استفاده از تغییر متغیرهای دیگر در حل معادلات تفکیک‌پذیر

در حل برخی از معادلات باید از تغییر متغیر مناسب استفاده کنیم. دستور کلی برای این که بدانیم در چه نوع معادلاتی باید این کار را انجام دهیم، وجود ندارد. اما می‌توان به طور غیررسمی توصیه‌هایی کرد؛ اگر مثلاً درون کمان‌های مثلثاتی و یا در توان توابع نمایی یا جلوی Ln ترکیب‌های xy و یا خصوصاً $\alpha x \pm by + c$ وجود داشته باشد، این عبارات را مساوی u (یا هر متغیر جدید دیگری) در نظر گرفته و سعی می‌کنیم معادله را ساده‌تر حل کنیم. البته قبلاً به طور کلی اشاره کرده بودیم که معادلاتی به فرم $y' = f(ax+by+c)$ را همواره با تغییر متغیر $u = ax+by+c$ می‌توان به جواب رساند. در برخی معادلات، اگر عبارتی تکرار شده بود، معمولاً باید آن ترکیب را به عنوان متغیر جدید در نظر گرفت. ضمناً توجه کنید که شرایط معادله را با توجه به درسنامه‌های آینده نیز باید بررسی کرد. شاید با آن روش‌ها هم بتوان مسأله را راحت‌تر حل کرد!

مثال ۵۳: جوابی از معادله $2x^2y\frac{dy}{dx} = tg(x^2y^2) - 2xy^2$ که از نقطه $(1, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ عبور می‌کند را تعیین کنید.

☑ **پاسخ:** با توجه به عبارت جلوی کمان tg از تغییر متغیر $x^2y^2 = u$ استفاده می‌کنیم:

$$x^2y^2 = u \Rightarrow 2xy^2 + x^2.2y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = \frac{du}{dx}$$

خُب الان اگر خوب دقت کنید عبارت سمت چپ تساوی برابر با $tg(x^2y^2)$ یا tgu است (با معادله داده شده در صورت سؤال مقایسه کنید). بنابراین داریم:

$$tgu = \frac{du}{dx} \Rightarrow dx = \frac{du}{tgu} = \frac{\cos u}{\sin u}du \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} x + c = Ln(\sin u) \xrightarrow{u=x^2y^2} x + c = Ln(\sin(x^2y^2)) \Rightarrow \sin(x^2y^2) = e^{x+c}$$

گفته شده جواب از نقطه $(1, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ عبور می‌کند، لذا داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = e^{1+c} \Rightarrow 1 = e^{1+c} \Rightarrow Ln1 = 1 + c \Rightarrow c = -1 \Rightarrow \sin(x^2y^2) = e^{x-1}$$

مثال ۵۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^2 + y\sin xy)dx + x\sin(xy)dy = 0$ کدام است؟

۱) $\cos(xy) + c = \frac{1}{3}x^3$ ۲) $-\cos(xy) + c = \frac{1}{3}x^3$ ۳) $\sin(xy) + c = \frac{1}{3}x^3$ ۴) $-\sin(xy) + c = \frac{1}{3}x^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به وجود xy در کمان تابع سینوسی، از تغییر متغیر $xy = u$ کمک می‌گیریم:

$$xy = u \Rightarrow ydx + xdy = du \Rightarrow dy = \frac{du - ydx}{x} \xrightarrow{y=\frac{u}{x}} dy = \frac{du - \frac{u}{x}dx}{x} \Rightarrow dy = \frac{xdu - udx}{x^2}$$

از تساوی بالا و تساوی $y = \frac{u}{x}$ در بازنویسی معادله با تابع جدید u و متغیر x کمک می‌گیریم:

$$(x^2 + \frac{u}{x}\sin u)dx + x\sin u(\frac{xdu - udx}{x^2}) = 0 \xrightarrow{\text{با ضرب طرفین در } x \text{ داریم}} (x^3 + u\sin u)dx + x\sin u du - u\sin u dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2dx + \sin u du = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \frac{x^3}{3} - \cos u = c \xrightarrow{u=xy} \frac{x^3}{3} - \cos(xy) = c \Rightarrow \cos(xy) + c = \frac{1}{3}x^3$$

مثال ۵۵: جواب معادله‌ی دیفرانسیل $(\sqrt{x+y})dx = dy$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sqrt{x+y} + Ln(1+\sqrt{x+y}) - \frac{1}{2}x = c$
۲) $\sqrt{x+y} - Ln(1+\sqrt{x+y}) - \frac{1}{2}x = c$
۳) $\sqrt{x+y} + Ln(1+\sqrt{x+y}) + \frac{1}{2}x = c$
۴) $\sqrt{x+y} - Ln(1+\sqrt{x+y}) + \frac{1}{2}x = c$

پاسخ: گزینه «۲» عبارت زیر رادیکال، یعنی $x+y$ را برابر u^2 در نظر می‌گیریم. در این صورت $x+y=u^2$ و $1+y'=2uu'$ یا $y'=2uu'-1$ با جایگذاری داریم:

$$\sqrt{x+y}dx = dy \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } dx} \sqrt{x+y} = \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\frac{dy}{dx}=y'} \sqrt{x+y} = y' \Rightarrow u = 2uu'-1$$

$$u+1 = 2uu' \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 2u} \frac{u+1}{2u} = u' \xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} \frac{u+1}{2u} = \frac{du}{dx} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx} \frac{u+1}{2u}dx = du$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \frac{u+1}{u}} \frac{dx}{2} = \frac{u}{u+1}du \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \frac{x}{2} + c = u - Ln(u+1)$$

$$u - Ln(u+1) - \frac{x}{2} - c = 0 \xrightarrow{u^2=x+y,\, u=\sqrt{x+y}} \sqrt{x+y} - Ln(1+\sqrt{x+y}) - \frac{1}{2}x = c$$

مثال ۵۶: جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y'Ln(x-y) = 1 + Ln(x-y)$ کدام است؟

۱) $x + Ln(x-y) + yLn(x-y) = C$
۲) $(x-y)Ln(x-y) + 2x - y = C$
۳) $y + Ln(x-y) + xLn(x-y) = C$
۴) $(x-y)Ln(x-y) + y = C$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال ساده‌ای است. مطابق مطالب بیان شده، با توجه به وجود « $x-y$ » در جلوی Ln از تغییر متغیر $u = x-y$ کمک می‌گیریم:

$$u = x-y \Rightarrow u' = 1-y' \Rightarrow y' = 1-u'$$

حالا جایگذاری را انجام می‌دهیم:

$$(1-u')Lnu = 1 + Lnu \Rightarrow Lnu - u'Lnu = 1 + Lnu \Rightarrow u' = -\frac{1}{Lnu} \Rightarrow Lnudu = -dx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} \int Lnudu = -\int dx$$

$$\Rightarrow uLnu - u = -x + C \xrightarrow{u=x-y} (x-y)Ln(x-y) - x + y = -x + C \Rightarrow (x-y)Ln(x-y) + y = C$$

یادآوری: حاصل انتگرال $\int Lnudu$ از روش جزء به جزء برابر با « $uLnu - u$ » به دست می‌آید و پیشنهاد می‌کنم حاصل آن را حفظ باشید.

مثال ۵۷: جواب عمومی معادله $xy' - y[Ln(xy) - 1] = 0$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۱)

۱) $xy = e^{cx}$
۲) $x = y + ce^{y}$
۳) $y = x + ce^{x}$
۴) $xy = ce^{y}$

پاسخ: گزینه «۱» وجود عبارت شامل (yx) جلوی تابع Ln ما را به انتخاب تغییر متغیر $u = xy$ راهنمایی می‌کند. نتیجه این تغییر متغیر $u' = y + xy'$ است.

بنابراین داریم:

$$xy' - y(Ln(xy) - 1) = 0 \Rightarrow xy' + y = yLnxy \Rightarrow u' = yLnu \xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}Lnu$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx} du = uLnu\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } uLnu} \frac{du}{uLnu} = \frac{dx}{x}$$

نهایتاً به یک معادله تفکیک‌پذیر رسیدیم، از طرفین آن انتگرال می‌گیریم:

$$Ln(Lnu) = Lnx + Lnc \Rightarrow Lnu = xc \Rightarrow u = e^{cx} \xrightarrow{u=xy} xy = e^{cx}$$

مثال ۵۸: معادله $y'=\sqrt{y+\sin x}-\cos x$ با شرط $y(0)=0$ در $x=\pi$ دارای پاسخی است برابر: (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹ و مهندسی نساجی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{8}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به وجود عبارت شامل y و x در زیر رادیکال، از تغییر متغیر $u=y+\sin x$ استفاده می‌کنیم. اگر از تغییر متغیر گفته شده نسبت به x مشتق بگیریم نتیجه $\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}+\cos x$ یا $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-\cos x$ خواهد بود. با جایگذاری متغیر u و مشتق آن در معادله دیفرانسیل اولیه داریم:

$$y'=\sqrt{y+\sin x}-\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}-\cos x=\sqrt{u}-\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\sqrt{u} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } dx} du=\sqrt{u}dx$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \sqrt{u}} \frac{du}{\sqrt{u}}=dx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} 2\sqrt{u}=x+c$$

با قرار دادن $u=y+\sin x$ در تساوی فوق، جواب عمومی به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$2\sqrt{y+\sin x}=x+c$$

طبق گفته‌ی سؤال جواب از نقطه $(0,0)$ عبور می‌کند، لذا داریم:

$$2\sqrt{0+0}=0+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow 2\sqrt{y+\sin x}=x$$

سؤال از ما مقدار y در نقطه $x=\pi$ را خواسته است. با جایگذاری درمعادله بالا داریم:

$$2\sqrt{y+\sin(\pi)}=\pi \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۵۹: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=\frac{y-1}{x+2}+\operatorname{tg}(\frac{2y+x}{x+2})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\sin(\frac{2y+x}{x+2}+1)}=C(x+2)$ ۲) $\sqrt{\sin(\frac{2y-2}{x+2}+1)}=C(x+2)$

۳) $\sqrt{\sin(\frac{2y+x}{x+2}-1)}=C(x+2)$ ۴) $\sqrt{\sin(\frac{2y-2}{x+2}-1)}=C(x+2)$

پاسخ: گزینه «۲» به‌دلیل وجود جمله $\frac{2y+x}{x+2}$ در کمان تانژانت که شامل x و y است از تغییر متغیر $u=\frac{2y+x}{x+2}$ استفاده می‌کنیم:

$$u=\frac{2y+x}{x+2} \Rightarrow 2y+x=(x+2)u \Rightarrow 2y=(x+2)u-x \Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+2)u-\frac{x}{2}$$

$$y'=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}(x+2)u'-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+2)u'+\frac{1}{2}(u-1)$$

از طرفی باید جمله $\frac{y-1}{x+2}$ را نیز برحسب x و u بنویسیم، لذا داریم:

$$\frac{\frac{1}{2}(x+2)u-\frac{1}{2}x-1}{x+2}=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}(\frac{x+2}{x+2})=\frac{1}{2}(u-1)$$

حالا باید جایگذاری را در معادله انجام دهیم:

$$\frac{1}{2}(x+2)u'+\frac{1}{2}(u-1)=\frac{1}{2}(u-1)+\operatorname{tg}u \Rightarrow \frac{1}{2}(x+2)u'=\operatorname{tg}u$$

$$\xrightarrow{u'=\frac{du}{dx}} \frac{1}{2}(x+2)\frac{du}{dx}=\operatorname{tg}u \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } du} \frac{1}{2}\frac{x+2}{dx}=\frac{\operatorname{tg}u}{du}$$

$$\frac{2dx}{x+2}=\frac{du}{\operatorname{tg}u} \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} 2\operatorname{Ln}(x+2)=\operatorname{Ln}\sin u+\operatorname{Ln}c$$

$$\operatorname{Ln}(x+2)^2=\operatorname{Ln}c\sin u \Rightarrow (x+2)^2=c\sin u \xrightarrow{u=\frac{2y+x}{x+2}} (x+2)^2=c\sin(\frac{2y+x}{x+2})$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان } \frac{1}{2}} (x+2)=c^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sin(\frac{2y+x}{x+2})} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } c^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\sin(\frac{2y+x}{x+2})}=c^{-\frac{1}{2}}(x+2)$$

با جایگذاری C جدید به‌جای $c^{-\frac{1}{2}}$ جواب معادله به‌صورت $\sqrt{\sin(\frac{2y+x}{x+2})}=C(x+2)$ تعیین می‌شود.

درسنامه ۴: معادلات مرتبه اول خطی

هر معادله به فرم کلی زیر را یک معادله مرتبه اول خطی (نسبت به y) می‌نامند:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

می‌توان تحقیق کرد که جواب عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)dx + c\right]}$$

که $\mu(x)$ از رابطه‌ی $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ به دست می‌آید. برخی دوستان برای حفظ کردن رابطه راحت‌تر هستند کـه $\mu(x)$ را بـه عنـوان یـک تـابع جدید ننویسند و بنابراین رابطه را به صورت زیر حفظ می‌کنند:

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} + c\right]}$$

البته ما در این کتاب برای جلوگیری از افزایش حجم کتاب، سعی می‌کنیم $\mu(x)$ را ابتدا حساب کرده و از رابطه‌ی اول استفاده کنیم. (بعـد از محاسبـه‌ی $\mu(x)$ آن را در $q(x)$ ضرب کرده و از آن انتگرال می‌گیریم و جواب انتگرال را به‌علاوه‌ی مقدار ثابت c کرده و در نهایت کل عبارت را بر $\mu(x)$ تقسیم می‌کنیم)

توجه: $\mu(x)$ یک عامل انتگرال‌ساز است که یک معادله‌ی مرتبه اول خطی را به یک معادله کامل تبدیل می‌کند.

مثال ۱۰۵: جواب معادله‌ی $y' = (tgx)y + \cos x$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** با آوردن عبارت $(tgx)y$ به سمت چپ تساوی، به فرم استاندارد معادله مرتبه اول خطی می‌رسیم که در آن $p(x) = -tgx$ و $q(x) = \cos x$ است.

$$y' - (tgx)y = \cos x \xrightarrow{\text{ابتدا } \mu(x) \text{ را حساب می‌کنیم}} \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -tgxdx} = e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx} = e^{Ln(\cos x)} = \cos x$$

دقت کنید در قسمت آخر از رابطه‌ی $e^{Lna} = a$ استفاده کردیم. خُب حالا به راحتی جواب عمومی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{1}{\cos x}\left[\int \cos x . \cos x dx + c\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\int \cos^2 x dx + c\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx + c\right] \Rightarrow y = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\right]$$

تذکر ۳: برای این‌که سریع تشخیص دهیم یک معادله به فرم $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ نسبت به y خطی است یا نه، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) y در ضریب dy **نباشد**.

ب) ضریب dx شامل یک چندجمله‌ای از درجه‌ی اول برای y باشد (شامل توابع غیرخطی برحسب y نباشد).

مثال ۱۰۶: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۶)

۱) $xe^{-x}(x+c)$ ۲) $xe^{x}(x+c)$ ۳) $e^{-x}(x+c)$ ۴) $e^{x}(x+c)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» معادله را با ضرب در x^2 به‌صورت $xy' - y + xy = x^2 e^{-x}$ می‌نویسیم. در ایـن معادلـه در ضـریب dy خبـری از y نیسـت و در ضریب dx یک چند جمله‌ای درجه اول نسبت به y، به‌صورت $(x-1)y$ وجود دارد. لذا معادله نسبت به y خطی است.

$$xy' + (x-1)y = x^2 e^{-x} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} y' + \left(\frac{x-1}{x}\right)y = xe^{-x}$$

در معادله خطی حاصل شده $p(x) = \frac{x-1}{x}$، لذا می‌توانیم فاکتور انتگرال را به‌صورت $\mu(x) = e^{\int \frac{x-1}{x}dx} = e^{x - Lnx} = \frac{e^x}{x}$ به‌دست آورده و جواب عمـومی را تعیین کنیم:

$$y(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}\left[\int \frac{e^x}{x}(xe^{-x})dx + c\right] = xe^{-x}(x+c)$$

مثال ۱۰۷: معادله دیفرانسیل $(x+1)\frac{dy}{dx}-3y=(x+1)^5$ با استفاده از چه عامل انتگرال‌سازی به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل می‌شود؟

(مدیریت دریایی ـ سراسری ۹۶)

۱) $(1+x)^3$ ۲) $(1+x)^{-3}$ ۳) e^{3x} ۴) e^{-3x}

پاسخ: گزینه «۲» معادله دیفرانسیل مزبور نسبت به y خطی است. چون در ضریب dy عبارتی شامل y وجود ندارد. از طرفی در ضریب dx یک چندجمله‌ای درجه اول از y حضور دارد؛ با تقسیم معادله بر ضریب y' داریم:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{3}{1+x}y=(1+x)^4$$

در معادله فوق $p(x)=\frac{-3}{1+x}$ است و فاکتور انتگرال‌ساز را به‌صورت مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-3}{1+x}dx}=e^{-3Ln(1+x)}=e^{Ln(1+x)^{-3}}=(1+x)^{-3}$$

مراحل حل معادله مرتبه اول خطی

گام اول: ابتدا معادله را به فرم استاندارد تبدیل کنید (جملات را بر ضریب y' تقسیم کنید).

گام دوم: عبارت $\mu(x)$ را حساب کنید.

گام سوم: جواب عمومی را طبق فرمول حساب کنید (محاسبه‌ی انتگرال $\int\mu(x)q(x)dx$ در این مرحله، اصلی‌ترین کار است).

مثال ۱۰۸: جواب معادله‌ی $\cosh x\frac{dy}{dx}=2\cosh^2 x\sinh x-y\sinh x$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $y\cosh x=\cosh^3 x+c$ ۲) $\frac{y}{\cosh x}=\frac{2}{3}\cosh^3 x+c$ ۳) $\frac{y}{\cosh x}=\cosh^3 x+c$ ۴) $y\cosh x=\frac{2}{3}\cosh^3 x+c$

پاسخ: گزینه «۴» معادله نسبت به y خطی است؛ چون اولاً در ضریب dy، y وجود ندارد و ثانیاً در ضریب dx هم توان y، یک است. اما برای حل معادله گام‌ها را به ترتیب برمی‌داریم:

گام اول: ابتدا با تقسیم طرفین بر $\cosh x$ معادله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم و معادله به شکل مقابل می‌شود:

$$y'+\frac{\sinh x}{\cosh x}y=2\cosh x\sinh x$$

گام دوم: حالا باید $\mu(x)$ را حساب کنیم. در این معادله داریم:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\sinh x}{\cosh x}dx}=e^{Ln(\cosh x)}=\cosh x$$

گام سوم: حالا جواب را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{1}{\cosh x}[\int\cosh x.2\cosh x\sinh x dx+c]\Rightarrow y\cosh x=2\int\cosh^2 x(\sinh x dx)+c\Rightarrow y\cosh x=\frac{2}{3}\cosh^3 x+c$$

مثال ۱۰۹: جواب عمومی معادله $x\frac{dy}{dx}-y+3x^3y-x^2=0$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۳)

۱) $y=cx^{-1}e^{-x^2}+x^{-1}e^{-x^2}\int^x e^{s^2}ds$ ۲) $y=cx^{-1}e^{-x^3}+x^{-1}e^{-x^3}\int^x e^{s^3}ds$

۳) $y=cxe^{-x^2}+xe^{-x^2}\int^x e^{s^2}ds$ ۴) $y=cxe^{-x^3}+xe^{-x^3}\int^x e^{s^3}ds$

پاسخ: گزینه «۴» با دسته‌بندی مناسب معادله را به‌صورت $x\frac{dy}{dx}+(3x^3-1)y=x^2$ داریم. در ضریب dy خبری از y نیست و در ضریب dx یک چند جمله‌ای درجه اول از y حضور دارد. پس این معادله نسبت به y خطی مرتبه اول است. با تقسیم طرفین بر ضریب y' داریم:

$$\frac{dy}{dx}+(3x^2-\frac{1}{x})y=x$$

فاکتور انتگرال به‌صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$\mu(x)=e^{\int(3x^2-\frac{1}{x})dx}=e^{x^3-Lnx}=\frac{e^{x^3}}{x}$$

و جواب عمومی به سادگی تعیین می‌شود:

$$y(x)=\frac{1}{\frac{e^{x^3}}{x}}[\int\frac{1}{x}e^{x^3}.x\,dx+c]=xe^{-x^3}[\int e^{x^3}dx+c]$$

با تغییر نام متغیر زیر انتگرال از x به s، جواب به صورت گزینه (۴) خواهد بود، یعنی:

$$y=cxe^{-x^3}+xe^{-x^3}\int^x e^{s^3}ds$$

مثال ۱۱۰: در معادله دیفرانسیل $ty'+2y=\frac{\sin t}{t}$ شرط $y(-\frac{\pi}{2})=b$ برقرار است. اگر $t<0$ باشد و بخواهیم $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مقدار b باید با کدام گزینه برابر باشد؟

