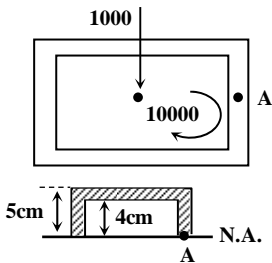


## پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل چهارم

## پاسخنامه آزمون (۱)



۱- گزینه «۳» تنش برشی ماکزیمم در روی تار خنثی در نقطه (A) اتفاق می‌افتد چون تنش‌ها هم‌جهت می‌باشند.

$$A_m = (20 - 0/5 - 0/5) \times (10 - 0/5 - 0/5) = 19 \times 9$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{2A_m t} = \frac{1000 \times [(\frac{1}{2} \times 10) \times 2/5 \times 2 + (18 \times 1) \times 4/5]}{(\frac{1}{12} \times 20 \times 10^3) - [\frac{1}{12} \times 18 \times 8^3]} \times 2 + \frac{10000 \times 10}{2 \times 19 \times 9 \times 1}$$

$$\tau_{\max} = 88/21 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{6000}{2 \times 10} = 450$$

۲- گزینه «۱» تنش برشی ماکزیمم در مقطع مستطیل برابر است با:

۳- گزینه «۱» نقطه B بروی تار خنثی قرار دارد در نتیجه حداکثر تنش برشی ناشی از نیروی برش را تحمل می‌کند ولی در اثر لنگر پیچشی مقدار تنش برشی در مرکز مقطع صفر است.

$$\tau_{\max} = \left(\frac{VQ}{It}\right)_{\max} + 0 = \frac{4}{3} \frac{P}{A} = \frac{4}{3} \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{16P}{3\pi d^2}$$

۴- گزینه «۳» چون در مقطع A-A در اثر انتقال نیروی P، لنگر خمشی و لنگر پیچشی وجود می‌آید، در نتیجه تنش ناشی از خمش و پیچش در این مقطع خواهیم داشت. اما از طرفی تنش برشی ناشی از نیروی برش نیز در این مقطع وجود دارد.

۵- گزینه «۳» در صورتی که سطحی دارای دو محور تقارن متعامد باشد، دارای مرکز تقارن بوده، از طرفی مرکز سطح و مرکز برش بر مرکز تقارن منطبق خواهند بود.

۶- گزینه «۴» در صورتی که مساحت‌های مقاطع برابر باشند تنش برشی ماکزیمم برای مقاطع مختلف برابر خواهد بود با:

$$\tau_{\max} \text{ مربع} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad ; \quad \tau_{\max} \text{ دایره} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} \quad ; \quad \tau_{\max} \text{ مثلث} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad ; \quad \tau_{\max} \text{ لوزی} \approx \frac{9}{8} \frac{V}{A}$$

(با مقایسه روابط زیر می‌توان نتیجه گرفت که مقطعی در برابر برش اقتصادی‌تر است که تحت اثر نیروی برشی یکسان V، کمترین تنش برشی را تولید کند. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.)

۷- گزینه «۱» در بین مقاطع مختلف، در مقاطع مثلث و لوزی حداکثر تنش برشی در روی تار خنثی ایجاد نمی‌شود.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A}$$

۸- گزینه «۳» حداکثر تنش برشی در یک تیر تحت بار عرضی با مقطع مستطیلی برابر است با:

نیروی برش ماکزیمم در تکیه‌گاه گیردار ایجاد شده و مقدار آن برابر نیروی تکیه‌گاهی است.

$$V_{\max} = A_y = \frac{1200 \times 300}{2} = 180000 \text{ kg} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3}{2} \times \frac{180000}{3 \times 6} = 15000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

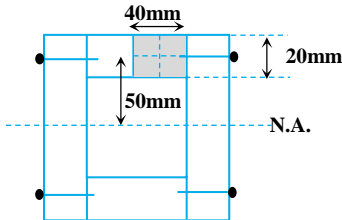
۹- گزینه «۱» مقطع جدار نازک بسته بوده پس مرکز برش در داخل مقطع واقع است. از طرفی نیروی برشی تحمل شده توسط جان مقطع با مساحت آن متناسب است. پس مقطع ضخیم‌تر سهم بیشتری از نیروی برشی را تحمل می‌کند و در نتیجه مرکز برش به جان ضخیم‌تر نزدیک‌تر می‌باشد.

