فصل دوم

«گروه‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر همراه با عمل‌دوتایی ارائه شده یک گروه نیست؟ (سراسری ۹۳)

۱) $A=\{a\in\mathbb{Q}\,|\,a>0\}$ همراه با عمل دوتایی $a*b=\frac{ab}{3}$

۲) $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^4=1\}$ همراه با ضرب اعداد مختلط

۳) $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z|\leq 1\}$ همراه با ضرب اعداد مختلط

۴) $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$ همراه با ضرب اعداد مختلط

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم $z_1=1$ و $z_2=\frac{1}{2}$. واضح است که $|z_1|\leq 1$ و $|z_2|\leq 1$. طبق محک زیرگروه برای اینکه A یک گروه باشد، باید بـه ازای هر $z_1,z_2\in A$، داشته باشیم $z_1z_2^{-1}\in A$، اما برای $z_1=1$ و $z_2=\frac{1}{2}$ می‌بینیم که:

$$|z_1z_2^{-1}|=|1\times(\frac{1}{2})^{-1}|=|1\times 2|=2\xrightarrow{2>1}2\notin A\Rightarrow$$ زیر گروه $\mathbb{C}$ نیست A

فصل سوم

«گروه‌های جایگشتی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ مرتبه‌ی جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۸ & ۶ & ۵ & ۷ & ۹ & ۴ \end{pmatrix}$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۱۰　　۴) ۲۰

۲ـ هر جایگشت زوج از گروه متقارن S_n را به صورت حاصل ضربی از کدام یک می‌توان نوشت؟ (سراسری ۸۳)

۱) دورهایی از طول ۳　　۲) دورهایی از طول ۲ یعنی ترانهش‌ها

۳) دورهایی از طول ۲ و ۳　　۴) هر سه مورد صحیح است.

۳ـ اگر گروه متناوب A_n دارای عضوی از مرتبه‌ی ۲۰ باشد، آن‌گاه حداقل مقدار n چند است؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۱۲　　۲) ۱۱　　۳) ۵　　۴) ۴

۴ـ فرض کنید $D_{۲۰۰} = < x, y \mid x^۲ = ۱ , y^{۱۰۰} = ۱, xyx^{-۱} = y^{-۱} >$ گروه دو وجهی از مرتبه ۲۰۰ باشد. در این صورت تعداد عناصر از مرتبـه‌ی ۲ برابر است با: (سراسری ۸۵)

۱) ۱　　۲) ۵۰　　۳) ۱۰۰　　۴) ۱۰۱

۵ـ تعداد جایگشت‌هایی از $S_۴$ که هیچ حرفی را ثابت نگه‌نمی‌دارند برابر است با: (سراسری ۸۷)

۱) ۶　　۲) ۹　　۳) ۱۱　　۴) ۱۲

۶ـ تعداد مزدوج‌های (۵ ۴)(۳ ۲ ۱) در گروه $S_۵$ برابر است با : (آزاد ۸۷)

۱) ۱۵　　۲) ۶　　۳) ۱۰　　۴) ۲۰

۷ـ اگر σ جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ \\ ۶ & ۱ & ۲ & ۵ & ۴ & ۹ & ۸ & ۷ & ۳ \end{pmatrix}$ باشد مرتبه‌ی $\sigma^{۱۰۰۰}$ چقدر است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۱۰۰۰

۸ـ تعداد جایگشت‌های $S_۷$ که حداقل شامل یک دور به طور ۳ باشند چند است؟ (سراسری ۸۹)

۱) ۱۲۴۰　　۲) ۳۵۰　　۳) ۱۶۸۰　　۴) ۸۴۰

۹ـ تعداد مزدوج‌های جایگشت (۵۳۲) (۱۲۴) در $S_۵$ برابر است با: (آزاد ۸۹)

۱) ۱۰۰　　۲) ۳۰　　۳) ۳۶　　۴) ۲۴

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ گزینه «۴» هر جایگشت در S_n، به‌صورت حاصل‌ضربی از جایگشت‌های جدا از هم است و مرتبه‌ی حاصل‌ضرب دورهای جدا از هم کوچکترین مضرب مشترک مرتبه‌های آنهاست. جایگشت بالا به‌صورت $(2\,9\,3\,7)\,(1\,4\,5\,6\,8)$ است و مرتبه‌ی جایگشت $(2\,9\,3\,7)$ چهار و مرتبه‌ی جایگشت $(1\,4\,5\,6\,8)$ پنج است بنابراین مرتبه جایگشت $(2\,9\,3\,7)\,(1\,4\,5\,6\,8)$، ۲۰ است.

۲ـ گزینه «۴» هر جایگشت را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی ار ترانهش‌ها نوشت. هر جایگشت زوج را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از ترانهش‌ها به تعداد زوج نوشت. حاصل‌ضرب هر دوترانهش را می‌توان به صورت دورهایی به طول ۳ نوشت مثلاً $(1\,2)(3\,4)=(1\,2\,3)(3\,1\,4)$.

۳ـ گزینه «۲» هر جایگشت در A_n به صورت حاصل‌ضرب دورهای مجزا تجزیه می‌شود و مرتبه‌ی چنین جایگشتی کوچکترین مضرب مشترک این دورهای مجزا می‌باشد لذا اگر $\sigma\in A_n$ و $o(\sigma)=20$ و $\sigma=\theta_1\cdots\theta_2$ باشد، آن‌گاه $[o(\theta_1),\cdots,o(\theta_m)]=20$

اگر θ_1 بزرگترین دور در این تجزیه باشد. آن‌گاه: $o(\theta_1)=20$ یا ۱۰ یا ۵

حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $o(\theta_1)=20\Rightarrow$ n باید حداقل ۲۰ باشد

۲) $o(\theta_1)=10\Rightarrow$ در تجزیه σ حداقل یک ۴- دور موجود است و لذا n حداقل باید ۱۴ باشد

۳) $o(\theta_1)=5\Rightarrow$ σ حداقل دارای یک ۴- دور است مثل θ_2. همچنین θ_1 یک ۵- دور است که در نتیجه $\theta_1\theta_2$ یک دور فرد است و چون σ باید فرد باشد یک دور فرد دیگر به طول حداقل ۲ باید موجود باشد که در نتیجه حداقل $n=11$ می‌شود.

۴ـ گزینه «۴» عناصر مرتبهٔ ۲ در D_{200} به صورت $\alpha^k\beta\,(0\le k\le 100)$ و α^{50} می‌باشند، در نتیجه تعداد این عناصر برابر ۱۰۱ است.

۵ـ گزینه «۲» جایگشت‌هایی از S_4 که هیچ حرفی را ثابت نگه نمی‌دارند عبارتند از دورهای ۴ تایی و حاصل‌ضرب دو دور دو تایی مجزا که عبارتند از:

$(1\,4)(2\,3)$ و $(1\,3)(2\,4)$ و $(1\,2)(3\,4)$ و $(1\,2\,4\,3)$ و $(1\,3\,2\,4)$ و $(1\,4\,3\,2)$ و $(1\,4\,2\,3)$ و $(1\,3\,4\,2)$ و $(1\,2\,3\,4)$

که تعداد جایگشت‌ها ۹ تا است.

۶ـ گزینه «۴» طبق قضیه‌ای دو جایگشت در S_n مزدوج یکدیگرند اگر و تنها اگر دارای ساختار دوری یکسانی باشند، بنابراین جایگشت β مزدوج جایگشت $(45)\,(123)$ خواهد بود، هرگاه ساختار دوری یکسانی با این جایگشت داشته باشد، یعنی β حاصل‌ضرب دو دور مجزا یکی به طول ۲ و دیگری به طول ۳ باشد یا به عبارتی به شکل $(a_1a_2)(b_1b_2b_3)$. اکنون باید تعداد این جایگشت‌ها را بیابیم. تعداد دورهای به طول ۲ در S_5 برابر است با $\frac{5(5-1)}{2}=10$. وقتی یک دور دوتایی (a_1a_2) را انتخاب کردیم، چون (a_1a_2) و $(b_1b_2b_3)$ از هم مجزا هستند، از مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5\}$ تنها ۳ عدد برای تعیین دور $(b_1b_2b_3)$ باقی می‌ماند که دو دور مجزا $(b_1b_3b_2)$ و $(b_1b_2b_3)$ را خواهیم داشت. در نتیجه تعداد حالات ممکن برای این جایگشت برابر است با $10\times 2=20$.

۷ـ گزینه «۲» جایگشت σ را می‌توانیم به صورت مقابل بنویسیم. $\sigma=(1\,3\,8)(2\,7)(4\,9\,6\,5)\Rightarrow o(\sigma)=12$

بنابراین داریم:

$$\sigma^{1000}=\sigma^{83\times12+4}=(\sigma^{12})^{83}\sigma^4=e\sigma^4=\sigma^4\Rightarrow o(\sigma^{1000})=o(\sigma^4)=\frac{o(\sigma)}{(4,o(\sigma))}=\frac{12}{(4,12)}=\frac{12}{4}=3$$

درنتیجه مرتبه‌ی σ، ۳ است.

۸ـ گزینه «۳» جایگشت‌های S_7 که حداقل شامل یک دوربه طول ۳ می‌باشند، به یکی از صورت‌های زیر هستند:

۱) دورهایی به طول ۳ به فرم $(a_1a_2a_3)$. تعداد این دورها برابر است با $\frac{1}{3}\frac{7!}{(7-3)!}=70$.

۲) دورهایی به صورت حاصل‌ضرب سه دور از هم جدا به طول ۲، ۲ و ۳ به فرم $(a_1a_2)(b_1b_2)(c_1c_2c_3)$. تعداد دورهایی به طول ۳ به فرم $(c_1c_2c_3)$ در S_7 برابر است با $\frac{1}{3}\frac{7!}{(7-3)!}=70$. وقتی دور $(c_1c_2c_3)$ را انتخاب می‌کنیم، چون دورها از هم مجزا هستند، از مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ تنها ۴ عدد

برای تعیین دور (b_1b_2) باقی می‌ماند، پس به تعداد $6=\frac{4(4-1)}{2}$ انتخاب خواهیم داشت. با انتخاب دو دور $(c_1c_2c_3)$ و (b_1b_2) دو عدد از مجموعهٔ فوق باقی می‌ماند که تنها یک حالت (a_1a_2) را نتیجه می‌دهد. چون دو دور $(a_1a_2)(b_1b_2)$ و $(b_1b_2)(a_1a_2)$ یکسان هستند و دو بار شمرده می‌شوند، تعداد کل حالات تقسیم بر ۲ می‌شود. بنابراین به تعداد $210=\frac{70\times6\times1}{2}$ انتخاب داریم.

۳) دورهایی به صورت حاصل‌ضرب دو دور از هم جدا به طول ۲ و ۳ به فرم $(a_1a_2)(b_1b_2b_3)$. به ترتیبی که در قسمت ۲ توضیح داده شد، به تعداد $70=\frac{7!}{(7-3)!}\cdot\frac{1}{3}$ انتخاب برای دور $(b_1b_2b_3)$ و $6=\frac{4(4-1)}{2}$ انتخاب برای دور (a_1a_2) داریم که در کل $70\times6=420$ انتخاب خواهیم داشت.

۴) دورهایی به صورت حاصل‌ضرب دو دور از هم جدا به طول ۳ و ۳ به فرم $(a_1a_2a_3)(b_1b_2b_3)$. تعداد حالات برای انتخاب دور $(a_1a_2a_3)$ برای $70=\frac{7!}{(7-3)!}\cdot\frac{1}{3}$ و برای دور $(b_1b_2b_3)$ برابر $8=\frac{4!}{(4-3)!}\frac{1}{3}$ می‌باشد، پس در کل تعداد انتخاب برای این حالت برابر $70\times8=560$ است.

۵) دورهایی به صورت حاصل‌ضرب دو دور از هم جدا به طول ۳ و ۴ به فرم $(a_1a_2a_3)(b_1b_2b_3b_4)$. تعداد انتخاب برای دور $(b_1b_2b_3b_4)$ برابر است با $210=\frac{7!}{(7-4)!}\frac{1}{4}$ و دو انتخاب به صورت $(a_1a_2a_3)$ و $(a_1a_3a_2)$ برای دور سه‌تایی داریم که در کل $2\times210=420$ انتخاب می‌شوند.

در نهایت تعداد جایگشت‌های S_7 که حداقل شامل یک دور به طول ۳ باشند، برابر است با:

$$70+210+420+560+420=1680$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۴» ابتدا جایگشت (۵۳۲) (۱۲۴) را به صورت حاصل‌ضرب دورهای از هم جدای آن می‌نویسیم داریم (۱۵۳۲۴) = (۵۳۲) (۱۲۴) ، می‌دانیم دو جایگشت با هم مزدوجند اگر نمایش آنها به صورت حاصل‌ضرب دورهای از هم جدا یکسان باشد. به طور مثال جایگشت‌های مزدوج (۱۵۳۲۴) تمام دورهای ۵ تایی در S_5 می‌باشند که تعدادشان $4!=24$ می‌باشند.

◆ ◆ ◆ ◆

فصل چهارم

«زیرگروه‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ فرض کنید G یک گروه و $x\in G$ عضوی از مرتبه ۳۰ باشد، در این صورت مرتبه زیرگروه $<x^4>$ برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۲ـ در گروه جمعی اعداد گویا $\mathbb{Q}$ زیرگروه تولید شده توسط زیر مجموعه‌ی $\left\{\frac{1}{10},\frac{1}{6}\right\}$ دارای کدام خاصیت است؟ (سراسری ۸۲)

۱) برابر زیرگروه تولید شده توسط $\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right\}$ است.
۲) دوری با مولد $\frac{1}{30}$ است.
۳) دوری با مولد $\frac{1}{60}$ است.
۴) برابر زیرگروه تولید شده توسط $\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\}$ است.

۳ـ اگر G یک گروه و $\frac{G}{Z(G)}$ دوری باشد، آن‌گاه .... (سراسری ۸۲)

۱) G گروهی غیر آبلی است.
۲) G گروهی دوری است.
۳) G گروهی آبلی است.
۴) G حاصل‌ضرب دو گروه دوری است.

۴ـ فرض کنید $\mathbb{Q}$ گروه جمعی اعداد گویا و $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح باشد. اگر $G=\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ گروه خارج قسمتی باشد، آن‌گاه: (سراسری ۸۲)

۱) G متناهی است.
۲) G دوری است.
۳) G گروهی نامتناهی است که در آن مرتبه برخی عناصر نامتناهی است.
۴) G گروهی نامتناهی است که در آن مرتبه هر عنصر متناهی است.

۵ـ فرض کنید H زیرگروهی از گروه G و $C_G(H)$ مرکزساز H و $N_G(H)$ نرمال‌ساز H در G باشد، در این صورت: (سراسری ۸۲)

۱) H آبلی است اگر و تنها اگر $H\le C_G(H)$
۲) H زیرگروه نرمال G است اگر و تنها اگر $H\le C_G(H)$
۳) H آبلی است اگر و تنها اگر $H\le N_G(H)$
۴) H زیرگروه نرمال G است. اگر و تنها اگر $H=N_G(H)$

۶ـ فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه از آن باشد. در این صورت $Ha=Hb$ اگر و تنها اگر .... (سراسری ۸۲)

۱) $ab\in H$ ۲) $ab^{-1}\in H$ ۳) $a^{-1}b\in H$ ۴) $b^{-1}a\in H$

۷ـ اگر $(R^*,\cdot)$ گروه ضربی اعداد حقیقی و H زیرگروهی از آن با اندیس n باشد در این صورت n برابر است با: (سراسری ۸۳)

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱، ۲ یا ۳ ۴) ۱،۲،۳ یا ۴

۸ـ فرض کنید D_8 گروه دو وجهی از مرتبه‌ی ۸ باشد، تعداد زیرگروه‌های سره D_8 برابر است ؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹ـ اگر $G=<x>$ گروه دوری مرتبه ۶۰ فرض شود و $H=<x^4>$ و $K=<x^5>$، آن‌گاه مرتبه‌ی $H\cap K$ برابر است با: (سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰ـ فرض کنیم G یک گروه، $Z(G)$ مرکز آن و H زیرگروهی از G باشد کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۸۴)

۱) $Z(G)\le Z(H)$ ۲) $Z(H)\le Z(G)$ ۳) $H\bigcap Z(G)\le Z(H)$ ۴) $Z(H)\bigcap G\le Z(G)$

۱۱ـ فرض کنید G گروهی ۱۲۰ عضوی بوده و $H<G$ و $|H|=24$. اگر وجود داشته باشد $a\in G-H$ به طوری که $Ha=aH$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۸۴)

۱) $H\trianglelefteq G$ ۲) H آبلی است. ۳) $H\le G'$ ۴) $z(H)\ne\{1\}$

۱۲ـ G یک گروه نا آبلی فرض می‌شود و $N \trianglelefteq G$. اگر N یک گروه دوری مرتبه‌ی ۵ و $\frac{G}{N}$ گروهی از مرتبه‌ی ۹ فرض شود، آن‌گاه مرتبه‌ی G' برابر است با: (سراسری ۸۴)

۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) ۳

۱۳ـ گروه ضربی ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌ها در میدان حقیقی $\mathbb{R}$ را با $GL_2(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. مرکزساز عضو $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ در $Gl_2(\mathbb{R})$ کدام مجموعه است؟ (سراسری ۸۴)

۱) $\left\{\begin{pmatrix} -2b & a \\ a & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}^* \right\}$ ۲) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}^* \right\}$ ۳) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}^* \right\}$ ۴) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}^* \right\}$

۱۴ـ اگر H و K دو زیرگروه از گروه n عضوی G باشند به قسمی که $|H| > \sqrt{n}$ و $|K| > \sqrt{n}$، آن‌گاه: (سراسری ۸۵)

۱) $|H \cap K| = n$ ۲) $H \cap K \neq \{e\}$ ۳) $|H \cap K| > \sqrt{n}$ ۴) $|H \cap K| = \sqrt{n}$

۱۵ـ اگر D_8 گروهی دو وجهی از مرتبه ۸ و S_3 گروه جایگشت‌ها از مرتبه ۶ باشد، آن‌گاه کدام یک از موارد زیر صحیح است؟ (سراسری ۸۵)

۱) D_8 دارای حداقل ۸ زیرگروه نا بدیهی است.
۲) تمام زیرگروه‌های سره D_8 است.
۳) تمام زیرگروه‌های S_3 در آن نرمال است.
۴) تمام زیرگروه‌های D_8 در آن نرمال است.

۱۶ـ اگر G یک گروه نرمال و $H \lneq G$ به طوری که $[G:H] < +\infty$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است. (سراسری ۸۵)

۱) H زیرگروه نرمال G است.
۲) زیرگروه نرمال N در G موجود است که $N \subseteq H$ و $[G:N] < \infty$
۳) $G' \leq H$
۴) زیرگروه نرمال N در G موجود است که $H \subsetneq N \subsetneq G$

۱۷ـ فرض کنید A و B دو زیرگروه از گروه G باشند به‌طوری‌که $[G:A] = m$ و $[G:B] = n$ و $(m,n) = 1$، در این صورت: (سراسری ۸۵)

۱) $AB \neq G$ ۲) $G = AB$ ۳) AB در G نرمال نیست. ۴) AB نمی‌تواند زیرگروه G باشد.

۱۸ـ فرض کنید G یک گروه است و $H \leq G$ و $a,b \in G$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۸۶)

۱) $aH = Hb \Rightarrow aH = Ha$
۲) $Ha = Hb \Rightarrow aH = bH$
۳) $Ha = Hb \Rightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1}$
۴) $aH = Ha \Rightarrow bH = Hb$

۱۹ـ همه موارد زیر صحیح‌اند به جزء: (سراسری ۸۶)

۱) گروه $\mathbb{Z}_6$ دارای ۳ مولد است.
۲) گروه $\mathbb{Z}$ دارای ۲ مولد است.
۳) گروه $\mathbb{Z}_p$ دارای $p-1$ مولد است. (p عدد اول است)
۴) هر گروه دوری نامتناهی با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

۲۰ـ اگر G گروهی دلخواه باشد، x عضوی از G و $H = \{g \in G | xg = gx\}$ آن‌گاه: (سراسری ۸۶)

۱) H زیرگروه است ولی لزوماً نرمال نیست.
۲) همردهای چپ و راست H با هم برابرند.
۳) H زیرگروه نرمال است.
۴) H زیرگروه نیست.

۲۱ـ اگر هر زیرگروه دوری از گروه G در G نرمال باشد، در این صورت: (سراسری ۸۶)

۱) G گروهی دوری است.
۲) G گروهی آبلی است.
۳) هر زیرگروه G در G نرمال است.
۴) هر زیرگروه نرمال G، دوری است.

۲۲ـ فرض کنید H زیرگروهی نرمال از گروه G باشد که برای هر $x,y \in G-H$ داشته باشیم $xy \in H$. در این صورت: (سراسری ۸۶)

۱) H آبلی است. ۲) $\frac{G}{H}$ دوری است. ۳) $\frac{G}{H}$ آبلی است. ۴) $\frac{G}{H}$ متناهی است.

۲۳ـ فرض کنید G گروهی غیرآبلی و متناهی و $Z(G)$ مرکز آن باشد. در این صورت مرتبه $\frac{G}{Z(G)}$: (سراسری ۸۶)

۱) برابر با ۱ است. ۲) برابر با ۲ است. ۳) برابر با ۳ است. ۴) بزرگتر یا مساوی با ۴ است.

۲۴ـ گروه S_5 چند زیرگروه از مرتبه‌ی ۲ دارد؟ (سراسری ۸۶)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۲۵ـ فرض کنید G گروهی متناهی باشد به‌طوری که در آن عکس قضیه لاگرانژ به ازای هر $d||G|$ برقرار است. در این صورت عکس قضیه لاگرانژ برای هر زیرگروه H از G: (سراسری ۸۶)

۱) برقرار نیست.

۲) برقرار است.

۳) اگر $|G|$ تنها دو عامل اول داشته باشد برقرار است.

۴) برقرار است به شرط آن‌که تنها اعداد اول عامل مرتبه G، اعداد ۲ و ۳ باشند.

۲۶ـ فرض کنید G گروهی آبلی است. کدام یک از مجموعه‌های زیر زیرگروه G نیست؟ (سراسری ۸۷)

۱) مجموعه تمام عناصر از مرتبه ۲
۲) مجموعه تمام عناصر از مرتبه‌ی متناهی
۳) $A=\{g^5 \mid g\in G\}$
۴) $B=\{g\in G \mid g^5=1\}$

۲۷ـ تعداد زیرگروه‌های یک گروه دوری از مرتبه‌ی ۳۰ برابر است با: (سراسری ۸۷)

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۵

۲۸ـ تعداد عناصر مرتبه‌ی ۲۴ در گروه دوری مرتبه‌ی ۱۲۰ چقدر است؟ (سراسری ۸۷)

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۲۴

۲۹ـ فرض کنید گروه متناهی G دارای دقیقاً یک زیرگروه ماکسیمال باشد، در این صورت گزینه صحیح کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۱) G آبلی است ولی ممکن است دوری نباشد.
۲) G دوری است.
۳) $[G:Z(G)]=2$
۴) مرتبه G عددی اول است.

۳۰ـ فرض می‌کنیم N یک زیرگروه نرمال G باشد کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (سراسری ۸۷)

۱) اگر N و $\frac{G}{N}$ با تولید متناهی باشند آن‌گاه G با تولید متناهی است.
۲) اگر N و $\frac{G}{N}$ دوری باشند آن‌گاه G دوری است.
۳) اگر $N\cap G'=1$ آن‌گاه $N\subseteq Z(G)$
۴) اگر $G'\subseteq N$ آن‌گاه $\frac{G}{N}$ آبلی است.

