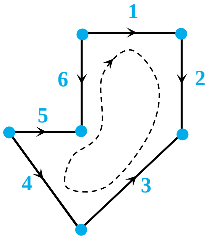
فصل ششم

«گراف‌های شبکه، روش‌های تجزیه و تحلیل مدار و مدار دوگان»

مثال ۱: در گراف مقابل کدامیک از گزینه‌های زیر مربوط به قانون KVL است؟



۱) $V_{۱}+V_{۲}-V_{۳}+V_{۴}-V_{۵}+V_{۶}=۰$

۲) $V_{۱}+V_{۲}-V_{۳}-V_{۴}+V_{۵}-V_{۶}=۰$

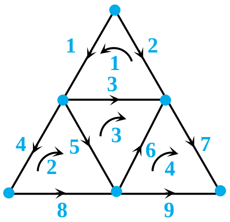
۳) $V_{۱}-V_{۲}-V_{۳}+V_{۴}+V_{۵}-V_{۶}=۰$

۴) $V_{۱}-V_{۲}-V_{۳}-V_{۴}+V_{۵}+V_{۶}=۰$

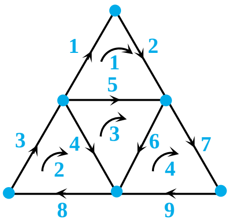
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای نوشتن معادله KVL در درون حلقه فوق، از یک نقطه و در یک جهت اختیاری حرکت می‌کنیم. اگر جهت حرکت، با فلش شاخه یکی بود، ولتاژ شاخه را مثبت و اگر جهت حرکت با فلش شاخه یکی نبود، ولتاژ شاخه را منفی لحاظ می‌کنیم. بدین ترتیب داریم:

$$V_{۱}+V_{۲}-V_{۳}-V_{۴}+V_{۵}-V_{۶}=۰$$

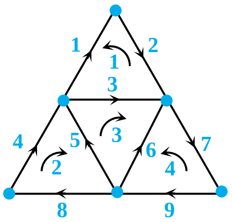
مثال ۲: با توجه به ماتریس M_a بدست آمده در مثال قبل، کدامیک از گراف‌های زیر مربوط به ماتریس M_a هستند؟



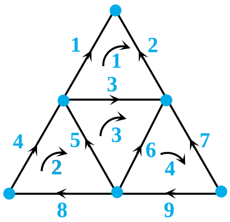
(۱)



(۲)



(۳)



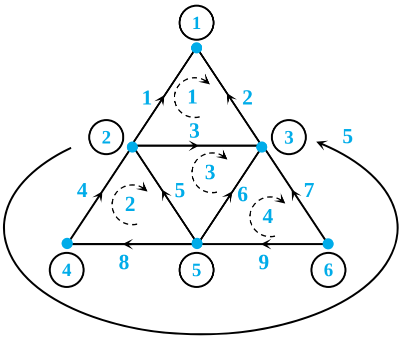
(۴)

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به ماتریس M_a بدست آمده در مثال قبـل، دیـده می‌شود که تعداد مش‌ها به اندازه سطرهای ماتریس M_a یعنـی ۵ اسـت کـه از ایـن تعداد، ۴ عدد مش درونی و یک عدد مش بیرونی است و تعداد شاخه‌ها بـا توجـه بـه ستون‌های ماتریس ۹ عدد است. لذا داریم:

تعداد شاخه‌ها $b=۹$ و تعداد مش‌های درونی $L+۱=۵ \Rightarrow L=۴$

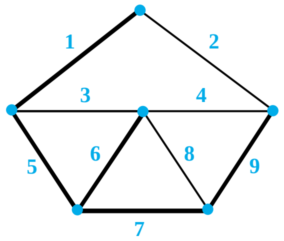
تعداد گره‌ها $n_t=۶ \Leftarrow ۴=۹-n_t+۱ \Leftarrow L=b-n_t+۱$

با توجه به اطلاعات بدست آمده گراف مذکور به صورت مقابل ترسیم می‌شود:



(با توجه به درایه‌های ماتریس M_a در مثال قبل، جهت شاخه‌ها و نیز مش‌ها باید مطابق گزینه‌ی (۴) باشد، زیرا مثلاً سطر اول می‌گوید کـه جهـت مـش ۱ باید با شاخه‌ی ۱ هم‌جهت و با شاخه‌های ۲ و ۳ مخالف جهت باشد که تنها گزینه‌ی (۴) این‌گونه است.)

مثال ۳: در گراف مقابل کدامیک از گزینه‌ها مربوط به حلقه‌های اساسی هستند؟



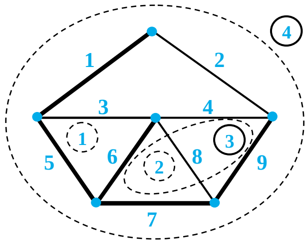
۱) {۶,۴,۹,۸} , {۶,۷,۸}

۲) {۵,۶,۳} , {۱,۲,۹,۷,۵}

۳) {۵,۳,۲} , {۶,۷,۸}

۴) {۶,۴,۹,۷} , {۵,۲,۶}

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»



بر اساس تعریف ارائه شده برای حلقه‌های اساسی، حلقه‌های اساسی گـراف مـذکور بـه صـورت روبرو است:

{۵,۶,۳} , {۶,۷,۸}

{۶,۴,۹,۷} , {۱,۲,۹,۷,۵}

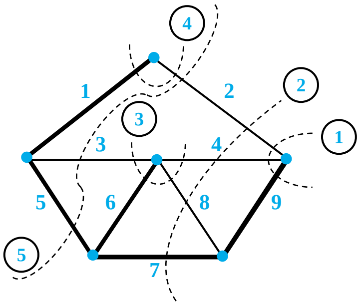
مثال ۴: در گراف مثال قبل، کدامیک از گزینه‌های زیر شامل کاتست‌های اساسی هستند؟

۱) {۲,۳,۵},{۱,۲},{۲,۴,۹}
۲) {۸,۴,۲},{۳,۶,۸,۴}
۳) {۱,۳},{۲,۵,۹}
۴) {۲,۱,۵},{۳,۶},{۲,۵,۹}

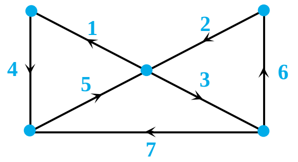
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تعاریف ارائه شده، کاتست‌های اساسی گراف مذکور به صورت زیر است:

{۱,۲} , {۲,۴,۹} , {۲,۳,۵}

{۷,۸,۴,۲} , {۳,۶,۸,۴}



مثال ۵: در گراف مثال قبل کدامیک از ماتریس‌های زیر، ماتریس $B_۲ = [F \vdots I]$ می‌باشد؟



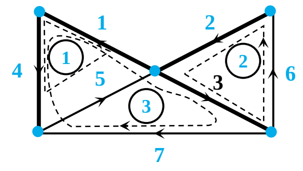
۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

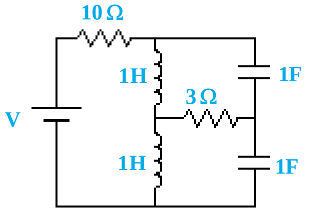
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در صورتی که ماتریس حلقه اساسی به صورت $B_۲ = [F : I]$ باشد، با توجه به اینکه $I_{۳\times۳}$ است، لذا لینک‌ها شاخه‌های ۶ و ۷ و ۵ بوده و درخت اصلی شامل شاخه‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می‌باشد. حال داریم: {۴,۱,۵} , {۲,۳,۶} , {۱,۴,۷,۳}

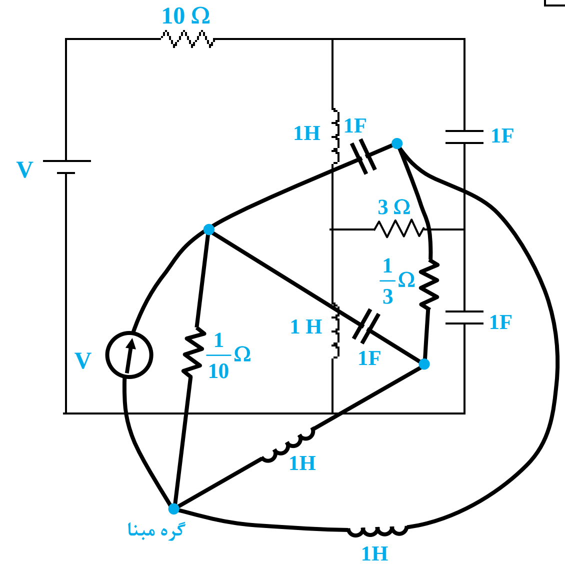


$$\begin{cases} V_۵ + V_۱ + V_۴ = ۰ \\ V_۷ + V_۳ - V_۱ - V_۴ = ۰ \\ V_۶ + V_۲ + V_۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow B_۲ = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc:ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \\ \underbrace{۱\quad ۲\quad ۳\quad ۴}_{F_{L\times n}}\quad \underbrace{۵\quad ۶\quad ۷}_{I_{۳\times۳}} \end{array} \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ \\ \\ \end{array}$$

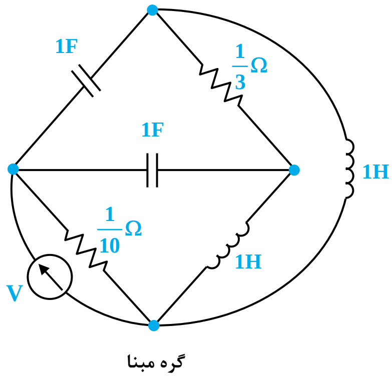
مثال ۶: دوگان مدار مقابل را ترسیم کنید.



☑ **پاسخ:** برای ترسیم مدار دوگان، ابتدا درون هر مش یک گره در نظر می‌گیریم و سپس بقیه مراحل ذکر شده در قبل را اجرا می‌کنیم.



⇒ مدار دوگان



دقت کنید با توجه به این که منبع ولتاژ V یک جریان مثبت (ساعتگرد) در مش سمت چپ مدار اصلی به وجود می‌آورد، منبع جریان دوگان آن باید یک ولتاژ مثبت در گره متناظر تولید کند و از این رو جهت آن از گره مبنا به سمت گره متناظر در نظر گرفته شده است.

آزمون فصل ششم

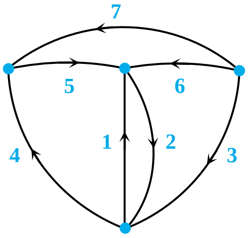
۱ـ در گراف روبه‌رو، کدام‌یک از گزینه‌ها دارای شاخه‌های تشکیل‌دهنده‌ی درخت هستند؟

۱) {۷, ۴, ۱} , {۵, ۶, ۷}

۲) {۲, ۳, ۴} , {۴, ۳, ۶}

۳) {۱, ۲, ۶} , {۳, ۴, ۷}

۴) {۲, ۳, ۴} , {۴, ۱, ۲}



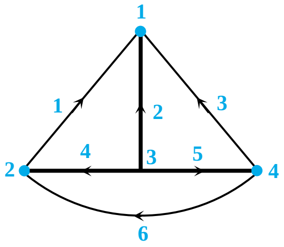
۲ـ در گراف زیر کدام گزینه تشکیل کاتست اساسی می‌دهد؟

۱) {۲, ۱, ۳}

۲) {۴, ۲, ۱}

۳) {۵, ۲, ۱}

۴) {۲, ۱, ۳, ۴}



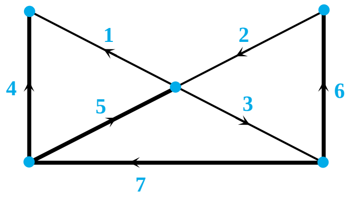
۳ـ در گراف زیر ماتریس F کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$



۴ـ کدام یک از گزینه‌های زیر حلقه‌ی اساسی مربوط به گراف دارای ماتریس Q به صورت زیر است؟

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱) {۱, ۳, ۴, ۷}

۲) {۱, ۲}

۳) {۲, ۳, ۴, ۶}

۴) {۳, ۲}

۵ـ کدام یک از ماتریس‌های زیر می‌تواند برای مدار RLC ساده به عنوان ماتریس امپدانس مش قابل قبول باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳+j & ۱+j \\ -۱+j & ۴-j \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱-۲j & -۲-j \\ -۲-j & ۴+j \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۳+j & ۱-j \\ ۱-j & ۴-j \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۳+j & -۱-۳j \\ -۱-۳j & ۵+۴j \end{bmatrix}$

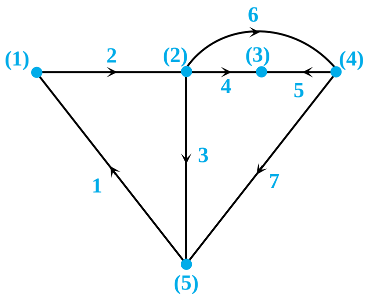
۶ـ در گراف زیر کدام گزینه، ماتریس M_a را نمایش می‌دهد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

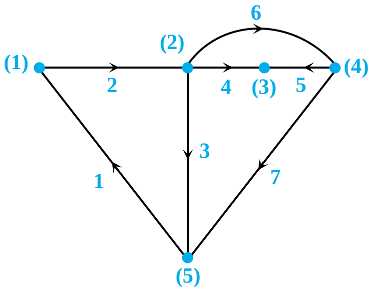
۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

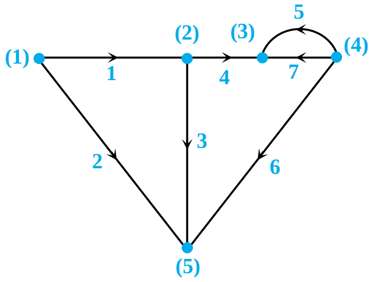


۷ـ کدام گزینه، گراف مربوط به ماتریس A_a داده شده می‌باشد؟

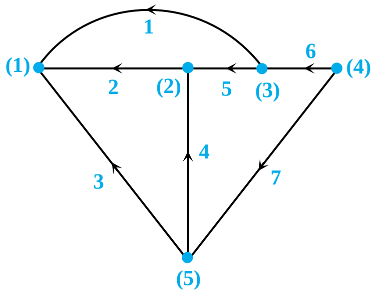
$$A_a = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$



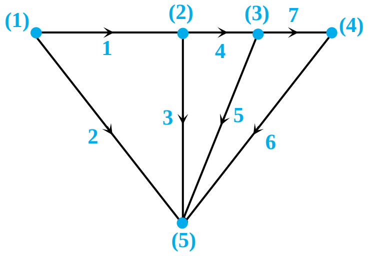
(۱)



(۲)

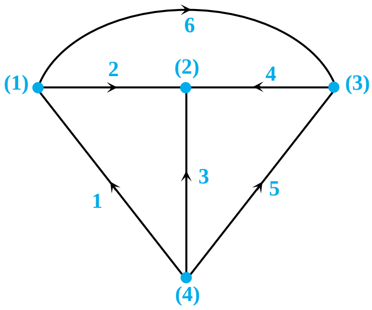


(۳)



(۴)

۸ـ در گراف زیر با فرض در نظر گرفتن شاخه‌های ۲ و ۴ و ۳ به عنوان درخت، در ماتریس $B = [F \vdots I]$، ماتریس F کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۹ـ در گراف تست قبل کدام گزینه مربوط به ماتریس E در ماتریس $Q = [I \vdots E]$ می‌باشد؟

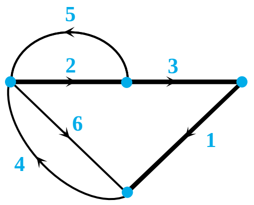
۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۰ـ در گراف زیر کدام گزینه جزء کاتست‌های اساسی گراف هستند؟



۱) {۱, ۳, ۵},{۱, ۴, ۶}

۲) {۳, ۴, ۶},{۱, ۳, ۲}

۳) {۱, ۴, ۶},{۲, ۴, ۵, ۶}

۴) {۳, ۴, ۶},{۲, ۱, ۵, ۶}

۱۱ـ در گراف تست قبل کدام دسته از گزینه‌ها جزء حلقه‌های اساسی گراف می‌باشند؟

۱) {۲, ۵},{۴, ۶, ۱}

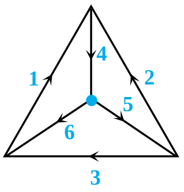
۲) {۲, ۳, ۱, ۶},{۲, ۳, ۱, ۴}

۳) {۲, ۵},{۳, ۲, ۵}

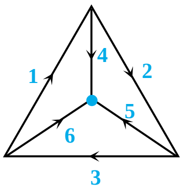
۴) {۲, ۳, ۱, ۶},{۲, ۵, ۳, ۱}

۱۲ـ در صورتی که ماتریس B در یک گراف به نام k به صورت زیر باشد، کدام گزینه، مربوط به گراف k می‌باشد؟

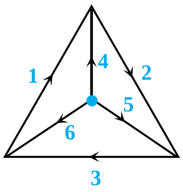
$$B=\left[\begin{array}{ccc:ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right]$$



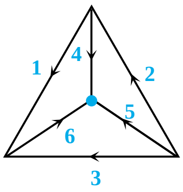
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۱۳ـ در صورتی که در یک گراف ماتریس حلقه‌های اساسی به صورت زیر باشد، کدام گزینه مربوط به کاتست‌های اساسی آن است؟

$$B=\left[\begin{array}{ccc:ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right]$$

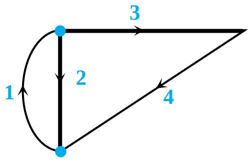
۱) $\{۲,۵,۳\},\{۱,۶,۳\}$

۲) $\{۱,۴,۲\},\{۴,۶,۵\}$

۳) $\{۱,۴,۲\},\{۴,۲,۵\}$

۴) $\{۲,۳,۵\},\{۵,۱,۴\}$

۱۴ـ در گراف زیر با فرض داشتن ماتریس Z_b، کدام گزینه مربوط به ماتریس Z_L است؟



$$Z_b=\begin{bmatrix} R & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{C_۱S} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & LS & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{C_۲S} \end{bmatrix}$$

۱) $\begin{bmatrix} R+\frac{۱}{C_۲S} & -\frac{۱}{C_۱S} \\ -\frac{۱}{C_۱S} & R+\frac{۱}{C_۲S} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} R+\frac{۱}{C_۱S} & \frac{-۱}{C_۱S} \\ -\frac{۱}{C_۱S} & LS+\frac{۱}{C_۱S}+\frac{۱}{C_۲S} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} R+\frac{۱}{C_۲S} & -\frac{۱}{C_۱S} \\ -\frac{۱}{C_۱S} & R+\frac{۱}{C_۱S}+\frac{۱}{C_۲S} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} R+\frac{۱}{C_۱S} & -\frac{۱}{C_۲S} \\ -\frac{۱}{C_۲S} & \frac{۱}{C_۱S}+\frac{۱}{C_۲S} \end{bmatrix}$

۱۵ـ ماتریس B در یک گراف به صورت زیر است. کدام گزینه مربوط به ماتریس Q خواهد بود؟

$$B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

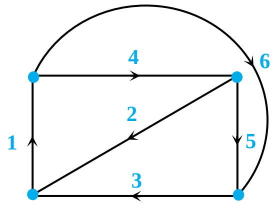
۱) $Q=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $Q=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۳) $Q=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۴) $Q=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۱۶ـ در گراف زیر کدام گزینه صحیح است؟



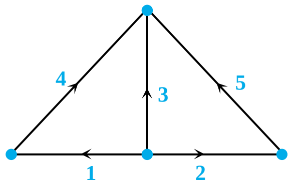
۱) شاخه‌های {۱,۲,۳} و {۴,۶,۲} کاتست‌های اساسی و شاخه‌های {۱,۲,۴}و {۴,۲,۵} حلقه‌های اساسی هستند.

۲) شاخه‌های {۱,۲,۳} و {۱,۲,۶} کاتست‌های اساسی و شاخه‌های {۲,۵,۳}و {۱,۲,۴} حلقه‌های اساسی هستند.

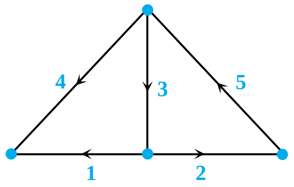
۳) شاخه‌های {۵,۲,۱} و {۶,۴,۲} کاتست‌های اساسی و شاخه‌های {۲,۶,۳} حلقه اساسی هستند.

۴) شاخه‌های {۳,۵,۶} و {۱,۲,۳} کاتست‌های اساسی و شاخه‌های {۴,۲,۱}و {۴,۶,۵} حلقه‌های اساسی هستند.

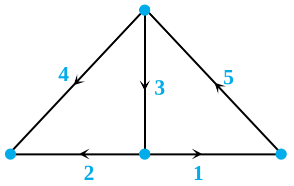
۱۷ـ ماتریس $Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ مربوط به کدام گراف است؟



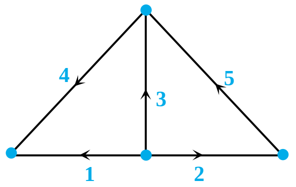
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۱۸ـ در گراف تست بالا کدام دسته از گزینه‌های زیر جزء حلقه‌های اساسی می‌باشند؟

۱) {۳,۲,۵},{۱,۲,۵}

۲) {۱,۴,۳},{۴,۳,۵}

۳) {۳,۲,۵},{۳,۱,۴}

۴) {۱,۳,۲},{۱,۳,۵}

۱۹ـ ماتریس **B** در گراف تست قبل کدام است؟

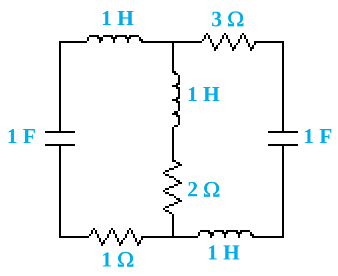
۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

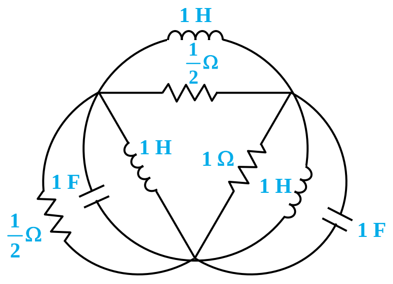
۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

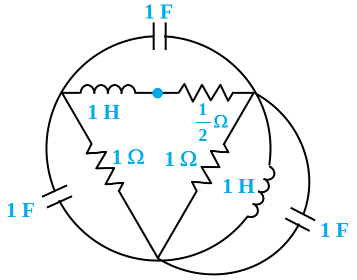
۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲۰ـ دوگان مدار زیر کدام گزینه است؟

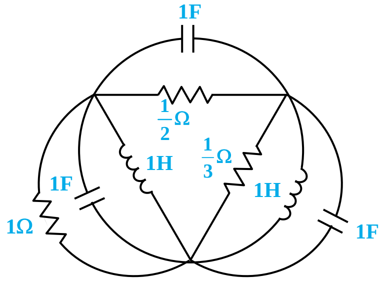




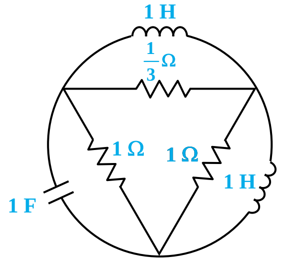
(۱)



(۲)



(۳)

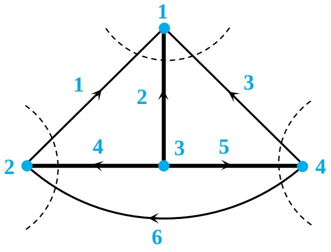


(۴)

پاسخنامه آزمون فصل ششم

۱ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه شاخه‌های درخت از همه‌ی گره‌ها تنها یک‌بار عبور کرده و تشکیل حلقه نمی‌دهند، به راحتی می‌توان به گزینه‌ی ۲ رسید.

۲ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه کاتست‌های اساسی تنها از یک شاخه‌ی درخت و چند لینک عبور می‌کنند، بنابراین گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح می‌باشد. کاتست‌های اساسی مربوط به این گراف در شکل روبه‌رو مشخص شده است.



۳ـ گزینه «۱» برای محاسبه‌ی ماتریس F کافی است ماتریس حلقه‌های اساسی را بدست آورده و ماتریس واحد آن را حذف کنیم.

$$B=\left[\begin{array}{ccc:cccc} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \qquad \Rightarrow F=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{۱\ ۰\ ۰}}_{I}\qquad\underbrace{\hphantom{-۱\ ۱\ ۰\ ۰}}_{F}$$

۴ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه حلقه‌های اساسی شامل یک لینک و چند شاخه‌ی درخت می‌باشد پس گزینه‌های ۲و۴ به راحتی حذف می‌شوند. زیرا:

$$Q=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{۱\ ۰\ ۰\ ۰}}_{I}\qquad\underbrace{\hphantom{۰\ ۰\ -۱}}_{E}$$

شاخه‌های درخت $=۱,۲,۳,۴$

گزینه‌های ۲و۴ تنها از شاخه‌های درخت تشکیل شده‌اند، پس نادرست هستند.

برای بدست آوردن معادلات حلقه‌ی اساسی ابتدا باید ماتریس B را محاسبه کنیم.

$$E=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad F=-E^T=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$BV=۰ \Rightarrow \text{معادلات حلقه‌های اساسی}: \begin{cases} -V_۳+V_۵=۰ \\ -V_۲+V_۳-V_۴+V_۶=۰ \\ V_۱-V_۳-V_۴+V_۷=۰ \end{cases} \Rightarrow \{۳,۵\},\{۲,۳,۴,۶\},\{۱,۳,۴,۷\}$$

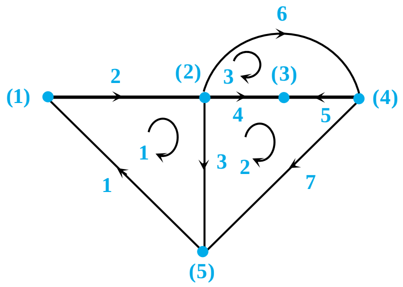
۵ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه جهت جریان مش‌ها در شاخه‌های مشترک در خلاف یکدیگر می‌باشند، بنابراین عناصر روی قطر فرعی ماتریس امپدانس مش باید مقدار حقیقی منفی داشته باشند (زیرا R همواره مثبت است اما x بسته به وجود خازن یا سلف در شاخه‌ی مشترک می‌تواند مثبت یا منفی باشد).

بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست می‌باشند.

هم‌چنین عناصر روی قطر فرعی باید با یکدیگر برابر باشند، بنابراین گزینه ۱ نادرست است.

از طرفی چون عناصر روی قطر اصلی ماتریس برابر مجموع امپدانس‌های موجود در مش می‌باشد، بنابراین همواره قسمت حقیقی عناصر قطر اصلی از قدر مطلق قسمت حقیقی عناصر مربوط به همان سطر بزرگ‌تر هستند پس گزینه‌ی ۲ نیز نادرست است.

۶ـ گزینه «۱» با توجه به گراف، مشاهده می‌شود مدار شامل ۳ مش می‌باشد. لذا ماتریس M_a به صورت زیر قابل محاسبه است.



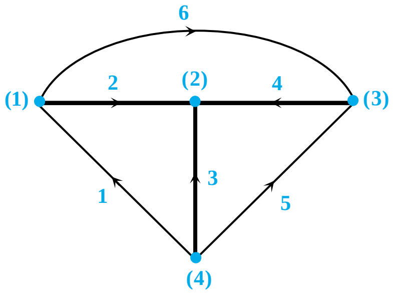
$$M_a=\begin{array}{r|ccccccc|} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ \hline ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ \text{حلقه‌ی بیرونی} & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \end{array}$$

دقت شود که جهت مثبت حلقه‌ی خارجی پادساعتگرد می‌باشد.

۷ـ گزینه «۱» سطر اول ماتریس A_a بیانگر این است که تنها شاخه‌های ۱و۲ به گره‌ی ۱ وصل بوده و همچنین شاخه‌ی ۱ به گره‌ی ۱ وارد شده و شاخه‌ی ۲ از گره‌ی ۱ خارج می‌شود. بنابراین با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود تنها گزینه‌ی ۱ این ویژگی‌ها را دارا می‌باشد.