۱۰- گزینه «۳» حداکثر تنش برشی در تیر در تکیه‌گاه A و بر روی تار خنثی ایجاد می‌شود.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \frac{A_y}{A} = \frac{3}{2} \frac{\frac{2}{6} \times 60000 \times 3}{3 \times 4} = 750 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

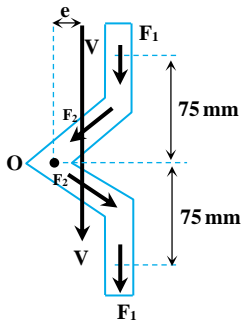
## پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۳» مرکز برش بر روی محور تقارن قرار گرفته است لذا گزینه صحیح (۱) یا (۳) می‌باشد، ولی اگر اجزاء مایل کوچکتر و کوچکتر شوند تا در نهایت مقدارشان مساوی صفر شود مقطع به یک ناودانی تبدیل می‌شود که در متن درس مرکز برش آن محاسبه شد. در این حالت نقطه  $a$  بر جان مقطع منطبق شده و تنها گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.



۲- گزینه «۱» اگر فاصله طولی بین میخ‌ها برابر  $X$  باشد، آنگاه نیروی وارد بر هر پیچ مساوی  $F = qX = \frac{VQ}{I} X$  می‌باشد. برای محاسبه  $Q$ ، از محور تقارن عمودی تا محل تماس الوارها توسط میخ، هاشور زده شده و ممان استاتیک آن محاسبه می‌شود.

$$F = \frac{VQ}{I} X \Rightarrow F = \frac{1200 \times (40 \times 20) \times 50}{\frac{1}{12} [120 \times 120^3 - 80 \times 80^3]} \times 30 = 103/8N$$



۳- گزینه «۴» چون نیروی برشی عمودی است، بنابراین جریان برش در مقطع جدار نازک تولید نیروهای برشی داخلی مطابق شکل می‌کند. با گشتاورگیری این نیروها حول نقطه  $O$  خواهیم داشت:

$$\sum M_O = 2F_1 \times 50 = Ve \Rightarrow e = \frac{100F_1}{V}$$

ضخامت جداره مقطع داده نشده است، اما اگر آن را مساوی  $1mm$  در نظر بگیریم می‌توان مسئله را حل نمود. اما طبق شکل زیر عرض (افقی) مقطع در بخش مایل برابر  $\sqrt{2}$  می‌باشد.

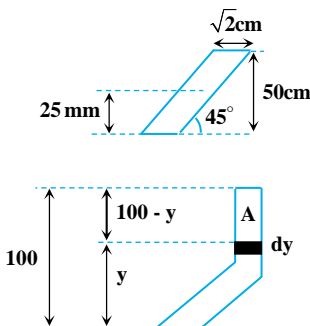
$$I = 2 \left( \frac{1}{12} \times 1 \times 50^3 + 50 \times 75^2 \right) + 2 \left( \frac{1}{12} \times \sqrt{2} \times 50^3 + 50 \times \sqrt{2} \times 25^2 \right) = 701184 mm^4$$

$$dF_1 = \tau dA = \frac{VQ}{It} \times t dy = \frac{VQ}{I} dy$$

$$Q = 1 \times (100 - y) \left( y + \frac{100 - y}{2} \right) = \frac{1}{2} (100^2 - y^2)$$

$$F_1 = \int_{50}^{100} \frac{V}{2I} (100^2 - y^2) dy = \frac{V}{2 \times 701184} [100^2 \times 50 - \frac{1}{3} (100^3 - 50^3)]$$

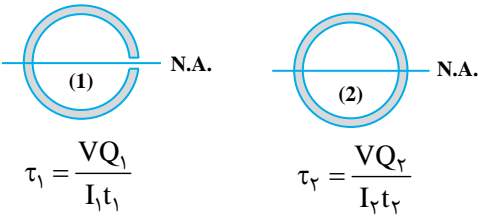
$$\Rightarrow e = \frac{100 \times V \times 208333}{2 \times 701184 \times V} = 14/8 mm$$



