^{-2}}{200\mu_\circ\times2\times10^{-4}}} \Rightarrow \phi = \frac{200\mu_\circ\times10^{-4}\times2NI}{400\times10^{-3}+5\times10^{-2}} = \frac{400\mu_\circ\times10^{-4}\,NI}{45\times10^{-2}} = \frac{4\mu_\circ NI}{45}$$

حال با استفاده از رابطه $M = \frac{\phi}{I}$ داریم:

$$\phi = N\varphi = \frac{4\mu_\circ N^2 I}{45} \Rightarrow M = \frac{\phi}{I} = \frac{4\mu_\circ N^2}{45} = \frac{8\mu_\circ N^2}{90}$$

۲۴ـ گزینه «۱» نیروی محرکه الکتریکی از نوع حرکتی می‌باشد ($\vec{B}$ ثابت است) بنابراین داریم:

$$emf = \int(\vec{V}\times\vec{B}).d\vec{\ell}$$

با فرض اینکه $\vec{B}$ در راستای $\hat{a}_z$ و $\vec{V}$ در جهت $\hat{a}_\varphi$ باشد، با استفاده از رابطه‌ی $\vec{V} = r\omega\hat{a}_\varphi$ خواهیم داشت:

$$emf = \int_\circ^a (r\omega\hat{a}_\varphi \times B\hat{a}_z).d\vec{\ell} = \int_\circ^a (r\omega B\,\hat{r}).(dr\,\hat{r}) = \int_\circ^a r\omega B\,dr = \frac{\omega B a^2}{2}$$

۲۵ـ گزینه «۳» با فرض اینکه قاب مستطیل شکل به اندازه x جابجا شده است، خواهیم داشت:

$$\phi = BA = Bax = LI$$

در نتیجه داریم:

$$I = \frac{Bax}{L}$$

از طرفی نیروی مغناطیسی وارد بر قاب مستطیل شکل برابر است با:

$$F = BIa = \frac{Ba(Bax)}{L} = \frac{B^2a^2x}{L} = kx$$

با فرض اینکه x کوچک باشد، بسامد زاویه‌ای نوسانات چنین خواهد بود:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{B^2a^2}{Lm}} = \frac{Ba}{\sqrt{Lm}}$$

۲۶ـ گزینه «۴» در لحظه وارد شدن استوانه مغناطیسی به درون حلقه، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه افزایش می‌یابد، همچنین در لحظه خارج شدن استوانه مغناطیسی از حلقه، شار مغناطیسی گذرنده از آن کاهش می‌یابد. بنابراین طبق قانون لنز و قانون القای فاراده، نیروی محرکه تولید شده در این دو حالت، مخالف یکدیگر خواهند بود. در حالتی که استوانه مغناطیسی به طور کامل از حلقه خارج نشده است، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه ثابت بوده و لذا نیروی محرکه الکتریکی تولید شده در حلقه صفر خواهد بود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۷ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. (شار گذرنده از حلقه با زمان تغییر نمی‌کند.)

۲۸ـ گزینه «۱» میدان حاصل از سیملوله را می‌شناسیم. این میدان طبق معادله $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ یک میدان الکتریکی را القا خواهد کرد که بنا بر تقارن در راستای $\hat{\varphi}$ فرض می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{B}(t)=\mu_\circ n\alpha t\hat{a}_z \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu_\circ n\alpha\hat{a}_z \Rightarrow \vec{E}=E_\varphi\hat{a}_\varphi \Rightarrow \vec{E}=-\frac{\mu_\circ\alpha n}{2}\rho\hat{a}_\varphi$$

۲۹ـ گزینه «۳» مقاومت مغناطیسی فاصله هوایی و میله آهنی از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$R_g=\frac{S}{\mu_\circ A} \qquad R_c=\frac{L-S}{\mu_\circ\mu_r A} \quad ; \quad \phi=\frac{NI}{R_g+R_c}=BA\Rightarrow B=\frac{NI}{A(R_g+R_c)}$$

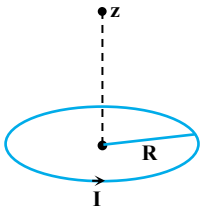
با جایگذاری به جای R_g و R_c در رابطه‌ی به دست آمده برای B خواهیم داشت:

$$B=\frac{NI}{\frac{S}{\mu_\circ}+\frac{L-S}{\mu_\circ\mu_r}}=\frac{\mu_\circ\mu_r NI}{(\mu_r-1)S+L}=\frac{\mu_\circ\mu_r NI}{(\mu_r-1)S+2\pi R}$$

۳۰ـ گزینه «۲» شار مغناطیسی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\phi=\iint Bds=\int_\circ^x\int_\circ^b\frac{\mu_\circ I}{2\pi r}drdx=\frac{\mu_\circ Ix}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad , \quad L=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_\circ x}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

۳۱ـ گزینه «۲» میدان مغناطیسی روی محور یک حلقه به صورت زیر می‌باشد:



$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ IR^2}{2(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

چون $z\gg R$ می‌باشد $\vec{B}$ به صورت مقابل تقریب زده می‌شود:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ IR^2}{2z^3}$$

با استفاده از تعریف emf داریم:

$$emf=-\int_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}ds=\frac{3\mu_\circ IR^2\frac{dz}{dt}}{2z^4}\pi r^2=\frac{3\mu_\circ I\pi R^2r^2V}{2z^4}$$

زیرا در این حالت تغییر شار تنها به جهت تغییر فاصله است که میدان را تغییر می‌دهد و نه تغییر سطح.

۳۲ـ گزینه «۴» برای شدت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه بزرگ داریم:

$$B_1=\frac{\mu_\circ I_1}{2b}$$

مساحت حلقه کوچک برابر است با:

$$S_2=\pi(\frac{b}{100})^2$$

برای شار گذرنده از حلقه کوچک می‌توان نوشت:

$$\phi_{12}=\vec{B}_1\cdot\vec{S}_2=B_1S_2\cos\theta_\circ=\frac{\mu_\circ\pi b I_1}{2\times10^4}\cos\theta_\circ$$

حال با استفاده از رابطه مقابل اندوکتانس را به‌دست می‌آوریم:

$$M_{12}=\frac{\phi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_\circ\pi b}{2\times10^4}\cos\theta_\circ$$

۳۳ـ گزینه «۲» نیروی محرکه القاشده در دو طرف ورقه بزرگ فلزی به صورت زیر می‌باشد:

$$e=\int(\vec{V}\times\vec{B}).d\vec{\ell}=BVW \quad ; \quad e=BVW$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

با استفاده از قانون آمپر داریم: $I=\frac{e}{R}=\frac{BVW}{\frac{W}{\sigma A}}=B\sigma VA \quad ; \quad f=BIW=B^{۲}\sigma VWA$

نیروی وارد بر سطح قطعه رسانا برابر است با: $\frac{f}{A}=\sigma VWB^{۲}$

۳۴ـ گزینه «۳» نیروی محرکه القایی عبارت است از: $\varepsilon=-\frac{d\phi_B}{dt}=-\frac{d}{dt}\int \vec{B}.\hat{a}_n\,da$

بنابراین، ابتدا باید میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را به دست آوریم:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{B_\circ}{a}\{y\sin^{۴}(\omega_\circ t)-x\cos^{۴}(\omega_\circ t)\}\hat{a}_z \Rightarrow \varepsilon=-\int\frac{d\vec{B}}{dt}.\hat{a}_n da$$

از طرفی می‌توان نوشت: $\frac{d\vec{B}}{dt}=\frac{۲B_\circ\omega_\circ}{a}\sin(۲\omega_\circ t)\times\{y\sin^{۲}(\omega_\circ t)+x\cos^{۲}(\omega_\circ t)\}\hat{a}_z$

همچنین داریم: $\begin{cases}\hat{a}_z=\hat{k}\\ da=dx\,dy\end{cases}\Rightarrow\varepsilon=-\frac{۲B_\circ\omega_\circ}{a}\sin(۲\omega_\circ t)\times\int_\circ^a\int_\circ^a\{y\sin^{۲}(\omega_\circ t)+x\cos^{۲}(\omega_\circ t)\}dx\,dy$

بنابراین برای نیروی emf به دست می‌آید:

$$\varepsilon=-\frac{۲B_\circ\omega_\circ}{a}\sin(۲\omega_\circ t)\times\{\frac{a^{۳}}{۲}\sin^{۲}(\omega_\circ t)+\frac{a^{۳}}{۲}\cos^{۲}(\omega_\circ t)\}=-B_\circ\omega_\circ a^{۲}\sin(۲\omega_\circ t)\Rightarrow|\varepsilon|=B_\circ\omega_\circ a^{۲}\sin(۲\omega_\circ t)$$

۳۵ـ گزینه «۱» برای دو مدار جفت شده، انرژی مغناطیسی عبارت است از: $u=\frac{۱}{۲}L_۱I_۱^{۲}+M_{۱۲}I_۱I_۲+\frac{۱}{۲}L_۲I_۲^{۲}$

اگر انرژی مغناطیسی ذخیره شده $W_۲$ یعنی $\frac{۱}{۲}L_۲I_۲^{۲}$ به حداقل برسد، در این صورت انرژی مغناطیسی کل u نیز کمینه خواهد بود. بنابراین، برای به دست آوردن نسبت $\frac{I_۱}{I_۲}$ باید u را کمینه کنیم، بنابراین می‌توان نوشت: $u=I_۲^{۲}[\frac{۱}{۲}L_۱(\frac{I_۱}{I_۲})^{۲}+M_{۱۲}\frac{I_۱}{I_۲}+\frac{۱}{۲}L_۲\}$

از طرفی داریم: $\frac{I_۱}{I_۲}=x\Rightarrow u=I_۲^{۲}\{\frac{۱}{۲}L_۱x^{۲}+M_{۱۲}x+\frac{۱}{۲}L_۲\}$

بنابراین به دست می‌آید:

شرط کمینه شدن : $\frac{du}{dx}=۰\rightarrow\frac{du}{dx}=L_۱x+M_{۱۲}=۰\rightarrow x=-\frac{M_{۱۲}}{L_۱}\rightarrow\frac{I_۱}{I_۲}=-\frac{M_{۱۲}}{L_۱}$

۳۶ـ گزینه «۳» ابتدا میدان مغناطیسی داخل سیم را به‌دست می‌آوریم:

$$\oint\vec{H}.d\vec{\ell}=I_{in}=\int\int Jds \qquad H\times۲\pi r=\frac{I\pi r^{۲}}{\pi a^{۲}}\Rightarrow H=\frac{Ir}{۲\pi a^{۲}}$$

انرژی ذخیره شده درون سیم برابر است با:

$$W=\frac{۱}{۲}\mu_\circ\int|H|^{۲}dv=\frac{\mu_\circ I^{۲}}{۴\pi^{۲}a^{۴}}\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^a r^{۳}drd\varphi=\frac{\mu_\circ I^{۲}}{۸\pi}\Rightarrow W=\frac{۱}{۲}LI^{۲}\Rightarrow L=\frac{۲W}{I^{۲}}=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}$$

۳۷ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از شکل نقطه‌ای قانون فاراده داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\beta E_۱\cos(\omega t-\beta z)\hat{a}_x-\beta E_۲\sin(\omega t-\beta z)\hat{a}_y\Rightarrow\vec{B}=-\frac{\beta E_۱}{\omega}\sin(\omega t-\beta z)\hat{a}_x+\frac{\beta E_۲}{\omega}\cos(\omega t-\beta z)\hat{a}_y$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۸ـ گزینه «۲» ابتدا باید میدان مغناطیسی ناشی از حلقه بزرگتر را به‌دست آوریم:

$$B=\frac{\mu_\circ I}{2b}=\frac{\mu_\circ I_\circ}{2b}\cos\omega t$$

فرض می‌کنیم که $a \ll b$ می‌باشد، بنابراین $\vec{B}$ در سطح حلقه کوچکتر تقریباً ثابت است.