۸ـ گزینه «۴» با توجه به شاخه‌های درخت در نظر گرفته شده داریم:

$$B=\begin{array}{c}\\ ۱\\ ۵\\ ۶\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\end{array}$$



حال ماتریس واحد را تشکیل داده و F را از ماتریس B جدا می‌کنیم:

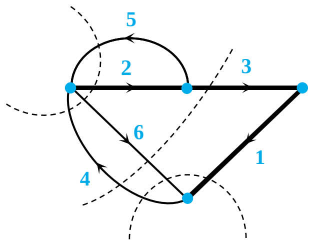
$$B=\begin{array}{c}\\ ۱\\ ۵\\ ۶\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}۲ & ۳ & ۴ & ۱ & ۵ & ۶\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\end{array} \Rightarrow F=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

F I

۹ـ گزینه «۲» با توجه به رابطه‌ی $E=-F^T$ ماتریس E را بدست می‌آوریم:

$$E=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

۱۰ـ گزینه «۳» کاتست‌های اساسی گراف داده شده در شکل مشخص شده‌اند، بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



۱۱ـ گزینه «۲» با توجه به گراف تست قبل، حلقه‌های اساسی آن به صورت روبه‌رو می‌باشد:

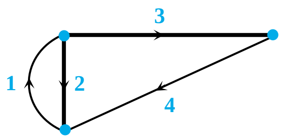
$\{۱,۲,۳,۴\},\{۱,۲,۳,۶\},\{۲,۵\}$

۱۲ـ گزینه «۳» سطر اول ماتریس B بیانگر این است که شاخه‌های ۱، ۴و۶ تشکیل یک حلقه اساسی می‌دهند، به طوری که شاخه‌های ۱و۶ هم‌جهت بوده و در خلاف جهت شاخه‌ی ۴ می‌باشند. بنابراین گزینه‌ی ۱ و ۲ نادرست هستند.

از طرفی سطر سوم ماتریس B بیانگر این است که شاخه‌های ۳، ۵ و۶ تشکیل یک حلقه‌ی اساسی می‌دهند، به طوری که شاخه‌های ۳ و ۵ هم‌جهت بوده و در خلاف جهت شاخه‌ی ۶ می‌باشند. از بین گزینه‌های باقیمانده، این شرط تنها در گزینه‌ی ۳ رعایت شده است.

۱۳ـ گزینه «۱» کاتست‌های اساسی از یک شاخه درخت در چند لینک عبور می‌کنند. از طرفی با توجه به ماتریس B داده شده، مشاهده می‌شود درخت در گراف مربوط به این ماتریس شامل شاخه‌های۶، ۵ و۴ می‌باشد و شاخه‌های ۳، ۲و۱ لینک‌های گراف را تشکیل می‌دهند. بنابراین با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود که در گزینه‌های ۲و۳و۴ از ۲و۳ شاخه‌ی درخت در معادله‌ی کاتست استفاده شده است. در نتیجه گزینه‌ی ۱ می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۱۴ـ گزینه «۲» برای بدست آوردن Z_L طبق رابطه‌ی $Z_L=B\,Z_b\,B^T$ کافی است ماتریس B را محاسبه کنیم:



$$B=\begin{array}{c}\\ ۱\\ ۴\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}۱ & ۲ & ۳ & ۴\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\end{array}$$

$$Z_L=B\,Z_b\,B^T=\begin{bmatrix}R+\frac{۱}{C_۱ s} & \frac{-۱}{C_۱ S}\\ \frac{-۱}{C_۱ S} & LS+\frac{۱}{C_۱ S}+\frac{۱}{C_۲ S}\end{bmatrix}$$

۱۵ـ گزینه «۴» با توجه به ماتریس B داریم:

$$B=\left[\underbrace{\begin{matrix}-۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{matrix}}_{F}\;\;\underbrace{\begin{matrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{matrix}}_{I}\right]\qquad E=-F^T=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q=[I\,|\,E]=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به گراف داده شده مشاهده می‌شود که شاخه‌های $\{۱,۲,۶\}$و$\{۲,۴,۶\}$ نمی‌توانند تشکیل کاتست بدهند، بنابراین گزینه‌های ۱، ۲و۳ نادرست می‌باشند.

۱۷ـ گزینه «۴» سطر اول ماتریس Q بیانگر این است که شاخه‌های ۱و۴ در یک کاتست قرار داشته و هم‌جهت می‌باشند، لذا گزینه‌های ۱و۳ نمی‌توانند صحیح باشند. با بررسی سطر سوم ماتریس مشاهده می‌شود شاخه‌های ۳، ۴ و ۵ تشکیل یک کاتست می‌دهند، به طوری که شاخه‌های ۳و۴ هم‌جهت و شاخه ۵ در خلاف جهت آن‌ها می‌باشد، لذا گزینه‌ی ۴ نیز حذف می‌شود. پس گزینه‌ی ۲ صحیح می‌باشد.

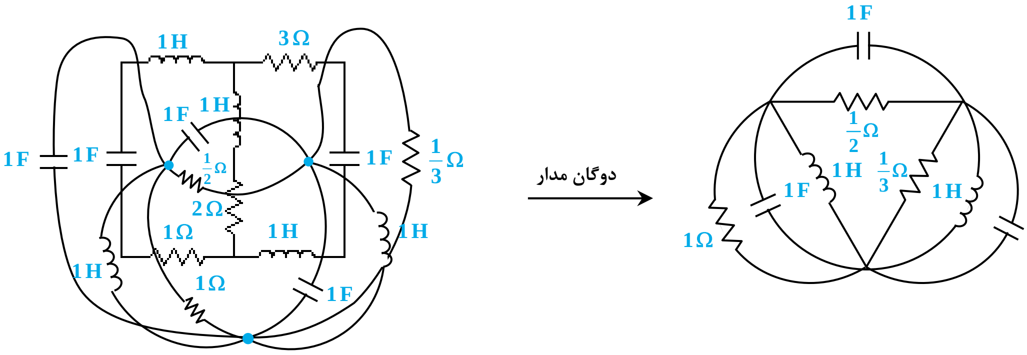
۱۸ـ گزینه «۳» با توجه به گراف داده شده مشاهده می‌شود شاخه‌های $\{۱,۲,۵\}$, $\{۴,۳,۵\}$, $\{۱,۲,۳\}$ نمی‌توانند تشکیل حلقه دهند، بنابراین گزینه‌های ۱، ۲و۴ نادرست می‌باشند.

۱۹ـ گزینه «۱» با توجه به ماتریس Q داریم:

$$Q=\left[\underbrace{\begin{matrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{matrix}}_{I}\;\;\underbrace{\begin{matrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\\ ۱ & -۱\end{matrix}}_{E}\right]\quad,\qquad F=-E^T=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=[F\,|\,I]=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

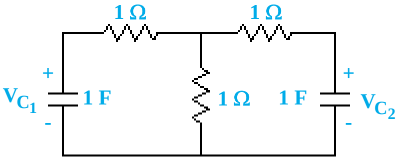
۲۰ـ گزینه «۳» برای بدست آوردن دوگان مواد داده شده بر طبق مراحل ذکر شده در متن درس، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



فصل هفتم

«معادلات حالت»

مثال۱: در مدار زیر ماتریس A در معادلات حالت کدام است؟



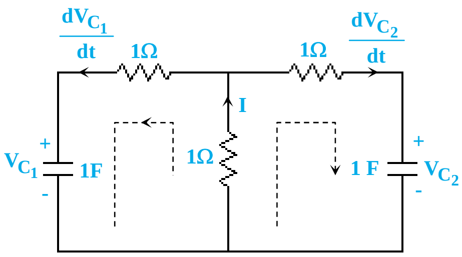
۱) $A=\begin{bmatrix}-\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}-\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» جهت بدست آوردن ماتریس A، ابتدا جریان مقاومت‌های یک اهمی را مشخص کرده و در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم. جریان مقاومت‌های یک اهمی به صورت نشان داده شده در شکل زیر است:



$$I=\frac{dV_{C_۱}}{dt}+\frac{dV_{C_۲}}{dt}$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$\frac{dV_{C_۱}}{dt}+\frac{dV_{C_۲}}{dt}+\frac{dV_{C_۱}}{dt}+V_{C_۱}=۰$$

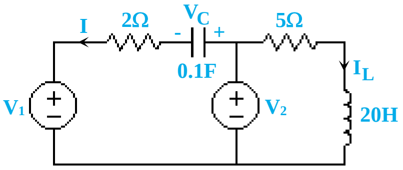
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$\frac{dV_{C_۲}}{dt}+\frac{dV_{C_۱}}{dt}+\frac{dV_{C_۲}}{dt}+V_{C_۲}=۰$$

از حل دستگاه فوق برحسب $V_{C_۱}$ و $V_{C_۲}$، معادلات حالت به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{cases}\frac{dV_{C_۱}}{dt}=-\frac{۲}{۳}V_{C_۱}+\frac{۱}{۳}V_{C_۲}\\ \frac{dV_{C_۲}}{dt}=\frac{۱}{۳}V_{C_۱}-\frac{۲}{۳}V_{C_۲}\end{cases}\Rightarrow\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$$

مثال۲: در مدار زیر در صورتی که متغیرهای حالت، جریان سلف و ولتاژ خازن انتخاب شوند، ماتریس A و ماتریس ضرایب ورودی B کدام است؟



۱) $A=\begin{bmatrix}-۴ & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۰ & -\frac{۱}{۲۰}\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۴} & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\ ,B=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{۲۰}\\ -۵ & ۵\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ -۵ & -\frac{۱}{۴}\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲۰} & ۰\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۵\\ -\frac{۱}{۴} & ۰\end{bmatrix}\ ,B=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{۲۰}\\ -۵ & ۵\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به رابطه بین جریان و ولتاژ خازن داریم:

$$I=۰/۱\frac{dV_C}{dt}$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V_۲=۵I_L+۲۰\frac{dI_L}{dt}$$

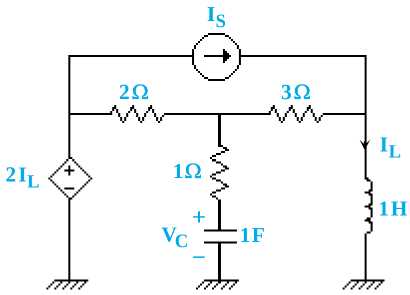
با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_۲=V_C+۲\times۰/۱\frac{dV_C}{dt}+V_۱$$

با مرتب‌سازی معادلات فوق داریم:

$$\begin{cases}\frac{dI_L}{dt}=-\frac{۱}{۴}I_L+۰V_C+۰V_۱+\frac{۱}{۲۰}V_۲\\ \frac{dV_C}{dt}=۰I_L-۵V_C-۵V_۱+۵V_۲\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{dI_L}{dt}\\ \frac{dV_C}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۴} & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_L\\ V_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{۲۰}\\ -۵ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_۱\\ V_۲\end{bmatrix}\Rightarrow\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۴} & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{۲۰}\\ -۵ & ۵\end{bmatrix}$$

مثال ۳: در مدار زیر ماتریس A و B در معادلات حالت مربوطه کدام است؟



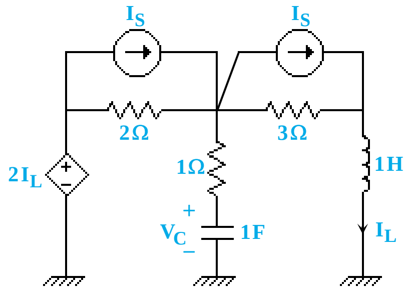
۱) $A=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۳} & ۰\\ \frac{۲}{۳} & -۳\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳}\\ \frac{۱۱}{۳}\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & ۰\\ \frac{۲}{۳} & -۳\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-\frac{۲}{۳}\\ \frac{۱۱}{۳}\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\\ -\frac{۲}{۳} & ۳\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-\frac{۲}{۳}\\ -\frac{۱۱}{۳}\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\\ -\frac{۲}{۳} & ۳\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-\frac{۲}{۳}\\ +\frac{۱۱}{۳}\end{bmatrix}$

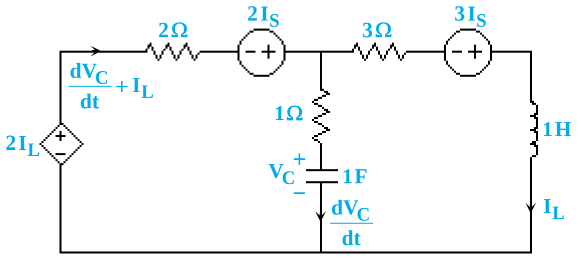
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با اجرای قضیه پرش خرگوش در مورد منبع جریان I_S، مدار به صورت روبرو خواهد شد. در ادامه با اجرای قانون تبدیل منبع در بالای مدار، آن را به صورت زیر ساده می‌کنیم.



حالا با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ، داریم:

$$-۲I_L+۲[I_L+\frac{dV_C}{dt}]-۲I_S+\frac{dV_C}{dt}+V_C=۰$$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۱}{۳}V_C+\frac{۲}{۳}I_S \qquad (۱)$$



با نوشتن KVL در حلقه سمت راست، داریم:

$$۳I_L-۳I_S+\frac{dI_L}{dt}-V_C-\frac{dV_C}{dt}=۰ \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۳I_L-۳I_S+\frac{dI_L}{dt}-V_C-[-\frac{۱}{۳}V_C+\frac{۲}{۳}I_S]=۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=\frac{۲}{۳}V_C-۳I_L+\frac{۱۱}{۳}I_S \qquad (۳)$$

با نوشتن روابط (۱) و (۳) به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{cases}\frac{dV_C}{dt}=-\frac{۱}{۳}V_C+\frac{۲}{۳}I_S\\ \frac{dI_L}{dt}=\frac{۲}{۳}V_C-۳I_L+\frac{۱۱}{۳}I_S\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{dV_C}{dt}\\ \frac{dI_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۳} & ۰\\ \frac{۲}{۳} & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳}\\ \frac{۱۱}{۳}\end{bmatrix}I_S$$

مثال ۴: اگر ماتریس حالت سیستمی به شکل $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ -۱ & -۴\end{bmatrix}$ باشد، پاسخ ضربه آن در $t>۰$ به کدام شکل خواهد بود؟

۱) $k_۱e^{-۳t}+k_۲te^{-۳t}$

۲) $k_۱e^{۳t}+k_۲te^{۳t}$

۳) $k_۱e^{-۳t}+k_۲e^{۳t}$

۴) $k_۱e^{-۳t}\sin(۳t+\phi)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای یافتن شکل پاسخ ضربه مدار باید مقادیر ویژه ماتریس A را محاسبه کنیم. بدین منظور ابتدا چندجمله‌ای مشخصه مدار را بدست می‌آوریم:

$$\det(SI-A)=\det\left(S\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ -۱ & -۴\end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix}S+۲ & -۱\\ ۱ & S+۴\end{vmatrix}=(S+۲)(S+۴)+۱=S^۲+۶S+۹$$

حال مقادیر ویژه ماتریس برابر خواهند بود با:

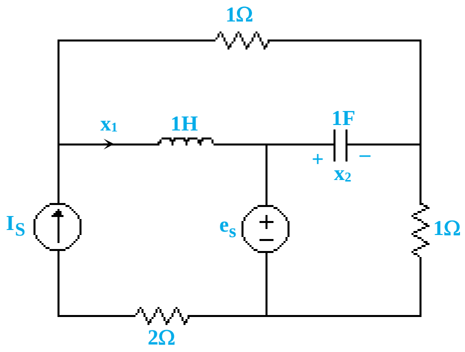
$$S^۲+۶S+۹=۰\Rightarrow\begin{cases}S_۱=-۳\\ S_۲=-۳\end{cases}$$

حال طبق توضیحات نکته قبل پاسخ ضربه مدار به صورت مقابل خواهد بود:

$$h(t)=\mathbf{k_۱e^{-۳t}+k_۲te^{-۳t}}$$

مثال۵: در مدار شکل زیر $x_۱$ جریان سلف و $x_۲$ ولتاژ خازن می‌باشد. اگر بردار حالت مدار $X=\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}$ باشد، در رابطه $\dot{X}=AX+BW$ که در آن $W=\begin{bmatrix}I_S\\e_s\end{bmatrix}$ می‌باشد، ماتریس‌های A و B کدامند؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۳)



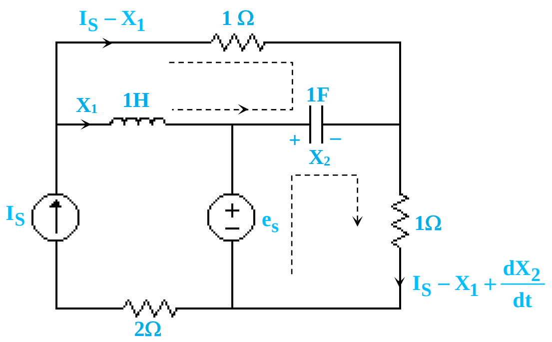
۱) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\-۱ & -۱\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\-۱ & ۱\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\۱ & -۱\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\-۱ & ۱\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\۱ & -۱\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\-۱ & ۱\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\۱ & -۱\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\-۱ & ۱\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جریان مقاومت ۱ اهمی بالا $I_S-X_۱$ بوده و جریان مقاومت ۱ اهمی سمت راست $I_S-X_۱+\frac{dX_۲}{dt}$ می‌باشد. با اعمال یک KVL در حلقه بالای مدار شامل سلف و خازن و مقاومت ۱Ω داریم:



$$\frac{dX_۱}{dt}+X_۲+(-۱)(I_S-X_۱)=۰\ \Rightarrow\ \frac{dX_۱}{dt}=-X_۱-X_۲+I_S \qquad (۱)$$

حال با اعمال KVL در حلقه سمت راست، شامل خازن و منبع ولتاژ و مقاومت یک اهمی داریم:

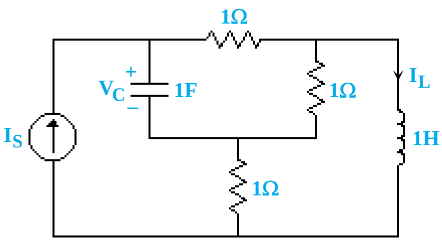
$$-e_s+X_۲+۱(I_S-X_۱+\frac{dX_۲}{dt})=۰\ \Rightarrow\ \frac{dX_۲}{dt}=X_۱-X_۲+e_s-I_S \qquad (۲)$$

حال معادلات (۱) و (۲) را مرتب کرده و به صورت معادلات حالت می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}\frac{dx_۱}{dt}\\\frac{dx_۲}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{X}_۱\\\dot{X}_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_۱\\X_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\-۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_S\\e_s\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\۱ & -۱\end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\-۱ & ۱\end{bmatrix}$$

مثال۶: در مدار مقابل بردار حالت $X=\begin{bmatrix}V_C\\I_L\end{bmatrix}$ است. هرگاه معادلات حالت به صورت $\frac{dx}{dt}=AX+BI_S$ نمایش داده شود، ماتریس A کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

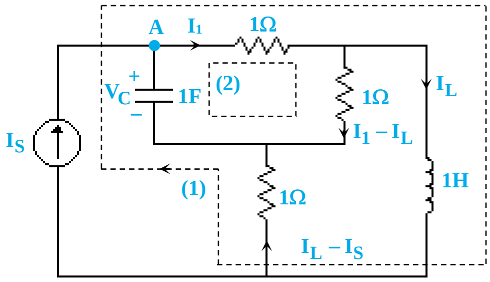


۱) $A=\begin{bmatrix}-۱ & -۰/۵\\۰/۵ & ۱/۵\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\-۱ & ۳\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}-۰/۵ & -۰/۵\\۰/۵ & -۱/۵\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\۱ & -۳\end{bmatrix}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با نوشتن KCL درگره A داریم:

$$I_S=I_۱+۱\times\frac{dV_C}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dV_C}{dt}=I_S-I_۱ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه (۱) شامل خازن و سلف داریم:

$$۱\times(I_L-I_S)-V_C+I_۱\times۱+\frac{dI_L}{dt}=۰ \qquad (۲)$$

با نگاه به معادلات بالا دیده می‌شود که $I_۱$ در معادلات (۲) و (۱) اضافه می‌باشد و باید حذف شود. حال با نوشتن KVL در حلقه (۲) داریم:

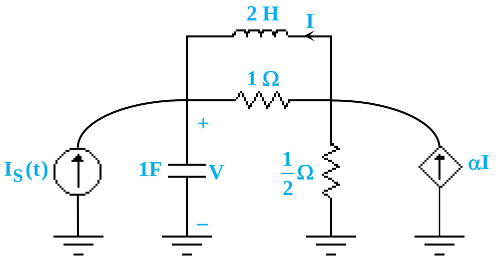
$$-V_C + I_۱ + ۱\times(I_۱ - I_L) = ۰ \quad \Rightarrow \quad I_۱ = \frac{V_C + I_L}{۲} \qquad (۳)$$

با جایگذاری $I_۱$ از معادله (۳) در معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_C}{dt} = -\dfrac{۱}{۲}V_C - \dfrac{۱}{۲}I_L + I_S \\ \dfrac{dI_L}{dt} = \dfrac{۱}{۲}V_C - \dfrac{۳}{۲}I_L + I_S \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{۱}{۲} & -\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{۱}{۲} & -\dfrac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

مثال ۷: اگر معادلات حالت مدار شکل زیر برحسب متغیرهای I و V به صورت $\dot{X} = Ax + Bw(t)$ نوشته شود، بردار B کدام است؟ $X = \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix}$

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)



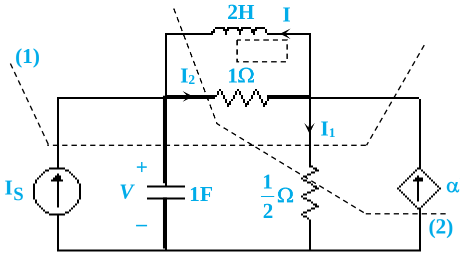
۱) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جهت حل مدار درختی مطابق شکل زیر انتخاب کرده و معادلات کاتست‌های اساسی و حلقه‌های اساسی را می‌نویسیم:



$$\frac{dV}{dt} + I_۱ = I_S(t) + \alpha I \qquad (۱)$$
کاتست شاخه خازنی (۱) :

$$\frac{۲dI}{dt} + I_۲ = ۰ \qquad (۲)$$
حلقه اساسی سلفی :

$$\alpha I + I_۲ = I + I_۱ \qquad (۳)$$
کاتست اساسی شاخه درخت مقاومتی (۲) :

$$\frac{۱}{۲}I_۱ + I_۲ = V \qquad (۴)$$
حلقه اساسی شاخه مقاومتی و خازنی :

معادلات (۳) و (۴) ساده شده و به صورت زیر خواهند بود:

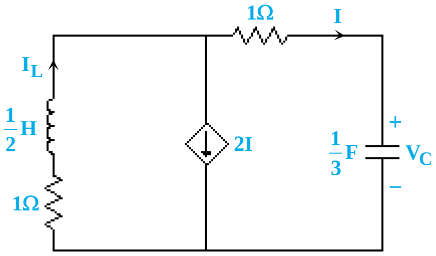
$$\begin{cases} \alpha I + I_۲ - I - I_۱ = ۰ \\ \dfrac{۱}{۲}I_۱ + I_۲ - V = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_۱ = \dfrac{۲}{۳}V + \dfrac{۲}{۳}(\alpha - ۱)I & (۵) \\ I_۲ = \dfrac{۲}{۳}V + \dfrac{۱}{۳}(۱ - \alpha)I & (۶) \end{cases}$$

با جایگذاری روابط (۵) و (۶) در روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dI}{dt} \\ \dfrac{dV}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{۱}{۶}(\alpha - ۱) & -\dfrac{۱}{۳} \\ \dfrac{۱}{۳}(\alpha + ۲) & -\dfrac{۲}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} (I_S) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۸: اگر در مدار نشان داده شده، معادلات حالت به صورت ماتریسی $\dot{X} = AX$ باشد، ماتریس ضرایب A برای بردار حالت $X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$ چه خواهد بود؟

(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۳)



۱) $\begin{bmatrix} -\dfrac{۸}{۳} & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -\dfrac{۸}{۳} & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -\dfrac{۴}{۳} & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -\dfrac{۴}{۳} & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$I_L=۳I=۳I_C \quad , \quad I_C=\frac{۱}{۳}\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow I_L=۳\times\frac{۱}{۳}\frac{dV_C}{dt}=\frac{dV_C}{dt} \qquad (۱)$$

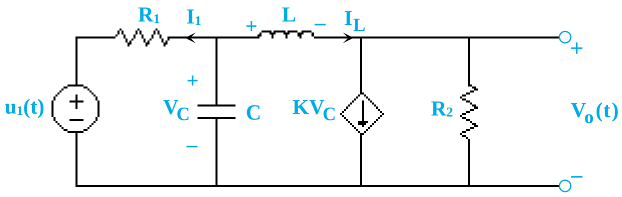
با توجه به وجود منبع جریان در شاخه وسطی، تنها مسیر KVL مناسب در مدار، حلقه بیرونی آن است. حال داریم:

$$I\times۱+V_C+I_L\times۱+\frac{۱}{۲}\frac{dI_L}{dt}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۳}I_L+V_C+I_L+\frac{۱}{۲}\frac{dI_L}{dt}=۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=-۲V_C-\frac{۸}{۳}I_L \qquad (۲)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{dI_L}{dt}=-\dfrac{۸}{۳}I_L-۲V_C\\[2mm] \dfrac{dV_C}{dt}=I_L-۰V_C\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dfrac{dI_L}{dt}\\[2mm] \dfrac{dV_C}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{۸}{۳} & -۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_L\\ V_C\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{۸}{۳} & -۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

✍ **مثال ۹:** معادلات حالت (State) و خروجی مدار زیر برابر با کدام گزینه است؟ ماتریس‌های حالت و خروجی به صورت $y=[V_0 \quad I_L]$ و $X=[V_C \quad I_L]$ تعریف شده است. (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)



۱)
$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-\dfrac{۱}{R_۱C} & -\dfrac{۱}{C}\\[2mm] \dfrac{KR_۲}{L}+\dfrac{۱}{L} & -\dfrac{R_۲}{L}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}\dfrac{۱}{R_۱C}\\ ۰\end{bmatrix}u_۱(t)$$
$$y=\begin{bmatrix}-KR_۲ & R_۲\\ -\dfrac{۱}{R_۱} & ۰\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}۰\\ -\dfrac{۱}{R_۱}\end{bmatrix}u_۱(t)$$

۲)
$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-\dfrac{۱}{R_۱C} & -\dfrac{۱}{C}\\[2mm] \dfrac{KR_۲}{L} & -\dfrac{R_۲}{L}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}\dfrac{۱}{R_۱C}\\ ۰\end{bmatrix}u_۱(t)$$
$$y=\begin{bmatrix}۰ & R_۲\\ -\dfrac{۱}{R_۱} & ۰\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}۰\\ -\dfrac{۱}{R_۱}\end{bmatrix}u_۱(t)$$

۳)
$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-\dfrac{۱}{R_۱C} & -\dfrac{۱}{C}\\[2mm] \dfrac{۱}{L} & -\dfrac{R_۲}{L}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}\dfrac{۱}{R_۱C}\\ ۰\end{bmatrix}u_۱(t)$$
$$y=\begin{bmatrix}KR_۲ & R_۲\\ -\dfrac{۱}{R_۱} & ۰\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}۰\\ \dfrac{۱}{R_۱C}\end{bmatrix}u_۱(t)$$

۴)
$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-\dfrac{۱}{R_۱C} & -\dfrac{۱}{C}\\[2mm] \dfrac{KR_۲}{L}+\dfrac{۱}{L} & -\dfrac{R_۲}{L}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}۰\\ \dfrac{۱}{R_۱C}\end{bmatrix}u_۱(t)$$
$$y=\begin{bmatrix}-KR_۲ & R_۲\\ -R_۱ & ۰\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}۰\\ -\dfrac{۱}{R_۱}\end{bmatrix}u_۱(t)$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن KCL در گره بالای خازن داریم:

$$I_C+I_L+I_۱=۰ \quad , \quad I_۱=\frac{V_C-u_۱(t)}{R_۱} \quad , \quad I_C=C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\Rightarrow C\frac{dV_C}{dt}+I_L+\frac{V_C-u_۱(t)}{R_۱}=۰ \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=\frac{-I_L}{C}-\frac{V_C}{R_۱C}+\frac{u_۱(t)}{R_۱C} \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه شامل سلف و خازن و مقاومت $R_۲$ داریم:

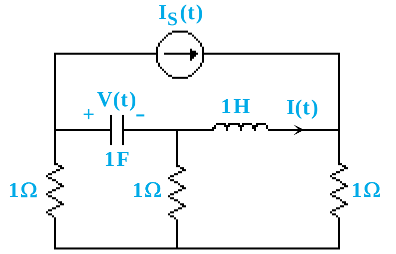
$$V_L+R_۲(I_L-KV_C)-V_C=۰ \quad , \quad V_L=L\frac{dI_L}{dt} \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=(\frac{KR_۲}{L}+\frac{۱}{L}).V_C-\frac{R_۲}{L}.I_L \qquad (۲)$$

با مرتب‌سازی معادلات (۱) و (۲) به صورت ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{dV_C}{dt}\\[2mm] \dfrac{dI_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{۱}{R_۱C} & -\dfrac{۱}{C}\\[2mm] \dfrac{KR_۲}{L}+\dfrac{۱}{L} & -\dfrac{R_۲}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{۱}{R_۱C}\\ ۰\end{bmatrix}.u_۱(t)$$

مثال۱۰: در مدار مقابل بردار حالت $X=\begin{pmatrix}V(t)\\I(t)\end{pmatrix}$ می‌باشد. در این صورت ماتریس A در نمایش معادلات حالت به صورت $\dot{X}=AX+BW$ کدام گزینه است؟

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۸)



