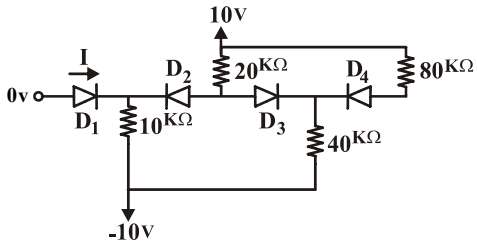
آزمون (۱)

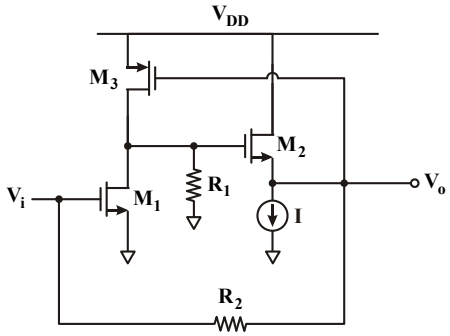
الکترونیک ۱ و ۲ و سیستم‌های دیجیتال

۱ـ در مدار شکل زیر تمامی دیودها ایده‌آل هستند. جریان I برابر است با:



۱) ۰ mA
۲) ۰/۶۵۲ mA
۳) ۰/۶۲۵ mA
۴) ۱ mA

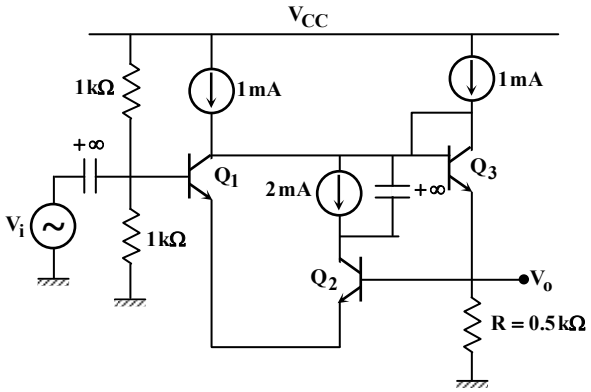
۲ـ در مدار شکل زیر بهره تقویت‌کننده کدام گزینه است؟ $(r_o = \infty)$



۱) $\frac{1-g_2R_2g_1R_1}{1+g_2R_2+g_2R_2R_1g_3}$
۲) $\frac{1+g_2R_2g_3R_1}{1+g_1R_1+g_2R_2R_1g_1}$
۳) $\frac{1-g_3R_1g_2R_2}{1+g_1R_1+g_2R_2g_1R_1}$
۴) $\frac{1+g_3R_1g_2R_2}{1+g_2R_2+R_2g_2R_1g_3}$

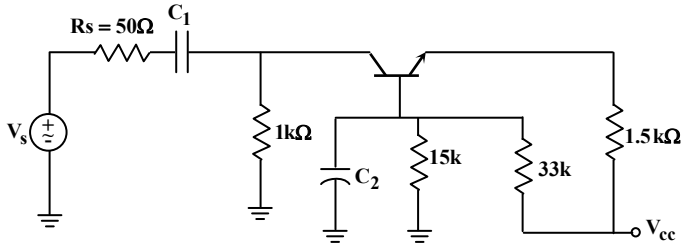
۳ـ در شکل زیر، ترانزیستورها در ناحیه‌ی فعال بایاس شده‌اند. بهره‌ی ولتاژ $A_V = \frac{V_o}{V_i}$ کدام است؟ (منابع جریان ایده‌آل)

$V_T = 25mv \ , \ V_A = +\infty \ , \ \beta_1 = 19 \ , \ \beta_2 = 99 \ , \ \beta_3 = 199$



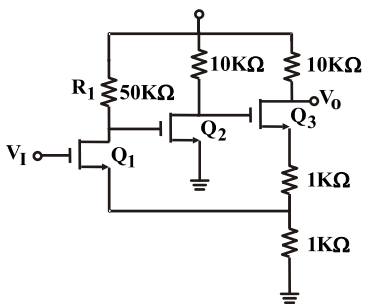
۱) ۰/۲
۲) −۰/۲
۳) ۰/۴
۴) −۰/۴

۴ـ در مدار شکل زیر، خازن C_1 حداقل چقدر باشد تا فرکانس قطع پایین مدار ۵۰Hz گردد؟ $(h_{ie} = 1/1k\Omega \ , \ h_{fe} = 100)$



۱) ۲۷
۲) ۵۲
۳) ۶۸
۴) ۱۰۰

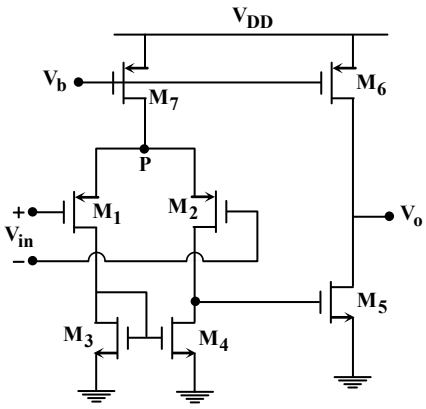
۵ـ در مدار شکل زیر بهره $\frac{V_o}{V_I}$ چقدر است؟



$\beta = 200$
$g_m = 2\frac{mA}{v}$ و $V_A \to \infty$

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۱
۴) ۱۰۰

۶ـ در مدار زیر، با فرض فعال بودن ترانزیستورها، بهره $\frac{V_o}{V_{in}}$ کدام است؟

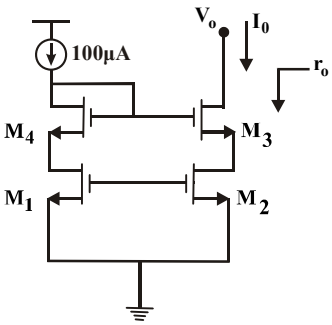


$g_m = ۱ms$
$r_o = ۱۰k$

۱) -۲۵
۲) $+۲۵$
۳) -۵۰
۴) $+۵۰$

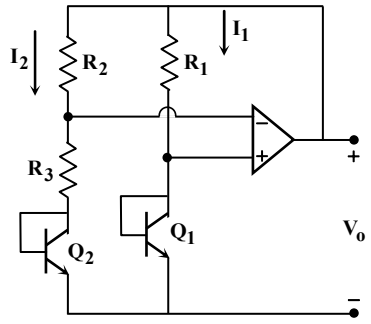
۷ـ در مدار شکل زیر، حداقل ولتاژ خروجی و مقدار مقاومت خروجی در کدام گزینه آمده است؟

$(V_A = ۱/۸V)$ و $(V_t = ۰/۵\,v\ ,\ \mu_۸cox = ۰/۳۸\frac{mA}{V^۲}\ ,\ \frac{w}{L} = ۱۰)$



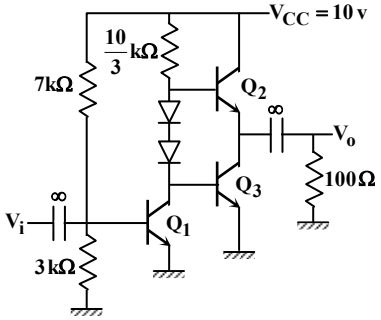
۱) $r_o = ۲۸k\Omega$, $V_{omin} = ۰/۶V$
۲) $r_o = ۲۹۰k\Omega$, $V_{omin} = ۰/۴۵V$
۳) $r_o = ۱۷۰k\Omega$, $V_{omin} = ۰/۸V$
۴) $r_o = ۸۰k\Omega$, $V_{omin} = ۰/۲V$

۸ـ در مدار زیر با فرض مشابه بودن ترانزیستورها، بزرگ بودن β و ایده‌آل بودن آپ‌امپ، مقدار جریان $I_۲$ کدام است؟



۱) $\frac{V_T}{R_۳}Ln\frac{R_۱}{R_۲}$
۲) $\frac{V_T}{R_۱}Ln\frac{R_۲}{R_۳}$
۳) $\frac{V_T}{R_۲}Ln\frac{R_۱}{R_۳}$
۴) $\frac{V_T}{R_۳}Ln\frac{R_۲}{R_۱}$

۹ـ بازده توان کل مدار زیر تقریباً چند درصد است؟



$\beta = ۱۰۰$
$|V_{BE(on)}| = V_{D(on)} = ۱v$
$|V_{CE(sat)}| = ۰/۵\,v$

۱) ۲۵
۲) ۵۵
۳) ۴۰
۴) ۷۰

پاسخنامه آزمون (۱)

الکترونیک ۱ و ۲ و سیستم‌های دیجیتال

۱ـ گزینه «۳» همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید چون ولتاژها از بالا به پایین کاهش می‌یابند، انتظار داریم همه دیودها $D_۴$ و $D_۳$ و $D_۲$ و $D_۱$ روشن باشند. لذا با این فرض مسأله را حل می‌کنیم.

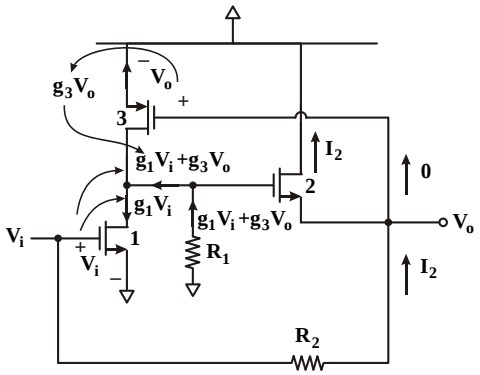
$$I_{D_۴}=\frac{۱۰-۰}{۸۰\,k\Omega}=\frac{۱}{۸}mA$$

$$I_{D_۴}+I_{D_۳}=\frac{۰-(-۱۰)}{۴۰}=\frac{۱}{۴}mA\ \rightarrow\ I_{D_۳}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۸}\ mA$$

$$I_{D_۲}+I_{D_۳}=\frac{۱۰-۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}mA\ \rightarrow\ I_{D_۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}\ mA$$

$$I+I_{D_۲}=\frac{۰-(-۱۰)}{۱۰}=۱\ mA\ \Rightarrow\ I=۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}mA\ \Rightarrow\ I=۰/۶۲۵\ mA$$

۲ـ گزینه «۱» برای این گونه مدارها با استفاده از مدار معادل ac و استفاده از KVL و KCL خواسته مسأله را به‌دست می‌آوریم.



$$V_{gs_۲}=-(g_۱V_i+g_۳V_o)\times R_۱-V_o$$

$$V_{gs_۲}=-[(g_۱R_۱V_i+(۱+g_۳R_۱)V_o)]$$

$$I_۲=-g_۲V_{gs_۲}$$

$$I_۲=g_۲[g_۱R_۱V_i+(۱+g_۳R_۱)V_o]\qquad (I)$$

$$I_۲=\frac{V_i-V_o}{R_۲}\qquad (II)$$

$$(I),(II)\ \Rightarrow\frac{V_i-V_o}{R_۲}=g_۲[g_۱R_۱V_i+(۱+g_۳R_۱)V_o]$$

$$V_i-V_o=g_۲R_۲g_۱R_۱V_i+(g_۲R_۲+g_۲R_۲g_۳R_۱)V_o$$

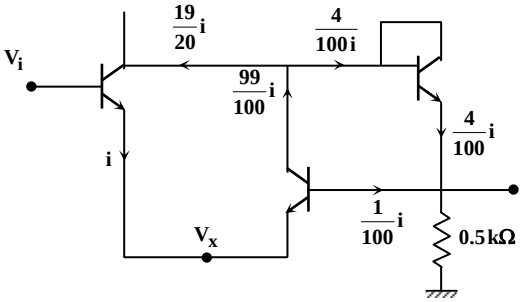
$$\frac{V_o}{V_i}=\frac{۱-g_۲R_۲g_۱R_۱}{۱+g_۲R_۲+g_۲R_۲g_۳R_۱}$$

۳ـ گزینه «۳» تحلیل dc:

$$i_{C_۱}=۱mA\qquad i_{C_۲}=۲mA\qquad i_{C_۳}=۱mA$$

$$g_{m_۱}=۴۰\qquad g_{m_۲}=۸۰\qquad g_{m_۳}=۴۰$$

تحلیل ac: با توجه به مدار در حالت ac و جریان ولتاژهای مشخص شده، داریم:



$$V_o=\frac{۵}{۱۰۰}i\times\frac{۱}{۲}=\frac{i}{۴۰}$$

$$g_{m_۱}(V_i-V_x)+g_{m_۲}(V_o-V_x)=۰$$

$$\frac{V_i+۲V_o}{۳}=V_x\ \rightarrow\ i=g_{m_۱}(V_i-V_x)=\frac{۴۰}{۳}(۲V_i-۲V_o)=\frac{۸۰}{۳}(V_i-V_o)$$

$$V_o=\frac{i}{۴۰}=\frac{۲}{۳}(V_i-V_o)\ \rightarrow\ ۳V_o=۲V_i-۲V_o\ \rightarrow\ ۵V_o=۲V_i\ \rightarrow\ \frac{V_o}{V_i}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

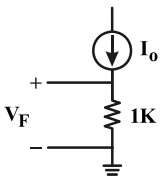
$$AV=۰/۴$$

۴ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه خازن امیتر، قطب غالب محسوب می‌شود لذا نیازی به بررسی خازن $C_۲$ نمی‌باشد. همچنین خازن $C_۱$ از نوع تزویج است، بنابراین $f_z = ۰$ است، لذا:

$$f_L = f_P = \frac{۱}{۲\pi R' C_۱}$$

$$R' = ۵۰\Omega + ۱k \,||\, (\frac{۱/۱k}{۱۰۰}) = ۶۱\Omega \quad , \quad ۵۰ = \frac{۱}{۲\pi ۶۱\Omega C_۱} \Rightarrow C_۱ = \frac{۱}{۲\pi ۶۱\Omega \times ۵۰} = ۵۲/۴\mu F$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا مدار فیدبک را تشکیل می‌دهیم. (فیدبک از نوع جریان ـ سری است)



$$\frac{V_F}{I_o} = ۱ = B$$

حال مدل منبع ولتاژ را به مدل جریان تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{V_o}{V_{in}} = ۱۰ \frac{I_o}{\underbrace{V_I}_{۱}} = ۱۰$$

