درسنامه۴: حل و بررسی معادله‌ی لاپلاس

معادله‌ی لاپلاس (پتانسیل)

فرض کنید $u(x,y)$ نشان‌دهنده‌ی انرژی پتانسیل ذخیره شده در هر نقطه‌ی (x,y) از یک نوار مستطیل شکل باشد که طول و عرض آن ممکن است متناهی یا نامتناهی باشند. معادله‌ی ناهمگن $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ به معادله‌ی پوآسون معروف است و شکل همگن آن را معادله‌ی لاپلاس می‌نامند. $u_{xx}+u_{yy}$ را گاهی با $\nabla^2 u$ نمایش می‌دهند و به آن لاپلاسینِ u می‌گویند. بنابراین معادله لاپلاس به صورت $\nabla^2 u=0$ قابل نمایش است. به هر حال برای آن که رهیافت مناسب و کارآمدی برای رسیدن به جواب داشته باشیم، رعایت ترتیب بررسی‌های زیر الزامی است:

۱) به طور معمول در یک نوار مستطیل شکل، $(0\le y\le b\ ,\ 0\le x\le a)$ چهار مرز داریم که دو تا مربوط به x و دو تا مربوط به y هستند. البته ممکن است فقط یک مرز برای x داشته باشیم یا $0\le x<\infty$ باشد و اصلاً مرزی برای x نداشته باشیم. به همین ترتیب در مورد y ممکن است فقط یک مرز داشته باشیم یا اصلاً مرزی نداشته باشیم. **به هر حال، ابتدا با دقت به شرایط مرزی داده شده، متغیری را انتخاب کنید که شرط مرزی ناهمگن نداشته باشد.**

معمولاً این متغیر x است. اما در برخی از مثال‌ها ممکن است y این ویژگی را داشته باشد. به هر حال ما فرض می‌کنیم x متغیری است که شرط مرزی ناهمگن ندارد. (یعنی اصلاً شرط مرزی ندارد یا شرایط همگن دارد.) در این صورت $F_n(x)$ یک عبارت مثلثاتی و $G_n(y)$ یک عبارت نمایی یا هیپربولیک خواهد بود. یک راه تشخیص خوب این است که اگر شرط مرزی ناهمگن تابعی به صورت $f(x)$ باشد، x به صورت مثلثاتی و y نمایی است. بالعکس اگر شرط ناهمگن به صورت $f(y)$ باشد، y مثلثاتی و x نمایی است.

۲) فرم کلی جواب به صورت زیر است:

اگر x متناهی باشد $(0<x<a)$:

$$u(x,y)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(a_n\cos\sqrt{\lambda_n}x+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}x)}_{F_n(x)}\underbrace{(A_ne^{\sqrt{\lambda_n}y}+B_ne^{-\sqrt{\lambda_n}y})}_{G_n(y)}$$

اگر x نامتناهی یا نیمه متناهی باشد $(-\infty<x<+\infty$ یا $0<x<\infty)$:

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}\underbrace{(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x)}_{F_\omega(x)}\underbrace{(A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y})}_{G_\omega(y)}d\omega$$

اکنون با استفاده از شرایط مرزی، مقادیر ویژه و توابع ویژه را به صورت دقیق‌تر بدست می‌آوریم:

الف) وقتی $0<x<a$ باشد:

مواردی مشابه آنچه در مورد معادله‌ی موج و حرارت داشتیم رخ می‌دهد. در $x=0$، شرط $u(0,y)=0$ نشان می‌دهد که $F_n(x)$ سینوسی است و $u_x(0,y)=0$ می‌گوید $F_n(x)$ کسینوسی است. اما در شرایط تناوبی، $F_n(x)$ شامل هر دو جمله خواهد بود.

سپس با اعمال شرط مرزی در $x=a$ می‌توانیم مقادیر ویژه را نیز تعیین کنیم. البته این جمع‌بندی هم قابل استفاده است:

هر گاه دو شرط یکسان در $x=0$ و $x=a$ داشته باشیم (هر دو روی u یا هر دو روی u_x باشند) داریم $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{a}$ و اگر دو شرط مخلوط (یکی روی u دیگری روی u_x) داشته باشیم $\sqrt{\lambda_n}=\frac{(2n-1)\pi}{2a}$ است. در شرایط تناوبی برای نقاط $x=0$ و $x=a$ نیز $\sqrt{\lambda_n}=\frac{2n\pi}{a}$ است.

ب) وقتی $0<x<\infty$ یا $-\infty<x<+\infty$ باشد:

در این حالت $\lambda=\omega^2$ است. اگر شرط مرزی $u(0,y)=0$ را داشتیم، $F_\omega(x)=\sin\omega x$ است و اگر شرط مرزی $u_x(0,y)=0$ را داشتیم $F_\omega(x)=\cos\omega x$ است.

نکته۱: دقت کنید که وقتی $-\infty<x<+\infty$ باشد، متغیر x اصلاً مرزی ندارد. حال اگر سایر شرایط مرزی نیز مستقل از x باشند، جواب $u(x,y)$ مستقل از x و تابعی یک متغیره بر حسب y است. در واقع در این حالت $u(x,y)=Ay+B$ می‌شود.