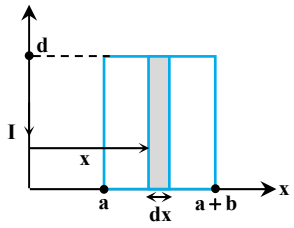
با استفاده از رابطه emf داریم:

$$emf=-\int\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.d\vec{s}=\int\int\frac{\mu_\circ I_\circ\omega}{2b}\sin\omega t ds \Rightarrow emf=(\frac{\pi\mu_\circ I_\circ}{2})\frac{a^2}{b}\omega\sin\omega t$$

۳۹ـ گزینه «۱» میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان برابر است با:

$$B=\frac{\mu_\circ I}{2\pi x}$$

مطابق شکل مقابل یک عنصر دیفرانسیلی به طول dx در نظر می‌گیریم و شار مغناطیسی گذرنده از آن را محاسبه می‌کنیم:



$$d\psi=N\frac{\mu_\circ Id}{2\pi x}dx$$

با گرفتن انتگرال از رابطه فوق داریم:

$$\psi=\int_a^{a+b}\frac{N\mu_\circ Id}{2\pi x}dx=\frac{N\mu_\circ Id}{2\pi}\ln(1+\frac{b}{a})$$

بنابراین ضریب القاء به دست می‌آید:

$$L=\frac{\psi}{I}=\frac{N\mu_\circ d}{2\pi}\ln(1+\frac{b}{a})$$

۴۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. میدان مغناطیسی درون سیم‌پیچ برابر است با:

$$B=\frac{\mu_\circ NI}{2\pi b}$$

ضریب خودالقایی چنبره به صورت تقریبی برابر است با:

$$L=\frac{N\psi}{I}=\frac{\mu_\circ N^2}{2\pi b}\pi a^2=\frac{\mu_\circ N^2a^2}{2b}$$

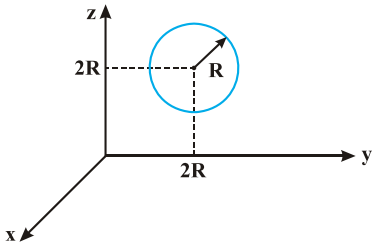
۴۱ـ گزینه «۱»

میدان مغناطیسی غیریکنواخت وابسته به زمان را داریم:

$$\vec{B}(y,t)=(\alpha t+\beta)\hat{i}+\gamma ty\hat{j}$$

ابتدا باید شار عبوری از حلقه را حساب کنیم:

$$\phi=\int\vec{B}.\hat{n}da$$



در اینجا $\hat{n}=\hat{i}$ می‌باشد، لذا تنها مؤلفه‌ی میدان مغناطیسی در جهت xها باعث عبور شار از حلقه می‌شود، زیرا همانطور که می‌دانیم $\hat{i}.\hat{j}=0$ می‌باشد. در نتیجه چون مؤلفه‌ی میدان مغناطیسی، وابستگی مکانی ندارد، از انتگرال خارج می‌شود.

$$\phi=(\alpha t+\beta)\int da=(\alpha t+\beta)(\pi R^2)$$

حال با استفاده از قانون القای فاراده می‌توان نیروی محرکه‌ی القایی را به دست آورد.

$$\varepsilon=\frac{\partial\phi}{\partial t}=\alpha\pi R^2$$

با داشتن ε می‌توان به آسانی کار انجام شده در هر دور را به دست آورد.

$$W=\varepsilon Q=\alpha\pi R^2Q$$

۴۲ـ گزینه «۳» میدان الکتریکی از رابطه‌ی $\vec{E}(t)=\vec{E}e^{-i\omega t}$ به دست می‌آید. پس نیرویی که بر الکترون‌ها وارد می‌شود، برابر است با:

$$\vec{F}=e\vec{E}e^{-i\omega t}$$

اما این نیرو باعث شتاب ذرات می‌شود،

$$a=\frac{|\vec{F}|}{m_e}=\frac{e}{m_e}|\vec{E}|e^{-i\omega t}$$

برای بدست آوردن چگالی جریان، $\vec{J}=n_e\vec{v}$ که $\vec{v}$ سرعت الکترون‌ها است، باید $\vec{v}$ را پیدا کنیم. اما رابطه‌ی سرعت و شتاب برابر است با:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}(t)\Rightarrow\vec{v}=\int\vec{a}(t)dt=\frac{e}{m_e}\vec{E}\int e^{-i\omega t}dt=\frac{e\vec{E}}{m_e}\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-i\omega t}e\vec{E}}{\omega m_e}=\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}e}{\omega m_e}\vec{E}(t)$$

در رابطه‌ی بالا از $\frac{1}{-i}=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$ استفاده شد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۳ـ گزینه «۲» اگر فرض شود از بازوی وسط شاری عبور نمی‌کند. شار عبوری از بازوهای سمت راست و سمت چپ با هم برابر می‌باشند. شارها به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\varphi_1=\frac{N_1I_1}{R_1}\ ,\ R_1=\frac{\ell_1}{\mu A}\quad ,\quad \varphi_2=\frac{N_2I_2}{R_2}\ ,\ R_2=\frac{\ell_2}{\mu A}$$

با توجه به KVL در دو حلقه سمت چپ و سمت راست داریم:

$$\varphi_1=\varphi_2\Rightarrow\frac{N_1I_1}{R_1}=\frac{N_2I_2}{R_2}\Rightarrow\frac{N_1}{N_2}=\frac{R_1}{R_2}\times\frac{I_2}{I_1}=\frac{N_1}{N_2}\times\frac{I_2}{I_1}\quad \underline{\underline{I_2=I_1=I}}\quad \frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{1}{2}$$

۴۴ـ گزینه «۳» چون ترانسفورماتور، ایده‌آل است، در نتیجه توان دو مدار یکسان است و اتلاف نداریم، در نتیجه $p_1=p_2$. از طرفی می‌دانیم که توان یک مدار با مقاومت z و اختلاف پتانسیل V، عبارت است از:

$$p=\frac{V^2}{Z}$$

در نتیجه داریم:

$$p_1=p_2\Rightarrow\frac{V_1^2}{Z_1}=\frac{V_2^2}{Z_2}\Rightarrow$$

$$\frac{V_1^2}{V_2^2}=\frac{Z_1}{Z_2}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$ رابطه‌ی (۱)

از طرفی طبق رابطه‌ی عمومی برای ترانسفورماتورها، می‌دانیم که:

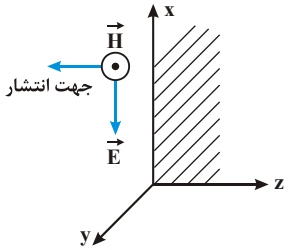
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2}$$ رابطه‌ی (۲)

N_1 تعداد دورهای سیم‌پیچ اولیه و N_2 تعداد دورهای سیم‌پیچ ثانویه می‌باشد. با جایگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۲)، خواهیم داشت:

$$\frac{N_1}{N_2}=\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

۴۵ـ گزینه «۲» ابتدا اندازه را پیدا می‌کنیم. از آنجا که در یک محیط با امپدانس ذاتی η (که $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ است)، نسبت شدت میدان مغناطیسی به فرم زیر است:

$$|H|=\left|\frac{E}{\eta}\right|\Rightarrow|H|=\frac{E'_{1x}}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\quad ,\quad \vec{B}=\mu\vec{H}\Rightarrow|B|=\frac{\mu E'_{1x}}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}=\sqrt{\mu\varepsilon}E'_{1x}=\frac{1}{V_1}E'_{1x}$$



که V_1 سرعت است. ضریب شکست $n=\frac{C}{V}$ است، در نتیجه داریم:

$$|B|=\frac{\frac{C}{V_1}}{C}E'_{1x}=\frac{n_1}{C}E'_{1x}$$

اما جهت: مطابق شکل، موج برگشتی در خلاف جهت zها است و $\vec{E}$ هم در خلاف جهت x به علاوه H (یا به عبارتی B) در جهت $a_n\times\vec{E}$ است، پس جهت B به صورت $(-\hat{k})\times(-\hat{i})=\hat{j}$ می‌باشد یعنی همان گزینه (۲).

۴۶ـ گزینه «۱» می‌دانیم $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=\sin\theta$ (۱) پس:

$$\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{4})=\cos(\underbrace{\omega t-kz-\frac{\pi}{4}}_{\theta}+\frac{\pi}{2})=\sin(\underbrace{\omega t-kz-\frac{\pi}{4}}_{\theta})$$

رابطه‌ی مذکور از قوانین بین توابع سینوسی و کسینوسی (مثلثاتی) به دست آمد.

با توجه به میدان الکتریکی داده شده داریم:

$$\vec{E}=E_x\hat{i}+E_y\hat{i}$$

که مؤلفه‌ی x و مؤلفه‌ی y برابرند با:

$$Ex=2E_\circ\cos(\omega t-kz-\frac{\pi}{4})$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

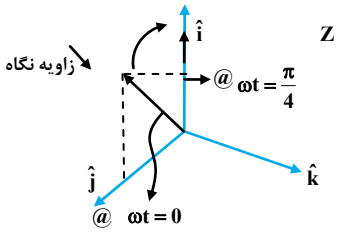
که از رابطه ۱ کمک گرفتیم:

$$Ey = E_{\circ}\cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{۴}) = E.\sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{۴})$$

پس: $(\frac{Ex}{۲})^{۲} + (Ey)^{۲} = E_{\circ}^{۲}$، که این معادله یک بیضی است.

برای تشخیص چپ گردی یا راست گردی باید به سمت مثبت محور zها نگاه کرد، تا جهت حرکت بردار میدان الکتریکی با زمان را بفهمیم. مثلاً در زمان $\omega t = \circ$ و در مکان $z = \circ$ بردار میدان الکتریکی $(\sqrt{۲}E_{\circ}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}E_{\circ}, \circ)$ است. اما در همان مکان و در زمان $\omega t = \frac{\pi}{۴}$ بردار میدان الکتریکی برابر $(۲E_{\circ}, \circ, \circ)$ است و این یعنی چپ گرد است.

در شکل روبه‌رو جهت حرکت میدان الکتریکی در دو زمان گفته شده $(\omega t = \circ\ ,\ \omega t = \frac{\pi}{۴})$ را ملاحظه می‌کنید که چپ‌گرد است.



۴۷ـ گزینه «۱» با توجه به تابعیت بردار شدت میدان مغناطیسی، می‌توان گفت که این میدان مربوط به موج صفحه‌ای یکنواخت است. شکل کلی میدان این موج تخت به صورت زیر است:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = H_{\circ}\cos(\omega t - kz)\hat{a}_x$$

با برقرار دادن این رابطه و رابطه شدت میدان مسأله، داریم:

$$\omega = ۲\pi \times ۱\circ^{۹}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu_{\circ}\varepsilon_r\varepsilon_{\circ}} = ۲\circ\pi \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_r} \times ۲\pi \times ۱\circ^{۹} \times \frac{۱}{۳ \times ۱\circ^{۸}} = ۲\circ\pi \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_r} = ۳ \Rightarrow \varepsilon_r = ۹$$

۴۸ـ گزینه «۱» از معادله‌ی موج برای میدان مغناطیسی می‌توانیم ε_r را به‌دست آوریم.

$$(\frac{۱}{\mu\varepsilon}\nabla^{۲} - \frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}})\vec{B} = \circ \Rightarrow (\frac{۱}{\mu\varepsilon}B_{\circ}(۱-i)(-(\frac{\pi}{a})^{۲}\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{b}y)\sin\omega t - (\frac{\pi}{b})^{۲}\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{b}y)\sin\omega t))\hat{e}_z$$

$$+B_{\circ}(۱-i)\omega^{۲}\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{b}y)\sin(\omega t)\hat{e}_z = \circ \Rightarrow \frac{-۱}{\mu\varepsilon}\left[(\frac{\pi}{a})^{۲} + (\frac{\pi}{b})^{۲}\right] + \omega^{۲} = \circ \quad \text{و} \quad \omega = \frac{۲\pi c}{\lambda_{\circ}}$$

در رابطه بالا $c = \frac{۱}{\sqrt{\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}}}$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$\frac{(۲\pi)^{۲}}{\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}\lambda_{\circ}^{۲}} - \frac{۱}{\mu_{\circ}\varepsilon_r\varepsilon_{\circ}}\left[(\frac{\pi}{a})^{۲} + (\frac{\pi}{b})^{۲}\right] = \circ$$

از شرایط مسأله $a = ۲b = \lambda_{\circ}$ استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon_r = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

www.modaresanesharif.ac.ir

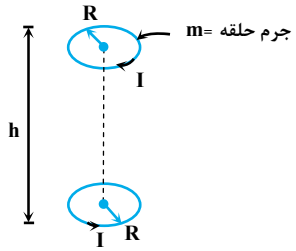
www.modaresanesharif.ac.ir

فصل پانزدهم

«انرژی و نیروی مغناطیسی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پانزدهم

۱ـ دو حلقه به شعاع $R = 1m$ و به فاصلهٔ h از یکدیگر $(h >> R)$ دارای جریان I در جهت خلاف یکدیگر (مطابق شکل) هستند. اگر حلقهٔ پائینی روی زمین بوده و اندازهٔ ضریب القای متقابل دو حلقه برابر $\frac{\mu_0 \pi R^4}{2h^3}$ باشد، کدام رابطه میان جریان I و جرم حلقه m وجود داشته باشد تا حلقه بالایی معلق بماند؟ (برق ـ سراسری ۸۰)



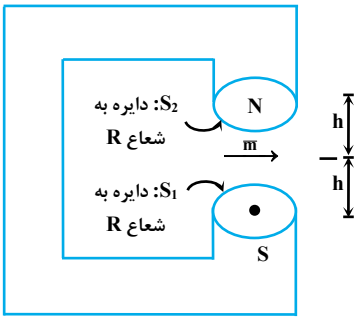
۱) $I = h^2\sqrt{\frac{2mg}{\mu_0 \pi}}$

۲) $I = h^2\sqrt{\frac{mg}{3\mu_0 \pi}}$

۳) $I = h^2\sqrt{\frac{3mg}{2\mu_0 \pi}}$

۴) $I = h^2\sqrt{\frac{2mg}{3\mu_0 \pi}}$

۲ـ کدام گزینه با اندازهٔ گشتاور وارد بر دو قطبی افقی $\vec{m}$ در شکل روبرو برابر است؟ (فرض کنید $\vec{M}$ بر سطوح S_1 و S_2 عمود بوده و مقدار آن بر روی این سطوح ثابت و برابر $2\frac{A}{m}$ است، در حالی که $\vec{M}$ بر دیگر سطوح آهنربا مماس می‌باشد.) (برق ـ سراسری ۸۰)



دوقطبی $\vec{m}$ در مرکز واقع است.