۶ـ گزینه «۱»

$$\frac{V_x}{V_{in}} = +g_{m_{۱,۲}}(r_{o_۲} \,||\, r_{o_۴}) = \frac{g_m r_o}{۲} = +۵ \quad , \quad \frac{V_o}{V_x} = -g_{m_۵}(r_{o_۵} \,||\, r_{o_۶}) = -\frac{g_m r_o}{۲} = -۵$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{V_o}{V_x} \times \frac{V_x}{V_{in}} = -۲۵$$

۷ـ گزینه «۲» مدار فوق آینه‌ی جریان کاسکود می‌باشد:

$$I_{D_۱} = I_{D_۲} = I_{D_۳} = I_{D_۴} = ۱۰۰\mu A$$

$$I_D = \frac{۱}{۲}\mu_n C_{ox} (\frac{W}{L})(V_{GS} - V_T)^۲ \Rightarrow ۰/۱ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۴ \times ۱۰ (V_{GS} - V_T)^۲ \Rightarrow ۰/۱ = ۲(V_{GS} - V_T)^۲ \Rightarrow V_{GS} - V_T = ۰/۲۲۴v$$

ولتاژ خروجی تا جایی پایین می‌آید که ترانزیستورهای $M_۲$ و $M_۳$ اشباع بمانند: $(V_{DS} = V_{GS} - V_T)$

$$\rightarrow V_{o\,min} = ۲V_{DS} \simeq ۰/۴۵V$$

$$g_{m_۳} = \frac{۲I_{D۳}}{\frac{(V_{GS} - V_t)}{۲}} = ۰/۹ \frac{mA}{V} \qquad r_o = \frac{۱/۸}{۰/۱\,mA} = ۱۸\,k\Omega$$

$$\Rightarrow r_o \approx g_{m_۳} \times r_{o۳} \times r_{o۲} = ۰/۹ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۸k \times ۱۸k \cong ۲۹۰k\Omega$$

۸ـ گزینه «۴» چون آپ‌امپ ایده‌آل است، لذا $V_{(-)} = V_{(+)}$. بنابراین داریم:

$$I_۱R_۱ = I_۲R_۲ \qquad (۱)$$

از طرفی دیگر داریم:

$$I_۲R_۳ + V_{BE_۲} = V_{BE_۱} \Rightarrow V_{BE_۱} - V_{BE_۲} = I_۲R_۳ \Rightarrow V_T Ln\frac{I_۱}{I_۲} = I_۲R_۳ \qquad (۲)$$

$$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow V_T Ln\frac{R_۲}{R_۱} = I_۲R_۳ \Rightarrow I_۲ = \frac{V_T}{R_۳} Ln\frac{R_۲}{R_۱}$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا با تحلیل dc ولتاژ خازن را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم:

$$V_{B۱} = \frac{۳}{۳+۷} \times ۱۰ = ۳v \quad , \quad V_{E۱} = V_{B۱} + |V_{BE}| = ۴v$$

$$V_{B۲} = V_{E۱} + ۲V_D = ۶v \quad , \quad V_{C۱} = V_{B۲} - V_{BE۱} = ۵v$$

مقدار نیم سیکل مثبت محدودیت را به صورت زیر بررسی می‌نماییم:

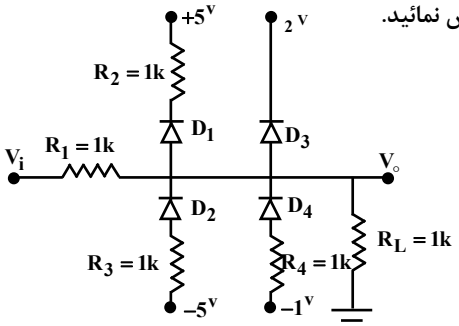
$$V_{CC} = \frac{۱۰}{۳}\frac{I_C}{\beta} + V_{BE} + V_C + ۰/۱I_C \Rightarrow I_C = (V_{CC} - V_C - V_{BE۲}) \times \frac{۱}{۰/۱ + \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۱}{۱۰۰}}$$

$$V_o^+ = R_L I_C = ۳v \quad , \quad \eta = \frac{\pi}{۴}\frac{V_o}{V_{CC}} = ۲۵\%$$

آزمون (۴)

الکترونیک ۱ و ۲ و سیستم‌های دیجیتال

۱ـ V_i به صورت پله‌ای از -۱۰ ولت به $+۱۰$ ولت می‌رسد. با فرض ایده‌آل بودن دیودها V_o را مشخص نمائید.



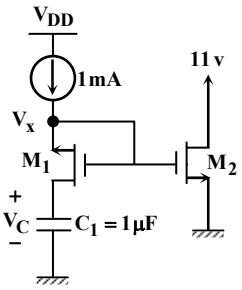
۱) $-۴ < V_o < ۲$

۲) $-۲ < V_o < ۳/۶$

۳) $-۳/۶ < V_o < ۲$

۴) $-۲ < V_o < ۲$

۲ـ در مدار شکل زیر، ترانزیستورها مشابه‌اند و ولتاژ اولیه خازن صفر است. پس از چه مدت (ms) ترانزیستور $M_۲$ وارد ناحیه اهمی می‌شود؟



$k_۱ = k_۲ = ۱\frac{mA}{V^۲}$

$V_t = ۲\,v$

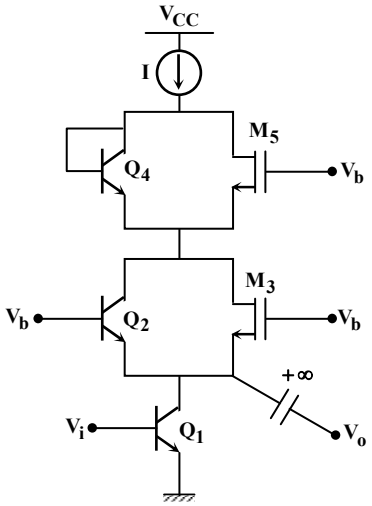
۱) ۶

۲) ۱۰

۳) ۹

۴) ۱۱

۳ـ در مدار شکل زیر، بهره‌ی ولتاژ $A_v = \frac{V_o}{V_i}$ کدام است؟ ($Q_۱$: BJT و $Q_۲$ در ناحیه‌ی فعال و ماسفت‌ها در ناحیه‌ی اشباع بایاس شده‌اند. منبع جریان ایده‌آل است.)



$r_o = ۱۰\,k\Omega$

$g_{m_۱} = ۴۰$

$g_{m_۲} = ۹۰$

$g_{m_{۳,۴,۵}} = ۱۰$

$\beta = ۱۰۰$

$r_{ds} = ۱۰\,k\Omega$

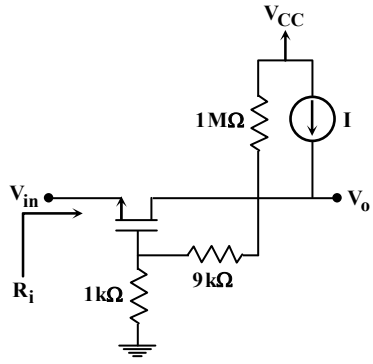
۱) -۱۰۰

۲) -۵۰

۳) -۱۰

۴) -۵

۴ـ در مدار بایاس شده، اگر $g_m = ۱۰^{-۳}\,s$ باشد، مقاومت R_i چند کیلو اهم است؟ $(r_o \to \infty)$



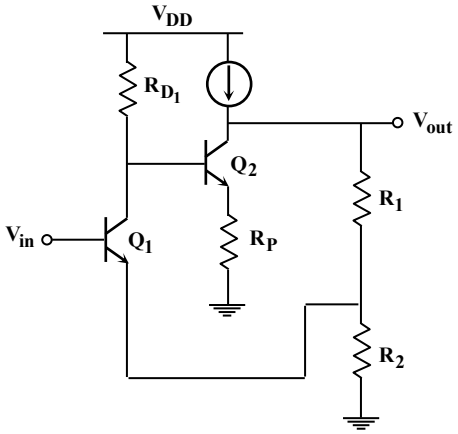
۱) ۲

۲) ۱

۳) ۵

۴) ۱۰

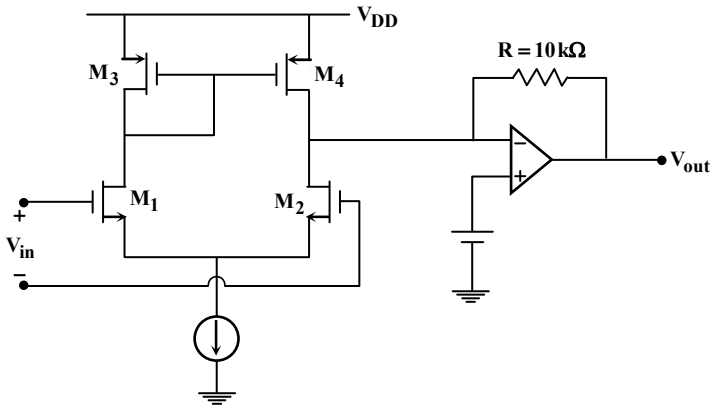
۵ـ در مدار نشان داده شده مقدار بهره $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ کدام است؟



$V_A = \infty$
$\beta \gg ۱۰۰$
$R_۱ = R_{D_۱} = R_۲ = ۱۰\,k\Omega$
$g_{m_۱} = g_{m_۲} = ۴۰\frac{mA}{V}$
$R_P = ۱۰\,k\Omega$

۱) ۲
۲) -۲
۳) -۴
۴) ۴

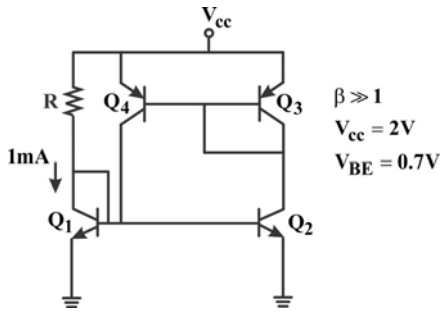
۶ـ بهره ولتاژ $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ مدار زیر کدام است؟



$\begin{cases} g_m = ۱ms \\ r_o = \infty \end{cases}$

۱) -۱۰
۲) -۵
۳) -۲۰
۴) -۱۵

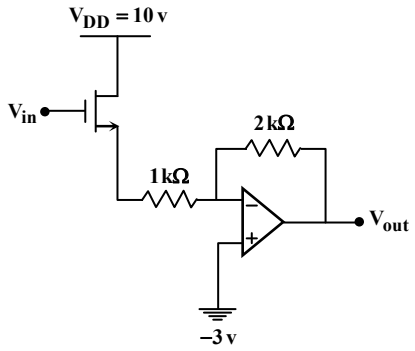
۷ـ در مدار زیر مساحت پیوند بیس امیتر $Q_۲$، ۲ برابر $Q_۱$ و مساحت پیوند بیس امیتر $Q_۳$، ۳ برابر $Q_۴$ است. اگر $I_{C_۱} = ۱mA$ باشد، مقاومت R برابر با چه مقداری است؟



$\beta \gg 1$
$V_{cc} = 2V$
$V_{BE} = 0.7V$

۱) ۳/۹kΩ
۲) ۲kΩ
۳) ۱/۳kΩ
۴) ۲/۳kΩ

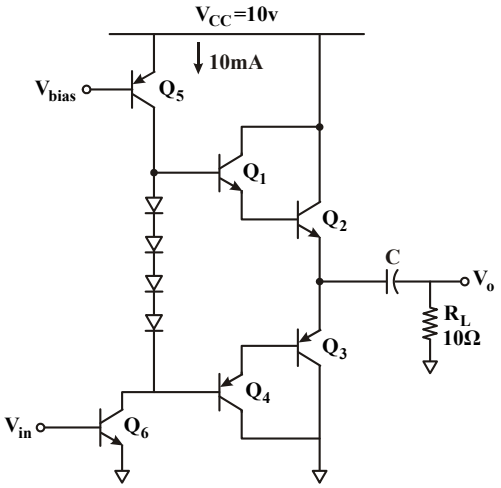
۸ـ در مدار زیر، تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل است. مقدار بهره ولتاژ $A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ کدام است؟



$k = \frac{۱}{۲}\mu_n Co_n \frac{W}{L} = ۱\frac{mA}{V^۲}$
$V_{th} = ۱v \ , \ V_A = \infty$

۱) -۳
۲) $-\frac{۴}{۳}$
۳) $-\frac{۸}{۵}$
۴) $-\frac{۴}{۵}$

۹ـ در مدار زیر اندازه خازن را بزرگ فرض کنید، اگر سیگنال خروجی سینوسی باشد، حداکثر توان قابل تحویل به R_L در این تقویت کننده به‌کدام گزینه نزدیک‌تر است؟