۳۱ـ کدام گزاره درست است؟ (G یک گروه و H و K زیرگروههای G هستند) (آزاد ۸۷)

۱) اگر $H\lhd K\lhd G$ دوری، آن‌گاه $H\lhd G$
۲) اگر $H\lhd K\lhd G$ و K دوری، آن‌گاه $H\lhd G$
۳) اگر $H\lhd K\lhd G$ ، آن‌گاه $H\lhd G$
۴) اگر $H\lhd K\lhd G$ آبلی، آن‌گاه $H\lhd G$

۳۲ـ فرض کنید G گروهی دوری از مرتبه ۲۰ باشد. مرتبه عنصر a^2 چه اعدادی می‌تواند باشد. (آزاد ۸۷)

۱) $1,5,10,20$
۲) $1,10,20$
۳) $1,2,5,10$
۴) $1,2,5,4,10,20$

۳۳ـ فرض کنید G گروه تولید شده توسط دو جایگشت (۶ ۵ ۴) و (۳ ۲ ۱) باشد. یعنی $G=<(123),(456)>$ در این‌صورت مرتبه‌ی گروه G عبارت است از: (آزاد ۸۷)

۱) ۹
۲) ۳
۳) ۱۲
۴) بی‌نهایت

۳۴ـ فرض کنیم $G=<x>$ یک گروه دوری از مرتبه n باشد و r و s دو عدد طبیعی باشند. شرط لازم و کافی برای آن‌که $<x^r>\subseteq<x^s>$ چیست؟ (سراسری ۸۸)

۱) $r|s$
۲) $s|r$
۳) $(s,n)|(r,n)$
۴) $(r,n)|(s,n)$

۳۵ـ اگر G یک گروه و $Z(G)$ مرکز آن و N زیرگروهی نرمال از G باشد، آن‌گاه: (سراسری ۸۸)

۱) $Z(N)\trianglelefteq G$
۲) $Z(G)\trianglelefteq Z(N)$
۳) $Z(N)\trianglelefteq Z(G)$
۴) $Z(\frac{G}{N})=\frac{Z(G)N}{N}$

۳۶ـ فرض کنید G یک گروه باشد و $G_1,\dots,G_n$ زیرگروه‌های آبلی G باشند به‌طوری که $G=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$. کدام گزاره صحیح است؟ (سراسری ۸۸)

۱) G گروهی آبلی است.
۲) $\bigcap_{i=1}^{n}G_i\subseteq Z(G)$
۳) به ازای هر $g\in G$ ، $g^n\in Z(G)$
۴) به ازای هر $1\le i\le n$ ، $G_i\trianglelefteq G$

۳۷ـ جایگشت $\varphi=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۶ & ۷ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های زوج در زیرگروه $<\varphi>$ چند است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۳۸ـ در کدام یک از خانواده‌های گروه‌های متناهی، عکس قضیه لاگرانژ عموماً برقرار نیست؟ (سراسری ۸۸)

۱) گروه‌های آبلی ۲) گروه‌های مرتبه ۸ ۳) گروه متقارن $S_۴$ ۴) گروه‌های مرتبه ۱۲

۳۹ـ هر گاه $G=<a>$ از مرتبه ۲۴ و $b\in G$ از مرتبه ۸ و $c\in G$ از مرتبه ۴ باشد، آن‌گاه مرتبه‌ی bc یعنی $o(bc)$ عبارت است از: (آزاد ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۲۴ ۳) ۸ ۴) ۳

۴۰ـ هر گاه N یک زیرگروه نرمال از گروه $G(N\lhd G)G$ و $\frac{G}{N}$ یک گروه آبلی باشد، آن‌گاه: (آزاد ۸۸)

۱) $G'\subseteq N$ که در آن G' زیرگروه مشتق G است
۲) $N\subseteq G'$ که در آن G' زیرگروه مشتق G است.
۳) $G'=\{e\}$ که در آن G' زیرگروه مشتق G است.
۴) $Z(G)$ زیرگروه N است.

۴۱ـ هر گاه H زیرگروه S_n و H دارای یک جایگشت فرد باشد، آن‌گاه: (آزاد ۸۸)

۱) $H\bigcap A_n=\{()\}$ ۲) $[H:H\bigcap A_n]=۲$ ۳) $[S_n:H]=۲$ ۴) $H=A_n$

۴۲ـ فرض کنید U_n مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح و مثبت کوچک‌تر از n و نسبت به n اول است. U_n تحت ضرب به پیمانه‌ی n تشکیل یک گروه می‌دهد. در این صورت کدام یک از گروه‌های زیر دوری نیست؟ (سراسری ۸۹)

۱) $U_۹$ ۲) $U_{۲۵}$ ۳) $U_{۲۰}$ ۴) $U_{۲۷}$

۴۳ـ فرض کنید G گروهی دلخواه و H زیرگروهی از G از مرتبه ۲ باشد. در این صورت: (سراسری ۸۹)

۱) $H\lhd G$ ۲) $C_G(H)=H$ ۳) $N_G(H)=H$ ۴) $C_G(H)=N_G(H)$

۴۴ـ فرض کنید G گروهی متناهی باشد و N تنها زیرگروه از مرتبه‌ی m در گروه G باشد. فرض کنید $(m,|G'|)=۱$، در این صورت کدام گزینه در مورد N نادرست است؟ (سراسری ۸۹)

۱) N آبلی است.
۲) $\forall g\in N: C_G(g)\subseteq N$
۳) $N\subseteq Z(G)$
۴) اگر $g\in N$، آن‌گاه کلاس تزویجی g در گروه G کاملاً در N قرار دارد.

۴۵ـ کدام گزینه در مورد گروه متناوب روی ۴ حرف یعنی $A_۴$، صحیح است؟ (سراسری ۸۹)

۱) تمام گروه‌های سره آن آبلی‌اند.
۲) تمام زیرگروه‌های سره و نرمال آن دوری‌اند.
۳) تمام اعضای مرتبه ۳ در این گروه با یکدیگر جابجا می‌شوند.
۴) هیچ زیرگروه نرمال محض غیر بدیهی ندارد.

۴۶ـ فرض کنید N زیرگروهی نرمال از گروه غیر آبلی G باشد به طوری که N یک گروه ساده است (یعنی N هیچ زیرگروه نرمال محض غیر بدیهی ندارد). در این صورت اگر $\frac{G}{N}$ آبلی باشد آن‌گاه: (سراسری ۸۹)

۱) $G'=N$ ۲) $G'\bigcap N=۱$ ۳) $Z(G)=N$ ۴) $Z(G)\bigcap N=۱$

۴۷ـ فرض کنید G گروهی از مرتبه ۲^n با دقیقاً n+1 زیرگروه باشد. در این‌صورت: (آزاد ۸۹)

۱) G گروهی از مرتبه ۸ است ۲) G دوری است ۳) چنین گروهی وجود ندارد. ۴) G گروهی ساده است.

۴۸ ـ فرض کنید G گروهی دوری از مرتبه ۳۰ باشد و $G=<a>$. اگر $H=<a^۸,a^{۱۲}>$ باشد، آن‌گاه: (آزاد ۸۹)

۱) $|H|=۱۰$ ۲) $|H|=۶$ ۳) $|H|=۱۵$ ۴) $|H|=|G|$

۴۹ـ فرض کنید G یک گروه متناهی و H و K زیرگروه‌های G باشند که G=HK. در این صورت: (آزاد ۸۹)

۱) $|H|\geq\sqrt{|G|}$ یا $|K|\geq\sqrt{|G|}$)
۲) H و K زیرگروه‌های نرمال G هستند.
۳) $H\bigcap K=\{e\}$
۴) H و K زیرگروه‌های نرمال G هستند که اشتراک آنها بدیهی است.

۵۰ـ تعداد عناصر مرتبه‌ی p^m در گروه دوری مرتبه‌ی p^n چند تاست؟ (p عدد اول است و $۰<m<n$). (سراسری ۹۰)

۱) p^{n-m} ۲) $p^n-p^{m-۱}$ ۳) p^n-p^m ۴) $p^m-p^{m-۱}$

۵۱ـ فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه G باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $Z(H) \lhd G$

۲) $H \cap Z(G) \lhd G$

۳) $Z(H) = H \cap Z(G)$

۴) $Z(H)$ زیرگروهی از $Z(G)$ است.

۵۲ـ فرض کنید G یک گروه است که $|G| = 140$ و N زیرگروه نرمالی از G باشد به طوری که $|N| = 14$. فرض کنید $g \in G$، $o(g) = 7$. در این صورت کدام گزاره صحیح است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $g \in N$

۲) $g \notin N$

۳) N دوری است.

۴) G عنصری از مرتبه ۵ ندارد.

۵۳ـ فرض کنید G گروهی دلخواه ۸۱ عضوی است و H زیرگروهی ۲۷ عضوی از G باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟ (دکتری ۹۱)

۱) $H' = 1$

۲) $Z(H) \neq 1$

۳) $H \lhd G$

۴) $G' \subseteq H$

۵۴ـ اگر $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، آن‌گاه برای هر $A, B \subseteq \mathbb{N}$ تعریف کنید $A * B = A \cap B$. در این صورت کدام گزینه در مورد $P(\mathbb{N})$، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ همواره با عامل $*$ صحیح است؟ (دکتری ۹۳)

۱) $P(\mathbb{N})$ نیم‌گروهی است که تکواره نیست.

۲) $P(\mathbb{N})$ تکواره است که گروه نیست.

۳) $P(\mathbb{N})$ گروه است.

۴) $P(\mathbb{N})$ دارای عنصری است که خود توان نیست.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ گزینه «۳» داریم:

$$o(x^{۴})=\frac{o(x)}{(۴,o(x))}=\frac{۳۰}{(۴,۳۰)}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

۲ـ گزینه «۲» با توجه به قضیه‌ای به ازای زیرمجموعهٔ H از گروه G داریم:

$$\langle H\rangle=\{x_۱^{n_۱}\cdots x_k^{n_k}\mid k\in\mathbb{N},\quad x_i\in H,\quad n_i\in\mathbb{Z}\}$$

بنابراین

$$<\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۱۰}>=\left\{\frac{m}{۶}+\frac{n}{۱۰}\middle|m,n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{۵m+۳x}{۳۰}\middle|m,n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{k}{۳۰}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}=<\frac{۱}{۳۰}>$$

۳ـ گزینه «۳» از آن‌جایی که $\frac{G}{Z(G)}$ دوری است، به ازای یک $xZ(G)\in\frac{G}{Z(G)}$ داریم $\langle xZ(G)\rangle=\frac{G}{Z(G)}$. اکنون فرض می‌کنیم $a,b\in G$، بنابراین اعداد صحیح m و n موجودند به طوری که:

$$\left.\begin{aligned}&aZ(G)=(xZ(G))^m=x^mZ(G)\Rightarrow x^{-m}a\in Z(G)\Rightarrow\exists y\in Z(G)\,;\,x^{-m}a=y\Rightarrow a=x^my\\&bZ(G)=(x(Z(G))^n=x^nZ(G)\Rightarrow x^{-n}b\in Z(G)\Rightarrow\exists z\in Z(G)\,;\,x^{-n}b=z\Rightarrow b=x^nz\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$ab=(x^my)(x^nz)=x^mx^nyz=x^{m+n}yz=x^nx^myz\overset{(I)}{=\!=}x^nx^mzy=x^nzx^my=ba\Rightarrow \text{آبلی است } G$$

(I) چون $y,z\in Z(G)$ این دو عضو با هم و با بقیه‌ی اعضای G جابجا می‌شوند.

۴ـ گزینه «۴» نشان می‌دهیم $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ متناهی مولد نیست، در نتیجه نه می‌تواند متناهی باشد نـه دوری. اگـر $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ متنـاهی مولـد باشـد و توسـط مجموعـه‌ی متناهی $\{a_۱+\mathbb{Z},\ldots,a_n+\mathbb{Z}\mid a_i\in Q,۱\le i\le n\}$ تولید شود، آن‌گاه هر عضو دلخواه $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ مثل $b+\mathbb{Z}$ ترکیب خطی از این عناصر می‌باشد، یعنی بـه ازای $۱\le i\le n$، اعداد m_i موجودند به طوری که:

$$b+\mathbb{Z}=m_۱(a_۱+\mathbb{Z})+\ldots+m_n(a_n+\mathbb{Z})=(m_۱a_۱+\ldots+m_na_n)+\mathbb{Z}\Rightarrow b-(m_۱a_۱+\ldots+m_na_n)\in\mathbb{Z}$$

چون $\mathbb{Z}=<۱>$، عددصحیح k موجود است به طوری که $b-(m_۱a_۱+\ldots+m_na_n)=k$ یا $b=m_۱a_۱+\ldots+m_na_n+k$ و این نشان مـی‌دهـد عضـو دلخواه $b\in\mathbb{Q}$، ترکیب خطی از $۱,a_۱,\ldots,a_n$ است، یعنی $\mathbb{Q}$ متناهی مولد است که این تناقض است، زیرا می‌دانیم $\mathbb{Q}$ متناهی مولد نیست. از طرفی داریم: $n(\frac{m}{n}+\mathbb{Z})=m+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$، بنابراین $o(\frac{m}{n}+\mathbb{Z})\mid n$، یعنی $\frac{m}{n}+\mathbb{Z}$ از مرتبه‌ی متناهی است. اگر $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ دوری باشد باید با گروه $\mathbb{Z}$ یکریخت باشد ولی در $\mathbb{Z}$ مرتبه هر عنصر ناصفر نامتناهی است، پس $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ دوری نیست.

۵ـ گزینه «۱» $C_G(H)=\{x\in G\mid xh=hx;\forall h\in H\}$. در این صورت اگر H آبلی باشد $H\le C_G(H)$. و اگر $H\le C_G(H)$ آن‌گاه بـرای هـر دو عنصر $h,h'\in H$ داریم، $h,h'\in C_G(H)$. بنابراین h و h' با هر عنصر H جابه‌جا می‌شوند پس $hh'=h'h$ یعنی H آبلی است.

H زیرگروه نرمال G است اگر و تنها اگر $G=N_G(H)$ بنابراین گزینه ۴ نادرست است.

۶ـ گزینه «۲»

$$Ha=Hb\Leftrightarrow H=Hab^{-۱}\Leftrightarrow ab^{-۱}\in H$$

۷ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم H زیرگروهی از $\mathbb{R}^*$ با شاخص n باشد، یعنی $\left[\mathbb{R}^*:H\right]=n$. چون $\mathbb{R}^*$ آبلی است، $H\trianglelefteq\mathbb{R}^*$، پس $\frac{\mathbb{R}^*}{H}$ یک گروه است و $o\left(\frac{\mathbb{R}^*}{H}\right)=\left[\mathbb{R}^*:H\right]=n$، بنابراین به ازای هر $rH\in\mathbb{R}^*H$ داریم $(rH)^n=r^nH=H$ در نتیجه $r^n\in H$، یعنی به ازای هر $r\in\mathbb{R}^*$ داریم $r^n\in H$. اگر r مثبت باشد، چون $\sqrt[n]{r}\in\mathbb{R}^*$ نتیجه می‌گیریم $r=\left(\sqrt[n]{r}\right)^n\in H$، پس $\mathbb{R}^+\subseteq H$. حال اگر r منفی باشد، آن‌گاه $-r$ عددی مثبت است، پس $-r\in H$، در نتیجه $-\frac{۱}{r}\in H$. از این‌رو $-۱=r\times\frac{-۱}{r}\in H$ و چون H زیرگروه $\mathbb{R}$ شامل $\mathbb{R}^+$ است، پس $H=\mathbb{R}^*$، پس H یا $\mathbb{R}^+$ است یا $\mathbb{R}^*$ و این یعنی $\left[\mathbb{R}^*:H\right]=۲$ یا $\left[\mathbb{R}^*:H\right]=۱$.

◆◆◆◆

۸ـ گزینه «۳» فرض کنید G گروه دو وجهی از مرتبه ۸ با مولدهای α و β به ترتیب با مرتبه‌های ۴ و ۲ باشد و $\beta\alpha=\alpha^{-۱}\beta$.
G دارای زیرگروه بدیهی $\{e\}$ است و زیرگروه‌های از مرتبه ۲ و ۴، $D_۸$ عبارتند از:

$$H_۱=\{e,\alpha^۲\}\quad H_۲=\{e,\beta\}\quad H_۳=\{e,\alpha\beta\}\quad H_۴=\{e,\alpha^۲\beta\}\quad H_۵=\{e,\alpha^۳\beta\}$$

$$G_۱=\{e,\alpha,\alpha^۲,\alpha^۳\}\quad G_۲=\{e,\alpha^۲,\beta,\alpha^۲\beta\}\quad G_۳=\{e,\alpha\beta,\alpha^۲,\alpha^۳\beta\}$$

◆◆◆◆

۹ـ گزینه «۲» $H\cap K$ زیرگروه تولید شده توسط $x^{[۴,۵]}=x^{۲۰}$ است و مرتبه‌ی $x^{۲۰}$ برابر است با $۳=\frac{۶۰}{۲۰}=\frac{۶۰}{(۶۰,۲۰)}=\frac{o(x)}{(o(x),۲۰)}$.

◆◆◆◆

۱۰ـ گزینه «۳» $Z(H)=\{h\in H \mid hh'=h'h,\ \forall h'\in H\}$، اگر $g\in Z(G)\cap H$ باشد آن‌گاه g با تمام عناصر H جابجا می‌شود و بنابراین $H\cap Z(G)\leq Z(H)$.

بررسی گزینه‌ی ۱: گروه چهارتایی کلاین $V_۴=\{e,a,b,c\}$ را در نظر می‌گیریم. چون گروه $V_۴$ آبلی است، داریم $Z(V_۴)=V_۴$. اگر زیرگروه $H=\{e,a\}$ را از گروه $V_۴$ در نظر بگیریم، می‌بینیم که $Z(H)=H$ بنابراین $Z(G)\not\leq Z(H)$، در نتیجه گزینه‌ی ۱ نادرست است.

بررسی گزینه‌ی ۲ و ۴: فرض می‌کنیم $G=S_۳$، در این صورت $Z(S_۳)=\{e\}$. اگر زیرگروه $H=\{e,(۱۲)\}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم $Z(H)=H$ بنابراین می‌بینیم که $H=Z(H)\not\leq Z(G)=\{e\}$ و $Z(H)\cap G=Z(H)\not\leq Z(G)=\{e\}$. بنابراین گزینه‌ی ۲ و ۴ نادرست است.

◆◆◆◆

۱۱ـ گزینه «۱» گروه دوری تولید شده توسط a را N می‌نامیم. در این صورت $HN=NH$ و بنابراین HN زیرگروهی از G است. چون H زیرگروه سره‌ای از HN است بنابراین $|HN|>۲۴$ و $|HN|\,|\,۲۴$ و $|HN|\,|\,۱۲۰$. بنابراین $|HN|=۱۲۰$ یا به عبارتی $HN=G$.
حال برای هر $g\in G$ عناصر n و h وجود دارند که $h\in H$ و $n\in N$ و داریم: $g=hn$ و $Hg=Hhn=Hn=nH$ و $gH=hnH=hHn=Hn$، بنابراین برای هر $g\in G$ داریم $Hg=gH$، از این رو $H\trianglelefteq G$. (هر عضو N به صورت توانی است از a است پس $Hn=nH$)

◆◆◆◆

۱۲ـ گزینه «۳» هر گروه از مرتبه‌ی $p^۲$، که p عدد اول است آبلی است. $\frac{G}{N}$ گروهی از مرتبه ۹ است، بنابراین آبلی است. می‌دانیم اگر $N\trianglelefteq G$ آن‌گاه $\frac{G}{N}$ آبلی است اگر و تنها اگر $G'\leq N$. بنابراین G' زیرگروهی از N است. پس $|G'|\,\big|\,|N|=۵$، در نتیجه $|G'|=۱$ یا $|G'|=۵$. اگر $|G'|=۱$ آن‌گاه G آبلی است و خلاف فرض است. پس $|G'|=۵$.

◆◆◆◆

۱۳ـ گزینه «۴» می‌دانیم $C_G^{(x)}=\{g\in G; gx=xg\}$، بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix}a+۲b & b-a\\ c+۲d & d-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ ۲a+c & ۲b+d\end{pmatrix}$$

مشخص است که باید داشته باشیم $a=d$ و $۲b=-c$.

۱۴ـ گزینه «۲» طبق قضیه‌ای داریم:

$$|G|=n=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}\geq\frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{|H\cap K|}=\frac{n}{|H\cap K|}\Rightarrow|H\cap K|>1\Rightarrow H\cap K\neq\{e\}.$$

۱۵ـ گزینه «۱» گروه D_8 توسط دو عنصر α و β تولید می‌شود که $\alpha^4=1$ و $\beta^2=1$ و $\beta\alpha=\alpha^{-1}\beta$. در این صورت:

$D_8=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\alpha\beta,\alpha^2\beta,\alpha^3\beta\}$ و زیرگروه‌های نابدیهی D_8 عبارتند از:

$$\{e,\beta\},\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\},\{e,\alpha^2\},\{e,\alpha\beta\},\{e,\alpha^2\beta\},\{e,\alpha^3\beta\},\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^2\beta\},\{e,\alpha^2,\alpha\beta,\alpha^3\beta\}$$

زیرگروه $\{e,\alpha^2,\beta,\alpha^2\beta\}$ از D_8 دوری نیست و زیرگروه $\{e,\alpha\beta\}$ در D_8 نرمال نیست.

اگر زیرگروه $\{e,(12)\}=<(12)>$ در S_3 نرمال باشد چون این زیرگروه دو عضوی است، برای هر عضو $g\in S_3$، $g^{-1}(12)g=(12)$ و این یعنی (12) در مرکز S_3 است ولی مرکز S_3 زیرگروه همانی است.

۱۶ـ گزینه «۲» همان‌طور که می‌دانیم $H_G=\bigcap\limits_{g\in G}g^{-1}Hg$ هستهٔ زیرگروه H از G نامیده می‌شود. نشان دادیم که H_G بزرگترین زیرگروه نرمال G می‌باشد که مشمول در H است. حال نشان می‌دهیم $[G:H_G]<\infty$. از آن‌جایی که $[G:H]<\infty$ داریم:

$$\exists g_1,\dots,g_nG;\frac{G}{H}=\{Hg_1,\dots,Hg_n\}\Rightarrow H_G=\bigcap_{g\in G}g^{-1}Hg=\bigcap_{i=1}^{n}g_i^{-1}Hg_i$$

از طرفی به ازای $k=1,\dots,n$ مجموعهٔ هم دسته‌های راست $g_k^{-1}Hg_k$ برابر است با:

$$\left\{(g_k^{-1}Hg_k)x,\ x\in G\right\}=\left\{g_k^{-1}(Hg_kx),\ x\in g\right\}=\left\{g_k^{-1}Hg_i,\ i=1,\dots,n\right\}$$

بنابراین شاخص $g_k^{-1}Hg_i$ در G متناهی است، اما در قضیه‌ای ثابت کردیم که به ازای دو زیرگروه H و K از G با شرط $[G:H]<\infty$ و $[G:K]<\infty$ داریم $[G:H\cap K]<\infty$، بنابراین $[G:H_G]=\left[G:\cap g_k^{-1}Hg_i\right]<\infty$.

گزینه‌های دیگر نادرست می‌باشند، زیرا اگر زیرگروه $H=<(12)>$ از گروه S_3 را درنظر بگیریم، داریم $[G:H]<\infty$. H در G نرمال نیست، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. همچنین $G'=<(123)>$، پس $G'\not\leq H$ و گزینهٔ (۳) هم رد می‌شود. از طرفی G هیچ زیرگروه نرمالی مانند N ندارد که $H\subset N\subset G$، پس گزنهٔ (۴) هم نادرست است.

۱۷ـ گزینه «۲» اگر H و K دو زیرگروه G با اندیس متناهی باشند آن‌گاه $[G:H\cap K]\leq[G:K][G:H]$ و $G=HK$ اگر و تنها اگر $[G:K][G:H]=[G:H\cap K]$ داریم:

$$[G:A\cap B]\leq[G:A][G:B]=mn\qquad(1)$$

$$[G:A\cap B]=\underbrace{[G:A]}_{m}[A:A\cap B],\ [G:A\cap B]=\underbrace{[G:B]}_{n}[B:A\cap B]\ \Rightarrow m\,|\,[G:A\cap B],n\,|\,[G:A\cap B]$$

و از آنجایی‌که $(m,n)=1$ داریم:

$$mn\,|\,[G:A\cap B]\Rightarrow mn\leq[G:A\cap B]\xrightarrow{(1)}[G:A\cap B]=mn=[G:A][G:B]\Rightarrow G=AB$$

۱۸ـ گزینه «۱» طبق فرض داریم:

$$aH=Hb\Rightarrow aHb^{-1}=H\Rightarrow\left\{ahb^{-1}\,|\,h\in H\right\}=H\overset{e\in H}{\Rightarrow}\left\{aeb^{-1}\,|\,e\in H\right\}=H\Rightarrow ab^{-1}\in H\in H\Rightarrow ba^{-1}\in H\Rightarrow \underset{aH}{Hb}=Ha$$

$$\Rightarrow(ab^{-1})^{-1}\Rightarrow aH=Ha$$

بقیهٔ گزینه‌ها نادرست است، زیرا همان‌طور که در یکی از مثال‌های این فصل دیدیم، برای زیرگروه $H=\{e,(13)\}$ از گروه S_3 داریم $H(12)=H(132)=\{(12),(132)\}$ اما $(132)H=\{(23),(132)\}\neq(12)H=\{(12),(123)\}$. پس گزینهٔ (۲) نادرست است. همچنین $H(23)=H(123)=\{(23),(123)\}$ و از آن‌جایی که $(23)^{-1}=(23)$ و $(123)^{-1}=(132)$، داریم $h(23)^{-1}=h(23)=\{(23),(123)\}$ در حالی‌که $H(123)^{-1}=H(132)=\{(12),(132)\}$. از این رو گزینهٔ (۳) هم نادرست است. اکنون می‌بینیم که $(13)H=H(13)=H$ اما $H(23)=\{(23),(123)\}\neq(23)H=\{(23),(132)\}$، در نتیجه گزینهٔ (۴) هم درست نیست.

۱۹ـ گزینه «۱» در گروه دوری $G=\langle a\rangle$ از مرتبه n، a^d مولد G است اگر و تنها اگر $(d,n)=1$. بنابراین $\mathbb{Z}_6$ تنها دارای دو مولد $\bar{1}, \bar{5}$ می‌باشد و بنابراین گزینه ۱ درست است.

هر گروه دوری متناهی با $\mathbb{Z}_n$ و هرگروه دوری نامتناهی با $\mathbb{Z}$ یکریخت است و $\mathbb{Z}$ دارای مولدهای ۱ و ۱- می‌باشد. همچنین $\mathbb{Z}_p$ با توجه به نکته گفته شده در بالا دارای $p-1$ مولد است.

۲۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. اگر g_1 و $g_2 \in H$ باشند داریم

$$x(g_1g_2)=(xg_1)g_2=(g_1x)g_2=g_1(xg_2)=g_1(g_2x)=(g_1g_2)x$$

بنابراین $g_1g_2\in H$ همچنین برای هر $g\in H$، $g^{-1}\in H$، پس H زیرگروه G است. اگر S_3 گروه متقارن باشد و $x=(1\ 2)$ آن‌گاه $H=\{1,(1,2)\}$ واضح است که $(2\ 3)H\neq H(2\ 3)$. بنابراین گزینه‌های ۱و۲ درست نمی‌باشد.