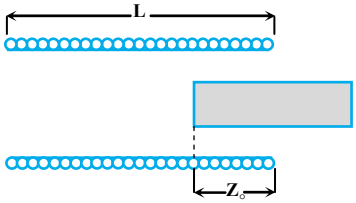
۱) $2|\vec{m}|(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}})$

۲) $2\mu_0|\vec{m}|(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}})$

۳) $2|\vec{m}|(\sqrt{h^2+R^2}-h)$

۴) $2\mu_0|\vec{m}|(\sqrt{h^2+R^2}-h)$

۳ـ یک سیملوله طویل به طول L با N دور سیم که از آن جریان I می‌گذرد داده شده است. یک میله آهنی با ضریب تراوایی μ به اندازه z_0 در داخل سیملوله قرار دارد. با کشیدن میله آهنی به سمت راست دیده می‌شود که نیرویی می‌خواهد آن را به جای اولیه خود برگرداند. مقدار این نیرو کدام است؟ (A سطح مقطع میله آهنی است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۰)



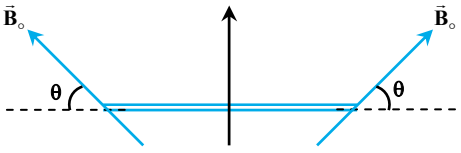
۱) $\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)\frac{N^2I^2A}{L^2}$

۲) $\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)\frac{N^2I^2}{A}$

۳) $\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)\frac{N^2I^2L^2}{A^2}$

۴) $\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)^{-1}N^2I^2L^{-2}A$

۴ـ یک حلقه دایره شکل به شعاع a حامل جریان ثابت I_0 بوده و در یک میدان مغناطیسی واگرا قرار گرفته است به طوری که خطوط چگالی شار $\vec{B}_0$ با صفحهٔ حلقه در محل حلقهٔ زاویه θ می‌سازند. اگر میدان ثابت باشد، اندازهٔ نیروی وارد بر حلقه کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $2\pi a I_0 B_0$

۲) $\pi a I_0 B_0 \sin\theta$

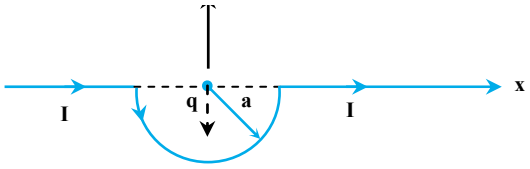
۳) $2\pi a I_0 B_0 \sin\theta$

۴) $2\pi a I_0 B_0 \cos\theta$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۵ـ در شکل زیر که جریان دائمی I روی سیم نازکی جریان دارد بر بار q که در مرکز نیم دایره به شعاع a با سرعت V در جهت $(-\hat{a}_y)$ در حال حرکت است، چه نیرویی از طرف سیم حامل جریان وارد می‌شود؟ (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $-\frac{\mu_\circ qVI\hat{a}_x}{۴a}$　　۲) $-\frac{\mu_\circ qVI}{۸a}\hat{a}_z$

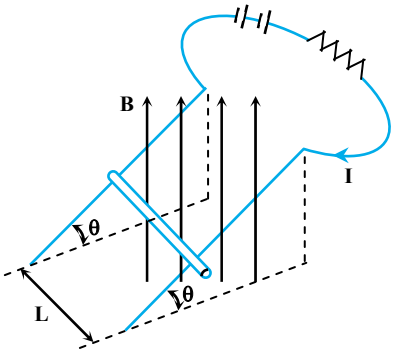
۳) $-\frac{\mu_\circ qVI}{۸a}\hat{a}_y$　　۴) $-\frac{\mu_\circ qVI}{۲a}\hat{a}_x$

۶ـ ضریب القای متقابل دو پیچک واقع روی محور xها که به فاصلهٔ x از یکدیگر قرار دارند برابر $L_{۱۲}\frac{k}{x}$ (k ضریبی ثابت است) می‌باشد. جریان پیچک‌ها به ترتیب $I_۱$ و $I_۲$ است. اگر مؤلفه نیروی اعمالی از طرف پیچک اول روی پیچک دوم در جهت x را $F_{x۱}$ بنامیم و چنانچه فاصلهٔ دو پیچک با همان جریان‌ها دو برابر شود، این مؤلفه نیرو، برابر $F_{x۲}$ می‌گردد. نسبت $F_{x۲}$ به $F_{x۱}$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{F_{x۲}}{F_{x۱}}=\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{F_{x۲}}{F_{x۱}}=\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{F_{x۲}}{F_{x۱}}=\frac{۱}{۱۶}$　　۴) $\frac{F_{x۲}}{F_{x۱}}=\frac{۱}{۲^{۳/۲}}$

۷ـ در شکل زیر چه جریانی لازم است تا میله لغزنده روی سطح شیبدار در جای خود باقی مانده و پایین نیاید؟ (چگالی شار B ثابت و به طرف بالاست. m جرم میله و g شتاب جاذبه است.) (برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $\frac{mg}{BL}\cot\theta$

۲) $\frac{mg}{۲BL}\cot\theta$

۳) $\frac{۲mg}{BL}\tan\theta$

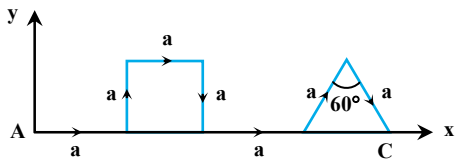
۴) $\frac{mg}{BL}\tan\theta$

۸ـ از یک سیم هادی استوانه‌ای به شعاع a جریان مستقیم I عبور می‌کند، نسبت انرژی مغناطیسی ذخیره شده داخل استوانه تا شعاع $(r<a)r$ به انرژی ذخیره شده تا شعاع a برای واحد طول چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $w_n(r)=\circ$　　۲) $\frac{W_m(r)}{W_m(a)}=(\frac{r}{a})$

۳) $\frac{W_m(r)}{W_m(a)}=(\frac{r}{a})^۳$　　۴) $\frac{W_m(r)}{W_m(a)}=(\frac{r}{a})^۴$

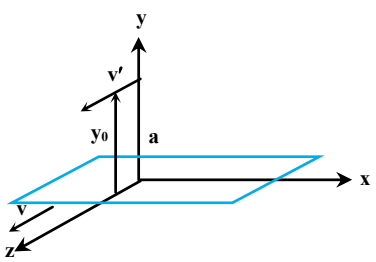
۹ـ نیروی مغناطیسی که از طرف میدان مغناطیسی یکنواخت B بر سیم AC حامل جریان ثابت I در شکل زیر وارد می‌شود کدام است؟ سیم در صفحه xy است و $\mathbf{B}=-B_\circ\hat{k}$ (فیزیک ـ سراسری ۸۱)



۱) $+۴IaB_\circ\hat{j}$　　۲) $(۳+\sqrt{۳})IaB_\circ\hat{j}$

۳) $IaB_\circ(\hat{i}+۳\hat{j})$　　۴) $IaB_\circ(۲\hat{i}+۲\hat{j})$

۱۰ـ صفحه‌ای بی‌نهایت با بار استاتیک σ مطابق شکل در جهت محور z با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. بار q با سرعت ثابت V' در فاصله $y_\circ$ به موازات صفحه حرکت می‌کند، رابطهٔ بین سرعت‌های V' و V چگونه باشد تا فاصله بار q از صفحه تغییر نکند؟ جرم بار q ناچیز است. (فیزیک ـ سراسری ۸۱)



۱) $VV'=\frac{C^۲}{۲}$　　۲) $VV'=\frac{C^۲}{۴}$

۳) $VV'=C^۲$　　۴) $V=V'$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ سیملوله‌ای ایده‌ال به شعاع R دارای n دور سیم در متر است. می‌خواهیم الکترونی با تندی V را تحت تأثیر میدان مغناطیسی سیملوله درون آن محدود سازیم. i جریانی که از سیموله باید عبور کند تا الکترون بدون برخورد با دیواره‌های سیملوله درون آن حرکتی دورانی داشته باشد در چه رابطه‌ای صدق می‌کند؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $i < \frac{m_e V}{\mu_\circ neR}$ ۲) $i > \frac{m_e V}{\mu_\circ neR}$ ۳) $i > \frac{m_e V^2}{neR}$ ۴) $i < \frac{m_e V^2}{neR}$

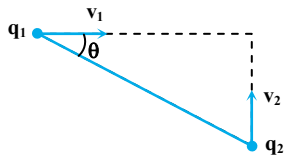
۱۲ـ در مختصات استوانه‌ای حلقه جریانی در صفحه $z = \circ$ هم مرکز با مبدأ مختصات به شعاع a با جریان $\vec{I} = I_\circ \hat{a}_\phi$ در محیطی با میدان $\vec{H} = H_\circ \hat{a}_\phi$ در فضای آزاد قرار دارد. گشتاور نیروی اعمالی به آن چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\vec{T} = -\pi a^2 I \mu_\circ H_\circ \hat{a}_r$ ۲) $\vec{T} = -\hat{a}_\phi \pi a^2 I \mu_\circ H_\circ$ ۳) $\vec{T} = +\hat{a}_\phi \pi a^2 I \mu_\circ H_\circ$ ۴) $\vec{T} = +\hat{a}_r \pi a^2 I \mu_\circ H_\circ$

۱۳ـ یک سیم هادی روی محور y در ناحیه $-2m \le y \le 2m$ حامل جریان $I = 10A$ است. اگر میدان $\vec{B} = \circ/\circ 5 \hat{a}_x$ تسلا در این ناحیه وجود داشته باشد کار انجام شده برای انتقال سیم فوق به محل مقابل با حفظ جهت سیم چند ژول است؟ $(x = 12m, -2m \le y \le 2m, z = 22m)$ (برق ـ سراسری ۸۲)

۱) ۷۵/۳۵ ۲) ۷۲/۵۶ ۳) ۴۴ ۴) ۳۶

۱۴ـ بار الکتریکی q_1 با سرعت V_1 و بار الکتریکی q_2 با سرعت V_2 مطابق شکل در راستاهای عمود بر هم در حرکتند. بردارهای V_1 و V_2 در یک صفحه قرار دارند. اگر F_{12} نیروی مغناطیسی وارد بر بار q_1 از طرف بار q_2 و F_{21} نیروی مغناطیسی وارد بر بار q_2 از طرف بار q_1 باشد، در لحظه‌ای که $\theta = 30^\circ$ کدام گزینه درست است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



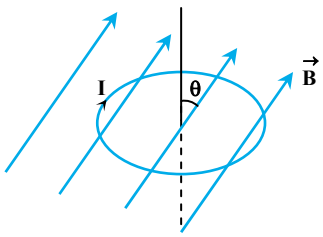
۱) $F_{12} = -F_{21}$ و راستای هر دو نیرو در راستای خط واصل بین دو بار است.

۲) $|F_{12}| \neq |F_{21}|$ و راستای دو نیرو عمود بر یکدیگر است.

۳) $F_{12} = -F_{21}$ ولی راستای دو نیرو بر راستای خط واصل بین دو بار منطبق نیست.

۴) $|F_{12}| = |F_{21}|$ و F_{12} در راستای V_2 و F_{21} در راستای V_1 است.

۱۵ـ کار لازم برای آنکه یک حلقه حامل جریان I و به مساحت A در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار بگیرد به طوری که بردار یکه عمود بر سطح حلقه با میدان B زاویه θ بسازد، کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۲)



۱) $-IAB\cos\theta$

۲) $IAB\cos\theta$

۳) $IAB\sin\theta$

۴) $-IAB\sin\theta$

۱۶ـ کره‌ای با مغناطش یکنواخت $\vec{M} = M_\circ \hat{k}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{H} = H_\circ \hat{j}$ قرار دارد. گشتاور نیروی وارد بر این کره کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{4}{3}\pi R^3 M_\circ H_\circ \mu_\circ (-\hat{i})$ ۲) $\frac{4}{3}\pi R^3 M_\circ H_\circ \mu_\circ \hat{i}$ ۳) $\mu_\circ H_\circ M_\circ (\hat{i})$ ۴) صفر

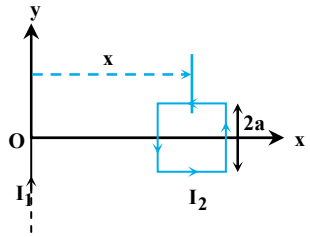
۱۷ـ شدت جریان مداری با ضریب خودالقایی $L = \beta I^s$ از مقدار صفر به مقدار نهایی I می‌رسد. انرژی مغناطیسی این مدار چقدر است؟ β و s مقادیر ثابت مثبتی هستند. (فیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}LI^2$ ۲) LI^2 ۳) $\frac{1}{2(s+2)}LI^2$ ۴) $\frac{1}{s+2}LI^2$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۸ـ روی سطح صاف و افقی xoy یک میز شیشه‌ای بدون اصطکاکی، جریان ثابت I_1 درون یک سیم ثابت و ساکن مستقیم در یک سمت وجود دارد و به فاصله $x > a$ از آن یک قاب مربع فلزی به ضلع $2a$ و با جریان الکتریکی I_2 (در جهت مثلثاتی مثبت) مطابق شکل قرار داده می‌شود. نیروی وارد بر قاب کدام است؟ (x فاصله مرکز مربع تا سیم مستقیم است.) (فیزیک ـ سراسری ۸۴)



۱) $(\frac{\mu_\circ}{\pi})\frac{2a^2 I_1 I_2}{x^2 - a^2}$ و در امتداد x مثبت

۲) $(\frac{\mu_\circ}{\pi})\frac{2a^2 I_1 I_2}{x^2 - a}$ و در امتداد x منفی

۳) $(\frac{\mu_\circ}{\pi}) I_1 I_2 \ln(\frac{x+a}{x-a})$ و در امتداد y مثبت

۴) $(\frac{\mu_\circ}{\pi}) I_1 I_2 \ln(\frac{x+a}{x-a})$ و در امتداد y منفی

۱۹ـ منحنی B – H مربوط به یک ماده فرومغناطیسی به صورت $\vec{B} = \mu_\circ k |\vec{H}| \vec{H}$ تقریب زده می‌شود به طوری که k عدد ثابت بر حسب $(\frac{m}{A})$ است. کار انجام شده در واحد حجم جهت مغناطیس کردن این ماده از مقدار صفر تا مقدار نهایی $B_\circ$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۵)

