فصل اول

«جبر گزاره‌ها و مبانی منطق»

مقدمه

ارسطو اولین کسی بود که به طور نظام‌مند روی استدلال منطقی کارکرد. بعد از آن لایبنیتس بسط منطق نمادی را بعنوان زبان علمی جهانی بررسی نمود. بعدها جرج بول و شرودر روی مفاهیم حساب استنتاج و منطق سوری کار کردند، این نتایج به صورت درسهایی در جبر منطق معروف شدند. در سده اخیر بزرگانی چون برتراند راسل، استنت، مک‌آلیستر، راس و رایت روی منطق کار کردند و نتایج فلسفی آن را بررسی نمودند.

در منطق، برهان از اهمیت خاصی برخوردار است. در واقع برهان مرجعیت‌بخش چیزی است که اگر آن چیز بعنوان یک عقیده محض (یعنی بدون برهان) بیان شود، ممکن است مورد قبول قرار نگیرد. مفهوم برهان همراه با مفهوم قضیه به کارمی‌رود. قضیه، گزاره‌ای است که درستی آن براساس اصول موضوع است.

درباره عدم امکان نادیده گرفتن اهمیت منطق و قاعده‌های استنتاج جمله حکیمانه زیر از آخلیس در کتاب لویس کارول قابل ذکر است. سنگ پشت به آخلیس گفت:

"آنگاه منطق گلوی تو را خواهد فشرد و تو را مجبور به انجام آن خواهد کرد."

منطق به مطالعه و بررسی استدلال و استنتاج گفته می‌شود و به ویژه، به این مساله می‌پردازد که آیا یک استدلال درست است یا خیر و همچنین روی رابطه بین جملات تاکید دارد که در تضاد با محتوای هیچ گزاره‌ای نباشد. به عنوان مثال جملات زیر را در نظر بگیرید:

- تمام ریاضیدانان، کلاه می‌پوشند.
- هر کس که کلاه بپوشد یک جبردان است.
- بنابراین تمام ریاضیدانان جبردان هستند.

از دیدگاه عملی، منطق هیچ تلاشی برای تعیین آن که کدام یک از این گزاره‌ها درست است انجام نمی‌دهد؛ اما اگر دو گزاره اول درست باشد منطق حکم می‌کند گزاره سوم نیز صحیح است.

از روش‌های منطقی در ریاضیات گسسته برای اثبات قضایا و در علوم کامپیوتر برای اثبات اینکه برنامه‌ای به درستی کار کند، استفاده می‌شود.

در این فصل برخی از روش‌های کلی اثبات را مورد بررسی قرار می‌دهیم که یکی از آن‌ها، استقراء ریاضی می‌باشد. از این روش در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده بسیاری می‌شود.

❖ **تعریف ۱: منطق** به دنباله‌ای از قوانین که یک استدلال را مشخص می‌کنند، منطق گویند. در منطق دودویی همواره صحبت از درستی یا نادرستی عبارات می‌باشد و متغیرهای دودویی روی دامنه $\{0,1\}$ یا $\{T, F\}$ تعریف می‌شوند.

کاربرد منطق دودویی تنها در علوم کامپیوتر نیست، بلکه در زندگی روزمره نیز از آن استفاده می‌شود. هنگامی که در رابطه با علت رخداد یک واقعه بحث می‌کنیم، بطور ناخودآگاه درباره منطقی بودن استدلال‌های انجام شده فکر می‌کنیم و اصولاً کسی را انسان منطقی می‌دانیم که بتواند این استدلال‌ها را بهتر درک کند. بنابراین آنچه که در این درس مطرح می‌شود را می‌توان با منطقی که همواره با آن سر و کار داریم در کنار هم قرار داد.

❖ **تعریف ۲: گزاره** جمله‌ای خبری است که بتوان درستی یا نادرستی آن را مشخص نمود.

به عبارت دیگر، به کلیه جملاتی که در طول روز برای بیان اخبار، وقایع و رخدادها استفاده می‌کنیم، در صورتی که تمامی افراد نسبت به صحت آنها تفکر یکسان داشته باشند، یا اینکه بتوان به طریقی به طور قطع درستی آن را مشخص کرد، گزاره گفته می‌شود. به عنوان مثال این جمله «تعداد سیارات کل هستی هفتاد و پنج میلیارد است» یک گزاره است ولی درستی یا نادرستی آن را نمی‌توان مشخص نمود.

مثال۱: عبارات زیر را درنظر بگیرید:

الف) اگر ۵ = ۲×۲ آنگاه ۱ = ۰ **ب) این جمله دارای ارزش false است.**

ج) ۱۶ = ۷ + ۷ **د) این جمله دارای ارزش false است یا ۵ = ۲×۲**

چند تا از این عبارات گزاره می‌باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تنها عبارت الف یک گزاره می‌باشد. عبارت ب و د گزاره نمی‌باشند: زیرا نمی‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد. عبارت ج نیز از آنجایی که در مبناهای مختلف دارای ارزش‌های متفاوتی می‌باشد، گزاره نیست.

یکی از پارادوکس‌های جالب گزاره‌ها، جمله زیر می‌باشد:

«این جمله نادرست است» : A

در اینجا منظور از این جمله همان جمله A می‌باشد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت اول: اگر A درست باشد آنگاه طبق گفته خودش، A نادرست خواهد بود. بنابراین به تناقض رسیدیم.

حالت دوم: اگر A نادرست باشد آنگاه گفته آن غلط خواهد بود بنابراین A نادرست نیست که این یک تناقض است.

با توجه به دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم که A نه درست و نه نادرست است. بنابراین A یک گزاره نمی‌باشد.

مثال ۲: کدام‌یک از جملات زیر یک گزاره نمی‌باشد؟

۱) تنها عدد صحیح مثبت که ۷ را می‌شمارد، خود ۷ است.

۲) برای هر عدد صحیح مثبت n، یک عدد اول بزرگتر از n وجود دارد.

۳) زمین تنها سیاره منظومه شمسی است که حیات در آن جریان دارد.

۴) روز جمعه برای رفتن به تئاتر شهر برای تماشای «بینوایان» دو بلیط بخر.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» جمله گزینه ۱ جمله‌ای نادرست است، بنابراین درستی یا نادرستی آن به طور قطع قابل تشخیص است و یک گزاره می‌باشد. همچنین جمله ۲ یک جمله درست است بنابراین یک گزاره می‌باشد. درباره درستی یا نادرستی جمله ۳ باید گفت که هنوز کسی به طور قطع این موضوع را نمی‌داند ولی این جمله بالاخره یا درست و یا نادرست است. جمله گزینه ۴ نه درست است و نه نادرست، این جمله یک جمله دستوری است و نمی‌تواند یک گزاره باشد.