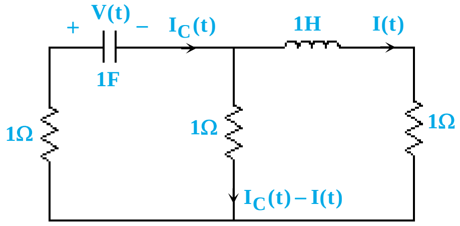
۱) $\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}-۰/۵ & ۰/۵\\ -۰/۵ & -۱/۵\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}۰/۵ & ۱/۵\\ ۰/۵ & ۰/۵\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آنجایی که تست تنها ماتریس A را می‌خواهد، می‌توانیم برای حل آن منبع ورودی مدار را غیرفعال کنیم. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مطابق شکل روبرو داریم:



$$۱\times I_C(t)+V(t)+۱\times(I_C(t)-I(t))=۰$$

$$\Rightarrow \frac{dV(t)}{dt}=I_C(t)=-\frac{V(t)}{۲}+\frac{I(t)}{۲} \qquad (۱)$$

اکنون در حلقه سمت راست KVL می‌زنیم:

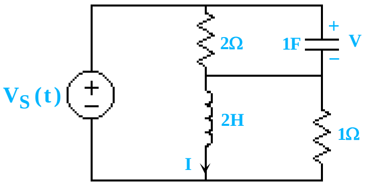
$$۱\times\frac{dI}{dt}+۱\times I(t)-۱\times(I_C(t)-I(t))=۰\xrightarrow{(۱)}\frac{dI(t)}{dt}+I(t)+\frac{V(t)}{۲}-\frac{I(t)}{۲}+I(t)=۰\Rightarrow\frac{dI(t)}{dt}=-\frac{V(t)}{۲}-\frac{۳}{۲}I(t) \qquad (۲)$$

با کنار هم قرار دادن روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{bmatrix}\dot{V}(t)\\ \dot{I}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V(t)\\ I(t)\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

مثال۱۱: معادلات حالت مدار شکل داده شده بر حسب متغیرهای حالت V (ولتاژ دو سر خازن) و I (جریان گذرنده از سلف) در قالب ماتریسی چنین است:

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)



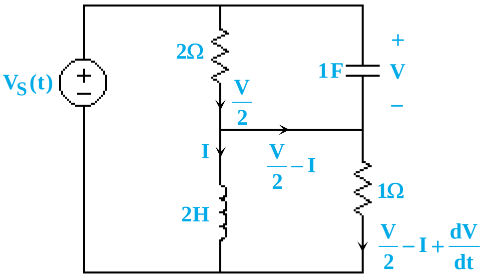
۱) $\begin{bmatrix}\frac{dV}{dt}\\ \frac{dI}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۲} & ۱\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}V_S(t)$

۲) $\begin{bmatrix}\frac{dV}{dt}\\ \frac{dI}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۱\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}V_S(t)$

۳) $\begin{bmatrix}\frac{dV}{dt}\\ \frac{dI}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۱\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}V_S(t)$

۴) $\begin{bmatrix}\frac{dV}{dt}\\ \frac{dI}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & -۱\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}V_S(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل مدار ابتدا جریان شاخه اتصال کوتاه و جریان مقاومت ۱ اهم را مشخص می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه شامل خازن و سلف و منبع ولتاژ داریم:



$$V+۲\frac{dI}{dt}=V_S(t)\ \Rightarrow\ \frac{dI}{dt}=-\frac{۱}{۲}V+\frac{۱}{۲}V_S(t)$$

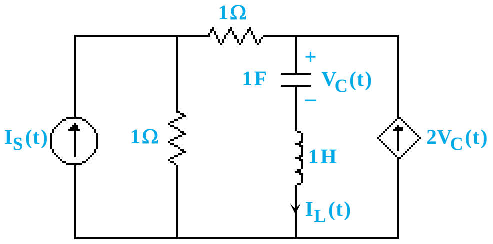
با نوشتن KVL در حلقه بیرونی مدار داریم:

$$V+\frac{dV}{dt}+\frac{V}{۲}-I=V_S(t)\ \Rightarrow\ \frac{dV}{dt}=I-\frac{۳}{۲}V+V_S(t)$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{dV}{dt}\\ \frac{dI}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۱\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}V_S(t)$$

مثال ۱۲: در مدار شکل مقابل، اگر دستگاه معادلات حالت بصورت $\frac{dX}{dt}=AX(t)+BI_S(t)$ نوشته شود، A کدام است؟ $X(t)=\begin{pmatrix}V_C(t)\\ I_L(t)\end{pmatrix}$

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۹)



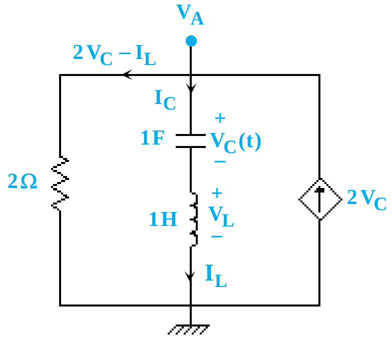
۱) $\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ ۵ & -۲\end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۵ & -۲\end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۳ & -۲\end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ ۳ & -۲\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** برای محاسبه ماتریس A، می‌توانیم منبع جریان مستقل $I_S(t)$ را غیرفعال (مدار باز) کنیم. حال در حلقه سمت چپ که شامل سلف است، رابطه KVL را می‌نویسیم و در گره‌ای که خازن به آن متصل است، KCL می‌زنیم.



$$V_A=V_C+V_L=V_C+\frac{dI_L}{dt}$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_C+\frac{dI_L}{dt}}{۲}+I_C=۲V_C \Rightarrow \frac{V_C}{۲}+\frac{۱}{۲}\frac{dI_L}{dt}+\frac{dV_C}{dt}=۲V_C \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}+\frac{۱}{۲}\frac{dI_L}{dt}=۱/۵V_C \quad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_C+\frac{dI_L}{dt}-۲(۲V_C-I_L)=۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=-V_C+۴V_C-۲I_L \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=۳V_C-۲I_L \quad (۲)$$

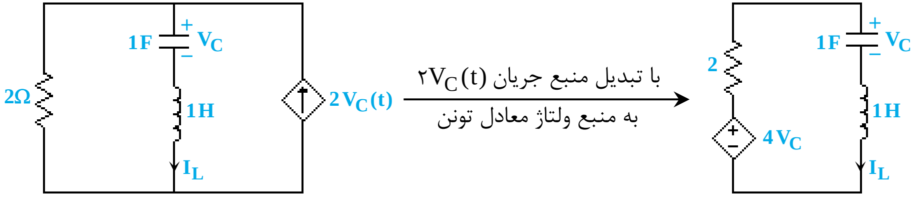
با قرار دادن رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{dV_C}{dt}+\frac{۱}{۲}[۳V_C-۲I_L]=۱/۵V_C \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=I_L \quad (۳)$$

با کنار هم قرار دادن روابط (۳) و (۲) و نوشتن آنها به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix}\frac{dV_C}{dt}\\ \frac{dI_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$$

روش دوم: بعد از خنثی کردن منبع جریان $I_S(t)$ داریم:



$$I_C=I_L$$

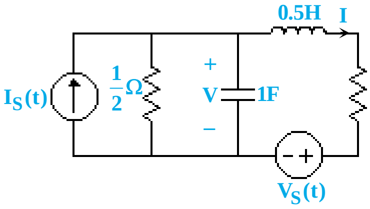
$$\frac{dV_C}{dt}=I_L$$

با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

$$-۴V_C+۲I_L+V_C+\frac{dI_L}{dt}=۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=۳V_C-۲I_L \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{dV_C}{dt}\\ \frac{dI_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}$$

مثال ۱۳: در مدار زیر معادلات حالت بر حسب متغیرهای V و I به صورت $\begin{bmatrix}\dot{V}\\ \dot{I}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}V\\ I\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}I_S\\ V_S\end{bmatrix}$ است. ماتریس‌های A و B به ترتیب کدامند؟

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۹۰)



۱) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & -۵\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}$

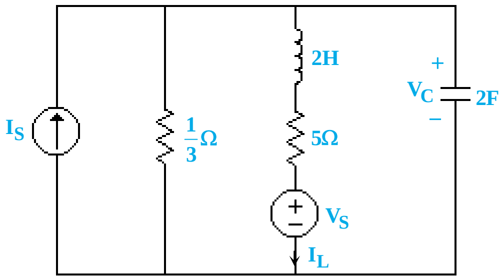
۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۵ & -۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با نوشتن KCL در گره بالای مدار و نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$\begin{cases}\frac{dV}{dt}+۲V+I=I_S & (۱)\\ \frac{۱}{۲}\frac{dI}{dt}+۲/۵I+V_S-V=۰ & (۲)\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{dV}{dt}\\ \frac{dI}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_S\\ V_S\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}$$

آزمون فصل هفتم

۱ـ در مدار زیر ماتریس A در صورتی که متغیرهای حالت V_C و I_L باشد، کدام است؟



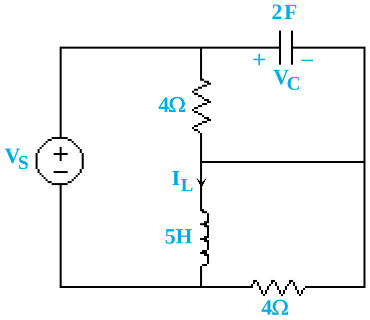
۱) $\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۲ـ در مدار زیر ماتریس‌های A و B کدام است؟ (متغیرهای حالت V_C و I_L است)



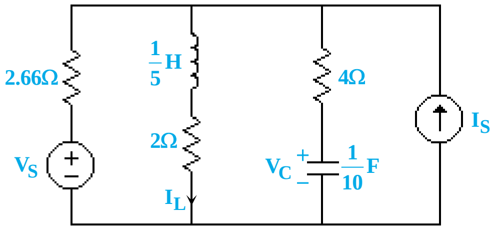
۱) $B = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۸} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & ۱ \\ -\frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۲) $B = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۸} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۳) $B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۸} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$

۴) $B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۸} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$

۳ـ در مدار زیر در صورتی که معادلات حالت به صورت V_C و I_L باشند، ماتریس A کدام است؟



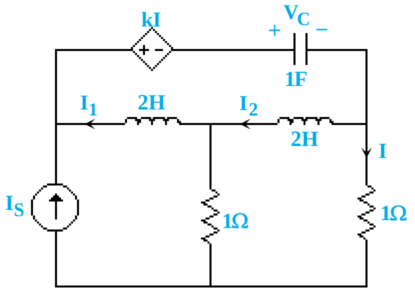
۱) $\begin{bmatrix} -۱۸ & ۲ \\ -۴ & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱۸ & ۲ \\ -۴ & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۱۸ & -۲ \\ ۴ & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱۸ & -۲ \\ -۴ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

۴ـ در مدار زیر مقدار k کدام باشد تا ماتریس B در معادلات حالت به صورت $\begin{bmatrix} -۲ \\ \frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$ باشد؟



۱) -۱

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۵ـ در مدار تست قبل ماتریس A با فرض K = ۳ کدام است؟

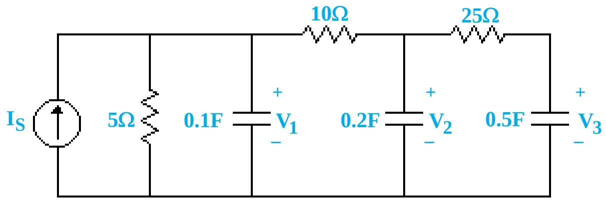
۱) $\begin{bmatrix} -\frac{۵}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۵}{۲} \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -\frac{۵}{۲} & \frac{۵}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -\frac{۵}{۲} & \frac{۵}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} & \frac{۵}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۶ـ در مدار زیر در صورتی که $V_۱$ ، $V_۲$ و $V_۳$ به عنوان متغیرهای حالت انتخاب شوند، آنگاه ماتریس **A** کدام است؟



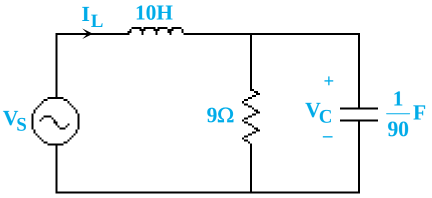
۱) $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -۰/۷ & ۰/۲ \\ ۰ & ۰/۰۸ & -۰/۰۸ \end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -۰/۷ & -۰/۲ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix} -۳ & -۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰/۷ & -۰/۲ \\ ۰ & -۰/۰۸ & -۰/۰۸ \end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix} -۳ & -۱ & ۰ \\ \frac{-۱}{۲} & -۰/۷ & ۰/۲ \\ ۱ & ۰/۰۸ & -۰/۰۸ \end{bmatrix}$

۷ـ با فرض انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به صورت متغیرهای حالت، کدام گزینه معادلات حالت مدار مقابل را نمایش می‌دهد؟



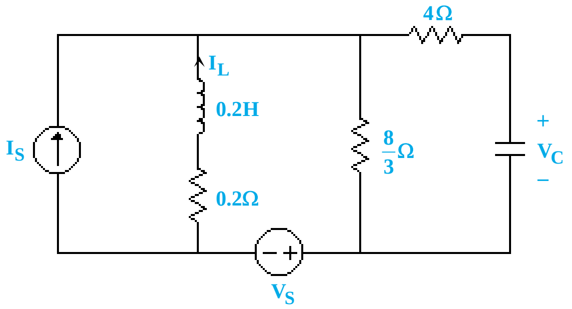
۱) $\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۰/۱ \\ ۹۰ & -۱۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰/۱ \\ ۰ \end{bmatrix}.V_S$

۲) $\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۰/۱ \\ ۱۰ & ۹۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۱ \end{bmatrix}.V_S$

۳) $\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۰/۱ \\ ۱۰ & ۹۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۱ \end{bmatrix}.V_S$

۴) $\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۰/۱ \\ ۹۰ & ۱۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰/۱ \\ ۰ \end{bmatrix}.V_S$

۸ـ در مدار زیر مقدار ظرفیت خازن برحسب فاراد کدام باشد تا ماتریس **A** در معادلات حالت $\dot{X}=AX$ به صورت زیر باشد؟



$$A=\begin{bmatrix} -۱۸ & -۲ \\ ۴ & -۱/۵ \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

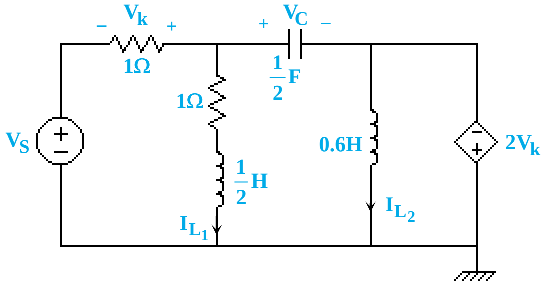
۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

۴) ۰/۴

۹ـ در مدار زیر با فرض انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف‌ها به عنوان متغیرهای حالت، ماتریس **A** کدام است؟



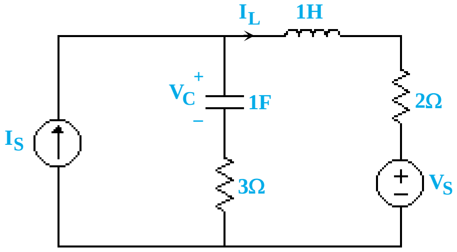
۱) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱۰}{۹} & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۰/۶۶ \end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰/۶۶ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱۰}{۹} \\ -۲ & ۰ & -۰/۶۶ \end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰/۶۶ \\ -\frac{۱۰}{۹} & -۱ & ۰ \\ \frac{۱۰}{۹} & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰/۶۶ \\ ۱ & ۰ & -۰/۶۶ \\ -۱ & ۰ & -\frac{۱۰}{۹} \end{bmatrix}$

۱۰ـ در مدار مقابل ماتریس‌های **B** و **A** کدام است؟



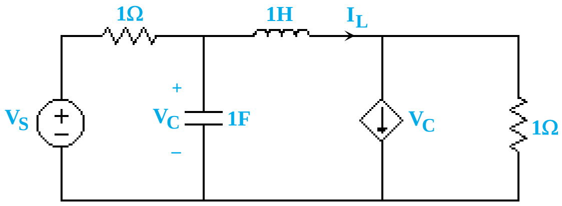
۱) $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۵ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۵ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$

۱۱ـ ماتریس A در مدار زیر با فرض $X = [V_C \quad I_L]^T$ کدام است؟



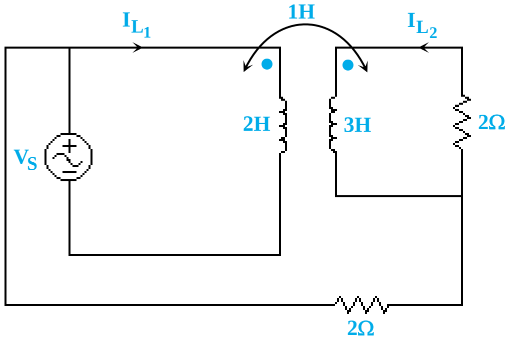
۱) $A = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۲) $A = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$

۴) $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۲ \end{bmatrix}$

۱۲ـ در مدار زیر ماتریس A در معادلات حالت کدام است؟ $(X = [I_{L_۱} \quad I_{L_۲}]^T)$



۱) $A = \begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۲}{۵} \\ ۰ & -\frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$

۲) $A = \begin{bmatrix} -\frac{۲}{۵} & ۰ \\ -\frac{۵}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $A = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۲}{۵} \\ ۰ & -\frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$

۴) $A = \begin{bmatrix} -\frac{۲}{۵} & ۰ \\ \frac{۵}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$

۱۳ـ در مدار تست قبل ماتریس B کدام است؟

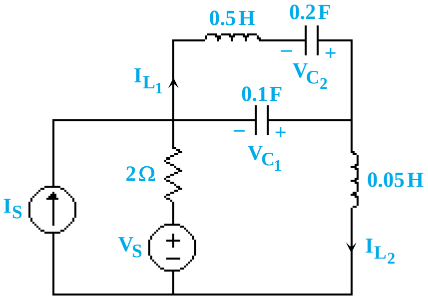
۱) $\begin{bmatrix} -۲ \\ -۴ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -\frac{۲}{۵} \\ \frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$

۱۴ـ در مدار زیر معادلات حالت در کدام گزینه موجود است؟



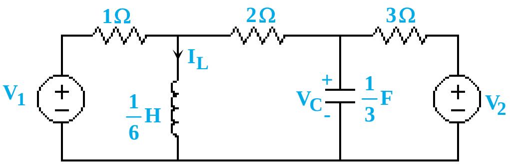
۱)
$$\begin{cases} \dot{I}_{L_۲} = ۴۰ I_S + ۲۰ V_S + ۲۰ V_{C_۱} - ۴۰ I_{L_۲} \\ \dot{I}_{L_۱} = ۲V_{C_۲} - ۲V_{C_۱} \\ \dot{V}_{C_۲} = -۵I_{L_۱} \\ \dot{V}_{C_۱} = ۱۰ I_{L_۱} - ۱۰ I_{L_۲} \end{cases}$$

۲)
$$\begin{cases} \dot{I}_{L_۲} = ۲۰ I_S + V_S + ۱۰ I_{L_۲} \\ \dot{I}_{L_۱} = ۳V_{C_۲} - ۵V_{C_۱} \\ \dot{V}_{C_۲} = -۳I_{L_۱} - ۲V_{C_۱} \\ \dot{V}_{C_۱} = -۳I_{L_۱} \end{cases}$$

۳)
$$\begin{cases} \dot{I}_{L_۲} = ۳۰ I_S + ۱۰ V_S + ۱۰ I_{L_۱} - I_{L_۲} \\ \dot{I}_{L_۱} = ۲V_{C_۱} - ۲V_{C_۲} \\ \dot{V}_{C_۲} = -۵I_{L_۲} \\ \dot{V}_{C_۱} = ۳I_{L_۱} - ۲I_{L_۲} \end{cases}$$

۴)
$$\begin{cases} \dot{I}_{L_۲} = ۴۰ I_S - ۲۰ V_S + ۲۰ V_{C_۱} - ۱۰ V_{C_۲} \\ \dot{I}_{L_۱} = ۲V_{C_۲} + ۲V_{C_۱} \\ \dot{V}_{C_۲} = ۵I_{L_۱} \\ \dot{V}_{C_۱} = ۱۰ I_{L_۱} + ۱۰ I_{L_۲} \end{cases}$$

۱۵ـ معادلات حالت در مدار زیر کدام است؟



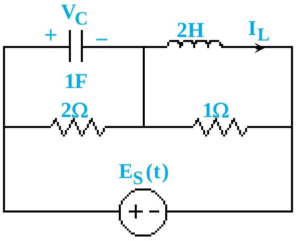
۱) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}$

۱۶ـ معادلات حالت مدار زیر برحسب متغیرهای حالت (V_C : ولتاژ دو سر خازن) و (I_L : جریان گذرنده از سلف) به صورت ماتریسی کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{dI_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -۱ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} E_S(t)$

۲) $\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{dI_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} E_S(t)$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{dI_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} E_S(t)$

۴) $\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{dI_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} E_S(t)$

۱۷ـ در صورتی که پاسخ ضربه یک مدار به صورت $h(t) = ۹e^{-۴t} + ۶e^{-۶t}$ باشد، اگر معادلات حالت مدار به صورت $\dot{X} = AX + BW$ تعریف شود، آنگاه ماتریس A در کدام گزینه وجود دارد؟

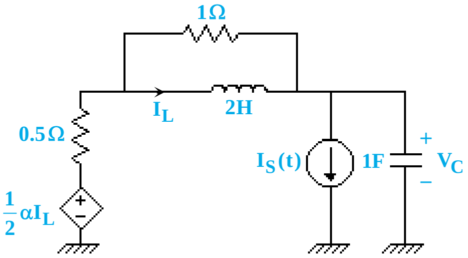
۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲۴ \\ ۰ & -۱۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۲۴ & ۰ \\ ۱۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & -۲۴ \\ ۱ & -۱۰ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲۴ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۱۸ـ در مدار زیر در صورتی که معادلات به صورت $\dot{X} = AX + BW$ نوشته شود و بردار $X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A در کدام گزینه موجود است؟



۱) $\begin{bmatrix} \alpha - ۱ & -\frac{۱}{۳} \\ \alpha + ۲ & -\frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$

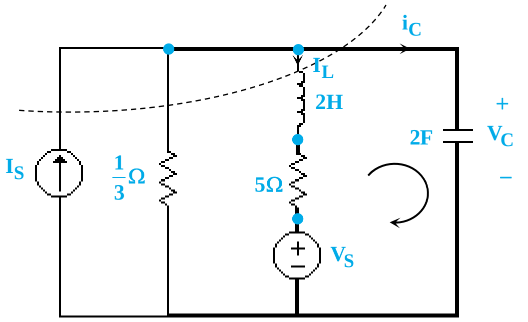
۲) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶}(\alpha - ۱) & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳}(\alpha + ۲) & -\frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶}(\alpha - ۱) & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳}(\alpha + ۲) & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \alpha - ۱ & \frac{۱}{۳} \\ \alpha + ۲ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$

پاسخنامه آزمون فصل هفتم

۱ـ گزینه «۱» ابتدا درختی شامل خازن‌ها و منابع ولتاژ را در مدار مشخص می‌کنیم:

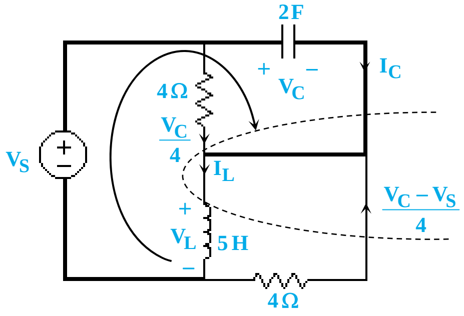


حال معادلات حلقه اساسی و کات‌ست اساسی مورد نیاز را می‌نویسیم:

$$\text{کاتست اساسی}: I_C + I_L + \frac{V_C}{\frac{۱}{۳}} - I_S = ۰ \Rightarrow ۲\frac{dV_C}{dt} = -I_L - ۳V_C + I_S \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = -\frac{۱}{۲}I_L - \frac{۳}{۲}V_C + \frac{I_S}{۲}$$

$$\text{حلقه‌ی اساسی}: V_C - V_S - ۵I_L - ۲\frac{dI_L}{dt} = ۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = \frac{۱}{۲}V_C - \frac{۵}{۲}I_L - \frac{V_S}{۲} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا درخت مناسب را انتخاب می‌کنیم:



حال معادلات حلقه‌های اساسی و کات‌ست‌های اساسی را می‌نویسیم:

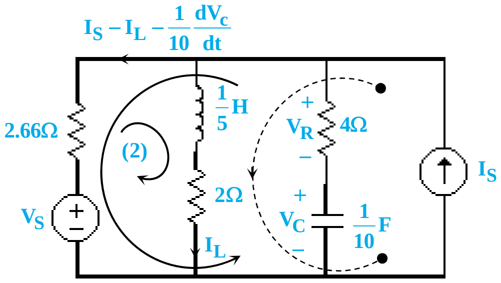
$$\text{کاتست اساسی}: \frac{۲dV_C}{dt} - I_L + \frac{V_C - V_S}{۴} + \frac{V_C}{۴} = ۰ \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C}{۴} + \frac{۱}{۲}I_L + \frac{V_S}{۸} \qquad (۱)$$

$$\text{حلقه اساسی}: -V_S + V_C + ۵\frac{dI_L}{dt} = ۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = -\frac{V_C}{۵} + \frac{V_S}{۵} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dI_L}{dt} \\ \frac{dVC}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۸} \end{bmatrix} V_S$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا درخت مناسب برای مدار را مشخص می‌کنیم:

$$\text{کاتست اساسی}: \frac{۱}{۱۰}\frac{dV_C}{dt} = \frac{V_R}{۴} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{۵}{۲}V_R$$



حلقه اساسی (۱):

$$V_R = ۲/۶۶ \times (I_S - I_L - \frac{۱}{۱۰}\frac{dV_C}{dt}) + V_S - V_C$$

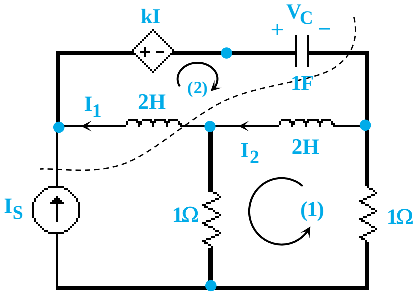
$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{۵}{۲}(۲/۶۶I_S - ۲/۶۶I_L - ۰/۲۶۶\frac{dV_C}{dt} + V_S - V_C) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = -۱/۵V_C - ۴I_L + ۱/۵V_S + ۴I_S \qquad (۱)$$

$$\text{حلقه‌ی اساسی (۲)}: \frac{۱}{۵}\frac{dI_L}{dt} + ۲I_L - V_S - ۲/۶۶(I_S - I_L - \frac{۱}{۱۰}\frac{dV_C}{dt}) = ۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = ۲V_C - ۱۸I_L + ۱/۶I_S + ۰/۶V_S \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۸ & ۲ \\ -۴ & -۱/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶ & ۰/۶ \\ ۴ & ۱/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_S \\ V_S \end{bmatrix}$$

۴ـ گزینه «۴» با انتخاب درخت مناسب معادلات حالت مدار را بدست می‌آوریم (ولتاژ خازن و جریان سلف‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب شده‌اند):



کاتست اساسی: $\frac{dV_C}{dt}-I_۱-I_S=۰ \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=I_۱+I_S$ (۱)

حلقه‌ی اساسی (۱): $\frac{۲dI_۲}{dt}+(I_۲-I_۱)+(I_۲-I_۱-I_S)=۰ \Rightarrow \frac{dI_۲}{dt}=I_۱-I_۲+\frac{۱}{۲}I_S$ (۲)

حلقه‌ی اساسی (۲): $\frac{۲dI_۱}{dt}+kI+V_c-(I_۲-I_۱-I_S)-(I_۲-I_۱)=۰ \quad , \quad I=I_S+I_۱-I_۲$

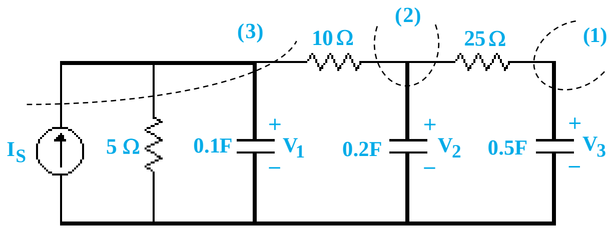
$$\frac{dI_۱}{dt}=-\frac{(k+۲)}{۲}I_۱+\frac{(k+۲)}{۲}I_۲-\frac{(k+۱)}{۲}I_S-\frac{V_C}{۲} \qquad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳) \rightarrow B=\begin{bmatrix}-\frac{(k+۱)}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\ \frac{۱}{۲}\\ ۱\end{bmatrix} \Rightarrow k=۳$$