۲۱ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم N زیرگروه دلخواهی از G باشد. در این صورت برای هر $n\in N$ و $g\in G$، چون $<n>$ زیرگروه نرمال G است داریم $g^{-1}ng\in <n>$، بنابراین $g^{-1}ng\in N$ یعنی N زیرگروه نرمال G است.

$\mathbb{R}$ گروه آبلی است که گروه دوری نیست و هر زیرگروه آن نرمال است و زیرگروه نرمال $\mathbb{Q}$ را دارد که دوری نیست. لذا گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست می‌باشند. زیرگروه‌های گروه Q_8 در آن نرمالند در حالی‌که Q_8 آبلی نیست. بنابراین گزینه ۲ هم نادرست است.

۲۲ـ گزینه «۲و۳و۴» به ازای هر $x\in G-H$ داریم $x^{-1}\in G-H$، زیرا اگر $x^{-1}\notin G-H$ آن‌گاه $x^{-1}\in H$، بنابراین از آن‌جایی که $H\leq G$ داریم $x=(x^{-1})^{-1}\in H$، که این با انتخاب x به عنوان عضوی از G-H در تناقض است. در نتیجه به ازای هر $x,y\in G-H$ داریم $xy^{-1}\in H$ و این نتیجه می‌دهد $Hx=Hy$، بنابراین $\frac{G}{H}$ تنها دو عضو دارد یکی H و دیگری Hx (به ازای $x\in G-H$).

۲۳ـ گزینه «۴» در صورتی‌که مرتبه $\frac{G}{Z(G)}$، ۱، ۲ و ۳ باشد، $\frac{G}{Z(G)}$ دوری است و بنابراین G گروهی آبلی می‌شود. که در تناقض با فرض غیر آبلی بودن G است.

۲۴ـ گزینه «۳» طبق قضیه‌ای تعداد دورهای به طول ۲ در S_5 برابر است با $\frac{5(5-1)}{2}=10$، اما S_5 اعضای دیگری هم به طول ۲ دارد به شکل (ab)(cd) که این اعضا عبارتند از:

(۱۲)(۳۴), (۱۲)(۳۵), (۱۲)(۴۵), (۱۳)(۲۵), (۱۳)(۴۵), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۳۵), (۱۴)(۳۵), (۱۴)(۲۳), (۱۵)(۲۳), (۱۵)(۲۴), (۱۵)(۳۴),
(۲۳)(۴۵), (۲۴)(۳۵), (۲۵)(۳۴)

بنابراین S_5 دارای ۲۵ زیرگروه از مرتبهٔ ۵ می‌باشد، راه حل دیگری برای بدست آوردن تعداد دورهای به شکل (ab)(cd) وجود دارد. به این صورت که تعداد حالت انتخاب دور (ab) برابر است با $\frac{5(5-1)}{2}=10$. چون دو دور (ab) و (cd) مجزا هستند، وقتی (ab) را انتخاب می‌کنیم از بین اعداد $\{1,2,3,4,5\}$ تنها ۳ انتخاب باقی می‌ماند، پس به تعداد $\frac{3(3-1)}{2}=3$ انتخاب برای حالت (cd) داریم، بنابراین در کل $3\times10=30$ انتخاب برای (ab)(cd) خواهیم داشت. چون دو دور (ab) (cd) و (cd) (ab) یکسان هستند و دو بار شمرده می‌شوند، تعداد کل حالات تقسیم بر ۲ می‌شوند، بنابراین به تعداد $\frac{30}{2}$ انتخاب داریم.

۲۵ـ گزینه «۱» برای رد این گزینه مثال نقض داریم. همان‌طور که می‌دانیم $o(S_4)=24$ و مقسوم علیه‌های ۲۴ اعداد ۲، ۳، ۴، ۶، ۸ و ۱۲ می‌باشند. S_4 دارای اعضایی از مرتبهٔ ۲، ۳ و ۴ به صورت (ab)، (abc) و (abcd) می‌باشد، پس زیرگروههایی از مرتبهٔ ۲، ۳ و ۴ دارد. همچنین A_4, D_8, S_3 زیرگروه‌هایی از S_4 به ترتیب از مرتبه‌های ۶، ۸ و ۱۲ می‌باشند، پس می‌بینیم که به ازای هر مقسوم‌علیه d از ۲۴، S_4 زیرگروهی از مرتبهٔ d دارد، از این‌رو عکس قضیه لاگرانژ برای S_4 برقرار است، اما برای زیرگروه A_4 برقرار نیست زیرا همان طور که در یک مثال نشان دادیم، A_4 از مرتبهٔ ۶ زیرگروه ندارد.

۲۶ـ گزینه «۱» طبق تعریف، هر زیرگروه باید عضو همانی داشته باشد، هم‌چنین مرتبهٔ عضو همانی یک می‌باشد. از آن‌جایی که مجموعهٔ تمام عناصر از مرتبهٔ ۲ شامل عضو همانی نیست، نمی‌تواند یک گروه باشد. گزینهٔ (۲) زیرگروه G می‌باشد، زیرا اگر فرض کنیم H زیرمجموعهٔ تمام عناصر از مرتبهٔ متناهی باشد و $x,y\in H$، از آن‌جایی که $o(x)=o(x^{-1})$ و G آبلی است xy^{-1} از مرتبهٔ متناهی است، یعنی $xy^{-1}\in H$، سپس $H\le G$. گزینهٔ (۳) هم زیرگروه G است، زیرا به ازای هر $x,y\in G$ داریم $xy\in G$، پس $(xy)^{۵}\in A$. گزینهٔ (۴) هم زیرگروه G است، چون می‌بینیم که به ازای $x,y\in G$ به طوری که $x^{۵}=۱$ و $y^{۵}=۱$، از آبلی بودن G نتیجه می‌شود $(xy)^{۵}=x^{۵}y^{۵}=۱\times۱=۱$ یعنی $xy\in B$ و $B\le G$.

۲۷ـ گزینه «۳» مقسوم‌علیه‌های ۳۰ برابرند با ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵ و ۳۰. طبق قضیه‌ای به ازای هر مقسوم‌علیه m از ۳۰، گروه دوری از مرتبهٔ ۳۰ دارای یک زیرگروه منحصربه‌فرد از مرتبهٔ m می‌باشد، پس گروه دوری از مرتبهٔ ۳۰ دارای ۸ زیرگروه است.

۲۸ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم G گروهی دوری از مرتبهٔ ۱۲۰ با مولد a باشد، بنابراین $o(<a>)=o(G)$ و هر عضو a به صورت a^k می‌باشد. اگر $o(a^k)=۲۴$، آن‌گاه

$$۲۴=o(a^k)=\frac{o(a)}{(k,o(a))}=\frac{۱۲۰}{(k,۱۲۰)}\Rightarrow (k,۱۲۰)=۵$$

پس k می‌تواند یکی از اعداد ۵، ۲۵، ۳۵، ۵۵، ۶۵، ۸۵، ۹۵ یا ۱۱۵ باشد.

۲۹ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم M زیرگروه ماکسیمال یکتا G باشد. اگر $g\in G-M$، آن‌گاه $<g>$ زیرگروهی از G است که درون M نمی‌باشد و بنابر یکتا بودن M داریم $<g>=G$.

۳۰ـ گزینه «۲» می‌دانیم $A=\langle(۱\,۲\,۳)\rangle$ زیرگروه دوری $S_۳$ است و $\frac{S_۳}{A_۳}$ گروهی ۲ عضوی است، پس دوری می‌باشد در صورتی‌که $S_۳$ دوری نیست.

بررسی گزینه‌ی ۱: فرض می‌کنیم N توسط $g_۱,\cdots,g_n$ و $\frac{G}{N}$ توسط $g_{n+۱}N,\cdots,g_mN$ تولید شود، برای هر عضو G مانند g داریم $gN\in\frac{G}{N}$ بنابراین $gN=(g_{n+۱}N)^{s_{n+۱}}\cdots(g_mN)^{s_m}=(g_{n+۱}^{s_{n+۱}}\cdots g_m^{s_m})N$. از این‌رو به ازای یک $h\in N$، $g=g_{n+۱}^{s_{n+۱}}\cdots g_m^{s_m}\cdot h$. چون عناصر N توسط $g_۱,\cdots,g_n$ تولید می‌شود، داریم $h=g_۱^{s_۱}\ldots g_n^{s_n}$، بنابراین:
$g=g_{n+۱}^{s_{n+۱}}\cdots g_m^{s_m}\cdot g_۱^{s_۱}\cdots g_n^{s_n}$

در نتیجه هر عضو G توسط $g_۱,\ldots,g_n,\ldots,g_m$ تولید می‌شود. یعنی G با تولید متناهی است.

بررسی گزینه‌ی ۳: فرض می‌کنیم $N\cap G'=۱$. چون $N\trianglelefteq G$، به ازای هر $g\in N$ و $h\in G$ داریم $g^{-۱}h^{-۱}gh\in N$، بنابراین $g^{-۱}h^{-۱}gh\in N\cap G'$. چون $N\cap G'=۱$ داریم $g^{-۱}h^{-۱}gh=۱\Rightarrow gh=hg$، از این‌رو $g\in Z(G)$، در نتیجه $N\subseteq Z(G)$.

بررسی گزینه‌ی ۴: اگر $G'\subseteq N$، آن‌گاه برای هر دو عضو $\frac{G}{N}$ مانند gN و hN داریم:

$$g^{-۱}h^{-۱}gh\in G'\subseteq N\Rightarrow ghN=hgN\Rightarrow gNhN=hNgN\Rightarrow \text{آبلی است } \frac{G}{N}$$

۳۱ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم $K=<a>$، $b\in H$ و $g\in G$. در این صورت $b=a^k$ و $g^{-۱}bg=g^{-۱}a^kg=(g^{-۱}ag)(g^{-۱}ag)\ldots(g^{-۱}ag)$. از طرفی K در G نرمال است، بنابراین $g^{-۱}ag\in K$ پس به ازای یک n داریم $g^{-۱}ag=a^n$ و در نتیجه $g^{-۱}bg=(a^n)^k=(a^k)^n=b^n\in H$، یعنی $g^{-۱}bg\in H$ و H در G نرمال است.

در گروه $D_۸$ که توسط دو عنصر α و β که $\beta^۲=۱$، $\alpha^۴=۱$ و $\beta\alpha=\alpha^{-۱}\beta$ تولید می‌شود، زیرگروه $K=\langle ۱,\alpha^۲,\alpha,\beta,\alpha^۳\beta\rangle$ در $D_۸$ از اندیس ۲ است، بنابراین نرمال است. $H=<۱,\alpha^۲>$ زیرگروه نرمال از K است ولی H در $D_۸$ نرمال نیست. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ درست نمی‌باشند.

۳۲ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم $G=<b>$ گروهی دوری از مرتبه ۲۰ باشد و $a\in G$. در این صورت عدد طبیعی $۱\le k\le ۲۰$ وجود دارد که $a=b^k$، بنابراین $a^۲=b^{۲k}$. در نتیجه $o(a^۲)=o(b^{۲k})=\frac{۲۰}{(۲۰,۲k)}=\frac{۱۰}{(۱۰,k)}$. بنا به انتخاب k، $(۱۰,k)$ می‌تواند اعداد ۱، ۲، ۵ و ۱۰ باشد بنابراین $o(a^۲)$ می‌تواند اعداد ۱۰ و ۵ و ۲ و ۱ باشد.

۳۳ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم $H=<(۱۲۳)>$ و $K=<(۴۵۶)>$. در این صورت با توجه به این که دورهای از هم جدا با هم جابه‌جا می‌شوند داریم $HK=KH$ و در نتیجه $G=HK$. از آن‌جایی که $H\bigcap K=\{۱\}$، داریم $|G|=|HK|=\frac{|H||K|}{|H\bigcap K|}=۹$.

۳۳ـ گزینه «۳» داریم:

$$<x^r>\subseteq<x^s>\ \Leftrightarrow x^r=x^{sd}\ \Leftrightarrow r-sd\overset{n}{\equiv}۰\ \ \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,;r=sd+nk$$

می‌دانیم (s,n) هر ترکیب خطی از s و n را عاد می‌کند، (نظریه اعداد مقدماتی) بنابراین اگر $r=sd+nk$ آن‌گاه $(s,n)|r$. از طرف دیگر $(s,n)|n$ بنابراین $(s,n)|(r,n)$. برعکس اگر $(s,n)|(r,n)$ آن‌گاه $(s,n)|r$. می‌دانیم عناصر q,p در $\mathbb{Z}$ یافت می‌شوند که نسبت به هم اولند و $ps+qn=(s,n)$. همچنین می‌دانیم k ای در $\mathbb{Z}$ هست که $(s,n)k=r$، بنابراین داریم:

$$r=kps+kqn\Rightarrow r-kps=kqn\ \Rightarrow r-kps\overset{n}{\equiv}۰\Rightarrow x^r=x^{kps}\ \Rightarrow x^r\in\langle x^s\rangle\Rightarrow\langle x^r\rangle\subseteq\langle x^s\rangle$$

۳۴ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم $x\in Z(N)$ در این صورت برای هر $g\in G$، چون N زیرگروهی نرمال از G است داریم $g^{-۱}xg\in N$. ثابت می‌کنیم $g^{-۱}xg\in Z(N)$. فرض می‌کنیم $a\in N$ داریم:

$$g^{-۱}xga=g^{-۱}x\underbrace{gag^{-۱}}_{\in N}g=g^{-۱}gag^{-۱}xg=ag^{-۱}xg\ \Rightarrow g^{-۱}xg\in Z(N)$$

۳۵ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم $x\in\bigcap_{i=۱}^{n}G_i$، در آن صورت اگر $g\in G$ آن‌گاه i ای هست که $g\in G_i$، چون $x\in G_i$ بنابراین $xg=gx$ زیرا G_i گروه آبلی است.

۳۶ـ گزینه «۲» $\varphi=(۱\ ۲)(۳\ ۴\ ۶\ ۵\ ۷)$، بنابراین مرتبه φ، ۱۰ می‌باشد. φ جایگشتی فرد است. بنابراین جایگشت‌های $\varphi^۲,\varphi^۴,\varphi^۶,\varphi^۸,\varphi^{۱۰}$ زوج می‌باشند.

۳۷ـ گزینه «۴» همان‌طور که می‌دانیم $o(A_۴)=۱۲$ و قبلاً نشان دادیم که $A_۴$ زیرگروهی از مرتبهٔ ۶ ندارد، بنابراین عکس قضیهٔ لاگرانژ برای آن برقرار نیست.

۳۸ـ گزینه «۳»

$$\left.\begin{array}{l} b\in\langle a\rangle\ \Rightarrow\exists k\in\mathbb{Z}\,;b=a^k\Rightarrow ۸=o(b)=o(a^k)=\dfrac{o(a)}{(k,o(a))}=\dfrac{۲۴}{(k,۲۴)}\ \Rightarrow(k,۲۴)=۳\Rightarrow k=۳,۹,۱۵,۲۱\\ c\in\langle a\rangle\ \Rightarrow\exists k'\in\mathbb{Z}\,;c=a^{k'}\Rightarrow ۴=o(c)=o(a^{k'})=\dfrac{o(a)}{(k',o(a))}=\dfrac{۲۴}{(k',۲۴)}\ \Rightarrow(k',۲۴)=۶\Rightarrow k'=۶,۱۸\end{array}\right\}\Rightarrow(۲۴,k+k')=۳$$

بنابراین $o(bc)=o(a^{k+k'})=\frac{۲۴}{(۲۴,k+k')}=\frac{۲۴}{۳}=۸$.

۳۹ـ گزینه «۱» G' توسط عناصر به شکل $aba^{-۱}b^{-۱}$ تولید می‌شود که b و a عناصر دلخواه از G هستند. پس کافی است نشان دهیم $aba^{-۱}b^{-۱}\in N$. چون $\frac{G}{N}$ آبلی است بنابراین:

$$abN=aNbN=bNaN=baN\Rightarrow(ab)(ba)^{-۱}\in N\ \Rightarrow aba^{-۱}b^{-۱}\in N$$

۴۰ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم β و α جایگشت‌های فردی در H باشند، در این صورت α و $\beta^{-۱}$ هم جایگشت‌های فردی در H می‌باشند، بنابراین $\beta^{-۱}\alpha\in H\bigcap A_n$، در نتیجه $\alpha(H\bigcap A_n)=\beta(H\bigcap A_n)$. این نشان می‌دهد که $H\bigcap A_n$ زیرگروهی از H با اندیس ۲ می‌باشد. (توجه کنید که چون α جایگشت فردی در H است پس $H\not\subset A_n$).

بررسی گزینه‌های دیگر

در گروه $S_۴$ زیرگروه تولید شده توسط (۱۲۳۴) زیرگروه از اندیس ۶ است و $H\bigcap A_n\neq\{۱\}$. همچنین (۱۲۳۴) جایگشتی فرد است. بنابراین گزینه‌های دیگر نادرست می‌باشند.

۴۱ـ گزینه «۴» می‌دانیم $\varphi(27) = 27(1-\frac{1}{3}) = 18$ بنابراین U_{27}، ۱۸ عنصر دارد. به راحتی دیده می‌شود که U_{27} عنصری از مرتبه ۱۸ ندارد و دوری نمی‌باشد.

بررسی گزینه‌ی ۱ : می‌بینیم که $\varphi(9) = 6$ و U_9 گروه آبلی از مرتبه ۶ است چون ۵ عضو مرتبه‌ی ۶ از U_9 است، مولد آن می‌باشد.

بررسی گزینه (۲): $\varphi(25) = 25(1-\frac{1}{5}) = 20$ و U_{25} دو عنصر a و b از مرتبه ۴ و ۵ دارد و چون U_{25} آبلی است و $(4,5) = 1$ آن‌گاه ab مرتبه ۲۰ دارد و U_{25} دوری است.

بررسی گزینه (۳): $\varphi(20) = 3 \times 4 = 12$ مانند گزینه ۲، U_{20} عنصرهای a وb از مرتبه ۳و ۴ دارد و ab از مرتبه ۱۲ است بنابراین U_{20} دوری است.

۴۲ـ گزینه «۴» همواره $C_G(H) \subseteq N_G(H)$. اکنون بنا به فرض مسأله می‌توان فرض کرد $H = \{e, x\}$، در این صورت اگر $g \in N_G(H)$ آن‌گاه $gH = Hg$ و در نتیجه $ge = eg$ ،$gx = xg$. بنابراین برای هر $h \in H$، $gh = hg$ و لذا $g \in C_G(H)$ پس $N_G(H) \subseteq C_G(H)$ و در نتیجه $C_G(H) = N_G(H)$.

۴۳ـ گزینه «۲» فرض کنید $g \in N$ و $h \in G$. در این صورت چون N تنها زیرگروه از مرتبه m در گروه G است، N در G نرمال است، بنابراین $hgh^{-1} \in N$ و درنتیجه $hgh^{-1}g^{-1} \in N$. پس $hgh^{-1}g^{-1} \in N \cap G'$. همچنین $(m, |G'|) = 1$ در نتیجه $N \cap G' = 1$ بنابراین:

$$hgh^{-1}g^{-1} = 1 \Rightarrow hg = gh \Rightarrow C_G(g) = G.$$

۴۴ـ گزینه «۱» چون $o(A_4) = 12$، طبق قضیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ هر زیرگروه A_4، عدد ۱۲ را عاد می‌کند، پس زیرگروه‌های A_4 می‌توانند ۲، ۳، ۴ و ۶ باشند، اما در مثالی نشان دادیم A_4 نمی‌تواند زیرگروهی از مرتبهٔ ۶ داشته باشد، پس زیرگروه‌های A_4 فقط از مراتب ۲، ۳ و ۴ هستند. هم‌چنین می‌دانیم هرگروه از مرتبهٔ کوچکتر از ۶ آبلی است، پس زیرگروه‌های A_4 همگی آبلی هستند.

۴۵ـ گزینه «۱» $\frac{G}{N}$ آبلی است لذا $G' \subseteq N$، از طرفی $G' \lhd N$ اما N ساده است. بنابراین $G' = \{e\}$ یا $G' = N$. اما اگر $G' = \{e\}$ آن‌گاه آبلی خواهد بود ولی بنا به فرض G غیر آبلی است و در نتیجه $G' \neq \{e\}$ پس $G' = N$.

۴۶ـ گزینه «۲» گروه $\mathbb{Z}_4$ و $\mathbb{Z}_8$ از مرتبه ۴ و ۸ می‌باشند وهر کدام به ترتیب دارای ۳ و ۴ زیرگروه هستند بنابراین گزینه‌های دیگر درست نمی‌باشند.

۴۷ـ گزینه «۳» زیرگروه هر گروه دوری، دوری است. اگر $H = < a^8, a^{12} >$، آن‌گاه $(a^8)^9 = a^{72} = a^{12}$ بنابراین $H = < a^8 >$. می‌دانیم مرتبه این گروه با مرتبه a^8 برابر است و $o(a^8) = \frac{30}{(30,8)} = \frac{30}{2} = 15$

۴۸ـ گزینه «۱» می‌دانیم $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$. اگر $|H| < \sqrt{G}$ و $|K| < \sqrt{G}$ باشد آن‌گاه $|HK| < |G|$ است و $HK \neq G$.

۴۹ـ گزینه «۴» اگر G گروهی دوری از مرتبه‌ی n باشد و $k | n$، آن‌گاه G تنها یک زیرگروه از مرتبه k و $\varphi(k)$ عنصر از مرتبه‌ی k دارد. در این مسأله تعداد عناصر مرتبه‌ی p^m برابر است با $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.

۵۰ـ گزینه «۲» اگر G یک گروه و A زیرگروهی از G مشمول در $Z(G)$ باشد $(A \subseteq Z(G))$ آن‌گاه $A \lhd G$.

برای این منظور فرض کنید $g \in G$ و $a \in A$ دلخواه باشند. از این که $A \subseteq Z(G)$ داریم $a \in Z(G)$ بنابراین $ga = ag$.

حال $g^{-1}ag = g^{-1}ga = a \in A$

بنابراین $A \lhd G$.

در این مسأله $H \cap Z(G)$ زیرگروهی از G و مشمول در $Z(G)$ است و بنا به آنچه بیان شد، $H \cap Z(G) \lhd G$.

۵۱ـ گزینه «۱» $|\frac{G}{N}|=\frac{|G|}{|N|}=\frac{140}{14}=10$. ادعا می‌کنیم برای هر $g\in G$، $g^{10}\in N$. زیرا اگر $g\in G$ دلخواه باشد آن‌گاه

$$gN\in\frac{G}{N}\to (gN)^{10}=N\to g^{10}N=N\Rightarrow g^{10}\in N$$

اینک فرض می‌کنیم $o(g)=7$ از این که $(7,10)=1$ لذا $x,y\in\mathbb{Z}$ موجودند به طوری که $7x+10y=1$ حال:

$$g=g^1=g^{7x+10y}=(g^7)^x(g^{10})^y=e(g^{10})^y=(g^{10})^y\in N$$

۵۲ـ گزینه «۱» چون $H\lhd G$، پس داریم $h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}\in H$. در نتیجه زیرگروه تولید شده توسط تمام این جابه‌جاگرها یعنی H' برابر با H است. برای بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌توانیم چنین بگوییم:

گزینه ۲: هر گروه متناهی G از مرتبه‌ی p^n به ازای هر عدد اول p و $n>0$ مرکزی نابدیهی دارد.

گزینه ۳: اگر $|G|=P^n$، آن‌گاه به ازای هر زیرگروه مانند H که $|H|=p^{n-1}$ داریم $H\lhd G$.

گزینه ۴: فرض کنید G یک گروه و G' گروه مشتق G باشد. در این صورت اگر $H\lhd G$، آن‌گاه $\frac{G}{H}$ آبلی است اگر و تنها اگر $G'\subseteq H$.

بنابراین برای اثبات درستی این‌گزینه باید بررسی کنیم که $\frac{G}{H}$ آبلی می‌باشد یا خیر؟

با توجه به این که $H\lhd G$ گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ معنی دارد و داریم $\left|\frac{G}{H}\right|=\frac{81}{27}=3$. حال چون $\left|\frac{G}{H}\right|=3$ و هر زیرگروه از مرتبه‌ی عدد اول دوری است و در نتیجه آبلی می‌باشد، لذا نتیجه می‌گیریم که گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ آبلی است پس $G'\subseteq H$.

۵۳ـ گزینه «۴» فرض کنید $G=<a_1,\dots,a_n>$. زیرگروه‌های تولید شده با یک عضو یعنی $<a_1>$، $<a_2>$، ...، $<a_n>$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

$$\forall 1\le i,j\le n\quad,\quad <a_j>\subseteq<a_i>\quad \text{یا}\quad <a_i>\subseteq<a_j>$$

حال با یک تغییر اندیس می‌توان فرض کرد $<a_1>\subseteq<a_2>\subseteq\dots\subseteq<a_n>\subseteq G$. بنابراین $a_1,a_2,\dots,a_n\in<a_n>$. پس $G=<a_n>$ و لذا G دوری است. حال اگر $p\neq q$ دو عدد اول باشند که $p,q\,|\,n$، آن‌گاه زیرگروه‌های H و K از G موجودند به طوری که $|H|=p$ و $|K|=q$. از طرفی طبق فرض $H\le K$ یا $K\le H$. بنابراین $p|q$ یا $q|p$ که در هر صورت باید $p=q$ باشد، بنابراین مرتبه G توانی از یک عدد اول است. پس گزینه (۴) گزینه صحیح می‌باشد.