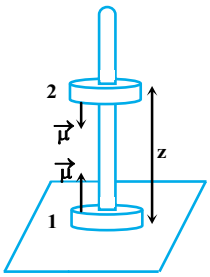
۱) $2\mu_\circ k B_\circ^{\frac{3}{2}}$

۲) $2\frac{B_\circ^{\frac{3}{2}}}{\mu_\circ k}$

۳) $\frac{2}{3}(\mu_\circ k B_\circ)^{\frac{3}{2}}$

۴) $\frac{2}{3}\frac{B_\circ^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu_\circ k}}$

۲۰ـ دو آهن‌ربای یکسان حلقوی مطابق شکل روی یک میله قائم بدون اصطکاک می‌توانند حرکت کنند. جرم و ممان دو قطبی هر یک از این دو آهن‌ربا به ترتیب M و μ است. در حال تعادل آهن‌ربای دوم در چه ارتفاعی (z) قرار می‌گیرد؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۵)



۱) $(\frac{\mu_\circ \mu^2}{4\pi Mg})^{\frac{1}{4}}$

۲) $(\frac{3\mu_\circ \mu^2}{2\pi Mg})^{\frac{1}{4}}$

۳) $(\frac{3\mu_\circ \mu^2}{\pi Mg})^{\frac{1}{4}}$

۴) $(\frac{\mu_\circ \mu^2}{2\pi Mg})^{\frac{1}{4}}$

۲۱ـ بار نقطه‌ای q با جرم m در میدان مغناطیسی $\vec{B} = B_\circ \hat{z}$ با سرعت ثابت حول دایره‌ای به شعاع a در صفحه xoy در جهت مثلثاتی دوران می‌کند. $B_\circ$ ثابت است . اندازهٔ میدان الکتریکی که توسط ناظری که با بار حرکت می‌کند اندازه‌گیری می‌شود، کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۶)

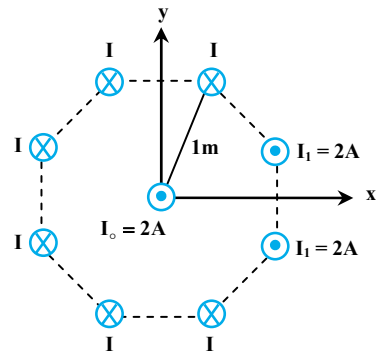
۱) $\frac{a|q|B_\circ}{2m}$

۲) $\frac{a|q|B_\circ^2}{m}$

۳) $\frac{a^2|q|B_\circ^2}{m\sqrt{a^2-1}}$

۴) $\frac{\sqrt{a^2-1}|q|B_\circ^2}{am}$

۲۲ـ هشت سیم نازک جریان در رئوس یک ۸ ضلعی منتظم حول محور x ها و موازی با آن قرار دارند. فاصلهٔ سیم‌ها تا محور z نیز 1m می‌باشد. مطابق شکل، ۶ سیم حامل جریان $I_1 = 2A$ در جهت محور z هستند. یک سیم حامل جریان $I_\circ = 2A$ در جهت محور z نیز در مرکز این ۸ ضلعی قرار دارد. نیروی وارد شده بر واحد طول سیم مرکزی را حساب کنید. (برق ـ سراسری ۸۶)



۱) $\vec{F} = \frac{3\mu_\circ}{\pi}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\hat{a}_x$

۲) $\vec{F} = -\frac{3\mu_\circ}{\pi}\sqrt{2}\hat{a}_x$

۳) $\vec{F} = -\frac{2\mu_\circ}{\pi}\sqrt{2+\sqrt{2}}\hat{a}_x$

۴) $\vec{F} = \frac{3\mu_\circ}{\pi}\sqrt{2}\hat{a}_x$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

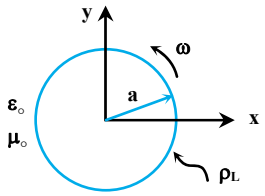
۲۳ـ یک کابل هم‌محور طویل متشکل از دو رسانای هم‌محور استوانه‌ای است که جریان i در دو جهت مخالف از این دو می‌گذرد. استوانه داخلی توپر به شعاع a است و جریان الکتریکی به طور یکنواخت از سطح مقطع آن می‌گذرد و رسانای خارجی پوسته نازکی به شعاع $4a$ است. شعاع استوانه فرضی هم‌محور با محور کابل که نیمی از انرژی مغناطیسی در داخل حجم آن ذخیره شده کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $(2e^{-\frac{1}{8}})a$ ۲) $(2e^{-\frac{1}{4}})a$ ۳) $2a$ ۴) $\frac{12a}{5}$

۲۴ـ حلقه رسانای دایره‌ای شکل به شعاع R در صفحه yz چنان قرار دارد که مرکز آن در نقطه $(x=0\ ,\ y=2R\ ,\ z=2R)$ قرار دارد. میدان مغناطیسی غیریکنواخت و وابسته به زمان $\vec{B}=(\alpha t+\beta)\hat{i}+\gamma t y\hat{j}$ در فضا وجود دارد که β,α و γ مقادیر ثابت مثبتی هستند. بار q مقید است که در امتداد حلقه حرکت کند، مقدار کار انجام شده روی بار q در هر چرخش کامل کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) $\pi\alpha qR^2$ ۳) $2\pi\gamma qR^3$ ۴) $\pi qR^2(\alpha+2R\gamma)$

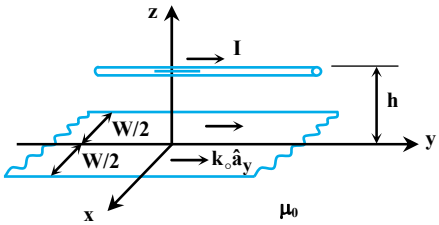
۲۵ـ بار الکتریکی خطی یکنواخت $\rho_L(\frac{C}{m})$ روی محیط دایره‌ای به شعاع a واقع در صفحهٔ xoy هم مرکز با مبدأ مختصات مفروض است. این بار خطی با سرعت زاویه‌ای یکنواخت $\omega(\frac{rad}{s})$ حول مبدأ مختصات می‌چرخد. بار نقطه‌ای q در لحظه $t=0$ با سرعت $\vec{v}=v_0\hat{a}_z(\frac{m}{s})$ در مبدأ مختصات قرار دارد. نیروی اعمالی بر این بار در $t=0$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۷)



۱) صفر ۲) $q\frac{\rho_L 2\pi a}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{a}_z$

۳) $q(v_0\hat{a}_z\times\frac{\mu_0\rho_L a\omega}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{a}_\varphi)$ ۴) $q\left[\frac{\rho_L}{2\varepsilon_0 a}+v_0\frac{\mu_0\rho_L\omega}{4\pi a}\right]\hat{a}_z$

۲۶ـ سیمی حامل جریان I، به موازات یک نوار جریان سطحی $k_0\hat{a}_y$ و عرض w مطابق شکل زیر مفروض است. نیروی واحد بر واحد طول سیم کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۷)



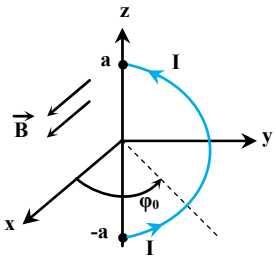
۱) $-\hat{a}_z\frac{\mu_0 Ik_0}{4}$

۲) $-\hat{a}_z\frac{\mu_0 Ik_0}{2}\tan^{-1}(\frac{w}{h})$

۳) $-\hat{a}_z\frac{\mu_0 Ik_0}{\pi}\tan^{-1}(\frac{w}{2h})$

۴) $-\hat{a}_z\frac{\mu_0 Ik_0}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{w}{2h})$

۲۷ـ در میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B}=B_0\hat{a}_x$ مطابق شکل به نیم حلقهٔ دایروی به شعاع a در صفحهٔ $\varphi=\varphi_0$، با جریان ثابت I چه نیرو و گشتاوری وارد می‌شود؟ (برق ـ سراسری ۸۷)



۱) $\vec{F}=\pi aIB_0\hat{a}_y,\vec{T}=\pi a^2IB_0\sin\varphi_0\hat{a}_z$

۲) $\vec{F}=2aIB_0\hat{a}_y,\vec{T}=\frac{1}{2}\pi a^2IB_0\cos\varphi_0\hat{a}_z$

۳) $\vec{F}=\pi aIB_0\cos\varphi_0\hat{a}_y,\vec{T}=\pi a^2IB_0\sin\varphi_0\hat{a}_z$

۴) $\vec{F}=2aIB_0\hat{a}_y,\vec{T}=\pi a^2IB_0\cos\varphi_0\hat{a}_z$

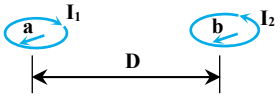
۲۸ـ سه سیم بسیار طویل و نازک، موازی هم در یک صفحه قرار دارند و دارای جریان‌های مساوی I در یک جهت هستند. فاصله‌ی هر یک از سیم‌های کناری از سیم وسط D است. اگر سیم وسط را به اندازه‌ی $x(x\ll D)$ در جهت عمود بر صفحه‌ی سیم‌ها جابجا کنیم، زمان تناوب نوسان‌های کوچک آن کدام است؟ (m جرم واحد طول سیم است). (فیزیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $2\pi\frac{D}{I}\sqrt{\frac{\pi m}{2\mu_0}}$ ۲) $2\pi\frac{D}{I}\sqrt{\frac{\pi m}{\mu_0}}$ ۳) $2\pi\frac{D}{I}\sqrt{\frac{2\pi m}{\mu_0}}$ ۴) $2\pi\frac{D}{I}\sqrt{\frac{4\pi m}{\mu_0}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۹ـ دو حلقه‌ی کوچک جریان I_1 و I_2 به شعاع‌های b,a به فاصله‌ی D از یکدیگر قرار دارند، به طوری که سطح هر دو حلقه در یک صفحه و جهت جریان‌ها در دو حلقه مخالف یکدیگر است. نیروی بین حلقه‌ها کدام است؟ $(D \ll a,b)$ (فیزیک ـ سراسری ۸۷)



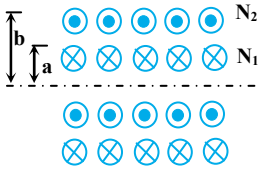
۱) نیروی جاذبه $\frac{3\pi}{4}\mu_0 I_1 I_2 (\frac{ab}{D^2})^2$

۲) نیروی دافعه $\frac{3\pi}{4}\mu_0 I_1 I_2 (\frac{ab}{D^2})^2$

۳) نیروی جاذبه $\frac{3\pi}{2}\mu_0 I_1 I_2 (\frac{ab}{D^2})^2$

۴) نیروی دافعه $\frac{3\pi}{2}\mu_0 I_1 I_2 (\frac{ab}{D^2})^2$

۳۰ـ دو سیم‌پیچ خیلی بلند متحدالمحور به شعاع‌های a و b با جریان‌های یکسان $I = 1A$ در جهت‌های نشان داده شده و تعداد دور سیم‌پیچ‌ها در واحد طول به ترتیب N_1 و N_2 مطابق شکل مفروض هستند. انرژی کل مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۸)



۱) $\frac{1}{2}\mu_0\pi(a^2N_1^2 + b^2N_2^2 + 2N_1N_2a^2)$

۲) $\mu_0\pi(a^2N_1^2 + b^2N_2^2 + N_1N_2ab)$

۳) $\frac{1}{2}\mu_0\pi(a^2N_1^2 + b^2N_2^2 - 2N_1N_2a^2)$

۴) $\mu_0\pi(\frac{1}{2}a^2N_1^2 + \frac{1}{2}b^2N_2^2 - 2N_1N_2a^2)$

۳۱ـ دو خط انتقال نواری شامل دو هادی به عرض b به فاصله d متر از یکدیگر قرار گرفته‌اند. از این دو خط، جریان $+\frac{I}{\sqrt{\mu_0}}$ و $-\frac{I}{\sqrt{\mu_0}}$ عبور می‌کند. اگر $d \ll b$، نیروی دافعه بین این دو خط را در واحد طول به‌دست آورید. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $|\vec{F}| = \frac{I^2}{2b}\frac{N}{m}$

۲) $|\vec{F}| = \frac{I^2}{4b}\frac{N}{m}$

۳) $|\vec{F}| = \frac{\mu_0 I^2}{2b}\frac{N}{m}$

۴) $|\vec{F}| = \frac{\mu_0 I^2}{4b}\frac{N}{m}$

۳۲ـ فرض کنید روتور یک ماشین، به صورت استوانه‌ای با $r = a$ و طول ℓ متر باشد. از این روتور، جریان $\vec{J}_s = J_0\hat{a}_z \frac{A}{m}$ عبور داده می‌شود. به‌دست آورید گشتاور نیرویی که در میدان مغناطیسی $\vec{B} = \frac{1}{2r}\hat{a}_r \frac{wb}{m^2}$ ایجاد می‌شود. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\vec{T} = 2\pi a\ell J_0\hat{a}_z$

۲) $\vec{T} = \frac{\pi}{2}a\ell J_0\hat{a}_z$

۳) $\vec{T} = \pi a\ell J_0\hat{a}_z$

۴) $\vec{T} = \frac{\pi}{4}a\ell J_0\hat{a}_z$

۳۳ـ به دست آورید انرژی اعمالی در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را برای دوران دادن حلقه جریانی با ممان $\vec{m}$ از حالتی که $\vec{m}$ موازی $\vec{B}$ باشد به حالتی که $\vec{m}$ و $\vec{B}$ زاویه 60° را با یکدیگر ایجاد نمایند. (برق ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{1}{4}mB$