۵ـ گزینه «۲» با توجه به معادلات حالت به دست آمده در تست قبل، با فرض $k=۳$ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{۵}{۲} & \frac{۵}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۶ـ گزینه «۱» با انتخاب درخت مناسب و نوشتن معادلات حلقه اساسی و کاتست اساسی داریم:



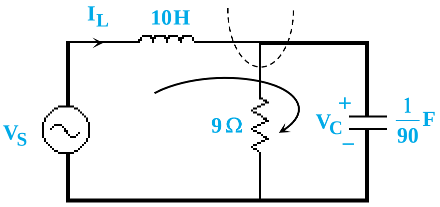
کاتست (۱): $۰/۵\frac{dV_۳}{dt}=\frac{V_۲-V_۳}{۲۵} \Rightarrow \frac{dV_۳}{dt}=۰/۰۸V_۲-۰/۰۸V_۳$ (۱)

کاتست (۲): $۰/۲\frac{dV_۲}{dt}+\frac{V_۲-V_۱}{۱۰}+\frac{V_۲-V_۳}{۲۵}=۰ \Rightarrow \frac{dV_۲}{dt}=۰/۵V_۱-۰/۷V_۲+۰/۲V_۳$ (۲)

کاتست (۲): $۰/۱\frac{dV_۱}{dt}+\frac{V_۱}{۵}+\frac{V_۱-V_۲}{۱۰}=I_S \Rightarrow \frac{dV_۱}{dt}=-۳V_۱+V_۲+۱۰I_S$ (۳)

$$(۱),(۲),(۳) \rightarrow A=\begin{bmatrix}-۳ & ۱ & ۰\\ ۰/۵ & -۰/۷ & ۰/۲\\ ۰ & ۰/۰۸ & -۰/۰۸\end{bmatrix}$$

۷ـ گزینه «۱» با انتخاب درخت مناسب و نوشتن معادلات حلقه‌ی اساسی و کاتست اساسی داریم:

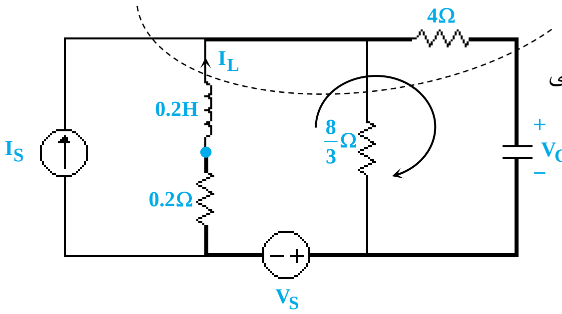


کاتست اساسی: $\frac{۱}{۹۰}\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C}{۹}=I_L \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-۱۰V_C+۹۰I_L$ (۱)

حلقه‌ی اساسی: $۱۰\frac{dI_L}{dt}+V_C-V_S=۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=-۰/۱V_C+۰/۱V_S$ (۲)

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{dI_L}{dt}\\ \frac{dV_C}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۰/۱\\ ۹۰ & -۱۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_L\\ V_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰/۱\\ ۰\end{bmatrix}V_S$$

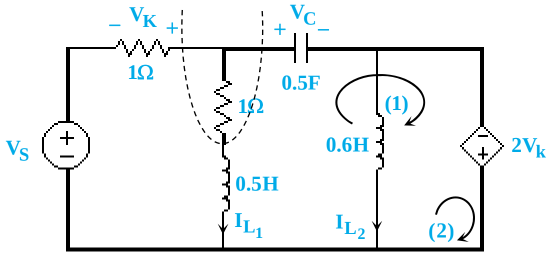
۸ـ گزینه «۱» با انتخاب درخت مناسب معادلات حلقه‌ی اساسی و کاتست اساسی را به دست می‌آوریم:



کاتست اساسی: $C\frac{dV_C}{dt}+\frac{۳}{۸}(V_C+۴c\frac{dV_C}{dt})=I_L+I_S \Rightarrow (C+\frac{۳c}{۲})\frac{dV_C}{dt}=-\frac{۳}{۸}V_C+I_L+I_S$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۳}{۲۰C}V_C+\frac{۲}{۵C}I_L+\frac{۲}{۵C}I_S \Rightarrow \begin{cases}-\frac{۳}{۲۰C}=-۱/۵\\ \frac{۲}{۵C}=۴\end{cases} \Rightarrow C=۰/۱\ F$$

۹ـ گزینه «۲» با انتخاب درخت مناسب، معادلات حلقه اساسی و کاتست اساسی را بدست می‌آوریم:



کاتست اساسی: $۰/۵\frac{dV_C}{dt}+I_{L۱}+V_k=۰$

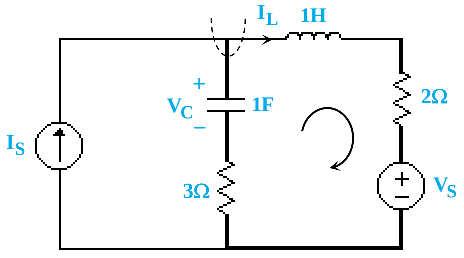
$$V_k=V_C-۲V_k-V_S \Rightarrow V_k=\frac{V_C-V_S}{۳} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۲}{۳}V_C-۲I_{L۱}+\frac{۲}{۳}V_S \qquad (۱)$$

حلقه‌ی اساسی (۱): $۰/۵\frac{dI_{L۱}}{dt}+۲V_k-V_C+I_{L۱}=۰ \Rightarrow \frac{dI_{L۱}}{dt}=\frac{۲}{۳}V_C-۲I_{L۱}+\frac{۴}{۳}V_S \qquad (۲)$

حلقه‌ی اساسی (۲): $۰/۶\frac{dI_{L۲}}{dt}+۲V_k=۰ \Rightarrow \frac{dI_{L۲}}{dt}=-\frac{۱۰}{۹}V_C+\frac{۱۰}{۹}V_S \qquad (۳)$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{i}_{L۱}\\ \dot{i}_{L۲}\\ \dot{V}_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰/۶۶\\ ۰ & ۰ & -\frac{۱۰}{۹}\\ -۲ & ۰ & -۰/۶۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{L۱}\\ I_{L۲}\\ V_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱/۳۳\\ \frac{۱۰}{۹}\\ ۰/۶۶\end{bmatrix}V_S$$

۱۰ـ گزینه «۴» با انتخاب درخت مناسب، معادلات حلقه‌ی اساسی و کاتست اساسی را بدست می‌آوریم:



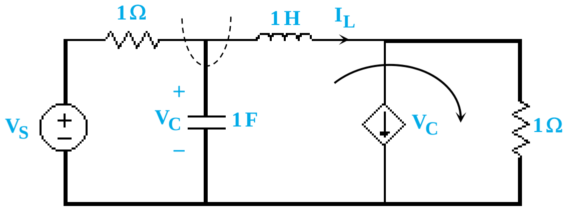
کاتست اساسی: $\frac{dV_C}{dt}+I_L=I_s \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-I_L+I_S \qquad (۱)$

حلقه‌ی اساسی: $\frac{dI_L}{dt}+۲I_L+V_S+۳\times(I_L-I_S)-V_C=۰$

$$\Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=V_C-۵I_L+۳I_S-V_S \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_S\\ V_S\end{bmatrix}$$

۱۱ـ گزینه «۳» با انتخاب درخت مناسب، معادلات حلقه اساسی و کاتست اساسی را به دست می‌آوریم:

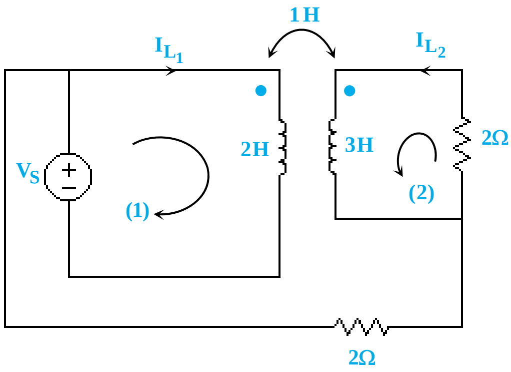


کاتست اساسی: $\frac{dV_C}{dt}=-I_L+\frac{V_S-V_C}{۱} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-V_C-I_L+V_S \qquad (۱)$

حلقه‌ی اساسی: $\frac{dI_L}{dt}+(I_L-V_C)-V_C=۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=۲V_C-I_L \qquad (۲)$

$$(۱),(۲) \rightarrow A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$$

۱۲ـ گزینه «۳» با اعمال KVL در حلقه‌های مشخص‌شده داریم:



$$\text{kvl (۱)}:\frac{۲dI_{L۱}}{dt}+\frac{dI_{L۲}}{dt}=V_S \qquad (۱)$$

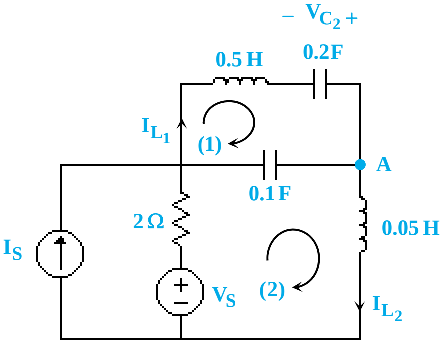
$$\text{kvl (۲)}:۲I_{L۲}+۳\frac{dI_{L۲}}{dt}+\frac{dI_{L۱}}{dt}=۰ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\ \rightarrow\ -۴I_{L۲}-۶\frac{dI_{L۲}}{dt}+\frac{dI_{L۲}}{dt}=V_S\ \Rightarrow \begin{cases}\frac{dI_{L۱}}{dt}=\frac{۲}{۵}I_{L۲}+\frac{۳}{۵}V_S\\ \frac{dI_{L۲}}{dt}=-\frac{۴}{۵}I_{L۲}-\frac{V_S}{۵}\end{cases}$$

۱۳ـ گزینه «۲» با توجه به معادلات بدست آمده در تست قبل داریم:

$$B=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}\\ -\frac{۱}{۵}\end{bmatrix}$$

۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به شکل مدار داریم:



$$I_{L۱}=-I_{C_۲}=-۰/۲\,\dot{V}_{C_۲}\ \Rightarrow\ \dot{V}_{C_۲}=-۵I_{L۱}$$

$$KVL(۱):۰/۵\,\dot{I}_{L۱}-V_{C_۲}+V_{C_۱}=۰\ \Rightarrow\ \dot{I}_{L۱}=۲V_{C_۲}-۲V_{C_۱}$$

$$KVL(۲):-V_{C_۱}+۰/۰۵\,\dot{I}_{L۲}-V_S-۲\times(I_S-I_{L۱}+۰/۱\dot{V}_{C_۱})=۰$$

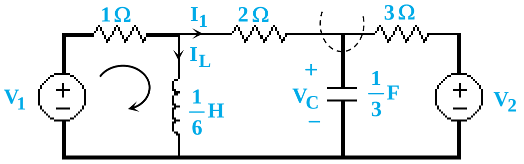
$$\Rightarrow \dot{I}_{L۲}=۲۰V_{C_۱}+۲۰V_S+۴۰I_S-۴۰I_{L۱}+۴\dot{V}_{C_۱} \qquad (*)$$

$$KCL(A):۰/۲\,\dot{V}_{C_۲}+۰/۱\,\dot{V}_{C_۱}+I_{L۲}\ \Rightarrow\ \dot{V}_{C_۱}=۱۰I_{L۱}-۱۰I_{L۲}$$

$$\xrightarrow{(*)} \dot{I}_{L۲}=۲۰V_{C_۱}-۴۰I_{L۲}+۲۰V_S+۴۰I_S$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۱۵ـ گزینه «۱» با انتخاب درخت مناسب، معادلات حلقه‌ی اساسی و کاتست اساسی را بدست می‌آوریم:



$$\text{کاتست اساسی}:\frac{۱}{۳}\dot{V}_c+\frac{V_c-V_۲}{۳}=I_۱\ \Rightarrow\ \dot{V}_c=۳I_۱-V_c+V_۲$$

$$\text{حلقه اساسی}:\frac{۱}{۶}\dot{I}_L-V_۱+(I_L+I_۱)=۰\ \Rightarrow\ \dot{I}_L=-۶I_L-۶I_۱+۶V_۱$$

از طرفی داریم:

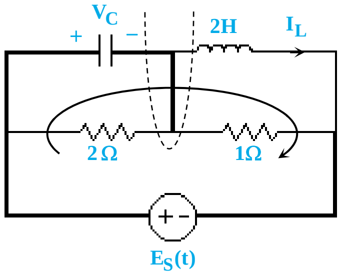
$$-V_۱+(I_۱+I_L)+۲I_۱+V_C=۰\rightarrow I_۱=\frac{V_۱-I_L-V_C}{۳}$$

بنابراین:

$$\dot{V}_C=-۲V_C-I_L+V_۱+V_۲ \quad \text{و} \quad \dot{I}_L=۲V_C-۴I_L+۴V_۱$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{I}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۲ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۴ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_۱\\ V_۲\end{bmatrix}$$

۱۶ـ گزینه «۴» با انتخاب درخت مناسب، معادلات حلقه‌ی اساسی و کاتست اساسی را بدست می‌آوریم:



$$\text{کاتست اساسی}:\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C}{۲}+\frac{V_C-E_S}{۱}-I_L=۰\Rightarrow\frac{dV_C}{dt}=-\frac{۳}{۲}V_C+I_L+E_S \qquad (۱)$$

$$\text{حلقه‌ی اساسی}:\frac{۲dI_L}{dt}-E_S+V_C=۰\Rightarrow\frac{dI_L}{dt}=-\frac{V_C}{۲}+\frac{E_S}{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{dV_C}{dt}\\ \frac{dI_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۱\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}E_S$$

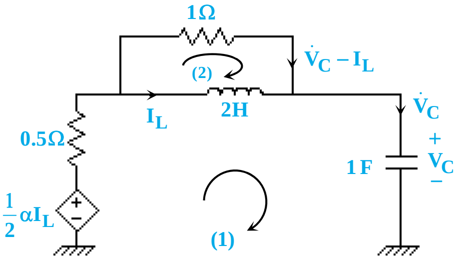
۱۷ـ گزینه «۳» با توجه به فرکانس‌های طبیعی ظاهر شده در پاسخ داریم:

$$\text{معادله‌ی مشخصه} = (S+۴)(S+۶) = S^۲ + ۱۰S + ۲۴ = \det(SI - A)$$

که این شرط تنها در گزینه‌ی ۳ برقرار می‌باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۲۴ \\ ۱ & -۱۰ \end{bmatrix} \rightarrow SI - A = \begin{bmatrix} S & ۲۴ \\ -۱ & S+۱۰ \end{bmatrix} \rightarrow \det(SI - A) = S^۲ + ۱۰S + ۲۴$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا جریان شاخه‌ها را مشخص می‌کنیم. سپس با اعمال KVL در دو حلقه‌ی موجود در مدار، معادلات حالت را بدست می‌آوریم (دقت شود چون می‌خواهیم فقط ماتریس A را بدست آوریم، می‌توانیم منابع مستقل را بی‌اثر کنیم):



$$KVL(۱): -\frac{۱}{۲}\alpha I_L + ۰/۵\dot{V}_c + ۲\dot{I}_L + V_c = ۰ \qquad (۱)$$

$$KVL(۲): \dot{V}_c - I_L = ۲\dot{I}_L \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \begin{cases} \dot{V}_c = -\frac{۲}{۳}V_c + \frac{(\alpha+۲)}{۳}I_L \\ \dot{I}_L = -\frac{۱}{۳}V_c + \frac{(\alpha-۱)}{۶}I_L \end{cases} \xrightarrow{X=\begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix}} A = \begin{bmatrix} \frac{(\alpha-۱)}{۶} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{(\alpha+۲)}{۳} & -\frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

فصل هشتم

«تبدیل لاپلاس و تابع شبکه»

مثال ۱: تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{۳t}\sin ۲t + ۲e^{-۲t}\cos ۳t$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\dfrac{S+۲}{(S+۲)^۲+۹} + \dfrac{۱}{(S-۳)^۲+۴}$
۲) $\dfrac{۲(S+۲)}{(S+۲)^۲+۹} - \dfrac{۲}{(S-۳)^۲+۴}$
۳) $\dfrac{۲(S+۲)}{(S+۲)^۲+۹} + \dfrac{۲}{(S-۳)^۲+۴}$
۴) $\dfrac{S+۲}{(S+۲)^۲+۴} - \dfrac{۱}{(S-۳)^۲+۹}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق قضیه انتقال فرکانسی داریم:

$$F(S) = \frac{۲}{(S-۳)^۲+۴} + \frac{۲(S+۲)}{(S+۲)^۲+۹}$$

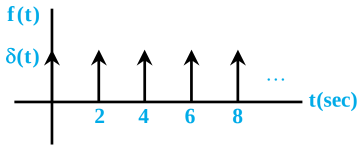
مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = u_۲(t) - ۲u_۱(t)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{e^{-۲S} - ۲e^{-S}}{S}$
۲) $\dfrac{e^{-۲S} + ۲e^{-S}}{S}$
۳) $\dfrac{۲e^{-S} + e^{۲S}}{S^۲}$
۴) $\dfrac{e^{۲S} + ۲e^{S}}{S^۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به فرم ساده‌تر نمایش تابع $f(t)$، تبدیل لاپلاس $f(t)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f(t) = u(t-۲) - ۲u(t-۱) \quad \Rightarrow \quad L[f(t)] = \frac{e^{-۲S}}{S} - \frac{۲e^{-S}}{S} = \frac{e^{-۲S} - ۲e^{-S}}{S}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع زیر کدام است؟



۱) $\dfrac{۱}{۱-e^{-۲S}}$
۲) $\dfrac{۱}{۱-e^{-S}}$
۳) $\dfrac{-۱}{۱+e^{-S}}$
۴) $\dfrac{-۱}{۱+e^{-۲S}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به نمودار تابع داده شده، تابع $f(t)$ را به صورت تابع $\delta(t)$ تکرار شونده با دوره تناوب $T = ۲(\text{sec})$ در نظر می‌گیریم. حال داریم:

$$f(t) = \delta(t) + \delta(t-۲) + \delta(t-۴) + \delta(t-۶) + \cdots$$

برای محاسبه تبدیل لاپلاس $f(t)$، تبدیل لاپلاس قسمت تکرار شونده یعنی همان $f_۱(t) = \delta(t)$ را بدست می‌آوریم و در عبارت $\left(\dfrac{۱}{۱-e^{-۲S}}\right)$ ضرب می‌کنیم.

$$f_۱(t) = \delta(t) \Rightarrow F_۱(S) = ۱ \Rightarrow L[f(t)] = F(S) = \frac{L[f_۱(t)]}{۱-e^{-TS}} = \frac{۱}{۱-e^{-۲S}}$$

مثال ۴: اگر تبدیل لاپلاس جریان $I(t)$ به صورت $I(S) = \dfrac{۱۰S+۴}{S(S+۱)(S^۲+۴S+۵)}$ باشد، مقدار $I(\infty)$ چند آمپر است؟

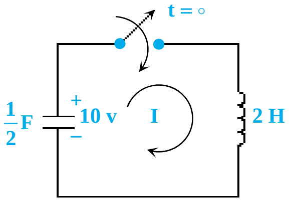
۱) $\dfrac{۴}{۵}$
۲) $\dfrac{۵}{۴}$
۳) ۴
۴) ۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$I(\infty) = \lim_{S\to ۰} S\,I(S) = \lim_{S\to ۰} \frac{S(۱۰S+۴)}{S(S+۱)(S^۲+۴S+۵)} = \frac{۴}{۵}A$$

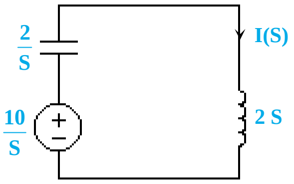
مثال ۵: در مدار شکل زیر ولتاژ اولیه خازن برابر ۱۰ ولت می‌باشد و کلید در $t = ۰$ بسته می‌شود. حال معادله زمانی $I(t)$ کدام است؟

۱) $۵\sin t\, u(t)$
۲) $\dfrac{۱}{۵}\sin t\, u(t)$
۳) $\dfrac{۱}{۵}\cos t\, u(t)$
۴) $۵\cos t\, u(t)$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه ولتاژ اولیه خازن ۱۰ ولت است و جریان اولیه سلف صفر است، مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.

حال با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

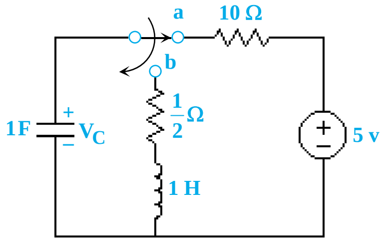


$$-\frac{۱۰}{S}+(\frac{۲}{S}+۲S)\times I(S)=۰ \Rightarrow I(S)=\frac{\frac{۱۰}{S}}{\frac{۲}{S}+۲S}=\frac{۵}{S^۲+۱}$$

با استفاده از قانون عکس تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathbf{I(t)=L^{-۱}[I(S)]=۵\sin t\,u(t)}$$

مثال ۶: در مدار شکل زیر، تبدیل لاپلاس $V_C(t)$ کدام می‌باشد؟ (کلید قبل از $t=۰$ مدت طولانی در حالت a قرار داشته و در $t=۰$ در وضعیت b قرار داده شده است.)



۱) $\frac{۱۰S^۲+۵S+۲۰}{S(۲S^۲+۳S+۱)}$

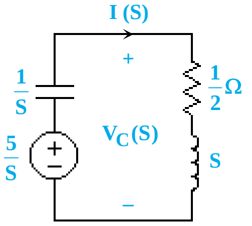
۲) $\frac{۱۰S^۲+۵}{S(۲S^۲+S+۲)}$

۳) $\frac{۵(S^۲+S)}{۲S^۲+S+۲}$

۴) $\frac{۱۰S^۲+۵S}{S(۲S^۲+S+۲)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» **روش اول:** وقتی کلید به مدت طولانی در وضعیت a باشد، آنگاه خازن مدار باز شده و ولتاژ اولیه آن $V_C(۰^-)=V_C(۰^+)=۵$ می‌باشد.

حال با نوشتن معادله KVL در مدار داریم:



$$(\frac{۱}{۲}+S+\frac{۱}{S})I(S)=\frac{۵}{S} \Rightarrow \frac{۲S^۲+S+۲}{۲S}\times I(S)=\frac{۵}{S} \Rightarrow I(S)=\frac{۱۰}{۲S^۲+S+۲}$$

$$V_C(S)=\frac{۵}{S}-\frac{۱}{S}I(S)=\frac{۱}{S}[۵-I(S)]=\mathbf{\frac{۱۰S^۲+۵S}{S(۲S^۲+S+۲)}}$$

روش دوم: با توجه به اینکه $V_C(۰^+)=۵v$ است، می‌توان از قضیه مقدار اولیه استفاده کرد.

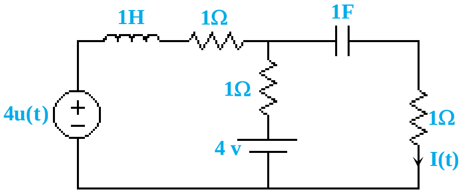
$$V_C(۰^+)=۵v=\lim_{S\to\infty}SV_C(S)$$

با تست گزینه‌ها دیده می‌شود که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) در این شرط صادق هستند. حال با توجه به اینکه $V_C(\infty)=۰$ است، با استفاده از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$V_C(\infty)=۰=\lim_{S\to۰}SV_C(S)$$

با تست گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) در شرط بالا، گزینه (۴) به عنوان جواب انتخاب می‌شود.

مثال ۷: در مدار مقابل معادله تغییرات جریان I(t) برحسب زمان در $t>۰$ کدام گزینه است؟



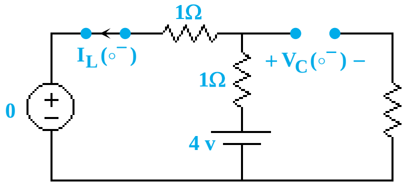
۱) $۲te^{-t}$

۲) te^{-t}

۳) $۲e^{-t}$

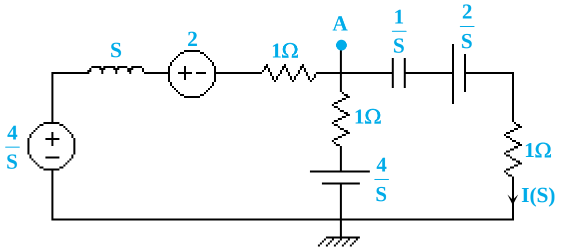
۴) e^{-t}

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مدار در $t=۰^-$ تحلیل می‌شود. در این حالت تابع ولتاژ $۴u(t)$ برابر صفر می‌باشد.



$$I_L(۰^-)=\frac{۴}{۲}=۲A \quad , \quad V_C(۰^-)=۲v$$

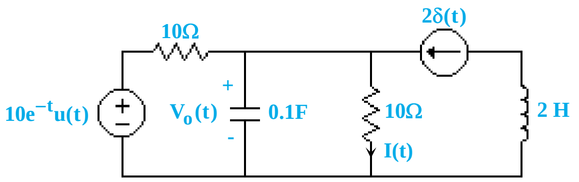
حال مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$\frac{V_A-\frac{۴}{S}}{۱}+\frac{V_A+۲-\frac{۴}{S}}{S+۱}+\frac{V_A-\frac{۲}{S}}{\frac{۱}{S}+۱}=۰ \Rightarrow V_A=\frac{۲(S+۲)}{S(S+۱)}$$

$$I(S)=\frac{V_A-\frac{۲}{S}}{۱+\frac{۱}{S}} \Rightarrow I(S)=\frac{\frac{۲(S+۲)}{S(S+۱)}-\frac{۲}{S}}{۱+\frac{۱}{S}}=\frac{۲}{(S+۱)^۲} \Rightarrow \mathbf{I(t)=۲te^{-t}\quad(t>۰)}$$

مثال۸: در مدار زیر معادله زمانی I(t) کدام گزینه است؟ $(V_C(۰^-)=۵)$



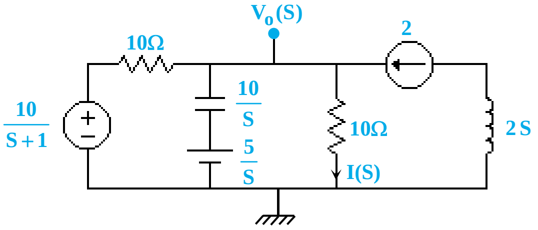
۱) $(۶e^{-t}-۳e^{-۲t})u(t)$

۲) $(e^{-t}+۱/۵e^{-۲t})u(t)$

۳) $۶e^{-۲t}\,u(t)$

۴) $۱۰\,e^{-t}u(t)$

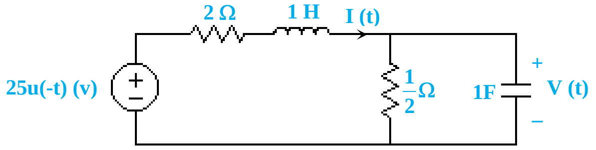
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید مدار در حوزه فرکانس ترسیم شود. حال با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



$$\frac{V_o}{۱۰}+\frac{V_o-\frac{۱۰}{S+۱}}{۱۰}+\frac{V_o-\frac{۵}{S}}{\frac{۱۰}{S}}=۲ \quad\Rightarrow\quad V_o(S)=\frac{۲۵S+۳۵}{(S+۱)(S+۲)}=\frac{۱۰}{S+۱}+\frac{۱۵}{S+۲}$$

$$V_o(t)=(۱۰e^{-t}+۱۵e^{-۲t})u(t) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I(t)=\frac{V_o(t)}{۱۰}=(e^{-t}+۱/۵e^{-۲t})u(t)}$$

مثال۹: در مدار مقابل معادلات I(t) و V(t) در $t>۰$ کدام است؟



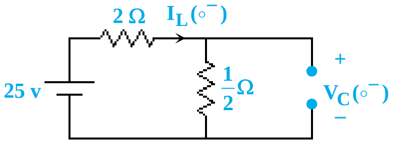
۱) $\begin{cases}I(t)=۱۰e^{-۲t}\cos t-۴e^{-۲t}\sin t\\V(t)=۱۰e^{-۲t}\cos t-۵e^{-۲t}\sin t\end{cases}$

۲) $\begin{cases}I(t)=۱۰e^{-۲t}\cos t+۵e^{-۲t}\sin t\\V(t)=۵e^{-۲t}\cos t-۱۰e^{-۲t}\sin t\end{cases}$

۳) $\begin{cases}I(t)=e^{-۲t}\cos t-۵e^{-۲t}\sin t\\V(t)=e^{-۲t}\cos t-e^{-۲t}\sin t\end{cases}$