۵۴ـ گزینه «۲» می‌دانیم عمل اشتراک روی $P(\mathbb{N})$ شرکت‌پذیر است، پس $P(\mathbb{N})$ نیم‌گروه است. از طرفی به ازای هر $A\in P(\mathbb{N})$، داریم $A\bigcap\mathbb{N}=\mathbb{N}\bigcap A=A$، پس $\mathbb{N}$ عضو همانی $P(\mathbb{N})$ است و این نتیجه می‌دهد که $P(\mathbb{N})$ تکوار است. بنابراین گزینه (۱) رد می‌شود. از طرفی برای هر دو عضو $A,B\in P(\mathbb{N})$ که $A\subsetneq B$ داریم $A\bigcap\varnothing=B\bigcap\varnothing=\varnothing$، اما از این تساوی نمی‌توانیم نتیجه بگیریم $A=B$، یعنی قانون حذف در $P(\mathbb{N})$ برقرار نیست، در حالی که در قضیه‌ای ثابت کردیم در هر گروه قوانین حذف چپ و راست برقرار است، پس $P(\mathbb{N})$ نمی‌تواند گروه باشد. درنتیجه گزینه (۲) درست و گزینه (۳) نادرست است. گزینه (۴) نیز نادرست است، زیرا برای هر $A\in P(\mathbb{N})$، می‌دانیم $A\bigcap A=A$، پس هر عضو $P(\mathbb{N})$ با عمل * خودتوان است.

فصل پنجم

«همریختی گروه‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (سراسری ۸۲)

۱) مجموعه‌ی ریشه‌های n ام واحد نسبت به عمل ضرب اعداد مختلط یک گروه است.

۲) تمام گروه‌های دوری هم مرتبه یکریختند.

۳) تعداد مولدهای یک گروه دوری از مرتبه n برابر است با تابع اویلر $\varphi(n)$

۴) هر گروه دوری نامتناهی تنها یک مولد دارد.

۲ـ تعداد همریختی‌ها از یک گروه هشت عضوی به یک گروه پانزده عضوی برابر است با: (سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) یکی ۳) پنج تا ۴) هشت تا

۳ـ اگر H و K دو زیرگروه متناهی G با اندیس عدد اول p باشند، که p کوچکترین عدد اولی است که مرتبه G را عاد می‌کند. در این صورت HK: (سراسری ۸۳)

۱) برابر G است. ۲) تنها زیرگروه از G است. ۳) زیرگروه نرمال در G است. ۴) ممکن است زیرگروه G نباشد.

۴ـ اگر $\varphi : G \to G$ یک همریختی گروهها باشد و $K = \ker\varphi$ در این صورت به ازای $1 \neq a \in G$ مجموعه‌ی $\{x \in G \mid \varphi(x) = \varphi(a)\}$ برابر است با: (سراسری ۸۳)

۱) K ۲) Ka (همدسته راست) ۳) aK (همدسته چپ) ۴) $\{e\}$

۵ـ فرض کنید گروه خود ریختی‌های G، یعنی، $Aut(G)$، دوری باشد، در اینصورت گروه خود ریختی‌های داخلی آن، $Inn(G)$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $Inn(G) = <1>$

۲) $Inn(G) \neq <1>$

۳) $Inn(G) = Aut(G)$

۴) $Inn(G)$ گروهی دوری و نامتناهی است.

۶ـ فرض کنید G یک گروه دوری نا متناهی باشد. در این صورت تعداد خود ریختی‌های G برابر است با: (سراسری ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ∞

۷ـ فرض کنید G یک گروه متناهی نابدیهی و $f : G \to G$ با ضابطه $f(x) = x^{n^2-n-1}$، برای هر $x \in G$ یک همریختی از G باشد، در این صورت .... (سراسری ۸۴)

۱) $z(G) \neq G$ ۲) $G' = G$ ۳) G دوری است. ۴) G آبلی است.

۸ـ تعداد همریختی ها از گروه دوری مرتبه ۱۵ به گروه دوری مرتبه ۳۵ برابر است با: (سراسری ۸۴)

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

۹ـ فرض کنید G گروهی نا آبلی باشد. در این صورت گروه خود ریختی‌های G یعنی $AutG$ .... (سراسری ۸۵)

۱) دوری نیست. ۲) ساده است. ۳) آبلی است. ۴) نا آبلی است.

۱۰ـ فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. اگر $x, y \in G$ و $o(x)$ مرتبه x باشد داریم: (سراسری ۸۵)

۱) $o(x^{-1}yx) = o(x)$

۲) $o(xy) = o(yx)$

۳) به ازای هر همریختی t از G به G $o(x) = o(f(x))$

۴) $o(x^{-1}y^{-1}xy) = o(x)$

۱۱ـ فرض کنیم $\varphi : G_1 \to G_2$ همریختی گروهی باشد. کدام گزاره همواره درست است؟ (سراسری ۸۵)

۱) اگر G_1 آبلی و φ یک به یک باشد. آنگاه G_2 آبلی است.

۲) اگر G_2 آبلی و φ پوشا باشد، آنگاه G_1 آبلی است.

۳) اگر G_2 آبلی و φ یک به یک باشد، آنگاه G_1 آبلی است.

۴) اگر G_2 دوری باشد، آنگاه G_1 دوری است.

۱۲ـ کدام یک از عبارات زیر درست است؟ (سراسری ۸۵)

۱) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ یک گروه دوری است. $(\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\})$

۲) $(\mathbb{Q},+)$ یک گروه دوری است.

۳) $(\mathbb{Q},+)$ با $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ یکریخت است.

۴) گروه جمعی $\mathbb{Q}$ با گروه $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ یکریخت نیست.

۱۳ـ اگر $\Phi(G)$ اشتراک تمام ز یرگروه‌های ماکسیمال G باشد. آنگاه کدام یک از موارد زیر درست است؟ (سراسری ۸۵)

۱) $\Phi(\mathbb{Z})=2\mathbb{Z}$

۲) $\Phi(\mathbb{Z}_4)=\{0\}$

۳) $\Phi(G)\trianglelefteq G$

۴) اگر $G=S_3$،آن‌گاه $\Phi(G)\neq\{1\}$

۱۴ـ کدام یک از موارد زیر در گروه‌ها صحیح است؟ (سراسری ۸۶)

۱) $(\mathbb{Q},+)\cong(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}},+)$

۲) $(\mathbb{R}^*,.)\simeq(\mathbb{C}^*,.)$

۳) $(\mathbb{Q}^*,+)\simeq(\mathbb{Q}^*,.)$

۴) $(\mathbb{Z},+)\simeq(2\mathbb{Z},+)$

۱۵ـ فرض کنید $P(X)$ مجموعه توانی X است. گروه $G=(P(X),\Delta)$ را در نظر بگیرید. توابع $f,g:G\to G$ را به صورت:

$$f(B)=A\cap B \quad , \quad g(B)=A\,\Delta\,B$$

که در آن $A\subseteq X$ ثابت در نظر گرفته شده و $B\subseteq X$ دلخواه است، تعریف می‌کنیم. کدام گزینه در مورد f و g صحیح است؟ (سراسری ۸۶)

۱) f همریختی است و g همریختی است.

۲) f همریختی است و g همریختی نیست.

۳) f همریختی نیست و g همریختی است.

۴) f همریختی نیست و g همریختی نیست.

۱۶ـ تعداد همریختی‌های پوشا از یک گروه ۱۴ عضوی به یک گروه ۸ عضوی برابر است با: (سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) هشت

۱۷ـ اگر G یک گروه $f:G\to G$ یک همریختی گروهی باشد آنگاه کدام یک از موارد زیر نادرست است؟ ($Z(G)$ مرکز G و G' زیرگروه تعویض‌گر G است) (سراسری ۸۶)

۱) اگر $N\trianglelefteq G$، آن‌گاه $f(N)\trianglelefteq f(G)$

۲) اگر $N\trianglelefteq G$، آن‌گاه $f^{-1}(N)\trianglelefteq G$

۳) $f(G')\subseteq G'$

۴) $f(Z(G))\leq Z(G)$

۱۸ـ فرض کنید $f:A\to\mathbb{Z}$ یک همریختی نابدیهی از گروه A به گروه جمعی $\mathbb{Z}$ باشد. در این صورت گروه خارج قسمتی $\frac{A}{\ker f}$ دارای کدام خاصیت است؟ (سراسری ۸۷)

۱) دوری متناهی است. ۲) دوری نامتناهی است. ۳) آبلی متناهی است. ۴) دوری با تولید نامتناهی است.

۱۹ـ فرض کنید H زیرگروهی سره از G باشد که شامل هر زیرگروه نرمال و سره‌ی G است. اگر $x,y\in G$ و $\varphi:G\to G$ یک همریختی باشد با کدام یک از شرایط زیر hای در H یافت می‌شود که: $\varphi(y)=xh$ (سراسری ۸۷)

۱) $\varphi(x)=\varphi^2(y)$

۲) $\varphi(x)=\varphi(y)$

۳) $\varphi^2(x)=\varphi(y)$

۴) $\varphi^2(x)=\varphi^2(y)$

۲۰ـ تعداد همریختی‌ها از گروه جمعی $\mathbb{Z}_{20}$ به گروه جمعی $\mathbb{Z}_{30}$ چقد ر است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۲۱ـ فرض کنید G گروه کواترنیون مرتبه ۸ است گروه خودریختی‌های درونی G با کدام گروه زیر یکریخت است؟ (سراسری ۸۸)

۱) گروه همانی ۲) گروه چهارتایی کلاین ۳) گروه دوری مرتبه ۲ ۴) گروه دوری مرتبه ۴

۲۲ـ فرض کنید G و H دو گروه باشند و $\varphi:G\to H$ یک همریختی باشد. کدام گزاره نادرست است؟ (سراسری ۸۸)

۱) اگر L زیرگروه G باشد، آنگاه $\varphi(L)$ زیرگروه H است.

۲) اگر K زیرگروه H باشد، آنگاه $\varphi^{-1}(K)$ زیرگروه G است.

۳) اگر N زیرگروه نرمال G باشد، آنگاه $\varphi(N)$ زیرگروه نرمال H است.

۴) اگر M زیرگروه نرمال H باشند، آنگاه $\varphi^{-1}(M)$ زیرگروه نرمال G است.

۲۳ـ گروه خودریختی‌های گروه S_3 با کدام‌یک از گروه‌های زیر یکریخت است. (آزاد ۸۸)

۱) S_3 ۲)گروه چهارتایی کلاین ۳) S_4 ۴) $\mathbb{Z}_2$

۲۴ـ فرض کنید G و H گروه هستند و $f: G \to H$ یک همریختی است. اگر p یک عدد اول باشد به طوری که p مرتبه H را نمی‌شمارد و $x \in G$ از مرتبه p فرض شود آنگاه: (سراسری ۸۹)

۱) $<x> \lhd \ker f$ ۲) مرتبه $f(x)$ مضربی از p است. ۳) $x \in \ker f$ ۴) مرتبه $f(x)$ صفراست.

۲۵ـ فرض کنید G و H گروه هستند و $f: G \to H$ یک همریختی است. اگر p یک عدد اول باشد به طوری که p مرتبه H را نمی‌شمارد و $x \in G$ از مرتبه p فرض شود، آن‌گاه: (سراسری ۸۹)

۱) $<x> \lhd \ker f$ ۲) مرتبه $f(x)$ مضربی از p است. ۳) $x \in \ker f$ ۴) مرتبه $f(x)$ صفراست.

۲۶ـ اگر G یک گروه و $N \lhd G$ و $\frac{G}{N}$ دارای زیرگروهی از اندیس n باشد آنگاه G دارای زیرگروه H از اندیس زیر است؟ (سراسری ۸۹)

۱) n ۲) $n!$ ۳) $2n$ ۴) $\frac{1}{2}n!$.

۲۷ـ فرض کنید $\varphi: G \to H$ یک همریختی باشد و $|H| = 35$ و $|G| = 36$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $\ker\varphi = 1$ ۲) $\ker\varphi = G$ ۳) $\ker\varphi = H$ ۴) $\ker\varphi$ آبلی است.

۲۸ـ فرض کنید G یک گروه دلخواه و H گروهی آبلی باشد، اگر $f: G \to H$ یک همریختی باشد کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $G' \subseteq \ker f$ ۲) G' گروهی آبلی است. ۳) G گروهی آبلی است. ۴) $\ker f$ گروهی آبلی است.

۲۹ـ فرض کنید G گروهی ۱۰ عضوی است در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۹۰)

۱) G با زیرگروهی از $\mathbb{Z}$ یکریخت است.
۲) G با زیرگروهی از $\mathbb{Z}_{100}$ یکریخت است.
۳) G با زیرگروهی از S_4 یکریخت است.
۴) G با زیرگروهی از S_{10} یکریخت است.

۳۰ـ اگر G یک گروه دوری از مرتبه‌ی p^5 (p یک عدد اول) باشد، آنگاه مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های G برابر است با: (سراسری ۹۰)

۱) p^5 ۲) $p^5 - p$ ۳) $p^5 - p^2$ ۴) $p^5 - p^4$

۳۱ـ کدام گزاره صحیح است؟ (سراسری ۹۴)

۱) گروه‌های $(\mathbb{Q},+)$ و $(\mathbb{Z},+)$ یکریخت‌اند.
۲) گروه‌های $(\mathbb{R},+)$ و $(\mathbb{R}-\{0\},\times)$ یکریخت‌اند.
۳) گروه‌های $\left(\frac{(\mathbb{Q})}{(\mathbb{Z})},+\right)$ و $(\mathbb{Z},+)$ یکریخت‌اند.
۴) گروه‌های $(\mathbb{R},+)$ و $(\mathbb{R}^+,\times)$ یکریخت‌اند، که در آن $\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

۳۲ـ فرض کنید G گروهی متناهی است که برای هر زیرگروه دوری مانند H از G داریم $\frac{N_G(H)}{C_G(H)} \simeq Aut(H)$ در این صورت: (دکتری ۹۴)

۱) اگر عدد اول p مرتبه گروه را عاد کند آن‌گاه $p(p-1) \mid |G|$
۲) هر زیر گروه دوری در G نرمال است.
۳) G گروهی آبلی است.
۴) G گروهی از مرتبه فرد است.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ گزینه «۴» در فصل زیرگروه‌ها نشان دادیم که مجموعهٔ ریشه‌های n ام واحد یعنی $\{z\in\mathbb{C}^* \mid z^n=1\}$ نسبت به عمل ضرب زیرگروهی دوری از $\mathbb{C}^*$ از مرتبهٔ n می‌باشد. پس گزینهٔ (۱) درست است. همچنین در قضایایی ثابت کردیم هرگروه دوری مرتبهٔ n با $\mathbb{Z}_n$ و هر گروه دوری نامتناهی با $\mathbb{Z}$ یکریخت است. پس گزینه‌های (۲) و (۳) هم درست می‌باشند. اما از آن‌جایی که هر گروه دوری نامتناهی تنها دو مولد دارد، گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم G و H دو گروه باشند به طوری که $o(G)=8$ و $o(H)=15$. اگر $\varphi:G\to H$ یک همریختی باشد، آنگاه به ازای هر $x\in G$، داریم $o(\varphi(x))\mid o(x)$. از طرفی می‌دانیم $o(x)\mid o(G)$، بنابراین $o(\varphi(x))\mid o(G)$،چون $o(\varphi(x))\mid o(H)$، نتیجه می‌گیریم $o(\varphi(x))\mid (o(G),o(H))=(8,15)=1$. پس $o(\varphi(x))=1$، یعنی به ازای هر $x\in G$، $\varphi(x)=\{e\}$، از این‌رو تنها همریختی بدیهی بین G و H وجود دارد.

۳ـ گزینه «۳» اگر H زیرگروهی از گروه متناهی G با اندیس p باشد که p کوچکترین عدد اولی است. که مرتبه‌ی n را عاد می‌کند. آن‌گاه H در G نرمال است. می‌دانیم اگر H و K زیرگروه‌های نرمال G باشند، آن‌گاه HK زیرگروه نرمال G است.

۴ـ گزینه «۳و۲» داریم:

$$\varphi(x)=\varphi(a)\Rightarrow \varphi(x)\varphi(a^{-1})=\varphi(a)\varphi(a^{-1})\Rightarrow \varphi(xa^{-1})=\varphi(aa^{-1})\Rightarrow \varphi(xa^{-1})=\varphi(e)\Rightarrow \varphi(xa^{-1})=e\Rightarrow xa^{-1}\in K$$
$$\Rightarrow x\in Ka$$

چون $K\trianglelefteq G$ داریم $Ka=aK$، بنابراین $x\in aK$.

۵ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که زیرگروه هر گروه دوری، دوری است و $\mathrm{Inn}(G)\le \mathrm{Aut}(G)$، پس $\mathrm{Inn}(G)$ دوری است. همچنین می‌دانیم $\mathrm{Inn}(G)\cong \dfrac{G}{Z(G)}$ و اگر $\dfrac{G}{Z(G)}$ دوری باشد، آن‌گاه G آبلی است. بنابراین $Z(G)=G$ و $\mathrm{Inn}(G)\cong \dfrac{Z(G)}{Z(G)}=\langle 1\rangle$.

۶ـ گزینه «۱» در قضیه‌ای ثابت کردیم که برای هر گروه دوری نامتناهی G داریم $|\mathrm{Aut}G|=2$.

۷ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. چون در صورت سؤال مشخص نشده است نگاشت $f(x)=x^{n^2-n-1}$ به ازای چه مقداری از n یک همریختی است. اما اگر n برابر مرتبهٔ G باشد، به ازای هر $x\in G$ داریم:

$$f(x)=x^{n^2-n-1}=(x^n)^{n-1}.x^{-1}=e.x^{-1}=x^{-1}\xrightarrow{f\ \text{یک همریختی است}} f(xy)=f(x)f(y)\Rightarrow (xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}\Rightarrow xy=yx$$

بنابراین G آبلی است.

۸ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم G و H دو گروه باشند به طوری که $o(G)=15$ و $o(H)=35$. در این صورت به ازای یک $a\in G$ و $b\in H$ داریم $G=\langle a\rangle=\{e,a,\dots,a^{14}\}$ و $H=\langle b\rangle=\{e,b,\dots,b^{34}\}$. اگر $\varphi:G\to H$ یک همریختی باشد، آنگاه چون عناصر H توان‌هایی از b هستند، می‌توانیم ضابطه‌ی φ را به صورت $\varphi(a)=b^n$ که $0\le n<34$ تعریف کنیم. داریم $o(b^n)=o(\varphi(a))\mid o(a)=15$ بنابراین $(b^n)^{15}=b^{15n}=e$، از طرفی چون $o(b)=35$، داریم:

$$35\mid 15n \Rightarrow \frac{35}{5}\Big|\frac{15}{5}n \Rightarrow 7\mid 3n \xrightarrow{(7,3)=1} 7\mid n \xrightarrow{0\le n<34} n=0,7,14,21,28$$

پس ۵ همریختی به صورت $b^0=e, b^7, b^{14}, b^{21}$ و b^{28} از G به H وجود دارد.

۹ـ گزینه «۱» از آن‌جایی که هر زیرگروه یک گروه دوری دوری است، اگر $\mathrm{Aut}G$ دوری باشد، آنگاه $\mathrm{Inn}G$ دوری خواهد بود. چون $\mathrm{Inn}G\cong \dfrac{G}{Z(G)}$، پس $\dfrac{G}{Z(G)}$ هم دوری می‌شود، بنابراین G آبلی می‌باشد که با فرض ناآبلی بودن G در تناقض است،

۱۰ـ گزینه «۲» طبق قضیه‌ای همواره $o(xy)=o(yx)$ پس گزینهٔ (۲) همواره درست است. گزینهٔ (۱) نادرست است مثلاً در گروه $S_۳$ مرتبهٔ عضو (۱۳۲) برابر ۳ است، اما می‌بینیم که

$$(۱۳۲)^{-۱}(۱۲)(۱۳۲)=(۱۲۳)(۱۲)(۱۳۲)=(۱۳)\Rightarrow o((۱۳۲)^{-۱}(۱۲)(۱۳۲))=o((۱۳))=۲$$

گزینهٔ (۳) هم نادرست می‌باشد، زیرا اگر همریختی ثابت $\underset{x\mapsto e}{f:G\to G}$ را درنظر بگیریم، آن‌گاه $o(f(x))=o(e)=۱$. گزینهٔ (۴) نیز نادرست است، مثلاً در یک گروه آبلی برای عضو غیرهمانی x داریم $o(x^{-۱}y^{-۱}xy)=o(x^{-۱}xy^{-۱}y)=o(e)=۱$.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۳» بنابر قضایای یکریختی می‌دانیم $\frac{G_۱}{\ker\varphi}\cong \operatorname{Im}\varphi$ چون φ، یک به یک است. پس $\ker\varphi=۱$ و بنابراین $G_۱\cong \operatorname{Im}\varphi$ چون $G_۲$ آبلی است. هر زیرگروه آن هم آبلی است پس $G_۱$ هم آبلی است و گزینه ۳ درست است.

اگر φ همریختی صفر باشد آنگاه φ یک به یک است آنگاه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌تواند درست باشند.

همچنین اگر $G_۲=۱$ آنگاه φ پوشا است و گزینه ۲ هم نمی‌تواند درست باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۴» تمام عناصر $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ دارای مرتبه متناهی هستند در صورتی‌که عناصر ناصفر $\mathbb{Q}$ مرتبـه متنـاهی دارنـد، واضـح اسـت کـه گـروه‌هـای $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ و $(\mathbb{Q},+)$ دوری نیستند. در گروه $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ به جز عنصر همانی ۱، عضو ۱- وجود دارد که وارون آن خودش است. در صورتی‌کـه در گـروه جمعـی $(\mathbb{Q},+)$ هیچ ناصفری دارای این خاصیت نیست. بنابراین گزینه ۳ هم نادرست است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۳» در قضیه‌ای ثابت کردیم $\Phi(G)$ یعنی زیرگروه فراتینی گروه G، زیرگروه مشخصه G است و از آن‌جایی که زیرگروه مشخصه هرگروه در آن نرمال است، پس $\Phi(G)\trianglelefteq G$.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ گزینه «۴» نگاشت $\underset{n\mapsto ۲n}{\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(۲\mathbb{Z},+)}$ را در نظر می‌گیریم. این نگاشت یک یکریختی است، زیرا

$\forall m,n\in\mathbb{Z};\ \varphi(m+n)=۲(m+n)=۲m+۲n=\varphi(m)+\varphi(n)\Rightarrow$ φ یک همریختی است

$\forall m,n\in\mathbb{Z};\ \varphi(m)=\varphi(n)\Rightarrow ۲m=۲n\Rightarrow m=n\Rightarrow$ φ یک به یک است

$\forall ۲n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\in\mathbb{Z};\varphi(n)=۲n\Rightarrow$ φ پوشا است

گزینهٔ (۱) نادرست است، زیرا همان‌طور که در فصل گذشته نشان دادیم همهٔ اعضای گروه $(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}},+)$ از مرتبهٔ متناهی هستند، در حالی که اعضـای $(\mathbb{Q},+)$ همگی از مرتبهٔ نامتناهی هستند. گزینهٔ (۲) هم نادرست است، زیرا اعداد منفی در $\mathbb{C}$ مربع کامل هستند ولی در $\mathbb{R}$ این‌طور نیسـت. بـه طـور مثـال فـرض کنید $\varphi:(\mathbb{C}^*,.)\to(\mathbb{R}^*,.)$ یک یکریختی باشد، در این صورت به ازای $-۱\in\mathbb{R}^*$ حتماً یک $x\in\mathbb{C}^*$ موجود است به طوری که $\varphi(x)=-۱$. مـی‌بینـیم که $(\varphi(\sqrt{x}))^۲=\varphi(\sqrt{x})\varphi(\sqrt{x})=\varphi(\sqrt{x}\sqrt{x})=\varphi(x)=-۱$ اما در این‌جا به تناقض می‌رسیم، چون در $\mathbb{R}^*$ هیچ مربـع کـاملی منفـی نمـی‌شـود.

گزینهٔ (۳) هم نادرست می‌باشد زیرا هر عضو $q\in(\mathbb{Q}^*,+)$ دارای ریشهٔ دوم $\frac{q}{۲}$ است، در حالی که بعضی از اعضای $(\mathbb{Q}^*,.)$ ریشهٔ دوم ندارند، مثلاً عضوی مثل x در $(\mathbb{Q}^*,.)$ وجود ندارد که $x^۲=۳$. اگر فرض کنیم $\varphi:(\mathbb{Q}^*,+)\to(\mathbb{Q}^*,.)$ یـک یکریختـی باشـد، آن‌گـاه بـه ازای $۳\in(\mathbb{Q}^*,.)$ حتماً عضـوی چون $q\in(\mathbb{Q}^*,+)$ وجود دارد بـه طـوری کـه $\varphi(q)=۳$، بنـابراین $(\varphi(\frac{q}{۲}))^۲=\varphi(\frac{q}{۲})\varphi(\frac{q}{۲})=\varphi(\frac{q}{۲}+\frac{q}{۲})=\varphi(q)=۳$ کـه در ایـن‌جـا بـه تنـاقض می‌رسیم.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ گزینه «۲» می‌دانیم هر همریختی گروهی عضو همانی را به عضو همانی می‌برد. چون مجموعـه تهـی عضـو همـانی G اسـت و $g(\phi)=A\Delta\phi=A$ بنابراین g نمی‌تواند همریختی باشد. حال فرض می‌کنیم B و $C\in G$ باشند در این صورت:

$$f(B)\Delta f(C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))$$
$$=(A\cap(B-C))\cup(A\cap(C-B))=A\cap((B-C)\cup(C-B))=A\cap(B\Delta C)=f(B\Delta C)$$

بنابراین f همریختی است.