۲) $\frac{1}{2}mB$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}mB$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}mB$

۳۴ـ در فضای خالی یک دو قطبی مغناطیسی بی‌نهایت کوچک با گشتاور $m\hat{z}$ در مبدأ مختصات قرار دارد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ناحیه کروی $a < r < b$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \varphi < \pi$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\mu_0 m^2}{4\pi}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

۲) $\frac{\mu_0 m^2}{4\pi}(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3})$

۳) $\frac{\mu_0 m^2}{48\pi}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

۴) $\frac{\mu_0 m^2}{4\pi}(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3})$

۳۵ـ مطلوب است محاسبه انرژی ذخیره شده در واحد طول درون یک پوسته استوانه‌ای رسانا (غیرمغناطیسی) با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b. از این پوسته، جریان I به صورت یکنواخت عبور می‌کند. (برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\mu_0 I^2}{8\pi(b^2 - a^2)}(b^2 - 3a^2 + \frac{4a^4}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a})$

۲) $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi(b^2 - a^2)}(b^2 - 3a^2 + \frac{4a^4}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a})$

۳) $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi(b^2 - a^2)}(b^2 + 3a^2 + \frac{4a^4}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a})$

۴) $\frac{\mu_0 I^2}{8\pi(b^2 - a^2)}(b^2 + 3a^2 + \frac{4a^4}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a})$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۶ـ یک دو قطبی مغناطیسی بسیار کوچک با ممان دو قطبی $\vec{m}$ در مرکز یک کره فرضی به شعاع a واقع شده است. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ناحیه خارج از این کره فرضی کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\mu_0 m^2}{4\pi a^3}$ ۲) $\frac{\mu_0 m^2}{6\pi a^3}$ ۳) $\frac{\mu_0 m^2}{3\pi a^3}$ ۴) $\frac{\mu_0 m^2}{12\pi a^3}$

۳۷ـ کدام گزینه نشان‌دهنده نیروی وارد بر یک حلقه بسیار کوچک جریان با ممان مغناطیسی $\vec{\mu}$ در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}(\vec{r})$ است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $(\vec{\mu}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}$ ۲) $(\vec{\nabla}|\vec{\mu}|)\times\vec{B}$ ۳) $\vec{\mu}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ ۴) $\frac{1}{2}\vec{\mu}\times\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

۳۸ـ اندازه یک میدان الکتریکی یکنواخت چقدر باید باشد تا چگالی انرژی آن با چگالی انرژی میدان مغناطیسی $0/5\,T$ برابر شود؟ (فیزیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $1/5\times10^{8}\ \frac{V}{m}$ ۲) $1/5\times10^{-8}\ \frac{V}{m}$ ۳) $3\times10^{-8}\ \frac{V}{m}$ ۴) $3\times10^{8}\ \frac{V}{m}$

۳۹ـ زاویهٔ بردار شدت میدان مغناطیسی $\vec{H}$ با خط عمود بر مرز مشترک دو ماده مغناطیسی در سمت ماده اول 45° و در سمت ماده دوم 30° است. اگر در مرز مشترک این دو محیط هیچ جریان آزادی نداشته باشیم، چگالی انرژی مغناطیسی در کدام طرف مرز بیشتر است؟ (برق ـ سراسری ۹۰)

۱) طرف مادهٔ اول ۲) طرف مادهٔ دوم ۳) در دو طرف یکسان است. ۴) نمی‌توان قضاوت کرد.

۴۰ـ ذره بارداری با انرژی جنبشی ثابت k_0 در یک صفحه (صفحه xy) در حال حرکت است. این ذره ناگهان وارد ناحیه‌ای از فضا می‌گردد که میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت B_0 عمود بر صفحه حرکت آن (راستای z) وجود دارد و بر آن اثر می‌کند. گشتاور دو قطبی مغناطیسی که از این وضعیت به وجود می‌آید کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $2\frac{k_0}{B_0}$ در همان امتداد میدان مغناطیسی ۲) $2\frac{k_0}{B_0}$ مخالف امتداد میدان مغناطیسی

۳) $\frac{k_0}{B_0}$ در همان امتداد میدان مغناطیسی ۴) $\frac{k_0}{B_0}$ مخالف امتداد میدان مغناطیسی

۴۱ـ یک ذره باردار در یک چارچوب ساکن در ناحیه‌ای حرکت می‌کند که یک میدان الکتریکی ثابت و یک میدان مغناطیسی ثابت وجود دارد. اگر دو میدان موازی یکدیگر باشند، مسیر حرکت ذره کدام است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) دایره ۲) خط مستقیم ۳) سهمی ۴) هذلولی

۴۲ـ یک بار آزمون منفی نزدیک یک سیم حامل جریان حرکت می‌کند. اگر بخواهیم نیرویی که از طرف سیم حامل جریان به این بار آزمون وارد می‌گردد، در جهت موازی با جهت جریان سیم باشد، بار آزمون در چه جهتی باید حرکت کند؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) در جهت دور شدن از سیم ۲) در جهت نزدیک شدن به سیم ۳) در جهت جریان سیم ۴) تفاوتی نمی‌کند

۴۳ـ یک ذره باردار به جرم m و بار q در یک ناحیه عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت می‌کند. کدام گزینه در ارتباط با حرکت ذره صادق است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

۱) فرکانس حرکت ذره به میدان مغناطیسی ارتباط ندارد.
۲) فرکانس حرکت ذره به سرعت خطی ارتباط ندارد.
۳) فرکانس حرکت ذره به جرم و بار ذره ارتباط ندارد.
۴) فرکانس حرکت ذره به همه موارد اشاره شده در فوق ارتباط دارد.

۴۴ـ الکترونی در میدان مغناطیسی یکنواخت $\bar{B}=\hat{i}B_x+\hat{j}(3B_y)$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای خاص، سرعت الکترون $\bar{V}=[\hat{i}(2)+\hat{j}(4)]\frac{m}{s}$ و نیروی مغناطیسی وارد بر آن $\bar{F}=(6/4\times10^{-19}\ N)\hat{k}$ می‌باشد. B_x چقدر است؟ (فیزیک ـ آزاد ۹۰)

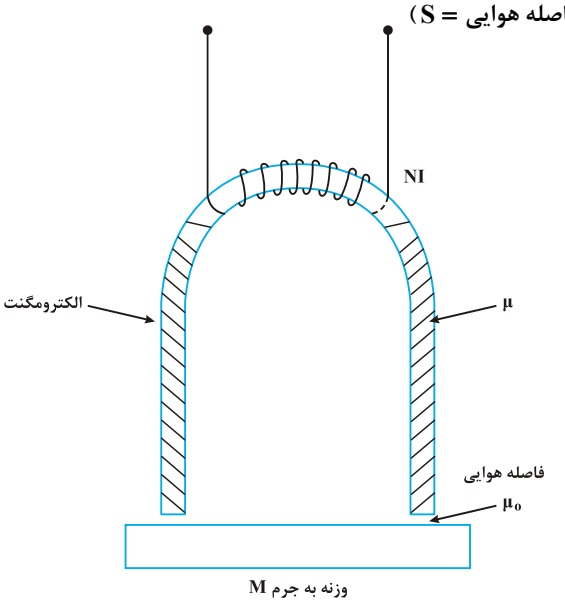
۱) $2/0\ T$ ۲) $4/0\ T$ ۳) $0/4T$ ۴) $-2/0\ T$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۵ـ تعداد دور سیم لازم جهت بلند کردن وزنه‌ای با جرم M در شکل زیر، کدام است؟ (دکتری ۹۴)

(مجموع رلوکتانس‌های فاصله هوایی = R_a، رلوکتانس الکترومگنت = R_i، سطح مقطع فاصله هوایی = S)



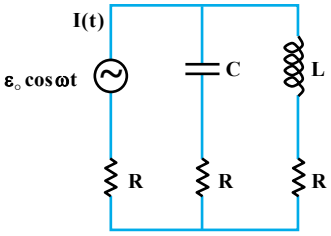
۱) $\frac{R_i + R_a}{I}\sqrt{\mu_\circ MgS}$

۲) $\frac{R_i + R_a}{I}\sqrt{2\mu_\circ MgS}$

۳) $\frac{R_a + R_i}{I}\sqrt{\frac{\mu_\circ Mg}{S}}$

۴) $\frac{R_a + R_i}{I}\sqrt{\frac{2\mu_\circ Mg}{S}}$

۴۶ـ در مدار متناوب شکل زیر سیم‌پیچ L دارای مقاومت درونی کم R و ثابت زمانی $\tau_L = \frac{L}{R}$ است و خازن C نیز دارای مقاومت درونی کم R و ثابت زمانی $\tau_c = RC$ بوده و منبع ولتاژ نیز دارای مقاومت کم R است. مقاومت ظاهری مدار به ازای مقداری از ω که جریان $I(t)$ با منبع ولتاژ هم‌فاز است کدام است؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۱)



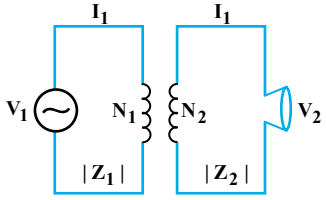
۱) $\frac{L + 3R^2C}{3RC}$

۲) $\frac{L + 3R^2C}{2RC}$

۳) $\frac{L + 2R^2C}{2RC}$

۴) $\frac{L + 2R^2C}{3RC}$

۴۷ـ یک بلندگوی 40 واتی دارای مقاومت ظاهری $|Z_2| = 10\Omega$ می‌باشد. این بلندگو از طریق یک مبدل به یک دستگاه تقویت‌کننده با مقاومت ظاهری $|Z_1| = 1000\Omega$ متصل شده است که خود به برق AC شهر وصل است. شدت جریان مؤثر I_1 و اختلاف پتانسیل مؤثر V_1 در دستگاه تقویت‌کننده به ترتیب از راست به چپ چند آمپر و چند ولت هستند؟ (فیزیک ـ سراسری ۹۱)



۱) ۰/۳۳ و ۱۲۰

۲) ۱ و ۴۰

۳) ۲ و ۲۰

۴) ۰/۲۰ و ۲۰۰

۴۸ـ یک ورقه پلاستیکی عایق شه شکل قرص نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M دارای بار الکتریکی Q می‌باشد به طوری که جرم آن با تابع چگالی سطحی $\sigma_m(r) = a_\circ(1-(\frac{r}{R}))$ و بارالکتریکی آن با تابع چگالی سطحی $\sigma_e(r) = b_\circ(1-(\frac{r}{R})^2)$ در سطح آن توزیع شده‌اند. ($a_\circ$ و $b_\circ$ ثوابت فیزیکی هستند و r فاصله هر نقطه روی سطح قرص از مرکز آن می‌باشد. $0 \le r \le R$) هرگاه این ورقه با تندی دورانی ثابت $\omega_\circ$ به دور محور تقارن عمود بر سطح و گذرنده از مرکز آن در حال چرخیدن باشد، رابطه $\vec{\mu} = \alpha\frac{Q}{M}\vec{L}$ بین بردار گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ آن و بردار تکانه زاویه‌ای $\vec{L}$ آن (به دور محور مزبور) وجود خواهد داشت که α یک عدد کسری می‌باشد. عدد α کدام است؟ (فوتونیک ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{2}{5}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پانزدهم

۱ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از روش جابجایی مجازی خواهیم داشت:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{\nabla} W_m| = |I_1 I_2 \vec{\nabla} L_{12}| = I_1 I_2 \left|\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_\circ \pi R^4}{2z^3}\right)\right|$$

حال با مساوی قراردادن آن با $F = mg$ مقدار I را به دست می‌آوریم:

$$|\vec{F}_m| = I_1 I_2 \frac{\mu_\circ 3\pi R^4}{2h^4} \xrightarrow{I_1 = I_2 = I} I^2 \frac{3\mu_\circ \pi R^4}{2h^4} = mg$$

$$I = \frac{h^2}{R}\sqrt{\frac{2mg}{3\mu_\circ \pi}}$$

۲ـ گزینه «۲» هرگاه $h \to \infty$ انتظار داریم گشتاور وارد بر دو قطبی مغناطیسی صفر باشد، لذا گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست‌اند.
همچنین این گشتاور مستقل از ضریب نفوذپذیری مغناطیسی محیط نیست. بنابراین فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

۳ـ گزینه «۱» ابتدا انرژی مغناطیسی را محاسبه می‌کنیم و سپس با مشتق‌گیری از آن نیرو را محاسبه می‌کنیم:

$$u = \frac{1}{2}\int \vec{H}.\vec{B} dv \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\mu \int H^2 dv$$

چون I ثابت است $\vec{H}$ در این رابطه در داخل و خارج از میله ثابت است، پس داریم:

$$u(x_\circ + \Delta x) \simeq u(x_\circ) + \frac{1}{2}\int_{\Delta V} (\mu - \mu_\circ) H^2 dV \Rightarrow u(x_\circ + \Delta x) = u(x_\circ) + \frac{1}{2}(\mu - \mu_\circ)\frac{N^2 I^2}{L^2} A\Delta x$$

$$F_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \qquad \Delta u = u(x_\circ + \Delta x) - u(x_\circ) \Rightarrow F_x = \frac{1}{2}(\mu - \mu_\circ)\frac{N^2 I^2}{L^2} A$$