۱) 0 ۲) $-\frac{2}{\pi^2}$ ۳) $\frac{2}{\pi^2}$ ۴) $\frac{4}{\pi^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا طرفین معادله را بر ضریب y' تقسیم می‌کنیم تا به فرم استاندارد معادله مرتبه اول خطی برسیم: $y'+\frac{2}{t}y=\frac{\sin t}{t^2}$

با توجه به اینکه $p(t)=\frac{2}{t}$، لذا عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu(t)=e^{\int+\frac{2}{t}dt}=e^{2Lnt}=e^{Lnt^2}=t^2$ به‌دست می‌آید، بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$y=\frac{1}{t^2}[\int(t^2\times\frac{\sin t}{t^2})dt+c]\Rightarrow y=\frac{-\cos t+c}{t^2}$$

با توجه به شرط $y(-\frac{\pi}{2})=b$ داریم:

$$b=\frac{-\cos\frac{\pi}{2}+c}{(-\frac{\pi}{2})^2}\Rightarrow c=\frac{\pi^2}{4}b$$

پس جواب معادله به صورت مقابل است:

$$y=\frac{-\cos t+\frac{\pi^2}{4}b}{t^2}$$

چون $t\to 0$ پس مخرج صفر می‌شود؛ از طرفی طبق صورت سؤال y مقدار عددی دارد، پس صورت کسر هم باید به سمت صفر برود، پس داریم:

$$\lim_{t\to 0}(-\cos t+\frac{\pi^2}{4}b)=0\xrightarrow{\cos t\to 1}-1+\frac{\pi^2}{4}b=0\Rightarrow b=\frac{4}{\pi^2}\Rightarrow y=\frac{-\cos t+1}{t^2}\Rightarrow\lim_{t\to 0}y=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{t^2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۱۱: در معادله دیفرانسیل $(e^{-2\sqrt{x}}-y)dx=\sqrt{x}\,dy$ با فرض $y(0)=1$، مقدار $y(1)$ کدام است؟

(مهندسی عمران، مهندسی نقشه‌برداری و مهندسی نساجی ـ سراسری ۹۷)

۱) $3e^{-2}$ ۲) e^{-2} ۳) e^2 ۴) $3e^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» معادله داده شده نسبت به y خطی است، چون در ضریب dy، خبری از y نیست و در ضریب dx یک چندجمله‌ای درجه اول از y وجود دارد. لذا داریم:

$$\sqrt{x}\,dy=(e^{-2\sqrt{x}}-y)dx\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }\sqrt{x}\,dx}y'=\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}-\frac{y}{\sqrt{x}}$$

$$y'+\frac{1}{\sqrt{x}}y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2\sqrt{x}}\Rightarrow\mu(x)=e^{\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx}=e^{2x^{\frac{1}{2}}}=e^{2\sqrt{x}}\Rightarrow y(x)=\frac{1}{e^{2\sqrt{x}}}[\int e^{2\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2\sqrt{x}}dx+C]\Rightarrow y=\frac{1}{e^{2\sqrt{x}}}(2\sqrt{x}+C)$$

با توجه به اینکه $y(0)=1$ ثابت C برابر $C=1$ می‌شود، جواب خصوصی به‌صورت $y=\frac{1}{e^{2\sqrt{x}}}(2\sqrt{x}+1)$ خواهد بود و لذا به راحتی می‌توان $y(1)$ را محاسبه کرد:

$$y(1)=\frac{1}{e^2}(2+1)=\frac{3}{e^2}=3e^{-2}$$

مثال ۱۱۲: به ازای سه جواب y_1، y_2، y_3 از معادله دیفرانسیل $y'+p(x)y=Q(x)$، کدام عبارت درست است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۹)

۱) y_2-y_1 جوابی از معادله است. ۲) $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ جوابی از معادله است.

۳) y_2-y_1 مضرب ثابتی از y_3-y_1 است. ۴) $y=y_3+c(y_2-y_1)$ جواب عمومی معادله است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» معادله دیفرانسیل داده شده خطی نسبت به y است و جواب عمومی آن به‌صورت $y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c]$ است که ثابت c با توجه به شرایط اولیه داده شده تعیین می‌شود. هنگامی‌که جواب y_1,y_2,y_3 در ورودی مسأله داده می‌شود قاعدتاً ۳ مقدار c_1,c_2,c_3 نیز متناسب با هر شرط اولیه به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}y_1=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c_1]\\ y_2=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c_2]\\ y_3=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c_3]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_2-y_1=e^{-\int p(x)dx}(c_2-c_1)\\ y_3-y_1=e^{-\int p(x)dx}(c_3-c_1)\end{cases}$$

اگر حاصل y_2-y_1 را بر y_3-y_1 تقسیم کنیم، خواهیم دید که حاصل تقسیم برابر مقدار ثابت $\frac{c_2-c_1}{c_3-c_1}$ است. به عبارت دیگر y_2-y_1 مضرب ثابتی از y_3-y_1 است.

تشخیص نوع معادله و روش حل آن و درجه‌ی اهمیت درسنامه‌های این فصل

در این بخش، ابتدا روش تشخیص نوع معادله و روش حل آن و در پایان مطلبی کوتاه در مورد اهمیت درسنامه‌های این فصل ارائه می‌شود.

تشخیص نوع و روش حل در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مهم‌ترین مشکلی که معمولاً دانشجویان با آن روبه‌رو هستند «تشخیص روش حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول» است. چه بسا بسیاری از افراد اگر نوع معادله و روش حل آن را تشخیص دهند بتوانند معادله را حل کنند؛ اما به دلیل ناتوانی در تشخیص، یا معادله را حل نمی‌کنند و یا وقت زیادی صرف پیدا کردن روش مناسب می‌کنند که هر یک به اندازه‌ی خود زیان می‌رساند. هر چند دستورالعمل کلی برای این روش‌ها وجود ندارد؛ ولی سعی کرده‌ام در این بخش شما را به وضعیت خوبی در این زمینه برسانم. فقط یادتان باشد باید حتماً تمرین‌هایی که پس از پایان این قسمت می‌آید را قبل از نگاه کردن به پاسخ خودتان بررسی کنید تا ذهنتان در این حوزه تقویت شود.

به‌طورکلی فرم نوشتاری معادله دیفرانسیل ممکن است به صورت $Mdx+Ndy=0$، $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}$ و یا به صورت $f(x,y,y')=0$ باشد. برای تشخیص روش حل یک معادله دیفرانسیل، ابتدا باید مشخص کنید که معادله مورد نظر در کدام یک از دسته‌های دوگانه زیر قرار می‌گیرد. سپس اولویت‌های پیشنهاد شده را به‌کار بگیرید تا به راحتی روش حل معادله را تشخیص دهید.

الف) معادلاتی که بر روی y' عملگر غیرخطی اعمال نشده است.

توجه: منظور از اعمال عملگر غیرخطی روی y' این است که در معادله، y' مثلاً به صورت‌های زیر داده شود:

$$y'^n\ ,\ \sin(y')\ ,\ e^{y'}\ ,\ Lny'\ ,\ y'Lny'\ ,\ y'\sin(y')\ ,\ \ldots$$

که فعلاً آن را مورد بررسی قرار نمی‌دهیم و در بند ((ب)) روش حل آنها را بررسی می‌کنیم. پس اولویت‌های زیر مخصوص معادلاتی است که عملگر غیر خطی روی y' نداریم و ضمناً فرم نمایش معادله به‌صورت $Mdx+Ndy=0$ یا $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}$ است.

اولویت اول: بررسی تفکیک‌پذیری

به دلیل اینکه بررسی تفکیک‌پذیری معمولاً بدون دخالت دست و به صورت ذهنی است، پیشنهاد می‌شود همیشه در اولویت نخست قرار گیرد. در این مرحله باید سعی کنیم M و N و یا جملات تشکیل‌دهنده $f(x,y,y')$ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع جداشونده به‌صورت $F(x)G(y)$ بنویسیم.

مثلاً در معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx}+y^2=0$ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۳) واضح است که M و N جداشونده هستند و یا به عنوان یک نمونه دشوارتر، در معادله دیفرانسیل $tgy\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\sin(x-y)$، طرف راست تساوی را با به‌کارگیری اتحاد مثلثاتی تبدیل جمع به ضرب می‌توان به‌صورت $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x.\cos y$ یا همان $F(x)G(y)$ بازنویسی کرد.

توجه: در معادلاتی به فرم $y'=f(ax+by+c)$ با در نظر گرفتن تغییرمتغیر $u=ax+by+c$، به یک معادله تفکیک‌پذیر دست پیدا می‌کنیم.

مثلاً در معادله $\frac{dy}{dx}=2+\sqrt{y-2x+3}$ (معماری کشتی- سراسری ۹۵) با انتخاب تغییرمتغیر $u=y-2x+3$، به معادله تفکیک‌پذیر $\frac{du}{\sqrt{u}}=dx$ می‌رسیم.

اولویت دوم: بررسی همگن بودن

در این مرحله باید بررسی کرد که آیا M و N یا جملات تشکیل‌دهنده $f(x,y,y')$ همگن از درجه یکسان هستند یا خیر؟ در صورت مثبت بودن پاسخ بدون درنگ از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x}$ استفاده کنید و یک معادله جدید تفکیک‌پذیر ایجاد کرده که با یک انتگرال‌گیری ساده جواب عمومی تعیین می‌شود.

نکته‌ای که لازم است به خاطر بسپارید این است که وجود عبارت $\frac{y}{x}$ در معادله، **معمولاً** نشانه بارز همگن بودن است. مثلاً در معادله $x\frac{dy}{dx}=y+x\sec(\frac{y}{x})$ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۵) ضمن اینکه تک‌تک جملات همگن از درجه یک هستند، عبارت $\frac{y}{x}$ نیز در کمان sec آمده است. پس با تغییرمتغیر $u=\frac{y}{x}$ به یک معادله تفکیک‌پذیر دست خواهیم یافت.

اولویت سوم: بررسی خطی بودن معادله

اگر معادله جزو دو حالت فوق نبود بهتر است خطی بودن معادله نسبت به x یا y بررسی شود. ابتدا خطی بودن نسبت به x یا y را دوباره یادآوری می‌کنیم:

خطی نسبت به y: در ضریب dy **نباید** عبارتی بر حسب y وجود داشته باشد و همچنین ضریب dx، **باید** شامل یک چندجمله‌ای درجه اول از y باشد.

خطی نسبت به x: در ضریب dx **نباید** عبارتی بر حسب x وجود داشته باشد و همچنین ضریب dy، **باید** شامل یک چندجمله‌ای درجه اول از x باشد.

مثلاً در معادله $2xy'+3xy-1=-4x^2+Lnx$ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۵)، در ضریب dy خبری از y نیست؛ همچنین در ضریب dx، یک چندجمله‌ای درجه اول از y وجود دارد؛ یعنی $3xy$. پس معادله نسبت به y خطی است.

توجه: در معادلاتی به فرم $g'(y)y'+g(y)p(x)=q(x)$ که در آن مشتق $g(y)$ در جمله اول ظاهر شده است، می‌توان با انتخاب تغییر متغیر $u=g(y)$ یک معادله خطی جدید برحسب متغیر u ایجاد کرد.

اولویت چهارم: بررسی برنولی بودن معادله

اگر معادله خطی نبود بلافاصله برنولی بودن آن را بررسی کنید. جهت یادآوری، روش تشخیص برنولی بودن نسبت به x یا y را مرور می‌کنیم:

برنولی نسبت به y: در ضریب dy **نباید** عبارتی بر حسب y وجود داشته باشد و همچنین در ضریب dx، **باید** همزمان y و y^{α} حضور داشته باشند.

برنولی نسبت به x: در ضریب dx **نباید** عبارتی بر حسب x وجود داشته باشد و همچنین در ضریب dy، **باید** همزمان x و x^{α} حضور داشته باشند.

مثلاً در معادله $ydx+(x+x^3y^2)dy=0$ (هوافضا- سراسری ۹۴) در ضریب dx خبری از x نبوده و همچنین در ضریب dy به‌طور همزمان x و x^3 حضور دارند. پس معادله نسبت به x برنولی است و یا معادله $y'=\dfrac{y^2+2x^4\cos x^2}{xy}$ (ریاضی-سراسری ۸۹) را با طرفین وسطین، به‌صورت $(y^2+2x^4\cos x^2)dx=xydy$ می‌توان نوشت. همانگونه که در ظاهر امر پیداست معادله نه نسبت به x خطی است و نه نسبت به y. چون در ضریب dx عبارت $x^4\cos x^2$ و در ضریب dy عبارات y وجود دارد. اما توجه کنید که اگر معادله را بر y (در واقع همان عبارت غیر خطی کننده معادله نسبت به y) تقسیم کنیم، در ضریب dy عبارت شامل y حذف می‌شود و همچنین در ضریب dx دو عبارت y و y^{-1} به وجود می‌آید. پس معادله نسبت به y برنولی خواهد شد.

توجه: معمولاً طراح برای آشفته کردن ذهن دانشجو معادله را در x^n یا در y^n ضرب می‌کند. بنابراین هنگام تشخیص یک معادله برنولی، اگر مثلاً در ضریب dy، y^n وجود داشت، باید معادله را بر y^n تقسیم و سپس وضعیت برنولی بودن معادله را نسبت به y بررسی کرد. به همین ترتیب اگر در ضریب dx، x^n وجود داشت، ابتدا معادله را بر x^n تقسیم و سپس وضعیت برنولی بودن معادله را نسبت به x بررسی می‌کنیم.

اولویت پنجم: بررسی روش دسته‌بندی و دیفرانسیل کامل

در صورتی‌که در یک معادله دیفرانسیل عبارت‌هایی نظیر $ydx\pm xdy$ یا $xdx\pm ydy$ وجود داشته باشد، احتمالاً می‌توان معادله را به روش دیفرانسیل کامل حل کرد. مثلاً در معادله $(x^2y^3+y)dx+(x+x^3y^2)dy=0$، عبارت $ydx+xdy$ دیفرانسیل کامل است؛ یعنی $d(xy)$. همچنین در مواقعی که دو جمله به‌صورت $x^{\alpha}y^{\beta}$ و $x^{\alpha+1}y^{\beta-1}$ وجود داشته باشند، طوری‌که تساوی $\dfrac{\text{توان بزرگ x}}{\text{ضریب توان کوچک x}}=\dfrac{\text{توان بزرگ y}}{\text{ضریب توان کوچک y}}$ برقرار باشد، آن دو جمله نیز تشکیل یک دیفرانسیل کامل می‌دهند. مثلاً در معادله $(4x^3y^3+\frac{1}{x})dx+(3x^4y^2-\frac{1}{y})dy=0$ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۵) قاعده گفته شده برای دو جمله $4x^3y^3$ و $3x^4y^2$ صادق بوده و دیفرانسیل کامل هستند؛ به عبارت دیگر $d(x^4y^3)$.

اولویت ششم: بررسی کامل بودن

در این مرحله باید شرط کامل بودن را بررسی کنیم. به یاد داشته باشید که اگر گزینه‌ها به‌صورت $f(x,y)=c$ باشند، احتمالاً معادله کامل است و یا عامل انتگرال‌ساز دارد. در واقع در چنین مواردی ممکن است حتی اولویت‌ها تغییر کند! یعنی شما می‌توانید به محض رویت چنین گزینه‌هایی به طور ذهنی و یا در مدت زمانی کوتاه شرط کامل بودن را کنترل کنید (خصوصاً اگر مشتق‌گیری ساده بود).

توجه: معمولاً در اکثر معادلاتی که به روش کامل قابل حل هستند، توابع چندجمله‌ای و یا ترکیب آنها با توابع نمایی یا مثلثاتی دیده می‌شود.

مثال ۲۰۰: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=\dfrac{6e^y-4x^3y}{x^4-6xe^y}$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۵)

۱) $6xe^y-yx^4=c$ ۲) $6xe^y+yx^4=c$ ۳) $6xe^y-yx^3=c$ ۴) $6xe^y+yx^3=c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به فرم گزینه‌ها، جواب عمومی به‌صورت $f(x,y)=c$ است. ضمن اینکه M و N ترکیب چندجمله‌ای با تابع نمایی e^y است؛ لذا بررسی کامل بودن معادله در اولویت نخست قرار دارد. با محاسبه خواهید دید که $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ و معادله کامل است. بنابراین با تمرین و تجربه خواهید دید که پس از مدتی نیاز به اولویت‌بندی گفته شده نیست و خودتان به راحتی اولویت و روش حل مناسب را تشخیص خواهید داد.

اولویت هفتم: به‌کارگیری تغییر متغیر

در صورتیکه هیچ‌یک از مراحل بالا برای معادله کارساز نباشد، باید به دنبال تغییر متغیر باشیم. به صورت کلی باید با سعی و خطا به تغییر متغیر مناسب دست یافت. با این حال می‌توان به‌صورت غیر رسمی توصیه‌هایی کرد:

- ❖ اگر ترکیب x و y در کمان توابع مثلثاتی، در توان توابع نمایی، جلوی Ln یا زیر رادیکال قرار داشت، آن ترکیب را تغییر متغیر درنظر می‌گیریم.
- ❖ در صورت مشاهده توابع معکوس مثلثاتی یا توابع معکوس مثلثاتی هایپربولیک بین گزینه‌ها، پیشنهاد می‌شود تغییر متغیر را طوری درنظر بگیرید که عبارات $\sqrt{1\pm u^2}$ یا $\sqrt{u^2\pm 1}$ ظاهر شوند.

مثلاً در معادله $xy'=-2y+xyLnx^2y$ با توجه به ترکیب x و y جلوی Ln، تغییر متغیر $u=x^2y$ را در نظر می‌گیریم تا معادله جدید به صورت $\dfrac{du}{uLnu}=dx$ ظاهر شود یا با به‌کارگیری تغییر متغیر $u=xy^2$، معادله $2xyy'=-y^2+\sqrt{x^2y^4+1}$ را به‌صورت $\dfrac{du}{\sqrt{u^2+1}}=dx$ بازنویسی می‌کنیم؛ خب! حالا به راحتی با انتگرال‌گیری از معادله در سمت چپ تساوی، $\sin h^{-1}u$ به‌دست می‌آید.

توجه: در بررسی معادلاتی که به فرم $f(x,y,y')=0$ داده شده‌اند می‌توان ترتیب اولویت‌هایی که قبلاً توضیح داده شد را تغییر داد و ابتدا خطی بودن و سپس به ترتیب، تغییر متغیر، تفکیک‌پذیری، کامل بودن، همگن بودن و در نهایت دسته‌بندی را بررسی کرد. مثلاً در معادله دیفرانسیل $y'e^{\sin y}+xy'\operatorname{tg}y=1$ (مکانیک ـ سراسری ۹۴) که به فرم $f(x,y,y')=0$ داده شده، اولویت اول را بررسی خطی بودن قرار می‌دهیم. ملاحظه می‌کنید به علت وجود دو جمله غیر خطی کننده $e^{\sin y}$ و $\operatorname{tg}y$ معادله نسبت به y خطی نیست اما با کمی تیزبینی متوجه خواهید شد که در ضریب dx هیچگونه عبارتی بر حسب x دیده نمی‌شود و از طرفی، در ضریب dy یک چندجمله‌ای درجه اول از x به‌صورت $x\operatorname{tg}y$ دیده می‌شود. پس به راحتی مشخص شد که معادله نسبت به x خطی است. اما اگر از روش قبل استفاده می‌کردیم باید ابتدا تفکیک‌پذیری و همگن بودن را بررسی می‌کردیم که قطعاً باید زمان و انرژی بیشتری را صرف می‌کردیم.