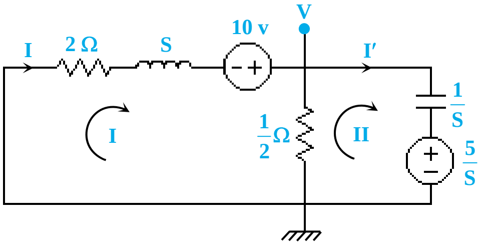
۴) $\begin{cases}I(t)=۱۰e^{-۲t}\cos t-۵e^{-۲t}\sin t\\V(t)=۵e^{-۲t}\cos t+۱۰e^{-۲t}\sin t\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا باید مدار در $t=۰^-$ تحلیل شود، لذا داریم:



$$I_L(۰^{\pm})=\frac{۲۵}{۲/۵}=۱۰A \quad و \quad V_C(۰^{\pm})=\frac{۲۵\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+۲}=۵v$$

با معادل‌گذاری المان‌ها در حوزه فرکانس و نوشتن KVL در دو حلقه مدار داریم:



$$\begin{cases}KVL(I):\ I(۲+S)-۱۰+\frac{۱}{۲}(I-I')=۰\\KVL(II):\ \frac{۱}{۲}(I'-I)+I'(\frac{۱}{S})+\frac{۵}{S}=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}I(۲+S+\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۲}I'=۱۰\\I(-\frac{۱}{۲})+I'(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S})=-\frac{۵}{S}\end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات به روش کرامر داریم:

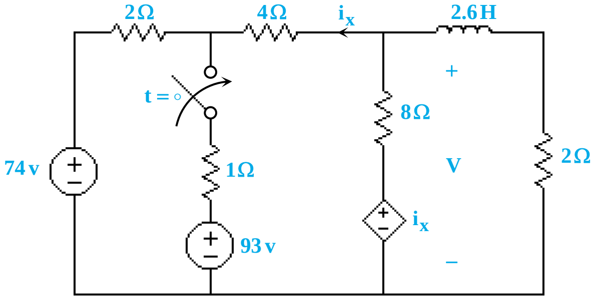
$$\Rightarrow I(S)=\frac{\begin{vmatrix}۱۰ & \frac{-۱}{۲}\\ \frac{-۵}{S} & \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۲/۵+S & \frac{-۱}{۲}\\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S}\end{vmatrix}}=\frac{۱۰(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S})-\frac{۱}{۲}[\frac{۵}{S}]}{(۲/۵+S)(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S})-\frac{۱}{۴}} \quad\Rightarrow\quad I(S)=\frac{۵+\frac{۱۰}{S}-\frac{۲/۵}{S}}{۱/۲۵+۰/۵S+\frac{۲/۵}{S}+۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۵S+۱۰-۲/۵}{۰/۵S^۲+۲S+۲/۵}$$

$$\Rightarrow\quad I(S)=\frac{۱۰S+۱۵}{S^۲+۴S+۵}=\frac{۱۰(S+۲)}{(S+۲)^۲+۱}-\frac{۵}{(S+۲)^۲+۱} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I(t)=۱۰\,e^{-۲t}\cos t-۵e^{-۲t}\sin t}$$

$$V(S)=-[I(S)(۲+S)]+۱۰ \quad\Rightarrow\quad V(S)=۱۰-\frac{۱۰S+۱۵}{S^۲+۴S+۵}\times(۲+S)$$

$$\Rightarrow\quad V(S)=\frac{۵S+۲۰}{(S+۲)^۲+۱}=\frac{۵(S+۲)}{(S+۲)^۲+۱}+\frac{۱۰}{(S+۲)^۲+۱} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{V(t)=۵e^{-۲t}\cos t+۱۰\,e^{-۲t}\sin t}$$

مثال ۱۰: کلید مدار شکل زیر در $t=۰$ بسته می‌شود. معادله‌ی $V(t)$ برای $t\ge ۰$ کدام است؟



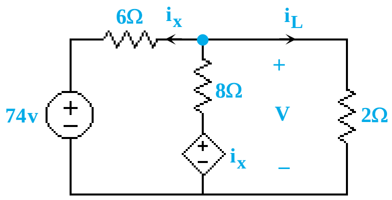
۱) $۱۰+۱۹/۶e^{-t}$

۲) $۲۰+۹/۶e^{-t}$

۳) $۲۰+۹/۶e^{-۲t}$

۴) $۱۰+۱۹/۶e^{-۲t}$

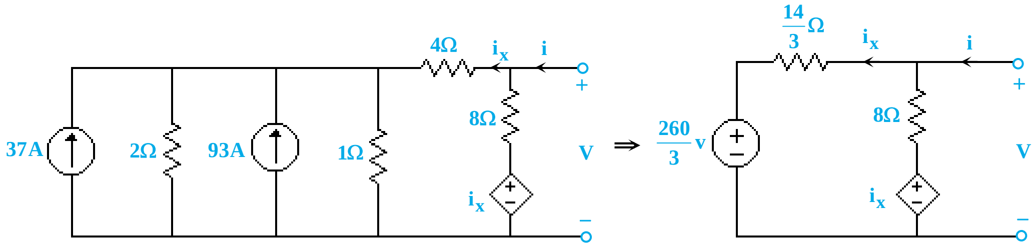
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این مثال، مثالی است که محاسبات سنگینی داشته و برای حل آن باید قدم به قدم و با دقت جلو رفت. ابتدا باید جریان سلف را در زمان $t=۰^-$ محاسبه کنیم. می‌دانیم که مدار زمان زیادی در حالت دائمی قرار داشته و بنابراین سلف باید اتصال کوتاه شود. حال مدار معادل مقابل را در نظر بگیرید:



با نوشتن i_x برحسب V و KCL زدن در گره مرکزی مدار می‌توان V و i_L را محاسبه نمود:

$$i_x=\frac{V-۷۴}{۶}\quad,\quad KCL:\ \frac{V-۷۴}{۶}+\frac{V-\frac{V-۷۴}{۶}}{۸}+\frac{V}{۲}=۰\ \Rightarrow\ V=۱۴v\ \Rightarrow\ i_L=\frac{V}{۲}=۷A$$

حال فرض می‌کنیم کلید بسته شده است. برای تحلیل ساده‌تر مدار، ابتدا مدار معادل تونن قسمت چپ مدار را طبق روند زیر بدست می‌آوریم:

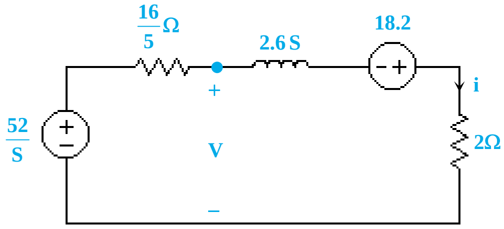


برای محاسبه معادل تونن نهایی مربوط به شکل سمت راست، مجبور به نوشتن روابط مدار هستیم. ابتدا رابطه KCL و سپس رابطه KVL را می‌نویسیم:

$$KCL:\ i=i_x+\frac{V-i_x}{۸}\Rightarrow i_x=\frac{۸}{۷}i-\frac{۱}{۷}V$$

$$KVL:\ V=\frac{۲۶۰}{۳}+\frac{۱۴}{۳}i_x=\frac{۲۶۰}{۳}+\frac{۱۴}{۳}\times(\frac{۸}{۷}i-\frac{۱}{۷}V)\Rightarrow V=۵۲+\frac{۱۶}{۵}i$$

مدار معادل نهایی را می‌توان با جایگذاری معادل تونن قسمت سمت چپ و همچنین اضافه کردن منبع ولتاژ معادل با جریان اولیه سلف در حوزه لاپلاس ترسیم نمود:



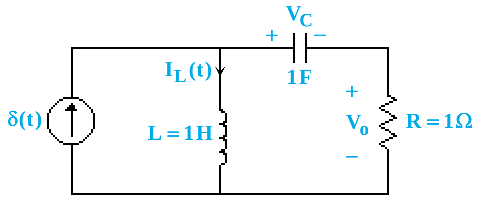
با KVL زدن در این مدار، جریان i بدست می‌آید:

$$\frac{۵۲}{S}+۱۸/۲=(۵/۲+۲/۶S)i(S)\Rightarrow\quad i(S)=\frac{۱۸/۲S+۵۲}{S(۲/۶S+۵/۲)}=\frac{۷S+۲۰}{S(S+۲)}$$

و در ادامه می‌توان $V(t)$ را محاسبه نمود:

$$V(S)=(۲/۶S+۲)i-۱۸/۲=(۲/۶S+۲)\frac{۷S+۲۰}{S(S+۲)}-۱۸/۲=\frac{۱۸/۲S^۲+۶۶S+۴۰}{S(S+۲)}-۱۸/۲=\frac{۲۰}{S}+\frac{۹/۶}{S+۲}\Rightarrow \mathbf{V(t)=۲۰+۹/۶e^{-۲t}}$$

مثال۱۱: در مدار شکل زیر، معادله ولتاژ $V_o(t)$ کدام گزینه است؟



$$\begin{cases} V_C(\circ^-) = ۱v \\ I_L(\circ^-) = ۱A \end{cases}$$

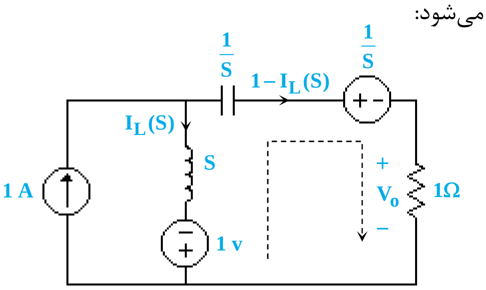
۱) $\delta(t) - ۲e^{-t}[\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \frac{۱}{۳}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}]\, u(t)$

۲) $\delta(t) - ۲e^{-\frac{t}{۲}}[\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t]u(t)$

۳) $\delta(t) + ۲e^{-t}[\cos\sqrt{۳}\, t + \sin\sqrt{۳}\, t]$

۴) $\delta(t) + e^{-t}[\cos\sqrt{۳}\, t + \sin\sqrt{۳}\, t]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با جایگذاری معادل‌های المان‌ها در حوزه فرکانس، مدار به صورت زیر ترسیم می‌شود:



حال با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$۱ - SI_L(S) + \frac{۱}{S}[۱ - I_L(S)] + \frac{۱}{S} + ۱ \times [۱ - I_L(S)] = \circ$$

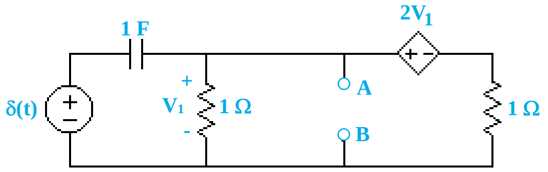
$$\Rightarrow \quad I_L(S) = \frac{۲S + ۲}{S^۲ + S + ۱} = \frac{۲(S + ۱)}{(S + \frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}$$

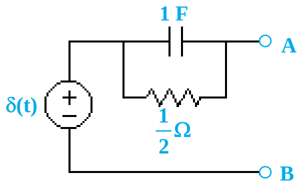
با تفکیک کسر بدست آمده، داریم:

$$I_L(S) = \frac{۲(S + \frac{۱}{۲})}{(S + \frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} + \frac{۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{(S + \frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} \quad \Rightarrow \quad I_L(t) = e^{-\frac{t}{۲}}(۲\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \frac{۲}{\sqrt{۳}}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t)u(t)$$

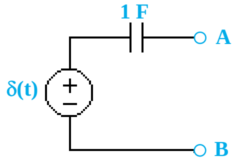
$$\mathbf{V_o(t) = ۱ \times [\delta(t) - I_L(t)] = \delta(t) - ۲e^{-\frac{t}{۲}}[\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t] \cdot u(t)}$$

مثال۱۲: مدار معادل تونن از دو سر A و B کدام است؟

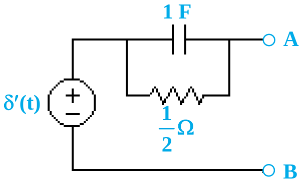




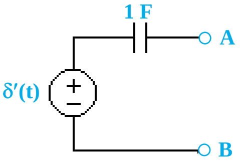
(۱)



(۲)

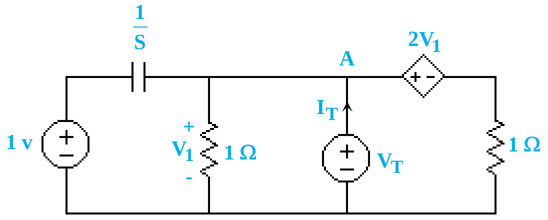


(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و اعمال V_T به مدار، رابطه I_T با V_T را بدست می‌آوریم.



با نوشتن KCL در گره A داریم:

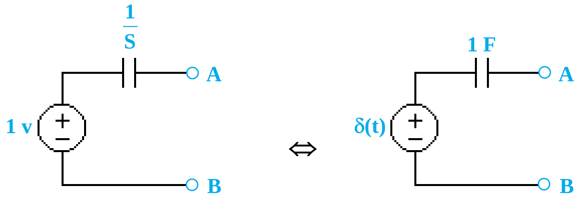
$$I_T = \frac{V_T}{۱} + \frac{V_T - ۱}{\frac{۱}{S}} + \frac{V_T - ۲V_T}{۱}$$

$$V_A = V_T = V_۱ \quad \Rightarrow \quad I_T = V_T + SV_T - S - V_T$$

$$\Rightarrow \quad I_T = V_T(۱ + S - ۱) - S = SV_T - S$$

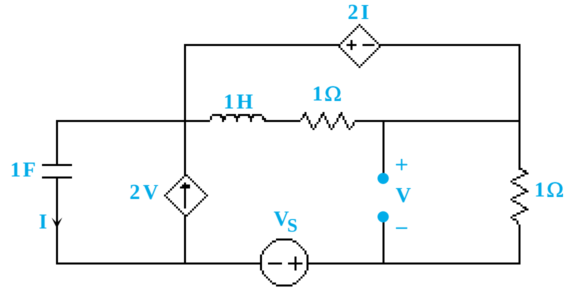
$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{I_T}{S} + \frac{S}{S} \quad \Rightarrow \quad V_T = \frac{۱}{S}I_T + ۱$$

با در نظر گرفتن رابطه $V_T = Z_{th}I_T + V_{th}$ مقادیر V_{th} و Z_{th} به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \quad V_{th} = L^{-۱}[۱] = \delta(t) \quad , \quad \mathbf{Z_{th} = \frac{۱}{S} \quad \Rightarrow \quad C = ۱F}$$

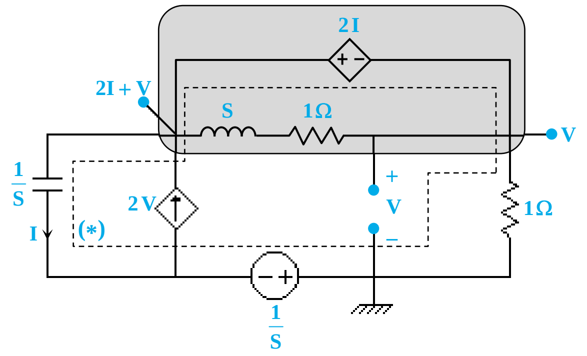
مثال۱۳: **در مدار زیر پاسخ پله برای جریان I در کدام گزینه وجود دارد؟**



۱) $-\frac{۱}{۳}e^{-\frac{۱}{۳}t}u(t)$ ۲) $\frac{۱}{۳}e^{\frac{۱}{۳}t}u(t)$

۳) $\frac{۱}{۳}e^{-\frac{۱}{۳}t}u(t)$ ۴) $-\frac{۱}{۳}e^{\frac{۱}{۳}t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه پاسخ پله، شرایط اولیه مدار را صفر فرض کرده و منبع V_S را برابر تابع $u(t)$ قرار می‌دهیم، در ادامه مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم:



با نوشتن KCL در ابرگره بالای مدار داریم:

$$I+\frac{V}{۱}=۲V \quad\Rightarrow\quad I=V \qquad (۱)$$

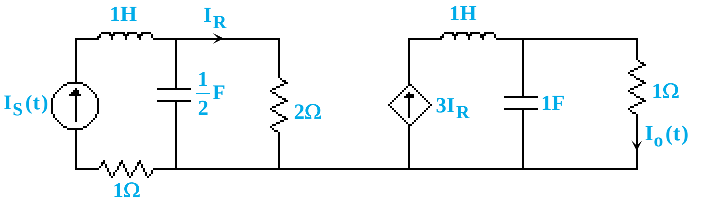
با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$-\frac{۱}{S}-V-۲I+I(\frac{۱}{S})=۰ \quad\Rightarrow\quad -\frac{۱}{S}-V+I(-۲+\frac{۱}{S})=۰ \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-\frac{۱}{S}-I-۲I+\frac{۱}{S}I=۰ \;\Rightarrow I(-۳+\frac{۱}{S})=\frac{۱}{S} \;\Rightarrow\; I=\frac{\frac{۱}{S}}{-۳+\frac{۱}{S}}=\frac{۱}{۱-۳S} \;\Rightarrow\; I=\frac{۱}{-۳(S-\frac{۱}{۳})}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{S-\frac{۱}{۳}} \;\Rightarrow\; \mathbf{I(t)=-\frac{۱}{۳}e^{\frac{۱}{۳}t}u(t)}$$

مثال۱۴: **پاسخ ضربه مدار زیر کدام گزینه است؟**



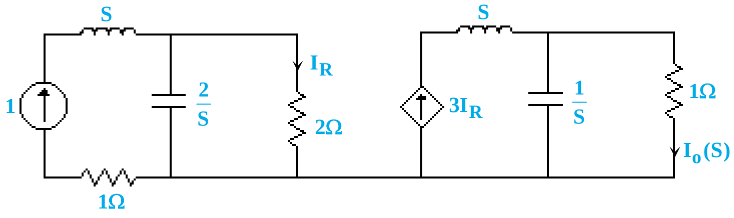
۱) $e^{-t}u(t)$

۲) $te^{-t}u(t)$

۳) $۳e^{-t}u(t)$

۴) $۳te^{-t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن قانون تقسیم جریان در سمت چپ آن داریم:

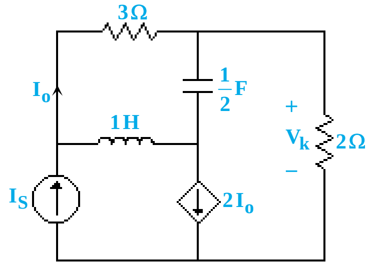


$$I_R(S)=۱\times\frac{\frac{۲}{S}}{۲+\frac{۲}{S}}=\frac{۱}{۱+S}$$

حال با نوشتن قانون تقسیم جریان برای مقاومت و خازن در سمت راست مدار داریم:

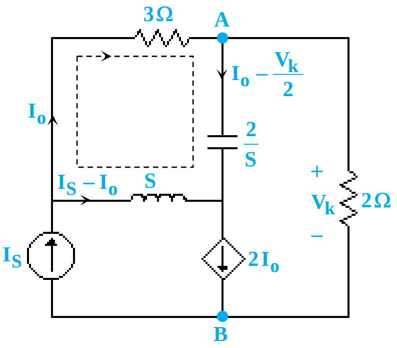
$$I_o(S)=۳I_R(S).\frac{\frac{۱}{S}}{۱+\frac{۱}{S}}=\frac{۳}{S+۱}.\frac{۱}{S+۱}=\frac{۳}{(S+۱)^۲} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I_o(t)=۳te^{-t}u(t)}$$

مثال۱۵: **در مدار زیر معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده I_o با I_S کدام است؟**



۱) $\frac{d^۲I_o}{dt^۲}+۳\frac{dI_o}{dt}+I_o=\frac{d^۲I_S}{dt^۲}+۲I_S$ ۲) $\frac{d^۲I_o}{dt^۲}-۳\frac{dI_o}{dt}+I_o=\frac{d^۲I_S}{dt^۲}-۲I_S$

۳) $\frac{d^۲I_o}{dt^۲}+۳\frac{dI_o}{dt}+۶I_o=\frac{d^۲I_S}{dt^۲}+۲I_S$ ۴) $\frac{d^۲I_o}{dt^۲}-۳\frac{dI_o}{dt}+۶=\frac{d^۲I_S}{dt^۲}-۲I_S$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده I_o با I_S، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و پاسخ خروجی مدار یا همان I_o را بر حسب I_S بدست می‌آوریم.
ابتدا با نوشتن KCL در گره A، جریان خازن را محاسبه می‌کنیم و در ادامه با نوشتن KVL در حلقه بالا و سمت چپ مدار داریم:

$$۳I_o + \frac{۲}{S}\times(I_o - \frac{V_k}{۲}) - S(I_S - I_o) = ۰ \quad \Rightarrow \quad I_o(۳ + \frac{۲}{S} + S) - \frac{V_k}{S} = SI_S \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$۲I_o + \frac{V_k}{۲} = I_S \quad \Rightarrow \quad V_k = -۴I_o + ۲I_S \qquad (۲)$$

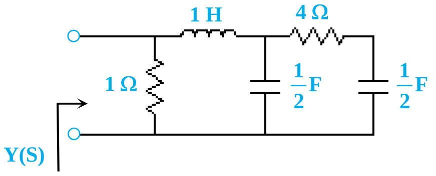
با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$I_o(۳ + \frac{۲}{S} + S) - \frac{(-۴I_o + ۲I_S)}{S} = SI_S \quad \Rightarrow \quad I_o(۳S + S^۲ + ۶) = I_S(S^۲ + ۲)$$

با جایگذاری $\frac{d^n}{dt^n} = S^n$ در معادله بالا داریم:

$$I_o(\frac{۳d}{dt} + \frac{d^۲}{dt^۲} + ۶) = I_S(\frac{d^۲}{dt^۲} + ۲) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{d^۲I_o}{dt^۲} + ۳\frac{dI_o}{dt} + ۶I_o = \frac{d^۲I_S}{dt^۲} + ۲I_S}$$

مثال ۱۶: کدام یک از توابع زیر مربوط به Y(S) یا ادمیتانس مدار زیر می‌باشد؟



۱) $\frac{S^۳ + ۲S^۲ + ۳S + ۱}{S^۳ + S^۲ + ۲S + ۱}$

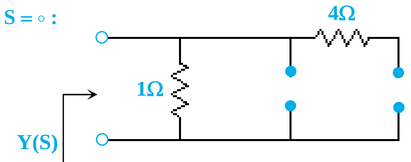
۲) $\frac{۲S^۳ + ۲S^۲ + S + ۱}{S^۳ + S^۲ + ۲S + ۱}$

۳) $\frac{S^۳ + ۲S^۲ + ۳S + ۲}{S^۳ + S^۲ + ۲S + ۴}$

۴) $\frac{۲S^۳ + S^۲ + ۲S + ۴}{S^۳ + S^۲ + S + ۳}$

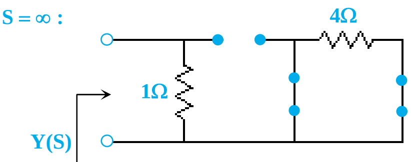
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن گزینه صحیح، مدار را در دو فرکانس $S = ۰$ و $S = \infty$ معادل‌سازی می‌کنیم. می‌دانیم که در $S = ۰$ خازن‌ها، مدار باز و سلف‌ها، اتصال کوتاه و در $S = \infty$ خازن‌ها، اتصال کوتاه و سلف‌ها، مدار باز هستند. لذا داریم:

$S = ۰$:



$Y(S) = ۱$

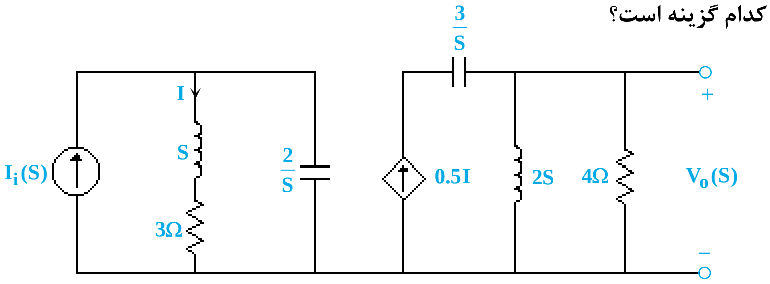
$S = \infty$:



$Y(S) = ۱$

با تست گزینه‌ها دیده می‌شود که فقط گزینه (۱) در $S = ۰$ و $S = \infty$ دارای $Y(S) = ۱$ است؛ لذا گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۱۷: در مدار زیر تابع شبکه به صورت $H(S) = \frac{V_o(S)}{I_i(S)}$ برابر کدام گزینه است؟



۱) $\frac{S^۲}{(S+۱)(S+۲)^۲}$

۲) $\frac{۱}{(S+۱)(S+۲)^۲}$

۳) $\frac{۴S}{(S+۱)(S+۲)^۲}$

۴) $\frac{S}{(S+۱)(S+۲)^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با اعمال قانون تقسیم جریان در سمت چپ مدار، معادله I را بدست می‌آوریم:

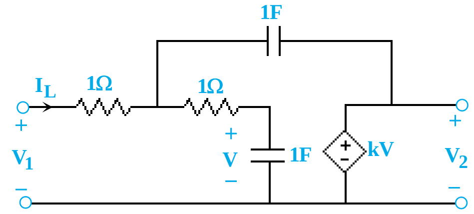
$$I(S) = \frac{I_i(S)\times\frac{۲}{S}}{S + ۳ + \frac{۲}{S}} = \frac{۲I_i(S)}{S^۲ + ۳S + ۲}$$

با نوشتن قانون اهم در سمت راست مدار برای مقاومت۴ اهمی به همراه سلف موازی با آن داریم:

$$V_o(S) = ۰/۵I(S)\times(۴ \| ۲S) = ۰/۵I(S)\times\frac{۴\times۲S}{۴+۲S} \quad \Rightarrow \quad V_o(S) = \frac{I_i(S)}{S^۲ + ۳S + ۲}\times\frac{۸S}{۲(۲+S)}$$

$$\Rightarrow \quad V_o(S) = I_i(S)\times\frac{۸S}{(S+۱)(S+۲)\times۲\times(۲+S)} \quad \Rightarrow \quad H(S) = \frac{V_o(S)}{I_i(S)} = \mathbf{\frac{۴S}{(S+۱)(S+۲)^۲}}$$

مثال۱۸: در مدار شکل زیر تابع شبکه انتقال ولتاژ $\mathbf{H(S)=\frac{V_{۲}(S)}{V_{۱}(S)}}$ به چه صورت است؟



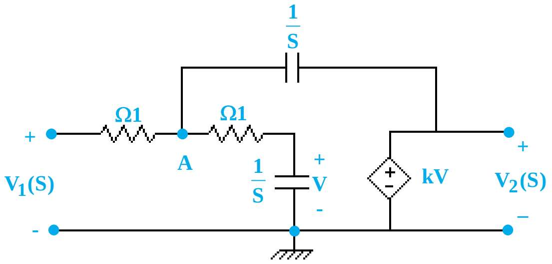
۱) $H(S)=\frac{k}{S^{۲}+(k-۳)S+۱}$

۲) $H(S)=\frac{k}{S^{۲}+(k-۳)S+۲}$

۳) $H(S)=\frac{k}{S^{۲}+(۳-K)S+۲}$

۴) $H(S)=\frac{k}{S^{۲}+(۳-k)S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن KCL در گره A داریم:



$$\frac{V_A-kV}{\frac{۱}{S}}+\frac{V_A}{۱+\frac{۱}{S}}+\frac{V_A-V_{۱}}{۱}=۰ \qquad (۱)$$

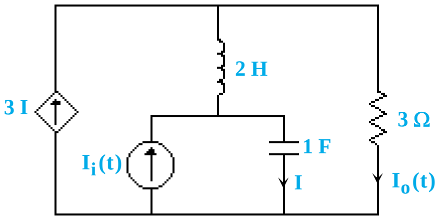
با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ برای ولتاژ V داریم:

$$V=V_A.\frac{\frac{۱}{S}}{\frac{۱}{S}+۱} \Rightarrow V=V_A\times\frac{۱}{S+۱} \qquad (۲)$$

با حذف رابطه V_A بین روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V=\frac{V_{۱}}{S^{۲}+۳S-kS+۱} \quad , \quad V_{۲}=kV \Rightarrow V_{۲}(S)=\frac{k}{S^{۲}+S(۳-k)+۱}.V_{۱}(S) \Rightarrow \mathbf{H(S)=\frac{V_{۲}(S)}{V_{۱}(S)}=\frac{k}{S^{۲}+S(۳-k)+۱}}$$

مثال۱۹: در مدار زیر تابع شبکه به صورت $\mathbf{H(S)=\frac{I_o(S)}{I_i(S)}}$ کدام است؟



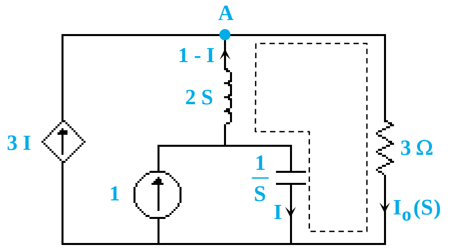
۱) $\frac{۶S^{۲}-۱۲S-۱}{۲S^{۲}-۲S+۱}$

۲) $\frac{۶S^{۲}+۱}{۲S^{۲}-۶S+۱}$

۳) $\frac{۶S^{۲}-۱۲S+۱}{۲S^{۲}+۶S+۱}$

۴) $\frac{۶S^{۲}+۱}{۲S^{۲}+۶S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن تابع شبکه $\frac{I_o(S)}{I_i(S)}$ می‌توان به جای $I_i(t)$ تابع $\delta(t)$ قرار داد و پاسخ ضربه مدار را برای $I_o(t)$ محاسبه کـرد. در این حالت $I_o(S)$ بدست آمده همان تابع شبکه است. با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$I_o(S)=۳I+(۱-I)=۲I+۱ \qquad (۱)$$

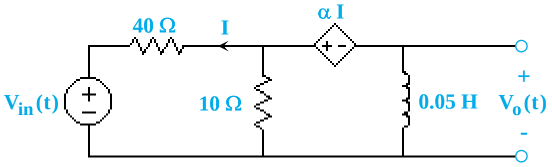
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$۲S(۱-I)+۳\times(۲I+۱)-\frac{I}{S}=۰ \Rightarrow I=\frac{-(۲S+۳)}{۶-۲S-\frac{۱}{S}} \qquad (۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$I_o(S)=۲\times[\frac{-(۲S+۳)}{۶-۲S-\frac{۱}{S}}]+۱ \Rightarrow I_o(S)=\frac{۶S^{۲}+۱}{۲S^{۲}-۶S+۱} \Rightarrow \mathbf{H(S)=\frac{۶S^{۲}+۱}{۲S^{۲}-۶S+۱}}$$

مثال۲۰: در مدار روبرو تابع شبکه $\mathbf{H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}}$ کدام است؟



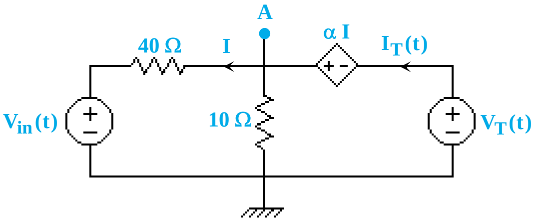
۱) $\frac{S(\alpha+۱۰)}{S-(\alpha-۴۰)}$

۲) $\frac{(\alpha+۱۰)S}{S-۴(\alpha-۴۰)}$

۳) $\frac{۰/۰۲S(\alpha+۱۰)}{S-(\alpha-۴۰)}$

۴) $\frac{۰/۰۲S(\alpha+۱۰)}{S-۴(\alpha-۴۰)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای بدست آوردن تابع شبکه، می‌توان از دو سر سلف معادل تونن دید و سپس سلف را در مدار قرار داد. لذا از دو سر سلف به مدار V_T اعمال می‌شود و رابطه V_T و I_T محاسبه می‌شود.