همانگونه که در تعریف گزاره بیان شد، بایستی تمام افراد نظر مشابهی را نسبت به درستی یک گزاره داشته باشند. عبارت «این کفش گران قیمت است» را در نظر بگیرید، از آنجائیکه با توجه به وضع اقتصادی، افراد مختلف نظرهای متفاوتی نسبت به درستی این عبارت دارند، این عبارت یک گزاره نمی‌باشد. همچنین عبارت «این کفش زیباست» نیز با توجه به آنکه سلیقه افراد متفاوت است، نمی‌تواند یک گزاره باشد.

تابع ارزش

همانگونه که یک رابطه ریاضی ممکن است تابع باشد، رابطه ارزش‌های دو گزاره نیز ممکن است در حالت‌هایی تابع باشند. اگر بتوان ارزش یک گزاره q را از روی ارزش گزاره p معلوم کرد گزاره q را تابع ارزش گزاره p می‌نامند. در حالت کلی اگر گزاره‌ای چون p به ارزش گزاره‌های دیگر چون q، r، w و ... بستگی داشته باشد و برحسب آنها به دست آید، p را تابع ارزش گزاره‌های مزبور می‌نامند. اگر دو گزاره تابع ارزش یکدیگر باشند دارای رابطه ارزشی نیز هستند، اما ممکن است ارزش‌های دو گزاره در رابطه باشند ولی آن دو گزاره تابع ارزش یکدیگر نباشند. دو گزاره ساده که تابع ارزش یکدیگر باشند، نسبت به هم یکی از سه حالت برابری هم ارزی یا غیر هم‌ارزی را خواهند داشت. که در ادامه هر یک از سه حالت را توضیح خواهیم داد:

حالت اول: همانی یا برابری : اگر دو گزاره p ، q چنان باشند که p همان q باشد می‌گوییم p با q معادل یا برابر است و می‌نویسیم $p = q$. در ضمن دو گزاره برابر، تابع ارزش یکدیگر نیز هستند. به عنوان مثال دو گزاره «علی دانشجو است» و «علی محصل دانشگاه است» با هم برابرند.

حالت دوم: هم‌ارزی: اگر دو گزاره چنان باشند که هنگامی که یکی از آنها درست است دیگری هم درست باشد و بالعکس اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست ارزیابی شود، هم‌ارز نامیده می‌شوند. بنابراین برای گزاره‌ها هنگامی هم‌ارزی را داریم که اگر مثلاً گزاره p درست باشد، گزاره q نیز درست باشد و اگر نادرست است q نیز نادرست باشد. بنابراین گزاره‌های هم ارز همواره در ارتباط و در تماس با یکدیگر و از یکدیگر تاثیر دقیقاً مشابهی می‌گیرند.

مجموعه زوج‌های مجموعه‌های هم‌ارز یا همگی یک هستند و یا همگی صفر هستند که این نشان دهنده یک تابع می‌باشد. بنابراین اگر دو گزاره هم‌ارز باشند تابع ارزش یکدیگرند. هم‌ارزی دو گزاره p و q را با $p \equiv q$ یا $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند. به عنوان مثال دو گزاره زیر هم‌ارز هستند.

p: حسن برادر تنی حسین است.　　　　q : حسن فرزند پدر و مادر حسین است.

حالت سوم: ناهم‌ارزی (تباین): دو گزاره که هم‌ارز نباشند غیر هم‌ارز نامیده می‌شوند. دو گزاره هم‌ارز نسبت به هم یکی از حالت‌های غیر هم‌ارزی، ناسازگاری، سازش‌پذیری و درون ارزی را دارند.

ناارزی (نفی = تناقض) : اگر دو گزاره چنان باشند که در صورتی که یکی از آنها درست باشد دیگری نادرست باشد و بالعکس هنگامی که یکی از آنها نادرست باشد دیگری درست باشد غیر هم‌ارز یکدیگر یا نقیض یکدیگرند. دو گزاره که غیر هم‌ارز یکدیگر باشند تابع ارزش یکدیگرند.

ناسازگاری (تضاد): به دو گزاره که نتوانند با هم درست باشند، ناسازگار یا متضاد گویند. بنابراین از دو گزاره ناسازگار یکی از آنها یا هردوی آنها نادرست است. منظور از سازگاری بین دو گزاره این است که هر دو گزاره با هم درست باشند.

سازش‌پذیری (تداخل تحت تضاد): به دو گزاره‌ای که هر دو با هم نادرست نباشند سازش‌پذیر گفته می‌شود. بنابراین از دو گزاره سازش پذیر یکی از آنها یا هر دوی آنها درست است.

درون ارزی یا تداخل: هرگاه دو گزاره چنان باشند که چون اولی درست است دومی نیز درست باشد و چون دومی نادرست است پس اولی نیز نادرست است، گفته می‌شود که گزاره اول، نسبت به گزاره دوم درون ارز یا متداخل است. در چنین وضعی اگر گزاره اول نادرست باشد، دومی ممکن است یا نادرست باشد یا بالعکس.

❖ **تعریف ۳: گزاره ساده یا اتمی** گزاره‌ای است که قابل تجزیه به گزاره‌های دیگر نباشد. گزاره مرکب گزاره‌ای است که از ترکیب چند گزاره ساده تشکیل شده است.

گزاره‌هایی مانند «هوا بارانی است» و «سینما می‌روم» گزاره‌های ساده اتمی می‌باشند. در گفتار و نوشتار روزمره گزاره‌ها را با استفاده از رابطه‌هایی مانند (and) و یا (or) با هم ترکیب کرده و به گزاره‌های مرکب می‌رسیم. به چنین رابطه‌هایی عملگر گفته می‌شود که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

ـ عملگر نقیض (NOT): این عملگر یک عملگر یکتایی می‌باشد یعنی تنها روی یک عملوند عمل می‌کند و مقدار ورودی خود را تغییر می‌دهد؛ اگر ارزش ورودی False باشد آن را True می‌کند و اگر ارزش ورودی True باشد آن را False می‌کند. به عبارت دیگر اگر گزاره‌ای راست (دروغ) باشد، نقیض آن دروغ (راست) است، اگر P یک گزاره باشد، آنگاه «چنین نیست که» را نقیض P گوئیم و با علامت $\sim P$ نمایش می‌دهیم.