تمرین‌هایی جهت تسلط در تشخیص روش حل معادله دیفرانسیل	
۱ـ $y(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1})dx+(\ln x+\operatorname{tg}^{-1}x)dy=0$	۲ـ $x\,dy-y\,dx-\sqrt{x^2-y^2}\,dx=0$
۳ـ $\cos(x+y)dx=x\sin(x+y)dx+x\sin(x+y)dy$	۴ـ $y'=81x^2+18xy+y^2$
۵ـ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y\cos x}{4y^3-\sin x}$	۶ـ $ty'+(t+1)y=2te^{-t}$
۷ـ $y'=-\frac{y(e^{xy}+y)}{x(e^{xy}+2y)}$	۸ـ $\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{\sin(x-y+1)}$
۹ـ $yy'=(1+y^2)x^2$	۱۰ـ $2xe^{2y}\frac{dy}{dx}=3x^4+e^{2y}$
۱۱ـ $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$	۱۲ـ $(x+1)y'-y=e^x(x+1)^2$
۱۳ـ $y'-x^{-1}y=-x^{-1}y^2$	۱۴ـ $y'=2(6x+3y)^2-2$
۱۵ـ $y(x^2y^2+2xy+1)\,dx+x(x^2y^2-2xy+1)dy=0$	۱۶ـ $x\frac{dy}{dx}-y+3x^3y-x^2=0$
۱۷ـ $y'=\frac{y^2+2x^4\cos x^2}{xy}$	۱۸ـ $y'(\sin y+\frac{y}{\cos y})=-\pi\sin x\cos x\cos y$
۱۹ـ $(3x^2-2xy+2)\,dx+(6y^2-x^2+3)\,dy=0$	۲۰ـ $x^2y'=3(x^2+y^2)\operatorname{tg}^{-1}(\frac{y}{x})+xy$
۲۱ـ $y'-x\sin 2y=xe^{-x^2}\cos^2 y$	۲۲ـ $y'-2xy+16xy^4=0$
۲۳ـ $y'=\frac{y-x^2y}{x-xy^2}$	۲۴ـ $\frac{dx}{dy}+x-x^2\cos y+x\sin y=0$
۲۵ـ $y\frac{dy}{dx}+(1+y^2)\sin x=0$	۲۶ـ $xy'-y[\ln(xy)-1]=0$
۲۷ـ $(\frac{\ln(\ln y)}{x}+\frac{2}{3}xy^3)dx+(\frac{\ln x}{y\ln y}+x^2y^2)dy=0$	۲۸ـ $\sin y\frac{dy}{dx}=\cos y(1-x\cos y)$
۲۹ـ $y'-e^{x-y}+e^x=0$	۳۰ـ $(2x+y)\frac{dy}{dx}=3+2x+y$
۳۱ـ $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$	۳۲ـ $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3}$
۳۳ـ $(x-y)y'=y^2$	۳۴ـ $(x^2-xy)y'=y^4$
۳۵ـ $(xy^3+\ln x)dx=y^2dy$	۳۶ـ $y'=\frac{xy^2-\sin x\cos x}{y(1-x^2)}$
۳۷ـ $xy'=e^{-xy}-y$	۳۸ـ $y'\sin y=\cos x(2\cos y-\sin x)$
۳۹ـ $xy'(x+\sqrt{x^2+y^2})=y\sqrt{x^2+y^2}$	۴۰ـ $x(x-1)\cos y\frac{dy}{dx}+\sin y=x(x-1)^2$
۴۱ـ $y(x^2e^{xy}-y)dx+x(y+x^2e^{xy})dy=0$	۴۲ـ $y'=\frac{1}{x^2y^3+xy}$
۴۳ـ $y'=\frac{2x}{x^2\cos y+\sin 2y}$	۴۴ـ $x\,dy-y\,dx=x\operatorname{tg}(\frac{y}{x}-1)$
۴۵ـ $x\cos(\frac{y}{x})(y\,dx+x\,dy)=y\sin(\frac{y}{x})(x\,dy-y\,dx)$	۴۶ـ $y'=-\frac{2xy^3+x^2y^3+e^{-x}+1}{3x^2y^2}$
۴۷ـ $xy'\sin y-y'e^y=\cos y$	۴۸ـ $(x+y-1)^2dy=2(y+2)^2dx$
۴۹ـ $(1+y^2)dx=(\operatorname{tg}^{-1}y-x)dy$	۵۰ـ $(y^2-1)dx+(y^2-y-2x)dy=0$

۱) N تنها تابعی از x است. همچنین M نیز به‌صورت $F(x)G(y)$ است. پس می‌توان از روش معادلات تفکیک‌پذیر استفاده کرد.

۲) M و N همگن از درجه ۱ هستند. بنابراین می‌توان از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x}$ استفاده کرد. همچنین به دلیل وجود عبارت $x\,dy-y\,dx$ می‌توان به بحث دیفرانسیل کامل هم فکر کرد. یعنی ایجاد $d[\operatorname{Arc}\sin(\frac{y}{x})]$ و $d(\operatorname{Ln}(x))$ و سپس انتگرال‌گیری.

۳) به دلیل وجود $x+y$ در کمان‌های $\sin$ و $\cos$ می‌توان از تغییر متغیر $u=x+y$ کمک گرفت. پس از اعمال تغییر متغیر به یک معادله تفکیک‌پذیر خواهیم رسید.

۴) در سمت راست تساوی اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم: $(9x+y)^2$. بنابراین فرم معادله $y'=f(ax+by+c)$ است. در نتیجه به‌کارگیری تغییر متغیر $u=9x+y$ یک معادله تفکیک‌پذیر جدید ایجاد می‌نماید و آن هم به سادگی قابل حل خواهد بود.

۵) M و N نه همگن هستند و نه می‌توان با فاکتورگیری آن‌ها را به‌صورت $F(x)G(y)$ نوشت. پس بحث تفکیک‌پذیری در اینجا مردود است. همچنین در ضریب dx عبارت‌های غیرخطی کننده $y\cos x$ و $3x^2$ و در ضریب dy جمله $4y^3$، بحث خطی بودن نسبت به x یا y را رد می‌کنند. بنابراین جدی‌ترین بحث بررسی کامل بودن معادله است. با بررسی $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ خواهید دید که معادله کامل است.

۶) معادله به فرم $f(t,y,y')=0$ داده شده؛ بنابراین بررسی خطی بودن در اولویت نخست قرار دارد. در ضریب dy، خبری از y نیست. همچنین در ضریب dt یک چندجمله‌ای درجه اول نسبت به y وجود دارد. پس معادله نسبت به y خطی است.

۷) M و N را نمی‌توان به‌صورت $F(x)G(y)$ نوشت. همچنین بحث همگن بودن A و B نیز منتفی است. از طرف دیگر در ضریب dy، ۲ جمله $2xy$ و xe^{xy} برحسب y وجود دارد؛ پس معادله نسبت به y خطی نیست اما نسبت به x چطور؟! در ضریب dx نیز جمله ye^{xy} بحث خطی بودن معادله نسبت به x یا y را مردود می‌کند. بنابراین باید کامل بودن معادله بررسی شود. از طرفی وجود تابع نمایی e^{xy} راهنمای ما در بررسی کامل بودن معادله است. با محاسبه $\frac{\partial N}{\partial x}$ و $\frac{\partial M}{\partial y}$ خواهید دید که آن‌ها برابرند و درنتیجه معادله کامل است.

۸) واضح است که بحث تفکیک‌پذیری در اینجا مطرح نیست؛ اما وجود عبارت شامل x و y در کمان $\sin$ ما را به انتخاب تغییر متغیر $u=x-y+1$ سوق می‌دهد. با به‌کارگیری تغییر متغیر و اعمال آن در معادله، به یک معادله تفکیک‌پذیر جدید می‌رسیم و با یک انتگرال‌گیری ساده جواب عمومی تعیین می‌شود.

۹) با توجه به M و N که به‌صورت $F(x)G(y)$ هستند، معادله تفکیک‌پذیر خواهد بود.

۱۰) با کمی دقت متوجه می‌شوید که معادله به صورت $y'=-\frac{M}{N}$ داده شده و در آن M و N از ترکیب چندجمله‌ای و توابع نمایی تشکیل شده است. بنابراین ابتدا کامل بودن معادله را بررسی می‌کنیم و خواهیم دید که $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4e^{2y}$. حالا اگر $4e^{2y}$ را بر N تقسیم کنیم حاصل $-\frac{2}{x}$ می‌شود و این یعنی اینکه عامل انتگرال‌ساز معادله تنها بر حسب x و برابر $\frac{1}{x^2}$ خواهد بود.

۱۱) معادله به فرم $Mdx+Ndy=0$ است و ترکیب جملات نمایی، e^{xy}، مثلثاتی و چند جمله‌ای در M و N دیده می‌شوند. پس با بررسی شرط کامل بودن حاصل $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$ می‌شود و معادله کامل است.

۱۲) معادله به فرم $f(x,y,y')=0$ است و بررسی خطی بودن اولویت دارد. در ضریب dy خبری از y نیست، همچنین ضریب dx شامل یک چندجمله‌ای درجه اول از y است. پس معادله داده شده نسبت به y از نوع خطی مرتبه اول است.

۱۳) معادله به فرم $f(x,y,y')=0$ است. با بررسی خطی بودن معادله می‌بینیم که در ضریب dy خبری از y نیست و در ضریب dx جملات y و y^2 همزمان با هم وجود دارند. بنابراین معادله برنولی نسبت به y است.

۱۴) معادله داده شده به فرم $y'=f(ax+by+c)$ است. لذا تغییر متغیر $u=6x+3y$ یک معادله جدید تفکیک‌پذیر را نتیجه می‌دهد.

درسنامه۲: حل معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

در درسنامه قبل صرفاً معادلات دیفرانسیل **همگن** را بررسی کردیم. در این درسنامه سراغ معادلات **غیرهمگن** (البته با ضرایب ثابت) می‌رویم. به لحاظ تعداد سؤالات مطرح شده در آزمون‌های گذشته، این درسنامه، پرتکرارترین سؤالات را در مقایسه با سایر درسنامه‌های این فصل داشته است. بنابراین در مطالعه مطالب این درسنامه دقت کافی را داشته باشید. ابتدا یادآوری می‌کنیم که به هر معادله به‌صورت کلی زیر، معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت گفته می‌شود:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(y-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

که در این معادله، $f(x)$ مخالف صفر و ضرایب a_0 تا a_n اعدادی ثابت هستند.

برای تعیین **جواب کامل معادله غیرهمگن** باید سه گام زیر را انجام دهیم:

گام اول: ابتدا جواب عمومی معادله همگن یعنی y_h را حساب می‌کنیم (برای رسیدن به معادله‌ی همگن متناظر، باید طرف دوم، یعنی $f(x)$ را مساوی صفر قرار دهیم) که البته نحوه‌ی حل معادلات همگن را در درسنامه قبل یاد گرفتیم.

گام دوم: در این مرحله باید جواب خصوصی معادله غیرهمگن یعنی y_p را حساب کنیم (که بحث اصلی این درسنامه، تعیین این جواب است).

گام سوم: جواب کامل یا جواب عمومی معادله غیرهمگن از جمع دو جواب y_h و y_p به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر معرفی می‌گردد:

جواب عمومی معادله غیرهمگن $= y_h + y_p$

توجه: در معادلات غیرهمگن جواب کامل را همان جواب عمومی می‌گویند. وقتی صحبت از جواب عمومی این نوع معادلات می‌شود نباید احیاناً فکر کنید منظور طراح جواب عمومی قسمت همگن است (دیده شده این ابهام برای برخی از داوطلبان پیش آمده است!).

روش‌های تعیین جواب خصوصی

برای به‌دست آوردن جواب خصوصی یک معادله غیرهمگن با ضرایب ثابت سه روش زیر را داریم:

۱) روش ضرایب نامعین، ۲) روش اپراتور معکوس، ۳) روش تغییر پارامتر لاگرانژ

از بین روش‌های فوق، دو روش اول، صرفاً در حل معادلات با ضرایب ثابت (البته آن هم برخی از این نوع معادلات) استفاده می‌شوند. اما روش سوم، روش کامل‌تری است که هم در معادلات غیرهمگن با ضرایب ثابت (موضوع این درسنامه) و هم در معادلات غیرهمگن با ضرایب متغیر (موضوع درسنامه بعد) مورد استفاده قرار می‌گیرد. با بررسی سؤالات آزمون‌ها متوجه می‌شویم هرکدام از روش‌های فوق با توجه به شرایط حل مسئله به کمک ما می‌آید که در توضیح روش‌ها متوجه خواهید شد که از کدام روش باید در کدام نوع سؤالات کمک بگیریم.

۱ـ روش ضرایب نامعین

این روش تقریباً یک روش استاندارد و قانونمند برای تعیین جواب خصوصی برخی از معادلات است که البته دو محدودیت زیر را دارد:

الف) حتماً باید ضرایب معادله ثابت باشد.

ب) تابع $f(x)$ باید یکی از حالات چندجمله‌ای، نمایی، سینوسی، کسینوسی و یا ضرب این توابع و یا جمع این توابع را داشته باشد.

برای آموزش چگونگی این روش چند مثال را باهم مرور می‌کنیم:

مثال ۲۶: معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 8x^2$ را حل کنید.

☑ **پاسخ:** ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را تعیین می‌کنیم.

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

حالا می‌خواهیم جواب خصوصی را تعیین کنیم. با توجه به طرف سمت راست که یک چندجمله‌ای درجه دوم است، حدس می‌زنیم که جواب خصوصی به صورت $y_p = ax^2 + bx + c$ است (برای راحتی در نمایش عبارات و محاسبات به جای y_p همان y را می‌نویسیم). حالا باید جواب خصوصی را در معادله قرار دهیم و برای این منظور باید y'' تعیین گردد. $y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$

پس داریم: $2a + 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2 \Rightarrow 4ax^2 + 4bx + (4c + 2a) = 8x^2$

با مساوی قراردادن «ضرایب هم‌توان از x و یا به عبارت دیگر جملات یکسان در طرفین تساوی» مقادیر مجهول را تعیین می‌کنیم. سمت راست ضریب x^2 عدد ۸ و سایر ضرایب صفر است.

ضریب x^2 در سمت راست = ضریب x^2 در سمت چپ $\Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$

ضریب x در سمت راست = ضریب x در سمت چپ $\Rightarrow 4b = 0 \Rightarrow b = 0$

ضریب x^0 در سمت راست = ضریب x^0 در سمت چپ $\Rightarrow 4c + 2a = 0 \xrightarrow{a=2} c = -1$

پس جواب خصوصی به صورت $y_p = 2x^2 - 1$ بوده است و لذا جواب کامل (عمومی) معادله غیرهمگن به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^2 - 1$$

مثال ۲۷: معادله دیفرانسیل $y''+4y=4e^{2x}$ را حل کنید.

پاسخ: به وضوح جواب قسمت همگن یعنی $y''+4y=0$ برابر با $y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ است. باید سراغ تعیین جواب خصوصی برویم؛ چون در سمت راست یک تابع نمایی داریم، حدس می‌زنیم جواب به صورت $y_p=Ae^{2x}$ است. پس $y=Ae^{2x}$ و $y''=4Ae^{2x}$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$y''+4y=4e^{2x}\Rightarrow 4Ae^{2x}+4Ae^{2x}=4e^{2x}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}}2Ae^{2x}=e^{2x}\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

پس جواب خصوصی به صورت $y_p=\frac{1}{2}e^{2x}$ است و بنابراین جواب عمومی معادله به صورت مقابل است: $y=y_h+y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{2}e^{2x}$

مثال ۲۸: جواب عمومی معادله $y''-y=e^x$ را تعیین کنید.

پاسخ: جواب عمومی قسمت همگن به راحتی برابر با $y_h=c_1e^x+c_2e^{-x}$ به‌دست می‌آید. حالا باید سراغ قسمت همگن برویم؛ با توجه به سمت راست، فرض می‌کنیم شکل جواب خصوصی به صورت $y_p=Ae^x$ است.

با محاسبه $y''=Ae^x$ و قراردادن آن در معادله داریم: $y''-y=e^x\Rightarrow Ae^x-Ae^x=e^x\Rightarrow 0=e^x$

عجب! به یک تساوی نادرست رسیدیم، این یعنی شکل کلی جواب خصوصی نادرست انتخاب شده است. اما اگر مثلاً شکل جواب خصوصی را از ابتدا به صورت $y_p=Axe^x$ انتخاب می‌کردیم، نتیجه چه می‌شد؟ دوباره امتحان می‌کنیم: $y_p=Axe^x\Rightarrow y_p'=A(x+1)e^x\Rightarrow y_p''=A(x+2)e^x$

با قراردادن در معادله داریم: $y''-y=e^x\Rightarrow A(x+2)e^x-Axe^x=e^x\Rightarrow 2Ae^x=e^x\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$

پس جواب خصوصی به صورت $y_p=\frac{1}{2}xe^x$ به‌دست می‌آید و نهایتاً جواب عمومی معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$$

اما علت اینکه در امتحان دوباره جواب خصوصی مجبور به ضرب x شدیم چه بود؟

پاسخ این است که چون e^x یکی از جواب‌های قسمت همگن معادله بود، بنابراین نمی‌توانیم به عنوان کاندیدای جواب خصوصی مثلاً $y=Ae^x$ انتخاب کنیم و با ضرب x در آن جواب را اصلاح کردیم. البته لازم نیست نگران باشید چون نحوه‌ی انتخاب جواب خصوصی را به صورت قانونمند به شما خواهیم گفت.

با توجه به این که نوع تابع $f(x)$ (یعنی تابع سمت راست معادله‌ی غیرهمگن) به کدام شکل باشد، نحوه انتخاب جواب خصوصی را بیان خواهیم کرد.

ابتدا حالت‌های پرتکرار را جداگانه بررسی می‌کنیم و سپس فرمول کلی را بیان خواهیم کرد.

۱) اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n مانند $P_n(x)$ باشد.

در این صورت باید جواب خصوصی را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$y_p=x^r(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_0)$$

یعنی یک چندجمله‌ای است که درجه آن با درجه $P_n(x)$ یکسان است که ضرب در ضریب اصلاح x^r شده است (در این رابطه r تعداد تکرار عدد صفر به عنوان ریشه در معادله مشخصه است).

تذکر ۴: اگر در سمت راست معادله صرفاً عدد ثابت داشتیم، به عنوان کاندیدای جواب خصوصی باید $y_p=x^rA$ قرار دهیم (A عددی ثابت است).

مثال ۲۹: فرم کلی جواب خصوصی را برای معادلات زیر تعیین کنید.

الف) $y''-4y=x$ ، ب) $y''+y'=3x^2-1$

پاسخ: در حالت (الف) چون در طرف سمت راست یک چندجمله‌ای از درجه یک داریم، پس $y_p=x^r(Ax+B)$ به عنوان جواب خصوصی در نظر گرفته می‌شود. از طرفی چون ریشه‌های معادله مشخصه $\lambda=\pm 2$ می‌باشد، پس تعداد تکرار ریشه‌ی صفر در معادله مشخصه برابر با صفر است، این یعنی $r=0$ و لذا شکل جواب خصوصی $y_p=Ax+B$ خواهد بود.

در حالت (ب) چون سمت راست یک چند جمله‌ای از درجه (۲) داریم، پس $y_p=x^r(Ax^2+Bx+C)$ به عنوان جواب خصوصی در نظر گرفته می‌شود. حالا سراغ تعیین عدد r می‌رویم.

معادله مشخصه به صورت $\lambda^2+\lambda=0$ و یا $\lambda(\lambda+1)=0$ می‌باشد که ریشه‌های آن $\lambda=0$ و $\lambda=-1$ می‌باشد و این یعنی ریشه‌ی صفر یک‌بار در معادله مشخصه تکرار شده، پس باید $r=1$ باشد. بنابراین $y_p=x^1(Ax^2+Bx+C)$ خواهد بود.

۲) اگر $f(x)$ به صورت حاصلضرب یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n مانند $P_n(x)$ در یک عبارت نمایی باشد، یعنی $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$.

در این‌صورت جواب خصوصی باید به شکل زیر باشد:

$$y_p = x^r e^{\alpha x}\ (\text{یک چندجمله‌ای از درجه } n)$$

که در این رابطه r تعداد تکرارهای ریشه‌های α در معادله مشخصه است.

مثال ۳۰: فرم کلی جواب خصوصی معادلات زیر را تعیین کنید.

الف) $y''-2y'+y=4e^x$ ب) $y''-y=xe^{2x}$ ج) $y''+6y'+9y=(x^2+1)e^{-3x}$

☑ **پاسخ:** در قسمت (الف) چون فقط عدد ثابت و تابع نمایی داریم، پس جواب را به صورت $y_p=x^r(Ae^x)$ در نظر می‌گیریم. حالا باید وضعیت r را تعیین کنیم. معادله مشخصه $(\lambda-1)^2=0$ است، پس $\lambda=1$ ریشه‌ی تکراری مرتبه (۲) معادله مشخصه است و چون سمت راست $e^{1\times x}$ داریم. ($\alpha=1$ است) پس $r=2$ باید انتخاب گردد. این یعنی $y_p=x^2Ae^x$ انتخاب درست است.

در قسمت (ب) چون سمت راست xe^{2x} داریم، بنابراین باید $y_p=x^r(ax+b)e^{2x}$ در نظر گرفته شود. حالا باید سراغ تعیین r برویم. ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $\lambda^2-1=0$ می‌باشد و این یعنی $\lambda=\pm1$ و چون عدد ۲ (عدد ضریب x در توان e^{2x} یا همان α) هیچ تکراری در ریشه‌های معادله مشخصه ندارد، پس باید $r=0$ در نظر گرفته شود. بنابراین $y_p=x^0(ax+b)e^{2x}=e^{2x}(ax+b)$ انتخاب درست است.

در قسمت (ج) چون هم چندجمله‌ای داریم هم تابع نمایی و درجه چندجمله‌ای هم ۲ است، لذا $y_p=x^r(ax^2+bx+c)e^{-3x}$ باید نوشته شود. حالا باید سراغ ریشه‌های معادله مشخصه برویم: $\lambda^2+6\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda+3)^2=0 \Rightarrow \lambda=-3$ (با ۲ مرتبه تکرار)

در این حالت هم ۳− دو مرتبه تکرار شده است ($\alpha=-3$)، پس $r=2$ باید در نظر گرفته شود، یعنی $y_p=x^2(ax^2+bx+c)e^{-3x}$ جواب خصوصی خواهد بود.