۴ـ گزینه «۴» ابتدا یک جزء دیفرانسیلی خطی به طول $d\vec{\ell} = a d\varphi \hat{a}_\varphi$ روی حلقه در نظر می‌گیریم و با استفاده از رابطه $d\vec{F} = I_\circ d\vec{\ell} \times \vec{B}$ نیروی وارد بر آن را به دست می‌آوریم. در پایان با انتگرال‌گیری روی کل حلقه نیروی وارد بر حلقه را محاسبه می‌کنیم.

$$d\vec{F} = I_\circ a d\varphi \hat{a}_\varphi \times B_\circ(\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_z) \Rightarrow \vec{F} = \int_\circ^{2\pi} I_\circ a B_\circ(-\cos\theta \hat{a}_z + \sin\theta \hat{a}_r) d\varphi = -2\pi a I_\circ B_\circ \cos\theta \hat{a}_z$$

۵ـ گزینه «۱» همان‌طور که می‌دانید میدان مغناطیسی در مرکز یک نیم‌دایره که محور آن روی محور z قرار گرفته است برابر است با: $\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{4a}\hat{a}_z$

حال با استفاده از رابطه $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ می‌توانیم نیروی وارد بر بار را به دست آوریم. توجه کنید که میدان مغناطیسی ناشی از دو قطعه سیم مستقیم در مرکز نیم‌کره صفر می‌باشد.

$$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B} = q(-V\hat{a}_y) \times \left(\frac{\mu_\circ I}{4a}\hat{a}_z\right) = -qV\frac{\mu_\circ I}{4a}\hat{a}_x$$

۶ـ گزینه «۲» با استفاده از تعریف نیروی مغناطیسی بر حسب تغییرات انرژی داریم:

$$F_x = -I_1 I_2 \frac{d}{dx}(L_{12}) = \frac{K I_1 I_2}{x^2}$$

هرگاه x دو برابر شود نیرو $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

۷ـ گزینه «۴» ابتدا نیروی مغناطیسی وارد بر میله را به دست می‌آوریم: $F = I\vec{L} \times \vec{B} = ILB\cos\theta$

سپس آن را مساوی با نیروی پیش‌رونده سطح شیب‌دار قرار می‌دهیم $(F = mg\sin\theta)$

$$F_m = mg\sin\theta \Rightarrow ILB\cos\theta = mg\sin\theta \Rightarrow I = \frac{mg}{LB}tg\theta$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۸ـ گزینه «۴» برای به دست آوردن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در درون استوانه از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم: $W_m = \frac{1}{2}\int_V \mu_\circ H^2 dV$

میدان مغناطیسی درون استوانه برابر است با: $\vec{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2}\hat{a}_\varphi$

حال با جایگذاری H در رابطه W_m مقدار انرژی ذخیره شده در استوانه را به دست می‌آوریم:

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mu_\circ H^2 dV = \frac{1}{2}\mu_\circ \int_\circ^1 \int_\circ^r (\frac{Ir}{2\pi a^2})^2 2\pi r dr dz = \mu_\circ \frac{I^2}{16\pi}(\frac{r}{a})^4$$

اگر در رابطه فوق $r = a$ قرار دهیم، می‌توانیم انرژی ذخیره شده در کل استوانه را به دست آوریم که برابر است با: $W_m = \mu_\circ \frac{I^2}{16\pi}$

با تقسیم انرژی‌های بالا بر هم خواهیم داشت: $\frac{W_m(r)}{W_m(a)} = (\frac{r}{a})^4$

۹ـ گزینه «۱» نیروی وارد بر قسمت‌های عمودی سیم یکدیگر را خنثی می‌کنند، لذا فقط کافی است نیروی وارد بر طول افقی قطعه سیم را محاسبه کنیم.

تصویر افقی سیم $= 4a \Rightarrow F = I\vec{L}\times\vec{B} = 4IaB_\circ\hat{j}$

۱۰ـ گزینه «۳» طبق قانون آمپر داریم: $\vec{B} = \mu_\circ \vec{j} = \mu_\circ \sigma V$

از طرفی طبق قانون نیروی لورنتس برای بار در حالت حرکت داریم: $F_e = q\sum E = q\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ $\quad F_m = qV'B = \mu_\circ qV'V\sigma$

نیروی الکتریکی و مغناطیسی باید برابر باشند، در نتیجه می‌توان نوشت: $F_m = F_e \Rightarrow \mu_\circ qV'V\sigma = q\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow V'V = \frac{1}{\mu_\circ\varepsilon_\circ} = C^2$

۱۱ـ گزینه «۲» با استفاده از قانون نیروی لورنتس داریم: $F = qVB = m_e\frac{V^2}{R} \Rightarrow eV\mu_\circ nI = m_e\frac{V^2}{R} \Rightarrow I = \frac{m_e V}{e\mu_\circ nR}$

برای آنکه الکترون به دیواره‌های سیملوله برخورد نکند جریان باید از مقدار فوق بیشتر باشد تا الکترون در شعاع کمتر از R دوران کند، بنابراین خواهیم داشت:

$$I > \frac{m_e V}{\mu_\circ neR}$$

۱۲ـ گزینه «۱» ابتدا گشتاور حلقه جریان را به‌دست می‌آوریم: $\vec{m} = SI = \pi a^2 I\hat{a}_z$

با استفاده از تعریف گشتاور نیروی اعمالی داریم: $\vec{T} = \vec{m}\times\vec{B} = \pi a^2 I\hat{a}_z \times \mu_\circ H_\circ \hat{a}_\varphi = -\mu_\circ H_\circ \pi a^2 I\hat{a}_r$

۱۳ـ گزینه «۳» برای به‌دست آوردن کار انجام شده باید نیروی وارد بر سیم را به‌دست آوریم. سپس با استفاده از تعریف کار، کار انجام شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{F}_m = I\vec{L}\times\vec{B} = -2\hat{z} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_m = 2\hat{a}_z$$

کار انجام شده برابر است با: $W = \int \vec{F}.d\vec{\ell} = \int 2\hat{a}_z.(\hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz) = \int_\circ^{22} 2dz = 44$

۱۴ـ گزینه «۴» میدان ایجاد شده توسط یک بار متحرک با سرعت $\vec{V}$ از رابطه‌ی روبرو به دست می‌آید: $\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{q\vec{V}\times\vec{r}}{r^3}$

لذا میدان حاصل از بار q_1 در محل q_2 برابر است که $\vec{r}$ از نقطه‌ی ۱ به ۲ وصل می‌شود بنابراین داریم: $\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{q_1\vec{V}_1\times\vec{r}}{r^3}$

$$\vec{F}_{21} = q_2\vec{V}_2\times\vec{B} = \frac{\mu_\circ q_1 q_2}{4\pi}\frac{1}{r^3}\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times\vec{r})$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت: $\vec{F}_{12} = q_1\vec{V}_1\times\vec{B}' = q_1\vec{V}_1\times\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{q_2\vec{V}_2}{r^3}\times(-\vec{r}) = -\frac{\mu_\circ q_1 q_2}{4\pi}\vec{V}_1\times(\vec{V}_2\times\vec{r})$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

چون $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ مطابق شکل داده شده هستند پس خواهیم داشت:

$$\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times\vec{r})=\vec{V}_1(\vec{V}_2.\vec{r})-\vec{r}(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \qquad \vec{V}_1\times(\vec{V}_2\times\vec{r})=\vec{V}_2(\vec{V}_1.\vec{r})-\vec{r}(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$$

در نتیجه با توجه به این که $\vec{V}_1.\vec{V}_2=0$ است، $\vec{F}_{12}$ در راستای $\vec{V}_2$ و $\vec{F}_{21}$ در راستای $\vec{V}_1$ است که همان گزینه (۴) است.

۱۵ـ گزینه «۲» کار انجام شده از رابطه روبرو به‌دست می‌آید:

$$W=-\vec{m}.\vec{B}=-IAB\cos(\pi-\theta)=IAB\cos\theta$$

که در آن از رابطه انرژی دو قطبی در میدان مغناطیسی استفاده شده است.

۱۶ـ گزینه «۱» با استفاده از تعریف گشتاور نیرو داریم:

$$\vec{T}=\vec{m}\times\vec{B}=(\frac{4}{3}\pi R^3M_0\hat{K})\times\mu_0H_0\hat{j}=\frac{4}{3}\pi R^3M_0H_0\mu_0(-\hat{i})$$

$\vec{M}$ چگالی دو قطبی است.

۱۷ـ گزینه «۴» با استفاده از تعریف انرژی مغناطیسی داریم:

$$L=\beta I^S \quad , \quad dw_b=ILdI \Rightarrow W_b=\int_0^I I\beta I^S dI$$

با محاسبه انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$W_b=\beta\int_0^I I^{S+1}dI \Rightarrow \begin{cases} w_b=\dfrac{\beta}{s+2}I^{s+2} \\ L=\beta I^S \end{cases} \Rightarrow W_b=\frac{L}{s+2}I^2$$

۱۸ـ گزینه «۱» نیروهای وارد بر ضلع بالائی و پایینی مربع یکدیگر را خنثی می‌کنند. از طرف دیگر داریم:

$$\text{نیروی وارد بر ضلع سمت چپ}=I_2 2aB_1=\frac{+\mu_0I_1I_2 2a}{2\pi(x-a)}\hat{a}_x$$

$$\text{نیروی وارد بر ضلع سمت راست}=I_2 2aB_2=\frac{-\mu_0I_1I_2 2a}{2\pi(x+a)}\hat{a}_x$$

$$\Rightarrow \text{نیروی کل}=\frac{\mu_0}{\pi}\frac{2a^2I_1I_2}{(x^2-a^2)}\hat{a}_x$$

۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا مقدار H را به‌دست می‌آوریم:

$$B=\mu_0kH^2 \Rightarrow H=\sqrt{\frac{B}{\mu_0k}}$$

از آنجایی که ماده فرومغناطیس یک ماده غیرخطی است، برای به‌دست آوردن کار انجام شده از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$W=\int_0^{B_0}HdB=\int_0^{B_0}\frac{1}{\sqrt{\mu_0k}}B^{\frac{1}{2}}dB=\frac{2}{3}\frac{B_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu_0k}}$$

۲۰ـ گزینه «۲» برای یک دو قطبی مغناطیسی با ممان دو قطبی $\vec{\mu}_1$ واقع در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ داریم:

$$W_m=-\vec{\mu}_2.\vec{B}_1$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0\mu_1}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta)\Big|_{\substack{\theta=0\\ r=z}}=\frac{2\mu_0\mu_1}{4\pi z^3}\hat{a}_z$$

همچنین برای دو قطبی دوم خواهیم داشت:

$$\vec{\mu}_2=-\mu\hat{a}_z \Rightarrow W_m=\frac{2\mu_0\mu^2}{4\pi z^3}$$

نیرویی که بر دو قطبی بالایی وارد می‌شود از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{F}_m=-\vec{\nabla}W_m=\frac{3\mu_0\mu^2}{2\pi z^4}\hat{a}_z$$

این نیرو با نیروی وزن دو قطبی برابر است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{3\mu_0\mu^2}{2\pi z^4}=Mg \Rightarrow z=(\frac{3\mu_0\mu^2}{2\pi Mg})^{\frac{1}{4}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۱ـ گزینه «۲» میدان الکتریکی اندازه‌گیری شده توسط ناظری که همراه با بار حرکت می‌کند، چیزی جز نیروی وارد بر واحد بار نمی‌باشد. از طرفی بر بار الکتریکی متحرک در میدان مغناطیسی ساکن، نیروی مغناطیسی وارد می‌شود. پس داریم:

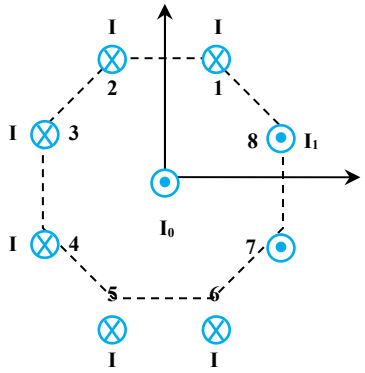
$$|\vec{E}|=|\frac{\vec{f}_m}{q}|=|\frac{qVB_\circ}{q}|=|VB_\circ|$$

طبق دینامیک حرکت دورانی می‌توان چنین نوشت:

$$|\vec{f}_m|=\frac{mV^2}{a}\Rightarrow|qVB_\circ|=\frac{mV^2}{a}$$

$$|\vec{E}|=|V|B_\circ=\frac{a|q|B_\circ^2}{m}\Rightarrow|V|=\frac{a|q|B_\circ}{m}$$

۲۲ـ گزینه «۱» نیروی وارد از طرف سیم‌های ۱ و ۲ به ترتیب توسط نیروی ناشی از سیم‌های ۵ و ۶ خنثی می‌گردد. نیروی ناشی از سیم‌های دیگر عبارتند از :



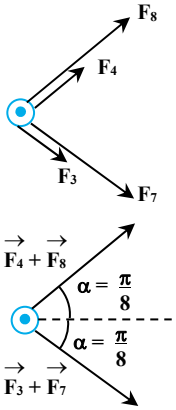
$$|\vec{F}_3|=\frac{\mu_\circ II_\circ}{2\pi r}=|\vec{F}_4|$$

$$|\vec{F}_7|=\frac{\mu_\circ I_\circ I_1}{2\pi r}=|\vec{F}_8|$$

$$|\vec{F}_3+\vec{F}_7|=|\frac{2\mu_\circ}{2\pi r}+\frac{4\mu_\circ}{2\pi r}|=\frac{3\mu_\circ}{\pi}$$

$$|\vec{F}_4+\vec{F}_8|=\frac{3\mu_\circ}{\pi}$$

$$\vec{F}=2|\vec{F}_3+\vec{F}_7|\cos\alpha=\frac{3\mu_\circ}{\pi}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\hat{a}_x$$