➢ **توجه:** در صحبت‌های روزمره از این عملگر برای منفی ساختن فعل جمله استفاده می‌شود. مثلاً اگر عملگر نقیض روی گزاره «من الان غذا می‌خورم» عمل کند حاصل جمله «من الان غذا نمی‌خورم» خواهد بود.

ـ عملگر ترکیب عطفی $\wedge$ (یا AND): این عملگر یک عملگر دوتایی است یعنی دو ورودی یا دو عملوند را دریافت کرده و آنها را با هم ترکیب عطفی می‌کند.

ترکیب عطفی p و q که به صورت $p \wedge q$ یا pq یا p.q نشان داده می‌شود، گزاره روبه‌رو است:　　　p and q

گزاره $p \wedge q$ در صورتی راست است که p و q هر دو راست باشند.

➢ **توجه:** در صحبت‌های روزمره برای ترکیب عطفی دو جمله از حرف «و» استفاده می‌کنیم. مثلاً دو گزاره «امروز یکشنبه است» و «امروز هوا بارانی است» را در نظر بگیرد. گزاره ترکیبی «امروز یکشنبه است و امروز هوا بارانی است» تنها در صورتی درست است که هر دو گزاره‌ی اولیه بطور همزمان درست باشند.

ـ عملگر ترکیب فصلی ($\vee$ یا OR): این عملگر نیز یک عملگر دوتایی است. ترکیب فصلی p و q که به صورت $p \vee q$ یا $p + q$ نشان داده می‌شود گزاره روبه‌رو است:　　　p or q

گزاره‌هایی مانند $p \wedge q$ و $p \vee q$ که از ترکیب گزاره‌ها به دست می‌آیند، گزاره های مرکب نامیده می‌شوند. در این کتاب برای نمایش گزاره‌ها از حروف کوچک انگلیسی استفاده شده است. علاوه بر این برای تعریف گزاره p که به صورت $۲ + ۳ = ۱۰$ می‌باشد، از نمادگذاری مقابل استفاده می‌کنیم: $p : ۲ + ۳ = ۱۰$

گزاره $p \vee q$ در صورتی دروغ است که هم p و هم q دروغ باشد.

➢ **توجه:** در صحبت‌های روزمره برای ترکیب فصلی دو جمله از حرف «یا» استفاده می‌کنیم. بعنوان مثال دو گزاره «امروز یکشنبه است» و «امروز به استخر می‌روم» را در نظر بگیرد. گزاره ترکیبی «امروز یکشنبه است یا امروز به استخر می‌روم» تنها در صورتی نادرست خواهد بود که هر دو گزاره‌ی اولیه به طور همزمان، نادرست باشند.

به عنوان مثال فرض کنید که دو گزاره p و q به صورت مقابل تعریف شده باشد:　　q : یک قرن صد سال است　　$p : ۲ + ۳ = ۱۰$

در این صورت ترکیب عطفی دو گزاره p و q به صورت مقابل می‌باشد:　　$p \wedge q : ۲ + ۳ = ۱۰$ و یک قرن صد سال است.

ترکیب فصلی p و q نیز به صورت مقابل می‌باشد:　　$p \vee q : ۲ + ۳ = ۱۰$ یا یک قرن صد سال است.

مثال ۳: گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

p : بلز پاسکال چندین ماشین‌حساب مختلف را اختراع کرد.

q : اولین کامپیوتر تمام الکترونیکی در قرن بیستم ساخته شد.

r : عدد π در سال ۱۹۵۴ تا یک میلیون رقم بعد از اعشار محاسبه شد.

گزاره‌های فوق را می‌توان بصورت مرکب زیر در نظر گرفت:

بلز پاسکال چند ماشین‌حساب مختلف اختراع کرد و چنین نیست که اولین کامپیوتر تمام الکترونیکی در قرن بیستم ساخته شد یا عدد π در سال ۱۹۵۴ تا یک میلیون رقم بعد از اعشار محاسبه شد.

درباره گزاره فوق با توجه به اینکه p و q صحیح و r نادرست است، چه می‌توان گفت؟

۱) گزاره مرکب بیان شده همواره نادرست است. ۲) گزاره مرکب بیان شده همواره صحیح است.

۳) ترکیب‌های موجود در گزاره مرکب غیرمجاز هستند. ۴) گزاره مرکب فوق گاهی اوقات نادرست و گاهی اوقات درست می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزاره مرکب بیان شده را می‌توان به صورت $(p \wedge \overline{q}) \vee r$ نمایش داد که بصورت زیر درستی یا نادرستی آن را بررسی می‌کنیم:

$$(p \wedge \overline{q}) \vee r \equiv (T \wedge \overline{T}) \vee F \equiv (T \wedge F) \vee F \equiv F \vee F \equiv F$$

بنابراین این گزاره همواره نادرست است.

جدول ارزش درستی

ارزش درستی گزاره‌هایی مانند ترکیب عطفی و فصلی را می‌توان با جداول درستی آن‌ها توصیف کرد.

جدول صحت یک گزاره منطقی، جدولی است که در آن تمام حالات مختلف تک‌تک گزاره‌های اتمی تشکیل دهنده آن گزاره ذکر شده است و در هر یک از حالات ارزش گزاره مرکب بیان شده باشد. از آنجایی که در منطقی دودویی، هر گزاره می‌تواند دارای یکی از دو ارزش True یا False باشد.

p	q	$\overline{p}$	$p+q$	$p.q$	$p \oplus q$
۰	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰

جدول درستی گزاره‌ی مرکب p که از گزاره‌های $p_1, p_2, \cdots, p_n$ تشکیل شده است، شامل لیستی از تمام ترکیب‌های ممکن ارزش درستی گزاره‌ها می‌باشد. در این جدول از T برای نمایش درست و از F برای نمایش نادرست استفاده می‌شود. بنابراین اگر یک گزاره، مرکب از n گزاره اتمی تشکیل شده باشد آنگاه جدول صحت دارای 2^n سطر خواهد بود.

از or در ترکیب فصلی $p \vee q$ به مفهوم شمول، یعنی شامل هر دو، استفاده می‌شود. یعنی $p \vee q$ درست است اگر p یا q یا هر دو درست باشند و $p \vee q$ تنها در صورتی نادرست است که هم p وهم q نادرست باشند. در ادامه با یای مانع جمع (یای عدم شمول) آشنا خواهیم شد.