با نوشتن KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:

$$V_T(t) = -\alpha I + ۴۰ I + V_{in}(t) = I(۴۰ - \alpha) + V_{in}(t) \qquad (۱)$$

$$V_A = \alpha I + V_T(t) \qquad (۲)$$

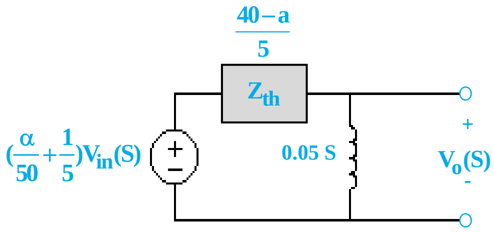
حال در گره A، KCL می‌زنیم:

$$I_T(t) = \frac{\alpha I + V_T(t)}{۱۰} + I \qquad (۳)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$V_T(t) = (\frac{۴۰-\alpha}{۵})I_T(t) + (\frac{\alpha}{۵۰} + \frac{۱}{۵})V_{in}(t) \Rightarrow Z_{th} = \frac{۴۰-\alpha}{۵} \quad , \quad V_{th} = (\frac{\alpha}{۵۰} + \frac{۱}{۵})V_{in}(t)$$

حال با جایگذاری مدار معادل تونن و با اعمال قانون تقسیم ولتاژ داریم:



$$V_o(S) = (\frac{\alpha}{۵۰} + \frac{۱}{۵})V_{in}(S).\frac{۰/۰۵S}{\frac{۴۰-\alpha}{۵} + ۰/۰۵S}$$

$$\Rightarrow \quad V_o(S) = V_{in}(S).\frac{۰/۰۲S(\alpha + ۱۰)}{S - ۴(\alpha - ۴۰)}$$

$$\Rightarrow \quad H(S) = \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)} = \frac{۰/۰۲S(\alpha + ۱۰)}{S - ۴(\alpha - ۴۰)}$$

مثال۲۱: در مدار مثال قبل در صورتی که $\alpha = ۲۰$ باشد، پاسخ پله مدار کدام است؟

۱) $e^{-۸۰t}u(t)$ ۲) $-۰/۶e^{-۸۰t}u(t)$ ۳) $۰/۶e^{-۸۰t}u(t)$ ۴) $-e^{-۸۰t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با ضرب لاپلاس تابع ورودی (که همان $u(t)$ باشد) در تابع شبکه، پاسخ پله محاسبه می‌شود:

$$V_o(S) = H(S).V_{in}(S) \Rightarrow V_o(S) = \frac{۰/۰۲S(۲۰+۱۰)}{S-۴(۲۰-۴۰)} \times \frac{۱}{S} \Rightarrow V_o(S) = \frac{۰/۶}{S+۸۰} \Rightarrow \mathbf{V_o(t) = ۰/۶e^{-۸۰t}u(t)}$$

مثال۲۲: پاسخ ضربه مداری به صورت $۲(\cos t - \cos ۲t)u(t)$ است. پاسخ این مدار به ورودی $(\cos ۳t)u(t)$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۴}\sin t - \frac{۴}{۵}\sin ۲t - \frac{۳۹}{۲۰}\sin ۳t)u(t)$

۲) $(\frac{۱}{۴}\sin t + \frac{۴}{۵}\sin ۲t + \frac{۹}{۲۰}\sin ۳t)u(t)$

۳) $(-\frac{۱}{۴}\sin t + \frac{۴}{۵}\sin ۲t - \frac{۹}{۲۰}\sin ۳t)u(t)$

۴) $(-\frac{۱}{۴}\sin t - \frac{۴}{۵}\sin ۲t + \frac{۹}{۲۰}\sin ۳t)u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» پاسخ مدار به ورودی مورد نظر، از حاصلضرب لاپلاس ورودی در لاپلاس پاسخ ضربه یا همان تابع شبکه بدست می‌آید.

$$H(S) = L[[۲(\cos t - \cos ۲t)]u(t)] = \frac{۲S}{S^۲+۱} - \frac{۲S}{S^۲+۴} \quad و \quad X_{in}(S) = L[\cos ۳t] = \frac{S}{S^۲+۹}$$

$$X_o(S) = H(S).X_{in}(S) = [\frac{۲S}{S^۲+۱} - \frac{۲S}{S^۲+۴}].\frac{S}{S^۲+۹} \Rightarrow X_o(S) = \frac{۲S}{S^۲+۱}.\frac{S}{S^۲+۹} - \frac{۲S}{S^۲+۴}.\frac{S}{S^۲+۹}$$

با تجزیه کسرهای فوق داریم:

$$X_o(S) = \frac{-\frac{۱}{۴}}{S^۲+۱} + \frac{\frac{۹}{۴}}{S^۲+۹} + \frac{\frac{۸}{۵}}{S^۲+۴} + \frac{-\frac{۱۸}{۵}}{S^۲+۹} \Rightarrow \mathbf{X_o(t) = (-\frac{۱}{۴}\sin t + \frac{۴}{۵}\sin ۲t - \frac{۹}{۲۰}\sin ۳t)u(t)}$$

مثال۲۳: در مدار مثال قبل پاسخ ضربه $V_o(t)$ کدام است؟

۱) $e^{-۰/۳۸t}$ ۲) $-e^{-۰/۳۸t}$ ۳) $۰/۱۵e^{-۰/۳۸t}$ ۴) $-۰/۱۵^{-۰/۳۸t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به بدست آوردن تابع $H(S)$ و نظر به اینکه تابع $H(S)$ همان پاسخ ضربه در حوزه فرکانس است، لذا پاسخ ضربه در حوزه زمان به صورت زیر است:

$$V_o(t) = L^{-۱}[\frac{-۱}{۶/۵S + ۲/۵}] = L^{-۱}[\frac{-۱}{۶/۵[S + \frac{۲/۵}{۶/۵}]}] = \frac{-۱}{۶/۵}e^{-۰/۳۸t} \Rightarrow \mathbf{V_o(t) = -۰/۱۵e^{-۰/۳۸t}}$$

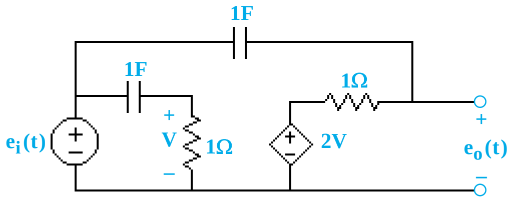
مثال ۲۴: در شبکه زیر تابع شبکه $H(S)=\frac{E_o(S)}{E_i(S)}$ کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۰)

۱) $H(S)=\frac{S^۲+۳S}{(S+۱)^۲}$

۲) $H(S)=\frac{(S-۱)^۲}{(S+۱)^۲}$

۳) $H(S)=\frac{S(S-۱)}{(S+۱)^۲}$

۴) هیچکدام



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با اعمال قانون تقسیم ولتاژ برای منبع $e_i(S)$ بین مقاومت ۱Ω و خازن ۱F داریم:

$$V(S)=\frac{e_i(S)\times ۱}{۱+\frac{۱}{S}}=e_i(S)\times\frac{S}{S+۱}$$

حال با نوشتن KCL در گره خروجی داریم:

$$\frac{e_o(S)-۲V(S)}{۱}+\frac{e_o(S)-e_i(S)}{\frac{۱}{S}}=۰$$

با جایگذاری $V(S)$ در رابطه بالا داریم:

$$e_o(S)-۲[e_i(S)\times\frac{S}{S+۱}]+S[e_o(S)-e_i(S)]=۰\ \Rightarrow\ e_o(S)=\frac{S^۲+۳S}{(S+۱)^۲}.e_i(S)\ \Rightarrow\ \frac{e_o(S)}{e_i(S)}=\frac{S^۲+۳S}{(S+۱)^۲}$$

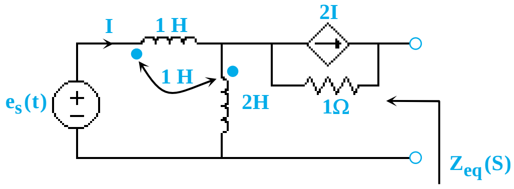
مثال ۲۵: در مدار شکل زیر $Z_{eq}(S)$ کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۰)

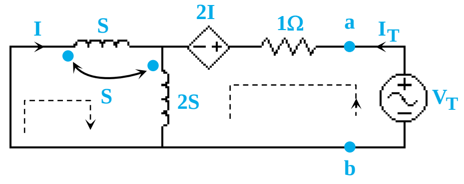
۱) $\frac{S-۱}{۵}$

۲) $\frac{S+۱۱}{۵}$

۳) $S-۱$

۴) ۱





☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن Z_{eq}، منابع مستقل را غیرفعال کرده و یک منبع ولتاژ تست در ورودی قرار می‌دهیم و با اندازه‌گیری I_T مقدار $Z=\frac{V_T}{I_T}$ را محاسبه می‌کنیم. لازم به ذکر است که منبع وابسته ۲I و مقاومت ۱Ωرا با تبدیل منابع، سری می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{KVL}\ (\text{حلقه سمت چپ}):SI+۲S(I+I_T)+S(I+I_T)+SI=۰\ \Rightarrow\ I=\frac{-۳SI_T}{۵S} & (۱)\\ \text{KVL}\ (\text{حلقه سمت راست}):-V_T+I_T+۲I+۲S(I+I_T)+SI=۰ & (۲)\end{array}\right\}\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{V_T}{I_T}=\frac{S-۱}{۵}$$

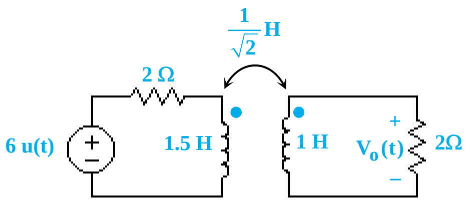
مثال ۲۶: حداکثر مقدار $V_o(t)$ در مدار شکل زیر چند ولت است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۴)

۱) ۰/۳۸۱

۲) ۰/۴۶۲

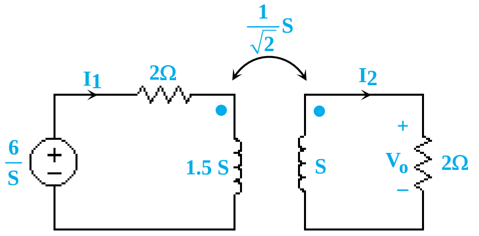
۳) ۰/۶۶۸

۴) ۱/۳۳۶



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$\frac{۶}{S}=I_۱\times ۲+۱/۵SI_۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}SI_۲\quad(۱)$$



با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$۲I_۲+SI_۲-\frac{۱}{\sqrt{۲}}SI_۱=۰\Rightarrow I_۱=\frac{\sqrt{۲}(S+۲)}{S}I_۲\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\ I_۲=\frac{۳\sqrt{۲}}{(S+۴)(S+۱)}\ \Rightarrow\ I_۲=\sqrt{۲}[e^{-t}-e^{-۴t}]u(t)$$

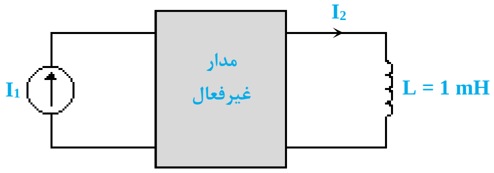
برای حداکثر شدن مقدار $I_۲$، باید از رابطه $I_۲$ مشتق‌گیری کرد. لذا داریم:

$$\frac{dI_۲}{dt}=\sqrt{۲}[-e^{-t}+۴e^{-۴t}]=۰ \Rightarrow t=۰/۴۶sec \Rightarrow I_۲(t=۰/۴۶)=۰/۶۶۸A \quad , \quad V_o=۲I_۲$$

$$V_o(max)=V_o(t=۰/۴۶)=۲\times۰/۶۶۸=۱/۳۳۶v$$

مثال ۲۷: در صورتیکه در مدار شکل زیر تابع تبدیل $H(S)=\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۴(S+۲۰)}{S+۸}$ باشد و $I_۱(t)=\sqrt{۲}u(t)$ و $I_L(0^-)=۰$، انرژی ذخیره شده در سلف در $t=\infty$ برابر با کدام گزینه است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۵)



۱) $۰/۱J$
۲) $۰/۱۵J$
۳) $۰/۲J$
۴) $۰/۰۵J$

☑ **پاسخ**: گزینه «۱» با کمک تابع شبکه، ابتدا $I_۲(S)$ را محاسبه کرده و سپس مقدار آن را در $t=\infty$ محاسبه می‌کنیم.

$$I_۲(S)=I_۱(S).H(S) \quad و \quad I_۱(S)=\frac{\sqrt{۲}}{S} \Rightarrow I_۲(S)=\frac{۴(S+۲۰)}{S+۸}.\frac{\sqrt{۲}}{S}$$

$$I_۲(t=\infty)=\lim_{S\to۰}SI_۲(S)=\frac{۴S(S+۲۰).\sqrt{۲}}{S(S+۸)}=\frac{۴\times۲۰\times\sqrt{۲}}{۸}=۱۰\sqrt{۲}\,A$$

$$W_L=\frac{۱}{۲}LI_۲^۲(\infty) \Rightarrow W_L=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱۰^{-۳}\times(۱۰\sqrt{۲})^۲=۰/۱J$$

مثال ۲۸: تابع شبکه‌ای به صورت $\frac{V_{out}(S)}{V_{in}(S)}=\frac{۲۵}{S^۲+۱۰S+۱۲۵}$ است. کدام بیان در مورد پاسخ پله این مدار صادق نیست؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)

۱) مقدار پاسخ در لحظه $t=۰/۱$ برابر ۰/۱۵ است.
۲) فرکانس نوسانات میرا شونده برابر ۱۰ است.
۳) مقدار نهایی پاسخ برابر ۰/۲ است.
۴) مقدار اولیه پاسخ برابر صفر است.

☑ **پاسخ**: گزینه «۱» با توجه به معادله مشخصه داریم:

$$S^۲+۱۰S+۱۲۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱,S_۲=-۵\pm۱۰j \\ S_۱,S_۲=-\alpha\pm j\omega_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۵ \\ \omega_d=۱۰(\frac{rad}{sec}) \end{cases}$$

بنابراین فرکانس نوسانات میرا شونده برابر $۱۰(\frac{rad}{sec})$ بوده و گزینه (۲) صحیح است. در ادامه حل به محاسبه مقدار اولیه و نهایی پاسخ با استفاده از قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی می‌پردازیم.

$$V_{out}(S)=V_{in}(S).\frac{۲۵}{S^۲+۱۰S+۱۲۵}=\frac{۱}{S}.\frac{۲۵}{S^۲+۱۰S+۱۲۵}$$

$$V_{out}(t=۰)=\lim_{S\to\infty}SV_{out}(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{۲۵}{(S^۲+۱۰S+۱۲۵)}=۰$$

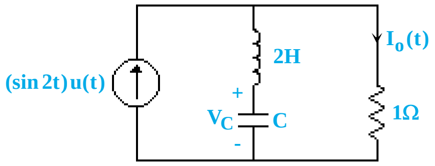
بنابراین مقدار اولیه پاسخ پله برابر عدد صفر بوده و گزینه (۴) صحیح است.

$$V_{out}(t=\infty)=\lim_{S\to۰}SV_{out}(S)=\lim_{S\to۰}\frac{S\times۲۵}{S(S^۲+۱۰S+۱۲۵)}=\frac{۱}{۵}v$$

لذا مقدار نهایی پاسخ پله برابر عدد ۰/۲ بوده و گزینه (۳) نیز صحیح است. با توجه به موارد فوق فقط گزینه (۱) می‌تواند غلط باشد.

مثال ۲۹: در مدار شکل زیر، ولتاژ اولیه خازن $V_C(۰^-)$ و ظرفیت خازن C چقدر باشند تا جریان $I_o(t)$ برای $t \geq ۰$ برابر صفر باشد؟ (سلف بدون انرژی اولیه است.)

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



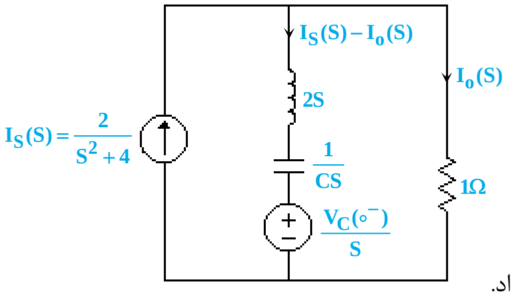
۱) $C = \frac{۱}{۴}F\ ,\ v_C(۰^-) = -۸v$

۲) $C = \frac{۱}{۸}F\ ,\ v_C(۰^-) = -۴v$

۳) $C = \frac{۱}{۸}F\ ,\ v_C(۰^-) = ۸v$

۴) $C = \frac{۱}{۴}F\ ,\ v_C(۰^-) = ۸v$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل مدار آن را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:



$$[I_S(S) - I_o(S)][۲S + \frac{۱}{CS}] + \frac{V_C(۰^-)}{S} = I_o(S)$$

با قراردادن رابطه $I_S(S) = \frac{۲}{S^۲+۴}$ و $I_o(S) = ۰$ در معادله بالا داریم:

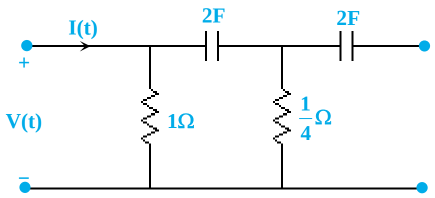
$$[\frac{۲}{S^۲+۴}][۲S + \frac{۱}{CS}] + \frac{V_C(۰^-)}{S} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{S^۲[CV_C(۰^-) + ۴C] + (۴CV_C(۰^-) + ۲)}{S^۲(CS) + ۴CS} = ۰$$

در صورت صفر بودن کسر فوق، باید ضریب $S^۲$ و همچنین جمله ثابت صورت کسر را مساوی صفر قرار داد.

$$\begin{cases} CV_C(۰^-) + ۴C = ۰ \\ ۴CV_C(۰^-) + ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{C = \frac{۱}{۸}F} \\ \mathbf{V_C(۰^-) = -۴\,v} \end{cases}$$

مثال ۳۰: امپدانس ورودی مدار زیر برابر با کدام گزینه است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)



۱) $Z(S) = \frac{S+۲}{۵S+۲}$

۲) $Z(S) = \frac{S+۱}{S+۲}$

۳) $Z(S) = \frac{S}{۵S+۲}$

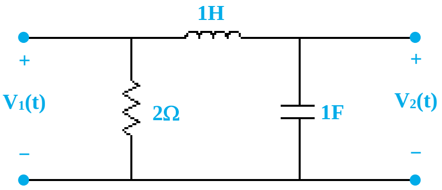
۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» خازن ۲F در طرف راست اثری بر امپدانس ورودی ندارد، زیرا به صورت مدار باز در خروجی قرار دارد. حال داریم:

$$Z_{in}(S) = ۱ \| [\frac{۱}{۲S} + \frac{۱}{۴}] = \frac{\frac{۱}{۲S} + \frac{۱}{۴}}{۱ + \frac{۱}{۲S} + \frac{۱}{۴}} = \frac{۲+S}{۴S+۲+S} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z_{in}(S) = \frac{۲+S}{۲+۵S}}$$

مثال ۳۱: در مدار زیر تابع انتقال $H_۱(S) = \frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}$ برابر با کدام گزینه است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)



۱) $\frac{۱}{S^۲+۱}$

۲) $\frac{۱}{S-۱}$

۳) $\frac{۱}{S^۲-۱}$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با حذف مقاومت ۲Ω که موازی منبع ولتاژ $V_۱(t)$ است، داریم:

$$V_۲(S) = V_۱(S)\frac{\frac{۱}{S}}{S + \frac{۱}{S}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H_۱(S) = \frac{V_۲(S)}{V_۱(S)} = \frac{۱}{S^۲+۱}}$$

مثال ۳۲: در یک مدار الکتریکی رابطه $\frac{I(S)}{V(S)} = Y(S) = \frac{S^{۲} + ۲S + ۳}{۴S^{۳} + ۵S^{۲} + ۶S + ۷}$ داده شده است. معادله دیفرانسیل ارتباط‌دهنده بین $V(t)$ و $I(t)$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)

۱) $۴\frac{d^{۳}I}{dt^{۳}} + \frac{d^{۲}I}{dt^{۲}} + ۶\frac{dI}{dt} = \frac{d^{۲}V}{dt^{۲}} + \frac{dV}{dt} + ۳V$

۲) $\frac{d^{۳}I}{dt^{۳}} + \frac{d^{۲}I}{dt^{۲}} + \frac{dI}{dt} = \frac{d^{۲}V}{dt^{۲}} + ۲\frac{dV}{dt} + V$

۳) $۴\frac{d^{۳}I}{dt^{۳}} + ۵\frac{d^{۲}I}{dt^{۲}} + ۶\frac{dI}{dt} + ۷I = \frac{d^{۲}V}{dt^{۲}} + ۲\frac{dV}{dt} + ۳V$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با بازنویسی رابطه ادمیتانس شبکه به صورت زیر و بردن آن از حوزه فرکانس به حوزه زمان، داریم:

$$[۴S^{۳} + ۵S^{۲} + ۶S + ۷][I(S)] = [S^{۲} + ۲S + ۳][V(S)] \Rightarrow \mathbf{۴\frac{d^{۳}I}{dt^{۳}} + ۵\frac{d^{۲}I}{dt^{۲}} + ۶\frac{dI}{dt} + ۷I = \frac{d^{۲}V}{dt^{۲}} + ۲\frac{dV}{dt} + ۳V}$$

مثال ۳۳: واکنش تابع ضربه یک سیستم خطی برابر $h(t) = (e^{-t} - e^{-۲t})u(t)$ است. در صورتی که سیگنال ورودی برابر با $x(t) = ۲e^{-۳t}u(t)$ باشد، خروجی $y(t)$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)

۱) $y(t) = (e^{-t} + e^{-۲t} + e^{-۳t})u(t)$

۲) $y(t) = (e^{-t} - ۲e^{-۲t} + e^{-۳t})u(t)$

۳) $y(t) = (۲e^{-t} + e^{-۲t} + e^{-۳t})u(t)$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ضرب لاپلاس ورودی در تابع تبدیل یا همان پاسخ ضربه، لاپلاس خروجی را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$X(S) = \frac{۲}{S+۳} \;,\; H(S) = \frac{۱}{S+۱} - \frac{۱}{S+۲} \Rightarrow Y(S) = X(S).H(S) = \frac{۲}{S+۳}[\frac{۱}{S+۱} - \frac{۱}{S+۲}]$$

$$Y(S) = \frac{۲}{(S+۳)(S+۱)} - \frac{۲}{(S+۳)(S+۲)} = \frac{۱}{S+۱} - \frac{۲}{S+۲} + \frac{۱}{S+۳}$$

$$\Rightarrow Y(t) = e^{-t}u(t) + (-۲)e^{-۲t}u(t) + e^{-۳t}u(t) \Rightarrow \mathbf{Y(t) = (e^{-t} - ۲e^{-t} + e^{-۳t})u(t)}$$

مثال ۳۴: واکنش تابع ضربه یک سیستم خطی برابر با $h(t) = \frac{۳}{۴}(e^{-t} + e^{-۳t})u(t)$ است. در صورتیکه سیگنال ورودی برابر با $x(t) = ۲\delta(t-۵)$ باشد، خروجی $y(t)$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)

۱) $y(t) = (e^{-(t-۵)} + e^{-۳(t-۵)})u(t-۵)$

۲) $y(t) = \frac{۳}{۲}(e^{-(t-۵)} + e^{-۳(t-۵)})u(t-۵)$

۳) $y(t) = -\frac{۳}{۲}(e^{-(t-۵)} + e^{-۳(t-۵)})u(t-۵)$

۴) هیچکدام

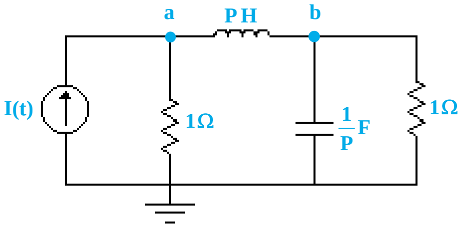
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در صورتی که از پاسخ ضربه یک مدار لاپلاس گرفته شود، تابع شبکه مربوطه بدست خواهد آمد.

$$L[h(t)] = H(S) = \frac{۳}{۴(S+۱)} + \frac{۳}{۴(S+۳)} \quad و \quad L[X(t)] = X(S) = ۲e^{-۵S}$$

$$Y(S) = H(S).X(S) = [\frac{۳}{۴(S+۱)} + \frac{۳}{۴(S+۳)}] \times ۲e^{-۵S} \Rightarrow Y(t) = L^{-۱}(Y(S)) = L^{-۱}[\frac{۳}{۲(S+۱)}e^{-۵S} + \frac{۳}{۲(S+۳)}e^{-۵S}]$$

$$\Rightarrow Y(t) = [\frac{۳}{۲}e^{-(t-۵)} + \frac{۳}{۲}e^{-۳(t-۵)}]u(t-۵) \Rightarrow \mathbf{Y(t) = \frac{۳}{۲}[e^{-(t-۵)} + e^{-۳(t-۵)}]u(t-۵)}$$

مثال ۳۵: در مدار زیر معادله دیفرانسیل بین V_a و $I(t)$ برابر با کدام گزینه است؟ $(P = ۱)$ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



۱) $\frac{d^{۲}V_a}{dt^{۲}} + ۲\frac{dV_a}{dt} + ۲V_a = \frac{d^{۲}I(t)}{dt^{۲}} + \frac{dI(t)}{dt} + I(t)$

۲) $\frac{d^{۲}V_a}{dt^{۲}} + \frac{dV_a}{dt} + ۲V_a = \frac{d^{۲}I(t)}{dt^{۲}} + \frac{dI(t)}{dt} + I(t)$

۳) $\frac{d^{۲}V_a}{dt^{۲}} + \frac{dV_a}{dt} + V_a = \frac{d^{۲}I(t)}{dt^{۲}} + \frac{dI(t)}{dt} + I(t)$

۴) $۲\frac{d^{۲}V_a}{dt^{۲}} + \frac{dV_a}{dt} + ۲V_a = \frac{d^{۲}I(t)}{dt^{۲}} + \frac{dI(t)}{dt} + I(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل ارتباط‌دهنده بین V_a و $I(t)$، در گره a، KCL زده می‌شود.