۳) اگر $f(x)$ به صورت $f(x)=e^{\alpha x}[M(x)\cos(\beta x)+N(x)\sin(\beta x)]$ باشد.

در این صورت جواب خصوصی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y_p = x^r e^{\alpha x}[R(x)\cos(\beta x)+Q(x)\sin(\beta x)]$$

در این رابطه r تعداد ریشه‌های $\alpha\pm i\beta$ در معادله مشخصه می‌باشد و $R(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه n می‌باشند که n بزرگترین درجه از بین درجات $M(x)$ و $N(x)$ می‌باشد.

مثال ۳۱: فرم کلی جواب خصوصی را در معادلات زیر تعیین کنید.

الف) $y''+y'=e^x\sin x$

ب) $y''+2y'+5y=x^2e^{-x}\cos 2x$

☑ **پاسخ:** در قسمت (الف) با توجه به عبارت سمت راست، چون فقط تابع نمایی و مثلثاتی داریم، جواب خصوصی را به صورت $y_p=x^re^x(A\cos x+B\sin x)$ در نظر می‌گیریم. دقت کنید که به جای $R(x)$ و $Q(x)$ به ترتیب مقادیر A و B را قرار دادیم، چون توابع چندجمله‌ای در ضابطه نداشتیم و عملاً درجه‌ی $R(x)$ و $Q(x)$ باید صفر در نظر گرفته شود که همان مقادیر ثابت A و B را نوشتیم. حالا باید سراغ تعیین ریشه‌های معادله مشخصه برویم که به وضوح $\lambda^2+\lambda=0$ می‌باشد که ریشه‌های آن ۰ و ۱− است که هیچ اشتراکی با $\alpha+i\beta=1+i$ ندارد. پس تعداد تکرار ریشه‌ها در معادله مشخصه صفر است. پس $r=0$ باید درنظر گرفته شود و $y_p=e^x(A\cos x+B\sin x)$ باید در نظر گرفته شود.

حالا سراغ قسمت (ب) می‌رویم؛ تقریباً کامل‌ترین شکل جواب خصوصی که معمولاً در سؤالات مطرح می‌شود، نیز همین فرم است.

$$y_p=x^re^{-x}[(ax^2+bx+c)\cos 2x+(dx^2+ex+f)\sin 2x]$$

با توجه به سمت راست معادله غیرهمگن، توجه کنید که $\alpha=-1$ و $\beta=2$ می‌باشد، حالا ببینیم ریشه‌هایی به صورت $-1\pm 2i$ در معادله مشخصه چند بار تکرار شده‌اند؟ معادله مشخصه را به صورت مقابل می‌نویسیم: $\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2=-1\pm 2i$

که یک‌بار تکرار $-1\pm 2i$ در معادله مشخصه داریم؛ یعنی $r=1$ باید در نظر گرفته شود. بنابراین y_p به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_p=xe^{-x}[(ax^2+bx+c)\cos 2x+(dx^2+ex+f)\sin 2x]$$

نکته۱: البته اگر بخواهیم یک فرمول برای نوشتن فرم جواب خصوصی حفظ کنیم، همان فرمول حالت سوم است. یعنی باید فرمول کلی زیر را برای y_p حفظ کنیم:

$$\boxed{y_p = x^r e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]}$$

اگر بخواهیم براساس همین فرمول سؤالات را بررسی کنیم، ابتدا به سمت راست معادله دقت کنید؛ اگر مثلاً چندجمله‌ای و تابع مثلثاتی در سمت راست معادله نبود و فقط تابع نمایی داشتیم، به جای $R(x)$ و $Q(x)$ باید ضریب ثابت مثلاً A قرار دهیم که در $x^r e^{\alpha x}$ ضرب می‌شود. اگر تابع مثلثاتی نداشتیم و فقط چندجمله‌ای و تابع نمایی داشتیم، کلاً به جای عبارت داخل کروشه یک چندجمله‌ای می‌نویسیم که در $x^r e^{\alpha x}$ ضرب می‌شود و اگر مثلاً تابع نمایی نداشتیم و تابع مثلثاتی و چندجمله‌ای داشتیم، $e^{\alpha x}$ را دیگر نمی‌نویسیم (بقیه عبارات فوق باقی می‌ماند). چند تمرین دیگر برای همیشه مشکل شما را حل می‌کند. این تمرین‌ها را بیشتر براساس فرمول کلی بررسی می‌کنیم.

مثال۳۲: در مثال‌های زیر، با فرض اینکه جواب معادله مشخصه را می‌دانیم و قسمت غیرهمگن (سمت راست معادله تابع $f(x)$) داده شده است، فرم جواب خصوصی را تعیین کنید.

۱) $f(x) = e^{-x}(a\sin x + b\cos x)$ ، $\lambda_1 = -1 - i\ ,\ \lambda_2 = -1 + i$

پاسخ: چون در ضابطه $f(x)$ چندجمله‌ای نداریم، بنابراین فرم جواب خصوصی به صورت $y_p = x^r e^{-x}(A\sin x + B\cos x)$ نوشته می‌شود. از طرفی با توجه به اینکه ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $\lambda = -1 \pm i$ است، بنابراین یک‌بار تکرار داریم. پس $r = 1$ و $y_p = xe^{-x}(A\sin x + B\cos x)$.

۲) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = 2$

با توجه به اینکه فقط تابع چندجمله‌ای داریم، پس $y_p = x^r(Ax^2 + Bx + C)$ در نظر می‌گیریم. حالا باید r را تعیین کنیم که تعداد تکرار عدد صفر در ریشه‌های معادله مشخصه است که چون $\lambda_1 = 0$ یکبار تکرار شد، پس $r = 1$ و بنابراین $y_p = x(Ax^2 + Bx + C)$ باید باشد.

۳) $f(x) = (3x^7 - 5x^4)e^{3x}$ ، $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$

ابتدا توجه کنید که با توجه به ضابطه $f(x)$، $\alpha = 3$ است و از طرفی ریشه معادله مشخصه هم ۳ است که دو مرتبه تکرار شده است، پس $r = 2$ است. از طرفی چندجمله‌ای از درجه ۷ داریم، پس y_p به صورت مقابل خواهد بود: $y_p = x^2(\text{چندجمله‌ای از درجه ۷})e^{3x} = x^2(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_7x^7)e^{3x}$

دقت کنید که وقتی چندجمله‌ای را می‌نویسیم، نباید با این استدلال که ضابطه $f(x)$ فقط شامل x^7 و x^4 است صرفاً $A_7x^7 + A_4x^4$ قرار دهیم و باید جملات چندجمله‌ای درجه (۷) را به‌طور کامل لحاظ کنیم.

نکته۲: هرگاه در سمت راست معادله‌ای ضابطه‌ی $f(x)$ به‌صورت مجموع توابعی بود که هرکدام به تنهایی جزو حالت‌های گفته شده بود، باید هرکدام را جداگانه حساب کرد و جواب‌ها را با هم جمع کرد.

مثال۳۳: در مثال‌های زیر اگر جواب‌های قسمت همگن و عبارت سمت راست معادله یعنی $f(x)$ را بدانیم، فرم کلی جواب خصوصی را تعیین نمایید.

۱) $f(x) = xe^x + \sin x$ ، $\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = 3$

پاسخ: فرض می‌کنیم $f_1(x) = xe^x$ و $f_2(x) = \sin x$. برای $f_1(x)$ باید $y_{p_1} = x^r e^x(ax + b)$ فرض شود. چون $\alpha = 1$ و عدد یک جزو ریشه‌های معادله مشخصه (با مرتبه تکرار ۱) است، پس $y_{p_1} = xe^x(ax + b)$. اما برای $f_2(x) = \sin x$ باید y_{p_2} را به شکل $y_{p_2} = x^r(c\sin x + d\sin x)$ در نظر گرفت (دقت کنید علیرغم اینکه $f_2(x) = \sin x$ است، ولی ما باید عبارتی هم شامل $\sin x$ و هم $\cos x$ را بنویسیم).

حالا باید مقدار r را تعیین کرد؛ چون $\pm i$ جزو ریشه‌های معادله مشخصه نیست، پس $r = 0$ است و لذا $y_{p_2} = c\cos x + d\sin x$ و بنابراین جواب خصوصی نهایی به شکل مقابل است: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = xe^x(ax + b) + c\cos x + d\sin x$

۲) $f(x) = (x + 1)\sin x + e^x\cos 2x$ ، $\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = i\ ,\ \lambda_i = -i$

فرض می‌کنیم $f_1(x) = (x + 1)\sin x$ و $f_2(x) = e^x\cos 2x$. ابتدا y_{p_1} را تعیین می‌کنیم. برای $f_1(x)$ باید $y_{p_1} = x^r[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x]$ درنظر گرفته شود که چون $\pm i$ در سمت راست یک‌بار تکرار شده است، پس $r = 1$ است. اما برای $f_2(x) = e^x\cos 2x$ باید جواب به صورت $y_{p_2} = x^r e^x[A\sin 2x + B\cos 2x]$ در نظر گرفت و چون $1 \pm 2i$ ریشه معادله مشخصه نیست، پس $r = 0$ بنابراین داریم:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x] + e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

جمع‌بندی روش‌های تعیین جواب خصوصی

سه روش اصلی جهت تعیین جواب خصوصی یعنی روش‌های ۱ـ ضرایب نامعین، ۲ـ اپراتور معکوس و ۳ـ تغییر پارامترها را در این درسنامه بررسی کردیم. در این قسمت به‌طور خلاصه مطالبی را که در این درسنامه یاد گرفتیم، جمع‌بندی می‌کنیم. در واقع در این جمع‌بندی ضمن یادآوری می‌خواهیم پاسخ سؤال زیر را بدهیم:

از کدام روش در حل چه سؤالی استفاده کنیم؟

چند راهنمایی زیر می‌تواند پاسخ خوبی به سؤال فوق باشد:

۱ـ اگر در سمت راست، صورت سؤال، توابعی به شکل **چندجمله‌ای، $e^{\alpha x}$، $\sin\beta x$ و $\cos\beta x$** و یا هر عبارتی که از جمع و یا ضرب این توابع حاصل شده است، بود، بهتر است از یکی از دو روش ضرایب نامعین و یا اپراتور معکوس کمک بگیریم. حالا به گزینه‌ها دقت کنید؛ اگر ضرایب جواب خصوصی به صورت مجهول داده شده بود، استفاده از روش ضرایب نامعین توصیه می‌شود و اگر در گزینه‌ها ضرایب جواب خصوصی به‌صورت معلوم (اعداد مشخص) داده شده بود، استفاده از روش اپراتور معکوس توصیه می‌شود.

۲ـ اگر تابع داده‌شده در سمت راست معادله به شکل توابع فوق نبود، مثلاً به فرم توابع زیر بود:

$$\frac{e^{-x}}{x^{2}}\ ،\ e^{x}\mathrm{Ln}x\ ،\ \mathrm{tg}x\ ،\ \frac{1}{\sin x}\ ،\ \sec x$$

حتماً باید از روش تغییر پارامتر لاگرانژ سؤال را حل کنید. چند مثال بعدی که از روش‌های مختلف حل شده‌اند برای کامل شدن این جمع‌بندی ارائه شده است:

مثال ۷۳: کدام تابع جواب خصوصی معادله $y''-2y'+y=3e^{x}$ است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $y=3x^{2}e^{x}$
۲) $y=3xe^{x}$
۳) $y=\frac{3}{2}x^{2}e^{x}$
۴) $y=\frac{3}{2}xe^{x}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه سمت راست فقط $3e^{x}$ داریم، بهتر است از روش اپراتور معکوس کمک بگیریم. در این سؤال $\alpha=1$ است و از طرفی عدد یک ریشه‌ی مرتبه ۲ معادله‌ی $P(D)=(D-1)^{2}$ است. نظر به اینکه $P''(D)=2$ لذا داریم: $y_p=\frac{x^{2}}{P''(1)}3e^{x}=\frac{x^{2}}{2}(3e^{x})=\frac{3}{2}x^{2}e^{x}$

مثال ۷۴: جواب خصوصی معادله‌ی $(D-4)^{3}(D^{2}+1)y=x^{2}e^{4x}$ به کدام فرم است؟

۱) $(A+Bx+Cx^{2})e^{4x}$
۲) $(A+Bx^{2}+Cx^{3})e^{4x}$
۳) $(Ax^{2}+Bx^{3}+Cx^{4})e^{4x}$
۴) $(Ax^{3}+Bx^{4}+Cx^{5})e^{4x}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه گزینه‌ها ضرایب مجهول دارند و در سمت راست هم تابع $x^{2}e^{4x}$ داریم، بهترین انتخاب استفاده از روش ضرایب نامعین است؛ برای x^{2} باید یک چندجمله‌ای درجه دوم قرار دهیم؛ یعنی کاندیدا در جواب خصوصی به صورت $y_p=x^{r}(Cx^{2}+Bx+A)e^{4x}$ است، حالا باید r را تعیین کنیم. باید ببینیم $\alpha=4$ ریشه‌ی مرتبه چندم معادله مشخصه است؟ به راحتی معلوم است ریشه‌ی مرتبه سوم است، پس $r=3$ و لذا جواب گزینه (۴) است.

مثال ۷۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+4y=3\sin(2x)$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)-\frac{3}{4}\cos(2x)$
۲) $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)-\frac{3}{4}\sin(2x)$
۳) $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)-\frac{3}{4}x\cos(2x)$
۴) $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+\frac{3}{4}\cos(2x)-\frac{3}{4}\sin(2x)$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که جواب معادله‌ی همگن در تمام گزینه‌ها یکسان است، پس نیازی به تعیین جواب قسمت همگن نیست، هرچند محاسبه آن هم کار سختی نیست! با توجه به این که $\lambda^{2}+4=0$ بنابراین $\lambda=\pm 2i$ و بنابراین داریم: $y_h=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$

برای محاسبه y_p از هر دو روش ضرایب نامعین و اپراتور معکوس می‌توان کمک گرفت (هرچند چون ضرایب معلوم برای جواب خصوصی در گزینه‌ها داده شده است و روش اپراتور معکوس احتمالاً بهتر باشد). سؤال را از دو روش حل می‌کنیم که خودتان مقایسه کنید. ابتدا از روش ضرایب نامعین کمک می‌گیریم. کاندیدای جواب به صورت مقابل است: $y_p=x^{r}[A\cos(2x)+B\sin(2x)]$

چون $\pm 2i$ ریشه معادله مشخصه می‌باشد، پس $r=1$ و لذا داریم: $y_p=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

حالا برای یافتن ضرایب مجهول A و B، باید مشتق دوم y_p را محاسبه کرده و در معادله دیفرانسیل قرار دهیم:

$$y'_p=A\cos(2x)-2Ax\sin(2x)+B\sin(2x)+2Bx\cos(2x)\ \Rightarrow\ y''_p=-4A\sin(2x)-4Ax\cos(2x)+4B\cos(2x)-4Bx\sin(2x)$$

با قرار دادن y''_p در معادله و مساوی قرار دادن جملات مشابه در دو طرف تساوی، A و B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$-4A\sin(2x)+4B\cos(2x)=3\sin(2x)\ \Rightarrow\ A=-\frac{3}{4}\ ,\ B=0$$

در نتیجه $y_p=\frac{-3}{4}x\cos(2x)$. بنابراین جواب عمومی معادله به صورت مقابل است: $y=y_h+y_p=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)-\frac{3}{4}x\cos(2x)$

روش اپراتور معکوس: در سمت راست $3\sin 2x$ داریم، بنابراین $\beta = 2$ و لذا $-\beta^2 = -4$ چون معادله مشخصه به صورت $D^2 + 4 = 0$ است. اگر به جای D^2 عدد -4 قرار دهیم، $P(D) = D^2 + 4$ صفر می‌شود، پس باید مشتق بگیریم؛ یعنی جواب خصوصی به شکل زیر است:

$$y_p = \frac{x}{P'(D)}(3\sin 2x) = \frac{x}{2D}3\sin(2x) = \frac{3x}{2}\left[\frac{1}{D}\sin(2x)\right] = \frac{3x}{2}\int(\sin 2x)\,dx = \frac{3}{2}x\left(\frac{-1}{2}\cos 2x\right) = \frac{-3}{4}x\cos 2x$$

همانطور که دیدید روش اپراتور معکوس کمی سریع‌تر جواب خصوصی را تعیین کرد.

مثال ۷۶: حل معادله دیفرانسیل درجه دوم $y'' + y = \sec x$ کدام است؟ (مکاترونیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $y = (c_1 + \operatorname{Ln}|\cos x|)\cos x + (c_2 + x)\sin x$

۲) $y = (c_1 + x)\cos x + (c_2 + x)\sin x$

۳) $y = (c_1 + \operatorname{Ln}|\sin x|)\sin x + (c_2 + x)\cos x$

۴) $y = (c_1 + \cos x)\cos x + (c_2 + \sin x)\sin x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که می‌بینید با توجه به سمت راست، مجبوریم از روش تغییر پارامتر کمک بگیریم. ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را تعیین می‌کنیم:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$$

با فرض $y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$ آنگاه رونسکین به شکل مقابل خواهد بود:

$$w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

حالا w_1 و w_2 را حساب می‌کنیم:

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad w_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix} = 1$$

بنابراین داریم:

$$u_1 = \int\frac{w_1}{w}dx = \int\frac{-\sin x}{\cos x}dx = \operatorname{Ln}|\cos x| \ , \ u_2 = \int\frac{w_2}{w}dx = \int(1)\,dx = x \Rightarrow y_P = y_1u_1 + y_2u_2 = \cos x\operatorname{Ln}|\cos x| + x\sin x$$

$$\Rightarrow y = c_1\cos x + c_2\sin x + \cos x\operatorname{Ln}|\cos x| + x\sin x = (c_1 + \operatorname{Ln}|\cos x|)\cos x + (c_2 + x)\sin x$$

مثال ۷۷: یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$ کدام است؟ (مهندسی نقشه‌برداری ـ نساجی ـ سراسری ۹۶)

۱) $e^{-x}(8x^2 + 4x + 1)$

۲) $e^{-x}(4x^2 + 8x + 1)$

۳) $-e^{-x}(4x^2 + 8x + 1)$

۴) $-e^{-x}(8x^2 + 4x + 1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به روش اپراتور معکوس مسئله را حل می‌کنیم:

$$(D^2 - 2D - 3)y_p = 64xe^{-x} \Rightarrow y_p = \frac{64xe^{-x}}{D^2 - 2D - 3}$$

$$\Rightarrow y_p = 64e^{-x}\left[\frac{x}{(D-1)^2 - 2(D-1) - 3}\right] = 64e^{-x}\left[\frac{x}{D^2 - 2D + 1 - 2D + 2 - 3}\right] = 64e^{-x}\left[\frac{x}{D^2 - 4D}\right] = 64e^{-x}\left[\frac{1}{D-4}\left(\frac{x}{D}\right)\right]$$

$$\xrightarrow[\int x\,dx = \frac{x^2}{2}]{\frac{f(x)}{D} = \int f(x)\,dx} y_p = 64e^{-x}\left[\frac{\frac{x^2}{2}}{D-4}\right] = 32e^{-x}\left(\frac{x^2}{D-4}\right)$$

اکنون $\frac{1}{D-4}$ را محاسبه می‌کنیم. چون صورت چندجمله‌ای درجه ۲ وجود دارد لذا تقسیم را تا ضریب D^2 برای خارج‌قسمت انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} 1 & -4 + D \\ \cline{2-2} -\left(1 - \frac{D}{4}\right) & -\frac{1}{4} - \frac{D}{16} - \frac{D^2}{64} \\ \cline{1-1} \frac{D}{4} & \\ -\left(\frac{D}{4} - \frac{D^2}{16}\right) & \\ \cline{1-1} \frac{D^2}{16} & \end{array}$$

$$\Rightarrow y_p = 32e^{-x}\left[\left(\frac{-1}{4} - \frac{D}{16} - \frac{D^2}{64}\right)x^2\right] = 32e^{-x}\left(\frac{-x^2}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\right) = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1)$$

توجه: البته روش ضرایب نامعین هم برای این سؤال قابل استفاده بود و حجم محاسبات تقریباً یکسان است.