۴- گزینه «۴» در صورتی که  $I_i$  ممان اینرسی هر بخش از جداره مقطع حول تار خنثی و  $x_i$  فاصله مرکز سطح هر بخش از جداره تا یک نقطه مشخص باشد، (که در این مسئله جان تیر می‌باشد) آنگاه می‌توان موقعیت مرکز برش را توسط رابطه زیر تعیین نمود:

$$e = \frac{\sum I_i x_i}{\sum I_i} = \frac{2 \times \frac{a}{2} \left[ \frac{1}{12} at^3 + (at) \left( \frac{3}{2} a \right)^2 \right] + 2 \times \frac{a}{2} \left[ \frac{1}{12} at^3 + (at) \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right]}{\frac{1}{12} t(3a)^3 + 2 \left[ \frac{1}{12} at^3 + at \left( \frac{3}{2} a \right)^2 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} at^3 + at \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right]}$$

$$e = \frac{a \times \frac{9}{4} a^2 t + a \times \frac{a^2 t}{4}}{\frac{27a^3 t}{12} + 2 \times \frac{9}{4} a^2 t + 2 \times \frac{1}{4} a^2 t} = \frac{\frac{10}{4} a^3 t}{\frac{27 + 54 + 6}{12} a^2 t} = \frac{120}{348} a \Rightarrow e = 0/344a$$



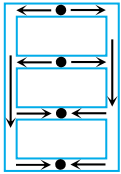
۵- گزینه «۲» تنش برشی در هر دو مقطع در روی تار خنثی ماکزیمم می‌شود. بنابراین ممان استاتیکی  $Q$ ، سطح بالای تار خنثی برای هر دو مقطع برابر است.

از طرفی گشتاور سطح دوم، یا ممان اینرسی نیز برای هر دو مقطع مساوی است. بنابراین می‌توان نوشت:  $Q_1 = Q_2$  ;  $I_1 = I_2$

اما عرض مقطع در روی تار خنثی در مقطع (۲) دو برابر مقطع (۱) است چون برای جدا کردن مقطع لوله بدون درز نیاز است که از دو طرف مقابل، مقطع

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t_2}{t_1} = 2$$

برش زده شود. این در حالی است که در مقطع جدار نازک درزدار تنها یک برش در سمت چپ کافی است. در نتیجه:



۶- گزینه «۳» در وسط اضلاع  $AB$  و  $CD$  و  $EF$  و  $GH$  تنش برشی مساوی صفر است. چرا که این نقاط واقع بر محور تقارن بوده و نیروی برشی نیز در راستای محور تقارن بر مقطع اعمال شده است.

۷- گزینه «۳» تار خنثی در مقطع تیر، جدا کننده ناحیه کششی و فشاری مقطع تیر است. بنابراین با فرض اینکه پایین تار خنثی، تحت فشار باشد، باید آن قسمت از مقطع را با ضریب  $n$  گسترش داد. بنابراین برای تعیین موقعیت تار خنثی باید ممان استاتیکی کل سطح، حول تار خنثی مساوی صفر قرار داده شود.

$$\frac{E_c}{E_t} = n$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 0 \Rightarrow \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = 0 \Rightarrow \frac{(h-x)b\left(\frac{h-x}{2}\right) + (x)(nb)\left(-\frac{x}{2}\right)}{A_1 + A_2} = 0 \Rightarrow (h-x)^2 = nx^2 \Rightarrow (h-x) = x\sqrt{n} \Rightarrow x = \frac{h}{1+\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{VQ}{It} \quad (t=b)$$

$$Q = A\bar{y} = b(h-x)\frac{(h-x)}{2}$$

$$I_1 = \frac{b(h-x)^3}{12} + b(h-x)\left(\frac{h-x}{2}\right)^2$$

حول محور خنثی

$$I_2 = \frac{nbx^3}{12} + nbx\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

حول محور خنثی

$$\Rightarrow I_{eq} = I_1 + I_2 = \frac{b(h-x)^3}{3} + \frac{nbx^3}{3}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{Vb\frac{(h-x)^2}{2}}{b\left(\frac{b(h-x)^3}{3} + \frac{nbx^3}{3}\right)} = \frac{3}{2} \frac{V}{b} \frac{(h-x)^2}{(h-x)^3 + nx^3} = \frac{3}{2} \frac{V}{b} \frac{nx^2}{nx^3\sqrt{n} + nx^3}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3}{2} \frac{V}{b} \left(\frac{1}{x\sqrt{n} + x}\right) = \frac{3}{2} \frac{V}{b} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{n} + 1}\right) = \frac{3}{2} \frac{V}{b} \left(\frac{1 + \sqrt{n}}{h}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{n} + 1}\right) \Rightarrow \tau = \frac{3}{2} \frac{V}{bh}$$