$\beta = ۵$

$V_{BE,ON} = ۱^{v}$

$V_{CE,sat} = ۰$

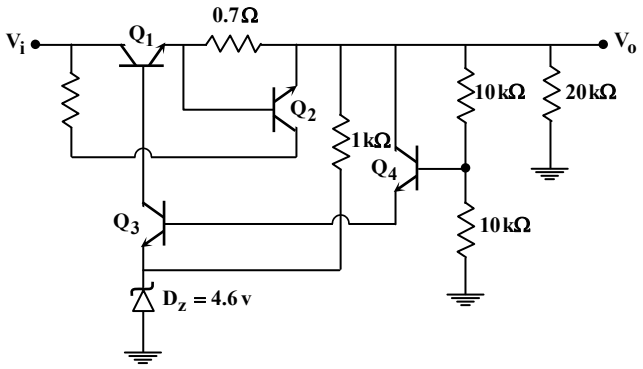
۱) $۰/۲۵^{W}$

۲) $۰/۶۱^{W}$

۳) $۰/۵^{W}$

۴) $۰/۴۵^{W}$

۱۰ـ در مدار تنظیم‌کننده ولتاژ شکل زیر، مقدار V_o چند ولت است؟ $(V_{BE} = ۰/۷\,v)$



۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۲۰

۴) ۱۰

۱۱ـ مبناهای a و b چه مقادیری باشد تا $(۲۱۱۰)_b = (۳۴۱)_a$ برقرار باشد؟

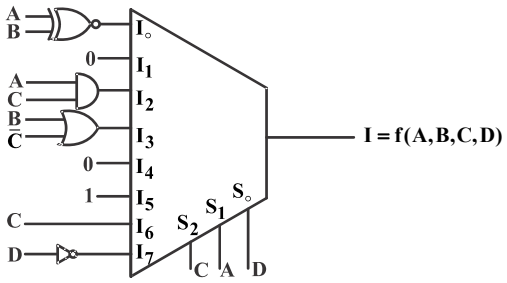
۱) $b = ۵\,,\ a = ۸$

۲) $b = ۷\,,\ a = ۸$

۳) $b = ۷\,,\ a = ۹$

۴) $b = ۵\,,\ a = ۹$

۱۲ـ مینترم‌های تابع $f(A,B,C,D)$ کدام‌اند؟



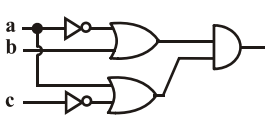
۱) $m_0, m_3, m_7, m_9, m_{10}, m_{13}, m_{14}$

۲) $m_1, m_2, m_4, m_7, m_9, m_{13}, m_{14}$

۳) $m_0, m_7, m_9, m_{10}, m_{13}, m_{14}$

۴) $m_0, m_3, m_7, m_8, m_{10}, m_{13}, m_{14}$

۱۳ـ در مدار منطقی زیر اضافه کردن کدام گیت باعث از بین رفتن potential hazarad خواهد شد؟



۱) $OR : \bar{b} + c$

۲) $And : \bar{b}c$

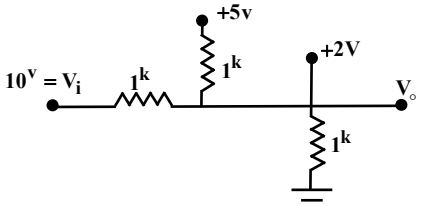
۳) $Nand : \overline{\bar{b}c}$

۴) $NOR : \overline{\bar{b} + c}$

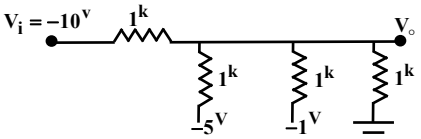
پاسخنامه آزمون (۴)

الکترونیک ۱ و ۲ و سیستم‌های دیجیتال

۱ـ گزینه «۳» با فرض $V_i = ۱۰^V$ دیودهای $D_۱$ و $D_۳$ وصل و دیودهای $D_۲$ و $D_۴$ قطع می‌باشند که مشاهده می‌شود $V_o = ۲^V$ به دست می‌آید.

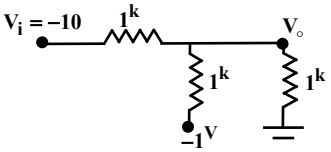


حال با فرض $V_i = -۱۰^V$ دیودهای $D_۱$ و $D_۳$ قطع و $D_۲$ و $D_۴$ وصل هستند که مطابق شکل مقابل kcl زدن در نقطه V_o مدار داریم:



$$kcl: \frac{V_o-(-۱۰)}{۱^k}+\frac{V_o-(-۵)}{۱^k}+\frac{V_o-(-۱)}{۱^k}+\frac{V_o}{۱^k}=۰ \rightarrow V_o+۱۰+V_o+۵+V_o+۱+V_o=۰ \rightarrow V_o=-۴^V$$

که با بدست آمدن $V_o = -۴^V$ فرض روشن بودن $D_۲$ غلط است.



$$D_۲(\text{خاموش}) \Rightarrow kcl: \frac{V_o}{۱^k}+\frac{V_o+۱۰}{۱^k}+\frac{V_o+۱}{۱^k}=۰ \Rightarrow V_o=-۳/۶V \Rightarrow \boxed{-۳/۶ \le V_o \le ۲}$$

۲ـ گزینه «۲» خازن با جریان ثابت ۱mA شارژ می‌شود، لذا ولتاژ دو سر آن در لحظه t برابر است با:

$$V_C(t)=V_C(۰)+\frac{۱}{C}\int_۰^t i_C(t)\,dt=۰+\frac{۱}{C}\int_۰^t ۱mA\,dt=\frac{۱mA}{۱\mu C}\times t=۱۰۰۰t$$

ترانزیستور $M_۲$ زمانی وارد ناحیه اهمی می‌شود که $V_{GD_۲} < V_{th}$ شود، به عبارتی:

$$V_x-۱۱<۲ \Rightarrow V_x=۱۳v$$

بنابراین کافی است مدت زمانی که طول می‌کشد V_x به ۱۳v برسد را حساب کنیم. ترانزیستور $M_۱$ همواره در ناحیه اشباع قرار دارد و جریان ثابت ۱mA از آن عبور می‌کند. بنابراین رابطه بین $V_x(t)$ و $V_C(t)$ به صورت زیر است:

$$I=۱mA=k(V_x(t)-V_C(t)-V_t)^۲=۱\frac{mA}{V^۲}(V_x(t)-۱۰۰۰t-۲)^۲$$

در لحظه $t=۰$ داریم:

$$۱mA=۱\frac{mA}{V^۲}(V_x(۰)-۰-۲)^۲ \Rightarrow V_x(۰)=۳v$$

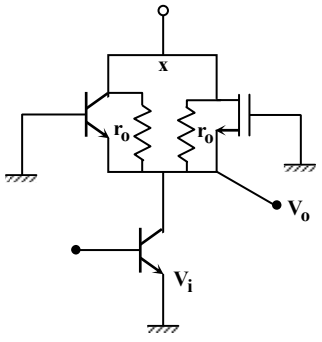
بدیهی است برای آنکه جریان $M_۱$ با گذر زمان ثابت بماند، باید عبارت $V_x(t)-۱۰۰۰t$ با گذر زمان ثابت بماند و مقداری برابر $V_x(۰)=۳v$ داشته باشد. به عبارتی داریم:

$$V_x(t)-۱۰۰۰t=۳v$$

لذا مدت زمانی که طول می‌کشد $V_x(t)$ به ۱۳v برسد، برابر است با:

$$۱۳-۱۰۰۰t=۳ \Rightarrow ۱۰۰۰t=۳ \Rightarrow t=\frac{۱۰s}{۱۰۰۰}=۱۰ms$$

۳ـ گزینه «۳» با توجه به مدار زیر و مشخص بودن جریان‌ها و ولتاژها داریم:



مدار قسمت‌های بالایی یعنی ترانزیستورهای $M_۵$ و $Q_۴$ مثل منبع جریان عمل می‌کند که همان جریان منبع، جریان بالایی را به مدار پایینی یعنی ترانزیستورهای $M_۳$ و $Q_۲$ انتقال می‌دهد. چون منبع جریان بالایی قطع است، بنابراین جریان وارده به مدار پایینی صفر است. مدار پایینی را می‌کشیم.

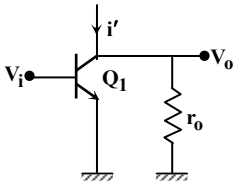
جریان وارده به نقطه‌ی x:

$$i_{CQ_۲}+i_{r_o}+i_{DM_۳}+i_{r_o}=۰$$

جریان وارده به V_o از طرف بالا:

$$\frac{i_{CQ_۲}}{\beta}+\underbrace{i_{CQ_۲}+i_{r_o}+i_{DM_۳}+i_{r_o}}_{۰}=i'$$

$$i'=\frac{i_{CQ_۲}}{\beta}=\frac{g_m(۰-V_o)}{\beta}=-\frac{g_{m_۲}V_o}{\beta}=-\frac{۹}{۱۰}V_o$$



حال داریم:

$$i' = \frac{V_o}{r_o} + g_{m_1} V_i \rightarrow -\frac{V_o}{10} = \frac{9}{10} V_o + 10 V_i \rightarrow -V_o = 10 V_i \rightarrow A_V = +\frac{V_o}{V_i} = -10$$

۴ـ گزینه «۱» فیدبک از نوع ولتاژ سری می‌باشد.

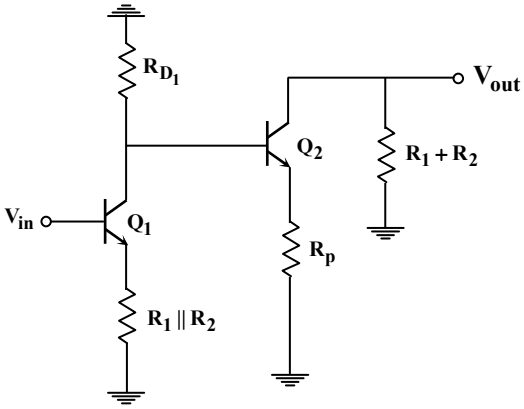
$$T = AB = (g_m R_L)\left(\frac{1k}{1k + 9k}\right)$$

$$R_L = (9k + 1k) \| 1M \simeq 10k \quad , \quad AB = 1 \quad , \quad R_i = \frac{1}{g_m}(1 + AB) = 2k\Omega$$

۵ـ گزینه «۳» نوع فیدبک ولتاژ سری است.

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}$$

مدار حلقه باز:



$$A_{OL} = -\frac{R_1 + R_2}{\frac{1}{g_{m_2}} + R_P} \times \frac{\overbrace{-R_{D_1} \| [R_P + \frac{1}{g_{m_2}})\beta_2]}^{R_{D_1}}}{\frac{1}{g_{m_1}} + (R_1 \| R_2)}$$

$$A_{OL} = \frac{-20}{10} \times \frac{-10}{5} = 4$$

$$A_{CL} = \frac{4}{1 - k \times 4} = \frac{4}{1 - \frac{4}{2}} = -4$$

۶ـ گزینه «۱»

$$V_o = -i \times R = -i \times 10k$$

$$i = 2 \times g_m \frac{V_{in}}{2} \Rightarrow V_o = -g_m \times 10k \times V_{in} \Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = -g_m \times 10k = -10$$

۷ـ گزینه «۱» طبق رابطه $V_{BE} = V_T \text{Ln} \frac{I_c}{I_s}$ از آنجایی که ترانزیستورهای Q_1 و Q_2 موازی‌اند، پس جریان کلکتور آنها نیز با هم برابر است و همین استدلال برای Q_3 و Q_4 برقرار است. پس داریم:

$$I_{c_2} = 2I_{c_1} \Rightarrow I_{c_1} = I_{c_3} \Rightarrow I_{c_3} = 3I_{c_4}$$

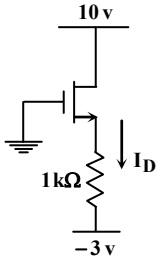
از آنجایی که مساحت پیوند Q_3، ۳ برابر Q_4 است، پس:

$$I_{c_4} = \frac{1}{3} I_{c_3}$$

در نتیجه جریانی که از سیم Q_1 رد می‌شود برابر با $\frac{1}{3} I_{c_3}$ است. جریان مقاومت R برابر با $1 - \frac{1}{3} I_{c_3}$ است.

$$I_{c_3} = I_{c_2} = 2I_{c_1} = 2mA \Rightarrow I_R = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} mA \Rightarrow I_R = \frac{V_{cc} - V_{BE}}{R} \Rightarrow R = \frac{V_{cc} - V_{BE}}{I_R} = 3(2 - 0/7) = 3/9k\Omega$$

۸ـ گزینه «۲» تحلیل dc:



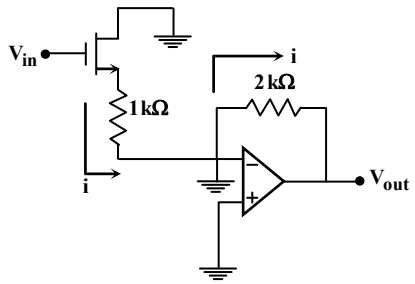
$$\begin{cases} I_D = k(V_{GD} - V_{th})^2 \\ V_{GS} + I_D \times 1k = 3v \Rightarrow V_{GS} = 3v - 1k \times I_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_D = (3 - I_D - 1)^2 = (2 - I_D)^2 = 4 - 4I_D + I_D^2$$

$$\Rightarrow I_D^2 - 5I_D + 4 = 0 \Rightarrow (I_D - 1)(I_D - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_D = 1mA & \text{ق ق} \\ I_D = 4mA & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$I_D = 1mA \Rightarrow g_m = 2\sqrt{kI_D} = 2ms$$

تحلیل ac:



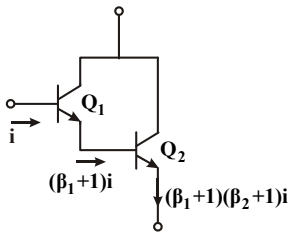
$$V_{out} = -۲k \times i$$

$$i = \frac{V_i}{\frac{۱}{g_m} + ۱k} = \frac{V_i}{۰/۵k + ۱k} = \frac{V_i}{۱/۵k} \Rightarrow V_{out} = -۲k \times \frac{V_i}{۱/۵k} = \frac{-۲V_i}{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow A_V = -\frac{۴}{۳}$$

۹ـ گزینه «۴» برای محاسبه حداکثر توان خروجی باید حداکثر دامنه سوئینگ متقارن را به‌دست آوریم.