بحث در مورد $G_n(y)$

گفتیم که جواب‌های ویژه‌ی $G_n(y)$ اگر y کران‌دار باشد، به صورت $A_n e^{\sqrt{\lambda_n}y}+B_n e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$ هستند. حالا می‌خواهیم فقط با دقت کردن به محدوده‌ی y، فرم دقیق‌تر جواب را پیدا کنیم. قاعده‌ی کلی آن است که هیچ‌گاه نباید $e^{+\infty}$ در جواب حضور داشته باشد:

۱) اگر $0<y<b$ باشد، هر دو جمله می‌توانند در جواب حضور یابند. در این حالت، $e^{\sqrt{\lambda_n}y}$ و $e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$ با کمک هم توابع هذلولویِ $\cosh\sqrt{\lambda_n}y$ و $\sinh\sqrt{\lambda_n}y$ را ایجاد می‌کنند. پس در این حالت می‌توان نوشت: $G_n(y)=A_n\cosh\sqrt{\lambda_n}y+B_n\sinh\sqrt{\lambda_n}y$

۲) اگر $0<y<\infty$ باشد فقط $e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$ را خواهیم داشت.

۳) اگر $-\infty<y<0$ باشد، فقط $e^{\sqrt{\lambda_n}y}$ را خواهیم داشت.

۴) اگر $-\infty<y<+\infty$ باشد هیچکدام از جملات $e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$ و $e^{\sqrt{\lambda_n}y}$ در جواب ظاهر نمی‌شوند. در واقع در این حالت جواب مستقل از y است و داریم: $u=Ax+B$ (تمام موارد فوق، وقتی که انتگرال فوریه داریم و $\lambda=\omega^2$ است نیز برقرارند.)

نکته ۲: اگر $G_n(y)$ به صورت هذلولوی (هیپربولیک) در آمد، و شرط همگن در $y=0$ داشته باشید، می‌توانید یکی از توابع هذلولوی را حذف کنید. این کار هم مشابه چیزی است که در مورد توابع ویژه‌ی مثلثاتی رخ می‌دهد. اگر $u(x,0)=0$ باشد، فقط $\sinh\sqrt{\lambda_n}y$ در جواب می‌ماند. اگر $u_y(x,0)=0$ باشد، فقط $\cosh\sqrt{\lambda_n}y$ در جواب خواهد ماند.

مثال ۱: فرم کلی جواب مسأله انتقال حرارت پایدار دو بعدی $\begin{cases}T_{xx}+T_{yy}=0\ ,\ 0<x<L\ ,\ 0<y<L\\ T(0,y)=T(L,y)=T(x,0)=0\ ,\ T(x,L)=f(x)\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi x}{L})\sinh(\frac{n\pi y}{L})$

۲) $T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi y}{L})$

۳) $T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh(\frac{n\pi x}{L})\sinh(\frac{n\pi y}{L})$

۴) $T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi x}{L})\sinh(\frac{n\pi y}{L})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همه شرایط مرزیِ مربوط به x همگن هستند، بنابراین $F_n(x)$ مثلثاتی است و $G_n(y)$ نمایی (یا هذلولوی) خواهد بود. به بیان دیگر از آن جا که شرط مرزی ناهمگن بر حسب x است، $F_n(x)$ مثلثاتی و $G_n(y)$ نمایی خواهد بود. در $x=0$ شرط $T(0,y)=0$ نشان می‌دهد $F_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$ سینوسی است و شرط $T(L,y)=0$ می‌گوید $F_n(L)=\sin(\sqrt{\lambda_n}L)=0$ در نتیجه $\sqrt{\lambda_n}L=n\pi$ و داریم $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{L}$.
حال که λ_n معلوم شد به پیروی از آن، $G_n(y)$ ترکیب خطیِ $e^{-\frac{n\pi}{L}y}$ و $e^{\frac{n\pi}{L}y}$ است. با توجه به کران‌دار بودنِ y، $(0<y<L)$ هر دوی آن‌ها در جواب حاضرند و توابع هذلولویِ $\cosh\frac{n\pi}{L}y$ و $\sinh\frac{n\pi}{L}y$ را تولید می‌کنند. حال شرط همگن $T(x,0)=0$ نشان می‌دهد که به ازای $y=0$ باید جواب صفر شود یعنی $G_n(y)=\sinh\frac{n\pi}{L}y$ است:

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x\sinh\frac{n\pi}{L}y$$

مثال ۲: جواب مسأله لاپلاس $\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0\ ;\ 0<x<a\ ,\ 0<y<b\\ u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=0\ ,\ u(x,b)=f(x)\end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin(\frac{n\pi}{a}x)$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a})y$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{n\pi}{b})x$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh(\frac{n\pi}{a})y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که برای متغیر y یک شرط ناهمگن در $y=b$ داریم اما همه‌ی شرایط مرزی x، همگن هستند، بنابراین $F_n(x)$ به صورت مثلثاتی و $G_n(y)$ به شکل نمایی خواهد بود (یک استدلال دیگر آن است که بگوییم چون شرط مرزی ناهمگن $u(x,b)=f(x)$ برحسب x است؛ $F_n(x)$ مثلثاتی می‌شود)، در $x=0$ داریم $u=0$؛ بنابراین $F_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$ سینوسی است. همچنین در $x=a$ داریم $u(a,y)=0$ بنابراین $F_n(a)=\sin(\sqrt{\lambda_n}a)=0$ است. پس $\sqrt{\lambda_n}a=n\pi$ و در نتیجه $\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2$ است. $G_n(y)$ نیز از ترکیب خطی $e^{-\frac{n\pi}{a}y}$ و $e^{\frac{n\pi}{a}y}$ ساخته می‌شود. از آنجا که $0<y<b$ کران‌دار است، هر دو جمله می‌توانند در جواب حاضر باشند و از ترکیب خطی آن‌ها، توابع هذلولوی (هیپربولیک) ایجاد می‌شوند:

$$G_n(y)=A_n\sinh\frac{n\pi}{a}y+B_n\cosh\frac{n\pi}{a}y$$

از طرفی شرط مرزی $u(x,0)=0$ نشان می‌دهد $B_n=0$ است و فقط $\sinh\frac{n\pi}{a}y$ باقی می‌ماند. اکنون فرم کلی جواب را می‌نویسیم:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

مثال ۳: جواب مسأله لاپلاس زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ ; \ 0<x<a \ , \ 0<y<b \\ u(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,b)=0 \\ u(a,y)=f(y) \end{cases}$$

۱) $A_0x+\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\lambda_n x \cosh\lambda_n y$

۲) $A_0y+\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\lambda_n x \cos\lambda_n y$

۳) $A_0y+\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\lambda_n x \cosh\lambda_n y$

۴) $A_0x+\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\lambda_n x \cos\lambda_n y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که می‌بینید متغیر x یک شرط ناهمگن در $x=a$ دارد. اما شرایط مرزی y همگن هستند، بنابراین در این مثال $F_n(y)$ مثلثاتی و $G_n(x)$ نمایی و به نوعی هذلولوی است. (به بیان دیگر، شرط مرزی $u(a,y)=f(y)$ را داریم که بر حسب y است. طبق نکته گفته شده، جواب برای $F_n(y)$ مثلثاتی است.) پس یافتن پاسخ $F_n(y)$ اولویت دارد. در $y=0$ شرط $u_y(x,0)=0$ نشان می‌دهد $F_n(y)=\cos\sqrt{\lambda_n}\,y$ کسینوسی است. از طرفی شرط $u_y(x,b)=0$ نتیجه می‌دهد $F_n'(b)=-\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}b)=0$ می‌دانیم که در این حالت $\sin\sqrt{\lambda_n}b=0$ است پس $\sqrt{\lambda_n}b=n\pi$ و در نتیجه $\lambda_n=(\frac{n\pi}{b})^2$ خواهد بود. به این ترتیب $F_n(y)=\cos(\frac{n\pi}{b}y)$ است و $G_n(x)$ دارای دو جمله‌ی $e^{\frac{n\pi}{b}x}$ و $e^{-\frac{n\pi}{b}x}$ خواهد بود. از آنجا که $0<x<a$ کران‌دار است، هر دوی این جملات می‌توانند در جواب حضور یابند و از ترکیب خطی آن‌ها، توابع هذلولوی (هیپربولیک) ایجاد می‌شوند. البته شرط همگن $u(0,y)=0$ نشان می‌دهد فقط $\sinh\frac{n\pi}{b}x$ باقی خواهد ماند. به این ترتیب فقط گزینه‌ی (۴) فرم صحیح دارد.

مثال ۴: جواب کدام معادله لاپلاس زیر، به صورت $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi}{a})x}\sin(\frac{n\pi}{a}y)$ می‌باشد؟

۱) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ ; \ 0<x<\infty \ ; \ 0<y<a \\ u_x(0,y)=u(x,0)=0 \ , \ |u(\infty,y)|<M \ , \ u(x,a)=f(x) \end{cases}$

۲) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ , \ 0<x<a \ , \ 0<y<a \\ u(0,y)=u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \ , \ u(x,a)=f(x) \end{cases}$

۳) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ ; \ 0<x<\infty \ ; \ 0<y<a \\ u(x,0)=u(x,a)=0 \ , \ |u(\infty,y)|<M \ , \ u_x(0,y)=g(y) \end{cases}$

۴) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad 0<x<a \ , \ 0<y<b \\ u_x(0,y)=u_x(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \ , \ u(x,b)=f(x) \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» قبل از ارائه پاسخ تشریحی این سؤال، لازم است به این موضوع اشاره کنم که هر کدام از گزینه‌های این سؤال به تنهایی می‌توانند به عنوان یک سؤال در آزمون‌های کارشناسی ارشد مطرح شوند. هدف از طرح آن‌ها در قالب یک سؤال، ارائه یک مثال کامل با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف در کنار هم و نحوه استفاده از جدول می‌باشد. به داوطلبان توصیه می‌کنم، حتماً پاسخ را به طور کامل مطالعه کنند.