۸- گزینه «۴» اگر طول  $\alpha$  برابر شود،  $M$  نیز برابر می‌شود. چرا که  $M$  مقدار گشتاور خمشی ماکزیمم در تیر است که در تیر ساده با اعمال بار

متمرکز در وسط آن، مقدار لنگر خمشی ماکزیمم برابر  $\frac{PL}{4}$  می‌باشد. از طرفی اگر ابعاد مقطع  $\alpha$  برابر شود مدول مقطع  $\alpha^3$  برابر می‌شود. بنابراین:

$$\sigma_1 = \frac{M}{S} \rightarrow \sigma = \frac{\alpha M}{\alpha^3 S} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{M}{S} = \frac{1}{\alpha^2} \sigma_1$$

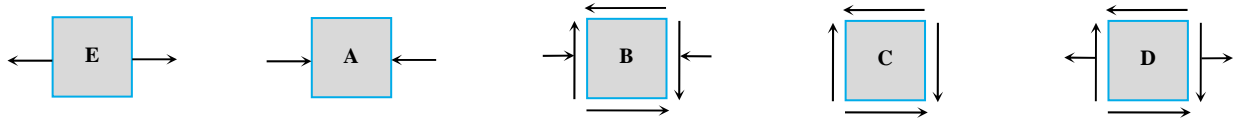
اما تنش برشی ماکزیمم برای مقطع مستطیل مساوی  $\frac{3}{2} \frac{V}{A}$  بوده بنابراین با  $\alpha$  برابر شدن تمامی ابعاد تیر می‌توان تغییرات تنش برشی را توسط رابطه

$$\tau_{max_1} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{\alpha^2 A} \Rightarrow \tau_{max_2} = \frac{1}{\alpha^2} \tau_{max_1}$$

روبرو به دست آورد:



۹- گزینه «۴» شکل صحیح بارگذاری روی المان‌ها به صورت زیر است، در المان B تنش‌ها به شکل صحیح رسم نشده است، چون در این المان تنش قائم در جهت y وجود ندارد. اما المان‌های A, E, تنش‌ها به صورت صحیح نمایش داده شده است چرا که اگر المان‌ها مطابق شکل صورت مسئله دوران کنند به همان نتیجه موجود خواهند رسید.



(در المان E تنها تنش قائم کششی وجود دارد)

(در المان A تنها تنش قائم فشاری وجود دارد)

(در المان B علاوه بر تنش برشی، قائم فشاری نیز وجود دارد)

(در المان C واقع بر روی تار خشی، تنش برشی ماکزیمم است)

(در المان D علاوه بر تنش قائم کششی، تنش برشی نیز وجود دارد)

۱۰- گزینه «۳» در مقطع (ناودانی) مرکز برش سمت چپ جان قرار دارد و از طرفی در مقطع داده شده در این تست دو صفحه به بالهای ناودانی جوش شده است این باعث می‌شود که مرکز برش به سمت جان تیر حرکت کند. ولی چون اندازه صفحات مساوی طول بال‌ها نیست، در نتیجه مرکز برش مقطع همچنان در طرف چپ جان قرار دارد.

## پاسخنامه آزمون (۳)

$$V_{\max} = A_y = \frac{qL}{2} ; M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$$

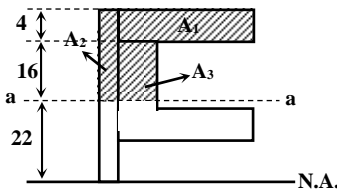
۱- گزینه «۴»

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \frac{qL}{2A} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{qL}{bh} \quad (1)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{MC}{I} = \frac{6M_{\max}}{Ah} = \frac{6}{Ah} \frac{qL^2}{8} = \frac{3}{4} \frac{qL^2}{bh^2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{L}{h} \Rightarrow L = h \times \frac{\sigma_w}{\tau_w}$$

۲- گزینه «۲»

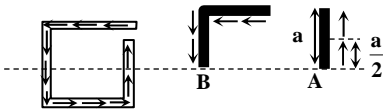


$$\tau = \frac{VQ}{It} = 0.01 \times \frac{2(24 \times 4 \times 40) + 20 \times 4 \times 32 + 16 \times 4 \times 20 \times 2}{4} \Rightarrow \tau = 35/2 \text{ MPa}$$

Q سطح بالای مقطع a-a حول تار خنثی با تفکیک سطح هاشور خورده به سه سطح قابل محاسبه است.