۱۶ـ گزینه «۱» فرض کنیم $\varphi: G \to H$ همریختی پوشا از گروه ۱۴ عضوی G به گروه ۸ عضوی H باشد. در این صورت طبق قضیه اول یکریختی $\frac{G}{\ker\varphi} \simeq H$، بنابراین $[G:\ker\varphi] = o(H) = 8$ و چون $[G:\ker\varphi]$ مرتبه G را عاد می‌کند باید داشته باشیم $8|14$ که ممکن نیست بنابراین همریختی پوشا از G به H وجود ندارد.

۱۷ـ گزینه «۱ و ۴» در گروه D_8 که توسط عضو $\beta^2 = e$ و $\alpha^4 = e$ تولید می شود که $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$. حال همریختی زیر از گروه D_8 به D_8 را در نظر می‌گیریم، در آنصورت $\{e, \alpha^2\}$ به عنوان زیرگروهی از D_8 نرمال است اما زیرگروه $\{e,\beta\}$ در D_8 نرمال نیست بنابراین گزینه ۱ نادرست است.

$\varphi: D_8 \to D_8 \quad \varphi(\alpha^2) = \beta \quad , \quad \varphi(\beta) = \alpha^2$

فرض می‌کنیم $N \trianglelefteq G$. اگر $n \in f^{-1}(N)$، آن‌گاه $f(n) \in N$. ثابت می‌کنیم $\forall g \in G; g^{-1}ng \in f^{-1}(N)$. در واقع باید ثابت کنیم $f(g^{-1}ng) \in N$.
داریم $f(g^{-1}ng) = f(g^{-1})f(n)f(g) = f(g)^{-1}f(n)f(g) \in N$، در نتیجه $g^{-1}ng \in f^{-1}(\mathbb{N})$. یعنی $f^{-1}(N) \trianglelefteq G$ و گزینه‌ی ۲ درست است.
همچنین اگر $x, y \in G$ آنگاه $f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}$ بنابراین $f(G') \leq G'$. و گزینه‌ی ۳ درست است. همریختی $\varphi: D_8 \to D_8$ که در بالا تعریف شد، را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم $Z(D_8) = \{e, \alpha^2\}$، بنابراین $\varphi(Z(D_8)) = \varphi(\{e,\alpha^2\}) = \{e,\beta\}$. اما می‌بینیم که $\varphi(Z(D_8)) = \{e,\beta\} \not\leq Z(D_8)$. در نتیجه گزینه‌ی ۴ نادرست است.

۱۸ـ گزینه «۲» بنابر قضایای یکریختی $\frac{A}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$. می‌دانیم $\operatorname{Im} f$ زیرگروهی از $\mathbb{Z}$ است، چون f نابدیهی است، بنابراین $n\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Im} f$ که n عددی صحیح مخالف صفر است. برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ بنابراین $\frac{A}{\ker f} \simeq \mathbb{Z}$.

۱۹ـ گزینه «۱» $\ker\varphi$ زیرگروهی نرمال از G است بنابراین $\ker\varphi \leq H$. اگر $\varphi(x) = \varphi^2(y)$، آنگاه داریم:

$$\varphi(x) = \varphi(\varphi(y)) \Rightarrow \varphi^{-1}(x)\varphi(\varphi(y)) = e \Rightarrow \varphi(x^{-1}\varphi(y)) = e \Rightarrow x^{-1}\varphi(y) \in \ker\varphi \leq H \Rightarrow \exists h \in H;\ x^{-1}\varphi(y) = h$$
$$\Rightarrow \varphi(y) = xh$$

۲۰ـ گزینه «۴» می‌دانیم $\mathbb{Z}_{20} = \{0,1,\ldots,19\} = \langle x \mid x^{20} = e\rangle$ و $\mathbb{Z}_{30} = \{0,1,\ldots,29\} = \langle y \mid y^{30} = e\rangle$. اگر فرض کنیم $\varphi: \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{30}$ یک همریختی است، آنگاه چون عناصر $\mathbb{Z}_{30}$ توان‌هایی از y هستند، می‌توانیم ضابطه‌ی φ را به صورت $\varphi(x) = y^n$ که $0 \leq n \leq 30$ تعریف کنیم. طبق قضیه‌ای داریم $o(y^n) = o(\varphi(x)) \mid o(x) = 20$، بنابراین $y^{20n} = (y^n)^{20} = e$، از طرفی چون $o(y) = 30$، نتیجه می‌گیریم:

$$30 \mid 20n \Rightarrow \frac{30}{10} \mid \frac{20}{10} n \Rightarrow 3 \mid 2n \xrightarrow{(3,2)=1} 3 \mid n \xrightarrow{0 \leq n \leq 30} n = 0,3,6,9,12,15,18,21,24,27$$

و این یعنی ۱۰ همریختی به صورت $y^0 = e, y^3, y^6, y^9, y^{12}, y^{15}, y^{18}, y^{21}, y^{24}$ و y^{27} بین $\mathbb{Z}_{20}$ و $\mathbb{Z}_{30}$ وجود دارد.

۲۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم $Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. چهار خودریختی درونی به صورت زیر روی Q_8 قابل تعریف است:

$\varphi_e: \forall x \in Q_8; \varphi_e(x) = exe^{-1} = x$ خودریختی همانی

$\varphi_a: \forall x \in Q_8; \varphi_a(x) = axa^{-1} \Rightarrow \varphi_a(e) = e, \varphi_a(a) = a, \varphi_a(a^2) = a^2, \varphi_a(a^3) = a^3, \varphi_a(b) = a^2b, \varphi_a(ab) = a^3b, \varphi_a(a^2b) = b,$
$\varphi_a(a^3b) = ab$

$\varphi_b: \forall x \in Q_8; \varphi_b(x) = bxb^{-1} \Rightarrow \varphi_b(e) = e, \varphi_b(a) = a^3, \varphi_b(a^2) = a^2, \varphi_b(a^3) = a, \varphi_b(b) = b, \varphi_b(ab) = a^3b, \varphi_b(a^2b) = a^2b,$
$\varphi_b(a^3b) = ab$

$\varphi_{ab}: \forall x \in Q_8; \varphi_{ab}(x) = abx(ab)^{-1} \Rightarrow \varphi_{ab}(e) = e, \varphi_{ab}(a) = a^3, \varphi_{ab}(a^2) = a^2, \varphi_{ab}(a^3) = a, \varphi_{ab}(b) = a^2b, \varphi_{ab}(ab) = ab,$
$\varphi_{ab}(a^2b) = b, \varphi_{ab}(a^3b) = a^3b$

توجه داشته باشید که به ازای هر عضو دیگر $g \in Q_8$ غیر از e، a، b و ab، همریختی $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ لزوماً یک به یک و پوشا نیست مثلاً به ازای a^2 داریم $\varphi_{a^2}(ab) = \varphi_{a^2}(a^3b) = a^3b$ که این نشان می‌دهد φ_{a^2} یک به یک نیست، پس فقط همان ۴ خودریختی درونی بالا روی G_8 قابل تعریف است. حال نشان می‌دهیم همه‌ی خودریختی‌های غیرهمانی فوق یعنی φ_a، φ_b، φ_{ab} از مرتبه‌ی ۲ هستند، داریم:

$$\varphi_a^2(e) = e\ ,\ \varphi_a^2(a) = \varphi_a(\varphi_a(a)) = \varphi_a(a) = a\ ,\ \varphi_a^2(a^2) = \varphi_a(\varphi_a(a^2)) = \varphi_a(a^2) = a^2, \varphi_a^2(a^3) = \varphi_a(\varphi_a(a^3)) = \varphi_a(a^3) = a^3$$

$$\varphi_a^2(b) = \varphi_a(\varphi_a(b)) = \varphi_a(a^2b) = b, \varphi_a^2(ab) = \varphi_a(\varphi_a(ab)) = \varphi_a(a^3b) = ab, \varphi_a^2(a^2b) = \varphi_a(\varphi_a(a^2b)) = \varphi_a(b) = a^2b,$$

$$\varphi_a^2(a^3b) = \varphi_a(\varphi_a(a^3b)) = \varphi_a(ab) = a^3b$$

بنابراین می‌بینیم به ازای هر $g \in Q_8$، $\varphi_a^2(g) = g$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد به ازای هر $g \in Q_8$، $\varphi_b^2(g) = g$ و $\varphi_{ab}^2(g) = g$. در نتیجه $\mathrm{Inn}Q_8$ گروهی از مرتبه‌ی ۴ می‌باشد که مرتبه‌ی هر عضو غیرهمانی آن ۲ است، پس $\mathrm{Inn}Q_8 \cong V_4$.

۲۲ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم D_8 گروه دو وجهی باشد که $\alpha^4 = e$، $\beta^2 = e$ و $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$. در این صورت اگر همریختی $\varphi: D_8 \to D_8$ را به صورت روبرو تعریف کنیم.
$\varphi(e) = e\ ,\ \varphi(\alpha) = \beta$

آن‌گاه $\{e,\alpha\}$ زیرگروه نرمالی از D_8 است به طوری که تصویر آن $\{e,\beta\}$ در D_8 نرمال نیست.

۲۳ـ گزینه «۱» در متن درس دیدیم که $\mathrm{Aut}\,S_3 \cong S_3$

۲۴ـ گزینه «۳» $f(x) \in H$ را در نظر می‌گیریم در این صورت $f(x)^p = f(x^p) = f(e) = e$ و چون p اول است لذا $f(x) = e$ یا $o(f(x)) = p$. اما اگر $o(f(x)) = p$، آنگاه H شامل عنصری از مرتبه‌ی p است. و بنا به قضیه لاگرانژ $p \,|\, |H|$ که متناقض با فرض است بنابراین $f(x) = e$ و لذا $x \in \ker f$.

۲۵ـ گزینه «۳» $f(x) \in H$ را در نظر می‌گیریم در این صورت $f(x)^p = f(x^p) = f(e) = e$ و چون p اول است، لذا $f(x) = e$ یا $o(f(x)) = p$. اما اگر $o(f(x)) = p$، آنگاه H شامل عنصری از مرتبه‌ی p است. و بنا به قضیه لاگرانژ $p \,|\, |H|$ که متناقض با فرض است بنابراین $f(x) = e$ و لذا $x \in \ker f$.

۲۶ـ گزینه «۱» می‌دانیم زیرگروه‌های $\frac{G}{N}$ به صورت $\frac{H}{N}$ می‌باشند که H زیرگروهی از G است و $N \subseteq H$. حال اگر $\frac{H}{N}$ زیرگروهی از $\frac{G}{N}$، با اندیس n باشد آن‌گاه:
$[G:H] = [\frac{G}{N}:\frac{H}{N}] = n$

۲۷ــ گزینه «۲» قرار می‌دهیم $K = \ker\varphi$. می‌دانیم $|K| \,|\, |G| = 36$. از طرفی بنا به قضیه اول یکریختی $\frac{G}{K} \cong \mathrm{Im}\varphi \le H$. بنابراین $35 = |H| \,|\, |\frac{G}{K}| = \frac{|G|}{|K|}$. واضح است که تنها مقسوم‌علیه ۳۶ که ۳۵ را می‌شمارد ۱ است. بنابراین: $\frac{|G|}{|K|} = 1$ و لذا $|G| = |K|$. پس $K = G$.

۲۸ـ گزینه «۱» بنا به قضیه اول یکریختی $\frac{G}{\ker f} \cong \mathrm{Im}f \le H$ و چون H آبلی است، لذا $\mathrm{Im}f$ و در نتیجه $\frac{G}{\ker f}$ آبلی است. بنابراین $G' \subseteq \ker f$.

۲۹ـ گزینه «۴» بنا به قضیه‌ی کیلی هر گروه از مرتبه‌ی n با زیرگروهی از S_n یکریخت است. بنابراین اگر G گروهی ۱۰ عضوی باشد، آنگاه G با زیرگروهی از S_{10} یکریخت است.

۳۰ـ گزینه «۴» اگر G گروهی دوری با مولد g باشد، آنگاه همریختی $f: G \to G$ یک خودریختی است اگر و تنها اگر $f(g)$ نیز یک مولد G باشد.
بنابراین تعداد خودریختی‌های G برابر است با تعداد مولدهای G. در این مسأله تعداد مولدهای G برابر است با:

$\varphi(p^5) = p^5 - p^4$

۳۱ـ گزینه «۴» **گزینه «۴»** بررسی گزینه (۱): ابتدا قضیه‌ای را که در روند حل سوال موثر است را یادآوری می کنیم:

قضیه: فرض کنید $\phi: G \to H$ یک بروریختی باشد. در این صورت اگر G دوری باشد،آنگاه H نیز دوری است.

اینک با توجه به قضیه بالا اگر $(\mathbb{Q},+)$ با $(\mathbb{Z},+)$ یک ریخت باشد در این صورت بروریختـی $\phi:(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Q},+)$ وجـود دارد، بنـابراین چـون $(\mathbb{Z},+)$ دوری است نتیجه می‌گیریم $(\mathbb{Q},+)$ دوری است و این تناقض است؛ زیرا $\mathbb{Q}$ دوری نیست. پس گزینه (۱) نادرست است.

بررسی گزینه (۲): در گروه $(\mathbb{R}-\{0\},\times)$ به جز عنصر همانی 1 عضو -1 وجود دارد که وارون آن خودش است. در صورتی‌که در گروه جمعـی $(\mathbb{R},+)$ هیچ ناصفری دارای این خاصیت نیست.

بررسی گزینه (۳): تمام عناصر $(\frac{(\mathbb{Q})}{(\mathbb{Z})},+)$ دارای مرتبه متناهی هستند. در صورتی‌که عناصر ناصفر $(\mathbb{Z},+)$ مرتبه نامتناهی دارند.

بررسی گزینه (۴): $\phi:(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^+,\times)$, $x \to e^x$ یکریختی است؛ زیرا به ازای هـر $x,y \in R$ کـه $\phi(x)=\phi(y)$ مـی‌بینـیم کـه $e^x = e^y$، پـس $x=y$ یعنـی ϕ تکریخـت اسـت. از طرفـی بـه ازای هـر $y \in R^+$ عضـو $Lny \in R$ موجـود اسـت بـه طـوری‌کـه $\phi(Lny)=e^{Lny}=y$، بنابراین ϕ بروریختی است. پس گزینه(۴)صحیح می‌باشد.

۳۲ـ گزینه «۱» چون H دوری است و $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}$ طبق فرض مسئله به طور ایزومورفیک در $Aut(p)$ قرار دارد، لذا H دارای مرتبه $\varphi(|H|)$ است که φ تابع اویلر می‌باشد؛ پس می‌توان نوشت، $|H|=p^n$ که $n>0$ پس $\varphi(|H|)=p^{n-1}(p-1)$ و چون این عدد مقسوم‌علیـه اول بـزرگ‌تـر از P نـدارد. لـذا $|N_G(H):C_G(H)|$ مقسوم علیه اول بزرگتر از p ندارد. این اندیس، مقسوم علیه اول کوچکتر از p نیـز نـدارد. زیـرا چنـین عـدد اولـی $|G|$ را عـاد نمی‌کند، چون H آبلی است. خود p نیز $|N_G(H):C_G(H)|$ را عاد نمی‌کند و لذا طبق قضیه سیلو $|G|$ $|1|$ $P(P-1)$

فصل ششم

«حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ اگر $\mathbb{Z}_{18}$ گروه دوری از مرتبه ۱۸ باشد، آن‌گاه گروه خودریختی‌های آن یعنی $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{18})$ با کدام گروه یکریخت است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\mathbb{Z}_6$ ۲) $\mathbb{Z}_9$ ۳) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ ۴) $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$

۲ـ اندیس زیرگروه $2\mathbb{Z}\times 3\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$ در گروه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ برابر است با: (سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۳ـ فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد به‌طوری‌که برای هر $g\in G-H$ داشته باشیم $g^2\in H$. در این صورت $[G:H]$ کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ـ گروه $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{28}$ با کدام گروه زیر یکریخت است؟ (سراسری ۸۴)

۱) $\mathbb{Z}_{36}\times\mathbb{Z}_7$ ۲) $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{28}$ ۳) $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{14}$ ۴) $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_7$

۵ـ فرض کنید G گروهی دلخواه با حداقل دو عضو و دارای m زیرگروه باشد، در این صورت تعداد زیرگروه‌های حاصلضرب مستقیم $G\times G$: (سراسری ۸۵)

۱) برابر m است. ۲) کمتر از m^2 است. ۳) برابر m^2 است. ۴) بیش از m^2 است.

۶ـ گروه $G=\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_{12}$ و زیرگروه $H=<2>\times<8>$ از آن را در نظر بگیرید. در این صورت $[G:H]$ برابر با کدام است؟ (سراسری ۸۶)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۷ـ تعداد زیرگروه‌های از مرتبه ۲ گروه $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ برابر است با: (سراسری ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۸ـ گروه $\dfrac{\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6}{<(\bar{2},\bar{1})>}$ با کدام یک از گروه‌های زیر یکریخت است؟ (سراسری ۸۷)

۱) گروه چهارتایی کلاین (k_4) ۲) S_3 ۳) $\mathbb{Z}_4$ ۴) $\mathbb{Z}_6$

۹ـ گروه خودریختی‌های $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ به ترتیب عبارتند از: (سراسری ۸۷)

۱) $\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3$ ۲) $\mathbb{Z}_3,S_3$ ۳) $\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3$ ۴) $\mathbb{Z}_2,S_3$

۱۰ـ چند همریختی یک‌به یک از $\mathbb{Z}_6$ به $S_3\times\mathbb{Z}_4$ وجود دارد؟ (سراسری ۸۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱ـ کدام یک از گروه‌های زیر با تولید متناهی می‌باشند؟ (سراسری ۸۷)

۱) $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_6$ ۲) $(\mathbb{Q},+)$ ۳) $\{\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot\}$ ۴) $(\mathbb{R},+)$

۱۲ـ کدام یک از گروه‌های زیر دارای زیرگروه ماکسیمال نمی‌باشد؟ (سراسری ۸۷)

۱) $\mathbb{Z}_{1386}$ ۲) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ ۳) $(\mathbb{R},+)$ ۴) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

۱۳ـ کدام گزاره نادرست است؟ (آزاد ۸۷)

۱) عکس قضیه لاگرانژ برای گروه‌های دوری برقرار است.

۲) اگر گروه G نامتناهی باشد، آن‌گاه G حداقل یک زیرگروه محض نامتناهی دارد.

۳) عکس قضیه لاگرانژ برای گروههای آبلی برقرار است.

۴) حاصلضرب مستقیم گروههای آبلی، آبلی است.

۱۴ـ کدام‌یک از گروه‌های زیر دوری هستند؟ (آزاد ۸۷)

۱) $G=\left\{\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{bmatrix} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}$ ۲) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8$ ۴) $\mathbb{Z}_2\times S_3$

۱۵ـ فرض کنید $M,N\lhd G$ و $M\cap N=\{e\}$، $G=MN$، M و N دوری هستند، در این صورت (آزاد ۸۷)

۱) G دوری است. ۲) G غیر آبلی است.

۳) G آبلی است. ۴) $G'=M$ یا $G'=N$ (G' زیرگروه مشتق G است)

۱۶ـ فرض کنید H و K دو گروه باشند و $G=H\times K$. اگر n عددی طبیعی باشد و $|H|=n$ و $|K|=n+1$، در این صورت کدام گزاره صحیح می‌باشد؟ (سراسری ۸۸)

۱) G گروهی آبلی است.

۲) هر زیرگروه G در G نرمال است.

۳) زیرگروه‌های G به شکل $H\times A$ هستند که A زیرگروهی از K است.

۴) هر زیرگروه G به شکل $H_1\times K_1$ است که H_1 زیرگروه H و K_1 زیرگروه K است.

۱۷ـ گروه ضربی $\mathbb{Q}^*$ و گروه جمعی $\mathbb{Z}_2$ را در نظر بگیرید. تعداد عناصری که در گروه $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Q}^*$ مرتبه‌شان متناهی است برابر است با: (سراسری ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌نهایت

۱۸ـ تعداد زیرگروه‌های $\mathbb{Z}^{15}=\underbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}}_{\text{۱۵ مرتبه}}$ که با شاخص ۵ هستند چقدر است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱۵

۱۹ـ کدام‌یک از گروه‌های زیر متناهی ـ مولد نیست؟ (آزاد ۸۸)

۱) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح است.

۲) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}$ که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح است.

۳) $(\mathbb{Q},+)$ که در آن $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا است.

۴) $F_n[x]$ که $F_n[x]$ گروه چند جمله‌ای‌های با درجه حداکثر n همراه با عمل جمع چندجمله‌ای‌ها و ضرایب در میدان F است.

۲۰ـ گروه $S_3\times\mathbb{Z}_5$ چند زیرگروه ماکسیمال دارد؟ (سراسری ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۱ـ گروه آبلی $\mathbb{Z}_{36}\times\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_6$ با کدام یک از گروه‌های زیر یکریخت است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_9$ ۲) $\mathbb{Z}_{45}\times\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_6$ ۳) $\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{18}\times\mathbb{Z}_6$ ۴) $\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_5$

۲۲ـ اگر X یک زیر مجموعه متناهی از گروه جمعی $\mathbb{Q}$ با حداقل دو عضو باشد، آن‌گاه زیرگروه تولید شده توسط X دارای کدام خاصیت زیر است؟ (سراسری ۸۹)

۱) حاصل‌ضرب مستقیم دو گروه دوری نابدیهی که یکی از آنها متناهی است. ۲) دوری متناهی است.

۳) حاصل‌ضرب مستقیم دو گروه دوری نابدیهی است. ۴) دوری نامتناهی است.

۲۳ـ گروه خودریختی‌های داخلی $S_3\times\mathbb{Z}_6$ با کدام گزینه یکریخت است؟ (سراسری ۹۰)

۱) S_3 ۲) $\mathbb{Z}_6$ ۳) $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6$ ۴) $S_3\times\mathbb{Z}_2$

۲۴ـ فرض کنید G گروهی متناهی باشد و به ازای هر $x\in G$ ، $y\in G$ موجود باشد به طوری که $x=y^2$ در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (سراسری ۹۰)

۱) مرتبه G زوج است. ۲) مرتبه G فرد است. ۳) G دوری است. ۴) G گروه بدیهی است.

۲۵ـ $S_3\times S_3$ را به عنوان زیرگروه S_6 در نظر می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های زوج در این زیرگروه کدام است؟ (دکتری ۹۱)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۲۶ـ فرض کنید G یک گروه باشد، در این‌صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (سراسری ۹۳)

۱) اگر $K \le G$، آن‌گاه $(\frac{G}{K})' = \frac{G'K}{K}$

۲) اگر $H,K \le G$، آن‌گاه $(H \cap K)' \le H' \cap K'$

۳) اگر $H,K \le G$ و $G = HK$، آن‌گاه $G' = H'K'$

۴) اگر $H,K \le G$ و $G = H \times K$، آن‌گاه $G' = H' \times K'$

۲۷ـ فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا باشد، در این‌صورت اگر $\varphi : (\mathbb{Q},+) \to G$ یک همریختی گروهی باشد، آن‌گاه: (دکتری ۹۳)

۱) $\ker\varphi = \mathbb{Q}$

۲) $\ker\varphi = \mathbb{N}$

۳) $\ker\varphi = \mathbb{Z}$

۴) $\ker\varphi = \{0\}$

۲۸ـ ماکزیمم مرتبه ممکن برای یک عضو S_{15} برابر است با: (دکتری ۹۳)

۱) ۱۵

۲) ۱۰۸

۳) ۶۰

۴) ۱۰۵

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل ششم

۱ـ گزینه «۳و۱» اگر $\mathbb{Z}_n$ گروه دوری از مرتبه n باشد، آن‌گاه $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$ که U_n گروه دوری و ضربی اعداد به پیمانه n است. و $|U_n|$ برابر است با $\varphi(n)$ و $\varphi(18) = 6$. همچنین می‌دانیم $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ ، بنابراین گزینه ۳ هم درست می‌باشد.

۲ـ گزینه «۴» چون $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}\times 3\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ و مرتبه گروه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ برابر است با $12 = 2\times 3\times 2$

۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در گروه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$، زیرگروه بدیهی صفر را در نظر می‌گیریم که شاخص آن ۴ است. برای هر عضو $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ مانند a داریم $2a = 0$، پس گزینه ۴ می‌تواند درست باشد. اما در گروه $\mathbb{Z}_4$ زیرگروه $\{0,2\}$ از اندیس ۲ است و برای هر $a \in \mathbb{Z}_4$ داریم $2a \in \{0,2\}$ بنابراین گزینه ۲ هم می‌تواند درست باشد و این سوال مبهم است.

۴ـ گزینه «۱» می‌دانیم $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ گروه دوری است اگر و تنها اگر $(m,n) = 1$ و در این صورت $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$. گروه $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{28}$، دوری از مرتبه‌ی 9×28 است، چون ۹و۲۸ نسبت به هم اولند. گروه $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{36}$ هم دوری از مرتبه $7\times 36 = 9\times 28$ است و هر دو گروه دوری هم مرتبه با هم یکریختند بنابراین گزینه ۱ درست است. هیچکدام از گزینه‌های ۲و۳و۴ به دلیلی که در بالا گفته شد دوری نیستند و بنابراین نادرستند.

۵ـ گزینه «۴» گروه $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ فقط دارای دو زیرگروه بدیهی $<0>$ و $\mathbb{Z}_2$ می‌باشد، اما اگر $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ علاوه بر زیرگروه‌های $<0>\times<0>$، $\mathbb{Z}_2 \times <0>$، $<0> \times \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ زیرگروه دیگری دارد که این زیرگروه $\{(0,0),(1,1)\} = <(1,1)>$ می‌باشد، پس ممکن است گروه $G\times G$ علاوه بر زیرگروه‌هایی به فرم $H\times K$ که $H \le G$ و $K \le G$، زیرگروه‌های دیگری هم داشته باشد، بنابراین تعداد زیرگروه‌های $G\times G$ حداقل m^2 است.