بررسی گزینه (۱): معادله داده شده دارای یک شرط نیومن در $x=0$ $[u_x(0,y)=0]$ و یک شرط کران‌داری $[|u(\infty,y)|<M]$ می‌باشد، بنابراین جواب برحسب x به صورت کسینوسی است. حال از آن جا که $0<x<\infty$ بی‌کران است، $\lambda=\omega^2$ خواهد بود و چون در $x=0$ داریم $u_x=0$ پس $F_\omega(x)=\cos\omega x$ است. کران‌دار بودن y نشان می‌دهد $G_\omega(y)$ شکل هیپربولیک دارد. از طرفی شرط $u(x,0)=0$ به ما می‌گوید $G_\omega(y)=\sinh\omega y$ و لذا جواب به صورت زیر است:

$$u(x,y)=\int_0^{\infty} c_\omega \cos(\omega x)\sinh(\omega y)d\omega$$

این که چرا جواب به صورت انتگرال نوشته شد را که می‌دانید؟ (چون x نیمه متناهی تعریف شده است.)

بررسی گزینه (۲): با توجه به این که دو شرط دیریکله داریم، لذا $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{a}$ و توابع ویژه به صورت $F_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{a}x)$ خواهند بود. برای تعیین $G_n(y)$ با توجه به این که y محدود می‌باشد، لذا جواب به صورت هیپربولیکی خواهد بود و چون $u(x,0)=0$، لذا $G_n(y)=\sinh\frac{n\pi}{a}y$، پس فرم کلی جواب به صورت زیر است:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh(\frac{n\pi}{a}y)$$

بررسی گزینه (۳): این معادله کمی شما را به اشتباه می‌اندازد. ممکن است دنبال یک شرط کران‌داری و یک شرط نیومن (یعنی $u_x(0,y)=g(y)$) بروید و با دیدن $g(y)$ تمام ذهن شما به هم بریزد. اما دقت کنید در این معادله نقش x و y عوض شده و شما به جای $F_n(x)$ در واقع دنبال $F_n(y)$ هستید که شروط مرزی از نوع دیریکله و بر روی y هستند $[u(x,0)=u(x,a)=0]$ پس همیشه منتظر نباشید، فرم متعارف را ببینید:

با توجه به دو شرط دیریکله داریم $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{a}$ و جواب بر حسب y، سینوسی یعنی به شکل $\mathbf{F_n(y)=\sin\sqrt{\lambda_n}y}$ است. اما در مورد $G_n(x)$ چه انتخاب‌هایی داریم؟ سینوس هیپربولیک؟ کسینوس هیپربولیک؟ یا تابع نمایی؟ در حالت کلی $G_n(x)$ از ترکیب خطی $e^{\sqrt{\lambda_n}x}$ و $e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$ ساخته می‌شود.

اما چون $0<x<\infty$ است و $e^{\sqrt{\lambda_n}x}$ وقتی $x\to\infty$ میل کند، بی‌کران می‌شود، $G_n(x)$ فقط شامل $e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$ خواهد بود.

پس جواب کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-(\frac{n\pi}{a})x}\sin(\frac{n\pi}{a}y)}$$

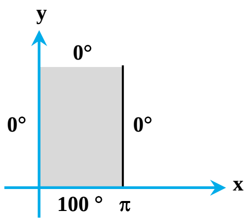
می‌دانم شما جزء داوطلبان باهوش هستید و به هیچ‌وجه در ذهنتان نگفتید؛ چرا از انتگرال استفاده نشد؟ مگر x نیمه‌متناهی تعریف نشده بود؟ اما برای آن یک درصدی که اینجوری فکر کردند، مجدداً متذکر می‌شوم همان‌طور که در ابتدای بررسی گزینه (۳) گفته شد، در این مسأله، این متغیر y است که دو شرط همگن دارد. پس متغیر y است که تعیین می‌کند سری فوریه داریم یا انتگرال فوریه. حال چون $0<y<a$ کران‌دار است، جواب به شکل سری فوریه خواهد بود. اگر دنبال پاسخ صحیح بودید، همین‌جا معلوم شد، گزینه (۳) صحیح است، اما ما که فقط دنبال پاسخ صحیح نبودیم! پس گزینه‌ی دیگر را نیز بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۴): واضح است که دو شرط نیومن داریم $[u_x(0,y)=u_x(a,y)=0]$. بنابراین $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{a}$ و $\mathbf{F_n(x)=\cos(\frac{n\pi}{a}x)}$، اما برای تعیین $G_n(y)$، از آنجا که $0<y<b$ کران‌دار است، $e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$ و $e^{\sqrt{\lambda_n}y}$ هر دو در جواب حضور دارند و باعث ایجاد توابع هیپربولیک می‌شوند. حالا چون $u(x,0)=0$ است، فقط $G_n(y)=\sinh\sqrt{\lambda_n}y$ می‌تواند صحیح باشد و چون x متناهی می‌باشد، لذا جواب را به صورت سری می‌نویسیم:

$$\mathbf{u(x,y)=c_0y+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(\frac{n\pi}{a}x)\sinh(\frac{n\pi}{a}y)}$$

دقت کنید، چون هر دو شرط مرزی نیومن هستند، جمله‌ی c_0y در بیرون سری ایجاد شد.