خازن $V_C = \frac{V_{CC}}{۲} = ۵^{v}$

نکته‌ای که باید به آن توجه داشت، این است که چون β کوچک است، باید از رابطه دقیق برای β_{total} برای زوج دارلینگتون استفاده کرد.



$$I_C = (\beta_۱ + ۱)(\beta_۲ + ۱)i$$

$$\beta_{total} = \beta_۱ + \beta_۲ + \beta_۱\beta_۲$$

$$B_{total} = \beta_۱ + \beta_۲ + \beta_۱\beta_۲ = ۵ + ۵ + ۵ \times ۵ = ۳۵$$

($Q_۶$ محدودیت قطع) $I_{B_۱,max} = ۱۰^{mA} \Rightarrow I_{E_۲,max} = B_{total} \times ۱۰^{mA} = ۳۵۰ mA$

$$V_{om}^{+} = I_{E_۲,max} \times R_L = ۳۵۰^{mA} \times ۱۰^{\Omega} = ۳/۵^{v}$$

($Q_۵$ محدودیت اشباع) $V_{om}^{+} = V_{DD} - V_{CE,sat} - V_{BE,ON} - V_{BE,ON} - V_C = ۱۰ - ۰ - ۱ - ۱ - ۵ = ۳^{v}$

به‌علت متقارن بودن مدار، محدودیت اشباع $Q_۶$ با محدودیت اشباع $Q_۵$ یکسان است، بنابراین: $V_{om}^{-} = -۳^{v}$

بنابراین: $V_{o,m}^{\pm} = ۳^{v} \Rightarrow P_L = \frac{۱}{۲}\frac{V_{om}^{۲}}{R_L} = \frac{۳^{۲}}{۲ \times ۱۰} = ۰/۴۵^{w}$

۱۰ـ گزینه «۲» $V_o = ۲ \times (V_{BE_۳} + V_{BE_۴} - V_z) = ۲ \times (۰/۷ + ۰/۷ + ۴/۶) = ۱۲v$

دقت کنید که ترانزیستور $Q_۲$ جریان خروجی را به ۱A محدود می‌کند، اما در ولتاژ بدست آمده جریان خروجی برابر $\frac{۱۲v}{۲۰\Omega}$ است که کمتر از ۱A است، لذا $V_o = ۱۲v$ صحیح است.

۱۱ـ گزینه «۴» برای رسیدن به پاسخ صحیح باید مقادیر مختلف a و b را مورد آزمایش قرار داد. اما نکته این تست در اینجاست که اختلاف میان دو عدد به نسبت زیاد است، بنابراین مبناها نیز باید اختلاف زیادتری داشته باشند. پس گزینه ۲ و ۳ نمی‌توانند جواب صحیح باشند. با محاسبه دو عدد با استفاده از مقادیر a و b در گزینه‌های ۱ و ۴، جواب صحیح مشخص می‌شود. $۳ \times ۸۱ + ۴ \times ۹ + ۱ = ۲ \times ۱۲۵ + ۱ \times ۲۵ + ۱ \times ۵ + ۰$

۱۲ـ گزینه «۱» ساده‌ترین راه برای پاسخ به این سؤال استفاده از جدول کارنو است:

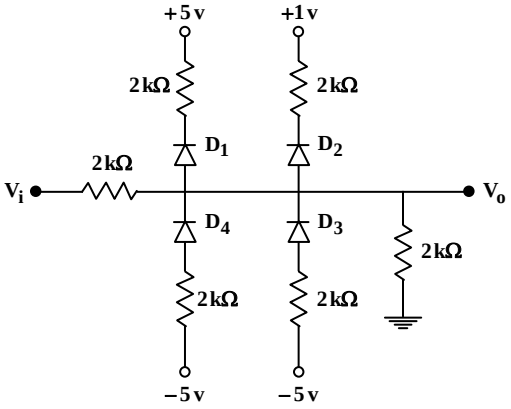
AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	
01			1	
11		1		1
10		1		1

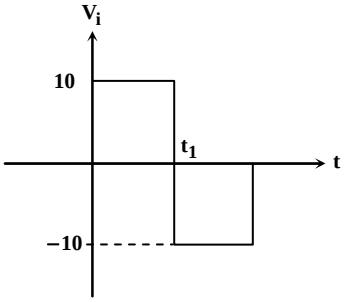
بنابراین مینترم‌های تابع برابر است با: $m_۰, m_۳, m_۷, m_۹, m_{۱۰}, m_{۱۳}, m_{۱۴}$

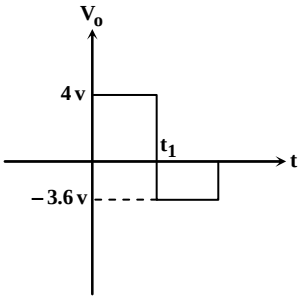
آزمون (۹)

الکترونیک ۱ و ۲ و سیستم‌های دیجیتال

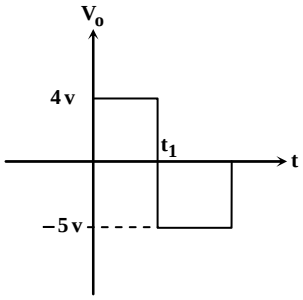
۱ـ در مدار زیر با فرض ایده‌آل بودن تمامی دیودها مقدار V_o کدام است؟



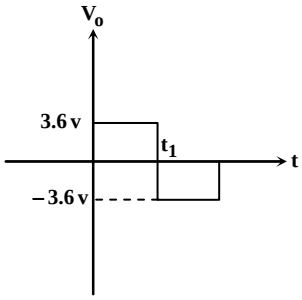




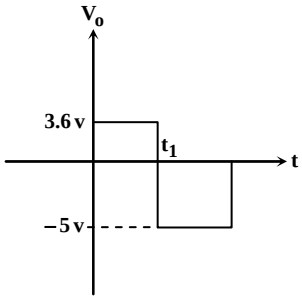
(۴)



(۳)

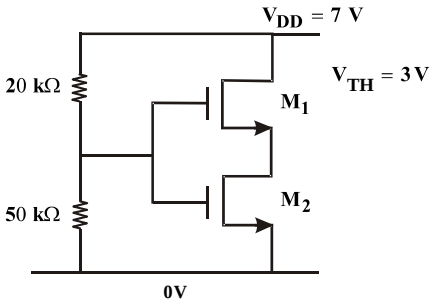


(۲)



(۱)

۲ـ در مدار شکل زیر نسبت $(\frac{W}{L})_۱ = ۲(\frac{W}{L})_۲$ ولتاژ آستانه‌ی $M_۱$ چقدر باشد تا ترانزیستور $M_۲$ در مرز اشباع و ناحیه‌ی تریود خطی بایاس شود؟



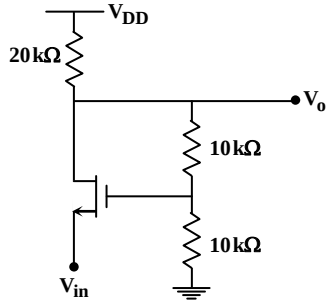
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۱/۶

۴) $\sqrt{۲}$

۳ـ بهره مدار زیر حدوداً کدام است؟



$g_m = ۱ms$

$r_o = ۱۰kΩ$

۱) ۲/۸

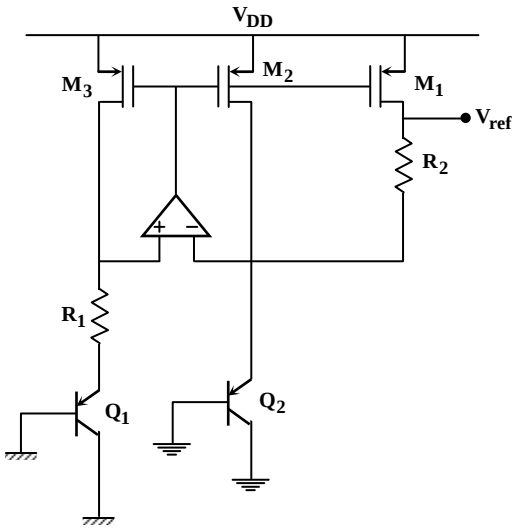
۲) ۱/۴

۳) ۱/۷

۴) ۳/۴

۴ـ در مدار زیر همه‌ی ترانزیستورها در ناحیه‌ی فعال بایاس شده‌اند و ابعاد PMOS ها با هم برابر بوده و دارای جریان برابرند و تقویت‌کننده‌ی عملیاتی ایده‌آل است و مساحت پیوند بیس امیتر Q_1، ۲۵ برابر ترانزیستور Q_2 است. به ازای چه نسبتی از $\frac{R_2}{R_1}$ ولتاژ مرجع V_{ref} در دمای $T = 300K$ حساسیت به دما نخواهد داشت؟

$$\left(\frac{\partial V_{EB}}{\partial T}\Big|_{T=300K} = -2\frac{mv}{K} \ , \ \frac{KT}{q}\Big|_{T=300K} = 25mv\right)$$



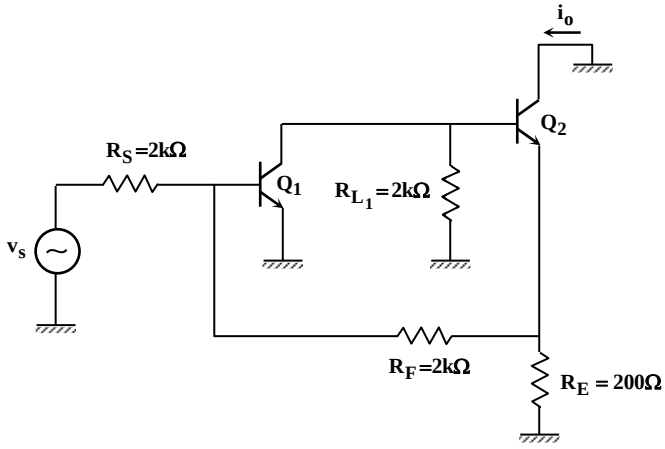
۱) $\frac{6}{Ln50}$

۲) $\frac{12}{Ln50}$

۳) $\frac{24}{Ln50}$

۴) $\frac{15}{Ln50}$

۵ـ در مدار شکل مقابل بهره‌ی $\frac{i_o}{v_s}$ کدام است؟



$I_{C_1} = I_{C_2} = 1mA$
$v_A = \infty$
$\beta = 200$

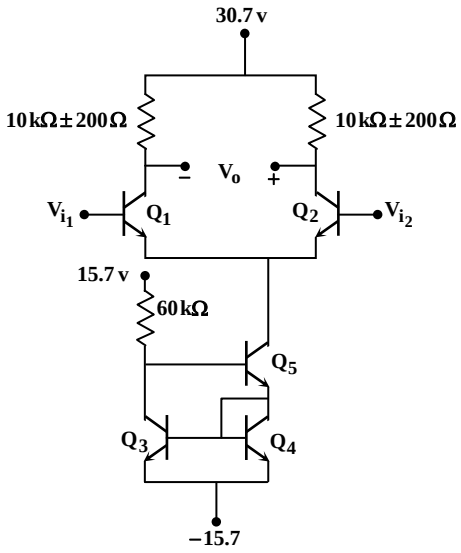
۱) $-1/107$

۲) $-2/2$

۳) -296

۴) $-0/55$

۶ـ در مدار شکل زیر، در بدترین حالت، اندازه CMRR چقدر است؟ $(V_{BE} = 0/7 \ , \ V_A = 10v \ , \ \beta = 100)$



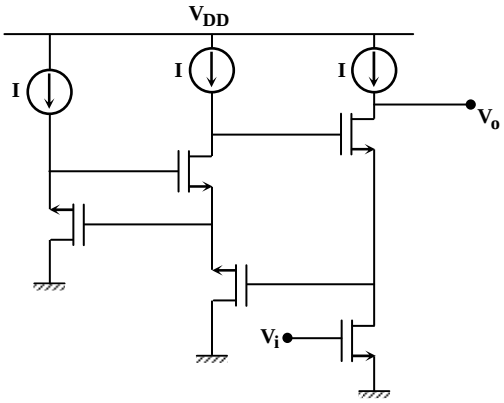
۱) 2×10^4

۲) 5×10^5

۳) 10^6

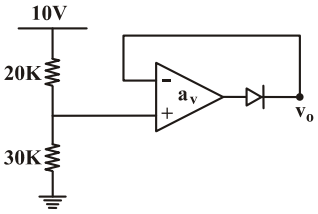
۴) ∞

۷ـ در مدار زیر، همه‌ی ترانزیستورها مشابه و دارای g_m و r_o برابرند. اگر $t = g_m r_o$ تعریف کنیم و گین ولتاژ این مدار $AV = \frac{V_o}{V_i}$ تابعی برحسب t مثل $F(t)$ باشد، حاصل $(F'(۱) = \left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=۱})$ کدام است؟