$$Q = 2A_1y_1 + A_2y_2 + 2A_3y_3$$

۳- گزینه «۲»

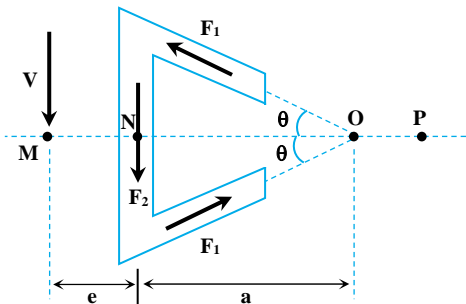


$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{-Q_A}{Q_B} = \frac{-(at)\frac{a}{2}}{(at)\frac{a}{2} + (at)a} = \frac{-1}{3}$$

بخاطر اینکه مقطع جدار نازک باز می‌باشد، جهت جریان برش در مقاطع A و B مخالف یکدیگرند.

۴- گزینه «۱» اگر گشتاور حول O گرفته شود گشتاور نیروهای  $F_1$  مساوی صفر خواهد شد.

طبق معادله تعادل می‌توان نوشت:



$$\sum F_y = (برش خارجی) V = (برآیند برش داخلی) F_2 - 2F_1 \sin \theta$$

$$\Rightarrow F_2 - V = 2F_1 \sin \theta \quad (1)$$

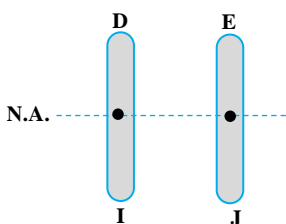
$$\sum M_O = F_2 \times a = V(a+e) \Rightarrow F_2 a - Va = Ve \Rightarrow (F_2 - V)a = Ve \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow e = \frac{2F_1 \sin \theta a}{V}$$

عبارت به دست آمده برای e از رابطه فوق، یک مقدار مثبت می‌باشد. به عبارت دیگر مرکز برش سمت چپ جان تیر قرار دارد.

۵- گزینه «۱» با توجه به پاسخ مثال (۱۹) فصل پنجم درس‌نامه (۲) فاصله مرکز برش از مرکز جان مقطع قوطی جدار نازک باز برابر است با:

$$e = \frac{b(2h + 3b)}{2h + 6b} \xrightarrow{h=b} e = \frac{\Delta h}{\lambda}$$



۶- گزینه «۳» در نقاط واقع بر سطح آزاد مقطع مانند A, J, I, H و نقطه وسط شاخه DE واقع بر محور تقارن، تنش برشی مساوی صفر است. همچنین تنش برشی در جایی صفر می‌شود که Q مساوی صفر باشد، در چنین موقعیتی

جریان برش نیز صفر خواهد شد. چون تار خنثی از وسط ارتفاع ( $\bar{y} = \frac{h}{2}$ ) می‌گذرد، بنابراین تنش برشی در نقاط E, D

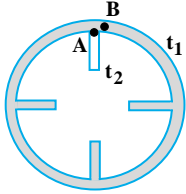
مساوی صفر می‌گردد. به عبارت دیگر برای محاسبه تنش برشی در نقاط E, D کافی است در این نقاط مقطع را برش زده سپس Q سطح جدا شده محاسبه شود. چون مرکز سطح جدا شده بر روی تار خنثی واقع است، بنابراین گشتاور اول

سطح آن صفر بوده و در نتیجه تنش برشی در این نقاط صفر است:  $\bar{y} = 0 \Rightarrow Q_D = Q_E = 0 \Rightarrow \tau_D = \tau_E = 0$

۷- گزینه «۴» بخشی از مقطع که وارد ناحیه پلاستیک شده است تنش برشی را نمی‌تواند تحمل کند، در نتیجه آن بخش از مقطع که هنوز در ناحیه

الاستیک است تنش برشی را متحمل می‌شود. از طرفی تنش برشی ماکزیم ناشی از نیروی برش در روی تار خنثی بوده و مساوی  $\frac{3}{2} \frac{V}{A}$  است، در نتیجه:

$$\tau_{\max} = 1/5 \frac{V}{A'} = 1/5 \frac{P}{0.75A} = \frac{2}{5} \frac{P}{A} \quad (A' \text{ مساحت بخش الاستیک بوده که مساوی } 0.75 \text{ از مساحت کل مقطع می‌باشد.})$$