۶ـ گزینه «۲» واضح است که $<2>$ زیرگروه $\mathbb{Z}_8$ با $\mathbb{Z}_4$ و $<8>$ زیرگروه $\mathbb{Z}_{12}$ با $\mathbb{Z}_3$ یکریخت است. بنابراین داریم:

$$\frac{G}{H} = \frac{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}}{<2>\times<8>} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

بنابراین $[G:H]$ برابر با ۸ است.

۷ـ گزینه «۴» واضح است که $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ و $(1,1,0)$ و $(0,1,1)$ و $(1,0,1)$ و $(1,1,1)$ عناصر از مرتبه ۲ گروه $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ می‌باشند بنابراین تعداد زیرگروه‌های مرتبه ۲ گروه $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$، ۷ می‌باشد.

۸ـ گزینه «۳»

$$\left.\begin{array}{l} o_{\mathbb{Z}_4}(2) = \dfrac{o(1)}{(o(1),o(2))} = \dfrac{4}{(4,2)} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ o_{\mathbb{Z}_6}(1) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow o(<2,1>) = [2,6] = 6 \Rightarrow o\left(\frac{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6}{<(2,1)>}\right) = \frac{24}{6} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6}{<(2,1)>} \cong \mathbb{Z}_4$$

۹ـ گزینه «۴» می دانیم $Aut(\mathbb{Z}_n)\cong U_n$ که U_n گروه ضربی اعداد اول به پیمانه n می‌باشد. چون $\mathbb{Z}_۶\cong\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳$ و $\varphi(۶)=۲$ بنابراین $Aut(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳)\cong\mathbb{Z}_۲$، برای $\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲=\{(۰,۰),(۱,۰),(۰,۱),(۱,۱)\}$ همریختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\varphi_۱:\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\to\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\qquad \varphi_۱(x)=x$$

$$\varphi_۲:\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\to\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\qquad \varphi_۲(۰,۰)=(۰,۰),\ \varphi_۲(۱,۰)=(۰,۱),\ \varphi_۲(۱,۱)=(۱,۰),\ \varphi_۲(۰,۱)=(۱,۱)$$

$$\varphi_۳:\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\to\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\qquad \varphi_۲(۰,۰)=(۰,۰),\ \varphi_۳(۱,۰)=(۰,۱),\ \varphi_۳(۰,۱)=(۱,۰),\ \varphi_۳(۱,۱)=(۰,۱)$$

$$\varphi_۴:\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\to\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\qquad \varphi_۲(۰,۰)=(۰,۰),\ \varphi_۴(۱,۰)=(۱,۱),\ \varphi_۴(۰,۱)=(۱,۰),\ \varphi_۴(۱,۱)=(۰,۱)$$

$$\varphi_۵:\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\to\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\qquad \varphi_۲(۰,۰)=(۰,۰),\ \varphi_۵(۱,۰)=(۱,۱),\ \varphi_۵(۰,۱)=(۰,۱),\ \varphi_۵(۱,۱)=(۱,۰)$$

$$\varphi_۶:\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\to\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲\qquad \varphi_۲(۰,۰)=(۰,۰),\ \varphi_۶(۱,۰)=(۱,۰),\ \varphi_۶(۰,۱)=(۱,۱),\ \varphi_۶(۱,۱)=(۰,۱)$$

به‌سادگی می‌توان دید که مثلاً $\varphi_۶$ و $\varphi_۲$ با هم جابجا نمی‌شوند بنابراین $Aut(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲)\cong S_۳$ (تنها گروه‌های از مرتبه ۶، $\mathbb{Z}_۶$ و $S_۳$ می‌باشند.) از طرفی طبق نکته‌ای داشتیم به ازای هر عدد اول p، $|Aut(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p)|=p^۴-p^۳-p^۲+p$ بنابراین $|Aut(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲)|=۲^۴-۲^۳-۲^۲+۲=۶$ یعنی $\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲$ باید با یک گروه ۶ عضوی یکریخت باشد.

۱۰ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم $\varphi:\mathbb{Z}_۶\to S_۳\times\mathbb{Z}_۴$ یک همریختی باشد، طبق اولین قضیه یکریختی $\frac{\mathbb{Z}_۶}{\ker\varphi}\cong Im\varphi$. اگر φ یک به یک باشد، آن‌گاه $\ker\varphi=\{e\}$، بنابراین $Im\varphi\cong\mathbb{Z}_۶$. چون $\mathbb{Z}_۶$ گروهی دوری از مرتبهٔ ۶ است، $Im\varphi$ نیز چنین خواهد بود، بنابراین تعداد همریختی‌های یک به یک از $\mathbb{Z}_۶$ به $S_۳\times\mathbb{Z}_۴$ برابر تعداد اعضای مرتبهٔ ۶ از گروه $S_۳\times\mathbb{Z}_۴$ است. همان‌طور که می‌دانیم به ازای عضو $(a,b)\in S_۳\times\mathbb{Z}_۴$ داریم $o(a,b)=[a,b]$. از طرفی ۲ تنها عضو مرتبهٔ ۲ از $\mathbb{Z}_۴$ و (۱۲۳) و (۱۳۲) تنها اعضای مرتبهٔ ۳ از $S_۳$ هستند، پس ((۱۲۳),۲) و ((۱۳۲),۲) تنها عناصر مرتبهٔ ۶ از گروه $S_۳\times\mathbb{Z}_۴$ خواهند بود. بدین ترتیب ۲ همریختی یک به یک از گروه $\mathbb{Z}_۶$ به $S_۳\times\mathbb{Z}_۴$ وجود دارد.

۱۱ـ گزینه «۱» گروه $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_۶$ توسط سه عضو $(۱,۰,۰)$ و $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,۱)$ تولید می‌شود، بنابراین با تولید متناهی است. گروه $(\mathbb{Q},+)$ متناهی مولد نیست. زیرا اگر $(\mathbb{Q},+)$ متناهی مولد باشد، آن‌گاه عناصر $\frac{a_۱}{b_۱},...,\frac{a_n}{b_n}$ در $\mathbb{Q}$ وجود دارند که $\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\frac{a_۱}{b_۱}+...+\mathbb{Z}\frac{a_n}{b_n}$. در این صورت به ازای حداقل یک عدد اول p داریم $\forall ۱\le i\le n, p\nmid b_i$. بنابراین $\frac{۱}{p}$ در گروه تولید شده توسط $\frac{a_۱}{b_۱}$ تا $\frac{a_n}{b_n}$ قرار نمی‌گیرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\{\mathbb{Q}-\{۰\},.\}$ متناهی مولد نیست. گروه $(\mathbb{R},+)$ هم متناهی مولد نیست، زیرا اگر با تولید متناهی باشد، آن‌گاه به ازای $x_۱,...,x_n\in\mathbb{R}$ داریم $\mathbb{R}=\mathbb{Z}x_۱+...+\mathbb{Z}x_n$، در این صورت $\mathbb{R}$ شمارش‌پذیر خواهد بود که تناقض می‌باشد.

۱۲ـ گزینه «۳» به برهان خلف فرض می‌کنیم M زیرگروه ماکسیمال $(\mathbb{R},+)$ باشد. در این صورت طبق قضیه‌ای $\frac{\mathbb{R}}{M}$ گروهی ساده از مرتبهٔ عددی اول چون p است، بنابراین به ازای $a+M\in\frac{\mathbb{R}}{M}$ داریم:

$$p(a+M)=M\Rightarrow pa+M=M\Rightarrow pa\in M$$

به خصوص به ازای $\frac{a}{p}+M\in\frac{\mathbb{R}}{M}$ داریم

$$p(\frac{a}{p}+M)=M\Rightarrow a+M=M\Rightarrow a\in M\Rightarrow\mathbb{R}\subseteq M$$

و از آن نتیجه می‌شود $M=\mathbb{R}$ که تناقض است، لذا $(\mathbb{R},+)$ دارای زیرگروه ماکسیمال نمی‌باشد.

گروه $\mathbb{Z}_{۱۳۸۶}$ زیرگروه ماکسیمال دارد زیرا گروهی متناهی است و در فصل زیرگروهها ثابت شد که هرگروه متناهی دارای زیرگروه ماکسیمال است.

گروه $\mathbb{R}-\{۰\}$ هم زیرگروه ماکسیمال دارد که زیرگروه ماکسیمال آن $\mathbb{R}^+$ می‌باشد. برای اثبات آن فرض می‌کنیم H زیرگروهی از $\mathbb{R}-\{۰\}$ باشد به طوری که $\mathbb{R}^+\subset H\subset\mathbb{R}^*$، چون $\mathbb{R}^+$ زیرگروه سره H است، H باید شامل حداقل یک عضو منفی مثل h باشد، پس $-\frac{۱}{h}\in\mathbb{R}^+$ و این نتیجه می‌دهد $h\times\frac{-۱}{h}\in H$ $-۱=$، بنابراین $\mathbb{R}^-\subseteq H$، از این رو $H=\mathbb{R}^*$ و این ثابت می‌کند $\mathbb{R}^+$ زیرگروه ماکسیمال $\mathbb{R}-\{۰\}$ است.

گزینهٔ (۴) هم زیرگروه ماکسیمال دارد. به ازای هر عدد اول p، زیرگروه‌های $p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}\times p\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ماکسیمال هستند.

۱۳ـ گزینه «۲» گروه $G=\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ گروهی نامتناهی است اما هر زیرگروه سره G متناهی است.

عکس قضیه لاگرانژ در مورد گروه‌های آبلی درست است و حاصلضرب گروههای آبلی هم آبلی است.

۱۴ـ گزینه «۱» تابع φ از گروه G به $\mathbb{Z}$ را بصورت $\varphi(\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{bmatrix})$ تعریف می‌کنیم، با بررسی ساده دیده می‌شود که φ همریختی ۱-۱ و پوشاست. بنابراین φ یکریختی است و چون $\mathbb{Z}$ دوری است، G هم دوری است. گروه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ دوری نیست، زیرا هیچ عضوی در $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ نمی‌تواند عضو $(1,0)$ را تولید کند، پس گزینه‌ی ۲ نادرست است. گزینه‌ی ۳ درست نیست زیرا در صورتی $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ دوری است که $(m,n)=1$، اما می‌بینیم که $(4,8)\neq 1$. گزینه‌ی۴ هم نادرست است، زیرا می‌دانیم گروه‌های دوری آبلی هستند ولی چون S_3 ناآبلی است گروه $S_3\times\mathbb{Z}_2$ آبلی نیست، پس دوری نمی‌باشد.

۱۵ـ گزینه «۳» ابتدا نشان می‌دهیم هر عنصر M با هر عنصر N جابه جا می‌شود، فرض می‌کنیم $a\in M$ و $b\in N$ باشد، در این صورت عنصر $aba^{-1}b^{-1}$ را در نظر می‌گیریم چون M در G نرمال است، $a(ba^{-1}a^{-1})\in M$ و چون N در G نرمال است، $(aba^{-1})b^{-1}\in N$. در نتیجه $aba^{-1}b^{-1}\in M\bigcap N=\{e\}$ و بنابراین $ab=ba$. حال فرض می‌کنیم $M=<a>$ و $N=<b>$ باشد، در این صورت اگر g' و g عناصر دلخواه G باشند، آن‌گاه $g=a^k b^{k'}$ و $g'=a^n b^{n'}$ و $gg'=(a^k b^{k'})(a^n b^{n'})=(a^n b^{n'})(a^k b^{k'})=g'g$، زیرا عناصر M و N با هم جابه جا می‌شوند، بنابراین G آبلی است.

گروه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $N=\mathbb{Z}\times\{e\}$ و $M=\{e\}\times\mathbb{Z}$، در این صورت $M\bigcap N=\{e\}$ و $M,N\leq G$ و M و N دوری می‌باشند (هر دو با $\mathbb{Z}$ یکریخت می‌باشند) ولی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ دوری نیست.

۱۶ـ گزینه «۴» فرض می‌کنیم که N زیرگروهی از G باشد. در این صورت دو مجموعه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$K_1=\{b\in K\,|\,(a,b)\in N$ باشد که H ای در a$\}$ و $H_1=\{a\in H\,|\,(a,b)\in N$ باشد که K ای در b$\}$

ثابت می‌کنیم که H_1 و K_1 زیرگروههای H و K می‌باشند. اگر a_1 و a_2 در H_1 باشند عضوهای b_1 و b_2 در K هستند که (a_1,b_1) و (a_2,b_2) در N هستند. بنابراین $(a_2^{-1},b_2^{-1})=(a_2,b_2)^{-1}\in N$ بنابراین داریم: $(a_1,b_1)(a_2^{-1},b_2^{-1})=(a_1a_2^{-1},b_1b_2^{-1})\in N\Rightarrow a_1a_2^{-1}\in H\Rightarrow H_1\leq H$

به همین طریق می‌توان اثبات کرد که K_1 زیرگروهی از K است و $N=H_1\times K_1$. اگر $H=S_3$ و $K=\mathbb{Z}_7$ آن‌گاه $H\times K$ آبلی نیست و زیرگروه $H_1\times K$ که $H_1=<(1\ 2)>$ در $H\times K$ نرمال نیست. بنابراین گزینه‌های دیگر نادرست هستند.

۱۷ـ گزینه «۱» تنها عضوی که در $\mathbb{Q}^*$ دارای مرتبه متناهی است $1_{\mathbb{Q}^*}$ است. بنابراین $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Q}^*$ تنها دارای دو عضو $(0,1)$ و $(1,1)$ می‌باشد. که دارای مرتبه متناهی است.

۱۸ـ گزینه «۴» واضح است که $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\cdots\times 5\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}$ زیرگروهی از $\mathbb{Z}^{15}$ است به‌طوری‌که:

$$\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\cdots\times 5\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}}=\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}\times\cdots\times\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\times\cdots\times\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{Z}_5$$

بنابراین $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\cdots\times 5\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}$ زیرگروهی با شاخص ۵ است. تعداد این زیرگروه‌ها ۱۵ تا است که با تغییر جای $\mathbb{Z}$ به $5\mathbb{Z}$ در هر مولفه به دست می‌آید.

۱۹ـ گزینه «۳ و ۴» در متن درس نشان داده شده است که $\mathbb{Q}$ متناهی مولد نیست. اگر $F=\mathbb{Q}$ باشد، چون $\mathbb{Q}$ متناهی مولد نیست $\mathbb{Q}_n=[x]$ هم متناهی مولد نمی‌باشد. گزینه ۱ درست است. به راحتی دیده می‌شود $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=<(1,0),(0,1)>$. گزینه ۲ درست است زیرا $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}=<(\bar{0},1),(\bar{1},1)>$.

۲۰ـ گزینه «۲» زیرگروه‌های $S_3\times\mathbb{Z}_5$ بصورت $H\times K$ می‌باشند که H زیرگروه S_3 و K زیرگروه $\mathbb{Z}_5$ است. زیرگروه‌های ماکسیمال $S_3\times\mathbb{Z}_5$ عبارتند از:

(توجه شود که $|S_3|=6$ و $|\mathbb{Z}_5|=5$) $\{1,(123),(132)\}\times\mathbb{Z}_5,\{(13),1\}\times\mathbb{Z}_5,\{(23),1\}\times S_5,\{(12),1\}\times\mathbb{Z}_5=S_3\times\{0\}$

۲۱ـ گزینه «۳» می‌دانیم $\mathbb{Z}_{mn}\cong\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ اگر تنها اگر $(m,n)=1$ بنابراین:

$\mathbb{Z}_{10}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ و $\mathbb{Z}_{36}\cong\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_4$ و $\mathbb{Z}_{36}\times\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_6\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6$ و $\mathbb{Z}_{18}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9$ و $\mathbb{Z}_{20}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_5$

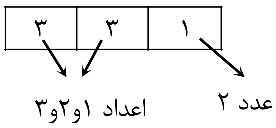
در نتیجه $\mathbb{Z}_{36}\times\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_6\cong\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{18}\times\mathbb{Z}_6$.

۲۲ـ گزینه «۴» اگر $\overline{X}$ شامل n عنصر $\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}$ باشد، آن‌گاه هر عنصر $<x>$ به صورت $k_1\frac{a_1}{b_1}+\cdots+k_n\frac{a_n}{b_n}$ است که $k_i\in\mathbb{Z}$، بنابراین هر عنصر $<x>$ بصورت $\frac{a}{b_1b_2\dots b_n}$ است. به خصوص $<x>\le<\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n}>$ است. و چون زیرگروه هر گروه دوری دوری است بنابراین $<x>$ دوری است.

۲۳ـ گزینه «۱» می‌دانیم اگر G گروهی دلخواه $Inn(G)$ گروه خودریختی‌های داخلی G باشد آن‌گاه $Inn(G)\cong\frac{G}{Z(G)}$. همچنین می‌دانیم $Z(S_3)=\{e\}$ و $Z(\mathbb{Z}_6)=\mathbb{Z}_6$ بنابراین $Z(S_3\times\mathbb{Z}_6)=\{e\}\times\mathbb{Z}_6$. حال $Inn(S_3\times\mathbb{Z}_6)\cong\frac{S_3\times\mathbb{Z}_6}{Z(S_3\times\mathbb{Z}_6)}=\frac{S_3\times\mathbb{Z}_6}{\{e\}\times\mathbb{Z}_6}\cong S_3$

۲۴ـ گزینه «۲» برای مثال گروه $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ در فرض مسأله صدق می‌کند. این گروه، گروهی غیرهمانی و غیر دوری از مرتبه‌ی ۹ است. بنابراین گزینه‌های ۱، ۳و۴ برقرار نیستند و لذا گزینه‌ی ۲ درست است.

۲۵ـ گزینه «۴» اگر S_3 نشانگر اعداد ۱ تا ۳ و S_6 نشانگر اعداد ۱ تا ۶ باشد در این صورت چون از تکراری بودن یا نبودن اعداد صحبتی به میان نیامده، تعداد جایگشت‌های زوج در S_3 عبارت است از :



و به این دلیل که زیرگروه به صورت $S_3\times S_3$ می‌باشد، جایگشت بالا ۲بار تکرار می‌شود و جواب مسأله عبارت است از: $2\times3\times3\times1=18$

۲۶ـ گزینه «۲» برای رد گزینه (۲) از مثال نقض استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $S_3=\{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$ و $A_4=\{e,(123),(124),(134),(234),(132),(142),(143),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$.

می‌بینیم که $S_3\cap A_4=S_3$. از طرفی $S'_3=A_3=\{e,(123),(132)\}$ و $A'_4=V_4=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ که V_4 همان گروه چهارتایی کلاین است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}A_4\cap S_3=A_3\Rightarrow(A_4\cap S_3)'=A'_3=A_3\\ A'_4=V_4,S'_3=A_3\Rightarrow A'_4\cap S'_3=V_4\cap A_3=\{e\}\end{array}\right.\Rightarrow(A_4\cap S_3)'\not\leq A'_4\cap S'_3$$

۲۷ـ گزینه «۱» طبق قضیهٔ اساسی یکریختی داریم $\frac{\mathbb{Q}}{\ker\varphi}\cong Im\varphi\le G$. چون G گروهی متناهی است، پس $Im\varphi$ و در نتیجه $\frac{\mathbb{Q}}{\ker\varphi}$ گروهی متناهی خواهد بود. اما $(\mathbb{Q},+)$ نمی‌تواند زیرگروه سره‌ای با شاخص متناهی داشته باشد، پس $\ker\varphi=\mathbb{Q}$.

۲۸ـ گزینه «۴» می‌دانیم مرتبهٔ جایگشت x که از حاصل‌ضرب k دور مجزای α_1، α_2، …، α_k تشکیل شده است، برابر است با کوچکترین مضرب مشترک مرتبهٔ α_iها. ماکزیمم مرتبهٔ ممکن برای جایگشت x از S_{15} وقتی اتفاق می‌افتد که x حاصل ضرب سه دور مجزا به طول ۳، ۵ و ۷ باشد، بنابراین: $o(x)=[3,5,7]=105$

فصل هفتم

«حلقه‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم

۱ـ حوزه صحیح D وقتی میدان است که .... (سراسری ۸۲)

۱) D متناهی باشد.
۲) D نامتناهی باشد.
۳) به ازای هر $a,b \in D$ اگر $a,b \neq 0$، آن‌گاه $ab \neq 0$.
۴) گروه جمعی D دوری است.

۲ـ اگر R حلقه‌ای یکدار باشد و به ازای $x \in R$، $x^3 = 0$، آن‌گاه $(1-x)$ (سراسری ۸۲)

۱) وارون‌پذیر است.
۲) وارون‌پذیر نیست.
۳) مقسوم‌علیه راست صفر است.
۴) مقسوم‌علیه چپ صفر است.

۳ـ اگر R حلقه‌ای متناهی و یکدار باشد، در این صورت: (سراسری ۸۳)

۱) به ازای هر $x \in R$ عدد طبیعی $n > 1$ وجود دارد به طوری که $x^n = x$.
۲) هر عضو R وارون‌پذیر یا مقسوم‌علیه صفر است.
۳) اگر R چهار عضوی باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای جابه‌جایی است.
۴) عناصر وارون‌پذیر R تشکیل گروهی دوری می‌دهند.

۴ـ اگر R حلقه‌ی چهارگان‌های حقیقی ($R = Q_R$) باشد، کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟ (سراسری ۸۶)

۱) معادله‌ی $x^2 = -1$ دارای تعداد متناهی جواب است.
۲) R یک حلقه بخشی است.
۳) اگر F_p یک میدان متناهی از مرتبه p باشد، Q_{F_p} یک میدان است.
۴) Q_{F_p} یک حلقه بولی است.

۵ـ در حلقه‌ی $(\mathbb{Z}_{30},+,.)$ چند مقسوم‌علیه صفر وجود دارد؟ (سراسری ۸۷)

۱) ۶
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۲

۶ـ در کدام‌یک از حلقه‌های زیر، مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر با مجموعه‌ی تمام عناصر وارون‌ناپذیر مساوی نمی‌باشند؟ (سراسری ۸۷)

۱) هر میدان
۲) هر حلقه‌ی متناهی یکدار
۳) $M_n(R)$
۴) $\mathbb{Z}$

۷ـ تعداد عناصر یکال حلقه $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ برابر است با: (سراسری ۹۳)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۴

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هفتم

۱ـ گزینه «۱» فرض کنید $D = \{0,1,x,\dots,x_n\}$ حوزه صحیح متناهی باشد. حال به ازای $x \in D - \{0\}$، عناصر $x, xx_1, \dots, xx_n$ را در نظر بگیرید، به طوری که متمایز از D باشند. در غیر این صورت اگر به ازای هر $1 \le j,k \le n$، $x_j x_i = x_k x_i$، آن‌گاه $x_j = x_k$. با توجه به این‌که $Dx = D$ خواهیم داشت $\{0,1,x_1,\dots,x_n\} = \{0,x,xx_1,\dots,xx_n\}$. بنابراین $xx_j = 1$. پس هر عضو ناصفر D وارون‌پذیر است و در نتیجه D یک میدان می‌باشد. لذا گزینه(۱) درست است. حال اگر حوزه صحیح $\mathbb{Z}$ را درنظر بگیرید، با توجه به این که $\mathbb{Z}$ یک میدان نیست، گزینه‌های دیگر رد می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ گزینه «۱» از آن‌جا که $x^3 = 0$ خواهیم داشت:

$$(1-x)(1+x+x^2) = (1+x+x^2)(1-x) = 1-x^3 = 1$$

بنابراین $(1-x)$ وارون‌پذیر است.

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۲» فرض کنید $R = \{x_1,\dots,x_n\}$ یک حلقه‌ی n عضوی باشد. هم‌چنین فرض کنید به ازای هر $1 \le i \le n$، x_i وارون‌پذیر نباشد. نشان می‌دهیم x_i مقسوم‌علیه صفر است. برای این منظور به ازای هر $x_i \in R$، داریم $x_i x_k \neq 1$ به‌طوری که $1 \le i,k \le n$. بنابراین $x_i x_j = x_i x_k$ که در آن $1 \le i,j \le n$ و $j \neq k$. لذا داریم $(x_j - x_k)x_i = 0$. از آن‌جا که $x_j - x_k \neq 0$، پس x_i مقسوم‌علیه صفر است.

۴ــ گزینه «۲» با توجه به آن‌چه در متن درس بیان شده است می‌دانیم R یک حلقه چهارگان‌های حقیقی است، هرگاه به ازای عضو $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$، $\alpha=(\frac{a_0}{\beta})-(\frac{a_1}{\beta})i-(\frac{a_2}{\beta})j-(\frac{a_3}{\beta})k$ وارون ضربی x خواهد بود که در آن $\beta=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$، $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$، $ij=-ji=k$، $jk=-kj=i$ و $ki=-ik=j$. لذا R یک حلقه بخشی است. پس گزینه (۲) درست است. حال اگر F_p یک میدان متناهی از مرتبه p باشد، آن‌گاه Q_{F_p} یک حلقه بخشی است که در آن $ij=-ji$. پس Q_{F_p} میدان نمی‌باشد. لذا گزینه(۳) نادرست است، هم‌چنین از آن‌جا که $i^2=-1$، پس Q_{Fp} یک حلقه‌ی بولی نیز نمی‌باشد.