ـ **عملگر ترکیب‌یای مانع جمع $\oplus$ (یاXOR):** این عملگر یک عملگر دوتایی است. ارزش این گزاره در صورتی درست خواهد بود که فقط یکی از گزاره‌های اولیه صحیح باشند.

➢ **توجه:** در صحبت‌های روزمره برای ترکیب‌یای مانع جمع دو جمله از اصطلاح «و/ یا» استفاده می‌کنیم. بعنوان مثال دو گزاره «امروز یکشنبه است» و «امروز دوشنبه است» را در نظر بگیرید. گزاره ترکیبی «امروز یکشنبه است و/یا امروز دوشنبه است» برای ترکیب این دو گزاره استفاده می‌شود.

عملگرهای پایه‌ای منطق عبارتند از AND، OR و NOT . بقیه عملگرها را می‌توان با ترکیب این عملگرها بدست آورد. به عنوان مثال عملگر یای انحصاری را می‌توان از رابطه روبرو بدست آورد: $p \oplus q \equiv p\overline{q} + \overline{p}q$

نکته ۱: عملگرد یای انحصاری در مواقعی کاربرد دارد که امکان برقراری هر دو گزاره با هم وجود ندارد ولی می‌خواهیم آنها را با هم جمع کنیم. به عنوان مثال فرض کنید که نمی‌دانیم امروز ۱۷ام یا ۱۸ام ماه است و بخواهیم تاریخ امروز را به طور تقریبی ذکر کنیم.

دلیل این امر این است که هیچ روزی در دنیا وجود ندارد که هم ۱۷ام و هم ۱۸ام باشد و بکاربردن یای انحصاری بر این موضوع دلالت دارد.

عملگر نقیض یای انحصاری ($\odot$ یا XNOR)

این عملگر عکس عملگر XOR عمل می‌کند. به عبارت دیگر هنگامی خروجی True است که هر دو ورودی آن مقداری برابر داشته باشند. این عملگر را می‌توان با استفاده از عملگرهای مقدماتی به صورت روبرو نوشت: $p\odot q\equiv \bar{p}\,\bar{q}+pq$

ـ عملگر NOR ($\downarrow$): این عملگر عکس عملگر OR می‌باشد یعنی هنگامی خروجی آن True است که هر دو ورودی برابر False باشند. با استفاده از ترکیب عملگرهای OR و NOT این عملگر را می‌توان به صورت روبرو نوشت: $p\downarrow q\equiv(\overline{p+q})\equiv\bar{p}.\bar{q}$

ـ عملگر NAND ($\uparrow$): این عملگر عکس عملگر AND عمل می‌کند، یعنی اگر دو ورودی برابر True باشند، خروجی False می‌شود. با استفاده از ترکیب عملگرهای AND و NOT این عملگر را می‌توان به صورت روبرو نوشت: $p\uparrow q\equiv(\overline{p.q})\equiv(\bar{p}+\bar{q})$

ـ عملگر ترکیب شرطی یا ایجاب ($p\to q$): اگر p و q دو گزاره باشند گزاره «اگر p آنگاه q» را ترکیب شرطی p با q می‌نامیم. حاصل این گزاره تنها در صورتی نادرست است که p (مقدم) درست و q (تالی) نادرست باشد. بنابراین رابطه آن بصورت روبرو است: $p\to q\equiv\bar{p}+q$

ـ عملگر ترکیب دوشرطی یا هم‌ارزی ($p\leftrightarrow q$): اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه گزاره «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p» که ترکیب عطفیِ دو گزاره شرطی $p\to q$ و $q\to p$ می‌باشد را ترکیب دو شرطی دو گزاره p و q می‌نامیم. تنها در صورتی حاصل این عملگر درست است که دو گزاره p و q دارای ارزش یکسانی باشند، عبارت آن بصورت روبرو می‌باشد: $p\leftrightarrow q\equiv pq+\overline{p}\overline{q}$

مثال ۴: در کدام‌یک از زوج گزاره‌های P و Q داریم: $P\leftrightarrow Q$ ؟

۱) $P=p\wedge(\bar{q}\vee r),Q=p\vee(q\wedge\bar{r})$ ۲) $P=p\to q\,,Q=p\leftrightarrow q$

۳) $P=(p\to q)\wedge(q\to r)\,,\,Q=p\to r$ ۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۴» گزینه ۱ به صورت زیر می‌باشد.

p	q	$p\wedge(\bar{q}\vee r)$	$p\vee(q\wedge\bar{r})$
F	F	F	F
F	T	F	$\bar{r}$
T	F	T	T
T	T	r	T

همانطور که ملاحظه می‌کنید، در اینجا برای خلاصه‌نویسی، جدول صحت را براساس متغیرهای p و q نوشتیم ولی واضح است که دو عبارت مفروض در همه نقاط با هم برابر نمی‌باشند. بنابراین هم‌ارز نیستند. به همین ترتیب عدم هم‌ارزی بقیه گزینه‌ها را بررسی کنید.

نکته ۲: عملگر هم‌ارزی با عملگر XNOR معادل است.

جدول صحت عملگرهای توسعه یافته بصورت زیر می‌باشد:

p	q	$p\oplus q$	$p\odot q$	$p\downarrow q$	$p\uparrow q$	$p\to q$	$q\to p$	p/q	q/p	جابجایی q	جابجایی p
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱

چهار ستون آخر جدول فوق به ترتیب عملگرهای نهی (p اما نه q)، نهی (q اما نهp)، جابجایی q و جابجایی p می‌باشند، که فرمول آنها در زیر آمده است.

$p/q\equiv p\bar{q}$ q جابجایی =p

$q/p\equiv\bar{p}q$ p جابجایی =q

همچنین دو تابع ثابت ۰ و ۱ قابل تعریف هستند که تابع $F=0$ تابع خنثی و تابع $F=1$ تابع یکسانی می‌باشد.

نکته ۳: در مجموع، برای دو متغیر q و p در دو جدول قبل توانستیم ۱۶ تابع جبر بول با یک عملگر بسازیم. به‌طور کلی اگر n متغیر p_1، p_2، ... و p_n در منطق دودویی {۰,۱} داشته باشیم می‌توانیم 2^{2^n} تابع جبربول تعریف نماییم.