مثال ۷۸: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر، کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۷)

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = xe^x$$

۱) $y_p = (A_0x + A_1)x^3e^x$

۲) $y_p = A_0x^4e^x$

۳) $y_p = (A_0x + A_1)x^2e^x$

۴) $y_p = (A_0x + A_1)x^4e^x$

معادلات کوشی اویلر

در این قسمت، سراغ گروه دیگری از معادلات خطی با ضرایب متغیر می‌رویم که می‌توان آن‌ها را به سادگی با تغییر متغیر به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل نمود. شکل کلی یک معادله مرتبه n ام کوشی اویلر به صورت مقابل است: $\mathbf{x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = f(x)}$

برای مثال، یک معادله کوشی اویلر مرتبه دوم به صورت مقابل قابل نمایش است: $\mathbf{x^2 y'' + a_1 xy' + a_0 y = f(x)}$

همان‌طور که می‌بینید معادله کوشی اویلر ترکیبی متشکل از حاصل‌ضرب x با توان‌های طبیعی در مشتقات y است. مثلاً در کوشی اویلر مرتبه دوم جمله اول از ضرب x^2 در مشتق دوم y، جمله بعد شامل ضرب x^1 در مشتق اول y و جمله‌ی آخر شامل x^0 در مشتق صفرم y (یا همان y) است. در واقع برای این که ببینید یک معادله کوشی اویلر هست یا نه باید به حاصل‌ضرب x در مشتقات y دقت کنید؛ اگر مرتبه مشتق با توان x یکسان بود، آن معادله کوشی اویلر است برای مثال معادله‌ی $x^3y'' + xy' + y = 0$ یک معادله کوشی اویلر نیست. چون y'' در x^3 ضرب شده است در صورتی که باید در x^2 ضرب می‌شد. معادله کوشی اویلر با تغییر متغیر $t = Lnx$ و یا به عبارت دیگر $x = e^t$ به یک معادله‌ی خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که حل معادلات با ضرایب ثابت را از قبل یاد گرفته‌ایم. دقت کنید که در معادلات کوشی اویلر پس از تغییر متغیر $x = e^t$ به معادله‌ای با متغیر t و تابع y و مشتقات آن می‌رسیم (که البته مشتقات باید نسبت به t باشد). ما در این بخش حدالامکان شما را درگیر مشتق‌گیری و جایگزینی نخواهیم کرد و با فرمول کلی بدون مشتق‌گیری معادلات کوشی اویلر را حل خواهید کرد. اما برای درک بهتر این جایگزینی‌ها y' و y'' را برحسب متغیر t حساب می‌کنیم. برای مشتق‌گیری برحسب t باید از قاعده زنجیره‌ای مشتق کمک بگیریم. برای مثال y' و y'' را حساب می‌کنیم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow y' = \frac{1}{x}(\frac{dy}{dt}) \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x} xy' = \frac{dy}{dt} \xrightarrow{Dy=\frac{dy}{dt}} \mathbf{xy' = Dy}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx} \xrightarrow{t=Lnx \to \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}(\frac{dy}{dt}) + \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}) \Rightarrow y'' = \frac{1}{x^2}(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}) \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^2} x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$\xrightarrow{\frac{dy}{dt}=Dy} \mathbf{x^2y'' = (D^2 - D)y = D(D-1)y}$$

به تحقیق مشخص می‌شود که ترکیب $x^n y^{(n)}$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\boxed{\mathbf{x^n y^{(n)} = D(D-1)(D-2)\cdots[D-(n-1)]y}}$$

برای مثال در حالت $n = 3$ (یعنی برای جمله x^3y''') باید به شکل زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow (D-(1-1)) = D \\ n=2 \Rightarrow (D-(2-1)) = (D-1) \\ n=3 \Rightarrow (D-(3-1)) = (D-2) \end{cases} \Rightarrow x^3y''' = D(D-1)(D-2)y$$

خُب حالا می‌خواهیم روش حل معادلات کوشی اویلر غیرهمگن را به صورت چهار گام زیر بیان کنیم:

گام اول: به جای $x^n y^{(n)}$ باید $D(D-1)(D-2)\cdots(D-(n-1))y$ قرار دهیم و در سمت راست به جای تابع $f(x)$ باید $f(e^t)$ قرار دهیم.

(واضح است اگر معادله همگن باشد (یعنی $f(x) = 0$ باشد) دیگر جایگزینی $x = e^t$ نیاز نیست.

گام دوم: معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت را که متغیر آن t و تابع آن y است را با روش‌های گفته شده (که از قبل بلدیم)، حل می‌کنیم.

گام سوم: اگر معادله غیرهمگن باشد، در این مرحله جواب خصوصی را با یکی از روش‌های اپراتور معکوس، ضرایب نامعین و یا تغییر پارامتر تعیین می‌کنیم که البته در اغلب سؤالات دو روش اول مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدیهی است اگر معادله همگن باشد، این مرحله لازم نیست.

گام چهارم: در این مرحله به جای متغیر t باید Lnx قرار دهیم.

مثال ۱۰۵: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2y''+2xy'-6y=0$ ، ب) $x^2y''-2xy'+2y=\frac{1}{x^2}$

پاسخ:

حل الف) به جای x^2y'' باید $D(D-1)y$ و به جای xy' باید Dy قرار دهیم. لذا معادله‌ی زیر را داریم:

$$[D(D-1)+2D-6]y=0 \Rightarrow (D^2+D-6)y=0$$

به یک معادله‌ی مرتبه دوم خطی و همگن رسیدیم که باید ریشه‌های معادله مشخصه را حساب کنیم:

$$\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=-3$$

بنابراین جواب‌ها به شکل زیر هستند:

$$y=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}\xrightarrow{t=Lnx} y=c_1e^{2Lnx}+c_2e^{-3Lnx}\xrightarrow{e^{Lnb}=b} y=c_1x^2+\frac{c_2}{x^3}$$

حل ب) با جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$(D(D-1)-2D+2)y=\frac{1}{(e^t)^2} \Rightarrow (D^2-3D+2)y=e^{-2t}$$

ابتدا جواب قسمت همگن را حساب می‌کنیم:

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=2$$

بنابراین جواب عمومی قسمت همگن به شکل مقابل است:

$$y_h=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^t+c_2e^{2t}$$

اما برای تعیین جواب خصوصی می‌توان از روش اپراتور معکوس کمک گرفت، چون ۲− ریشه معادله مشخصه نیست، لذا داریم:

$$y_p=\frac{1}{P(D)}e^{-2t}=\frac{1}{D^2-3D+2}e^{-2t}=\frac{e^{-2t}}{(-2)^2-3(-2)+2}=\frac{e^{-2t}}{12}$$

بنابراین جواب کامل به شکل مقابل است:

$$y=y_h+y_p=c_1e^t+c_2e^{2t}+\frac{e^{-2t}}{12}$$

حالا باید در گام آخر به جای t عبارت Lnx را قرار دهیم:

$$y=c_1e^{Lnx}+c_2e^{2Lnx}+\frac{e^{-2Lnx}}{12}=c_1x+c_2x^2+\frac{1}{12x^2}$$

مثال ۱۰۶: اگر c و k ثابت‌های حقیقی باشند جواب عمومی معادله $r^2u''+ru'=0$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $u=c\frac{1}{r}+k$ ۲) $u=cLnr+k$ ۳) $u=c(Lnr+\frac{1}{r})$ ۴) $u=cr+k$

پاسخ: گزینه «۲» با فرض این که u تابع و r متغیر باشد، با یک معادله کوشی اویلر روبه‌رو هستیم، با فرض $r=e^t$ و جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$(D(D-1)+D)y=0 \Rightarrow D^2y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2=0 \Rightarrow y=c_1+c_2t \Rightarrow y=c_1+c_2Lnr$$

مثال ۱۰۷: جواب مسأله با شرایط کمکی $\begin{cases} x^2y''-3xy'+5y=0 \\ y(1)=0\ ,\ y'(1)=1 \end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $x^2\sin(Lnx)$ ۲) $x^3\sin(Lnx)$ ۳) $x^4\sin(Lnx)$ ۴) $x^2\sin(2Lnx)$

پاسخ: گزینه «۱» با جایگزینی‌های $x^2y''=D(D-1)y$ و $xy'=Dy$ داریم:

$$D(D-1)y-3Dy+5y=0 \Rightarrow (D^2-4D+5)y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه به صورت مقابل است:

$$\lambda^2-4\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2} \Rightarrow \lambda=2\pm i \Rightarrow (\alpha=2\ ,\ \beta=1)$$

بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل از ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$y_h(t)=e^{2t}(c_1\cos t+c_2\sin t)\xrightarrow{t=Lnx} y_h(x)=e^{2Lnx}(c_1\cos(Lnx)+c_2\sin(Lnx)) \Rightarrow$$

$$y_h(x)=c_1x^2\cos(Lnx)+c_2x^2\sin(Lnx)$$

با توجه به گزینه‌ها، بدون محاسبه c_1 و c_2، هم می‌توان گفت فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد. البته ضرایب c_1 و c_2 را می‌توان با توجه به شرایط مرزی داده شده محاسبه کرد.

مثال ۱۰۸: جواب مسأله با مقادیر اولیه $x^2y''+xy'+9y=0\ ;\ x>0\ ,\ y(1)=2\ ,\ y'(1)=0$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $y=2\cos(3Lnx)$
۲) $y=2\sin(3Lnx)$
۳) $y=2\cos(3Lnx)+\sin(3Lnx)$
۴) $y=2\cos(3Lnx)+2\sin(3Lnx)$

پاسخ: گزینه «۱» با جایگزینی‌های گفته شده داریم:

$$x^2y''+xy'+9y=0 \Rightarrow D(D-1)y+Dy+9y=0 \Rightarrow (D^2+9)y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه به صورت مقابل است:

$$\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda=\pm 3i \Rightarrow (\alpha=0\ ,\ \beta=3)$$

بنابراین جواب به شکل مقابل است:

$$y(t)=e^{(0)t}(c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t)) \xrightarrow{t=Lnx} y(x)=c_1\cos(3Lnx)+c_2\sin(3Lnx)$$

برای محاسبه ضرایب c_1 و c_2 با توجه به شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} y(x)=c_1\cos(3Lnx)+c_2\sin(3Lnx) \xrightarrow{y(1)=2} 2=c_1\cos(0) \Rightarrow c_1=2 \\ y'(x)=-c_1\dfrac{3}{x}\sin(3Lnx)+c_2\dfrac{3}{x}\cos(3Lnx) \xrightarrow{y'(1)=0} 0=c_2\times\dfrac{3}{1}\cos(0) \Rightarrow c_2=0 \end{cases} \Rightarrow y=2\cos(3Lnx)$$

مثال ۱۰۹: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'-y=Ln\,x$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $y=c_1x+c_2x^{-1}+Lnx$
۲) $y=(c_1+c_2Lnx)x-Lnx$
۳) $y=c_1x+c_2x^{-1}-Lnx$
۴) $y=(c_1+c_2Lnx)x+Lnx$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که با یک معادله کوشی اویلر روبه‌رو هستیم با فرض $x=e^t$ و جایگزینی‌های $x^2y''=D(D-1)y$ ، $xy'=Dy$ داریم:

$$D(D-1)y+Dy-y=Lne^t \Rightarrow (D^2-1)y=t \Rightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1 \Rightarrow y_h=c_1e^t+c_2e^{-t}$$

حالا باید جواب خصوصی را تعیین کنیم با فرض $y_p=At+B$ داریم:

$$y''-y=t \Rightarrow 0-At-B=t \Rightarrow A=-1, B=0$$

بنابراین جواب خصوصی به شکل $y_p=-t$ است. پس جواب عمومی معادله‌ی غیرهمگن برحسب متغیر t به صورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_1e^t+c_2e^{-t}-t$$

حالا جایگزینی $t=Lnx$ را انجام می‌دهیم:

$$y=c_1x+c_2x^{-1}-Lnx$$

مثال ۱۱۰: معادله دیفرانسیل $t^2y''+aty'+by=0$ داده شده که در آن a و b ثابت‌های حقیقی هستند. به ازای کدام ثابت‌های a و b معادله دیفرانسیل دارای جواب‌های نوسانی است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $b>(a-1)^2$
۲) $4b>(a-1)^2$
۳) $4b<(a-1)^2$
۴) چنان ثابت a و bای وجود ندارند

پاسخ: گزینه «۲» با جایگزینی $t^2y''=D(D-1)y$ و $ty'=Dy$ داریم:

$$D(D-1)y+aDy+by=0 \Rightarrow [D^2+(a-1)D+b]y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2+(a-1)\lambda+b=0 \xrightarrow{\Delta<0} (a-1)^2-4b<0 \Rightarrow (a-1)^2<4b$$

مثال ۱۱۱: فرض کنید y_p جواب خصوصی معادله‌ی $x^2y''+xy'+b^2y=\cos(aLnx)$ باشد. اگر بخواهیم جواب خصوصی معادله متناوب نباشد، چه رابطه‌ای باید بین ثابت های a و b برقرار باشد؟ (مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۰)

۱) $b=a^2$
۲) $a=b^2$
۳) $|a|\neq|b|$
۴) $|a|=|b|$

پاسخ: گزینه «۴» با جایگزینی‌های $x=e^t$ و $xy'=Dy$ و $x^2y''=D(D-1)y$ داریم:

$$[(D(D-1)+D+b^2)]y=\cos(aLne^t) \Rightarrow (D^2+b^2)y=\cos(at) \Rightarrow y_p=\frac{\cos(at)}{D^2+b^2}$$

خب اگر $|a|=|b|$ آنگاه $y_p=\dfrac{t\cos(at)}{2D}$ که به دلیل وجود ضریب t تابع متناوب نیست، ولی اگر $|a|\neq|b|$ آنگاه $y_p=\dfrac{\cos(at)}{-a^2+b^2}$ که تابع متناوب است.

نکته ۶: گاهی اوقات طراحان سؤال، y_1 یا همان جواب اول معادله را به ما نمی‌دهند و انتظار دارند خودمان جواب اول را پیدا کنیم! پیدا کردن یک جواب معادله مرتبه دوم با ضرایب متغیر با توجه به این که قواعد مشخصی نداریم کار راحتی نیست. اما چند تکنیک وجود دارد که می‌تواند یکی از جواب‌ها را برای ما معلوم کند. معادله‌ی $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ را در نظر بگیرید که جوابی از آن را به ما نداده‌اند.
در موارد خاص زیر می‌توان y_1 را تعیین کرد:

۱) اگر مجموع ضرایب صفر باشد، یعنی $a_2+a_1+a_0=0$ آن‌گاه $y_1=e^x$.

۲) اگر مجموع ضرایب مشتق مرتبه زوج، برابر با مجموع ضرایب مشتق مرتبه فرد باشد، یعنی $a_2+a_0=a_1$ آن‌گاه $y_1=e^{-x}$.

۳) اگر عددی مانند m موجود باشد که در تساوی $m^2a_2+ma_1+a_0=0$ صدق کند، آن‌گاه $y=e^{mx}$. (این حالت، حالت کلی‌تر موارد ۱ و ۲ است)

۴) اگر $a_1+xa_0=0$ آن‌گاه $y_1=x$.

مثال ۱۳۴: جواب کلی معادله‌ی دیفرانسیل $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۲)

۱) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}\text{Ln}x$ ۲) $y=c_1e^{-x}+c_2e^x\text{Ln}x$ ۳) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-x}\text{Ln}x$ ۴) $y=c_1e^x+c_2e^x\text{Ln}x$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا طرفین معادله مفروض را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم:

$$xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0 \Rightarrow y''+(\frac{1}{x}-2)y'+(1-\frac{1}{x})y=0$$

از آنجایی که مجموع ضرایب صفر است، بنابراین $y_1=e^x$ یک جواب معادله مفروض است. در نتیجه گزینه‌های (۱) و (۴) می‌توانند صحیح باشند. برای تعیین جواب مستقل دوم با توجه به روش کاهش مرتبه داریم:

$$u=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int(\frac{1}{x}-2)dx}dx=\int e^{-2x}e^{-\text{Ln}x+2x}dx \Rightarrow u=\int\frac{dx}{x}=\text{Ln}x$$

در نتیجه $y_2=y_1u=e^x\text{Ln}x$ و بنابراین جواب عمومی عبارت است از: $y_h=c_1e^x+c_2e^x\text{Ln}x$

مثال ۱۳۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x-1)y''-xy'+y=0$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰ و هوافضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $c_1xe^{-x}+c_2e^x$ ۲) $c_1e^x+c_2x$ ۳) $c_1e^{-x}+c_2x$ ۴) $c_1e^{-x}+c_2xe^x$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا طرفین را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم که به معادله‌ی مقابل خواهیم رسید: $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0$

همان‌طور که می‌بینید $a_1=-\frac{x}{x+1}$ و $a_0=\frac{1}{x-1}$ و همان‌طور که می‌بینید $a_1+xa_0=0$ است، پس $y_1=x$ یک جواب معادله است، حالا به راحتی جواب دیگر را تعیین می‌کنیم:

$$u(x)=\int\frac{1}{x^2}.e^{+\int\frac{x}{x-1}dx}.dx \Rightarrow u=\int\frac{1}{x^2}e^x.e^{\text{Ln}(x-1)}dx=\int\frac{1}{x^2}\cdot e^x(x-1)dx=\int\frac{e^x}{x}dx-\int\frac{e^x}{x^2}dx=I_1-I_2$$

به روش جزءبه‌جزء انتگرال دوم را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} e^x=u \Rightarrow e^xdx=du \\ \frac{1}{x^2}dx=dv \Rightarrow -\frac{1}{x}=v \end{cases} \Rightarrow \int udv=uv-\int vdu \Rightarrow \int\frac{e^x}{x^2}dx=-\frac{e^x}{x}-\int-\frac{e^x}{x}dx$$

بنابراین داریم:

$$u=I_1-I_2=\int\frac{e^x}{x}dx+\frac{e^x}{x}-\int\frac{e^x}{x}dx=\frac{e^x}{x}$$

پس $y_2=uy_1=\frac{e^x}{x}\times x=e^x$ و لذا جواب عمومی به شکل مقابل است: $y=c_2y_1+c_1y_2=c_2x+c_1e^x$

روش ساده‌تر: این سؤال یک سؤال خاص است که دو تا از شروط گفته شده در آن صدق می‌کند! در واقع غیر از شرطی که $y_1=x$ را تعیین کردیم، شرط صفر شدن مجموع ضرایب هم وجود دارد و بنابراین یک جواب آن $y_2=e^x$ است و به همین راحتی هر دو جواب بدون انجام محاسبات تعیین شد!!

مثال ۱۳۶: جواب معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۳)

۱) $y=c_1(\frac{x}{2}\text{Ln}(\frac{1+x}{1-x})-1)+c_2x^2$ ۲) $y=c_1(\frac{x}{2}\text{Ln}(\frac{1+x}{1-x})-1)+c_2x^3$

۳) $y=c_1(\frac{x}{2}\text{Ln}(\frac{1+x}{1-x})-1)+c_2\text{Ln}x$ ۴) $y=c_1(\frac{x}{2}\text{Ln}(\frac{1+x}{1-x})-1)+c_2x$

پاسخ: گزینه «۴» به وضوح رابطه‌ی $a_1+xa_0=(-2x)+x\times2=0$ برقرار است، بنابراین یک جواب به صورت $y_1=x$ است. دیگر نیازی به ادامه حل نیست چون فقط در گزینه (۴) جواب $y=x$ را مشاهده می‌کنیم.

فصل سوم

«حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توانی»

مقدمه

همانگونه که در فصل قبل دیدید، می‌توان یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت را با استفاده از روش‌های جبری حل نمود و جواب را به فرم توابع مقدماتی نمایش داد. اما چنانچه ضرایب غیرثابت و برحسب متغیر x باشند، در این صورت ممکن است حل معادله به آسانی روشی که در فصل دوم یاد گرفتیم نباشد و حتی ممکن است جواب به صورت توابع غیرمقدماتی باشد. مانند معادله دیفرانسیل بسل، لژاندر و غیره. مثلاً جواب عمومی معادله $y''+2y'+y=0$ برابر $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ است. حال اینکه اگر همین معادله را با ضریب غیرثابت در نظر بگیریم؛ یعنی $x^2y''+2xy'+y=0$، جواب عمومی معادله به مراتب پیچیده‌تر از جواب معادله قبل و به صورت $y=c_1x^{-\frac{1}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Ln}x)+c_2x^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Ln}x)$ است. همچنین ممکن است در حل معادله دیفرانسیل به انتگرال توابعی برخورد کنیم که به روش‌های معمول قابل حل نباشند مانند e^{x^2}، $\sin x^2$، $\frac{\cos x}{x}$ و غیره. از طرفی اهمیت کاربرد این معادلات در ریاضیات و علوم مهندسی باعث می‌شود تا به طریقی روشی برای یافتن جواب این‌گونه معادله‌ها پیدا کنیم. برای این منظور، از سری‌های توانی جهت تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل استفاده می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانید می‌توان تابع تحلیلی $f(x)$ را در همسایگی نقطه‌ای مانند x_0 به کمک بسط مک‌لوران به صورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ معادل‌سازی کرد. بنابراین اگر شرایط به گونه‌ای فراهم شود که بتوان جواب عمومی معادله (که احتمالاً پیچیده است) را به صورت سری توانی نمایش دهیم، در این صورت برای دستیابی به جواب معادله تنها نیاز داریم ضرایب مجهول سری را محاسبه کنیم که آن هم با جایگذاری در معادله دیفرانسیل تعیین می‌شود. مثلاً برای معادله دیفرانسیل $y''-xy'=0$ جواب عمومی را به‌صورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ در نظر می‌گیریم. با جایگذاری سری مذکور در معادله دیفرانسیل، ضرایب سری را طبق رابطه بازگشتی $c_{n+2}=\frac{n}{(n+1)(n+2)}c_n$ خواهیم داشت. با کمی دقت در این رابطه متوجه می‌شویم که محاسبه هریک از ضرایب نیازمند معلوم بودن مقادیر دو ضریب قبل از آن است. بنابراین با داشتن c_0 و c_1 که همان شرایط اولیه معادله هستند، قادر به تعیین تمام ضرایب هستیم. در هر صورت جواب‌هایی که به‌صورت سری پیرامون نقطه‌ای خاص نوشته می‌شوند، در یک فاصله مشخص (شعاع همگرایی) از آن نقطه معتبر خواهند بود. لذا در حل معادله دیفرانسیل به روش سری توانی، محدوده همگرایی نیز باید تعیین شود.