۵ـ گزینه «۴» تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه $\mathbb{Z}_{30}$ برابر است با $30-\varphi(30)$. بنابراین داریم:

$$\varphi(30)=30(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=8 \Rightarrow \text{تعداد مقسوم علیه‌های صفر}=30-\varphi(30)=22$$

۶ـ گزینه «۴» ابتدا به این نکته توجه داشته باشید که هر عضوی از حلقه که وارون نداشته باشد، مقسوم‌علیه صفر است. با توجه به این مطلب ابتدا گزینه (۲) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید R حلقه متناهی یکدار باشد. قرار دهید $R=\{x_1,\dots,x_n\}$. اگر x_i وارون نداشته باشد، آن‌گاه $x_ix_j\neq 1$ به ازای هر $1\leq j\leq n$. بنابراین داریم $x_ix_j=x_ix_k$ به طوری که $j\neq k$. پس $x_i(x_j-x_k)=0$. لذا x_i مقسوم علیه صفر است. از طرفی هر میدان دارای شرایط مذکور می‌باشد. حال حلقه‌ی ماتریس‌های $M_n(R)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A\in M_n(R)$. در این صورت اگر $\det A\neq 0$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است. اگر $\det A=0$، آن‌گاه A مقسوم‌علیه صفر است. بنابراین گزینه (۳) نیز در شرایط مسئله صادق است. اما حلقه $\mathbb{Z}$، دارای عضو وارون‌پذیر نیست و دارای مقسوم‌علیه صفر نیز نمی‌باشد. پس گزینه (۴) فاقد شرایط مورد نظر مسئله است.

۷ـ گزینه «۴» اگر $a+bi\in\mathbb{Z}[i]$ یکال (وارون‌پذیر) باشد، آن‌گاه $c+di\in\mathbb{Z}[i]$ موجود است به‌طوری که $(a+bi)(c+di)=1$. حال از طرفین این تساوی مزدوج می‌گیریم و نتیجه برابر خواهد بود با $(a-bi)(c-di)=1$

اینک دو تساوی به دست آمده را در هم ضرب می‌کنیم و به ازای هر $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ خواهیم داشت: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$

بنابراین $a^2+b^2=1$ و $c^2+d^2=1$ که نتیجه می‌شود $a=0$، $b=\pm1$ یا $b=0$، $a=\pm1$. پس مجموعه یکال‌های (عناصر وارون‌پذیر) $\mathbb{Z}[i]$ عبارت است از $\{\pm1,\pm i\}$. بنابراین $\mathbb{Z}[i]$ دارای چهار یکال است.

فصل هشتم

«زیرحلقه‌ها و ایده‌آل‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هشتم

۱ــ اگر m و n به ترتیب مشخصه‌های حلقه‌های جابه‌جایی R و R' باشند، در این صورت مشخصه $R \times R'$ برابر است با: (سراسری ۸۳)

۱) $\gcd(m,n)$ ۲) $[m,n]$ ۳) mn ۴) $\min\{m,n\}$

۲ــ اگر F یک میدان و D حلقه تقسیم باشد، آن‌گاه $F \times D$ یک: (سراسری ۸۳)

۱) حلقه تقسیم نیست.
۲) میدان است.
۳) حلقه تقسیم است.
۴) حلقه جابه‌جایی است.

۳ــ فرض کنید R یک حلقه باشد به‌طوری که $|R| = n$ در این صورت کدام گزینه درست است؟ (سراسری ۸۵)

۱) اگر n اول باشد، R جابه‌جایی است.
۲) اگر $n = ۲$، R میدان است.
۳) اگر $n = ۴$، حلقه R جابه‌جایی است.
۴) اگر $n = ۸$، حلقه R جابه‌جایی است.

۴ــ فرض کنید R حلقه یکدار غیر بدیهی است به طوری که هر زیرحلقه آن، یک ایده‌آل است در این صورت .... (سراسری ۸۶)

۱) $R \cong \mathbb{Q}$ ۲) $R \cong \mathbb{Z}_n$ ۳) $R \cong \mathbb{Z}$ یا $R \cong \mathbb{Z}_n$ ۴) $R \cong \mathbb{Z}$ یا $R \cong \mathbb{Q}$

۵ــ فرض کنید R یک حلقه‌ای تقسیم است. مرکز R کدام خاصیت زیر را دارا است؟ (سراسری ۸۷)

۱) متناهی
۲) مقسوم‌علیه صفر دارد.
۳) میدان است.
۴) عضو وارون‌پذیر ناصفر ندارد.

۶ــ فرض کنید $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -۳b & a \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$ را با جمع و ضرب معمولی ماتریسی در نظر بگیرید. در این صورت در مورد S چه می‌توان گفت؟

(سراسری ۹۰)

۱) S حلقه نیست.
۲) S یک میدان است.
۳) S حلقه‌ای با سه ایده‌آل است.
۴) S تحت ضرب یک گروه است.

۷ــ تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^۲ = ۰$ در حلقه‌ی $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^۳} \times \mathbb{Z}_{p^۵}$ (p اول است)، کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $p^۳$ ۲) $p^۵$ ۳) $p^۶$ ۴) $p^۸$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل هشتم

۱ــ گزینه «۲» مشخصه حلقه R برابر است با کوچکترین عدد صحیح مثبت n به طوری که به ازای هر $a \in R$، $na = ۰$ باشد. فرض کنید $\mathrm{Char}R = m$ و $\mathrm{Char}R' = n$، بنابراین داریم:

$$\mathrm{Char}(R \times R') = \mathrm{lcm}(\mathrm{Char}R, \mathrm{Char}R') = [m,n]$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲ــ گزینه «۱» عناصر $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ متعلق به حلقه $F \times D$ را درنظر بگیرید. لذا خواهیم داشت: $(۱,۰)(۰,۱) = (۰,۰)$

پس $F \times D$ دارای مقسوم‌علیه صفر است. بنابراین میدان نمی‌باشد. از طرفی عضو $(۱,۰)$ وارون‌پذیر نیست. زیرا به ازای هر عضو $(a,b) \in F \times D$ داریم:

$(۱,۰)(a,b) = (a,۰)$

پس $F \times D$ یک حلقه تقسیم نمی‌باشد. حال اگر فرض کنیم D یک حلقه جابه‌جایی نباشد، آن‌گاه $F \times D$ نیز جابه‌جایی نخواهد بود. لذا گزینه (۴) هم رد می‌شود. بنابراین گزینه (۱) پاسخ موردنظر است.

۳ـ گزینه «۱» با توجه به آن‌چه در متن درس بیان شده است، می‌دانیم حلقه $\mathbb{Z}$ دارای زیرحلقه‌هایی بفرم $n\mathbb{Z}$ است و زیرحلقه‌های حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n\,(n\geq 2)$ بفرم $m\mathbb{Z}$هایی است که $n\,|\,m$. در این صورت هر زیرحلقه $\mathbb{Z}_n$ ایده‌آلی از آن نیز می‌باشد. بنابراین گزینه (۳) درست است. از طرف دیگر می‌دانیم $\mathbb{Z}$ زیرحلقه $\mathbb{Q}$ است ولی ایده‌آلی از آن نیست. پس گزینه‌های دیگر رد می‌شود.

۴ـ گزینه «۳» می‌دانیم هر زیرحلقه $\mathbb{Z}$ به صورت $n\mathbb{Z}$ است. همچنین هر زیرحلقه $\mathbb{Z}_n$ به شکل $\frac{m\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ است که $m\,|\,n$. لذا هر زیرحلقه $\mathbb{Z}_n$ یک ایده‌آل $\mathbb{Z}_n$ است. پس گزینه (۳) درست است. $\mathbb{Z}$ زیرحلقه $\mathbb{Q}$ می‌باشد این در حالی‌است که ایده‌آل آن نیست. پس گزینه‌های (۱) و (۴) درست نمی‌باشند.

۵ـ گزینه «۳» می‌دانیم $Z(R)=\{x\in R\,|\,ax=xa\}$ زیرحلقه جابه‌جایی یکدار حلقه R است. فرض کنید $0\neq x\in Z(R)$. لذا $\langle x\rangle = xR$ ایده‌آل ناصفر حلقه R است. چون R یک حلقه تقسیم است بنابراین دارای ایده‌آل‌های بدیهی است. لذا $xR=R$ یا $xR=\langle 0\rangle$. چون $x\neq 0$ پس $xR\neq\langle 0\rangle$ لذا $xR=R$. از طرفی $1\in R$. بنابراین عضو $y\in R$ موجود است به طوری که $xy=1$ و این یعنی x وارون‌پذیر است. بنابراین $Z(R)$ یک میدان است.

۶ـ گزینه «۲» به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که S با اعمال جمع و ضرب ماتریسی یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار است و $1_S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

حال اگر $x=\begin{bmatrix}a & b\\ -3b & a\end{bmatrix}\neq 0$ آن‌گاه a و b همزمان صفر نیستند. در چنین حالتی $\det(x)=a^2+3b^2\neq 0$ و لذا x وارون‌پذیر است. پس S یک میدان است.

۷ـ گزینه «۱» ابتدا دقت شود اعضای R به صورت سه‌تایی‌های (a,b,c) می‌باشند, که در آن $a\in\mathbb{Z}_P$، $b\in\mathbb{Z}_{P3}$ و $c\in\mathbb{Z}_{P5}$. اینک

$(a,b,c)^2=0$ مستلزم این است که، $a^2\overset{P}{\equiv}0$, $b^2\overset{P^3}{\equiv}0$ و $c^2\overset{P^5}{\equiv}0$.

به وضوح تنها حالت ممکن برای a، عدد اول P است. از طرفی حالت‌های ممکن برای b به صورت زیر است:

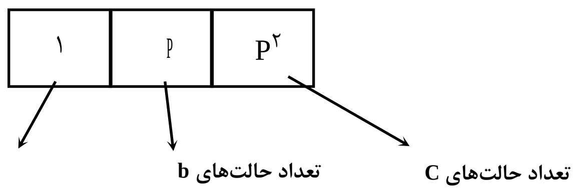
$b=1\times p^2$ و $2\times p^2$ و $3\times p^2$ و $\cdots$ و $P\times P^2$

بنابراین تعداد bهای مورد نظر برابر عدد اول P می‌باشد.

برای این‌که c در رابطه $c^2\overset{P^5}{\equiv}0$ صدق کند باید:

$$P^5\,|\,c^2 \Rightarrow c\times c=p\times p\times p\times p\times p \Rightarrow P^3\,|\,c$$

بنابراین $C=1\times p^3$ و $2\times p^3$ و $3\times p^3$ و $\cdots$ و $(p^2-1)p^3$ و $P^2\times P^3$، پس تعداد c های ممکن برابر P^2 است.بررسی بالا حاکی از آن است که تعداد جواب‌های معادله $x^2=0$ در $R=\mathbb{Z}_P\times\mathbb{Z}_{P3}\times\mathbb{Z}_{P5}$ برابر P^3 است زیرا:



بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

فصل نهم

«ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال و همریختی حلقه‌ها

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل نهم

۱ـ حلقه $\mathbb{Z}_6$ دارای دو زیرحلقه یکریخت، با میدان $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ می‌باشد که عبارتند از: (سراسری ۸۳)

۱) $\{3,4\}$ و $\{0,1,2\}$ ۲) $\{4,5\}$ و $\{1,2,3\}$ ۳) $\{0,5\}$ و $\{0,2,4\}$ ۴) $\{0,3\}$ و $\{0,2,4\}$

۲ـ اگر $\{0\}$ ایده‌آل اول در حلقه جابه‌جایی R باشد، آن‌گاه: (سراسری ۸۴)

۱) R دارای مقسوم‌علیه صفر نیست.
۲) R میدان است.
۳) R دارای ایده‌آل اول غیر بدیهی نیست.
۴) تعداد ایده‌آل‌های اول در R عددی متناهی است.

۳ـ فرض کنید M یک ایده‌آل ماکسیمال حلقه جابه‌جایی یکدار و متناهی R است. در این صورت مشخصه حلقه $\frac{R}{M}$ برابر است با: (سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) یک عدد اول ۳) مجذور یک عدد اول ۴) توانی از یک عدد اول

۴ـ در $\mathbb{Z}$ ایده‌آل‌های اول دارای کدام خاصیت هستند؟ (سراسری ۸۴)

۱) ماکسیمال هستند.
۲) شامل عدد اول می‌باشند.
۳) یا صفرند یا به شکل $p\mathbb{Z}$ می‌باشند که p یک عدد اول است.
۴) فقط $\{0\}$ ایده‌آل اول $\mathbb{Z}$ است.

۵ـ حلقه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ و ایده‌آل $I=\{(x,0)|x\in\mathbb{Z}\}$ از آن را در نظر بگیرید. در این صورت ایده‌آل I .... (سراسری ۸۶)

۱) اول نیست.
۲) اول است ولی ماکسیمال نیست.
۳) هم اول و هم ماکسیمال است.
۴) تنها ایده‌آل اول حلقه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ است.

۶ـ همه موارد زیر صحیح‌اند به جزء : (سراسری ۸۶)

۱) تنها دو همریختی از R به R وجود دارد.
۲) $2\mathbb{Z}\simeq 3\mathbb{Z}$ (به عنوان حلقه)
۳) اگر R حلقه‌ای باشد که در آن $(R,+)$ یک گروه دوری باشد، آن‌گاه R آبلی است.
۴) هر همریختی حلقه‌ای $\mathbb{Z}$، همریختی صفر یا همریختی همانی است.

۷ـ فرض کنید R و S دو حلقه یکدار باشند و $f:R\to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد، در چه صورت $f(1_R)$ مساوی 1_S است؟ (سراسری ۸۸)

۱) f پوشا است. ۲) f یک به یک باشد. ۳) S متناهی باشد. ۴) R حوزه صحیح باشد.

۸ـ فرض کنید p یک عدد اول است و ایده‌آل‌های $I=p\mathbb{Z}$ و $J=p^2\mathbb{Z}$ از $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. در این صورت حلقه $\frac{I}{J}$ دارای کدام خاصیت زیر است؟

(سراسری ۸۹)

۱) میدان است. ۲) با حلقه $\mathbb{Z}_{p^2}$ یکریخت است. ۳) مقسوم علیه نابدیهی صفر دارد. ۴) با گروه ضربی $\mathbb{Z}_p$ یکریخت است.

۹ـ حلقه $R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix}\middle| a\in\mathbb{Z};b,c\in\mathbb{Q}\right\}$ همراه با جمع و ضرب ماتریس‌ها را در نظر بگیرید. فرض کنید $I=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{bmatrix}\middle| a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{Q}\right\}$

و $J=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c\end{bmatrix}\middle| a\in\mathbb{Z};c\in\mathbb{Q}\right\}$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\mathbb{R}}{I}$ با حلقه $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ یکریخت است.
۲) $\frac{\mathbb{R}}{J}$ با حلقه اعداد گویا یکریخت است.
۳) $\frac{\mathbb{R}}{I}$ با حلقه اعداد گویا یکریخت است.
۴) $\frac{\mathbb{R}}{J}$ با حلقه $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ یکریخت است.

۱۰ـ فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد به طوری که به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم $x^2 = x$. اگر I ایده‌آلی از حلقه R باشد، کدام گزینه با سایرین معادل نیست؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_2$
۲) به ازای هر ایده‌آل J در R، $IJ = I \bigcap J$
۳) I ایده‌آل اول است.
۴) I ایده‌آل ماکسیمال است.

۱۱ـ فرض کنید R حلقه‌ای یکدار بوده و M یک ایده‌آل ماکسیمال دوطرفه‌ی R باشد. در این صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر درستند؟ (دکتری ۹۱)

۱) $\frac{R}{M}$ میدان است.
۲) $\frac{R}{M}$ ممکن است مقسوم علیه صفر نابدیهی داشته باشد.
۳) $\frac{R}{M}$ حلقه‌ی تقسیم است.
۴) $\frac{R}{M}$ حلقه‌ای متناهی است.

۱۲ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی یکدار است و P_1 و P_2 دو ایده‌آل از حلقه‌ی R باشند به طوری که $P_1 \bigcap P_2$ اول باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $P_1 \bigcap P_2 = \{0\}$
۲) P_1 و P_2 ماکسیمال هستند.
۳) $P_1 \subseteq P_2$ یا $P_2 \subseteq P_1$
۴) حداقل یکی از P_1 و P_2 برابر $\{0\}$ است.

۱۳ـ فرض کنید $R \neq \{0\}$ حلقه‌ای جابه‌جایی یکدار باشد به طوری که هر عضو آن یا وارون‌پذیر یا پوچتوان است. کدام گزینه صحیح <u>نیست</u>؟ (سراسری ۹۲)

۱) R ایده‌آل ماکزیمال منحصر به فرد دارد.
۳) مشخصه R یا صفر است یا عدد اول است.
۲) R ایده‌آل اول منحصر به فرد دارد.
۴) مجموعه عناصری از R که وارون‌پذیر نیستند تشکیل ایده‌آلی از R می‌دهند.

۱۴ـ فرض کنید M یک ایده‌آل ماکسیمال حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در مورد حلقه $S = \frac{R}{M^n}$ که در آن $n \geq 2$، کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟ (دکتری ۹۳)

۱) S دارای دقیقاً n ایده‌آل است.
۲) هر ایده‌آل اول حلقه S، ماکسیمال است.
۳) S دارای تنها یک ایده‌آل ماکسیمال است.
۴) S دارای تنها یک ایده‌آل اول است.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل نهم

۱ـ گزینه «۴» زیرحلقه‌های $\mathbb{Z}_6$ از مرتبه‌های ۲ و ۳ عبارت‌اند از $\{0,3\}$ و $\{0,2,4\}$ که با $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ یکریختند.

۲ـ گزینه «۱» فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی باشد. اگر P ایده‌آل R باشد، آن‌گاه $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح است اگر و تنها اگر P اول باشد. حال فرض کنید $\{0\}$ ایده‌آل اول حلقه R باشد. از آن‌جا که $\frac{R}{\{0\}} \cong R$ نتیجه می‌شود R حوزه صحیح است. لذا گزینه (۱) درست می‌باشد. حال حلقه جابه‌جایی $\mathbb{Z}$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم $\{0\}$ ایده‌آل اول $\mathbb{Z}$ است. ولی $\mathbb{Z}$ میدان نیست، چون دارای وارون ضربی نمی‌باشد. پس گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند. از طرفی ایده‌آل‌های $p\mathbb{Z}$ که در آن $p \in \mathbb{Z}$، ایده‌آل‌های اول $\mathbb{Z}$ می‌باشد. لذا گزینه (۴) نیز رد می‌شود.

۳ـ گزینه «۲ و۴» برای پاسخ به این سؤال ابتدا به یادآوری چند قضیه می‌پردازیم:

ـ فرض کنید R حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. در این صورت اگر M یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد، آن‌گاه $\frac{R}{M}$ یک میدان است.

ـ مشخصه‌ی هر میدان متناهی، عددی اول است.

ـ اگر R یک حلقه متناهی و M یک ایده‌آل R باشد، آن‌گاه $\frac{R}{M}$ نیز متناهی است.

حال با توجه به مطالب ذکر شده چنین نتیجه می‌شود، از آن‌جا که M ایده‌آل ماکسیمال حلقه جابه‌جایی و یکدار متناهی R است، مشخصه $\frac{R}{M}$ عددی اول است. از طرفی هر عدد اول توانی از خودش است. پس گزینه‌های (۲) و (۴) صحیح هستند.

۴ـ گزینه «۳» برای پاسخ به این سؤال نیز به یادآوری چند مطلب می‌پردازیم:

ـ فرض کنید R حلقه جابه‌جایی یکدار و P ایده‌آلی از R باشد. در این صورت P ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح باشد.

ـ $\mathbb{Z}$ حلقه ایده‌آل اصلی است و ایده‌آل‌های آن بفرم $n\mathbb{Z}$ هایی است که در آن n عدد صحیح باشد.

ـ $\mathbb{Z}$ یک حوزه صحیح است و $\mathbb{Z}_p$ نیز یک حوزه صحیح می‌باشد به طوری که p یک عدد اول باشد.

حال بنابر آن‌چه بیان شد نتیجه می‌شود هر ایده‌آل اول $\mathbb{Z}$ به فرم $p\mathbb{Z}$ هایی است که P عدد اول و یا صفر باشد. پس گزینه (۳) درست است. از طرفی صفر ایده‌آل ماکسیمال $\mathbb{Z}$ نیست و شامل عددی اول هم نمی‌باشد. بنابراین گزینه‌های دیگر رد می‌شوند.

۵ـ گزینه «۲» می‌دانیم حلقه‌ی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حوزه صحیح است. حال با در نظر گرفتن ایده‌آل $I=\{(n,\circ)|n\in\mathbb{Z}\}$ خواهیم داشت $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{I}=\mathbb{Z}$. از آن‌جا که $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{I}$ یک حوزه صحیح است، I ایده‌آل اول می‌باشد.

۶ـ گزینه «۲» تنها همریختی‌های حلقه R به R عبارتند از همریختی‌های صفر و همانی. پس گزینه (۱) درست است. می‌دانیم اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $(R,+)$ یک گروه دوری است. بنابراین R آبلی نیز می‌باشد. لذا گزینه (۳) نیز صحیح است. از طرفی تنها همریختی‌های حلقه $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ عبارت‌اند از همریختی‌های صفر و همانی. پس گزینه (۴) نیز درست است. حال فرض کنید $۲\mathbb{Z}\cong ۳\mathbb{Z}$. پس یکریختی $f:۲\mathbb{Z}\to ۳\mathbb{Z}$ را طوری در نظر بگیرید که $f(۲)=۳$. بنابراین به ازای $n\in\mathbb{Z}$ داریم $f(۲n)=f(\underbrace{۲+\dots+۲}_{n\ \text{جمله}})=nf(۲)=۳n$. حال بررسی می‌کنیم f همریختی است یا نه. برای این منظور فرض کنید $۲n,۲m\in ۲\mathbb{Z}$. لذا خواهیم داشت:

$$f(۲n.۲m)=f(۲n).f(۲m)=nf(۲).mf(۲)=۹nm$$

و از آن‌جا که $۲\mathbb{Z}$ یک گروه جمعی آبلی است نتیجه می‌شود:

$$f(۲n.۲m)=f(۲\times۲\times n\times m)=۲nmf(۲)=۶nm$$

بنابراین $۶nm\neq ۹nm$ و این یعنی f همریختی حلقه‌ای نیست. پس $۲\mathbb{Z}\ncong ۳\mathbb{Z}$ و گزینه (۲) نادرست است.

۷ـ گزینه «۱» کافی است نشان دهیم به ازای هر $a\in S$؛ $a\cdot f(۱_R)=f(۱_R)\cdot a$. یعنی $f(۱_R)$ در S دارای وارون است.

f یک همریختی پوشا است، لذا عضو $b\in R$ موجود است به طوری که $f(b)=a$. با قرار دادن عبارت $f(b)=a$ در رابطه $a.f(۱_R)$ به نتایج زیر می‌رسیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot f(۱_R)=f(b)\cdot f(۱_R)\xlongequal{\text{همریختی } f} f(b\cdot ۱_R)=f(b)=a \\ f(۱_R)\cdot a=f(۱_R)\cdot f(b)\xlongequal{\text{همریختی } f} f(۱_R\cdot b)=f(b)=a \end{array}\right\}\Rightarrow a.f(۱_R)=f(۱_R).a$$

پس اگر یکه S را ۱_S بنامیم خواهیم داشت، $f(۱_R)=۱_S$ و حکم ثابت می‌شود. لذا گزینهٔ (۱) درست است. حال همریختی صفر $f:R\to S$ در نظر بگیرید. در این صورت گزینه‌های دیگر رد می‌شود.

۸ـ گزینه «۳» ابتدا حلقه $\frac{I}{J}$ را تشکیل می‌دهیم. لذا داریم $\frac{I}{J}=\{p+J,۲p+J,\dots p(p-۱)+J,p^۲+J\}$ که در آن $p^۲+J=J$. بوضوح $\frac{I}{J}$ دارای p عضو است. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم. حلقه $\frac{I}{J}$ یکدار نیست. پس میدان نیست. لذا گزینه(۱) نادرست است. مرتبه $\mathbb{Z}_{p^۲}$ برابر است با $p^۲$. بنابراین $\frac{I}{J}\ncong\mathbb{Z}_{p^۲}$. بنابراین گزینه (۲) نادرست است. حلقه $\mathbb{Z}_p$ یک میدان متناهی از مرتبه P است، ولی $\frac{I}{J}$ میدان نیست. لذا $\frac{I}{J}\ncong\mathbb{Z}_p$. پس گزینه (۴) نیز درست نیست. حال عناصر $p+J$ و $p(p-۱)+J$ از حلقه $\frac{I}{J}$ را در نظر بگیرید. لذا داریم $(p(p-۱)+J)(p+J)=p^۲(p+)+J=J$. پس $\frac{I}{J}$ دارای مقسوم‌علیه صفر نابدیهی است. بنابراین گزینه (۳) پاسخ موردنظر است.

۹ـ گزینه «۳» نگاشت f را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$f:R\to\mathbb{Q}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c\end{bmatrix}x\mapsto c$$

f یک همریختی پوشاست. حال kerf را بدست می‌آوریم. لذا داریم:

$$\ker f=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c\end{bmatrix}\middle| f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c\end{bmatrix}\right)=\circ\right\}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c\end{bmatrix}\middle| c=\circ\right\}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & \circ\end{bmatrix}\middle| a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Q}\right\}=I$$

بنابراین $\frac{R}{I}\cong\mathbb{Q}$ و لذا گزینه (۳) صحیح است.

۱۰ـ گزینه «۲» ابتدا نشان می‌دهیم $(۴) \Leftrightarrow (۱)$.