مثال ۵: اگر گزاره‌های p، q و r به ترتیب درست، نادرست و درست باشند کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست می‌باشد؟

۱) $(p\wedge q)\to r$ ۲) $(p\vee q)\to \overline{r}$ ۳) $p\wedge(q\to r)$ ۴) $p\to(q\to r)$

پاسخ: گزینه «۲»

$(T\wedge F)\to T\equiv F\to T=\text{true}\quad ;\quad (T\vee F)\to \overline{T}\equiv T\to F=\text{false}$

$T\wedge(F\to T)\equiv T\wedge T=\text{true}\quad ;\quad T\to(F\to T)\equiv T\to T=\text{true}$

◆◆◆◆

❖ **تعریف۴ : گزاره همواره نادرست یا تناقض:** گزاره‌ای است که ارزش آن همواره نادرست باشد. معمولاً آن را با F نمایش می‌دهند.

مثال ۶: کدام‌یک از گزاره‌های زیر تناقض نمی‌باشد؟

۱) $F_0=0$ ۲) $F_1=p\wedge\sim p$ ۳) $F_2=\sim(p\vee\sim p)$ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۴» تمام گزاره‌های داده شده تناقض می‌باشند و همواره نادرست هستند.

◆◆◆◆

مثال ۷: در منطق گزاره‌ها ....

۱) هر گزاره راستگو یک قضیه نمی‌باشد. ۲) هر قضیه یک گزاره‌ی راستگو نیست.

۳) هر قضیه یک گزاره‌ی راستگو است و بالعکس. ۴) در مورد راستگویی یک قضیه چیزی نمی‌توان گفت.

پاسخ: گزینه «۳» هر گزاره‌ی راستگو یک قضیه است و بالعکس می‌توان گفت که هر قضیه یک گزاره‌ی راستگو است زیرا آنچه که قضیه بیان می‌کند در همهٔ شرایط صادق است.

◆◆◆◆

مثال ۸: گزاره‌ی $\sim(\varphi\to\sim\varphi)$ کدام است؟

۱) همواره صادق است. ۲) با φ معادل است. ۳) همواره کاذب است. ۴) با $\sim\varphi$ معادل است.

پاسخ: گزینه «۲»

$\sim(\varphi\to\sim\varphi)\equiv\sim(\sim\varphi\vee\sim\varphi)\equiv\varphi$

◆◆◆◆

فرمول خوش شکل: یک فرمول خوش شکل منطقی را می‌توان به صورت بازگشتی زیر تعریف نمود:

۱ـ هر متغیر به تنهایی یک WFF است.

۲ـ اگر p و q ، WFF باشند آنگاه (p)، $\sim p$، $p\wedge q$ و $p\vee q$ نیز WFF هستند.

به عنوان مثال فرمول $(p\to q)\wedge(p\to r)$ یک WFF است، ولی فرمول $p\to q\vee(r\wedge)$ یک WFF نیست.

معمولاً برای ساخت یک فرمول خوش تعریف عملگرهای متنوعی در کنار هم قرار داده می‌شوند. به عنوان مثال عبارت $p+q.r$ را در نظر بگیرید. مساله‌ای که مطرح است این است که کدام‌یک از عملگرها را زودتر بررسی کنیم. به عنوان مثال اگر $r=F$ و $p=q=T$ آنگاه دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول: اگر ابتدا + و سپس . عمل کند آنگاه ارزش عبارت برابر False خواهد بود.

حالت دوم: اگر ابتدا . و سپس + عمل کند آنگاه ارزش عبارت برابر True خواهد بود.

جدول زیر را در نظر بگیرید:

نماد	عملگر
$(\,)$	پرانتز
$\sim$	نقیض
$\wedge$	ترکیب عطفی
$\vee$	ترکیب فصلی
$\to$	ترکیب شرطی
$\leftrightarrow$	ترکیب هم‌ارزی

اولویت از بالا به پایین کم می‌شود، یعنی بالاترین اولویت مربوط به پرانتز و کمترین آن مربوط به ترکیب هم‌ارزی می‌باشد. اگر دو عملگر در یک عبارت اولویت یکسانی داشته باشند، عملگری که در سمت چپ عملگر دیگر قرار گرفته است اولویت بالاتری دارد.

بعنوان مثال عبارت $p\to q\wedge r\vee s\to t$ را می‌توان به صورت زیر برحسب جدول فوق پرانتز بندی کرد. $((p\to((q\wedge r)\vee s))\to t)$

که این پرانتزبندی ترتیب اعمال عملگرها را بطور کامل نشان می‌دهد.

مثال ۹: تعداد فرمول های خوش تعریف به فرم $A_1 \to A_2 \to \sim A_3$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۴» تعداد زیرفرمول‌های خوش تعریف عبارت است از تعداد راه‌های پرانتزگذاری n متغیر که همانطور که در فصل شمارش خواهید دید این تعداد برابر است با عدد کاتالان و داریم:

$$C(3) = \frac{1}{3+1}\binom{6}{3} = 5$$

❖ تعریف۵ : گزاره همواره درست یا درستنما: گزاره‌ای است که همواره ارزش آن درست می‌باشد. معمولاً آن را با T نشان می‌دهند.

به عنوان مثال گزاره روبرو را در نظر بگیرید: «مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° می‌باشد»

از آنجایی که این گزاره همواره صحیح است بنابراین یک درستنما می‌باشد. به طور کلی، همه قضایایی که تا به حال در ریاضیات یا سایر دروس با آنها برخورد کرده‌اید، درستنما می‌باشند.

مثال ۱۰: کدام‌یک از گزاره‌های زیر درستنما نمی‌باشد؟

۱) $T_0 = 1$ ۲) $T_1 = p \vee \sim p$ ۳) $T_2 = \sim(p \wedge \sim p)$ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۴» تمام گزاره‌های داده شده درستنما می‌باشند و همواره صحیح می‌باشند.

در تمام حوزه‌های ریاضی لازم است بدانیم که در چه موقع موجودات مورد مطالعه ما برابر یا اساساً یکی هستند. به عنوان مثال در حساب و جبر دو عدد حقیقی غیر صفر وقتی برابرند که بزرگی و علامت جبری آن‌ها یکسان باشند یا این که در هندسه برای اثبات برابری دو مثلث از قضایای همنهشتی استفاده می‌کنیم.