مثال۵: یک نوار نیمه متناهی به عرض π که وجوه زیر و روی آن کاملاً عایق‌بندی شده‌اند، با شرایط کرانه‌ای مطابق شکل داده شده است. دمای یک نقطه دلخواه از آن در حالت تعادل کدام است؟



۱) $\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\sin nx.e^{ny}$

۲) $\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx.e^{ny}$

۳) $\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx.e^{-ny}$

۴) $\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\sin nx.e^{-ny}$

☑ **پاسخ**: گزینه «۳» همان‌طور که از شکل پیداست شرایط مرزی همگن را در $x=0$ و $x=\pi$ داریم. $(u(0,y)=u(\pi,y)=0)$ بنابراین $F_n(x)$ مثلثاتی و $G_n(y)$ نمایی است. در $x=0$ داریم $u=0$، پس $F_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ سینوسی است. شرط $u(\pi,y)=0$ نیز نتیجه می‌دهد $F_n(\pi)=\sin(\sqrt{\lambda_n}\pi)=0$، بنابراین $\sqrt{\lambda_n}\pi=n\pi$ و داریم $\sqrt{\lambda_n}=n$. به این ترتیب $F_n(x)=\sin nx$ است. جواب $G_n(y)$ شامل ترکیب خطیِ e^{ny} و e^{-ny} است. اما در این مثال داریم $0<y<\infty$. بنابراین e^{ny} بی‌کران می‌شود و نمی‌تواند در جواب ظاهر شود. در نتیجه $G_n(y)=e^{-ny}$ خواهد بود.

سریِ جواب را می‌نویسیم:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nxe^{-ny}$$

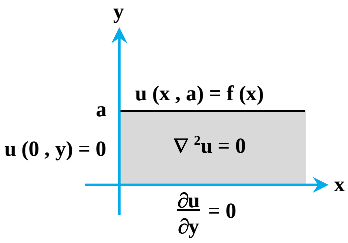
برای محاسبه‌ی B_n از شرط مرزی ناهمگن $u(x,0)=100$ استفاده می‌کنیم. به ازای $y=0$ داریم:

$$100=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx$$

از آنالیز فوریه داریم:

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}100\sin nxdx=-\frac{200}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{200}{\pi n}[1-(-1)^n]$$

مثال ۶: عبارت پتانسیل الکتریکی $u(x,y)$ در ناحیه نیم نوار داده شده و با شرایط مرزی نشان داده شده به چه شکل خواهد بود؟



۱) $u(x,y)=\int_0^{\infty} D(p)\cosh(py)e^{-px}dp$

۲) $u(x,y)=\int_0^{\infty} D(p)\sinh(px)\cos(py)dp$

۳) $u(x,y)=\int_0^{\infty} D(p)\sin(px)\cosh(py)dp$

۴) $u(x,y)=\int_0^{\infty} D(p)\cos(py)e^{-px}dp$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای متغیر y یک شرط مرزی ناهمگن $u(x,a)=f(x)$ را داریم. اما x فقط یک شرط مرزی دارد که آن هم همگن است. بنابراین $F(x)$ مثلثاتی است؛ و تعیین می‌کند که جواب به شکل سری است یا انتگرال. $G(y)$ نیز نمایی (یا هذلولوی) است.

چون $0<x<\infty$ بی‌کران است، پس $\lambda=\omega^2$ و جواب به شکل انتگرال فوریه است. همچنین $u(0,y)=0$ است در نتیجه $F_\omega(x)=\sin\omega x$ سینوسی خواهد بود. جواب $G_\omega(y)$ نیز شامل $e^{-\omega y}$ و $e^{\omega y}$ است. از آنجا که $0<y<a$ کران‌دار است؛ هر دو جمله می‌توانند در جواب حاضر باشند و از ترکیب خطی آن‌ها $\cosh\omega y$ و $\sinh\omega y$ ساخته شوند. اما شرط همگن $u_y(x,0)=0$ نشان می‌دهد $G_\omega(y)$ کسینوسی است. (البته کسینوسِ هیپربولیک) به این ترتیب داریم:

$$u(x,y)=\int_0^{\infty} A(\omega)\sin\omega x\cosh\omega y d\omega$$

که همان گزینه‌ی (۳) است. (در گزینه‌ها به جای ω از p استفاده شده است.)

مثال ۷: جواب معادله لاپلاس مقابل
$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u(0,y)=0\ ,\ 0\le x\le 1\\ u(1,y)=0\ ,\ y\ge 0\\ u(x,0)=\sin^3(2\pi x)\end{cases}$$
، که در آن $u(x,y)$ تابعی کران‌دار است، کدام گزینه است؟

۱) $\frac{3}{4}e^{\pi y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-3\pi y}\sin(6\pi x)$

۲) $\frac{3}{4}e^{-2\pi y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-6\pi y}\sin(6\pi x)$