فرض کنید $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_۲$. از آن‌جا که $\mathbb{Z}_۲$ یک میدان است، $\frac{R}{I}$ نیز میدان می‌باشد. لذا I یک ایده‌آل ماکسیمال است. حال فرض کنید I ایده‌آل ماکسیمال باشد. لذا $\frac{R}{I}$ یک میدان است. کافیست ثابت کنیم $\frac{R}{I}$ یک میدان دو عضوی بفرم $۰+I$ و $۱+I$ می‌باشد. فرض کنید $x \in R$. اگر $x \in I$، آن‌گاه $x+I=I$. حال فرض کنید $x \notin I$. با توجه به فرض داریم $x^۲ = x$. بنابراین $x(۱-x)=۰$. لذا $۱-x \in I$ و در نتیجه $x+I=۱+I$. بنابراین $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_۲$.

اینک نشان می‌دهیم $(۴) \Leftrightarrow (۳)$.

فرض کنید I ایده‌ال اول باشد. حلقه R یک حلقه جابجایی یکدار است. پس هر ایده‌ال اول، ماکسیمال است. برعکس فرض کنید I ایده‌آل ماکسیمال باشد. لذا $\frac{R}{I}$ یک میدان است. با توجه به این‌که هر میدان یک حوزه صحیح است، پس $\frac{R}{I}$ یک حوزه صحیح و در نتیجه I ایده‌آل اول می‌باشد. همانند آن‌چه در بالا ثابت کردیم، می‌توان دید $(۳) \Leftrightarrow (۱)$. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) با هم معادلند. اما اگر ایده‌آل اول $<۰>$ را در نظر بگیرید، در این صورت $I \cap J = \{۰\}$ و داریم $\frac{R}{<۰>} \cong R$. پس گزینه (۲) با سایر گزینه‌ها معادل نیست.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۱ و ۳» می‌دانیم که اگر I یک ایده‌آل ماکسیمال (دوطرفه) باشد، آن‌گاه $\frac{R}{M}$ یک میدان است. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ درست هستند. با توجه به این‌که $\frac{R}{M}$ میدان است پس نتیجه می‌شود که $\frac{R}{M}$ مقسوم‌علیه صفر نابدیهی ندارد و تنها مقسوم علیه صفر آن، صفر است. همچنین ایده‌آل ماکسیمال $<x^۲+۱>$ را در نظر بگیرید، می‌دانیم $\frac{\mathbb{R}[x]}{<x^۲+۱>} \cong \mathbb{C}$ که $\mathbb{C}$ یک حلقه‌ی نامتناهی است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۳» برای ایده‌آل‌های $P_۱$ و $P_۲$ از حلقه R داریم:

$$P_۱P_۲ \subseteq P_۱ \cap P_۲ \xrightarrow{\text{چون } P_۱\cap P_۲ \text{ اول است.}} P_۱ \subseteq P_۱ \cap P_۲ \text{ یا } P_۲ \subseteq P_۱ \cap P_۲$$

بنابراین $P_۱ \subseteq P_۲$ یا $P_۲ \subseteq P_۱$ پس گزینه (۳) صحیح است. توجه کنید با در نظر گرفتن $R=\mathbb{Z}$ و $P_۱=\mathbb{Z}$ و $P_۲=۲\mathbb{Z}$ به عنوان ایده‌آل‌های R تمامی گزینه‌های دیگر رد می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۳» حلقه $\mathbb{Z}_۴$ را در نظر بگیرید. عناصر ۱و۳ از این حلقه وارون‌پذیر و ۲ پوچتوان است در حالی که $\text{Char}(\mathbb{Z}_۴)=۴$ که عددی اول نمی‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ گزینه «۱» قرار می دهیم $R=\mathbb{Z}_۸$، $M=\{۰,۲,۵,۶\}$ و $n=۳$. در این صورت S کمتر از ۳ ایده‌آل دارد.

فصل دهم

«میدان کسرها و حلقه چندجمله‌ای‌ها»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دهم

۱ـ کدام‌یک از حلقه‌های زیر یک میدان است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\mathbb{Z}_{11}[x]}{<x^2-3>}$ ۲) $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{<x^2-2>}$ ۳) $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{<x^2-2>}$ ۴) $\frac{\mathbb{Z}_{13}[x]}{<x^2-3>}$

۲ـ اگر R حلقه‌ای جابجایی یکدار و I ایده‌آلی سره از R باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟ (سراسری ۸۵)

۱) اگر I در R ماکسیمال باشد، $I[x]$ نیز در $R[x]$ ماکسیمال است.
۲) اگر R یک PID باشد، $R[x]$ نیز یک PID است.
۳) اگر I در R اول باشد، $I[x]$ نیز در $R[x]$ اول است.
۴) اگر $R[x]$ یک حوزه صحیح باشد، R یک میدان است.

۳ـ فرض کنید F یک میدان و $J=\{f\in F[x,y]\,|\,f(0,y)=0\}$ در این صورت در حلقه $F[x,y]$: (سراسری ۸۹)

۱) J یک ایده‌آل اول است ایده‌آل اصلی نیست.
۲) J یک ایده‌آل اصلی اول است.
۳) J یک ایده‌آل ماکسیمال است ولی ایده‌آل اصلی نیست.
۴) J یک ایده‌آل اصلی ماکسیمال است.

۴ـ فرض کنید F یک میدان و I یک ایده‌آل ناصفر $F[x]$ است. در این صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر با سایر گزاره‌ها معادل نیست؟ (سراسری ۸۹)

۱) I یک ایده‌آل اول است.
۲) حلقه خارج قسمتی $\frac{F[x]}{I}$ یک میدان است.
۳) I یک ایده‌آل ماکسیمال (بیشین) است.
۴) حلقه خارج قسمتی $\frac{F[x]}{I}$ یک دامنه درست (حوزه صحیح) متناهی است.

۵ـ به ازای چه عناصر $a\in\mathbb{Z}_3$ حلقه $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^3+x^2+ax+1)}$ میدان است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $a=0$ ۲) $a=1$ ۳) $a=2$ ۴) $a\in\{1,2\}$

۶ـ تعداد عضوهای حلقه $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3+1)}$ برابر است با: (سراسری ۹۱)

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۷ـ $R[x]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی فرض می‌شود. تعداد میدان‌ها با تقریب یکریختی که شکل $\frac{R[x]}{I}$ هستند و I ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$ است، برابر است با: (سراسری ۹۱)

۱) بی‌نهایت ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

۸ـ اگر $T=\mathbb{R}[X,Y,Z]$ کدام‌یک از ایده‌آل‌های زیر اول است؟ (دکتری ۹۱)

۱) $<XY,XZ+YZ>$ ۲) $<X^2YZ,Z>$ ۳) $<X^2,Y+Z>$ ۴) $<XY,XZ>$

۹ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است ولی میدان نیست و P یک ایده‌آل ماکسیمال R است. فرض کنید $I=P[x]$ یک ایده‌آل حلقه چندجمله‌ای‌های $R[x]$ باشد که شامل همه چندجمله‌ای‌های واقع در $R[x]$ است که ضرایب آن‌ها در P است. کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ۹۲)

۱) I یک ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$ است ولی اول نیست.
۲) I یک ایده‌آل اول $R[x]$ است که ماکسیمال نیست.
۳) I یک ایده‌آل اول $R[x]$ است ولی ماکسیمال نیست.
۴) I نه ایده‌آل اول $R[x]$ است و نه ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$.

۱۰ـ فرض کنید R یک حلقه یکدار و $U(R)$ گروه شامل تمام عناصر وارون‌پذیر R باشد. اگر $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ۹۳)

۱) حلقه تولید شده توسط $U(R)$، R است.
۲) اگر R نامتناهی باشد، $U(R)$ نیز نامتناهی است.
۳) $U(\frac{R}{J(R)})=\{a+J(R)\,|\,a\in U(R)\}$.
۴) $U(R[x])$، برابر با مجموعهٔ تمام چند جمله‌ای‌های با ضرایب در $U(R)$ است.

۱۱ـ تعداد چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر از درجه ۲ در $\mathbb{Z}_{11}[x]$ برابر است با: (دکتری ۹۳)

۱) ۵۵۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۶۰۰

۱۲ـ چند جمله‌ای $f(x)=3+2x+4x^2\in\mathbb{Z}_8[x]$: (دکتری ۹۴)

۱) خود توان است. ۲) مقسوم‌علیه صفر است. ۳) وارون‌پذیر است. ۴) پوچ توان است.

۱۳ـ کدام گزینه در مورد حلقه $\dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(2x-1)}$ درست است؟ (دکتری ۹۴)

۱) با حلقه $\left\{f(\frac{1}{2}) \mid f(x)\in\mathbb{Z}[x]\right\}$ یکریخت است.
۲) با حلقه $\mathbb{Z}_2$ یکریخت است.
۳) با حلقه $\mathbb{Z}$ یکریخت است.
۴) میدان است.

۱۴ـ اگر F یک میدان مشخصه $p>0$ بوده و نگاشت $\theta: F\to F$ با ضابطه $\theta(x)=x^p$ باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (سراسری ۹۴)

۱) θ یک به یک است.
۲) θ پوشاست.
۳) θ یک همریختی حلقه‌ای است.
۴) θ همانی است اگر و تنها اگر F یک میدان p عضوی می‌باشد.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دهم

۱ـ گزینه «۳» ابتدا به یادآوری چند قضیه می‌پردازیم:

ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. در این صورت M ایده‌ال ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{M}$ یک میدان باشد.

ـ اگر F یک میدان باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای $0\neq f\in F[x]$ روی میدان F تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر ایده‌آل $M=<f>$ ماکسیمال باشد.

ـ اگر $f\in R[x]$ یک چندجمله‌ای با درجه مثبت باشد، آن‌گاه f را می‌توان به چند جمله‌ای‌های درجه اول و دوم تحویل‌ناپذیر تجزیه نمود.

با توجه به مطالب ذکر شده چنین نتیجه می‌شود، چند جمله‌ای x^2-2 ریشه‌ای در $\mathbb{Z}_5$ ندارد. بنابراین در $\mathbb{Z}_5[x]$ تحویل‌ناپذیر است.

چندجمله‌ای x^2-3 در $\mathbb{Z}_{11}$ دارای ریشه‌ی ۵ است. چندجمله‌ای x^2-3 در $\mathbb{Z}_7$ دارای ریشه‌ی ۳ است و چندجمله‌ای x^2-3 در $\mathbb{Z}_{13}$ دارای ریشه‌ی ۴ است. در نهایت همان‌گونه که مشاهده می‌شود $\dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{<x^2-2>}$ در شرایط مطالب یادآوری شده صدق می‌کند، لذا یک میدان است. بنابراین گزینه (۳) پاسخ درست است.

۲ـ گزینه «۳» ایده‌آل $I=<2>$ در حلقه $\mathbb{Z}$ ماکسیمال است. اما $I[x]$ در $\mathbb{Z}[x]$ ماکسیمال نیست. زیرا $I[x]\subseteq<x,2>$ حلقه $\mathbb{Z}$ یک حوزه ایده‌ال اصلی است، اما $\mathbb{Z}[x]$ حوزه ایده‌ال اصلی نیست. حلقه $\mathbb{Z}[x]$ یک حوزه صحیح است.، اما میدان نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) نادرست هستند. حال فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و I ایده‌الی از R باشد. در این صورت $\frac{R}{I}[x]\cong\frac{R[x]}{I[x]}$. اگر I ایده‌آل اول R باشد، آن‌گاه $\frac{R}{I}$ یک حوزه صحیح است. لذا $\frac{R}{I}[x]$ نیز یک حوزه صحیح می‌باشد. بنابراین $\frac{R[x]}{I[x]}$ نیز یک حوزه صحیح است و در نتیجه $I[x]$ ایده‌آل اول $R[x]$ است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۳ـ گزینه «۲» همریختی ارزیاب $\varphi: F[x,y]\to F[y]$ را با ضابطه‌ی $\varphi(f(x,y))=f(0,y)=0$ در نظر بگیرید. در این صورت داریم $\ker\varphi=<x-0,y-y>=<x>$. از طرفی φ یک همریختی پوشا است. بنابراین طبق نتیجه قضیه اول یکریختی‌ها داریم $\dfrac{F[x,y]}{<x>}\cong F[y]$. از آن‌جا که $F[y]$ حوزه صحیح است، $\dfrac{F[x,y]}{<x>}$ نیز یک حوزه صحح می‌باشد. در نتیجه $<x>$ یک ایده‌ال اول اصلی است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.
از طرفی با توجه به این‌که $<x>\subseteq<x,y>$، پس $<x>$ ایده‌ال ماکسیمال نیست. لذا گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۴ـ گزینه «۴» با توجه به مطالب و قضایای ارائه شده در متن درس می‌دانیم، اگر F یک میدان باشد، آن گاه $F[x]$ یک حوزه ایده‌آل اصلی است. فرض کنید I ایده‌آل $F[x]$ باشد. می‌دانیم اگر F یک میدان باشد، آن‌گاه $F[x]$ یک حوزه ایده‌آل اصلی است. حال فرض کنید I ایده‌آل ناصفر $F[x]$ باشد. در این صورت I ایده‌ال اول است اگر و تنها اگر ماکسیمال باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۳) معادل‌اند. اینک فرض کنید I ایده‌آل ماکسیمال $F[x]$ باشد. در این صورت $\frac{F[x]}{I}$ یک میدان است و در نتیجه یک حوزه صحیح می‌باشد. لذا I ایده‌ال اول است. پس گزینه‌های (۳) به (۱) نیز معادل‌اند. حال $A=\dfrac{F_5[x]}{<x^2+x+1>}$ که در آن F یک میدان باشد را در نظر بگیرید. x^2+x+1 چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر است. لذا A یک میدان است که مرتبه آن ۲۵ است. بنابراین A یک حوزه صحیح است. اما $<x^2+x+1>$ یک ایده‌آل اول نیست. بنابراین گزینه (۴) با گزینه‌های دیگر معادل نیست.

۵ــ گزینه «۳» فرض کنید F یک میدان و $0 \neq f \in F[x]$ روی میدان F تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر ایده‌آل $M = \langle f \rangle$ ماکسیمال باشد. فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد. M ایده‌ال ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{M}$ یک میدان باشد. بنابراین با توجه به مطالب یادآوری شده کافیست نشان دهیم چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + x^2 + ax + 1$ روی $\mathbb{Z}_3[x]$ تحویل‌ناپذیر است. برای این منظور کافی‌است چندجمله‌ای $f(x)$ به ازای مقادیر $a = 0$، $a = 1$ یا $a = 2$ دارای ریشه نباشد. بنابراین اگر $a = 0$، آن‌گاه $f(x)$ دارای ریشه $x = 1$ است. اگر $a = 1$، آن‌گاه $f(x)$ دارای ریشه $x = 2$ است. اگر $a = 2$، آن‌گاه $f(x)$ دارای ریشه نیست. پس گزینه (۳) درست است.

۶ــ گزینه «۲» فرض کنید F میدانی از مرتبه p (p عددی اول) و $f(x) \in F[X]$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجه n باشد. در این صورت $\frac{F[X]}{\langle f(x) \rangle}$ میدانی از مرتبه p^n خواهد بود. بنابراین با توجه به مطالب مذکور $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^3 + 1 \rangle}$ میدانی از مرتبه ۸ است.

۷ــ گزینه «۴» با توجه به مطالب ارائه شده در متن درس می‌دانیم:

ـ هرچندجمله‌ای در $R[x]$ به چندجمله‌ای‌های درجه اول و دوم قابل تجزیه است. (ولی چندجمله‌ای‌های درجه ۲ الزاماً قابل تجزیه نمی‌باشند مانند $x^2 + 1$ که در $R[x]$ تجزیه نمی‌گردد.)

ـ در $F[x]$ که F یک میدان است ایده‌آل‌های ماکسیمال به فرم $\langle f(x) \rangle$ می‌باشد که $f(x)$ تحویل‌ناپذیر باشد. با توجه به مطالب مذکور چنین نتیجه می‌شود، در $R[x]$ ایده‌آل‌های ماکسیمال به فرم $\langle x \rangle$ یا $\langle x^2 + a^2 \rangle$ است که $0 \neq a \in R$. لذا تعداد این ایده‌آل‌ها ۲ بوده و $\frac{R[x]}{\langle x \rangle} \ncong \frac{R[x]}{\langle x^2 + a^2 \rangle}$ زیرا $\dim_F \frac{R[x]}{\langle f(x) \rangle} = \deg f$. پس x و $x^2 + a^2$ از یک درجه نمی‌باشند. لذا پاسخ صحیح گزینه (۴) است.

۸ــ گزینه «۳» برای پاسخ به این سوال لازم است به این نکته توجه داشته باشید که این سوال با استفاده از مطالب خارج از کتاب مبانی جبر حل می‌شود، در واقع مطالبی از هندسه جبری. ابتدا مباحث مورد نیاز را بیان می‌کنیم:

تعریف ۱: فرض کنید I ایده‌ال حلقه جابه‌جایی R باشد. واریته‌ی I با نماد $Var(I)$ نمایش داده می‌شود و برابر است با مجموعه‌ی $\{P \in Spec(R) : P \supseteq I\}$.

تعریف ۲: یک مجموعه‌ی جبری V در یک فضای آفین n بعدی $\mathbb{R}_k^n$ روی یک میدان به طور جبری بسته‌ی K، ساده شدنی نامیده می‌شود، هرگاه V اجتماع مجموعه‌های جبری V_1 و V_2 باشد، یعنی $V = V_1 \cup V_2 \ , \ V \neq V_1 \ , \ V \neq V_2$

در غیر این صورت مجموعه جبری V تحویل‌ناپذیر است. در این حالت مجموعه‌ی جبری تحویل ناپذیر V، یک واریته آفین تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود.

قضیه: یک مجموعه‌ی جبری V، یک واریته آفین تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $I(V)$ یک ایده‌آل اول حلقه‌ی $K[X_1, \cdots, X_n]$ باشد. حال با توجه به مطالب بیان شده و با استفاده از قضیه‌ی مذکور به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم. لذا داریم:

گزینه (۱): $V(XY, XZ + YZ) = V(XY, Z) \cup V(XY, X + Y)$

گزینه (۲): $V(X^2YZ, Z) = V(X, Z) \cup V(Y, Z)$

گزینه (۴): $V(XY, XZ) = V(X) \cup V(Y, Z)$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) همگی ساده شدنی هستند. اما $V(X^2, Y + Z)$ تحویل‌ناپذیر است. بنابراین $\langle X^2, Y + Z \rangle$ ایده‌آل اول حلقه‌ی $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ است. لذا گزینه (۳) پاسخ مورد نظر است.

۹ــ گزینه «۳» چون حلقه R جابجایی ویکدار است هر ایده‌آل ماکسیمال، اول نیز می‌باشد. بنابراین P یک ایده‌آل اول R است. نشان می‌دهیم که $I = P[x]$ نیز یک ایده‌آل اول $R[x]$ است. برای این منظور نشان می‌دهیم اگر $p(x), q(x) \notin I$، آن‌گاه $p(x)q(x) \notin I$.

فرض کنید $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ دو عضو دلخواه $R[x]$ باشند که متعلق به I نیستند. چون $p(x) \notin I$ وجود دارد i که $a_i \notin P$.

فرض کنید i بزرگترین اندیسی باشد که به ازای آن $a_i \notin P$. به همین ترتیب فرض کنید j بزرگترین اندیسی باشد که به ازای آن $b_j \notin P$ به راحتی می‌توان دید که ضریب x^{i+j} در $p(x)q(x)$ متعلق به P نیست و لذا $p(x)q(x) \notin I$ که معادل اول بودن I است. در پایان دقت کنید که $\frac{R[x]}{P[x]}$ به عنوان حلقه با $\frac{R}{P}[x]$ یکریخت است و چون $\frac{R}{P}[x]$ میدان نیست لزومی ندارد که $P[x]$ ماکسیمال باشد.

۱۰ـ گزینه «۳» حلقه اعداد صحیح مثال نقض آشکاری برای گزینه‌های ۲ و ۴ می‌باشد. همچنین ثابت می‌شود که هرگاه حلقه‌ی جابجایی و یکدار R متناهی باشد، آنگاه R توسط اعضای وارون‌پذیر خود تولید می‌شود اگر و تنها اگر $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ را به عنوان خارج قسمت در برنداشته باشد. بنابراین گزینه (۱) نیز درست نمی‌باشد.

۱۱ـ گزینه «۱» ابتدا تعریف زیر را یادآوری می‌کنیم: فرض کنید K یک میدان و $K[x]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی K باشد. چندجمله‌ای $f \in K[x]$ را تحویل‌ناپذیر گوییم، هرگاه: ۱) $\deg f \geq 1$ ۲) نتوان f را به صورت حاصل ضرب دو چندجمله‌ای با درجه مثبت تجزیه نمود.

برای مثال چندجمله‌ای x^2+1 در $\mathbb{Z}_n[x]$ تحویل‌ناپذیر است، زیرا روی $\mathbb{Z}_n$ فاقد ریشه است. برای $\mathbb{Z}_p[x]$ که p یک عدد اولی است تعداد چند جمله‌ای‌های از درجه ۲ برابر است با $\frac{p(p-1)^2}{2}$. پس در اینجا چون $p=11$، داریم: $\frac{11\times 100}{2}=550$

۱۲ـ گزینه «۳» اگر R یک حلقه باشد آنگاه $R[2]$، حلقه چند جمله‌ای‌ها در x با ضرایب در R است که شامل تمام مجموعه‌های $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \times 2$ است که همه a_iها جزء تعداد متناهی از آن‌ها صفر هستند.

$p(x)\in R(x)$ را معکوس‌پذیر یا وارون‌پذیر گوییم هرگاه $q(x)\in R(x)$ وجود داشته باشد که $p(x)q(x)=1$، قرار دادن $q(x)=6x+3$ داریم:

$$p(x)q(x)=(4x^2+2k+3)(6x+3)\ =[2qk^3+24x^2+24x+9]=1$$

و لذا $p(x)$ معکوس‌پذیر است. پس گزینه ۳ درست است.

۱۳ـ گزینه «۱» به طور کلی می‌دانیم که اگر F یک میدان و $R=F(t)$ یک حلقه چند جمله‌ای باشد. آنگاه $R'=\frac{R[x]}{tx-1}$

$$L=\{\frac{a_m}{t^m}+\frac{a_{m-1}}{t^{m-1}}+\cdots+\frac{a_1}{t}+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nx^n=a_i,b_j\in F_J$$

ایزومورف است، با قرار دادن $t=2$

$$L=\{f(\frac{1}{2}):f(x)\in U[x]\}$$

لذا $\frac{Z[x]}{2x-1}$ با حلقه L یکریخت است پس گزینه ۱ درست است.

۱۴ـ گزینه «۲» دقت شود $\theta:F\to F$ با ضابطه $\theta(x)=x^p$ یک همریختی حلقه‌ای است، زیرا فرض کنید $x_1y\in F$ باشد. لذا داریم:

$$\theta(x+y)=(x+y)^p=x^p+(P_1)x^{p-1}y+\cdots+\binom{p}{p-1}xy^{p-1}+y^p=x^p+y^p=\theta(x)+\theta(y)$$

$$\theta(xy)=(xy)^p=\underbrace{(xy)\times(xy)\times\cdots\times(xy)}_{p\ \text{تا}}=x^py^p=\theta(x)\theta(y)$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد. از طرفی با توجه به این‌که θ یک همریختی حلقه‌ای از یک میدان به درون خودش است لذا از آنجا که $\ker(\theta)$ یک ایده‌آل برای F است پس یا صفر است و یا برابر خود F است، اما با توجه به ناصفر بودن نگاشت θ نتیجه می‌گیریم $\ker\theta=0$ است و بنابراین θ یک به یک است، لذا گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

بررسی گزینه (۲): برای حالتی که F متناهی عضو باشد و $f:F\to F$ یک نگاشت دلخواه باشد، یک به یک بودن، پوشابودن را نتیجه می‌دهد بنابراین برای θ مورد نظر بنابر درستی گزینه (۱) می‌توان نتیجه گرفت θ پوشا است. حال حوزه صحیح $\mathbb{Z}_2[x]$ را در نظر بگیرد. در این صورت F را میدان کسرهای گویای $\mathbb{Z}_2[x]$ درنظر می‌گیریم که مشخصه آن برابر عدد ۲ می‌باشد. برای این حالت θ پوشا نمی‌باشد، زیرا از آنجا که $\frac{1}{x}\in F$ است:

$$\nexists\ f,g\in\mathbb{Z}_2[x]\ \text{s.t}\qquad (\frac{f}{g})^2=\frac{1}{x}$$

بنابراین گزینه (۲) نادرست است.

اگر F یک میدان p عضوی باشد همواره $\mathbb{Z}_p\cong F$، می‌دانیم‌که هر عضو میدا $\mathbb{Z}_p$ ریشه چند جمله‌ای مخالف صفر x^p-x است. بنابراین θ همانی می‌باشد. حال فرض کنیم F، p^k عضوی باشد.

برای اینکه $\theta:F\to F$ با ضابطه $\theta(x)=x^p$ همانی باشد، باید برای هر عضو دلخواه x متعلق به F، داشته باشیم $x^p-x=0$. اما دقت شود چندجمله‌ای $x^p-x\in F[x]$ در میدان F حداکثر دارای p ریشه است؛ اما تعداد اعضای F بیشتر از p می‌باشند، بنابراین θ همانی نمی‌باشد. بررسی حالت F نامتناهی عضو نیز واضح است. بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد. بنابراین گزینه (۲) گزینه مورد نظر است.