$$\frac{V_a}{۱}+\frac{V_a}{PS+(۱||\frac{P}{S})}=I(S) \Rightarrow V_a+\frac{V_a}{PS+\frac{P}{S+P}}=I(S)$$

$$\Rightarrow V_a\left[\frac{PS^۲+(۱+P^۲)S+۲P}{PS^۲+P^۲S+P}\right]=I(S) \Rightarrow V_a\left[PS^۲+(۱+P^۲)S+۲P\right]=I(S)[PS^۲+P^۲S+P]$$

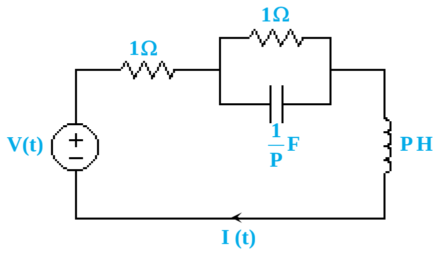
با تغییر معادله بدست آمده از حوزه فرکانس به حوزه زمان داریم:

$$P\frac{d^۲V_a}{dt^۲}+(۱+P^۲)\frac{dV_a}{dt}+۲PV_a=P\frac{d^۲I(t)}{dt^۲}+P^۲\frac{dI(t)}{dt}+PI(t)$$

در صورتی که $P=۱$ فرض شود، داریم:

$$\mathbf{\frac{d^۲V_a}{dt^۲}+۲\frac{dV_a}{dt}+۲V_a=\frac{d^۲I(t)}{dt^۲}+\frac{dI(t)}{dt}+I(t)}$$

مثال ۳۶: در مدار زیر معادله دیفرانسیل بین $v(t)$ و $I(t)$ برابر با کدام گزینه است؟ $(P=۱)$ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



۱) $\frac{d^۲I}{dt^۲}+\frac{dI}{dt}+I=\frac{dV(t)}{dt}+V(t)$

۲) $\frac{d^۲I}{dt^۲}+\frac{dI}{dt}+۲I=\frac{dV(t)}{dt}+V(t)$

۳) $\frac{d^۲I}{dt^۲}+۲\frac{dI}{dt}+۲I=\frac{dV(t)}{dt}+V(t)$

۴) $\frac{d^۲I}{dt^۲}+۲\frac{dI}{dt}+۲I=۲\frac{dV(t)}{dt}+V(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با نوشتن KVL در مدار داریم:

$$V(S)=I(S)+(۱||\frac{P}{S})I(S)+PS\times I(S)$$

$$\Rightarrow V(S)=I(S)\left[۱+PS+\frac{P}{P+S}\right]=I(S)\left[\frac{S^۲P+S(۱+P^۲)+۲P}{P+S}\right] \Rightarrow V(S)(P+S)=I(S)\left[S^۲P+S(۱+P^۲)+۲P\right]$$

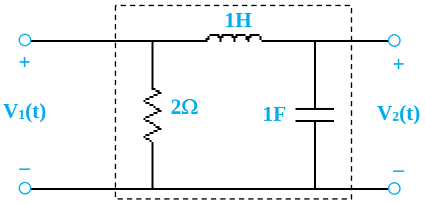
با تبدیل معادله فوق به معادله دیفرانسیل داریم:

$$\frac{dV(t)}{dt}+PV(t)=P\frac{d^۲I(t)}{dt^۲}+(۱+P^۲)\frac{dI(t)}{dt}+۲P\times I(t)$$

با فرض $P=۱$ داریم:

$$\mathbf{\frac{dV(t)}{dt}+V(t)=\frac{d^۲I(t)}{dt^۲}+\frac{۲dI(t)}{dt}+۲I(t)}$$

مثال ۳۷: در مدار زیر $H(S)=\frac{V_۱(S)}{V_۲(S)}$ برابر با کدام گزینه است؟ (شرایط اولیه برابر با صفر فرض شود.) (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



۱) $H(S)=\frac{۲}{S+۲}$

۲) $H(S)=\frac{۱}{S+۲}$

۳) $H(S)=\frac{۲}{S+۱}$

۴) $H(S)=\frac{۱}{S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تابع شبکه، $V_۲(S)$ به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است، پس خازن ۱F موازی با منبع ولتاژ حذف می‌شود. حال با اعمال قانون تقسیم ولتاژ بین مقاومت ۲ اهمی و سلف ۱ هانری داریم:

$$V_۱(S)=\frac{۲}{S+۲}V_۲(S) \rightarrow \mathbf{H(S)=\frac{V_۱(S)}{V_۲(S)}=\frac{۲}{S+۲}}$$

مثال ۳۸: در یک مدار الکتریکی رابطه $\frac{I(S)}{V(S)}=y(S)=\frac{S^۲+S+۳}{S^۳+S^۲+۶S+۶}$ حاکم است. معادله دیفرانسیل بین I(t) و V(t) برابر با کدام گزینه زیر است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $-\frac{d^۳I}{dt^۳}+\frac{d^۲I}{dt^۲}-۶\frac{dI}{dt}-۶I=\frac{d^۲v}{dt^۲}+\frac{dv}{dt}+۳v$

۲) $\frac{d^۳I}{dt^۳}+\frac{d^۲I}{dt^۲}+۶\frac{dI}{dt}+۶I=\frac{d^۲v}{dt^۲}+\frac{dv}{dt}+۳v$

۳) $\frac{d^۳I}{dt^۳}+\frac{d^۲I}{dt^۲}+۶\frac{dI}{dt}+۶I=\frac{d^۲v}{dt^۲}-\frac{dv}{dt}-۳v$

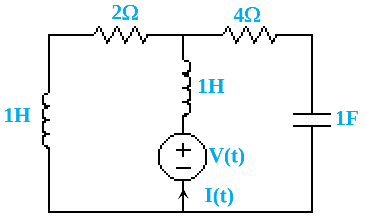
۴) $\frac{d^۳I}{dt^۳}+\frac{d^۲I}{dt^۲}+\frac{dI}{dt}+I=\frac{d^۲v}{dt^۲}+\frac{dv}{dt}+v$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با تبدیل تابع شبکه به صورت زیر، معادل آن را در حوزه زمان با قوانین لاپلاس بازنویسی می‌کنیم:

$$(S^۲+S+۳)V(S)=I(S)(S^۳+S^۲+۶S+۶)\quad\Rightarrow\quad \frac{d^۲V}{dt^۲}+\frac{dV}{dt}+۳V=\frac{d^۳I}{dt^۳}+\frac{d^۲I}{dt^۲}+\frac{۶dI}{dt}+۶I$$

مثال ۳۹: در مدار شکل زیر $Z(S)=\frac{V(S)}{I(S)}$ برابر با کدام گزینه است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)



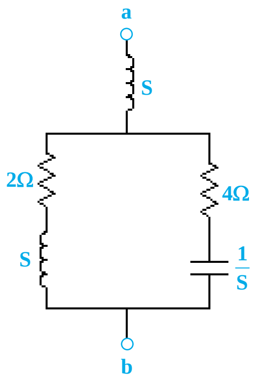
۱) $Z(S)=\frac{V(S)}{I(S)}=\frac{S^۳-۱۰S^۲+۱۰S-۱}{S^۲+۶S+۱}$

۲) $Z(S)=\frac{V(S)}{I(S)}=\frac{S^۳+۱۰S^۲+۱۰S+۲}{S^۲+۶S+۱}$

۳) $Z(S)=\frac{V(S)}{I(S)}=\frac{S^۳+۱۰S^۲+۱}{S^۲+۳}$

۴) $Z(S)=\frac{V(S)}{I(S)}=\frac{S^۳-۸S^۲+۸S+۲}{S^۲+۶S+۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید دقت شود که $\frac{V(S)}{I(S)}$ همان امپدانس ورودی از دید منبع است، لذا داریم:

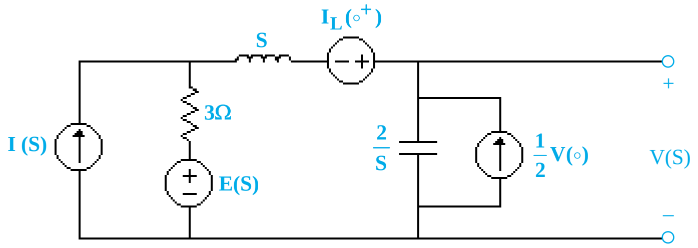


$$Z_{ab}=S+(۲+S)\,||\,(۴+\frac{۱}{S})\quad\Rightarrow\quad Z_{ab}=\frac{S^۳+۱۰S^۲+۱۰S+۲}{S^۲+۶S+۱}$$

دقت شود که در $S=۰$ سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. پس در این فرکانس $Z=۲\Omega$ خواهد بود. با چک کردن گزینه‌ها فقط به گزینه (۲) می‌رسیم.

مثال ۴۰: در مدار شکل زیر V(S) برابر با کدام گزینه است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)



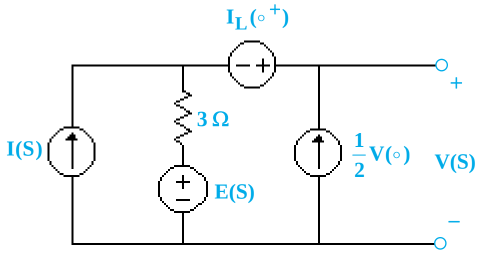
۱) $V(S)=\frac{I(S)+۲E(S)+SV(۰)+۲I_L(۰)}{۳S+۲}$

۲) $V(S)=\frac{I(S)-۲E(S)-SV(۰)+I_L(۰)}{S^۳+۳S+۲}$

۳) $V(S)=\frac{۶I(S)+۲E(S)+(S+۳)V(۰)+۲I_L(۰)}{S^۲+۳S+۲}$

۴) $V(S)=\frac{۶I(S)+۲E(S)-(S+۲)V(۰)+۲I_L(۰)}{S^۲+۳S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل سریعتر مدار، فرض می‌کنیم مدار در شرایط $S=۰$ یا به عبارتی فرکانس صفر تحریک شود. در این حالت سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز خواهند بود. لذا داریم:

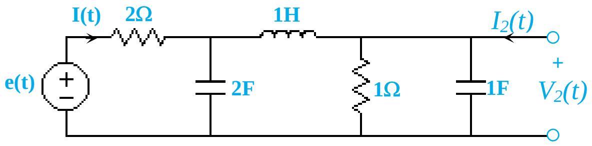


$$V(S)=۳[I(S)+\frac{۱}{۲}V(۰)]+E(S)+I_L(۰^+)$$

$$\Rightarrow\quad V(S)=۳I(S)+\frac{۳}{۲}V(۰)+E(S)+I_L(۰^+)$$

حال با قرار دادن $S=۰$ در گزینه‌ها و چک کردن آنها دیده می‌شود که فقط گزینه (۳) صحیح است.

مثال۴۱: امپدانس خروجی مدار زیر برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)



۱) $Z_o(S)=\frac{V_۲(S)}{I_۲(S)}=\frac{۴S^{۲}+S+۲}{۴S^{۳}+۵S^{۲}+۷S+۳}$

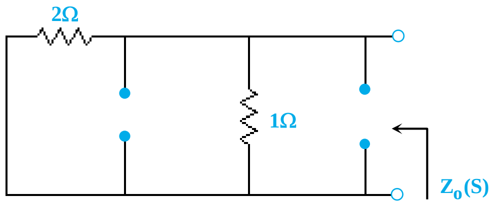
۲) $Z_o(S)=\frac{V_۲(S)}{I_۲(S)}=\frac{S^{۲}+S+۱}{S^{۳}+۵S^{۲}+۷S+۳}$

۳) $Z_o(S)=\frac{V_۲(S)}{I_۲(S)}=\frac{S^{۲}-۲S-۲}{S^{۳}+S^{۲}+۷S+۳}$

۴) $Z_o(S)=\frac{V_۲(S)}{I_۲(S)}=\frac{۴S^{۲}-S-۲}{۴S^{۳}-۵S^{۲}-۷S+۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مدار را در فرکانس صفر $(S=۰)$ ترسیم می‌کنیم.

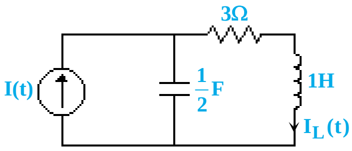
در این حالت خازن‌ها با مدار باز و سلف‌ها با اتصال کوتاه مدل می‌شوند.



$$Z_o(۰)=۲\|۱=\frac{۲}{۳}\Omega$$

حال با چک کردن گزینه‌ها در $S=۰$ دیده می‌شود که فقط گزینه (۱) صحیح است.

مثال۴۲: در مدار زیر، تابع انتقال $H(S)=\frac{I_L(S)}{I(S)}$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)



۱) $H(S)=\frac{۲}{(S^{۲}+۲S+۱)}$

۲) $H(S)=\frac{۲}{(S^{۲}+۳S+۲)}$

۳) $H(S)=\frac{۱}{(S^{۲}+S+۲)}$

۴) $H(S)=\frac{۱}{(S^{۲}+۳S+۱)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از قانون تقسیم جریان داریم:

$$I_L(S)=\frac{I(S)\times\frac{۲}{S}}{\frac{۲}{S}+۳+S}\Rightarrow\frac{I_L(S)}{I(S)}=\frac{۲}{(S^{۲}+۳S+۲)}$$

مثال۴۳: واکنش تابع ضربه یک سیستم خطی برابر $h(t)=e^{-t}-e^{-۳t}$ می‌باشد. در صورتی که سیگنال ورودی برابر با $x(t)=۲e^{-۲t}$ باشد، خروجی $y(t)$ برابر با کدام گزینه زیر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $y(t)=-e^{-۲t}+۲e^{-t}+e^{-۳t}$
۲) $y(t)=-۴e^{-۲t}+۲e^{-t}+e^{-۳t}$
۳) $y(t)=-۴e^{-۲t}+۲e^{-t}+۲e^{-۳t}$
۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» لاپلاس تابع خروجی، برابر حاصلضرب لاپلاس موج ورودی در لاپلاس تابع شبکه می‌باشد.

$$h(S)=L(h(t))=\frac{۱}{S+۱}-\frac{۱}{S+۳}$$

$$X(S)=\frac{۲}{S+۲}\Rightarrow y(S)=x(S).h(S)=\frac{۲}{S+۲}[\frac{۱}{S+۱}-\frac{۱}{S+۳}]=\frac{۲}{(S+۱)(S+۲)}-\frac{۲}{(S+۲)(S+۳)}$$

$$\Rightarrow y(S)=\frac{۲}{S+۱}-\frac{۴}{S+۲}+\frac{۲}{S+۳}\Rightarrow \mathbf{y(t)=۲e^{-t}-۴e^{-۲t}+۲e^{-۳t}}$$

مثال۴۴: در یک مدار الکتریکی $H(S)=\frac{V(S)}{E(S)}=\frac{۱۰(S+۱)}{S^{۲}+۲S+۳}$ تعریف شده است. در صورتی که $e(t)=۴\cos ۲t$ باشد، ولتاژ سینوسی در حالت پایدار، $V_{SS}(t)$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $V_{SS}(t)=۲۱/۷۶\cos(۲t+۴۰/۶^{\circ})$
۲) $V_{SS}(t)=۲۰/۲\cos(۲t+۴۰/۶^{\circ})$
۳) $V_{SS}(t)=۲۱/۷۶\cos(۲t-۴۰/۶^{\circ})$
۴) $V_{SS}(t)=۴۳/۵۲\cos(۲t-۴۰/۶^{\circ})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا با حاصلضرب لاپلاس موج ورودی در تابع شبکه، V(S) را بدست می‌آوریم:

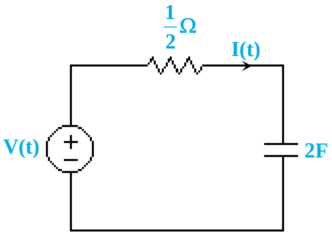
$$L[e(t)] = E(S) = \frac{۴S}{S^۲+۴}$$

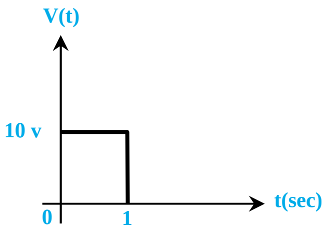
$$V(S) = E(S).H(S) = \frac{۴S}{S^۲+۴}\cdot\frac{۱۰(S+۱)}{S^۲+۲S+۳}$$

در صورتی که پاسخ حالت دائمی سینوسی مدنظر باشد، می‌توان به جای S عبارت $S = j\omega$ یعنی $S = j۲$ را در معادله قرار داد.

$$V(S=۲j) = \frac{۴\times j۲}{(j۲)^۲+۴}.\frac{۱۰(j۲+۱)}{(j۲)^۲+۲\times j۲+۳} = ۱۶/۴۷ - j۱۴/۱۲ \Rightarrow V(S=۲j) = ۲۱/۷\angle -۴۰/۶^\circ = \mathbf{۲۱/۷\cos(۲t-۴۰/۶^\circ)}$$

مثال ۴۵: **ولتاژ پالس برابر با معادله $v(t) = ۱۰[u(t)-u(t-۱)]$ به مدار زیر اعمال شده است. جریان $I(t)$ برابر با کدام گزینه زیر است در حالی که $v_C(۰^-) = ۰$ می‌باشد.** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)





۱) $I(t) = ۲۰e^{-t}u(t) - ۱۰e^{-(t-۲)}u(t-۱)$

۲) $I(t) = ۱۰e^{-t}u(t) - ۱۰e^{-(t-۱)}u(t-۱)$

۳) $I(t) = ۲۰e^{-t}u(t) - ۲۰e^{-(t-۱)}u(t-۱)$

۴) $I(t) = ۲۰e^{-t}u(t) + ۲۰e^{-(t-۱)}u(t-۱)$

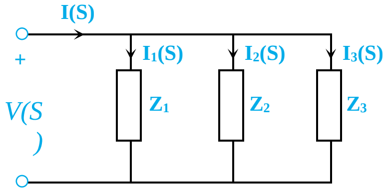
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا معادله جریان را در حوزه فرکانس محاسبه می‌کنیم:

$$I(S) = \frac{V(S)}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲S}} \quad , \quad V(S) = L(V(t)) \quad , \quad V(t) = ۱۰u(t) - ۱۰u(t-۱) \Rightarrow V(S) = \frac{۱۰}{S} - \frac{۱۰}{S}e^{-S}$$

برای بدست آوردن جریان، باید V(S) را در رابطه I(S) قرار دهیم:

$$I(S) = \frac{\frac{۱۰}{S}-\frac{۱۰}{S}e^{-S}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲S}} = \frac{۲۰}{S+۱} - \frac{۲۰e^{-S}}{S+۱} \Rightarrow \mathbf{I(t) = L^{-۱}[I(S)] = ۲۰e^{-t}u(t) - ۲۰e^{-(t-۱)}u(t-۱)}$$

مثال ۴۶: **در مدار زیر $I_۳(S)$ برابر با کدام گزینه است؟** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)



۱) $I_۳(S) = \dfrac{y_۳(S)}{y_۱(S)+y_۲(S)+y_۳(S)}$

۲) $I_۳(S) = \dfrac{y_۳(S)\times I(S)}{y_۱(S)+y_۲(S)+y_۳(S)}$

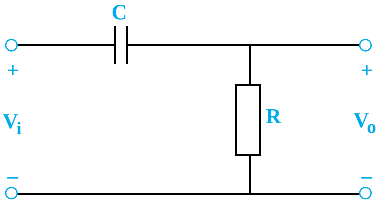
۳) $I_۳(S) = \dfrac{y_۳(S)\times V(S)}{y_۱(S)+y_۲(S)+y_۳(S)}$

۴) $I_۳(S) = \dfrac{y_۳(S)\times V(S)\times I(S)}{y_۱(S)+y_۲(S)+y_۳(S)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از قانون تقسیم جریان داریم:

$$I_۳(S) = I(S)\times\frac{\frac{۱}{y_۱(S)+y_۲(S)}}{\frac{۱}{y_۱(S)+y_۲(S)}+\frac{۱}{y_۳(S)}} \Rightarrow \mathbf{I_۳(S) = \frac{y_۳(S).I(S)}{y_۱(S)+y_۲(S)+y_۳(S)}}$$

مثال ۴۷: **تابع تبدیل مدار الکتریکی زیر کدام است؟** (مهندسی کامپیوتر«گرایش هوش مصنوعی» ـ آزاد ۸۴)



۱) $\dfrac{V_o(S)}{V_i(S)} = \dfrac{۱}{۱+SRC}$

۲) $\dfrac{V_o(S)}{V_i(S)} = \dfrac{SRC}{۱+SRC}$

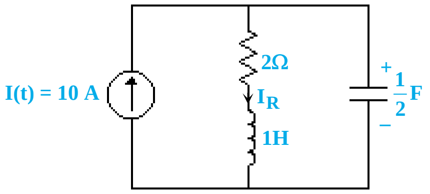
۳) $\dfrac{V_o(S)}{V_i(S)} = \dfrac{۱+۲SRC}{۲+SRC}$

۴) $\dfrac{V_o(S)}{V_i(S)} = \dfrac{۲SRC}{۱+SRC}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با نوشتن تقسیم ولتاژ برای $V_o(S)$ داریم:

$$\frac{V_o(S)}{V_i(S)} = \frac{R}{\frac{۱}{CS}+R} = \frac{SRC}{۱+SRC}$$

مثال ۴۸: در مدار زیر $V_C(۰)=۳v$ و $I_L(۰)=۱A$ می‌باشد. معادله $I_R(S)$ برابر با کدام گزینه زیر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۴)



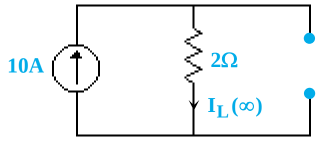
۱) $I_R(S)=\frac{S^۲+۲S-۲۰}{S(S^۲+۲S+۲)}$

۲) $I_R(S)=\frac{S^۲+۳S+۲۰}{S(S^۲+۲S+۲)}$

۳) $I_R(S)=\frac{S^۲+۳S-۲۰}{S(S^۲+۲S-۲)}$

۴) $I_R(S)=\frac{S^۲-۳S-۲۰}{S(S^۲+۲S+۲)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در این مدار، با گذشت زمان در $t=\infty$، سلف با اتصال کوتاه مدل شده و خازن با مدار باز مدل می‌شود. لذا داریم:



$$I_L(\infty)=۱۰A$$

حال با توجه به قضیه مقدار نهایی، گزینه‌ها چک می‌شوند:

گزینه (۱) $I_R(t=\infty)=\lim_{s\to۰}SI_R(S)=-۱۰A$

گزینه (۲) $I_R(t=\infty)=\lim_{s\to۰}SI_R(S)=۱۰A$

گزینه (۳) $I_R(t=\infty)=\lim_{s\to۰}SI_R(S)=۱۰A$

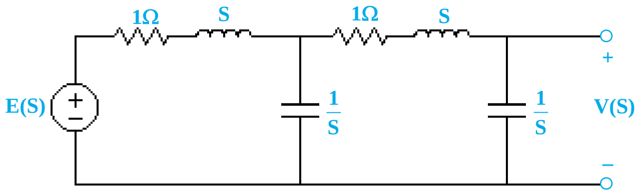
گزینه (۴) $I_R(t=\infty)=\lim_{s\to۰}SI_R(S)=-۱۰A$

با توجه به موارد فوق فقط گزینه‌های (۲) و (۳) می‌توانند صحیح باشند. حال با باز کردن منبع جریان، مدار را به صورت RLC سری ترسیم کرده و فرکانس‌های طبیعی آن را بدست می‌آوریم:

$$۲\alpha=\frac{R}{L}=\frac{۲}{۱}=۲ \quad , \quad \omega_۰^۲=\frac{۱}{LC}=\frac{۱}{۱\times\frac{۱}{۲}}=۲\left(\frac{rad}{sec}\right)^۲ \Rightarrow S^۲+۲\alpha S+\omega_۰^۲=۰ \Rightarrow \mathbf{S^۲+۲S+۲=۰}$$

با دقت در گزینه‌ها دیده می‌شود که این عبارت در مخرج گزینه (۲) موجود است. لذا گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۴۹: در مدار زیر $H(S)=\frac{V(S)}{E(S)}$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۴)



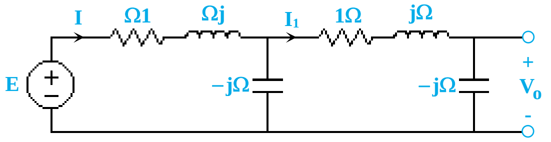
۱) $\frac{V(S)}{E(S)}=\frac{۱}{S^۴+S^۳+S^۲+۳S+۱}$

۲) $\frac{V(S)}{E(S)}=\frac{۱}{S^۴+۲S^۳+۴S^۲+۳S+۱}$

۳) $\frac{V(S)}{E(S)}=\frac{۱}{S^۳+S^۲+۳S+۱}$

۴) $\frac{V(S)}{E(S)}=\frac{۱}{S^۴-۲S^۳-۳S^۲+۳S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** برای سادگی حل مسأله به جای S عبارت $j\omega$ با $\omega=۱$ را قرار می‌دهیم $(S=j\omega=j)$. آنگاه داریم:



$$I=\frac{E}{۱+j+(-j)\|(۱)}=\frac{E}{۱/۵+j۰/۵}$$

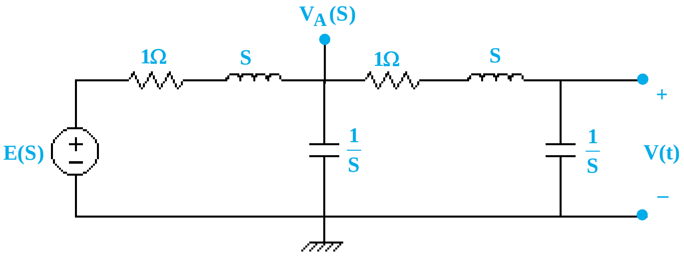
$$I_۱=I\times\frac{-j}{۱-j}=\frac{E}{۱/۵+j۰/۵}\times\frac{-j}{۱-j}\Rightarrow I_۱=\frac{-jE}{(۱/۵+j۰/۵)(۱-j)} \quad , \quad V_o=-jI_۱$$

$$\Rightarrow V_o=\frac{-E}{(۱/۵+j۰/۵)(۱-j)}=\frac{-E}{۲-j}\Rightarrow \frac{V_o}{E}=\frac{-۱}{۲-j}$$

با گذاشتن $S=j$ در گزینه‌ها فقط گزینه (۲) به صورت کسر بالا خواهد بود.

$$\left.\frac{۱}{S^۴+۲S^۳+۴S^۲+۳S+۱}\right|_{S=j}=\frac{۱}{j^۴+۲(j)^۳+۴(j)^۲+j۳+۱}=\frac{۱}{j-۲}=\frac{-۱}{۲-j}$$

روش دوم: با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



$$\frac{V_A(S)-E(S)}{۱+S}+\frac{V_A(S)}{\frac{۱}{S}}+\frac{V_A(S)}{۱+S+\frac{۱}{S}}=۰$$

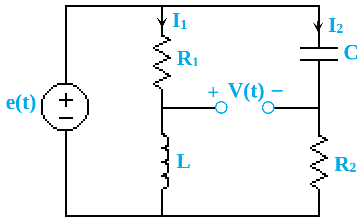
$$\Rightarrow\quad V_A(S)=E(S).\frac{S^۲+S+۱}{S^۴+۲S^۳+۴S^۲+۳S+۱}$$

با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$V(S)=V_A(S).\frac{\frac{۱}{S}}{۱+S+\frac{۱}{S}}=V_A(S).\frac{۱}{S^۲+S+۱۰}$$

$$\Rightarrow\quad V(S)=E(S).\frac{S^۲+S+۱}{S^۴+۲S^۳+۴S^۲+۳S+۱}.\frac{۱}{S^۲+S+۱}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{\frac{V(S)}{E(S)}}=\frac{۱}{S^۴+۲S^۳+۴S^۲+۳S+۱}$$

مثال۵۰: **در مدار زیر در صورتی که $e(t)=A\cos\omega t$ باشد، $V(S)$ برابر با کدام گزینه است؟ (شرایط اولیه برابر صفر فرض شود.)** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۴)



۱) $V(S)=\frac{\left(\frac{۱}{R_۲}-R_۱\right)S}{S^۲+\frac{R_۱}{L}S+R_۲}\times\frac{AS}{S^۲+\omega^۲}$

۲) $V(S)=\frac{\left(\frac{C}{R_۲}-\frac{R_۱}{L}\right)S}{S^۲+\left(\frac{R_۱}{L}+\frac{C}{R_۲}\right)S+\frac{R_۱}{R_۲}LC}\times\frac{AS}{S^۲+\omega^۲}$

۳) $V(S)=\frac{\left(\frac{۱}{R_۲}-R_۱\right)S}{S^۲+\frac{R_۱}{L}S+R_۲}\times\frac{AS}{S^۲-\omega^۲}$