۳) $\frac{3}{4}e^{-2y}\sin(2\pi x)+\frac{1}{4}e^{-6y}\sin(6\pi x)$

۴) $\frac{3}{4}e^{-2y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-6y}\sin(6\pi x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در این مثال $0\le x\le 1$ متناهی است و $0<y<\infty$ نامتناهی. آیا این را یک مسأله‌ی پتانسیل متناهی فرض کنیم که سری فوریه دارد یا مسأله‌ای نامتناهی که انتگرال فوریه دارد؟ برای یافتن پاسخ باید ببینیم کدام متغیر دارای شرایط مرزی همگن (یا کران‌داری) است. در این مثال x دو شرط همگن دارد. بنابراین چون x متناهی است، جواب عمومی به شکل سری فوریه نوشته می‌شود. در $x=0$ شرط همگن $u(0,y)=0$ را داریم که نشان می‌دهد $F_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ سینوسی است. حالا شرط مرزی $u(1,y)=0$ نشان می‌دهد که $F_n(1)=0$ است، پس $\sin(\sqrt{\lambda_n})=0$ و در نتیجه $\sqrt{\lambda_n}=n\pi$ خواهد بود. (یک راه دیگر آن است که چون شرط مرزی ناهمگن به صورت $f(x)=\sin^3(2\pi x)$ یعنی بر حسب x است، پس متغیر x مثلثاتی است و این متغیر است که λ را تعیین می‌کند.) جواب $u(x,y)$ به فرم زیر است:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\sqrt{\lambda_n}y}\sin\sqrt{\lambda_n}x \xrightarrow{\sqrt{\lambda_n}=n\pi} u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-n\pi y}\sin n\pi x$$

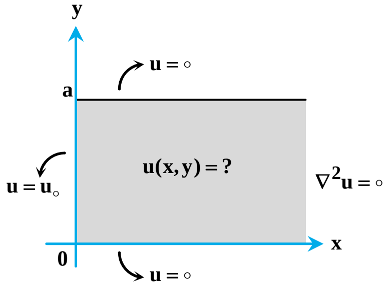
با اعمال شرط مرزی $u(x,0)=\sin^3(2\pi x)$، ضریب B_n را محاسبه می‌کنیم همچنین از اتحاد مثلثاتی $\sin^3(2\pi x)=\frac{3}{4}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}\sin(6\pi x)$ نیز استفاده می‌کنیم:

$$u(x,0)=\sin^3(2\pi x)=\frac{3}{4}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}\sin(6\pi x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\pi x$$

با توجه به تساوی طرفین، فقط دو مقدار ویژه به ازای $n=2,6$ در جواب خواهیم داشت:

$$u(x,y)=\frac{3}{4}e^{-2\pi y}\sin(2\pi x)-\frac{1}{4}e^{-6\pi y}\sin(6\pi x)$$

مثال ۸: پتانسیل در ناحیه نیمه محدود شکل زیر با شرط مرزی نشان داده شده، چقدر است؟



۱) $\frac{2u_0}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}x}\cos(\frac{n\pi}{a}y)$

۲) $\frac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sinh(\frac{n\pi}{a}y)$

۳) $\frac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin(\frac{n\pi}{a}y)$

۴) $\frac{2u_0}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin(\frac{n\pi}{a}y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این ناحیه، $0<x<\infty$ بی‌کران است، اما $0<y<a$ کران‌دار است. اگر برای x دو شرط مرزی همگن (یا کران‌داری) داشته باشیم جواب x مثلثاتی می‌شود و این متغیر تعیین می‌کند که جواب به صورت انتگرال فوریه باشد. (چون $0<x<\infty$ است.) اما اگر y دو شرط مرزی همگن (یا کران‌داری) داشته باشد آنگاه جواب y مثلثاتی می‌شود و این متغیر تعیین می‌کند که جواب به صورت سری فوریه باشد. (چون $0<y<a$است.) به شرایط مرزی دقت کنیم، به ازای $x=0$ شرط ناهمگن $u(0,y)=u_0$ داده شده اما در هر دو مرزِ $y=0$ و $y=a$ داریم $u(x,0)=u(x,a)=0$. بنابراین y به شکل مثلثاتی و x به صورت نمایی خواهد بود و چون $0<y<a$ کران‌دار است باید سری فوریه نوشته شود. شرط مرزی $u(x,0)=0$ نشان می‌دهد $F_n(y)=\sin(\sqrt{\lambda_n}y)$ سینوسی است و از شرط مرزی $u(x,a)=0$ داریم: $F_n(a)=\sin(\sqrt{\lambda_n}a)=0$. پس $\sqrt{\lambda_n}a=n\pi$ و $\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2$ است.

جواب‌های $G_n(x)$ به صورت $e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$ یا $e^{\sqrt{\lambda_n}x}$ می‌توانند باشند. اما شرط کرانداریِ پاسخ معادله لاپلاس در $x=\infty$ ایجاب می‌کند که $G_n(x)$ به‌صورت $e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$ باشد. بنابراین داریم:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\frac{n\pi}{a}y$$

اکنون شرط مرزی ناهمگن $u(0,y)=u_0$ را به کار می‌بندیم:

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}y$$

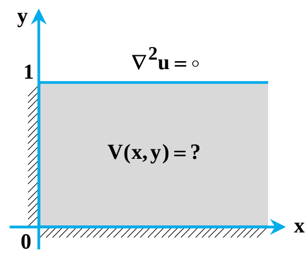
به این ترتیب، ضرایب B_n باتوجه به فرمول ضرایب سری فوریه چنین خواهند بود:

$$B_n=\frac{2}{a}\int_0^a u_0\sin\frac{n\pi y}{a}dy=\frac{2u_0}{a}[\frac{-a}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{a}]_0^a=\frac{2u_0(1-\cos n\pi)}{n\pi}\Rightarrow B_n=\begin{cases}0 & ; \quad n \text{ زوج} \\ \frac{4u_0}{n\pi} & ; \quad n \text{ فرد}\end{cases}$$