نکته‌ای که در پایان یادآوری می‌کنیم این است که تعیین جواب عمومی معادله حول نقطه x_0 را می‌توان با تغییر متغیر $t=x-x_0$ به تعیین جواب عمومی حول نقطه $t_0=0$ در معادله دیفرانسیل جدید تبدیل کرد. بنابراین در ادامه همواره مسأله را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که جواب حول نقطه صفر مدنظر باشد.

مرور خواص سری‌های توانی

با توجه به این که در این فصل به طور مکرر در محاسبات با سری‌های توانی کار می‌کنیم، خلاصه‌ای از روابط مورد نیاز آن‌ها را یادآوری می‌کنیم.

۱- **همگرایی سری:** می‌گوییم سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ در نقطه x همگرا است اگر $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}c_n(x-x_0)^n$ به ازای آن x موجود باشد. واضح است که به ازای $x=x_0$ سری قطعاً همگراست؛ اما ممکن است سری به ازای تمامی مقادیر x همگرا نباشد و تنها به ازای مقادیری محدود از x همگرا باشد.

۲- **شعاع همگرایی:** برای تعیین فاصله همگرایی سری معمولاً از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. اگر به ازای مقدار ثابتی از x بدانیم که:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right|=|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=|x-x_0|\rho$$

آنگاه سری به ازای $|x-x_0|\rho<1$ همگراست و شعاع همگرایی آن برابر $R=\frac{1}{\rho}$ است.

مثال ۱: در سری‌های مقابل شعاع همگرایی را تعیین کنید. الف) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}$

پاسخ: در سری نخست با تشکیل $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ و محاسبه حد آن در $n\to\infty$ داریم: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n}}\right| = |x^2|$

شرط همگرا شدن سری به ازای $|x^2|<1$ که همان $-1<|x|<1$ اتفاق می‌افتد. با تکرار همین فرآیند در سری دوم نیز نسبت $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ تشکیل می‌دهیم $\left|\frac{c_{n+1}(x+1)^{n+1}}{c_n(x+1)^n}\right| = \left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{(x+1)^n}{n2^n}}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\frac{x+1}{2}\right|$ و با محاسبه حد در $n\to\infty$، سری به ازای $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1$ همگرا می‌شود که این نامعادله متناظر با محدوده $|x+1|<2 \Rightarrow x\in(-3,1)$ است. پس در سری نخست شعاع همگرایی $R=1$ و در سری دوم $R=2$ است.

۳- جمع و تفریق سری‌ها: دو سری را در فاصله همگرایی مشترکشان می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد. سری جدید نیز در آن فاصله همگراست.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(c_n \pm d_n)(x-x_0)^n$$

نکته‌ای که در جمع و تفریق سری‌ها باید به آن توجه کنید این است که توان x و حد پایین سری‌ها باید یکسان باشند. در غیر این صورت، برای یکسان‌سازی حد پایین سری تعدادی از جملات را استخراج کرده و برای یکسان سازی توان x از قاعده لغزاندن سری استفاده می‌کنیم.

۴ـ استخراج تعداد محدود جمله از جملات سری: در صورتی‌که تعداد m جمله از سری را استخراج کنیم، حد پایین سری از جمله $m+1$ شروع می‌شود: در این‌جا چون سری از جمله با اندیس صفر شروع شده است؛ بنابراین با استخراج m جمله، حد پایین سری از جمله $m+1$ ولی اندیس m شروع می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{m-1}x^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty}c_n x^n$$

۵- قاعده لغزاندن سری: برای ثابت ماندن مقدار سری توانی، می‌توان به n هر عددی را اضافه نمود به شرط اینکه از حد پایین سری همان عدد کم شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=-\alpha}^{\infty}c_{n+\alpha}(x-x_0)^{n+\alpha}$$

مثال ۲: عبارت مقابل را به صورت یک سری واحد بنویسید. $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}$

پاسخ: ابتدا سعی می‌کنیم توان x را در دو سری یکسان کنیم. لذا در سری نخست $n+1 \to n-2$ تبدیل کرده و توان x را به صورت x^{n+1} می‌نویسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=-3}^{\infty}(n+3)(n+3-1)c_{n+3}x^{(n+3)-2} = \sum_{n=-3}^{\infty}(n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1}$$

اما هنوز نمی‌توان دو سری را با یکدیگر جمع نمود چون حد پایین آن‌ها برابر نیست. با دقت به سری فوق ملاحظه می‌کنید که حاصل آن به ازای $n=-3$ و $n=-2$ صفر است. پس سری تا به اینجای کار برابر $\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1}$ است که با استخراج جمله اول آن به فرم $2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1}$ خواهد بود. حالا به راحتی دو سری را جمع می‌نماییم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1} = 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1} \Rightarrow 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+2)c_{n+3} - c_n]x^{n+1}$$

۶- مشتق‌گیری از سری: در صورتی‌که تابع $f(x)$ را برحسب سری توانی به‌صورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ نمایش دهیم، با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری می‌توان عبارت‌های f'، f'' و ... را تعیین کرد. شعاع همگرایی سری‌های حاصل همان شعاع همگرایی سری $f(x)$ است.

مثال ۳: اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $xy''+y'-y$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}[n(n+1)c_{n+1} - c_n]x^n$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}[(n-1)^2c_{n-1} - c_n]x^n$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^2c_{n+1} - c_n]x^n$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n$

پاسخ: گزینه «۳» با مشتق‌گیری مرتبه اول و دوم از سری، $y'=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n x^{n-1}$ و $y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}$ را به‌دست آورده و سپس آن‌ها را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$x\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+n]c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n^2c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \quad (*)$$

حالا باید توان x در سری اول به n تغییر یابد. بنابراین با به‌کارگیری قاعده لغزاندن سری داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n x^{n-1} \xrightarrow{n-1\to n} \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)^2 c_{n+1}x^{(n+1)-1} = \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)^2 c_{n+1}x^n$$

در سری فوق به ازای $n=-1$ حاصل صفر است؛ یعنی $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 c_{n+1}x^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)^2 c_{n+1}x^n$ است. در ادامه با جایگذاری در رابطه $(*)$ حاصل $xy''+y'-y$ را تعیین می‌کنیم:

$$xy''+y'-y=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 c_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^2 c_{n+1}-c_n]x^n$$

مثال ۴: اگر $a_n(r)=\dfrac{a_{n-1}(r)}{r+n}$ مقدار $a'_n(0)$ چیست؟ $(a_0(r)=a_0)$ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}a_0\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}$
۲) $\dfrac{-a_0}{n!}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$
۳) $\dfrac{-a_0}{n!}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$
۴) $\dfrac{(-1)^n}{n!}a_0\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}$

پاسخ: گزینه «۳» با مقداردهی به n داریم:

$$\begin{cases} & a_0(r)=a_0 \\ n=1 & \Rightarrow a_1(r)=\dfrac{a_0(r)}{r+1}=\dfrac{a_0}{r+1} \\ n=2 & \Rightarrow a_2(r)=\dfrac{a_1(r)}{r+2}=\dfrac{a_0}{(r+2)(r+1)} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ n=n & \Rightarrow a_n(r)=\dfrac{a_0}{(r+n)\cdots(r+2)(r+1)} \xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می‌گیریم}} \operatorname{Ln}a_n(r)=\operatorname{Ln}a_0-\operatorname{Ln}(r+n)\cdots-\operatorname{Ln}(r+2)-\operatorname{Ln}(r+1)\end{cases}$$

حالا از طرفین رابطه فوق نسبت به r مشتق می‌گیریم:

$$\frac{a'_n(r)}{a_n(r)}=-\frac{1}{r+n}\cdots-\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+1}\xrightarrow{r=0}\frac{a'_n(0)}{a_n(0)}=-(\frac{1}{n}+\cdots\frac{1}{2}+1)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

اما از رابطه $a_n(r)$ با جانشینی $r=0$ نیز داریم $a_n(0)=\dfrac{a_0}{n!}$. در نتیجه داریم:

$$\frac{a'_n(0)}{\frac{a_0}{n!}}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Rightarrow a'_n(0)=\frac{-a_0}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

۷ـ توابع تحلیلی: تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 تحلیلی می‌گوییم اگر بتوان یک همسایگی مانند $|x-x_0|<R$ برای x_0 یافت که در این همسایگی $f(x)$ دارای بسط تیلور باشد، به عنوان مثال توابع چند جمله‌ای، $\sin x$، $\cos x$ و e^x در کل اعداد حقیقی تحلیلی هستند. همچنین توابع جدید که از جمع، تفریق و ضرب توابع تحلیلی به دست می‌آیند، تحلیلی هستند. در مورد تقسیم دو تابع تحلیلی نیز تابع جدید در تمامی نقاط جز صفرهای مخرج تحلیلی است. مثلاً توابع $x^2-\sin 2x$ و $\sin x^2$ و e^{x^2} در تمامی نقاط تحلیلی هستند، اما $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ در تمامی نقاط جز صفرهای مخرج یعنی $x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$ تحلیلی است.

نکته۱: فرض کنید تابع $f(x)$ خارج قسمت دو تابع چند جمله‌ای به صورت $f(x)=\dfrac{G(x)}{H(x)}$ باشد، طوری‌که H و G فاکتور مشترکی نداشته باشند.

حالا اگر $f(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشد، شعاع همگرایی بسط تیلور تابع $f(x)$ در نقطه x_0 را می‌توان از روش دیگری غیر از آزمون نسبت به دست آورد. در این روش شعاع همگرایی برابر نزدیکترین فاصله x_0 تا نقاط صفر مخرج (نقاط غیرتحلیلی $f(x)$) است.

مثال ۵: شعاع همگرایی بسط تیلور تابع $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ در نقطه $x_0=0$ برابر .... است.

۱) $\dfrac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\dfrac{3}{2}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» تابع f حاصل تقسیم دو چند جمله‌ای است که ابتدا باید مطمئن شد صورت و مخرج عامل مشترکی ندارند. برای این منظور صورت و مخرج کسر را تجزیه کرده و در صورت یافتن فاکتور مشترک، آن را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

دقت کنید که در نگاه اول ممکن بود ریشه‌های مخرج $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ را به اشتباه نقاط غیرتحلیلی $f(x)$ بدانیم (یعنی $x=\pm1$)؛ اما پس از حذف عامل مشترک از صورت و مخرج متوجه می‌شویم که فقط $x=-1$ نقطه صفر مخرج $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ است. در نتیجه $x=-1$ تنها نقطه غیرتحلیلی $f(x)$ است و چون فاصله آن تا $x_0=0$ برابر واحد است، پس شعاع همگرایی بسط مک‌لورن (چون حول نقطه $x_0=0$ خواسته شده است) تابع $f(x)$ برابر $R=1$ است.

درسنامه: انواع نقاط مورد بحث در حل معادله به کمک سری

مطابق آنچه که توضیح داده شد، سری‌های توانی حول یک نقطه مانند x_0 نوشته می‌شوند و چون بنا داریم از سری در حل معادله دیفرانسیل استفاده کنیم، پس جواب عمومی معادله نیز حول همان نقطه معتبر خواهد بود. مطلبی که باید به آن دقت شود این است که نقطه x_0 باید برای معادله دیفرانسیل یک نقطه تعریف شده باشد. لذا بسته به اینکه نقطه مورد نظر یک نقطه **عادی** و یا **غیرعادی (تکین)** معادله دیفرانسیل باشد، فرم سری و در نهایت فرم جواب عمومی متفاوت خواهد بود. همان‌طور که احتمالاً متوجه شده‌اید قدم اول، نحوه تشخیص نوع نقطه x_0 خواهد بود. برای این منظور فرض کنید معادله دیفرانسیل $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ در اختیار باشد. اگر $a_2(x)$، $a_1(x)$ و $a_0(x)$ اعداد ثابت باشند که معادله دیفرانسیل از نوع معادله با ضرایب ثابت است و جواب با توجه به مباحث فصل دوم به راحتی قابل تعیین است. اما اگر ضرایب چند جمله‌ای باشند ابتدا معادله را بر ضریب y'' یعنی $a_2(x)$ تقسیم می‌کنیم تا به فرم استاندارد $y''+\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y'+\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y=0$ تغییر کند. حالا با فرض $p(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $q(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$، معادله دیفرانسیل را به صورت $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ بازنویسی می‌کنیم. سپس دستورالعمل دوگانه زیر را برای تشخیص نوع نقطه x_0 به‌کار می‌گیریم:

الف) تعیین نقطه عادی و غیرعادی (تکین): اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشند، x_0 را نقطه عادی معادله و در غیر این صورت نقطه غیرعادی (تکین یا منفرد) معادله می‌نامیم.

مثال ۶: در معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+4y=0$ نقطه $x_0=0$، از نوع عادی است یا غیرعادی.

پاسخ: در این معادله $a_2(x)=1-x^2$ است که مطابق با دستورالعمل گفته شده کل معادله را بر آن تقسیم می‌کنیم. درنتیجه داریم:

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{4}{1-x^2}y=0 \Rightarrow \begin{cases} p(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2} \\ q(x)=\dfrac{4}{1-x^2} \end{cases}$$

دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ در ریشه مخرجشان غیر تحلیلی هستند، پس $x_0=\pm 1$ نقاط غیرعادی معادله هستند. و سایر نقاط از جمله $x_0=0$ عادی محسوب می‌شوند.

مثال ۷: نقطه $x_0=0$ برای کدام یک از گزینه‌های زیر نقطه عادی است؟

۱) $(\sin x)y''+xy'+4y=0$

۲) $xy''+e^x y'+3(\cos x)y=0$

۳) $y''+\mathrm{Ln}(x)y'-\sqrt{x}y=0$

۴) $xy''-2\mathrm{tg}(x)y'+e^{-x}\sin(x)y=0$

پاسخ: گزینه «۴» توابع $p(x)$ و $q(x)$ را برای هر کدام از گزینه‌ها تشکیل داده و تحلیلی بودن آن‌ها را در $x_0=0$ بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه اول: $p(x)=\frac{x}{\sin x}\xrightarrow[x\to 0]{\lim(\sin x)\approx x}p(x)=\frac{x}{x}=1$ و $q(x)=\frac{4}{\sin x}$، تابع $q(x)$ در نقطه $x_0=0$ غیر تحلیلی است.

بررسی گزینه دوم: $p(x)=\frac{e^x}{x}$ و $q(x)=3\frac{\cos x}{x}$، هر دو تابع در نقطه $x_0=0$ غیر تحلیلی هستند.

بررسی گزینه سوم: $p(x)=\mathrm{Ln}x$ و $q(x)=-\sqrt{x}$، هر دو تابع در نقطه $x_0=0$ غیر تحلیلی هستند.

بررسی گزینه چهارم: $p(x)=\frac{-2\mathrm{tg}x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{\lim(\mathrm{tg}x)\approx x}p(x)=\frac{-2x}{x}=-2$ و $q(x)=e^{-x}\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{\lim(\sin x)\approx x}q(x)=e^{-x}\frac{x}{x}=e^{-x}$، هر دو تابع در نقطه $x_0=0$ تحلیلی هستند.

مثال ۸: در معادله دیفرانسیل $x^2(1-x^2)y''+(1+x)\sin(1-x)y'+3x(1-x)y=0$ تعداد نقاط عادی و غیرعادی برابر است با:

۱) سه نقطه عادی

۲) دو نقطه عادی و ۱ نقطه غیر عادی

۳) یک نقطه عادی و دو نقطه غیرعادی

۴) دو نقطه غیرعادی و بی‌شمار نقطه عادی

پاسخ: گزینه «۴» با تقسیم معادله بر ضریب y'' توابع $p(x)=\frac{(1+x)\sin(1-x)}{x^2(1-x^2)}=\frac{\sin(1-x)}{x^2(1-x)}$ و $q(x)=\frac{3x(1-x)}{x^2(1-x^2)}=\frac{3}{x(1+x)}$ را به‌دست می‌آوریم. $p(x)$ تنها در نقطه $x_0=0$ غیرتحلیلی است (چون $x_0=1$ نقطه عادی $p(x)$ محسوب می‌شود) و $q(x)$ در نقاط $x_0=0$ و $x_0=-1$. در نتیجه مجموعاً معادله دو نقطه غیرعادی دارد که عبارتند از $x_0=0$ و $x_0=-1$ سایر نقاط برای معادله دیفرانسیل مفروض عادی هستند.

فصل چهارم

« تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن »

درسنامه: تبدیل لاپلاس

دانش استفاده از تبدیلات انتگرالی، مانند تبدیل لاپلاس، همواره یکی از نقاط قوت دانشمندان و مهندسان در تحلیل مسائل ریاضی بوده است. در بسیاری از مسائل عملی مهندسی با سیستم‌های مکانیکی و یا الکتریکی مواجهیم که شامل جمله‌های غیر همگن ناپیوسته و یا ضربه‌ای هستند. مثلاً معادله دیفرانسیل توصیف کننده مداری الکتریکی که به آن ولتاژ $E(t)$ وارد شده و شامل القاگر L، مقاومت R و خازن C (مدار RLC) می‌باشد، عبارت است از:

$$L\frac{d^{2}I}{dt^{2}}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE(t)}{dt}$$

فرض کنید حالتی را مد نظر قرار می‌دهیم که در آن $\frac{dE(t)}{dt}=\begin{cases}\sin(\frac{\pi t}{4})e^{-t} & , \quad 0<t<2\\ \frac{t}{2}e^{-t} & , \quad 2<t\end{cases}$ باشد. قاعدتاً برای یافتن پاسخ مدار، باید معادله دیفرانسیل را یک بار با فرض $E'(t)=\sin(\frac{\pi t}{4})e^{-t}$ و بار دیگر با فرض $E'(t)=\frac{t}{2}e^{-t}$ حل کنیم و سپس برای برقراری پیوستگی جریان القاگر و ولتاژ خازن، جواب دو محدوده را در نقطه $t=2$، مطابقت دهیم. طبیعی است که اگر $E'(t)$ از ضابطه‌های بیشتر و پیچیده‌تر تشکیل شده باشد، به‌دست آوردن جواب هر محدوده و سپس تطابق آنها در نقاط مرزی بسیار دشوار می‌شود. حتی ممکن است $E'(t)$ شامل توابع متناوب پیچیده و یا وضعیت ضربه‌ای باشد. در چنین مواردی، یافتن پاسخ سیستم از طریق روش‌های گفته شده در فصل دوم معمولاً با اشکالاتی همراه است. تبدیل لاپلاس روش مناسب دیگری است که به خصوص برای حل این مسائل استفاده می‌شود. در واقع در این روش به جای طی مراحل سه‌گانه (حل معادله همگن نظیر، یافتن جواب خصوصی و اعمال شرایط اولیه برای مشخص شدن ثابت‌ها)، تبدیل لاپلاس جواب مسأله اصلی را در فضای دیگری به‌دست می‌آوریم و در نهایت با محاسبه معکوس آن به جواب مورد نظر می‌رسیم.

در این فصل ابتدا به تعریف تبدیل لاپلاس و محاسبه لاپلاس توابع مختلف می‌پردازیم و پس از بیان قضایای حاکم بر این روش، نحوه استفاده از آن‌ها را در حل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرالی و دستگاه معادلات توضیح می‌دهیم.