۱) -۱۵
۲) -۵
۳) ۳۰
۴) -۳۰

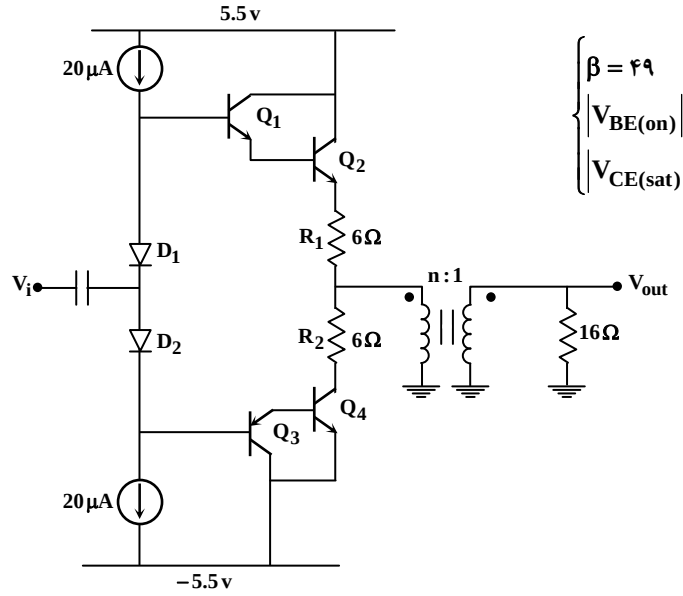
۸ـ در مدار شکل زیر اگر مقاومت ورودی تقویت‌کننده ∞ فرض شود و بهره‌ی ولتاژ آن $a_V = ۹$ باشد، آن‌گاه مقدار ولتاژ V_o کدام گزینه است؟



$(V_D) = ۰/۷\,v$

۱) ۲/۷
۲) ۵/۳
۳) ۴/۱
۴) ۳/۲

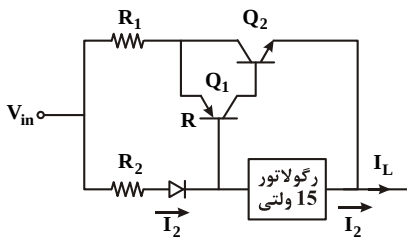
۹ـ در مدار شکل زیر، حداکثر افت ولتاژ لازم در دو سر منبع جریان $۰/۳\,v$ است. حداکثر راندمان توان آن چند درصد است؟



$$\begin{cases} \beta = ۴۹ \\ |V_{BE(on)}| = ۰/۷\,v \\ |V_{CE(sat)}| = ۰/۳\,v \end{cases}$$

۱) ۳۵
۲) ۵۰
۳) ۷۵
۴) ۶۵

۱۰ـ در مدار زیر حداکثر جریان I_L که مدار می‌تواند تأمین کند، چند آمپر است؟ (فرض کنید رگولاتور حداکثر جریان دبی آن ۲A باشد و از جریان مصرفی خود رگولاتور صرف‌نظر کنید.)



$R_1 = 1\Omega\,,\, R_2 = 3\Omega$

$\beta_1 = 500, \beta_2 = 30$
$V_{BE} = V_D$
$20 < V_{in} < 30v$

۱) ۸A
۲) ۶A
۳) ۲A
۴) ۱۰A

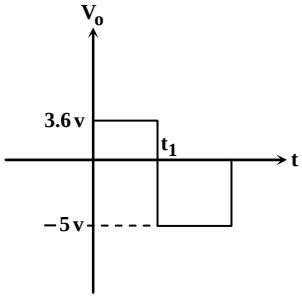
پاسخنامه آزمون (۹)

الکترونیک ۱ و ۲ و سیستم‌های دیجیتال

۱ـ گزینه «۱»

$$V_i=+10\Rightarrow\begin{cases}D_1(on)\ ,\ D_2(on)\\ D_4(off)\ ,\ D_3(off)\end{cases}\Rightarrow KCL\ in\ V_o:\frac{V_o}{2}+\frac{V_o-V_i}{2}+\frac{V_o-1}{2}+\frac{V_o-5}{2}=0$$

$$4V_o=V_i+6\rightarrow V_o=\frac{V_i+6}{4}=4v\rightarrow\begin{cases}D_1(off)\\ D_2(on)\end{cases}\Rightarrow\frac{V_o}{2}+\frac{V_o-V_i}{2}+\frac{V_o-1}{2}=0\Rightarrow 3V_o=V_i+1\rightarrow V_o=\frac{11}{3}\simeq 3/6v$$



$$V_i=-10v\rightarrow\begin{cases}D_1(off)\ ,\ D_2(off)\\ D_4(on)\ ,\ D_3(on)\end{cases}\rightarrow KCL\ in\ V_o:\frac{V_o}{2}+\frac{V_o-V_i}{2}+\frac{V_o+5}{2}+\frac{V_o+5}{2}=0$$

$$4V_o=-20\rightarrow V_o=-5v$$

۲ـ گزینه «۳»

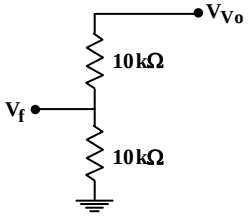
$$I_{D_1}=I_{D_2}\rightarrow\frac{1}{2}\mu_nC_{ox}\times(\frac{W}{L})_1(V_{GS_1}-V_{TH_1})^2=\frac{1}{2}\mu_nC_{ox}(\frac{W}{L})_2(V_{GS_2}-V_{TH})^2$$

$$\rightarrow\frac{V_{GS_1}-V_{TH}}{V_{GS_2}-V_{TH}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad V_{G_2}=V_{G_1}=\frac{50}{20+50}\times 7=5v$$

M_z در آستانه‌ی ناحیه‌ی خطی است $\rightarrow V_{DS_2}=V_{GS_2}-V_{TH}=5-V_{TH}=2v$

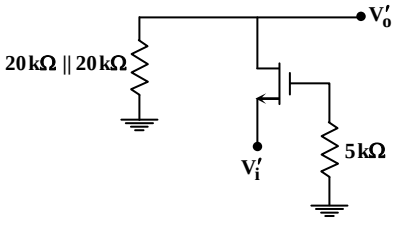
$$V_{GS_1}=5-V_{DS_2}\rightarrow V_{GS_1}=3V\rightarrow\frac{3-V_{TH}}{5-3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow 3-V_{TH}=\sqrt{2}\Rightarrow V_{TH}=1/6V$$

۳ـ گزینه «۲» فیدبک منفی ولتاژ سری می‌باشد. شبکه فیدبک به صورت زیر است:



$$R_1=5k\Omega$$
$$R_2=20k\Omega$$
$$\beta=\frac{1}{2}$$

مدار حلقه باز به صورت مقابل است:



$$\frac{V_o'}{V_i'}=g_m(r_o\parallel R_D)$$
$$\frac{V_o'}{V_i'}=1ms(10k\Omega\parallel 20k\Omega\parallel 20k\Omega)=5$$
$$A_V=\frac{A}{1+A\beta}=\frac{5}{1+2/5}=\frac{5}{3/5}\simeq 1/4$$

۴ـ گزینه «۳»

$i_{EQ_1}=i$

$i_{EQ_2}=2i$

جریان ماسفت‌ها: i

$$\left.\begin{aligned}V_{EQ_2}&=V_TLn(\frac{i_{EQ_2}}{Is_2})=V_TLn(\frac{2i}{Is_2})\\ V_{EQ_1}&=V_TLn(\frac{i_{EQ_1}}{Is_1})=V_TLn(\frac{i}{Is_1})\end{aligned}\right\}\Rightarrow V_{R_1}=V_{EQ_2}-V_{EQ_1}=V_TLn(\frac{2Is_1}{Is_2})$$

$$\Rightarrow V_{R_1}=V_TLn(50)\rightarrow R_1\times i=V_{R_1}=V_TLn(50)\qquad(*)$$

$$V_{ref} = R_۲ i + V_{EQ_۲} \rightarrow \frac{\partial V_{ref}}{\partial T} = R_۲ \frac{\partial i}{\partial T} + \frac{\partial V_{EQ_۲}}{\partial T} \qquad (II)$$

از رابطه‌ی (*) مشتق نسبت به T گرفته می‌شود:

$$R_۱ \frac{\partial i}{\partial T} = \frac{\partial V_T}{\partial T} \times Ln۵۰$$

$$V_T = \frac{KT}{q} \rightarrow \frac{\partial V_T}{\partial T} = \frac{k}{q} = \frac{V_T}{T}\Big|_{T=۳۰۰} = \frac{۲۵}{۳۰۰} = \frac{۱}{۱۲}$$

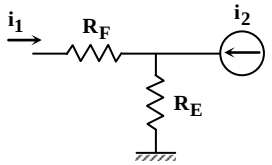
$$\left.\begin{aligned} R_۱ \frac{\partial i}{\partial T} &= \frac{Ln۵۰}{۱۲} \\ R_۲ \frac{\partial i}{\partial T} &= -\frac{\partial V_{EB}}{\partial T} = ۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{چون } \frac{\partial V_{ref}}{\partial T} = ۰ \text{ است،}$$

بنابراین از تقسیم آن دو بر هم داریم:

$$\frac{R_۲}{R_۱} = \frac{۲۴}{Ln۵۰}$$

۵ـ گزینه «۴» روش تشریحی:

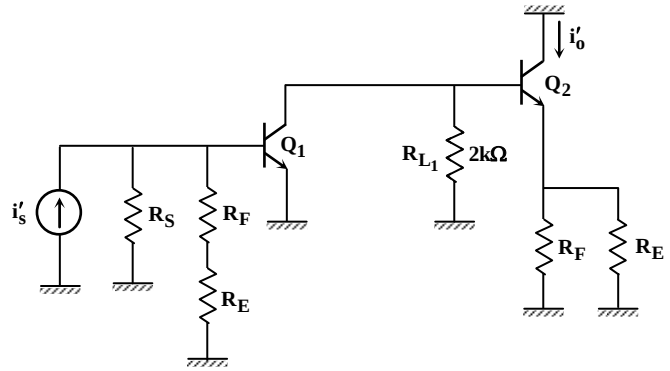
شبکه β:



$$\beta = \frac{i_۱}{i_۲} = -\frac{R_E}{R_F + R_E} = -۰/۹$$

فیدبک از نوع جریان ـ جریان می‌باشد.

شبکه با اثر بارگذاری:



$$r_e = \frac{۲۵mA}{۱mA} = ۲۵ \quad و \quad r_\pi = ۲۵ \times ۲۰۰ = ۵k\Omega \quad و \quad v_{b_۱} = i'_s \times R'_i \quad و \quad R'_i = R_s \,\|\, \overbrace{(R_F + R_E)}^{۲/۲k\Omega} \,\|\, r_{\pi_۱} \cong ۱ \,\|\, ۵ = ۰/۸۳k\Omega$$

مقاومت دیده شده از بیس $Q_۲$:

$$R_{i_۲} = \overbrace{(R_F \,\|\, R_E)}^{۱۸۰}(۱+\beta) + r_{\pi_۲} = ۴۱k\Omega$$

$$\frac{i'_o}{v_{b_۲}} = \frac{۱}{r_e + R_F \,\|\, R_E} = ۴/۴۵mA \quad و \quad \frac{v_{b_۲}}{v_{b_۱}} = -\frac{R_{L_۱} \,\|\, R_{i_۲}}{r_e} = -\frac{۴۱ \,\|\, ۲}{۲۵} \cong -۸۰$$

$$A = \frac{i'_o}{i'_s} = \frac{i'_o}{v_{b_۲}} . \frac{v_{b_۲}}{v_{b_۱}} . \frac{v_{b_۱}}{i'_s} = (۴/۴۵) \times (-۸۰) \times (۰/۸۳) \cong -۲۹۶ \Rightarrow A_f = \frac{A}{۱ + A_B} = -۱/۱۰۷$$

$$\frac{i_o}{v_s} = \frac{i_o}{R_s . i_s} = \frac{-۱/۱۰۷}{۲} = -۰/۵۵mA$$

روش تستی:

$$\beta = -\frac{RE}{RE + RE} = -۰/۹$$

اگر مدار دارای بهره جریان زیادی باشد (A زیاد)، بهره‌ی نهایی $\frac{i_o}{i_{s'}} = \frac{۱}{\beta} = -\frac{۱۰}{۹}$ می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\frac{\frac{i_o}{V_s}}{۲} = -\frac{۱۰}{۹}$$

و در نهایت $\frac{i_o}{V_S} = -\frac{۵}{۹} = -۰/۵۵$ می‌شود و این حداکثر بهره است. در نتیجه چون تمام گزینه‌ها بهره‌ی بیشتر از این مقدار دارند، رد می‌شوند و فقط گزینه‌ی «۴» باقی می‌ماند.