بنابراین، جواب نهایی به صورت مقابل خواهد بود:

$$\mathbf{u(x,y)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi x}{a}}\sin\frac{n\pi y}{a}}$$

مثال ۹: پتانسیل در ناحیه نیمه محدود شکل زیر با شرایط مرزی ذکر شده، کدام است؟



$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial x}(0,y)=0\ ,\ 0<y<1\\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,0)=0\ ,\ x>0\\ V(x,1)=e^{-x}\quad x>0\end{cases}$$

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cosh(kx)\sin(ky)}{(1+k^2)\cosh k}dk$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cosh(kx)\cos(ky)}{(1+k^2)\cosh k}dk$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)\cosh(ky)}{(1+k^2)\sinh k}dk$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)\cosh(ky)}{(1+k^2)\cosh k}dk$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این ناحیه، y متناهی و x نامتناهی است. اگر همه‌ی شرایط مرزی x همگن باشند آن‌گاه جواب x مثلثاتی است و V بر حسب انتگرال فوریه به دست می‌آید، اما اگر همه شرایط مرزی y همگن باشند، جواب y مثلثاتی خواهد بود و V به صورت سری فوریه خواهد بود. با دقت به شرایط مرزی داده شده می‌بینیم که در $y=1$ شرط مرزی ناهمگن داریم. اما برای x فقط یک شرط مرزی داریم که آن هم همگن است. بنابراین x به صورت مثلثاتی و y به صورت نمایی (هذلولوی) در جواب می‌آید. البته $0<y<1$ کران‌دار است پس جواب آن به شکل هذلولوی است. در ضمن چون

در $x=0$ داریم $V_x=0$ و در $y=0$ داریم $V_y=0$، جواب‌ها به شکل $\cos(kx)$ و $\cosh(ky)$ خواهند بود. با توجه به توضیحات مندرج در کتاب، در ناحیه داده شده داریم:

$$V(x,y)=\int_0^\infty A(k)\cosh(ky)\cos(kx)\,dk \xrightarrow{V(x,1)=e^{-x}} e^{-x}=\int_0^\infty A(k)\cosh(k)\cos(kx)\,dk$$

برای راحتی در محاسبات از تغییر متغیر $A(k)\cosh k=B(k)$ استفاده می‌کنیم:

$$e^{-x}=\int_0^\infty B(k)\cos(kx)\,dk$$

باتوجه به فرمول انتگرال فوریه می‌توان چنین نوشت:

$$B(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}L[\cos kx]|_{s=1}\Rightarrow B(k)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k^2+1}\right)$$

که در آن L عملگر تبدیل لاپلاس می‌باشد.

بنابراین ضریب $A(k)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A(k)=\frac{B(k)}{\cosh(k)}=\frac{2}{\pi(1+k^2)\cosh(k)}$$

پس جواب نهایی به صورت زیر است:

$$\mathbf{V(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(kx)\cosh(ky)}{(1+k^2)\cosh(k)}dk}$$

توضیح: $\int_0^\infty e^{-x}\cos(kx)dx=L[\cos(kx)]\Big|_{s=1}=\frac{1}{1+k^2}$.

مثال ۱۰: **جواب معادله پتانسیل با شرایط مرزی زیر کدام است؟**

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0\ ,\ 0<y<b\ ,\ x>0\\ u(x,0)=e^{-x}\ ,\ x\ge 0\\ u(0,y)=u(x,b)=0\ ,\ 0<y<b\ ,\ x>0\end{cases}$$

۱) $u(x,y)=\frac{4}{\pi}\int_0^\pi\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x\frac{\sinh\omega(b-y)}{\sinh\omega b}d\omega$

۲) $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x\frac{\sinh\omega(b-y)}{\sinh\omega b}d\omega$

۳) $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{1+\omega^2}\sin\omega x\frac{\sinh\omega(b-y)}{\sinh\omega b}d\omega$

۴) $u(x,y)=\frac{4}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{1+\omega^2}\sin\omega x\frac{\sinh\omega(b-y)}{\sinh\omega b}d\omega$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» شرط مرزی ناهمگن $f(x)=u(x,0)=e^{-x}$ نشان می‌دهد که متغیر x به صورت مثلثاتی و y به شکل نمایی (هیپربولیک) در جواب ظاهر می‌شوند. در $x=0$ داریم $u(0,y)=0$ بنابراین $F(x)=\sin(\lambda x)$ سینوسی است. از طرفی $0<x<\infty$ بی‌کران است، بنابراین $\lambda=\omega$ و جواب به شکل انتگرال فوریه است. جواب کلی $G_\omega(y)$ ترکیب خطی $e^{\omega y}$ و $e^{-\omega y}$ است. چون $0<y<b$ کران‌دار است پس هر دوی آن‌ها در جواب هستند و در واقع توابع هیپربولیک را می‌سازند. بنابراین داریم:

$$u(x,y)=\int_0^\infty\sin\omega x[A(\omega)\cosh\omega y+B(\omega)\sinh\omega y]d\omega$$