۲۳ـ گزینه «۱» برای یافتن میدان مغناطیسی در نواحی مختلف از قانون آمپر استفاده می‌کنیم.

$$r>4a\Rightarrow\oint\vec{H}_1.d\vec{\ell}=\circ\Rightarrow\vec{H}_1=\circ$$

$$a<r<4a\Rightarrow\oint\vec{H}_2.d\vec{\ell}=I\Rightarrow\vec{H}_2=\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$r<a\Rightarrow\oint\vec{H}_3.d\vec{\ell}=\frac{I}{\pi a^2}.\pi r^2\Rightarrow\vec{H}_3=\frac{Ir}{2\pi a^2}$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی انرژی که به صورت مقابل است به دست می‌آید:

$$W=\frac{1}{2}\iiint\mu_\circ|H|^2\,dv$$

$$W=\frac{1}{2}\int_\circ^a\mu_\circ H_3^2.2\pi r dr+\frac{1}{2}\int_a^{4a}\mu_\circ H_2^2.2\pi r dr=\frac{1}{2}\int_\circ^a\mu_\circ\frac{I^2r^2}{4\pi^2a^4}2\pi r dr+\frac{1}{2}\int_a^{4a}\mu_\circ\frac{I^2}{4\pi^2r^2}2\pi r dr=\frac{\mu_\circ I^2}{16\pi}+\frac{\mu_\circ I^2}{4\pi}\ln(\frac{4a}{a})$$

به همین ترتیب انرژی ذخیره شده در استوانه فرضی به شعاع r $(a<r<4a)$ از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$W'=\frac{\mu_\circ I^2}{16\pi}+\frac{\mu_\circ I^2}{4\pi}\ln(\frac{r}{a})$$

طبق فرض مسأله داریم $W'=\frac{1}{2}W$ و از این رو می‌توان نوشت:

$$\frac{\mu_\circ I^2}{16\pi}+\frac{\mu_\circ I^2}{4\pi}\ln(\frac{4a}{a})=\frac{2\mu_\circ I^2}{16\pi}+\frac{2\mu_\circ I^2}{4\pi}\ln(\frac{r}{a})\Rightarrow\frac{\mu_\circ I^2}{4\pi}\ln(\frac{4a^2}{r^2})=\frac{\mu_\circ I^2}{16\pi}$$

در نتیجه شعاع استوانه فرضی برابر است با:

$$\ln(\frac{4a^2}{r^2})=\frac{1}{4}\Rightarrow r^2=4a^2e^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow r=2ae^{-\frac{1}{8}}$$

۲۴ـ گزینه «۲» کار انجام شده روی بار q در یک چرخش کامل از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$W=\oint\vec{F}_e.d\vec{\ell}=\oint q\vec{E}.dl=q\oint\vec{E}.d\vec{\ell}$$

از طرفی طبق قانون القای فاراده می‌توان چنین نوشت:

$$\oint\vec{E}.d\vec{\ell}=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d(\vec{B}.\vec{S})}{dt}$$

اما برای $\vec{B}.\vec{S}$ طبق صورت سؤال خواهیم داشت:

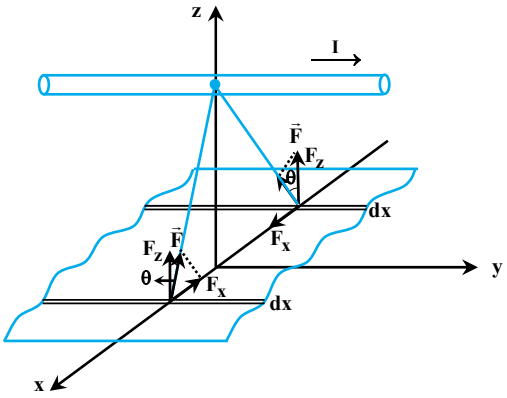
$$\vec{B}.\vec{S}=[(\alpha t+\beta)\hat{i}+\gamma ty\hat{j}].(\pi R^2\hat{i})=(\alpha t+\beta)\pi R^2\Rightarrow w=q\oint\vec{E}.d\vec{l}=-q\frac{d[(\alpha t+\beta)\pi R^2]}{dt}=-q\alpha\pi R^2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۵ـ گزینه «۱» به علت تقارن، کل نیروی الکتریکی وارد بر بار واقع در مرکز دایره صفر خواهد بود. با توجه به اینکه میدان مغناطیسی در مرکز حلقه در راستای z می‌باشد و با جهت حرکت بار در این نقطه یکسان است، بنابراین نیروی مغناطیسی وارد بر بار نیز صفر خواهد شد.

۲۶ـ گزینه «۳» اگر جریان سطحی را به جزءهای دیفرانسیلی میله‌ای شکل به ضخامت dx تقسیم کنیم، جریان هر جزء چنین خواهد بود:



$$dI = k_\circ dx$$

نیروی وارد بر سیم حامل جریان از طرف جزء دیفرانسیلی برابر است با:

$$dF = \frac{-\mu_\circ (k_\circ dx) I}{2\pi d} = \frac{-\mu_\circ k_\circ I dx}{2\pi (x^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

مطابق شکل مقابل به علت تقارن، نیروهای واقع در راستای محور x اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین کافی است فقط نیروی وارد در راستای z را محاسبه کنیم.

$$dF_z = dF\cos\theta = dF\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) = \frac{-\mu_\circ k_\circ I h}{2\pi (x^2 + h^2)} dx$$

حال با انتگرال‌گیری از dF_z روی بازه $-\frac{w}{2} < x < \frac{w}{2}$ خواهیم داشت:

$$\vec{F}_z = \frac{-\mu_\circ k_\circ I h}{2\pi} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx}{x^2 + h^2} \hat{a}_z = \frac{-\mu_\circ k_\circ I}{\pi} [\text{Arc}\tan\frac{w}{2h}] \hat{a}_z$$

۲۷ـ گزینه «۲» همان‌طور که گفتیم گشتاور دو قطبی مغناطیسی از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\vec{m} = IS\hat{a}_n = I(\frac{1}{2}\pi a^2)(-\hat{\varphi})$$

بنابراین گشتاور نیروی مغناطیسی چنین خواهد بود:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = I(\frac{1}{2}\pi a^2(-\hat{a}_\varphi) \times B_\circ \hat{a}_x)$$

از طرفی، طبق رابطه $\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi \hat{a}_x + \cos\varphi \hat{a}_y$ می‌توان چنین نوشت:

$$(-\hat{a}_\varphi) \times \hat{a}_x = \cos\varphi \hat{a}_z$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2}\pi a^2 I B_\circ \cos\varphi_\circ \hat{a}_z$$

نیروی مغناطیسی وارد بر سیم نیز با توجه به ثابت بودن میدان مغناطیسی $\vec{B}$ از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$\vec{\ell}$ برآیند بردار طول سیم در جهت اتصال نقطه شروع به نقطه پایان می‌باشد.

$$\vec{\ell} = 2a\hat{a}_z \Rightarrow \vec{F} = I(2a\hat{a}_z) \times B_\circ \hat{a}_x = 2aIB_\circ \hat{a}_y$$

۲۸ـ گزینه «۲» ابتدا نیروی وارد بر سیم وسط را بعد از جابه‌جایی به اندازه x محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_\circ I^2}{2\pi(D + x)} \quad , \quad \vec{F}_2 = \frac{\mu_\circ I^2}{2\pi(D - x)}$$

با محاسبه اختلاف نیرو داریم:

$$\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = \frac{2\mu_\circ I^2 x}{2\pi D^2} = \frac{\mu_\circ I^2 x}{\pi D^2} = kx$$

بنابراین $k = \frac{\mu_\circ I^2}{\pi D^2}$. از طرفی می‌توان نوشت:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi D}{I}\sqrt{\frac{\pi m}{\mu_\circ}}$$

۲۹ـ گزینه «۲» ابتدا شار مغناطیسی گذرنده از یکی از حلقه‌ها را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از تعریف القای متقابل، مقدار ضریب القای متقابل را محاسبه می‌کنیم:

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_\circ \pi a^2 I_1}{4\pi D^3}$$

$$\phi_{12} = |\vec{B}_1| \pi b^2 = \frac{\mu_\circ \pi a^2 b^2 I_1}{4D^3} \Rightarrow M = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_\circ \pi a^2 b^2}{4D^3}$$

نیرو از نوع دافعه می‌باشد.

$$F = \nabla(MI_1I_2) = \frac{3\pi\mu_\circ}{4} I_1 I_2 (\frac{ab}{D^2})^2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۰ـ گزینه «۳» ضرایب خود القایی متقابل سیم پیچ‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$L_1=\frac{\phi_1}{I_1}=\frac{N_1\varphi_1}{I_1}=\frac{N_1B_1S_1}{I_1}=\frac{N_1(\frac{\mu_\circ N_1I_1}{\ell_1})\pi a^2}{I_1}=\frac{\mu_\circ N_1^2\pi a^2}{\ell_1}$$

$$L_2=\frac{\phi_2}{I_2}=\frac{N_2\varphi_2}{I_2}=\frac{N_2B_2S_2}{I_2}=\frac{\mu_\circ N_2^2\pi b^2}{\ell_2} \qquad M=-\frac{\phi_{12}}{I_2}=-\frac{N_1(B_2S_1)}{I_2}=-\frac{\mu_\circ N_1N_2\pi a^2}{\ell_2}$$

(علامت منفی به خاطر آن است که جهت سیم پیچ‌ها مخالف هم هستند.)

با توجه به اینکه انرژی مغناطیسی در واحد طول سیم پیچ‌ها مورد نظر است، بنابراین می‌توان نوشت: $\ell_1=\ell_2=1$

$$w_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2-MI_1I_2=\frac{1}{2}\mu_\circ\pi(a^2N_1^2+b^2N_2^2-2N_1N_2a^2)$$

۳۱ـ گزینه «۱» چگالی جریان سطحی نوارها از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\vec{J}=\frac{I}{\sqrt{\mu_\circ b}}$$

از طرفی برای اندازه چگالی شار مغناطیسی در اطراف یک جریان سطحی پهناور داریم:

$$\vec{B}=\frac{1}{2}\mu_\circ\vec{J}\times\hat{n}\ \Rightarrow\ |B|=\frac{1}{2}\mu_\circ J$$

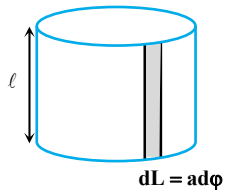
اندازه چگالی شار مغناطیسی در فاصله بین دو نوار دو برابر اندازه چگالی شار مغناطیسی هر کدام از نوارها خواهد بود.

$$|\vec{B}|=2(\frac{1}{2}\mu_\circ J)=\sqrt{\mu_\circ}\frac{I}{b}$$

بنابراین انرژی مغناطیسی برابر است با:

$$W_m=\frac{1}{2}\int\frac{|\vec{B}|^2}{\mu_\circ}dV=\frac{I^2}{2b^2}\times\int dV=\frac{I^2}{2b^2}\times b\times d\times 1=\frac{I^2}{2b}d\ \Rightarrow\ |F|=|\nabla W_m|=\frac{I^2}{2b}$$

۳۲ـ گزینه «۳» با استفاده از تعریف چگالی جریان داریم: $\vec{I}=Jd\vec{\ell}=J_\circ ad\varphi\hat{a}_z$



حال نیروی وارد بر یک جزء دیفرانسیلی استوانه را به‌دست می‌آوریم:

$$d\vec{F}=(I\vec{\ell}\times\vec{B})=J_\circ a\ell d_\varphi\hat{a}_z\times\frac{1}{2a}\hat{a}_r=\frac{1}{2}J_\circ\ell d_\varphi\hat{a}_\varphi$$

طبق تعریف گشتاور نیرویی می‌توان نوشت: $d\vec{T}=a\hat{a}_r\times d\vec{F}=a\hat{a}_r\times\frac{1}{2}J_\circ\ell d_\varphi\hat{a}_\varphi=\frac{1}{2}aJ_\circ\ell d_\varphi\hat{a}_z$

حال با انتگرال گرفتن از رابطه بالا، کل گشتاور نیروی وارده بر استوانه را محاسبه می‌کنیم: $\vec{T}=\int_\circ^{2\pi}d\vec{T}=\pi a\ell J_\circ\hat{a}_z$

۳۳ـ گزینه «۲» با استفاده از تعریف انرژی مغناطیسی برای دو قطبی مغناطیسی داریم: $W=-\vec{m}.\vec{B}\Rightarrow|W|=|\vec{m}||\vec{B}|\cos\alpha=\frac{1}{2}mB$

۳۴ـ گزینه «۲» چگالی شار مغناطیسی در اطراف دو قطبی مغناطیسی با گشتاور $m\hat{a}_z$ که در مبدأ مختصات قرار دارد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ m}{4\pi r^3}[2\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta]$$

بنابراین خواهیم داشت: $|\vec{B}|=\frac{\mu_\circ m}{4\pi r^3}[\sqrt{(2\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}]$