به مطالعه منطق اغلب مطالعه جبر گزاره‌ها گفته می‌شود. در این جبر نیاز است که بررسی کنیم در چه هنگام دو گزاره برابر هستند، بنابراین برای این کار از قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. البته همواره می‌توان از رسم جدول صحت نیز استفاده کرد ولی این راه زمانبر است.

قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها: دو گزاره را هم‌ارز گویند هرگاه ارزش آنها در تمام مواقع باهم برابر باشد و با نماد $\equiv$ یا $\Leftrightarrow$ نمایش می‌دهیم. از هم‌ارزی گزاره‌ها برای ساده‌سازی آنها استفاده می‌شود. قوانین هم‌ارزی در زیر آمده‌اند. در اینجا p و q دو گزاره می‌باشند و منظور از T و F به ترتیب درستنما و تناقض می‌باشد.

۱ـ قانون نقیض مضاعف: این قانون بدین معناست که نقیض نقیض یک گزاره با خود آن گزاره هم‌ارز است: $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$

۲ـ قوانین دمورگان: این قانون در ساده‌سازی مدارهای منطقی و عبارت‌های ریاضی بسیار پرکاربرد است. این قانون بصورت زیر می‌باشد:

$$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q} \qquad \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

بطور خلاصه این قانون بدین معناست که متمم ANDهای (ORهای) دو گزاره با ORهای (ANDهای) متمم آن دو گزینه برابر است. این قانون را می‌توان به سادگی برای چند گزاره نیز استفاده نمود.

۳ـ قوانین جابجایی: عملگرهای AND و OR منطقی دارای خاصیت جابجایی هستند یعنی می‌توان جای عملوندهای آنها را نسبت به یکدیگر تعویض نمود. این کار به صورت زیر قابل انجام است:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \qquad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

۴ـ قوانین شرکت‌پذیری: عملگرهای AND و OR منطقی دارای خاصیت شرکت‌پذیری می‌باشند، یعنی می‌توان عملگرها را به ترتیب دلخواه روی عملوندها تاثیر داد. به همین دلیل اگر پرانتزگذاری نیز انجام نشود، ارزش کلِ گزاره تغییر نمی‌کند.

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \qquad p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

نکته ۴: گزاره‌هایی چون $p \wedge q \wedge r$ و $p \vee q \vee r$ بدلیل همین قانون فاقد ابهام می‌باشند. زیرا ترتیب اعمال عملگرها در آن‌ها نتایج یکسانی بر دارد.

۵ـ قوانین توزیع‌پذیری: قانون توزیع‌پذیری یا بخش‌پذیری به معنای پخش‌شدن عملگر AND روی عملگر OR یا پخش شدن عملگر OR روی عملگر AND می‌باشد که به صورت مقابل می‌باشد:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

۶ـ قوانین خودتوانی: این قانون به معنای آن است که اگر چند بار یک گزاره را با خودش AND یا OR کنیم، نتیجه برابر خود آن گزاره می‌شود:

$$p \vee p \Leftrightarrow p \quad ; \quad p \wedge p \Leftrightarrow p$$

۷ـ قوانین همانی: این قانون بدین معناست که حاصل OR هر گزاره با یک تناقض برابر خودش می‌شود و همچنین حاصل AND کردن هر گزاره با یک گزاره همواره درست (درستنما) برابر خودش می‌شود.

$$P \vee F \Leftrightarrow P \quad ; \quad P \wedge T \Leftrightarrow P$$

۸ـ قوانین وارون: حاصل OR (AND) یک گزاره با متممش همواره برابر True (False) است:

$$p \vee \sim p \Leftrightarrow T$$

$$p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$$

۹ـ قوانین غلبه: این قانون به معنای غلبه True در عمل OR و غلبه False در عمل AND می‌باشد:

$$P \vee T \Leftrightarrow T$$

$$P \wedge F \Leftrightarrow F$$

۱۰ـ قوانین جذب: قانون جذب یکی از پرکاربردترین قوانین در حساب گزاره‌ها می‌باشد که به صورت زیر است:

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \quad ; \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

برای بررسی صحت رابطه جذب، رابطه $p \vee (p \wedge q)$ را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر p برابر True باشد آنگاه طبق قانون غلبه، حاصل $p \vee (p \wedge q)$ برابر True خواهد بود که همان ارزش p است.

حالت دوم: اگر p برابر False باشد آنگاه طبق قانون غلبه، $p \wedge q$ دارای ارزش False خواهد بود و $p \vee (p \wedge q)$ نیز دارای ارزش False خواهد بود که همان ارزش p است.

بنابراین همانطور که ملاحظه شد، در هردو حالت ارزش عبارت $p \vee (p \wedge q)$ برابر ارزش p می‌باشد، بنابراین این دو گزاره هم‌ارز هستند.

۱۱ـ قوانین شبه جذب: این قانون بسیار شبیه به قانون جذب می‌باشد و نباید آنها را با یکدیگر اشتباه گرفت:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q \quad ; \quad p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$$

روابط فوق را می‌توان با استفاده از قوانینی توزیع‌پذیری و همانی اثبات نمود:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow T \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee q$$

$$p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow F \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$$

❖ **تعریف۶: دوگان یک گزاره،** گزاره‌ای است که از تبدیل $\wedge$ به $\vee$ ، T به F ، ۰ به ۱ و بالعکس بدست می‌آید. اگر S یک گزاره باشد، دوگان آن را با S^d نشان می‌دهیم.

بعنوان مثال اگر $S:(p \wedge q) \wedge (r \vee T) = ۱$ آنگاه S^d به صورت مقابل خواهد بود:

$$S^d : (p \vee q) \vee (r \wedge F) = ۰$$

توجه داشته باشید که ارزش دوگان یک عبارت هیچ رابطه‌ای با ارزش خود آن عبارت ندارد، یعنی ممکن است در برخی از مواقع، ارزش عبارت و ارزش دوگانش با هم برابر باشد و در برخی مواقع مخالف هم باشند. هدف از تعریف دوگان استفاده از اصل دوگانی برای هم ارزی‌های گزاره‌ها می‌باشند.

اصل دوگانی: اگر $S_۱$ و $S_۲$ دو گزاره باشند از همارزی $S_۱$ و $S_۲$ می‌توان هم‌ارزی $S_۱^d$ و $S_۲^d$ را نتیجه گرفت.

اگر هر یک از قوانینی که در بالا ذکر شد را در نظر بگیریم، آنگاه با دوگان گرفتن از دو طرف آن به یک قانون جدید می‌رسیم.