۶ـ گزینه «۲» ابتدا مقدار جریان را در آینه جریان ویلسون بدست می‌آوریم:

$$I_{ref}=\frac{۱۵/۷-(-۱۵/۷)-۱/۴}{۶۰\,k\Omega}=۰/۵\,mA$$

$$I_{C_۱}=I_{C_۲}=\frac{۰/۵\,mA}{۲}=۰/۲۵\,mA\ \rightarrow\ r_{e_۱}=r_{e_۲}=\frac{۲۵\,mv}{۰/۲۵\,mA}=۱۰۰\Omega$$

در حالت تفاضلی تغییرات مقاومت‌های کلکتور چندان روی مقدار A_d تأثیرگذار نیست، بنابراین داریم:

$$A_d=\frac{V_o}{V_{i_d}}=\frac{V_o}{V_{i_۱}-V_{i_۲}}=\frac{۲\times۱۰\,k\Omega}{۲\times۰/۱k\Omega}=۱۰۰$$

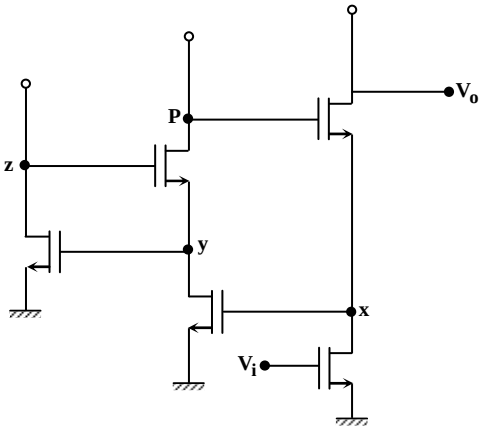
اما در حالت وجه مشترک تغییرات مقاومت‌های کلکتور مؤثر است. در بدترین حالت $R_{C_۱}=۹/۸k\Omega$ و $R_{C_۲}=۱۰/۲k\Omega$ است و CMRR به کمترین مقدار خود می‌رسد، همچنین داریم:

$$r_{o_۵}=\frac{V_A}{I_C}=\frac{۱۰v}{۰/۵\,mA}=۲۰k\Omega\ \Rightarrow\ R_o\text{ منبع جریان ویلسون}=\frac{۱}{۲}\beta\times r_{o_۵}=\frac{۱}{۲}\times۱۰۰\times۲۰\,k\Omega=۲۰۰۰\,k\Omega$$

$$A_C=\frac{V_o}{V_{i_{cm}}}=\frac{۱۰/۲k\Omega-۹/۸k\Omega}{۰/۱k\Omega+۲۰۰۰k\Omega}\simeq\frac{۰/۴}{۲۰۰۰}=۲\times۱۰^{-۴}$$

$$CMRR=\left|\frac{۱۰۰}{۲\times۱۰^{-۴}}\right|=۵\times۱۰^{۵}$$

۷ـ گزینه «۱» ولتاژ گره‌ها را مشخص کرده‌ایم و در همه‌ی آن‌ها KCL می‌زنیم (نمودار کشیده شده است).



$$\text{KCL at x}\ \rightarrow\ g_mV_i+\frac{x}{r_o}=۰\ \rightarrow\ x=-tV_i$$

$$\text{KCL at y}\ \rightarrow\ g_mx+\frac{y}{r_o}=۰\ \rightarrow\ y=-tx=t^۲V_i$$

$$\text{KCL at z}\ \rightarrow\ g_my+\frac{z}{r_o}=۰\ \rightarrow\ z=-g_mr_oy=-ty=-t^۳V_i$$

$$\text{KCL at p}\ \rightarrow\ g_m(z-y)+\frac{P-y}{r_o}=۰\ \rightarrow\ P+g_mr_oz-(۱+g_mr_o)y=۰$$

$$P+tz-(۱+t)y=۰\ \rightarrow\ P-t^۴V_i-t^۲V_i-t^۳V_i=۰\ \rightarrow\ P=(t^۴+t^۳+t^۲)V_i$$

$$\text{KCL at }V_o:\frac{V_o-x}{r_o}+g_m(P-x)=۰\ \rightarrow\ V_o-(۱+g_mr_o)x+g_mr_oP=۰\ \rightarrow\ V_o-(۱+t)x+tP=۰$$

$$V_o+(t^۲+t)V_i+(t^۵+t^۴+t^۳)V_i=۰$$

$$AV=\frac{V_o}{V_i}=-(t^۵+t^۴+t^۳+t^۲+t)=f(t)\ \rightarrow\ \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=۱}=-(۵+۴+۳+۲+۱)=-۱۵$$

۸ـ گزینه «۲» چون مقاومت ورودی تقویت‌کننده بی‌نهایت است، مقدار ولتاژ پایه‌ی مثبت برابر است با:

$$\frac{۳۰}{۲۰+۳۰}\times۱۰=۶v\ \Rightarrow(۶-V_o)\times۹=V_x\ \Rightarrow\ V_x-۰/۷=V_o\ \Rightarrow(۶-V_o)\times۹-۰/۷=V_o$$

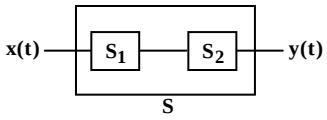
$$\Rightarrow\ ۵۴-۹V_o-۰/۷=V_o\ \Rightarrow۱۰V_o=۵۳/۳\ \Rightarrow V_o=۵/۳۳v$$

آزمون (۳)

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

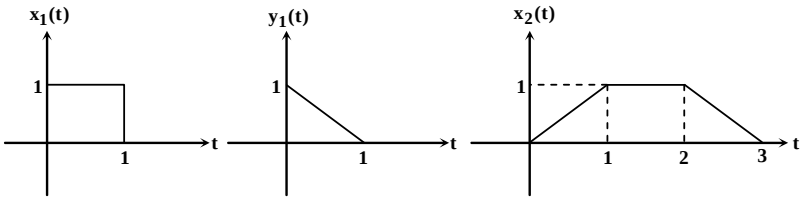
۱ـ اگر S_1 و S_2 دو سیستم که به صورت سری به هم وصل شده‌اند و S_1 و S_2 تغییرناپذیر با زمان، همچنین S_1 غیرعلّی و S_2 علّی باشد، آن‌گاه در مورد S کدام گزینه همواره درست است؟

A) تغییر ناپذیر با زمان B) غیرعلّی



۱) A و B
۲) A
۳) B
۴) هم A و هم B نمی‌توانند همواره درست باشند.

۲ـ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x_1(t)$ خروجی $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ در لحظه‌ی $t = ۰/۵$ کدام است؟

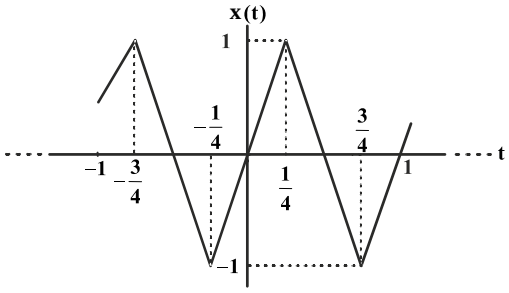


۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۳ـ توان و انرژی سیگنال $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} ۲^{-|n-۳m|}$ به ترتیب برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $P = ۰$ و $E = +\infty$
۲) $P = +\infty$ و $E = +\infty$
۳) $P = \frac{۱۶۱}{۱۴۷}$ و $E = +\infty$
۴) $P = ۰$ و $E = \frac{۱۵}{۸}$

۴ـ در سیگنال متناوب داده شده ضرایب سری فوریه کدام است؟



۱) $a_k = \begin{cases} ۰ & ; \ k = ۰ \\ \frac{۲j}{k^۲\pi^۲}\sin(k\frac{\pi}{۲}) & ; \ k \neq ۰ \end{cases}$

۲) $a_k = \begin{cases} ۰ & ; \ k = ۰ \\ \frac{-۴j}{k^۲\pi^۲}\sin(k\frac{\pi}{۲}) & ; \ k \neq ۰ \end{cases}$

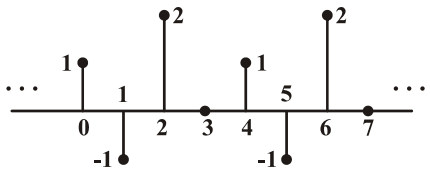
۳) $a_k = \begin{cases} ۰ & ; \ k = ۰ \\ \frac{-۲j}{k^۲\pi^۲}\sin(k\frac{\pi}{۲}) & ; \ k \neq ۰ \end{cases}$

۴) $a_k = \begin{cases} ۰ & ; \ k = ۰ \\ \frac{۴j}{k^۲\pi^۲}\sin(k\frac{\pi}{۲}) & ; \ k \neq ۰ \end{cases}$

۵ـ در صورتی که ورودی یک سیستم LTI به صورت $x(t) = \tan^{-۱}(t)$ باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن کدام است؟

۱) $\frac{-j۲}{\omega}\pi\, e^{-|\omega|}$
۲) $\frac{-j}{\omega}\pi\, e^{-|\omega|}$
۳) $\frac{-j}{۲\omega}\pi\, e^{-|\omega|}$
۴) $\frac{-j}{\omega}\pi\, e^{|\omega|}$

۶ـ اگر $x[n]$ به شکل زیر باشد مطلوبست محاسبهٔ $I_۲ = \sum_{k=۰}^{۳} a_k^۲$ و $I_۱ = \sum_{k=۰}^{۳} |a_k|^۲$.



۱) $I_۲ = ۱/۲۵$, $I_۱ = ۶$
۲) $I_۲ = ۵$, $I_۱ = ۱/۵$
۳) $I_۲ = ۱/۵$, $I_۱ = ۶$
۴) $I_۲ = ۱/۲۵$, $I_۱ = ۱/۵$

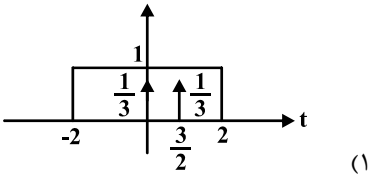
۷ـ فرض کنید $x[n]$ به صورت حاصلضرب دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ باشد، در این صورت حاصل $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |nx[n]|^2$ چقدر است؟

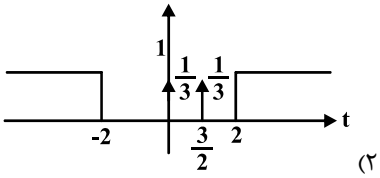
$$x_1[n]=\frac{\sin(\frac{3\pi}{4}n)}{\pi n}\ ,\ x_2[n]=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$$

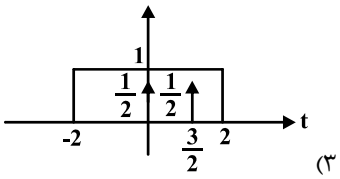
۱) $\frac{1}{8\pi^2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4\pi^2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

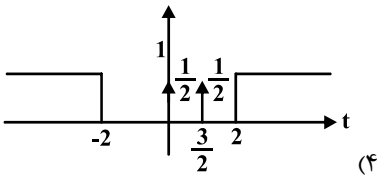
۸ـ کدام گزینه سیگنال $x(t)$ است؟

$x(t)=\delta(3t-2t^2)+u(t^2-4)$

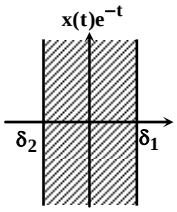
۱)


۲)


۳)


۴)


۹ـ اگر ROC تابع $x(t)e^{-t}$ به صورت زیر باشد، مقدار δ_1 و δ_2 در چه فاصله‌ای باشد که $x(-t)e^{-t}$ پایدار شود؟



۱) $\delta_2>2$ $\delta_1>-2$
۲) $\delta_2>1$ $\delta_1<-1$
۳) $\delta_2>1$ $\delta_1>-1$
۴) $\delta_2<-2$ $\delta_1>-2$

۱۰ـ سیستم گسسته A علی و پایدار است ولی معکوس آن پایدار و غیرعلی است. اگر تعداد صفر و قطب سیستم برابر باشد. لزوماً ..... .

۱) قطبی خارج دایره واحد دارد
۲) مبدأ در ROC سیستم قرار نمی‌گیرد
۳) این سیستم هیچ صفری خارج دایره واحد ندارد
۴) $h[n]$ شامل $\delta[n]$ نمی‌باشد (در مبدأ قرار ندارد)

۱۱ـ اگر $x[n]=(-1)^n u[n]+\alpha^n u[-n-n_0]$، عدد مختلط α و عدد صحیح n_0 باید چه شرایطی را ارضا کنند تا ناحیهٔ همگرایی $X(Z)$ به صورت $1<|Z|<2$ باشد؟

۱) $n_0=2\ ,\ \alpha=2$ ۲) $n_0=2\ ,\ |\alpha|=2$
۳) $n_0=2\ ,\ |\alpha|=2$ هر عدد دلخواه ۴) n_0 هر عدد دلخواه $,\ \alpha=\mp 2$

۱۲ـ سیگنال $x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر است و دارای تبدیل z $X(z)=\frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$ است. $x[n]$ کدام گزینه آمده است؟

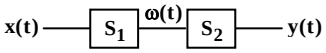
۱) $x[n]=[(\frac{1}{2})^{n-2}+(-\frac{1}{4})^{n-1}]u[-n]$ ۲) $x[n]=[4(\frac{1}{2})^n+4(-\frac{1}{4})^{n-1}]u[n]$
۳) $x[n]=[(\frac{1}{2})^{n-2}+(-\frac{1}{4})^{n-1}]u[n]$ ۴) $x[n]=[(\frac{1}{2})^{n+2}-(-\frac{1}{4})^{n+1}]u[n]$

پاسخنامه آزمون (۳)

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

۱ـ گزینه «۲»

A)



S_1 تغییرناپذیر با زمان

$$\left.\begin{matrix} x(t) \to \omega(t) \to y(t) \\ x(t-t_0) \to \omega(t-t_0) \to y(t-t_0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{تغییرناپذیر با زمان}$$

$$\begin{cases} \omega(t) = x(t+1) \\ y(t) = \omega(t-1) \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t) \Rightarrow \text{علّی}$$

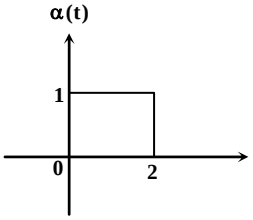
۲ـ گزینه «۳»

$$x_1(t) * h(t) = y_1(t)$$

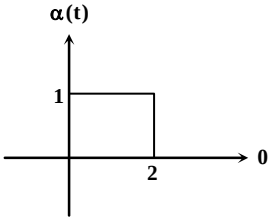
حال اگر دو طرف معادله را در $\alpha(t)$ کانوالو کنیم، داریم:

$$\alpha(t) * [x_1(t) * h(t)] = \alpha(t) * y_1(t) \to [(\alpha(t) * x_1(t)) * h(t)] = \alpha(t) * (x_1(t) * h(t)) = \alpha(t) * y_1(t)$$

بنابراین اگر ورودی در $\alpha(t)$ کانوالو شود، خروجی نیز در $\alpha(t)$ کانوالو می‌شود. در این سؤال سیگنال $x_2(t)$ حاصل کانولوشن $x_1(t)$ در پالس مستطیلی شکل مقابل است:



بنابراین خروجی نیز در پالس مستطیلی مقابل کانولوشن می‌شود:



$$y_2(t) = \alpha(t) \times y_1(t) \to y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\tau)\alpha(t-\tau)d\tau \to y_2(0/5) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\tau)\alpha(0/5-\tau)d\tau$$

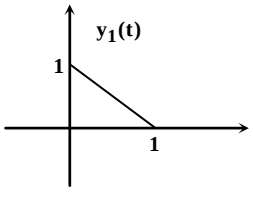
$$\begin{cases} 2 \geq 0/5 - \tau \geq 0 \to 0 \geq \tau - 0/5 \geq -2 \to 0/5 \geq \tau \geq -1/5 & (1) \\ 1 \geq \tau \geq 0 \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک (۱),(۲)}} 0/5 \geq \tau \geq 0$$

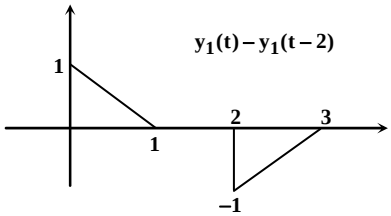
$$y_2(0/5) = \int_0^{0/5} (1-\tau)\,d\tau = \frac{-(1-\tau)^2}{2}\Big|_0^{0/5} = -\frac{1}{2}((0/5)^2 - 1) = \frac{3}{8}$$

روش تستی: می‌توانیم $x_2(t)$ را برحسب $x_1(t)$ به صورت مقابل بیان کنیم:

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{t} [x_1(\tau) - x_1(\tau-2)]d\tau$$

لذا $y_2(t)$ نیز به صورت $y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} [y_1(\tau) - y_1(\tau-2)]d\tau$ قابل بیان است.





$$\Rightarrow y_2(0/5) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} (1-\tau)d\tau = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\tau)d\tau = (\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

۳ـ گزینه «۳» می‌دانیم که هر سیگنال به‌صورت $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} z(t-mT)$ با دوره T متناوب است که در اینجا $z(t)=2^{-|n|}$ می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این سیگنال متناوب با دوره تناوب ۳ می‌باشد و سیگنال‌های متناوب دارای انرژی ∞ و توان غیرصفر می‌باشند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ غلط هستند. نزولی بودن سری نیز، محدود بودن نمونه‌های سیگنال را نتیجه می‌دهد؛ پس توان سیگنال محدود می‌باشد و گزینه ۲ نیز غلط می‌باشد.

راه‌حل تشریحی:

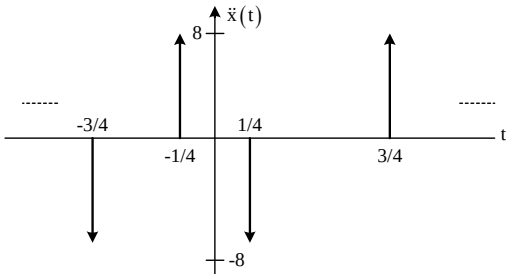
$$P=\frac{1}{3}(x^2[0]+x^2[1]+x^2[2])$$

$$x[0]=\sum_{-\infty}^{+\infty}2^{-|-3m|}=1+2\sum_{m=1}^{+\infty}2^{-3m}=1+2\times\frac{2^{-3}}{1-2^{-3}}=1+2\times\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=1+\frac{2}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x[1]=\sum_{-\infty}^{+\infty}2^{-|1-3m|}=2\sum_{m=1}^{+\infty}2^{-(3m-1)}=2\times\frac{2^{-2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$$

$$x[2]=\sum_{-\infty}^{+\infty}2^{-|2-3m|}=2\sum_{m=1}^{}2^{-(3m-2)}=\frac{2\times2^{-1}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}\rightarrow P=\frac{1}{3}(\frac{81}{49}+\frac{16}{49}+\frac{64}{49})=\frac{161}{147}$$

۴ـ گزینه «۲»



$$Period=T=1\rightarrow\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt=0$$

$$\ddot{x}(t)\leftrightarrow b_k$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_T\ddot{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[8\delta(t+\frac{1}{4})-8\delta(t-\frac{1}{4})]e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=8e^{-jk\omega_0(-\frac{1}{4})}-8e^{-jk\omega_0(\frac{1}{4})}=16j\sin(\frac{k\omega_0}{4})=16j\sin(k\frac{\pi}{2})$$

$$a_k=\frac{1}{(jk\omega_0)^2}b_k(\text{integration property})=\frac{-16j}{k^2(2\pi)^2}\sin(k\frac{\pi}{2})=\frac{-4j}{k^2\pi^2}\sin(k\frac{\pi}{2})$$

۵ـ گزینه «۲» $x(t)=\tan^{-1}t$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم تا بتوان تبدیل فوریه آن را محاسبه کرد.

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha=\tan^{-1}t+\frac{\pi}{2}\rightarrow\tan^{-1}t=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{1+\alpha^2}-\frac{\pi}{2}$$

با استفاده از رابطه دوگانی داریم:

$$p(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}\qquad e^{-|t|}\xrightarrow{f}\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2}\xrightarrow{f}2\pi e^{-|\omega|}\Rightarrow\frac{1}{1+t^2}\xrightarrow{f}\pi e^{-|\omega|}=P(\omega)$$

با استفاده از تبدیل فوریه انتگرال $X(j\omega)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}P(j\omega)+\pi P(0)\delta(\omega)-\frac{\pi}{2}(2\pi\delta(\omega))$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\pi e^{-|\omega|}$$

آزمون (۸)

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

۱ـ رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم پیوسته با زمان به صورت زیر داده شده است. در مورد علیت، لحظه‌ای بودن و پایداری سیستم کدام گزینه صحیح است؟

$$y(t)=\int_{t-2}^{\infty} x(\tau)(\tau-t)^2 e^{\tau-t}d\tau$$

۱) غیرعلّی ـ غیرلحظه‌ای ـ ناپایدار

۲) علّی ـ لحظه‌ای ـ پایدار

۳) علّی ـ غیرلحظه‌ای ـ ناپایدار

۴) غیرعلّی ـ غیرلحظه‌ای ـ پایدار

۲ـ در یک سیستم LTI، پاسخ به ورودی ضربه برابر $h[n]=\alpha^{-n}u[-n]$ می‌باشد که در آن $0<\alpha<1$ است. اگر به این سیستم ورودی $x[n]=\alpha^n u[n]$ اعمال شود، خروجی کدام گزینه خواهد بود؟

۱) $y[n]=\frac{\alpha^{|n|}}{1-\alpha^2}$ ۲) $y[n]=\frac{\alpha^{|n|}}{1+\alpha^2}$ ۳) $y[n]=\frac{\alpha^{-|n|}}{1-\alpha^2}$ ۴) $y[n]=\frac{\alpha^{-|n|}}{1+\alpha^2}$

۳ـ حاصل انتگرال زیر کدام است؟ (δ' : مشتق تابع دلتا)

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin t+\cos t)\delta'(t^3+2t^2+2t)dt$$

۱) $+\frac{1}{4}$ ۲) $+\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۴ـ اگر $y(t)=x(t)+x(t+\frac{T}{2})+x(-t)$، $T=2k$ و $k\in N$، بوده و ضرایب سری فوریه $x(t)$ برابر a_n باشد، آن‌گاه اگر ضرایب $y(t)$ را b_n بگیریم، b_0 و b_1 به ترتیب از راست به چپ برابر با کدام گزینه است؟ ($x(t)$ با دوره تناوب T متناوب است)

۱) a_1 , $3a_0$ ۲) a_{-1} , a_0 ۳) a_{-1} , $3a_0$ ۴) صفر ، a_1

۵ـ اگر تبدیل فوریه سیگنال علّی $x(t)$ را با $X(j\omega)=X_R(\omega)+jX_I(\omega)$ نشان دهیم (که X_R و X_I به ترتیب جزء حقیقی و جزء موهومی $X(j\omega)$ هستند). اگر تبدیل فوریه سیگنال $y(t)$ را به صورت $Y(j\omega)=X_I(\omega-1)$ تعریف کنیم و بدانیم که $X_R(\omega)=\frac{1}{\omega^2+1}$ است. در این صورت $y(1)$ چقدر است؟

۱) $\frac{e^{-2}}{2j}$ ۲) $+\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{e^{-2}}{2}$ ۴) $\frac{e^{-j}}{2j}$

۶ـ اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]$ را a_k و ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]$ را b_k بنامیم، ضرایب b_0 و b_2 را برحسب a_k بدست آورید. (دوره‌ی تناوب $x[n]$ را $N_0=5$ فرض کنید.)

$$y[n]=x^*[-n-2]+3x_{(2)}[n]$$

۱) $\begin{cases} b_0=a_0^*+3a_0 \\ b_2=a_2^* e^{-j\frac{3\pi}{5}}+3a_2 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} b_0=a_0^*+\frac{3}{2}a_0 \\ b_2=a_1^* e^{j\frac{4\pi}{5}}+\frac{3}{2}a_2 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} b_0=a_0^*+3a_0 \\ b_2=a_1^* e^{j\frac{4\pi}{5}}+3a_2 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} b_0=a_0^*+\frac{3}{2}a_0 \\ b_2=a_2^* e^{-j\frac{4\pi}{5}}+\frac{3}{2}a_2 \end{cases}$

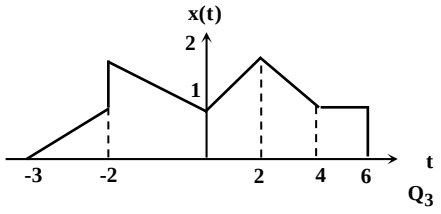
۷ـ یک دنباله، تبدیل فوریه زمان گسسته زیر را دارد:

$$X(e^{j\omega})=\frac{(1-\alpha^2)}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\alpha e^{j\omega})}$$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega)d\omega$ را محاسبه کنید.

۱) $\frac{1}{2\pi}\alpha$ ۲) $\frac{1}{\pi}\alpha$ ۳) $\frac{1}{2}\alpha$ ۴) α

۸ـ سیگنال $x(t)$ به شکل زیر است. اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, e^{j3\omega}\, X(\omega)d\omega$ کدام است؟



۱) $+1$

۲) -1

۳) $\frac{+1}{\pi}$

۴) $\frac{-1}{\pi}$

۹ـ سیستم LTI زمان گسسته با تابع تبدیل $H(z)=\frac{4-z^{-1}}{1-\frac{7}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}$ نشانگر کدام‌یک از سیستم‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) پایدار و علی ۲) پایدار و غیرعلی ۳) ناپایدار و علی ۴) ناپایدار و غیرعلی

۱۰ـ تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت $H(S)=\frac{S+2}{S^2-2S+1-a^2}$ مفروض است که در آن a یک عدد ثابت حقیقی است، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱ـ این سیستم نمی‌تواند توأماً علّی و پایدار باشد. (به ازای هیچ مقداری از a)

۲ـ این سیستم نمی‌تواند توأماً غیرعلّی و ناپایدار باشد. (به ازای هیچ مقداری از a)

۱) فقط گزاره (۲) صحیح است. ۲) فقط گزارهٔ (۱) صحیح است.

۳) هر دو گزاره صحیح هستند. ۴) هیچ کدام از این گزاره‌ها صحیح نیست.

۱۱ـ تبدیل Z معکوس $X(Z)=e^{Z^2}$ با ناحیه همگرائی کل صفحهٔ Z به جز $|Z|=\infty$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{n}$

۳) $\begin{cases}0 & n>0 \text{ فرد و } n\\ \frac{1}{(-n)!} & \text{درغیر اینصورت}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}0 & n>0 \text{ فرد و } n\\ \frac{1}{(\frac{-n}{2})!} & \text{درغیر اینصورت}\end{cases}$

۱۲ـ اگر $y[n]=x[n][u[n+3]-u[n-2]]$ باشد، مقدار $\lim_{z\to 0} zY(z)$ و $\lim_{z\to\infty} z^{-3}Y(z)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $x[3], x[-1]$ ۲) $x[3], x[1]$ ۳) $x[-3], x[1]$ ۴) $x[-3], x[-1]$

پاسخنامه آزمون (۸)

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

۱ـ گزینه «۱»

$$y(t)=\int_{t-2}^{\infty}x(\tau)(\tau-t)^2e^{\tau-t}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)(t-\tau)^2e^{\tau-t}u(-(t-\tau)+2)d\tau=x(t)*t^2e^{-t}u(-t+2)$$

$$\Rightarrow h(t)=t^2e^{-t}u(-t+2)$$

از آنجایی که $t<0$, $h(t)\neq 0$ ← غیرعلّی

$h(t)\neq k\delta(t)$ ← غیرلحظه‌ای

و $h(t)$ برای زمان‌های منفی دارای مقدار غیرصفر است که e^{-t} دارای مقدار بی‌کران است، پس $h(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر نبوده و پایدار نیست.