تعریف: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که در $t>0$ معتبر است، با نماد $L[f(t)]$ یا $F(s)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$F(s)=L[f(t)]=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt \qquad ; \quad s>0$$

بنابراین تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و همچنین تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس تابع $F(s)$ می‌گوییم و داریم:

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(t)=1$ ب) $f(t)=t$ ج) $f(t)=e^{at}$ د) $f(t)=\sin t$

پاسخ: با جایگذاری توابع داده شده در تعریف تبدیل لاپلاس و محاسبه انتگرال داریم:

$$\begin{cases} f(t)=1 \rightarrow & L[1]=\int_0^\infty e^{-st}dt=(-\frac{1}{s}e^{-st})\Big|_0^\infty=-\frac{1}{s}(e^{-\infty}-e^{0})=-\frac{1}{s}(0-1)\Rightarrow L[1]=\frac{1}{s} \quad ; \quad s>0 \\ f(t)=t \rightarrow & L[t]=\int_0^\infty e^{-st}t\,dt=-\frac{1}{s^2}[(st+1)e^{-st}]\Big|_0^\infty=-\frac{1}{s^2}[0-1]\Rightarrow L[t]=\frac{1}{s^2} \quad ; \quad s>0 \\ f(t)=e^{at} \rightarrow & L\left[e^{at}\right]=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=-\frac{1}{s-a}(e^{-(s-a)t})\Big|_0^\infty=-\frac{1}{s-a}[0-1]\Rightarrow L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a} \quad ; \quad s>a \\ f(t)=\sin t \rightarrow & L[\sin t]=\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt=-\frac{1}{s^2+1}(e^{-st}[s\cdot\sin(t)+\cos(t)])\Big|_0^\infty=-\frac{1}{s^2+1}(0-1)\Rightarrow L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1} \quad ; \quad s>0 \end{cases}$$

مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\begin{cases}\cos(t) , & 0<t<\pi \\ 0 , & t>\pi\end{cases}$ عبارت است از:

۱) $\frac{s(1-e^{-\pi s})}{s^2+1}$ ۲) $\frac{s(1+e^{\pi s})}{s^2+1}$ ۳) $\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$ ۴) $\frac{s(1-e^{\pi s})}{s^2+1}$

پاسخ: گزینه «۳» از تعریف تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم و داریم:

$$L[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\pi e^{-st}\cos t\,dt+\int_\pi^\infty e^{-st}(0)dt=\int_0^\pi e^{-st}\cos t\,dt$$

برای محاسبه انتگرال فوق به روش جزء به جزء عمل می‌کنیم؛ زیرا پس از دوبار مشتق‌گیری و یا انتگرال‌گیری دوباره همان عبارت ظاهر می‌شود:

u		dv
$\cos t$	$+$	e^{-st}
$-\sin t$	$-$	$\frac{-1}{s}e^{-st}$
$-\cos t$	$+\int$	$\frac{1}{s^2}e^{-st}$

$$I=\int_0^\pi e^{-st}\cos t\,dt=[\frac{-1}{s}e^{-st}\cos t+\frac{1}{s^2}e^{-st}\sin t]\Big|_0^\pi-\frac{1}{s^2}\int_0^\pi e^{-st}\cos t\,dt$$

$$\xrightarrow{I=\int_0^\pi e^{-st}\cos t\,dt} I=[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos t+\frac{1}{s^2}e^{-st}\sin t]\Big|_0^\pi-\frac{1}{s^2}I$$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{s^2})I=-\frac{1}{s^2}[(s\cos t-\sin t)e^{-st}]\Big|_0^\pi \Rightarrow I=\frac{1}{s^2+1}[(\sin t-s\cos t)e^{-st}]\Big|_0^\pi=\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1} \Rightarrow L[f(t)]=\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$$

برای به‌دست آوردن لاپلاس توابع اگر بخواهیم از روش انتگرال‌گیری استفاده کنیم، بدیهی است که حل مسائل بسیار وقت‌گیر خواهد بود. لذا در جدول زیر تبدیل لاپلاس چند تابع پرکاربرد و مهم را ارائه کرده‌ایم که سعی کنید آنها را به خاطر بسپارید.

$f(t)$	$F(s)=L[f(t)]$	شرط
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
$J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s>0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$s>0$

$f(t)$	$F(s)=L[f(t)]$	شرط
a	$\frac{a}{s}$	$s>0$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	$\alpha>-1 \quad , \quad s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n\in\mathbb{N} \quad , \quad s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>a$

از آنجایی که ممکن است حفظ کردن تبدیل لاپلاس همه توابع کمی مشکل به نظر برسد، توصیه‌های زیر را برای یادگیری ساده‌تر جدول فوق آورده‌ایم. به این موارد دقت کنید:

مورد اول: تبدیل لاپلاس عدد حقیقی a برابر $\frac{a}{s}$ است. حالا اگر به‌جای a داشته باشیم $t^n\ (n\in\mathbb{N})$، آنگاه در صورت کسر $n!$ و در مخرج کسر، توان s را $n+1$ قرار می‌دهیم (اگر توان t یک عدد غیر طبیعی مانند α بود، در صورت کسر $\Gamma(\alpha+1)$ قرار دهید و در مخرج، n را به α تغییر دهید. یعنی $s^{n+1}\to s^{\alpha+1}$).

مثلاً در محاسبه لاپلاس t^4، چون توان t، ۴ است، در صورت کسر، $4!=24$ و در مخرج کسر توان s را $4+1=5$ قرار می‌دهیم: $\frac{24}{s^5}$. به عنوان مثالی دیگر، لاپلاس $t^{\frac{3}{2}}$ برابر $\frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{s^{\frac{3}{2}+1}}$ است.

مورد دوم: تبدیل لاپلاس توابع $\sin at, \cos at$ یا هایپربولیک $\sinh at, \cosh at$ همواره شامل عبارت $s^2\pm a^2$ در مخرج کسر است؛ علامت مثبت برای حالت مثلثاتی و علامت منفی برای حالت هایپربولیک است. حالا اگر تابع کسینوس باشد (خواه مثلثاتی یا هایپربولیک)، در صورت کسر s و اگر سینوس بود (خواه مثلثاتی یا هایپربولیک) a بگذارید. به‌عنوان مثال لاپلاس $\sinh \pi t$ را در نظر می‌گیریم؛ چون تابع از نوع هایپربولیک است، پس در مخرج $s^2-\pi^2$ قرار داده و چون سینوس است؛ پس در صورت π می‌گذاریم؛ یعنی $\frac{\pi}{s^2-\pi^2}$ (دقت کنید که تنها در یک حالت عبارت مخرج کسر زیر رادیکال می‌باشد و آن هم مربوط به تابع بسل نوع اول است: $L[J_0(at)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$).

مورد سوم: در محاسبه تبدیل لاپلاس عبارت e^{at}، قرینه ضریب t در توان تابع نمایی را در مخرج به s اضافه می‌کنیم؛ مثلاً: $e^{1000t}\to\frac{1}{s+(-1000)}$

مورد چهارم: تبدیل لاپلاس هر دو تابع پله واحد و ضربه، شامل عبارت e^{-as} است. البته در مخرج لاپلاس تابع پله، s قرار می‌دهیم.

توجه: تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس عملگرهای خطی هستند. به عبارتی دیگر داریم:

$$\begin{cases}L\left[af(t)+bg(t)\right]=aL\left[f(t)\right]+bL\left[g(t)\right]\\ L^{-1}\left[aF(s)+bG(s)\right]=aL^{-1}\left[F(s)\right]+bL^{-1}\left[G(s)\right]\end{cases}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\pi\sin(t)-e^{-\pi t}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{s^2-1}-\frac{1}{s-1}$ ۲) $\frac{\pi}{s^2+1}-\frac{1}{s+1}$ ۳) $\frac{\pi}{s^2+1}-\frac{1}{s+\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{s^2+1}-\frac{1}{s-\pi}$

پاسخ: گزینه «۳» از آنجا که تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است، می‌توان تبدیل لاپلاس تابع مفروض را به‌صورت $L[f(t)]=\pi L[\sin(t)]-L[e^{-\pi t}]$ نوشت. از جدول لاپلاس نیز داریم: $L\left[\sin t\right]=\frac{1}{s^2+1}$ و $L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a}$ که به ازای $a=-\pi$ حاصل آن برابر $L\left[e^{-\pi t}\right]=\frac{1}{s+\pi}$ است. در نتیجه با جایگذاری نتایج به دست آمده در رابطه $L[f(t)]=\pi L[\sin(t)]-L[e^{-\pi t}]$، داریم: $L[\pi\sin(t)-e^{-\pi t}]=\frac{\pi}{s^2+1}-\frac{1}{s+\pi}$

مثال ۴: مقدار انتگرال $\int_0^\infty u^3e^{-2\sqrt{u}}du$، کدام است؟ (مهندسی مواد و متالورژی ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{8!}{2^8}$ ۲) $\frac{8!}{2^7}$ ۳) $\frac{7!}{2^8}$ ۴) $\frac{7!}{2^7}$

پاسخ: گزینه «۴» با دقت به فرم انتگرال می‌توان تغییر متغیر $t=\sqrt{u}$ را در نظر گرفت تا انتگرال به فرم تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ ظاهر شود:

$$t=\sqrt{u}\Rightarrow t^2=u\Rightarrow 2tdt=du\xrightarrow{\text{با جایگذاری در انتگرال}}\int_0^\infty (t^2)^3e^{-2(t)}(2tdt)=2\int_0^\infty t^7e^{-2t}dt$$

در معادله فوق اگر در نظر بگیریم $S=2$ با تبدیل لاپلاس تابع $2t^7$ سروکار داریم که تبدیل آن به‌صورت $2\times\frac{7!}{S^{7+1}}$ است. حالا با قرار دادن $S=2$ داریم:

$$2\times\frac{7!}{2^8}=\frac{7!}{2^7}$$

درسنامه۲: قضایای تبدیل لاپلاس

در درسنامه قبل نحوه محاسبه تبدیل لاپلاس یک تابع توضیح داده شد و همچنین تبدیل لاپلاس تعدادی از توابع مقدماتی مانند $\sin at$، $\cosh at$، e^{at}، $u_a(t)$ و ... را ارائه نمودیم. واضح است که اکثر توابعی که در مسائل با آن‌ها مواجهیم به سادگی این توابع نیستند، مثلاً محاسبه تبدیل لاپلاس توابع $e^{at}\sin bt$ و یا $t^2u_a(t)\cosh bt$ از طریق انتگرال‌گیری، زمان‌بر خواهد بود؛ بنابراین در این درسنامه قصد داریم قضایای حاکم بر تبدیل لاپلاس را معرفی کنیم تا به کمک این قضایا، محاسبه تبدیل لاپلاس توابع ترکیبی، راحت‌تر صورت گیرد.

قضیه اول انتقال

قضیه اول انتقال (که با نام انتقال در حوزه فرکانس نیز شناخته می‌شود) در محاسبه تبدیل لاپلاس توابعی که به صورت حاصل‌ضرب یک تابع نمایی در تابع دلخواه دیگر است، به عبارتی $e^{at}f(t)$، بسیار مفید می‌باشد. در صورت به‌کارگیری این قاعده، متغیر s به میزان مشخص a (قدرت تابع نمایی)، به چپ یا راست جابه‌جا می‌شود. تعریف این قضیه به صورت زیر است:

در صورتی‌که $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، آنگاه داریم:

$$L[e^{at}f(t)] = L[f(t)]\Big|_{s\to s-a} = F(s-a)$$

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}L^{-1}[F(s)] = e^{at}f(t)$$

توجه ۱: وقتی عبارتی در e^{at} ضرب شده باشد، در محاسبه تبدیل لاپلاس آن، e^{at} را در نظر نمی‌گیریم و لاپلاس تابع باقیمانده را حساب کرده و در نهایت تمامی s ها را به s-a تبدیل می‌کنیم.

توجه ۲: به هنگام استفاده از قضیه اول انتقال در محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس، حتماً باید متغیر s در تابع $F(s)$ به صورت عبارت $(s-a)$ وجود داشته باشد؛ در غیر این صورت با اضافه و کم کردن a سعی می‌کنیم $(s-a)$ را ظاهر سازیم. مثلاً در عبارت $F(s)=\frac{s}{(s-2)^2+5}$، جمله $(s-2)$ در مخرج کسر وجود دارد، ولی در صورت کسر نیاز به بازسازی آن است. پس عدد ۲± را به صورت کسر اضافه می‌کنیم تا شرایط برای استفاده از قضیه اول انتقال فراهم شود:

$$F(s)=\frac{(s-2)+2}{(s-2)^2+5}=\frac{(s-2)}{(s-2)^2+5}+\frac{2}{(s-2)^2+5}$$

مثال ۳۹: حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $L[e^{-2t}\sin 4t]$

ب) $L[(t+3)^2e^t]$

☑ **پاسخ:** برای محاسبه $L[e^{-2t}\sin 4t]$ از قضیه اول انتقال یعنی $L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$ استفاده می‌کنیم، به این صورت که ابتدا تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\sin 4t$ را از جدول تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی به‌صورت $F(s)=\frac{4}{s^2+16}$ استخراج می‌کنیم. حالا برای محاسبه تبدیل لاپلاس $e^{-2t}\sin 4t$ کافی است متغیر s را در عبارت $F(s)=\frac{4}{s^2+16}$، به میزان دو واحد ($a=-2$) جابه‌جا کنیم. در نتیجه داریم:

$$L[e^{-2t}\sin 4t]=\frac{4}{[s-(-2)]^2+4^2}=\frac{4}{(s+2)^2+16}$$

به همین ترتیب برای قسمت (ب) عمل می‌کنیم. در اینجا لازم است عبارت $(t+3)^2$ را به فرم باز t^2+6t+9 بنویسیم:

$$L[t^2+6t+9]=\frac{2!}{s^{2+1}}+6\cdot\frac{1!}{s^{1+1}}+9\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}$$

سپس انتقال به میزان یک واحد ($a=1$) را بر روی s اعمال می‌کنیم:

$$L[(t+3)^2e^t]=\frac{2}{(s-1)^3}+\frac{6}{(s-1)^2}+\frac{9}{(s-1)}$$

توجه ۳: در عبارت $F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ هنگامی که مخرج کسر یعنی $Q(s)$ به‌صورت یک چندجمله‌ای با درجه بیش از دو باشد، آن را به صورت حاصل‌ضرب جملات با درجه اول و دوم بازنویسی می‌کنیم. دقت کنید که اگر دلتای عامل درجه دوم مثبت باشد، خود به صورت حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول تفکیک می‌شود ولی اگر دلتا منفی باشد، آن را به صورت مربع کامل می‌نویسیم.

مثال ۴۰: کدام گزینه جواب تبدیل لاپلاس معکوس $L^{-1}\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\}$ است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^{3t}\cos 4t+e^{3t}\sin 4t$
۲) $2e^{t}\cos 4t+2e^{t}\sin 4t$
۳) $e^{t}\cos 4t+e^{t}\sin 4t$
۴) $6e^{2t}\cos 4t+2e^{2t}\sin 4t$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا علامت دلتای مخرج را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=16-4\times 20=-64<0$$

چون دلتا منفی است پس مخرج کسر را به صورت مربع کامل بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{6s-4}{s^2-4s+20}=\frac{6s-4}{(s-2)^2-4+20}=\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}$$

همچنین صورت کسر را هم برحسب $s-2$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}=\frac{6(s-2+2)-4}{(s-2)^2+16}=\frac{6(s-2)+12-4}{(s-2)^2+16}=\frac{6(s-2)}{(s-2)^2+16}+\frac{8}{(s-2)^2+16}$$

حالا با توجه به قضیه $L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]$، از رابطه فوق لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$f(t)=6L^{-1}[\frac{s-2}{(s-2)^2+16}]+2L^{-1}[\frac{4}{(s-2)^2+16}]=6\,e^{2t}L^{-1}[\frac{s}{s^2+16}]+2e^{2t}L^{-1}[\frac{4}{s^2+16}]\Rightarrow f(t)=e^{2t}(6\cos 4t+2\sin 4t)$$

مثال ۴۱: تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\frac{1}{2^s(s-1)}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}e^{x}$
۲) $\frac{1}{2}e^{x}u_{Ln2}(x)$
۳) $e^{x}u_{Ln2}(x)$
۴) $2e^{x}u_{Ln2}(x)$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا 2^s را به‌صورت e^{sLn2} می‌نویسیم و عبارت داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$F(s)=\frac{1}{2^s(s-1)}=\frac{1}{e^{sLn2}(s-1)}=e^{-Ln(2)s}.\frac{1}{s-1}\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم}}f(x)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[e^{-Ln(2)s}.\frac{1}{s-1}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(x)L^{-1}[F(s)]\Big|_{x\to x-a}}f(x)=u_{Ln2}(x)\{L^{-1}[\frac{1}{s-1}]\}\Big|_{x\to x-Ln2}=u_{Ln2}(x)\,\{e^{x}\Big|_{x\to x-Ln2}\}$$

$$\Rightarrow f(x)=u_{Ln2}(x)\,e^{x-\ln 2}\Rightarrow f(x)=e^{x}.\,e^{Ln\frac{1}{2}}u_{Ln2}(x)=\frac{1}{2}\,e^{x}u_{Ln2}(x)$$

مثال ۴۲: در صورتی‌که $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد و L عملگر تبدیل لاپلاس، آنگاه حاصل عبارت $L[f(t)\cos(\omega t)]$ برابر است با: (i عدد مختلط)

۱) $\frac{1}{2}f(s-i\omega)+\frac{1}{2}f(s+i\omega)$
۲) $\frac{1}{2}f(s-i\omega)-\frac{1}{2}f(s+i\omega)$
۳) $\frac{1}{2}F(s-i\omega)+\frac{1}{2}F(s+i\omega)$
۴) $\frac{1}{2}F(s-i\omega)-\frac{1}{2}F(s+i\omega)$

پاسخ: گزینه «۳» با کمی دقت متوجه می‌شویم که $\cos(\omega t)$ را می‌توان به فرم نمایی نیز نوشت. یعنی $\cos(\omega t)=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$. در نتیجه $f(t)\cos(\omega t)$ را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$L[f(t)\cos(\omega t)]=L[\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}f(t)]=\frac{1}{2}L[e^{i\omega t}f(t)]+\frac{1}{2}L[e^{-i\omega t}f(t)]$$

تبدیل لاپلاس دو عبارت فوق را می‌توان به کمک قضیه اول انتقال محاسبه کرد. در صورت سؤال گفته شده که $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ است، پس حاصل عبارت فوق برابر خواهد شد با:

$$\frac{1}{2}L[e^{i\omega t}f(t)]+\frac{1}{2}L[e^{-i\omega t}f(t)]=\frac{1}{2}F(s-i\omega)+\frac{1}{2}F(s-(-i\omega))=\frac{1}{2}F(s-i\omega)+\frac{1}{2}F(s+i\omega)$$

مثال ۴۳: لاپلاس معکوس $\frac{1}{s^2+3s+4}$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۶)

۱) $\sqrt{7}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\sqrt{7}t)$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\sqrt{7}t)$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{7}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)$

پاسخ: گزینه «۳» چون دلتای مخرج منفی است و در نتیجه غیرقابل تجزیه خواهد بود $(\Delta = 3^2 - 4\times 4 = -7 < 0)$، مخرج کسر داده شده را به فرم مربع کامل $(s+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$ می‌نویسیم؛ بنابراین داریم:

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2+3s+4}] = L^{-1}[\frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}] \xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} e^{-\frac{3}{2}t}L^{-1}[\frac{1}{s^2+\frac{7}{4}}] = e^{-\frac{3}{2}t}\frac{\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)$$

مثال ۴۴: کدام گزینه تبدیل لاپلاس معکوس عبارت $\frac{3s+7}{s^2-2s+3}$ است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $3e^{2t}\cos 2t + 5e^{-t}\sin 2t$ ۲) $3e^{-t}\cos(\sqrt{2}t)+5\sqrt{2}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t)$

۳) $3e^{t}\cos(\sqrt{2}t)+5\sqrt{2}e^{t}\sin(\sqrt{2}t)$ ۴) $e^{2t}\cos 2t + e^{-2t}\sin 2t$

پاسخ: گزینه «۳» مخرج کسر داده شده را به فرم مربع کامل می‌نویسیم:

$$F(s) = \frac{3s+7}{(s-1)^2-1+3} = \frac{3s+7}{(s-1)^2+2} = \frac{3(s-1+1)+7}{(s-1)^2+2} = \frac{3(s-1)}{(s-1)^2+2}+\frac{10}{(s-1)^2+2}$$

از قضیه اول انتقال یعنی $L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}L^{-1}[F(s)]$ داریم:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = 3L^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2-2}]+10L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2+2}] = 3e^tL^{-1}[\frac{s}{s^2+2}]+10e^tL^{-1}[\frac{1}{s^2+2}]$$

$$\Rightarrow f(t) = 3e^t\cos\sqrt{2}t+10e^t\frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(t) = (3\cos\sqrt{2}t+5\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t)e^t$$

قضیه دوم انتقال

در درسنامه قبل با تابع پله واحد (تابع هویساید) $u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0 \ , \ t<a \\ 1 \ , \ a\le t \end{cases}$ آشنا شدید. در محاسبه تبدیل لاپلاس توابعی که به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت، که یکی از آنها تابع پله واحد باشد $(u_a(t)f(t))$، از قضیه دوم انتقال استفاده می‌شود. این قضیه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

در صورتی‌که $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، آنگاه داریم:

$$L[u_a(t)f(t)] = e^{-as}L[f(t+a)]$$

$$L^{-1}[e^{-as}F(s)] = u_a(t)L^{-1}[F(s)]\Big|_{t\to t-a} = u_a(t)f(t-a)$$

توجه ۱: وقتی عبارتی در $u_a(t)$ ضرب شده باشد، در محاسبه تبدیل لاپلاس آن، $u_a(t)$ را در نظر نمی‌گیریم و در تابع باقیمانده تمامی tها را به $t+a$ تبدیل کرده و پس از ساده سازی، لاپلاس آن را محاسبه می‌نماییم. در نهایت e^{-as} را در عبارت حاصل، ضرب می‌کنیم.