حالا سایر شرایط مرزی را برای محاسبه‌ی $A(\omega)$ و $B(\omega)$ به کار می‌گیریم:

$$u(x,b)=0\Rightarrow\int_0^\infty\sin\omega x[A(\omega)\cosh\omega b+B(\omega)\sinh\omega b]d\omega=0$$

$$\Rightarrow A(\omega)\cosh\omega b+B(\omega)\sinh\omega b=0\qquad(I)$$

$$u(x,0)=e^{-x}\Rightarrow e^{-x}=\int_0^\infty\sin\omega x[A(\omega)\cosh(0)+B(\omega)\sinh(0)]d\omega\Rightarrow e^{-x}=\int_0^\infty A(\omega)\sin\omega x d\omega$$

طبق فرمولِ ضرایب انتگرال فوریه‌ی سینوسی داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}L[\sin\omega x]_{s=1}=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Bigg|_{s=1}=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{\omega^2+1}\qquad(II)$$

با قرار دادن این تساوی در رابطه‌ی (I) خواهیم داشت:

$$B(\omega)=-\frac{\cosh\omega b}{\sinh\omega b}A(\omega)=-\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}\frac{\cosh\omega b}{\sinh\omega b}$$

با جایگذاری $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در جواب داریم:

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x[\cosh\omega y-\frac{\cosh\omega b}{\sinh\omega b}\sinh\omega y]d\omega$$

با انجام یک محاسبه‌ی مستقیم برای عبارت داخل کروشه داریم:

$$\cosh\omega y-\frac{\cosh\omega b}{\sinh\omega b}\sinh\omega y=\frac{\sinh\omega b\cosh\omega y-\cosh\omega b\sinh\omega y}{\sinh\omega b}=\frac{\sinh\omega(b-y)}{\sinh\omega b}$$

به این ترتیب جواب برابر است با:

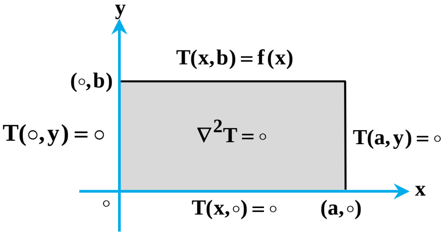
$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x\frac{\sinh\omega(b-y)}{\sinh\omega b}d\omega$$

توضیح: در محاسبات فوق از رابطه‌ی مقابل استفاده کرده‌ایم:

$$\sinh(\alpha-\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta-\cosh\alpha\sinh\beta$$

مثال۱۱: مسأله مقدار مرزی زیر را در داخل یک مستطیل به طول a و عرض b حل کنید. (از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Harward)

$$\begin{cases}\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0 \ ; \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \\ T(0,y) = T(a,y) = 0 \ ; \ 0 \le y \le b \\ T(x,0) = 0 \ , \ T(x,b) = f(x) \ , \ 0 \le x < a\end{cases}$$



پاسخ: برای تمرین، یک سؤال در این مبحث را به روش ضربی حل می‌کنیم. جواب کلی را به شکل $T(x,y) = F(x)G(y)$ در نظر مـی‌گیـریم و بـا مشتق‌گیری و جایگزینی آن در معادله داریم:

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0 \ \Rightarrow -\frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

سمت راست، تابعی بر حسب x و سمت چپ بر حسب y است. این تساوی نشان می‌دهد که این نسبت‌ها ثابت هستند. بنابراین داریم:

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda$$

پیش از این دیدیم که جواب عمومی این معادله چنین است:

$$F_n(x) = a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, x + b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$$

حال از شرط $u(0,y) = 0$ داریم $F_n(0) = 0$ و در نتیجه $F_n(x) = b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$ سینوسی است. همچنین از شرط مرزی $u(a,y) = 0$ داریـم $F_n(a) = 0$ پـس $b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, a = 0$. اگـر $b_n = 0$ باشـد کـه بـه جـواب بـدیهی $F_n(x) = 0$ مـی‌رسـیم پـس فـرض کنـیم $\sin\sqrt{\lambda_n}\, a = 0$ باشـد، یعنـی $\sqrt{\lambda_n}\, a = n\pi$ و $\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2$ خواهد بود.

همین‌جا توجه کنید که اگر به جای متغیر x، دو شرط همگن برای y داشتیم، معادلات دیفرانسیل را به شکل $-\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda$ مـی‌نوشـتیم و از حل معادله‌ی $\frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda$ آغاز می‌کردیم.

حال با داشتن $\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{a}$ به حل معادله‌ی مربوط به G می‌پردازیم:

$$G'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}G = 0 \ \Rightarrow G_n(y) = C_n \cosh(\frac{n\pi}{a}y) + D_n \sinh(\frac{n\pi y}{a})$$

با توجه به شرط $G(0) = 0$، واضح است $C_n = 0$ است و لذا $G_n(y) = D_n \sinh(\frac{n\pi y}{a})$، پس جواب کلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$T_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = B_n D_n \sinh(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

با فرض $E_n = B_n D_n$ داریم:

$$\mathbf{T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{n\pi}{a}x)}$$

با اعمال شرط اولیه $T(x,b) = f(x)$ داریم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh(\frac{n\pi}{a}b)\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

به راحتی معلوم است f دارای سری فوریه نیم‌دامنه سینوسی است. لذا داریم:

$$E_n \sinh(\frac{n\pi}{a}b) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx$$

بنابراین E_n برابر مقدار زیر است:

$$\mathbf{E_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx}$$