به عنوان مثال قانون جذب همانطور که ذکر شد به صورت $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ است. اگر از دو طرف این رابطه دوگان بگیریم داریم:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید این قانون را نیز به عنوان قانون جذب ذکر کرده بودیم. پس کافیست برای بخاطر سپردن قانون‌های فوق تنها در هر مورد یکی از آنها را به یاد داشته باشیم.

اگر n متغیر دودویی داشته باشیم مینترم و ماکسترم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

مینترم‌ها و ماکسترم‌ها

یک تابع N متغیره را در نظر بگیرید که در آن هریک از متغیرها می‌توانند دارای ارزش درستی یا نادرستی باشند. مینترم‌ها و ماکسترم‌های یک تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

❖ **تعریف۷: مینترم** جمله‌ای است حاصلضربی که در آن هر متغیر یا مکمل آن دقیقاً یک بار ظاهر شده باشد. اگر n متغیر دودویی داشته باشیم ۲^n مینترم مختلف خواهیم داشت. مینترم‌ها را با m_i نشان می‌دهند.

به عنوان مثال با در نظر گرفتن $n = ۲$، مینترم‌های مختلف بصورت زیر خواهند بود:

$$m_۰ = \overline{a}\overline{b} \ , \ m_۱ = \overline{a}b \ , \ m_۲ = a\overline{b} \ , \ m_۳ = ab$$

❖ **تعریف۸: ماکسترم** جمله‌ای است حاصل‌جمعی، که در آن هر متغیر یا مکمل آن دقیقاً یک بار ظاهر شده باشد. مانند مینترم‌ها اگر n متغیر داشته باشیم ۲^n ماکسترم خواهیم داشت. ماکسترم‌ها را با M_i نشان می‌دهند. به عنوان مثال با در نظر گرفتن $n = ۲$ ماکسترم‌های مختلف به صورت زیر خواهند بود:

$$M_۰ = a + b \ , \ M_۱ = a + \overline{b} \ , \ M_۲ = \overline{a} + b \ , \ M_۳ = \overline{a} + \overline{b}$$

نکته ۵: ماکسترم M_i مکمل مینترم m_i است، (براساس قانون دمورگان) بنابراین: $M_i = \overline{m_i}$

هر تابع را می‌توان به صورت حاصل جمع مینترم‌ها یا حاصلضرب ماکسترم‌ها نوشت. کافیست برای این کار جدول صحت تابع را رسم کنیم و از روی آن مینترم‌ها و ماکسترم‌ها را تشخیص دهیم. اگر بخواهیم تابع را به صورت حاصل جمع مینترم‌ها بنویسیم باید در سطرهایی که ارزش تابع برابر یک شده است مینترم‌های متناظر را بنویسیم و تمام مینترم‌ها را در آخر با هم جمع کنیم و برای نوشتن مقدار تابع به فرم حاصلضرب ماکسترم‌ها باید در جاهایی که ارزش تابع برابر صفر شده است ماکسترم‌های متناظر را بنویسیم و در آخر ماکسترم‌ها را در هم ضرب کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم تابع $f(x,y,z) = xy + yz + \bar{x}z$ را به فرم حاصل جمع مینترم‌ها و حاصلضرب ماکسترم‌ها بنویسیم بایستی ابتدا جدول صحت را بصورت روبرو رسم کنیم.

x	y	z	f(x,y,z)
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

مشاهده می‌شود که این تابع برای مینترم‌های m_1, m_3, m_6, m_7 مقدار یک و برای ماکسترم‌های M_0, M_2, M_4, M_5 مقدار صفر را تولید می‌کند. از آنجایی که مینترم m_i مکمل ماکسترم m_i است، انتخاب هر کدام از مجموعه‌های فوق (حاصلضرب ماکسترم‌ها یا حاصلجمع مینترم‌ها) می‌توانند نشان دهنده تابع f باشد.

حال فرم‌های موردنظر را از روی جدول صحت بصورت زیر بدست می‌آوریم:

فرم حاصل جمع مینترم‌ها: $f(x,y,z) = m_1 + m_3 + m_6 + m_7 = \sum_{i=\{1,3,6,7\}} m_i$

فرم حاصلضرب ماکسترم‌ها: $f(x,y,z) = M_0 . M_2 . M_4 . M_5 = \prod_{i=\{0,2,4,5\}} M_i$

فرم‌های نرمال

هر تابع منطقی را می‌توان به فرم‌های مختلفی بیان نمود. برای آنکه بتوان دو تابع منطقی را با هم مقایسه نمود از فرم‌های نرمال استفاده می‌کنیم. انواع فرم‌های نرمال عبارتند از:

۱ـ (DNF) صورت نرمال ترکیب فصلی:

گزاره‌ای که به فرم جمع حاصلضرب‌ها نوشته شود را، فرم نرمال DNF گوییم. به عنوان مثال عبارت زیر یک عبارت DNF می‌باشد:

$$(p \wedge r) \vee (\sim q \wedge t)$$

۲ـ (CNF) صورت نرمال ترکیب عطفی:

گزاره ای که به فرم ضرب حاصل جمع‌ها نوشته شود را، فرم نرمال CNF گوییم. به عنوان مثال عبارت زیر یک CNF می‌باشد.

$$(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim t)$$

۳ـ (PDNF): صورت نرمال اساسی ترکیب فصلی:

اگر گزاره‌ای به فرم جمع مینترم‌ها نوشته شود به آن PDNF گویند. به عنوان مثال عبارت زیر به فرم جمع مینترم‌هاست.

$$F(x_1, x_2, x_3) = m_0 + m_5 + m_7$$

۴ـ (PCNF) : صورت نرمال اساسی ترکیب عطفی:

اگر گزاره‌ای به فرم ضرب ماکسترم‌ها نوشته شود به آن PCNF گویند. به عنوان مثال عبارت زیر به فرم PCNF می‌باشند:

$$F(x_1, x_2, x_3) = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \times M_6$$

مثال۱۱: فرم PCNF عبارت $(p \to r) \wedge (p \leftrightarrow q)$ کدام است؟

۱) $\sum m(0,1,7)$　　۲) $\sum m(2,5,7)$　　۳) $\prod m(2,3,4,5,6)$　　۴) $\prod m(0,1,3,4,6)$

پاسخ: گزینه «۳» برای این کار ساده ترین راه رسم جدول صحت تابع می‌باشد که به صورت زیر است:

در جاهایی که عبارت داده شده برابر صفر می‌باشد، ماکسترم دارد، بنابراین داریم:

$$\text{عبارت} = \prod M(2,3,4,5,6)$$

p	q	r	عبارت
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱

❖ **تعریف۹: تابع ارزش:** تابعی است که به هر گزاره، ارزش آن را منتسب می‌کند، بنابراین دامنه این تابع مجموعه همه گزاره‌ها و بُرد این تابع مجموعه $\{0,1\}$ است که صفر، متناظر با False بودن گزاره و یک متناظر با True بودن گزاره می‌باشد.