۲ـ گزینه «۱» برای یک سیستم LTI خروجی، حاصل کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه است:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^ku[k]\alpha^{-(n-k)}u[-(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{-n}\alpha^{2k}u[k]u[k-n]$$

برای $n\leq 0$ داریم:

$$u[k]u[k-n]=\begin{cases}1 & 0\leq k\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}\Rightarrow y[n]=\alpha^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}=\alpha^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^2)^k=\frac{\alpha^{-n}}{1-\alpha^2}$$

برای $n\geq 0$ داریم:

$$u[k]u[k-n]=\begin{cases}1 & n\leq k\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}\Rightarrow y[n]=\alpha^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}(\alpha^2)^k=\alpha^{-n}\frac{\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}=\frac{\alpha^n}{1-\alpha^2}$$

پس برای تمام nها خواهیم داشت:

$$y[n]=\frac{\alpha^{|n|}}{1-\alpha^2}$$

۳ـ گزینه «۱» روش اول:

$$\delta(f(t))=\sum_{\text{روی نقاط } f(t)=0}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)\xrightarrow{\text{مشتق}}[\delta(f(t))]'=f'(t)\delta'(f(t))$$

$$=\sum_{f(t)=0\text{ روی نقاط }}\frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}\Rightarrow\delta'(f(t))=\sum_{f(t)=0\text{ روی نقاط }}\frac{1}{|f'(t_i)|}\frac{1}{f'(t)}\delta'(t-t_i)$$

$$f(t)=t^3+2t^2+2t\Rightarrow\delta'(t^3+2t^2+2t)=\frac{1}{|2|}\frac{1}{3t^2+4t+2}\delta'(t)\ \ (I)$$

اکنون $\frac{\delta'(t)}{3t^2+4t+2}$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)\Rightarrow -f'(0)\delta(t)+f(0)\delta'(t)=f(t)\delta'(t)$$

$$f(t)=\frac{1}{3t^2+4t+2}\Rightarrow f'(t)=\frac{-(6t+4)}{(3t^2+4t+2)^2}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=\frac{1}{2}\\ f'(0)=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\delta'(t)}{3t^2+4t+2}=\frac{1}{2}\delta'(t)+\delta(t)$$

$$(I)\ \ \delta'(t^3+2t^2+2t)=\frac{1}{2}[\frac{\delta'(t)}{2}+\delta(t)]=\frac{\delta'(t)}{4}+\frac{\delta(t)}{2}$$

$$\Rightarrow J=(\sin t+\cos t)\delta'(t^3+2t^2+2t)=\frac{1}{4}(\sin t+\cos t)\delta'(t)+\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)\delta(t)$$

مجدداً برای محاسبه $(\sin t+\cos t)\delta'(t)$ از معادله ۳ $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$ استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow I=\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t+\cos t)\delta'(t^3+2t^2+2t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta'(t)+\delta(t)}{4}dt=\frac{1}{4}$$

روش دوم:

$$\delta'(f(t))\Rightarrow f(t)=X\rightarrow\delta'(x)=\frac{d}{dx}\delta(x)=\frac{d\delta(x)}{dx}$$

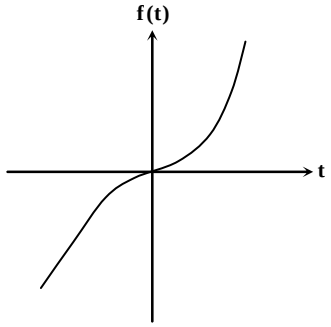
$$\delta'(x)=\frac{\frac{d}{dt}\delta(x)}{\frac{dx}{dt}}\xrightarrow{X=f(t)}\frac{\frac{d}{dt}(\delta(f(t))}{f'(t)}=\delta'(f(t))$$

چندجمله‌ای زیر، چندجمله‌ای است که فقط و فقط یک ریشه در $t=0$ دارد.

$$f(t)=t^3+2t^2+2t$$

زیرا مشتق آن همواره تابعی مثبت است.

طبق رابطه‌ی تابع دلتا داریم:



$$\delta(f(t))=\sum\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$$

$$\delta(t^3+2t^2+2t)=\frac{1}{2}\delta(t)\rightarrow\frac{d}{dt}(\delta(t^3+t^2+2t))=\frac{1}{2}\delta'(t)$$

بنابراین:

$$\delta'(t^3+2t^2+2t)=\frac{\frac{1}{2}\delta'(t)}{3t^2+4t+2}$$

حال:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\delta'(t)}{3t^2+4t+2}(\sin t+\cos t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin t+\cos t)\delta'(t^3+2t^2+2t)\,dt$$

از طرفی:

$$g(t)=\frac{0/5(\sin t+\cos t)}{3t^2+4t+2}\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta'(t)=-g'(0)\rightarrow i=-g'(0)=\frac{1}{4}$$

۴ـ گزینه «۳» دوره تناوب سیگنال $y(t)$ همان $T=2k$ خواهد بود، لذا می‌توانیم از روابط حاکم بر سری فوریه استفاده کنیم.

$$b_k=a_k+e^{jk\frac{2\pi}{T_0}\frac{T_0}{2}}a_k+a_{-k}=a_k+(-1)^k a_k+a_{-k}\Rightarrow\begin{matrix}b_0=3a_0\\b_1=a_{-1}\end{matrix}$$

۵ـ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از قسمت حقیقی تبدیل فوریه تابع $x(t)$ را پیدا می‌کنیم.

$$x(t)=x_e(t)+x_0(t)\qquad x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}\Rightarrow X_e(j\omega)=\frac{X(j\omega)+X^*(j\omega)}{2}=X_R(\omega)$$

$$x_0(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}\Rightarrow X_0(j\omega)=\frac{X(j\omega)-X^*(j\omega)}{2}\Rightarrow X_0(j\omega)=jX_I(\omega)$$

$$X_R(\omega)=\frac{1}{\omega^2+1}\Rightarrow x_e(t)=\frac{1}{2}e^{-|t|}=\frac{1}{2}(e^{-t}u(t)+e^{t}u(-t))\Rightarrow x(t)=e^{-t}u(t)$$

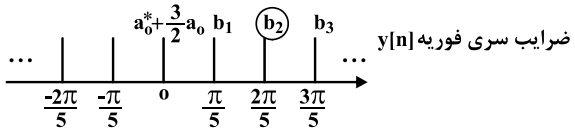
$$x_{\circ}(t)=\frac{e^{-t}u(t)-e^{t}u(-t)}{۲}$$

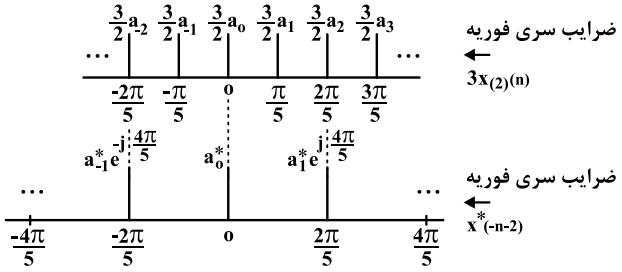
$$Y(j\omega)=X_I(\omega-۱)\Rightarrow Y(j\omega)=-j(jX_I(\omega-۱))\Rightarrow y(t)=-je^{jt}.(\frac{e^{-t}u(t)-e^{t}u(-t)}{۲})$$

$$y(t)\Big|_{t=۱}=-j\times e^{j}\times\frac{e^{-۱}}{۲}=\frac{e^{-j}}{۲j}$$

۶ـ گزینه «۲» فرکانس $\omega_{\circ}$ سیگنال $x(n)$ برابر است با: $\omega_{\circ}=\frac{۲\pi}{N_{\circ}}=\frac{۲\pi}{۵}$، پس $x_{(۲)}[n]$ دارای ضرایب سری فوریه‌ی $\frac{۱}{۲}a_k$ و فرکانس $\frac{\omega_{\circ}}{۲}=\frac{\pi}{۵}$ می‌باشد. ضریب سری فوریه $x[n-۲]$ برابر $a_ke^{-jk\frac{۴\pi}{۵}}$ و در نتیجه ضرایب سری فوریه‌ی $x[-n-۲]$ برابر $a_{-k}e^{jk\frac{۴\pi}{۵}}$ و در نهایت ضرایب سری فوریه $x^*[-n-۲]$ برابر $a_k^*e^{jk\frac{۴\pi}{۵}}$ می‌باشد و فرکانس پایه‌ی $x^*[-n-۲]$ همان فرکانس پایه‌ی $x[n]$ است و تغییری نمی‌کند پس $\omega_{\circ}=\frac{۲\pi}{۵}$.

$$\Rightarrow b_k=\underbrace{a_k^*e^{jk\frac{۴\pi}{۵}}}_{\omega_{\circ}=\frac{۲\pi}{۵}\text{ فرکانس}}+\underbrace{\frac{۳}{۲}a_k}_{\omega_{\circ}=\frac{\pi}{۵}\text{ فرکانس}}$$





$$\Rightarrow\begin{cases}b_{\circ}=a_{\circ}^*+\frac{۳}{۲}a_{\circ}\\ b_{۲}=a_{۱}^*e^{j\frac{۴\pi}{۵}}+\frac{۳}{۲}a_{۲}\end{cases}$$

۷ـ گزینه «۴» با استفاده از رابطه عکس تبدیل فوریه $x[n]=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega t}d\omega$ داریم:

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\cos\omega d\omega=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{۲}d\omega=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega+\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{-j\omega}d\omega)$$

$$=\frac{۱}{۲}(x[۱]+x[-۱])=\frac{۱}{۲}(\alpha+\alpha)=\alpha$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{۱}{۱-\alpha e^{-j\omega}}+\frac{\alpha e^{j\omega}}{۱-\alpha e^{j\omega}}\Rightarrow\alpha^nu[n]+\alpha^{-n}u[-n-۱]=\alpha^{|n|}\Rightarrow x[n]=\alpha^{|n|}$$

۸ـ گزینه «۲» با استفاده از تعریف تبدیل فوریه عکس تبدیل فوریه و (زوج تبدیل فوریه) داریم:

$$x(t)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\quad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\Rightarrow x(t)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega e^{j۳\omega}X(\omega)d\omega=۲x'(t)\Big|_{t=۳}$$

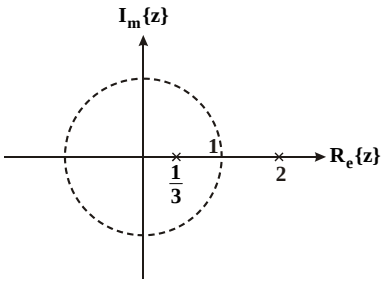
مقدار مشتق ورودی در لحظه $t=۳$ برابر با شیب خط گذرنده از آن نقطه می‌باشد.

$$m=\frac{۲-۱}{۲-۴}=\frac{-۱}{۲}\quad,\quad\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega e^{j۳\omega}X(\omega)d\omega=۲(\frac{-۱}{۲})=-۱$$

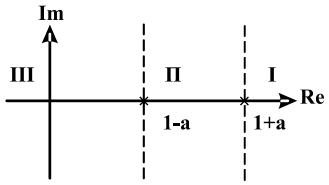
۹ـ گزینه «۱» ابتدا قطب‌های تابع تبدیل سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$۱-\frac{۷}{۳}z^{-۱}+\frac{۲}{۳}z^{-۲}=۰ \Rightarrow (۱-\frac{۱}{۳}z^{-۱})(۱-۲z^{-۱})=۰ \Rightarrow p_۱=\frac{۱}{۳}\ ,\ p_۲=۲$$

در این صورت با توجه به دیاگرام قطب‌های سیستم و با درنظر داشتن اینکه یک قطب درون دایره واحد و یک قطب خارج دایره قرار دارد، بنابراین سیستم نمی‌تواند توأماً علی و پایدار باشد.



۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به نمودار (صفر ـ قطب) سیستم، سه ناحیهٔ همگرایی برای تبدیل لاپلاس وجود دارد:



ناحیه I: که در این ناحیه سیستم علّی و ناپایدار است.

ناحیه II: که در این ناحیه سیستم غیرعلّی و پایدار است.

ناحیه III: که در این ناحیه سیستم غیرعلّی و ناپایدار است.

پس سیستم نمی‌تواند توأماً علّی و پایدار باشد پس گزینه ۲ صحیح است.

دقت شود که به‌ازای $a=۰$، سیستم قطب مکرر روی محور $(j\omega)$ خواهد داشت و هرگز پایدار نخواهد بود و اگر $|a|<۱$ باشد، سه ناحیه همگرایی به شرح زیر برای سیستم ممکن خواهد بود.

ناحیه I: سیستم علّی و ناپایدار

ناحیه II: سیستم غیرعلّی و ناپایدار

ناحیه III: سیستم غیرعلّی و پایدار

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه $X(Z)$ بصورت کسری گویا نیست، ابتدا بسط تیلور آن را می‌نویسیم و سپس از تعریف تبدیل Z کمک می‌گیریم:

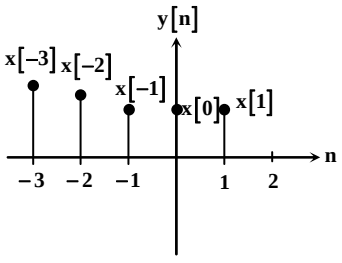
$$e^{x}\simeq ۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+...\frac{x^{n}}{n!}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\Rightarrow e^{z^{۲}}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(Z^{۲})^{n}}{n!}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{Z^{۲n}}{n!}\ \xrightarrow[k=۲n]{\text{تغییر متغیر}}\ \sum_{\substack{k=۰\\ k\ \text{زوج}}}^{+\infty}\frac{Z^{k}}{(\frac{k}{۲})!}=\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\ \text{زوج}}}^{۰}\frac{Z^{-k}}{(-\frac{k}{۲})!}$$

و با توجه به تعریف تبدیل Z و تطبیق آن با بسط بالا:

$$X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)Z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n)=\begin{cases}۰ & n>۰ \text{ و } n \text{ فرد}\\ \dfrac{۱}{(-\frac{n}{۲})!} & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

۱۲ـ گزینه «۳» با توجه به تعریف تبدیل z : $Y(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}y[n]z^{-n}$ و با توجه به اینکه $y[n]=x[n][u[n+۳]-u[n-۲]]$ می‌باشد، داریم:



$$Y(z)=x[-۳]z^{۳}+x[-۲]z^{۲}+x[-۱]z+x[۰]+x[۱]z^{-۱}$$

$$\lim_{z\to ۰} zY(z)=x[۱]$$

$$\lim_{z\to \infty} z^{-۳}Y(z)=x[-۳]$$