۸- گزینه «۱» برای  $\tau_B$  باید زبانه‌ی بالا از دو قسمت برش بخورد تا جدا گردد، یا برش قائم در نقطه B و قرینه‌ی B نسبت به محور تقارن قائم بایستی برش بخورد بنابراین طول قسمت برش خورده برابر  $2t_1$  بوده

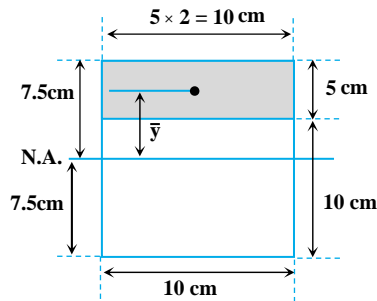
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{I(2t_1)}$$

و مقدار تنش برشی در مقطع B برابر است با:

اما برای  $\tau_A$ ، با یک برش افقی در A زبانه بالا جدا می‌شود و تنش برشی در نقطه A برابر است با  $\tau_A = \frac{VQ_A}{It_2}$  و با صرف نظر از جملات  $t_2$  در

$$\text{محاسبه‌ی } Q \text{ ها داریم: } Q_A = Q_B. \text{ در نتیجه: } \frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{2t_1}{t_2}$$

۹- گزینه «۱»



روش اول: چون جنس (۱) قوی‌تر می‌باشد، بنابراین سطح مقطع ماده (۱) به موازات تار خنثی با ضریب n افزایش می‌یابد. در این حالت مقطع گسترش یافته مانند یک مستطیل می‌شود که ممان اینرسی آن برابر است با:

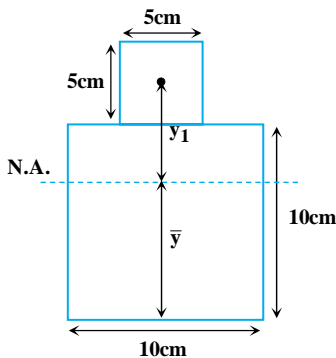
$$n = \frac{E_1}{E_2} = 2$$

$$I = \frac{1}{12} \times 10 \times 15^3 = 2812.5 \text{ cm}^4$$

سطح بالای فصل مشترک دو ماده را هاشور زده، سپس ممان استاتیک آن حول تار خنثی محاسبه می‌شود. در محاسبه تنش برشی در فصل مشترک دو ماده باید Q و I مربوط به سطح مقطع گسترش یافته محاسبه شود، در حالی که t بیانگر ضخامت واقعی قطعه در نقطه مورد نظر است.

$$Q = A\bar{y} = (5 \times 10)(7.5 - 2.5) = 250 \text{ cm}^3 \quad ; \quad \tau = \frac{VQ}{It} = \frac{6000 \times 250}{2812.5 \times 5} = 106.66 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

روش دوم:



$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i E_i}{\sum A_i E_i} = \frac{12.5 \times 5 \times (5 \times 5) \times E_1 + 5 \times (10 \times 10) \times E_2}{5 \times 5 \times E_1 + 10 \times 10 \times E_2}$$

$$E_1 = 2E_2$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{12.5 \times 5 \times 5 \times 2E_2 + 5 \times 10 \times 10 \times E_2}{5 \times 5 \times 2E_2 + 10 \times 10 \times E_2} = 7.5 \text{ cm}$$

اما تنش برشی در محل اتصال برابر می‌شود با:

$$\tau = \frac{VA_1 E_1 y_1}{t \sum E_i I_i} = \frac{6000 \times (5 \times 5) \times 2E_2 \times 5}{5 \times \left[ 2E_2 \times \left( \frac{1}{12} \times 5^4 + 5^2 \times 5^2 \right) + E_2 \left( \frac{1}{12} \times 10^4 + 10 \times 10 \times 2 \times 5^2 \right) \right]} \Rightarrow \tau = 106.66 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

۱۰- گزینه «۴»

$$\frac{\tau_{\max_1}}{\tau_{\max_2}} = \frac{\frac{VQ_1}{It_1}}{\frac{VQ_2}{It_2}} = \frac{Q_1/t_1}{Q_2/t_2} = \frac{(2at \times \frac{a}{2} + \frac{a}{2} t \times \frac{a}{2})/t}{(2at \times \frac{a}{2} + 2 \times \frac{a}{2} t \times \frac{a}{2})/2t} \Rightarrow \frac{\tau_{\max_1}}{\tau_{\max_2}} = 1/8$$