توجه ۲: نشانه استفاده از قضیه دوم انتقال در لاپلاس معکوس، وجود e^{-as} در ضابطه تبدیل لاپلاس تابع است. در این حالت e^{-as} را در نظر نمی‌گیریم و لاپلاس معکوس تابع باقیمانده را محاسبه می‌کنیم. سپس در عبارت حاصل تمامی t ها را به $t-a$ تبدیل کرده و نتیجه حاصل را در $u_a(t)$ ضرب می‌کنیم.

مثال ۴۵: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \sin(t)[H(t)-H(t-\pi)]$ کدام است؟ ($H(t)$ تابع هوی‌ساید است.) (ریاضی ـ سراسری ۹۱)

۱) $F(s) = \frac{1+e^{-s\pi}}{1+s^2}$ ۲) $F(s) = \frac{1-e^{-s\pi}}{1+s^2}$ ۳) $F(s) = \frac{e^{-s\pi}}{1+s^2}$ ۴) $F(s) = \frac{e^{s\pi}}{1+s^2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$F(s) = L[\sin t(H(t)-H(t-\pi))] \xrightarrow{H(t)=1} F(s) = L[\sin t(1-H_\pi(t))]$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2+1}-L[H_\pi(t)\sin t] = \frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}L[\sin(t+\pi)] \xrightarrow{\sin(t+\pi)=-\sin t} F(s) = \frac{1}{s^2+1}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

مثال ۴۶: لاپلاس تابع $f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad 0\le x<\frac{\pi}{6}\\ \sin x & ; \quad x\ge \frac{\pi}{6}\end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi s}{6}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi s}{6}}\frac{s}{s^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi s}{6}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi s}{6}}\frac{s}{s^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi s}{6}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi s}{6}}\frac{1}{s^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi s}{6}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi s}{6}}\frac{1}{s^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق دستورالعمل بازنویسی توابع چند ضابطه‌ای برحسب پله واحد، تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت $f(x)=u_{\frac{\pi}{6}}(x)\sin x$ نوشت.

حالا تبدیل لاپلاس $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F(s)=L[f(x)]=L[u_{\frac{\pi}{6}}(x)\sin x]\xrightarrow{L[u_a(x)f(x)]=e^{-as}L[f(x+a)]}F(s)=e^{-\frac{\pi}{6}s}L[\sin(x+\frac{\pi}{6})]$$

$$\Rightarrow F(s)=e^{-\frac{\pi}{6}s}L[\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}]\Rightarrow F(s)=e^{-\frac{\pi}{6}s}(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1})$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید گزینه‌ی (۴) پاسخ تست است.

مثال ۴۷: معکوس تبدیل لاپلاس $\frac{2}{s^3}e^{-4s}$ عبارت است از: (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

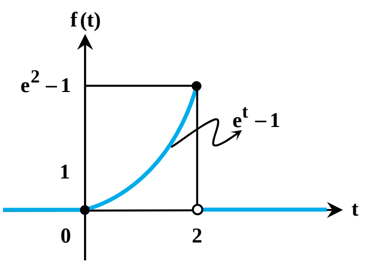
۱) $(t-4)u(t-4)$　۲) $(t-4)^2u(t-4)$　۳) $(t+4)u(t-4)$　۴) $(t+4)^2u(t+4)$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم که لاپلاس معکوس $\frac{2}{s^3}$ برابر t^2 است. حالا برای محاسبه لاپلاس معکوس $\frac{2}{s^3}e^{-4s}$ از قضیه دوم انتقال کمک می‌گیریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-1}[F(s)]\Big|_{t\to t-a}}L^{-1}[\frac{2}{s^3}e^{-4s}]=u_4(t)L^{-1}[\frac{2}{s^3}]\Big|_{t\to t-4}$$

$$\Rightarrow f(t)=u_4(t)\{t^2\Big|_{t\to t-4}\}\Rightarrow f(t)=(t-4)^2u_4(t)$$

مثال ۴۸: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که نمودار آن در شکل زیر نشان داده شده کدام است؟



۱) $\frac{1-e^{-2s}}{s-1}+\frac{1-e^{2(1-s)}}{s}$

۲) $\frac{1-e^{-2s}}{s-1}-\frac{1-e^{2(1-s)}}{s}$

۳) $\frac{1-e^{2(1-s)}}{s-1}+\frac{1-e^{-2s}}{s}$

۴) $\frac{1-e^{2(1-s)}}{s-1}-\frac{1-e^{-2s}}{s}$

پاسخ: گزینه «۴» ضابطه نمودار داده شده به صورت $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ e^t-1 & 0\le t<2\\ 0 & 2\le t\end{cases}\Rightarrow f(t)=(e^t-1)[u_0(t)-u_2(t)]$ است. حالا به محاسبه لاپلاس آن می‌پردازیم:

$$L[f(t)]=L[(e^t-1)(1-u_2(t))]=L[e^t-1]-L[u_2(t)(e^t-1)]=L[e^t]-L[1]-e^{-2s}L[e^{t+2}-1]$$

$$\Rightarrow L[f(t)]=L[e^t]-L[1]-e^{-2s}(L[e^2\cdot e^t]-L[1])=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}-e^{-2s}(\frac{e^2}{s-1}-\frac{1}{s})\Rightarrow L[f(t)]=\frac{1-e^{2(1-s)}}{s-1}-\frac{1-e^{-2s}}{s}$$

مثال ۴۹: اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $F(s)=\dfrac{(۱-e^{-۲s})^{۲}}{s^{۲}}$ باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد شکل نمودار $f(t)$ صحیح است؟

الف) شکل تابع یک پالس مثلثی متساوی‌الساقین در بالای محور زمان است.

ب) تابع متناوب با دوره تناوب $T=۲$ است.

پ) قسمتی از نمودار بالای محور زمان و قسمتی از آن پایین محور است.

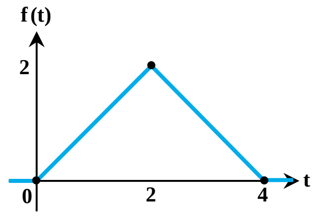
ت) معادله مشتق آن برابر $۱-۲[u_{۲}(t)-u_{۱}(t)]$ است.

۱) الف　　　۲) پ و ت　　　۳) الف و ب　　　۴) ب و پ و ت

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا معکوس تبدیل لاپلاس را محاسبه می‌کنیم:

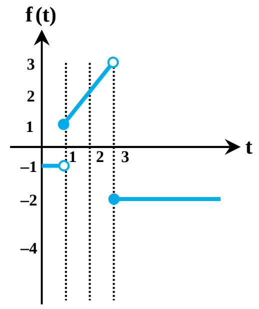
$$L^{-۱}[F(s)]=L^{-۱}[\frac{(۱-e^{-۲s})^{۲}}{s^{۲}}]\Rightarrow f(t)=L^{-۱}[\frac{۱-۲e^{-۲s}+e^{-۴s}}{s^{۲}}]=t-۲u_{۲}(t)L^{-۱}[\frac{۱}{s^{۲}}]\Big|_{t\to t-۲}+u_{۴}(t)\cdot L^{-۱}[\frac{۱}{s^{۲}}]\Big|_{t\to t-۴}$$

$$\Rightarrow f(t)=t-۲u_{۲}(t)\cdot(t-۲)+u_{۴}(t)\cdot(t-۴)=\begin{cases}t & ۰\le t<۲\\ -t+۴ & ۲\le t<۴\\ ۰ & ۴\le t\end{cases}$$

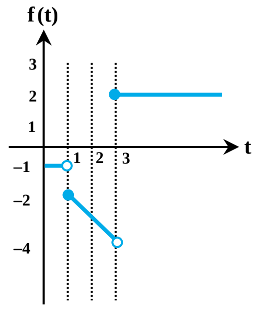


خب! حالا تک تک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم. واضح است که نمودار متناوب نیست (رد گزاره (ب)). همچنین کل نمودار بالای محور زمان است (رد گزاره (پ)). مشتق تابع $f(t)$ نیز برحسب تابع پله و به‌صورت $f'(t)=۱-۲u_{۲}(t)+u_{۴}(t)$ است (رد گزاره (ت)). از طرفی شکل نمودار به‌صورت یک مثلث متساوی‌الساقین است، بنابراین تنها گزاره صحیح (الف) است. در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

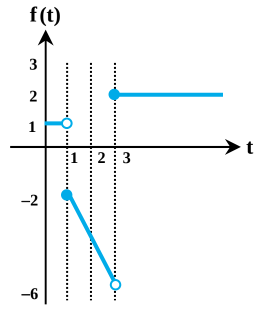
مثال ۵۰: نمودار تابع $f(t)$ وقتی $F(s)=\frac{۱}{s}-e^{-s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۳}{s})+e^{-۳s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۸}{s})$ کدام است؟



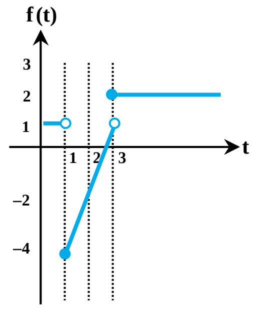
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از قضیه دوم انتقال از تابع $F(s)$ معکوس تبدیل لاپلاس می‌گیریم $(L^{-۱}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-۱}[F(s)]\Big|_{t\to t-a})$:

$$L^{-۱}[F(s)]=L^{-۱}[\frac{۱}{s}-e^{-s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۳}{s})+e^{-۳s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۸}{s})]=L^{-۱}[\frac{۱}{s}]-L^{-۱}[e^{-s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۳}{s})]+L^{-۱}[e^{-۳s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۸}{s})]:$$

$$\begin{cases}L^{-۱}[\frac{۱}{s}]=۱\\ L^{-۱}[e^{-s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۳}{s})]=u_{۱}(t)L^{-۱}[(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۳}{s})]\Big|_{t\to t-۱}=u_{۱}(t)[۲t+۳]\Big|_{t\to t-۱}=u_{۱}(t)[۲(t-۱)+۳]=u_{۱}(t)[۲t+۱]\\ L^{-۱}[e^{-۳s}(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۸}{s})]=u_{۳}(t)L^{-۱}[(\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{۸}{s})]\Big|_{t\to t-۳}=u_{۳}(t)[۲t+۸]\Big|_{t\to t-۳}=u_{۳}(t)[۲(t-۳)+۸]=u_{۳}(t)[۲t+۲]\end{cases}$$

حالا نتایج فوق را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$f(t)=۱-u_{۱}(t)[۲t+۱]+u_{۳}(t)[۲t+۲]=\begin{cases}۱ & ۰<t<۱\\ -۲t & ۱\le t<۳\\ ۲ & ۳\le t\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی به دست آمده برای $f(t)$، مشخص است که گزینه (۳) جواب مسأله می‌باشد.

نکته ۳: هنگامی‌که آرگومان ورودی تابع پله $u_a(t)=u(t-a)$ در عدد ثابتی مانند k ضرب شود، $u_a(kt)=u(kt-ka)$، نمودار تابع در راستای محور t و حول نقطه $t=a$ با نسبت k فشرده می‌شود. چون نمودار پله به صورت یک خط افقی است، پس فشرده شدن آن تغییری در شکل نمودار ایجاد نمی‌کند. به عبارتی دیگر $u(t-a)=u(kt-ka)$. این نکته را با ذکر یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۵۱: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(3t-\frac{3\pi}{2})e^t\cos t$، کدام است؟ (مهندسی برق و مکانیک ـ سراسری ۹۷)

۱) $-\dfrac{6se^{-\frac{\pi}{2}(s-1)}}{(s^2+1)^2}$ ۲) $\dfrac{-e^{-\frac{\pi}{2}(s-1)}}{(s-1)^2+1}$ ۳) $\dfrac{-6se^{\frac{\pi}{2}(s+1)}}{(s+1)^2+1}$ ۴) $\dfrac{6se^{\frac{\pi}{2}(s+1)}}{(s^2+1)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: ابتدا توجه کنید که به‌ازای $t=\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$ $3t-\frac{3\pi}{2}=0$ آرگومان تابع پله برابر صفر می‌شود. بنابراین تابع $f(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(t)\begin{cases} e^t\cos t & ; t>\frac{\pi}{2} \\ 0 & ; 0<t<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

پس با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس می‌توان تبدیل تابع f را به‌دست آورد.

$$L[f(t)]=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}e^{-st}.e^t\cos t\,dt=-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}(s-1)}}{(s-1)^2+1}$$

توجه شود که انتگرال روبه‌رو از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء قابل حل است.

روش دوم: با نوشتن تابع به فرم $u(t-\frac{\pi}{2})f(t-\frac{\pi}{2})$ می‌توانیم به‌راحتی از قضیه انتقال تابع استفاده کنیم به این صورت که $L[u(t-t_0)f(t-t_0)]=e^{-t_0s}F(s)$:

$$f(t)=u_{\frac{\pi}{2}}[3(t-\frac{\pi}{2})]e^{\frac{\pi}{2}}e^{t-\frac{\pi}{2}}(-\sin(t-\frac{\pi}{2}))=-e^{\frac{\pi}{2}}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t-\frac{\pi}{2})e^{t-\frac{\pi}{2}}\sin(t-\frac{\pi}{2})\}$$

$$f(t)=-e^{\frac{\pi}{2}}(e^{-\frac{\pi}{2}s}L[e^t.\sin t])=-e^{-\frac{\pi}{2}(s-1)}[\frac{1}{(s-1)^2+1}]$$

روش سوم: چون با تبدیل $\cos t$ سروکار داریم پس حتماً در مخرج کسر باید s^2+1 را داشته باشیم. از طرفی چون e^t در $\cos t$ ضرب شده با توجه به قضیه انتقال حتماً در مخرج کسر $(s-1)^2+1$ وجود دارد. واضح است که تنها گزینه (۲) این شرایط را دارد.

قضیه سوم انتقال

تابع ضربه یا تابع دلتای دیراک $\delta_a(t)$ در درسنامه قبل معرفی شد و خواص آن مطرح گردید. چنانچه تابع دلتای دیراک در تابع پیوسته $f(t)$ ضرب شده باشد، تبدیل لاپلاس آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L[\delta_a(t)f(t)]=e^{-as}f(a)$$

بنابراین به ازای $a=0$، حاصل $L[\delta_0(t)f(t)]=e^{-0\times s}.f(0)=f(0)$ می‌شود.

توجه ۱: دقت کنید که در سمت راست تساوی، مقدار تابع $f(t)$ به ازای $t=a$ آورده شده و نه مقدار تبدیل لاپلاس $f(t)$.

مثال ۵۲: تبدیل لاپلاس $f(t)=\delta(t-1)\cdot\cos t$ برابر است با: (مهندسی مکانیک (ساخت و تولید) ـ آزاد ۸۶)

۱) $1+\dfrac{s}{s^2+1}$ ۲) $(\cos 1)e^{-s}$ ۳) $\dfrac{s}{s^2+1}$ ۴) $(\cos 1)e^{s}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f(t)]=e^{-as}f(a)}L[\delta(t-1)\cos t]=e^{-s}\cos 1$$

تغییر مقیاس

در صورتی‌که $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، آنگاه داریم:

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}L[f(t)]\Big|_{s\to\frac{s}{a}}=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

$$L^{-1}[F(as)]=\frac{1}{a}L^{-1}[F(s)]\Big|_{t\to\frac{t}{a}}=\frac{1}{a}f(\frac{t}{a})$$

مثال ۵۳: اگر $F(s)=L[f(t)]$ که $L[f(t)]$ لاپلاس تابع $f(t)$ و $L^{-۱}$ لاپلاس معکوس تابع $F(s)$ باشد، آنگاه $L^{-۱}[F(as+b)]$ برابر است با:

(آزمون دکتری دانشگاه امیرکبیر مشابه مکانیک ۸۷)

۱) $\frac{۱}{a}e^{-bt}f(\frac{t}{a})$ ۲) $ae^{-bt}f(at)$ ۳) $ae^{-\frac{b}{a}t}f(\frac{t}{a})$ ۴) $\frac{۱}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f(\frac{t}{a})$

پاسخ: گزینه «۴» با ساده‌سازی داریم:

$$L^{-۱}[F(as+b)]=L^{-۱}[F(a\{s+\frac{b}{a}\})]\xrightarrow{\text{قضیه اول انتقال}}e^{-\frac{b}{a}t}L^{-۱}[F(as)]\xrightarrow{L^{-۱}[F(as)]=\frac{۱}{a}f(\frac{t}{a})}\frac{۱}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f(\frac{t}{a})$$

مثال ۵۴: اگر $f(t)=L^{-۱}[\frac{(۲+e^{-۲s})(۲-۳e^{-۳s})}{s}]$، در این صورت $f(۷)$ برابر است با:

(از سؤالات پایان ترم دانشگاه علم و صنعت)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۳−

پاسخ: گزینه «۴» با کمی ساده‌سازی داریم:

$$L^{-۱}[\frac{(۲+e^{-۲s})(۲-۳e^{-۳s})}{s}]=L^{-۱}[\frac{۴-۶e^{-۳s}+۲e^{-۲s}-۳e^{-۵s}}{s}]=L^{-۱}[\frac{۴}{s}+\frac{۲e^{-۲s}}{s}-\frac{۶e^{-۳s}}{s}-\frac{۳e^{-۵s}}{s}]$$

از خطی بودن عملگر لاپلاس استفاده کرده و تابع $f(t)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(t)=L^{-۱}[\frac{۴}{s}+\frac{۲e^{-۲s}}{s}-\frac{۶e^{-۳s}}{s}-\frac{۳e^{-۵s}}{s}]=۴L^{-۱}[\frac{۱}{s}]+۲L^{-۱}[\frac{e^{-۲s}}{s}]-۶L^{-۱}[\frac{e^{-۳s}}{s}]-۳L^{-۱}[\frac{e^{-۵s}}{s}]=۴+۲u_۲(t)-۶u_۳(t)-۳u_۵(t)$$

با جایگذاری $t=۷$ در ضابطه $f(t)$ داریم:

$$f(۷)=۴-۶u_۳(۷)+۲u_۲(۷)-۳u_۵(۷)=۴-۶+۲-۳\Rightarrow f(۷)=-۳$$

قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس

در صورتی‌که $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد؛ آنگاه داریم:

$$L[t^n f(t)]=(-۱)^n F^{(n)}(s)$$

به عبارت دیگر به ازای هر بار ضرب t در تابع $f(t)$، باید یکبار از $F(s)$ مشتق گرفته و حاصل را قرینه کنیم.

مثلاً $L[tf(t)]=-F'(s)$، یا $L[t^۲f(t)]=-۱\times\frac{d}{ds}(-F'(s))=F''(s)$.

همچنین برای محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس می‌توان به صورت مقابل عمل کرد:

$$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=-\frac{۱}{t}L^{-۱}[F'(s)]$$

از نتیجه فوق می‌توان با دو رویکرد در مسائل محاسبه لاپلاس معکوس تابع $F(s)$ استفاده کرد:

حالت اول: محاسبه لاپلاس معکوس مشتق تابع (یعنی $L^{-۱}[F'(s)]$) ساده‌تر از محاسبه لاپلاس معکوس خود تابع است:

$$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=-\frac{۱}{t}L^{-۱}[F'(s)]$$

مثلاً تابع $F(s)=Ln(s+۱)$ و مشتق آن یعنی $F'(s)=\frac{۱}{s+۱}$ را در نظر بگیرید. واضح است که محاسبات مربوط به $L^{-۱}[\frac{۱}{s+۱}]=e^{-t}$ در مقایسه با محاسبات $L^{-۱}[Ln(s+۱)]$ بسیار ساده‌تر است. بنابراین $f(t)=-\frac{۱}{t}L^{-۱}[\frac{۱}{s+۱}]=-\frac{۱}{t}e^{-t}$. به طور مشخص می‌توان گفت که هر گاه $F(s)$ به فرم تابع لگاریتم بود، می‌توان از این روش استفاده کرد.

حالت دوم: محاسبه لاپلاس معکوس انتگرال تابع (تابع اولیه) (یعنی $L^{-۱}[\int F(s)ds]$) ساده‌تر از محاسبه لاپلاس معکوس خود تابع است:

$$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=-tL^{-۱}[\int F(s)ds]$$

مثلاً تابع $\frac{-۲s}{(s^۲+a^۲)^۲}$ دارای تابع اولیه $\frac{۱}{s^۲+a^۲}$ است. واضح است که محاسبه $L^{-۱}[\frac{۱}{s^۲+a^۲}]=\frac{۱}{a}\sin at$ خیلی ساده‌تر از محاسبه $L^{-۱}[\frac{-۲s}{(s^۲+a^۲)^۲}]$ است.

در نتیجه خواهیم داشت: $L^{-۱}[\frac{-۲s}{(s^۲+a^۲)^۲}]=-\frac{t}{a}\sin at$.