مثال۱۲: فرض کنید $V : P \to \{0,1\}$ یک تابع ارزش و P مجموعه گزاره‌های اتمی (گزارهٔ ساده که غیر قابل تجزیه هستند) نباشد. در اینصورت $V(A \vee B)$ عبارت است از:

۱) $\min\{V(A), V(B)\}$ ۲) $V(A) + V(B)$ ۳) $V(A).V(B)$ ۴) $\max\{V(A), V(B)\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع V به گزاره‌هایی با ارزش True مقدار ۱ و به گزاره‌هایی با ارزش False مقدار صفر می‌دهد بنابراین اگر A و B دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب $A \vee B$ زمانی صحیح خواهد بود که یکی از دو گزاره‌ی A یا B صحیح باشند. همچنین داریم:

$$V(A \wedge B) = \min\{V(A), V(B)\} = V(A).V(B) \quad ; \quad V(\sim A) = 1 - V(A)$$

گزینه ۲ نیز به این علت صحیح نیست که در هنگامی که هر دو گزاره A و B ارزش True داشته باشند، ارزش گزاره مرکب $A \vee B$، ۲ خواهد شد که قابل قبول نیست.

مثال۱۳: فرض کنید $h : P \to \{0,1\}$ یک تابع ارزش باشد و A گزاره‌ای باشد که $h(A) = 1$ در اینصورت:

۱) A همواره صادق است. ۲) $\sim A$ همواره صادق نیست.

۳) $\sim A$ همواره صادق است. ۴) نمی‌توان دربارهٔ $\sim A$ اظهارنظر کرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» h یک تابع ارزش است و داریم: $h(A) = 1$ درست ; $h(A) = 0$ نادرست

بنابراین $h(A) = 1$ همواره صحیح است.

❖ **تعریف۱۰: استلزام منطقی:** اگر گزاره $p \to q$ یک درستنما باشد آنگاه می‌گوییم p مستلزم منطقی q است و آن را به صورت $p \Rightarrow q$ می‌نویسیم.

همانطور که در ابتدای فصل نیز اشاره شد، هدف از بررسی منطق، بررسی صحت استلزام‌های منطقی می‌باشد. جملات زیر توجه کنید:

«امروز جمعه است، بنابراین علی غمگین است»

گزاره استنتاج: گزاره B نتیجه منطقی گزاره‌های $A_1, ..., A_m$ است، ($A_1, ..., A_m$ همه دارای ارزش‌های راست می‌باشند) هرگاه ارزش B نیز راست باشد.

گزاره B، نتیجه $A_1, A_2, ..., A_m$ است را با علامت $(A_1, A_2, ..., A_m \vdash B)$ نمایش می‌دهیم.

اگر کسی علی را نشناسد و هیچ فرض دیگری نسبت به علی نداشته باشد با شنیدن این جملات که به نوعی یک استلزام می‌باشد، بیان می‌کند که غیرمنطقی هستند. در این استلزام دو جمله وجود دارد که جمله «امروز جمعه است» فرض و جمله «علی غمگین است» حکم این استلزام می‌باشد. از آنجایی که در این جملات نمی‌توان به طور منطقی از فرض به حکم رسید بنابراین نمی‌توان صحت آن را اثبات نمود. حال جملات زیر را در نظر بگیرید:

«امروز جمعه است. سینماها در روز جمعه تعطیل می‌باشد. اگر روزی علی به سینما نرود غمگین می‌شود. بنابراین علی غمگین است»

این استلزام به وضوح صحیح است و نشان از منطقی بودن گوینده آن دارد. در این بخش هدف بررسی استلزام‌های منطقی و اثبات صحت آنها می‌باشد. برای اثبات یک استلزام منطقی می‌توان از یکی از دو روش زیر استفاده کرد.

ـ **اثبات مستقیم:** فرض می‌کنیم که فرض‌های p همه صحیح باشند، اثبات می‌کنیم که با این مفروضات حکم q صحیح است.

ـ **اثبات به روش برهان خلف:** فرض می‌کنیم که حکم q نادرست باشد، اثبات می‌کنیم که در این شرایط حداقل یکی از مفروضات p نادرست هستند.

هر تئوری ریاضی متشکل از اصول موضوع، تعاریف و اصطلاحات تعریف نشده می‌باشد. اصول موضوع بنا به فرض درست هستند. از تعاریف برای ایجاد مفاهیم جدید بر حسب مفاهیم موجود استفاده می‌شود. برخی از اصطلاحات به صورت صریح تعریف نمی‌شوند اما می‌توان آن‌ها را به صورت ضمنی بر حسب اصول موضوع تعریف نمود. در یک دستگاه ریاضی می‌توان قضایایی را استنتاج کرد. قضیه گزاره‌ای است که درستی آن ثابت شده است. انواع خاصی از قضیه‌ها، لم و نتایج فرعی نامیده می‌شوند. لم قضیه‌ای است که ممکن است خیلی جالب نباشد اما در اثبات یک قضیه دیگر کاملاً مفید است. نتیجه فرعی قضیه‌ای است که بلافاصله بعد از یک قضیه دیگر به دست می‌آید.

استدلالی که درستی یک قضیه را نشان می‌دهد اثبات نامیده می‌شود. منطق ابزاری برای تصمیم‌گیری در مورد تجزیه و تحلیل اثبات‌ها است. در این جا از منطق برای تجزیه و تحلیل درستی یا نادرستی استدلال‌ها بهره می‌بریم.

قوانین استلزام منطقی در زیر آمده‌اند. فرض بر این است که p و q دو گزاره هستند و منظور از نماد $\therefore$ نتیجه‌گیری منطقی از مفروضاتی است که در بالای خط نوشته شده‌اند، عبارتی که در پایین خط نوشته شده است حکم و نتیجه (q) می‌باشد.

(در این قوانین فرض بر این است که بین مفروضات ترکیب عطفی AND قرار دارد.)