در نتیجه انرژی مغناطیسی ذخیره شده برابر است با:

$$W=\frac{1}{2}\int_v\frac{|\vec{B}|^2}{\mu_\circ}dv=\frac{\mu_\circ m^2}{32\pi^2}\int_a^b\int_\circ^\pi\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}(\frac{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}{r^6})r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi dr=\frac{\mu_\circ m^2}{96\pi}[\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}]\int_\circ^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+1)\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{\mu_\circ m^2}{48\pi}(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3})$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۵ـ گزینه «۲» طبق قانون مداری آمپر، شدت میدان مغناطیسی در فضای درون پوسته استوانه‌ای چنین خواهد بود:

$$H=\frac{I(r^2-a^2)}{(b^2-a^2)(2\pi r)}$$

بنابراین انرژی ذخیره شده در واحد طول برابر است با:

$$W=\frac{1}{2}\mu_\circ\int_V|\vec{H}|^2\,dv=\frac{1}{2}\mu_\circ\int_\circ^1\int_\circ^{2\pi}\int_a^b\frac{I^2(r^2-a^2)^2\,r\,dr\,d\varphi\,dz}{(b^2-a^2)^2 4\pi^2 r^2}=\frac{\mu_\circ I^2}{16\pi(b^2-a^2)}\left(b^2-3a^2+\frac{4a^4}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right)$$

۳۶ـ گزینه «۴» چگالی شار مغناطیسی ناشی از دو قطبی مغناطیسی $\vec{m}$ واقع در مرکز کره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta)\qquad |\vec{B}|^2=\frac{\mu_\circ^2 m^2}{16\pi^2 r^2}(4\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{\mu_\circ^2 m^2}{16\pi^2 r^6}(3\cos^2\theta+1)$$

در نتیجه انرژی ذخیره شده در ناحیه خارج کره چنین خواهد بود:

$$W=\frac{1}{2}\int_a^\infty\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^\pi\frac{|\vec{B}|^2}{\mu_\circ}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr=\frac{\mu_\circ m^2}{32\pi^2}\int_a^\infty\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^\pi\frac{3\cos^2\theta+1}{r^6}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr=\frac{\mu_\circ m^2}{12\pi a^3}$$

۳۷ـ گزینه «۳»

$$\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{\mu}.\vec{B})=\vec{\mu}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+(\vec{\mu}.\vec{\nabla})\vec{B}=\mu\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})-\vec{\nabla}\times(\vec{\mu}\times\vec{B})$$

با گذشت زمان $\vec{\mu}$ و $\vec{B}$ هم جهت می‌شوند، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{F}=\vec{\mu}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

۳۸ـ گزینه «۱» چگالی انرژی الکتریکی و مغناطیسی به صورت مقابل تعریف می‌شوند:

$$u_e=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^2\quad,\quad u_m=\frac{1}{2\mu_\circ}B^2$$

اگر دو چگالی انرژی با هم مساوی باشند داریم:

$$u_e=u_m\Rightarrow\varepsilon_\circ E^2=\frac{1}{\mu_\circ}B^2\Rightarrow E=\frac{B}{\sqrt{\varepsilon_\circ\mu_\circ}}=B\times3\times10^8\Rightarrow E=1/5\times10^8\,\frac{V}{m}$$

۳۹ـ گزینه «۲» با توجه به روابط زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2}\qquad |H_2|=|H_1|\sqrt{Sin^2\alpha_1+(\frac{\mu_1}{\mu_2})^2\cos^2\alpha_1}$$

$$\frac{W_{m2}}{W_{m1}}=\frac{\frac{1}{2}\mu_2|H_2|^2}{\frac{1}{2}\mu_1|H_1|^2}=(\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1})\,[Sin^2\alpha_1+(\frac{tg\alpha_1}{tg\,\alpha_2})^2\cos^2\alpha_1]\Rightarrow\frac{W_{m2}}{W_{m1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}]=\frac{2\sqrt{3}}{3}>1$$

بنابراین چگالی انرژی مغناطیسی در طرف ماده دوم بیشتر است.

۴۰ـ گزینه «۴» وقتی ذره‌ای به جرم m و بار q در یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، کلی‌ترین مسیر حرکت آن، یک حرکت مارپیچی با مقطع دایروی در راستای میدان مغناطیسی می‌باشد. شعاع این دایره عبارت است از:

$$R=\frac{mv_\perp}{qB}$$

در اینجا چون حرکت ذره در صفحه xy بوده است، V کلی در واقع همان $V_\perp$ می‌باشد.

$$R=\frac{mv}{qB_\circ}\quad\text{(در این مسأله)}$$

می‌توانیم از رابطه مربوط به گشتاور دو قطبی یک حلقه جریان برای به دست آوردن گشتاور دو قطبی مغناطیسی حاصل از این حرکت استفاده کنیم.

$$\vec{m}=I\vec{A}=\frac{q}{t}(\pi R^2)\hat{k}=\frac{q\pi}{t}(\frac{mv}{qB_\circ})^2\hat{k}$$

حال با بازنویسی این رابطه برای انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$k_\circ=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow|\vec{m}|=\frac{2\pi m}{tqB_\circ}\frac{\frac{1}{2}mv^2}{B_\circ}=\frac{2\pi m}{tqB_\circ}\frac{k_\circ}{B_\circ}\quad\text{انرژی جنبشی}$$

و اینکه می‌دانیم بسامد سیکلوترونی $(\omega=\frac{V}{r})$، عبارت است از:

$$\omega=\frac{qB_\circ}{m}\Rightarrow|\vec{m}|=\frac{2\pi}{\omega t}\frac{k_\circ}{B_\circ}=\frac{k_\circ}{B_\circ}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۱ـ گزینه «۲» چون بار الکتریکی ساکن است فقط به آن یک نیروی الکتریکی وارد می‌شود، در نتیجه بار الکتریکی در جهت میدان الکتریکی شروع به حرکت می‌کند.

$\xrightarrow{\vec{B}}$

$\xrightarrow{\vec{E}}$

$q \bullet\!\!\rightarrow \vec{F}_e = q\vec{E}$

$\vec{F}_m = q\vec{V}\times\vec{B}$

نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی به صورت مقابل است:

چون میدان مغناطیسی در جهت میدان الکتریکی می‌باشد در نتیجه میدان مغناطیسی در جهت حرکت ذره بوده و ضرب $\vec{V}\times\vec{B}$ صفر می‌شود و هیچ نیروی مغناطیسی به بار وارد نمی‌شود. بنابراین بار فقط تحت تأثیر نیروی الکتریکی بوده و روی یک خط مستقیم و در جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کند.

۴۲ـ گزینه «۱» نیروی وارد بر بار الکتریکی با استفاده از رابطه مقابل به‌دست می‌آید: $F_m = q\vec{V}\times\vec{B}$

اگر فرض کنیم که جریان در جهت $\hat{a}_z$ باشد میدان مغناطیسی در جهت $\hat{a}_\varphi$ خواهد بود. بنابراین اگر بخواهیم نیروی وارد بر بار در جهت $\hat{a}_z$ باشد، با استفاده از قانون دست راست به این نتیجه می‌رسیم که جهت حرکت باید در جهت دور شدن از سیم باشد.

۴۳ـ گزینه «۲» نیروی وارد بر بار الکتریکی به صورت مقابل است:

$$F = qVB = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mV}{qB}$$

R شعاع دایره‌ای است که ذره روی آن می‌چرخد. با استفاده از تعریف سرعت زاویه‌ای داریم:

$$V = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{R}$$

با جایگذاری R در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

بنابراین فرکانس حرکت ذره به سرعت خطی ارتباطی ندارد.

۴۴ـ گزینه «۲» طبق تعریف نیروی مغناطیسی داریم:

$$F = q\vec{V}\times\vec{B} \Rightarrow ۶/۴\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{k} = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,[(۲\hat{i}+۴\hat{j})\times(B_x\hat{i}+۳B_y\hat{j})]$$

$$۴\hat{k} = (۶B_y - ۴B_x)\hat{k} \Rightarrow ۶B_y - ۴B_x = ۴$$

چون B_y مجهول می‌باشد، نمی‌توانیم B_x را به‌دست آوریم.

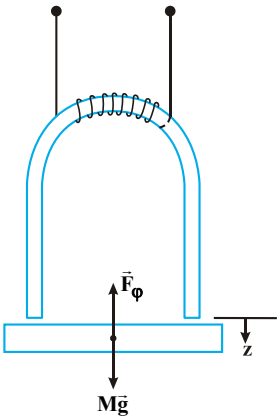
۴۵ـ گزینه «۱» ابتدا نیروی وارد بر وزنه از طرف سیملوله را بدست می‌آوریم. فرض کنید وزنه به اندازه dz جابه‌جا شود که باعث تغییر طول شکاف‌های هوایی می‌شود. در نتیجه این جابه‌جایی، فقط انرژی مغناطیسی ذخیره شده در شکاف‌های هوایی تغییر می‌کند.

انرژی مغناطیسی ذخیره شده در دو شکاف هوایی برابر است با:

$$dW_m = ۲(\frac{۱}{۲})\frac{B^2}{\mu_\circ}Sdz = \frac{\phi^2}{\mu_\circ S}dz$$

در نتیجه نیروی مغناطیسی واردبر وزنه برابر است با:

$$\vec{F}_\varphi = -\hat{a}_z\frac{dW_m}{dz} = -\hat{a}_z\frac{\phi^2}{\mu_\circ S}$$



از طرفی شار مغناطیسی ϕ برابر است با:

$$\phi = \frac{NI}{R_i + R_a}$$

با توجه به رابطه تعادل $F_\varphi = Mg$ داریم:

$$(\frac{NI}{R_i+R_a})^2\frac{۱}{\mu_\circ S} = Mg \Rightarrow N = \frac{R_i+R_a}{I}\sqrt{\mu_\circ MgS}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۴۶ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که مقاومت R کم است، به ازای فرکانس $\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}$ جریان $I(t)$ با منبع ولتاژ هم فاز خواهد شد. در این حالت می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱}{C\omega}=L\omega \Rightarrow -j\frac{۱}{C\omega}+jL\omega=۰$$

مقاومت ظاهری مدار در این حالت به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$Z=R+\frac{(R+\frac{۱}{jC\omega})(R+jL\omega)}{R+\frac{۱}{jC\omega}+R+jL\omega}=R+\frac{R^۲+\frac{L}{C}}{۲R}=\frac{L+۳R^۲C}{۲RC}$$

۴۷ـ گزینه «۴» با توجه به شرایط تطبیق امپدانس می‌توان نسبت $\frac{N_۱}{N_۲}=a$ را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$a^۲|Z_۲|=|Z_۱| \Rightarrow ۱۰a^۲=۱۰۰۰ \Rightarrow a=۱۰$$

جریان مؤثر و ولتاژ مؤثر $I_۲$ و $V_۲$ از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$I_۲=\sqrt{\frac{P}{|Z_۲|}}=\sqrt{\frac{۴۰}{۱۰}}=۲ \qquad V_۲=\sqrt{P\times|Z_۲|}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$$

بنابراین جریان مؤثر و ولتاژ مؤثر $I_۱$ و $V_۱$ به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$I_۱=\frac{I_۲}{a}=\frac{۲}{۱۰} \qquad V_۱=aV_۲=۲۰۰$$

۴۸ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. بار دیسک از رابطه‌ی $Q=\int\sigma_e da$ و جرم دیسک از رابطه‌ی $M=\int\sigma_m da$ به دست می‌آید، که da دیفرانسیل سطح قرص است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی را می‌توان به این صورت محاسبه کرد، که قرص، مجموعه‌ای از حلقه‌های کنار هم است و از آنجا که گشتاور مغناطیسی یک حلقه برابر $\pi r^۲I$ است، که I جریان عبوری از حلقه و r شعاع حلقه است. مجموع این گشتاورها، کل گشتاور دیسک را می‌دهد. توجه کنید I (جریان یک حلقه) برابر مقدار باری است که از مقطع حلقه در واحد زمان عبور می‌کند. این مقدار بار $\sigma_e(۲\pi rdr)$ است و زمانی که طول می‌کشد تا عبور کند، برابر است با دوره زمانی چرخش قرص، یعنی $T=\frac{۲\pi}{\omega_۰}$.

اما برای محاسبه تکانه زاویه‌ای، از رابطه‌ی $L=I_۰\omega_۰$ که $I_۰$ اینرسی دیسک است و از رابطه‌ی $I_۰=\int\sigma_m r^۲da$ به دست می‌آید.

$$Q=\int\sigma_e da=\int_۰^R b_۰(۱-(\frac{r}{R})^۲)(۲\pi rdr)=\frac{\pi}{۲}b_۰R^۲ \quad , \quad M=\int\sigma_m da=\int_۰^R a_۰(۱-\frac{r}{R})(۲\pi rdr)=\frac{\pi}{۳}a_۰R^۲$$

$$\mu=\int_۰^R \pi r^۲\frac{\sigma_e(۲\pi rdr)}{T}=\pi\omega_۰b_۰\int r^۳(۱-\frac{r^۲}{R^۲})dr=\frac{\pi}{۱۲}b_۰\omega_۰R^۴$$

$$L=I_۰\omega_۰=(\int\sigma_m r^۲da)\omega_۰=a_۰\omega_۰\int r^۲(۱-\frac{r}{R})(۲\pi rdr)=\frac{\pi}{۱۰}a_۰\omega_۰R^۴$$

طبق رابطه‌ای که صورت مسأله داده است، باید $\vec{\mu}=\alpha\frac{Q}{M}\vec{L}$ برقرار باشد و با استفاده از مقادیر بالا که برای پارامترهای Q ، M، μ و L به دست آوردیم، می‌توان α را محاسبه کرد.

$$\frac{\pi}{۱۲}b_۰\omega_۰R^۴=\alpha\frac{\frac{\pi}{۲}b_۰R^۲}{\frac{\pi}{۳}a_۰R^۲}\frac{\pi}{۱۰}a_۰\omega_۰R^۴ \Rightarrow \alpha=\frac{۵}{۹}$$

www.modaresanesharif.ac.ir