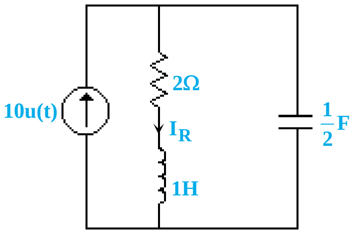
۴) $V(S)=\frac{\left(\frac{۱}{R_۲}+R_۱\right)S}{S^۲+\frac{R_۱}{L}S+R_۲}\times\frac{S}{S^۲+\omega^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با نوشتن روابط تقسیم ولتاژ در مدار داریم:

$$V(S)=\frac{SA}{S^۲+\omega^۲}\times\frac{LS}{R_۱+LS}-\frac{SA}{S^۲+\omega^۲}\times\frac{R_۲}{\frac{۱}{SC}+R_۲}$$

$$V(S)=\frac{AS}{S^۲+\omega^۲}\left[\frac{LS}{R_۱+LS}-\frac{R_۲}{\frac{۱}{SC}+R_۲}\right]\quad\Rightarrow\quad \mathbf{V(S)=\frac{AS}{S^۲+\omega^۲}\left[\frac{(\frac{C}{R_۲}-\frac{R_۱}{L})S}{S^۲+(\frac{R_۱}{L}+\frac{C}{R_۲})S+\frac{R_۱}{R_۲}LC}\right]}$$

مثال۵۱: **در مدار زیر $V_C(۰)=۲v$ و $I_L(۰)=۱A$ می‌باشد. معادله $I_R(S)$ برابر با کدام گزینه زیر است؟** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۴)



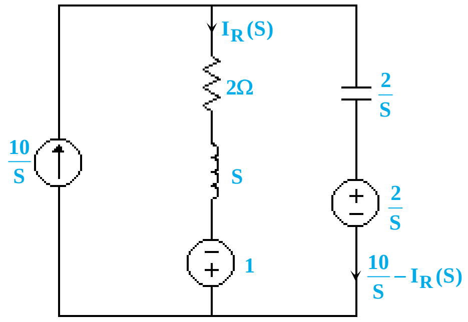
۱) $I_R(S)=\frac{S^۲+۲S-۲۰}{S(S^۲+۲S+۲)}$

۲) $I_R(S)=\frac{S^۲+۲S+۲۰}{S(S^۲+۲S+۲)}$

۳) $I_R(S)=\frac{S^۲+۳S-۲۰}{S(S^۲+۲S-۲)}$

۴) $I_R(S)=\frac{S^۲-۳S-۲۰}{S(S^۲+۲S+۲)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

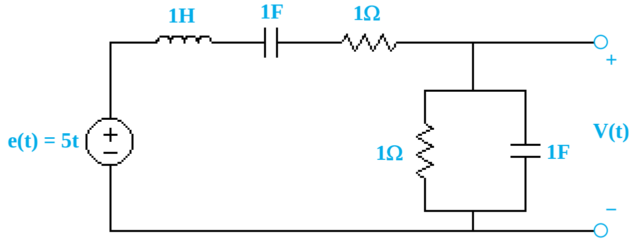


$$+۱-(S+۲)(I_R(S))+(\frac{۱۰}{S}-I_R(S))(\frac{۲}{S})+\frac{۲}{S}=۰$$

$$\Rightarrow\quad I_R[-S-۲-\frac{۲}{S}]=\frac{-۲}{S}-\frac{۲۰}{S^۲}-۱$$

$$\Rightarrow\quad I_R(S)=\frac{\frac{۲}{S}+\frac{۲۰}{S^۲}+۱}{S+۲+\frac{۲}{S}}=\frac{۲S+۲۰+S^۲}{S^۳+۲S^۲+۲S}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{I_R=\frac{S^۲+۲S+۲۰}{S(S^۲+۲S+۲)}}$$

مثال ۵۲: در مدار زیر وقتی که $e(t) = ۵t$ باشد، $V(S)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۵)



۱) $V(S) = [\frac{S}{S^{۳} + S^{۲} + ۳S + ۱}][\frac{۵}{S^{۲}}]$

۲) $V(S) = [\frac{S^{۲}}{S^{۳} + ۲S^{۲} + ۳S + ۱}][\frac{۵}{S^{۲}}]$

۳) $V(S) = [\frac{S^{۲}}{S^{۳} + S^{۲} + S + ۱}][۵]$

۴) $V(S) = [\frac{S}{S^{۳} + ۲S^{۲} + ۳S + ۱}][\frac{۵}{S^{۲}}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ داریم:

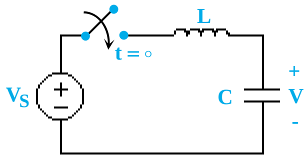
$$V(S) = e(S) \times \frac{۱ \| \frac{۱}{S}}{۱ \| \frac{۱}{S} + S + \frac{۱}{S} + ۱} = e(S) \times \frac{\frac{۱}{S+۱}}{\frac{۱}{S+۱} + S + \frac{۱}{S} + ۱}$$

$$\Rightarrow \quad V(S) = e(S) \times \frac{S}{S + S^{۲}(S+۱) + S + ۱ + S(S+۱)} \quad \Rightarrow \quad V(S) = e(S) \times \frac{S}{S^{۳} + ۲S^{۲} + ۳S + ۱}$$

$$\mathbf{V(S) = [\frac{۵}{S^{۲}}][\frac{S}{S^{۳} + ۲S^{۲} + ۳S + ۱}]}$$

مثال ۵۳: در مدار شکل زیر V_S یک منبع ولتاژ dc است. در چه زمانی ولتاژ دو سر خازن، دو برابر V_S می‌شود؟ (ولتاژ اولیه خازن صفر است)

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)



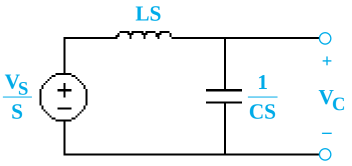
۱) $t = \pi\sqrt{LC}$

۲) $t = ۲\pi\sqrt{LC}$

۳) $t = \frac{\sqrt{LC}}{\pi}$

۴) امکان ندارد ولتاژ دو سر خازن، دو برابر ولتاژ ورودی باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با اعمال قاعده تقسیم ولتاژ در مدار در حوزه فرکانس داریم:



$$V_C = \frac{V_S}{S} \times \frac{\frac{۱}{CS}}{\frac{۱}{CS} + LS} \Rightarrow V_C = \frac{V_S}{S(LCS^{۲} + ۱)}$$

$$V_C = \frac{\frac{۱}{LC}}{S(S^{۲} + \frac{۱}{LC})} V_S = V_S[\frac{-S}{S^{۲} + \frac{۱}{LC}} + \frac{۱}{S}] \Rightarrow V_C(t) = [۱ - \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})]V_S$$

با توجه به برابری ولتاژ دو سر خازن با دو برابر ولتاژ منبع داریم:

$$۲V_S = [۱ - \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})]V_S \Rightarrow \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}}) = -۱ \Rightarrow \mathbf{t = \pi\sqrt{LC}}$$

مثال ۵۴: در صورتی که $G(\omega) = \frac{-\omega^{۲} + ۱}{(j\omega + ۱)(j\omega - ۱)(j\omega - ۳)}$ باشد، تابع $g(t)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۶)

۱) $g(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۴}e^{-t} & t > ۰ \\ -\frac{۱}{۲}e^{t} + \frac{۵}{۴}e^{۳t} & t < ۰ \end{cases}$

۲) $g(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}e^{-t} & t > ۰ \\ \frac{۱}{۲}e^{t} + \frac{۱}{۲}e^{-۳t} & t < ۰ \end{cases}$

۳) $g(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۴}e^{t} & t > ۰ \\ \frac{۱}{۲}e^{t} + \frac{۱}{۲}e^{-۳t} & t < ۰ \end{cases}$

۴) $g(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}e^{-t} + \frac{۵}{۴}e^{-۳t} & t > ۰ \\ \frac{۱}{۲}e^{t} & t < ۰ \end{cases}$

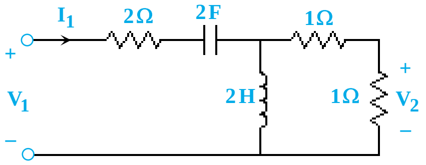
☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در صورتی که به جای $j\omega$ عبارت S جایگزین شود، داریم:

$$G(\omega)=\frac{(j\omega)^۲+۱}{(j\omega+۱)(j\omega-۱)(j\omega-۳)}$$

$$\Rightarrow\ G(S)=\frac{S^۲+۱}{(S+۱)(S-۱)(S-۳)}\ \Rightarrow\ G(S)=\frac{\frac{۱}{۴}}{S+۱}+\frac{-\frac{۱}{۲}}{S-۱}+\frac{\frac{۵}{۴}}{S-۳}\ \Rightarrow\ \mathbf{g(t)=(\frac{۱}{۴}e^{-t}-\frac{۱}{۲}e^{t}+\frac{۵}{۴}e^{۳t})u(t)}$$

مثال ۵۵: **در مدار شکل زیر تابع تبدیل $H(s)=\frac{V_۲}{V_۱}$ کدام است؟**

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۸)



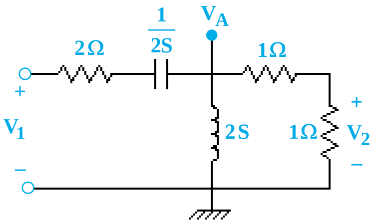
۱) $\frac{۲S^۲}{۸S^۲+S+۱}$

۲) $\frac{۲S^۲}{۸S^۲+S+۵}$

۳) $\frac{۲S^۲}{۸S^۲+۵S+۵}$

۴) $\frac{۲S^۲}{۸S^۲+۵S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با نوشتن KCL در گره بالای مدار و در حوزه فرکانس داریم:



$$V_A=۲V_۲\ \Rightarrow\ \frac{۲V_۲}{۲}+\frac{۲V_۲}{۲S}+\frac{۲V_۲-V_۱}{۲+\frac{۱}{۲S}}=۰$$

$$\Rightarrow\ V_۲+\frac{V_۲}{S}+\frac{۲V_۲-V_۱}{\frac{۴S+۱}{۲S}}=۰\ \Rightarrow\ V_۲+\frac{V_۲}{S}+\frac{۲S(۲V_۲-V_۱)}{(۴S+۱)}=۰$$

$$\Rightarrow\ \frac{V_۲(۴S+۱)S+V_۲(۴S+۱)+۲S^۲(۲V_۲-V_۱)}{(۴S+۱)S}=۰\ \Rightarrow\ V_۲(۴S^۲+S+۴S+۱+۴S^۲)=۲S^۲V_۱\ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۲S^۲}{۸S^۲+۵S+۱}}$$

مثال ۵۶: **پاسخ حالت صفر مدار به ورودی $e^{-t}u(t)$ برابر با $(-۱۰e^{-t}+۱۰te^{-t})u(t)$ می‌باشد. پاسخ ضربه مدار کدام گزینه است؟**

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۸)

۱) $۱۰e^{-t}\delta(t)$

۲) $-۱۰te^{-t}u(t)$

۳) $۱۰e^{-t}u(t)-۱۰\delta(t)$

۴) $(۱۰te^{-t}+۱۰e^{-t})u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه لاپلاس پاسخ ضربه، همان تابع شبکه در حوزه فرکانس است، داریم:

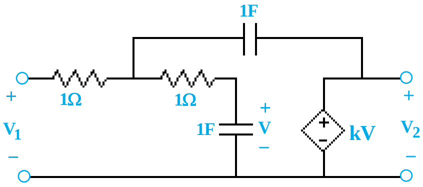
$$X_{in}(t)=e^{-t}u(t)\ \Rightarrow\ X_{in}(S)=\frac{۱}{S+۱}$$

$$X_o(t)=(-۱۰e^{-t}+۱۰te^{-t})u(t)\ \Rightarrow\ X_o(S)=\frac{-۱۰}{S+۱}+\frac{۱۰}{(S+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow\ H(S)=\frac{X_o(S)}{X_{in}(S)}=\frac{\frac{-۱۰}{S+۱}+\frac{۱۰}{(S+۱)^۲}}{\frac{۱}{S+۱}}=-۱۰+\frac{۱۰}{S+۱}\ \Rightarrow\ \mathbf{h(t)=L^{-۱}[H(S)]=-۱۰\delta(t)+۱۰e^{-t}u(t)}$$

مثال ۵۷: **در مدار شکل داده شده، تابع انتقال ولتاژ $H(S)=\frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}$ برابر است با:**

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)



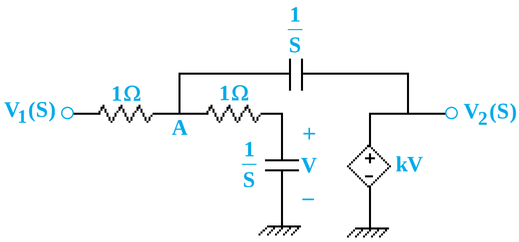
۱) $\frac{k}{S^۲+(۳-k)S+۲}$

۲) $\frac{k}{S^۲+(k-۳)S+۱}$

۳) $\frac{k}{S^۲+(k-۳)S+۲}$

۴) $\frac{k}{S^۲+(۳-k)S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن KCL در گره A داریم:



$$S(V_A-kV)+\frac{V_A}{۱+\frac{۱}{S}}+\frac{V_A-V_۱(S)}{۱}=۰$$

با نوشتن رابطه تقسیم ولتاژ برای V داریم:

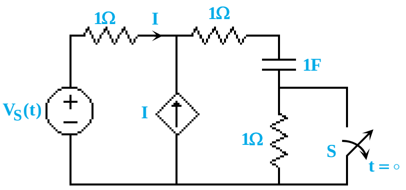
$$V=V_A\times\frac{\frac{۱}{S}}{\frac{۱}{S}+۱}$$

با ترکیب روابط بالا داریم:

$$V=\frac{V_۱(S)}{S^۲+۳S-kS+۱} \Rightarrow V_۲(S)=kV \Rightarrow \frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}=\frac{k}{S^۲+(۳-k)S+۱}$$

مثال ۵۸: در مدار شکل داده شده، کلید S به مدت طولانی بسته بوده و در $t=۰$ باز می‌شود. اگر $V_S(t)=u(t)$ باشد، آنگاه پاسخ $I(t)$ برابر است با:

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)



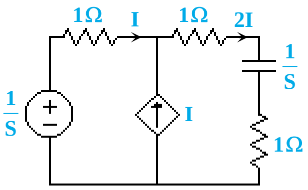
۱) $-۰/۲e^{-۰/۴t}u(t)$

۲) $۱-e^{-۰/۴t}u(t)$

۳) $۱+e^{-۰/۴t}u(t)$

۴) $۰/۲e^{-۰/۴t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه تابع ورودی مدار پله واحد است، لذا در $t=۰^-$ ولتاژ اولیه خازن صفر است. حال مدار را در $t>۰$ و در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

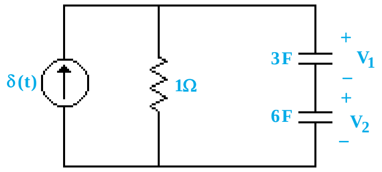


$$\frac{۱}{S}=I+۲I[۲+\frac{۱}{S}] \Rightarrow I[۱+۴+\frac{۲}{S}]=\frac{۱}{S} \Rightarrow I=\frac{\frac{۱}{S}}{۵+\frac{۲}{S}} \Rightarrow I=\frac{۱}{۵S+۲}=\frac{۱}{۵(S+\frac{۲}{۵})}$$

$$\Rightarrow I(t)=\frac{۱}{۵}e^{-۰/۴t}u(t)=۰/۲e^{-۰/۴t}u(t)$$

مثال ۵۹: در مدار شکل داده شده، با فرض $V_۱(۰^-)=V_۲(۰^-)=۰$ آنگاه $V_۱(۰^+)$ برابر است با:

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)



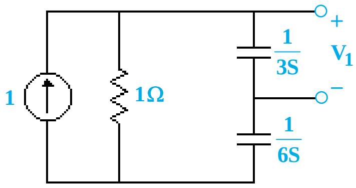
۱) $\frac{۱}{۶}v$

۲) $\frac{۱}{۲}v$

۳) $\frac{۱}{۳}v$

۴) ۱v

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن تقسیم جریان داریم:

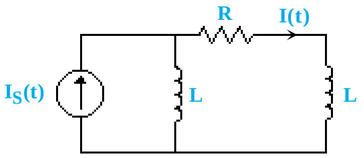


$$V_۱=۱\times\frac{۱}{\frac{۱}{۳S}+\frac{۱}{۶S}+۱}\times\frac{۱}{۳S}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}+۳S}$$

$$\Rightarrow V_۱=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۳S} \Rightarrow V_۱(۰^+)=\lim_{S\to\infty}SV_۱=\lim_{S\to\infty}\frac{S}{\frac{۳}{۲}+۳S}=\frac{۱}{۳}v$$

مثال ۶۰: در مدار شکل زیر، اگر $I(t)$ پاسخ مورد نظر باشد، پاسخ پله مدار کدام مورد است؟

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۹)



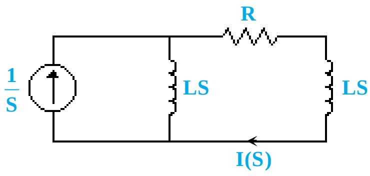
۱) $I(t)=۰$

۲) $I(t)=\frac{۱}{۲}e^{\frac{-Rt}{۲L}}u(t)$

۳) $I(t)=\frac{۱}{۲R}e^{\frac{-Rt}{L}}u(t)$

۴) $I(t)=\frac{۱}{۲R}(۱-e^{\frac{-Rt}{۲L}})u(t)$

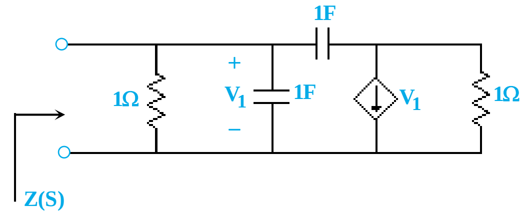
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس داریم:



$$I(S)=\frac{۱}{S}\times\frac{LS}{۲LS+R}$$

$$\Rightarrow I(S)=\frac{L}{۲LS+R}=\frac{L}{۲L(S+\frac{R}{۲L})}=\frac{\frac{۱}{۲}}{S+\frac{R}{۲L}} \Rightarrow I(t)=[\frac{۱}{۲}e^{-\frac{R}{۲L}t}]u(t)$$

مثال۶۱: تابع امپدانس مدار شکل زیر کدام گزینه است؟ (مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۹۰)



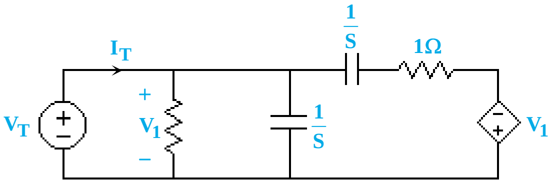
۱) $Z(S)=\dfrac{S+۱}{S^۲+۴S+۱}$

۲) $Z(S)=\dfrac{S}{S^۲+۴S+۱}$

۳) $Z(S)=\dfrac{S+۱}{S^۲+۱}$

۴) $Z(S)=\dfrac{S}{S^۲+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» پس از تبدیل منابع در سمت راست مدار، به مدار V_T متصل کرده و رابطه I_T را با V_T بدست می‌آوریم. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



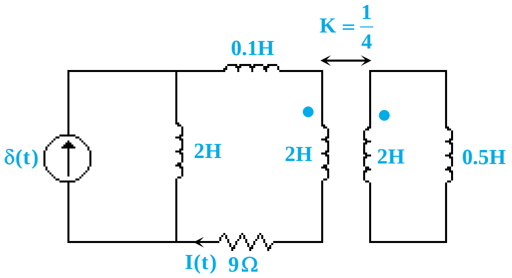
$$(V_T=V_۱)$$

$$I_T=\frac{V_T}{۱}+SV_T+\frac{V_T+V_۱}{۱+\frac{۱}{S}}\Rightarrow I_T=V_T+SV_T+\frac{۲V_T}{۱+\frac{۱}{S}}$$

$$\Rightarrow I_T=V_T(۱+S+\frac{۲S}{۱+S})\Rightarrow I_T=V_T(\frac{S^۲+۴S+۱}{S+۱})\Rightarrow \mathbf{Z_{in}=\frac{V_T}{I_T}=\frac{S+۱}{S^۲+۴S+۱}}$$

آزمون فصل هشتم

۱ـ پاسخ ضربه‌ی جریان $I(t)$ کدام است؟



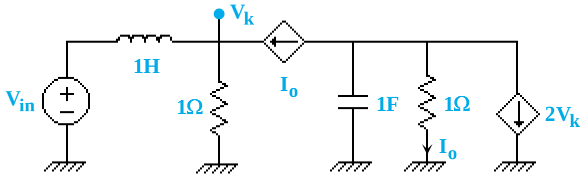
۱) $\frac{۲}{۳}\delta(t)+\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۲) $-\frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-\frac{t}{۲}}u(t)$

۳) $\frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۴) $-\frac{۲}{۳}\delta(t)+\frac{۸}{۹}e^{-\frac{t}{۲}}u(t)$

۲ـ پاسخ ضربه‌ی V_k در مدار زیر کدام است؟



۱) $\frac{S-۱}{S^۲+۴S-۲}$

۲) $\frac{۱}{S^۲+۴S+۲}$

۳) $\frac{۲}{S^۲+۵S-۲}$

۴) $\frac{S+۲}{S^۲+۵S+۲}$

۳ـ تابع شبکه‌ی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، به صورت زیر است. پاسخ ورودی صفر مدار به شرایط اولیه $y(۰)=۲$ و $y'(۰)=-۱$ کدام است؟

$$H(S)=\frac{S+۱}{S^۲+۳S+۲}$$

۱) $-۳e^{-t}-e^{-۲t}$

۲) $۲e^{-t}-۳e^{-۲t}$

۳) $۳e^{-t}-e^{-۲t}$

۴) $-۲e^{-t}+۳e^{-۲t}$

۴ـ در صورتی که پاسخ پله‌ی یک مدار به صورت $۱-te^{-t}-e^{-t}$ باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی آن به ورودی $۶\cos(t+۳۰^\circ)$ کدام است؟

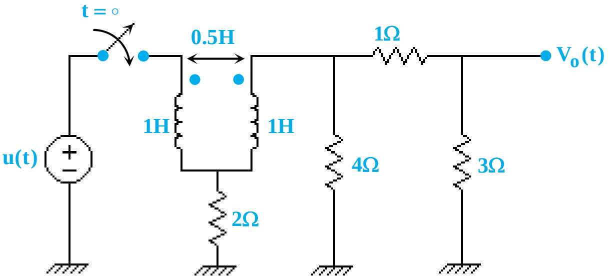
۱) $۲\angle-۳۰^\circ$

۲) $۳\angle۶۰^\circ$

۳) $۲\angle۳۰^\circ$

۴) $۳\angle-۶۰^\circ$

۵ـ در مدار زیر پاسخ پله‌ی $V_o(t)$ کدام است؟



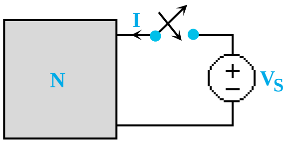
۱) $\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۴}e^{-\frac{۴}{۳}t}$

۲) $-\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۴}e^{-\frac{۴}{۳}t}$

۳) $\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}e^{-\frac{۴}{۳}t}$

۴) $-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}e^{-\frac{۴}{۳}t}$

۶ـ امپدانس ورودی در مدار زیر مطابق با $Z(S)$ داده شده است. حال اگر $I(۰^+)=۱۰\,A$ باشد، مقدار V_S برای زمان‌های مثبت کدام است؟



$$Z(S)=\frac{S^۲+۳S+۴}{۳S^۲+S+۹}$$

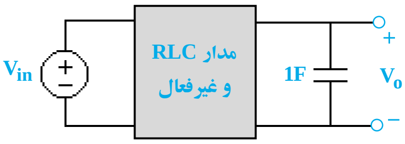
۱) $\frac{۱۰}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۱۰}$

۳) ۱۰

۴) ۳

۷ـ در صورتی که در مدار زیر تابع تبدیل $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ به صورت زیر باشد، انرژی ذخیره شده در خازن، در $t=\infty$ کدام است؟



$$H(S)=\frac{۳(S+۳۰)}{۲S+۱}\ ,\ V_{in}(t)=۳u(t)$$

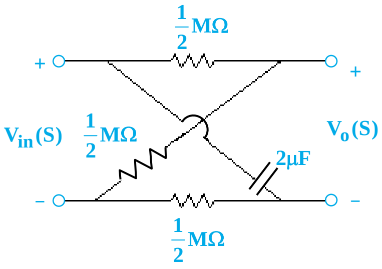
۱) ۹۰۰J

۲) ۳۰J

۳) ۴۵۰J

۴) ۱۵J

۸ـ در مدار زیر تابع انتقال $\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ کدام است؟



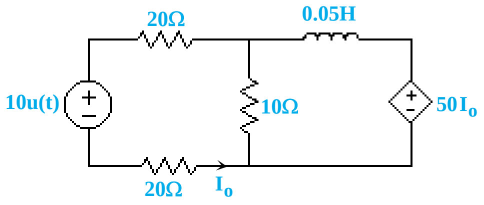
۱) $\frac{۱-S}{۲(S+۱)}$

۲) $\frac{۲-S}{S(S+۲)}$

۳) $\frac{S-۱}{(S+۱)}$

۴) $\frac{S-۲}{۲(S+۲)}$

۹ـ در مدار زیر به ازای ورودی داده شده، پاسخ جریان خروجی کدام است؟



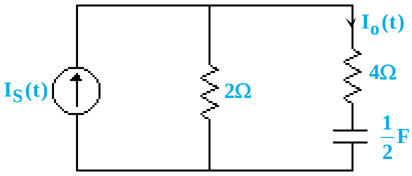
۱) $۱۲u(t)-۲۴e^{۴۰t}$

۲) $۱۲u(t)-۲۴e^{-۴۰t}$

۳) $۱۰u(t)-۱۲e^{-۴۰t}$

۴) $۱۰u(t)-۱۲e^{۴۰t}$

۱۰ـ تابع انتقال $\frac{I_o(S)}{I_S(S)}$، در مدار زیر کدام است؟



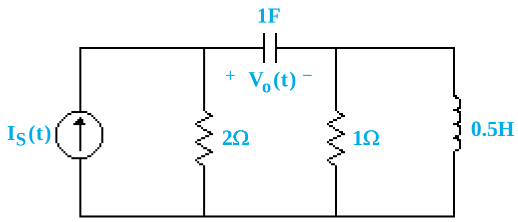
۱) $\frac{۱}{۱+۲S}$

۲) $\frac{S}{۱+۲S}$

۳) $\frac{۱}{۱+۳S}$

۴) $\frac{S}{۱+۳S}$

۱۱ـ پاسخ ضربه‌ی مدار روبرو برحسب $(j\omega)$ کدام است؟



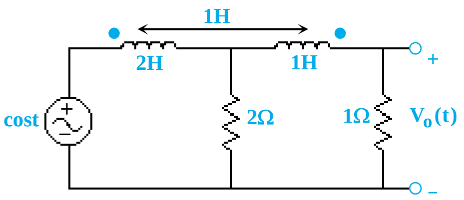
۱) $\frac{(۲+j\omega)}{۲+۵j\omega-\omega^۲}$

۲) $\frac{۱+j\omega}{۱+۵j\omega-\omega^۲}$

۳) $\frac{۲(۲+j\omega)}{۲+۵j\omega-۳\omega^۲}$

۴) $\frac{۴(۲+j\omega)}{۳-\omega^۲}$

۱۲ـ معادله‌ی تغییرات $V_o(t)$ در مدار زیر کدام است؟



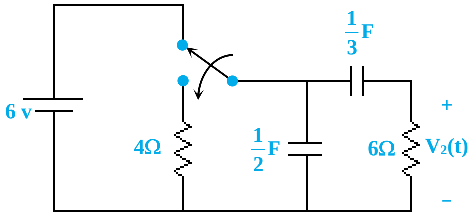
۱) $۰/۳\cos(t-۳۶^\circ)$

۲) $۰/۴\cos(t+۳۶^\circ)$

۳) $۰/۵۴\cos(t-۴۹/۴^\circ)$

۴) $۰/۵۴\cos(t+۴۹/۴^\circ)$

۱۳ـ تابع تغییرات $V_۲(S)$ کدام است؟



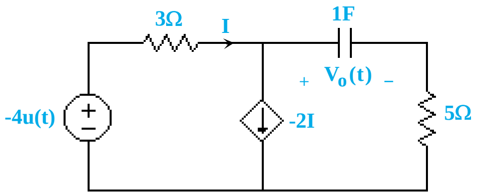
۱) $\frac{-۳}{(S+۰/۲)(S+۱/۱)}$

۲) $\frac{-۳}{(S+۱/۱)(S+۰/۷)}$

۳) $\frac{۳}{(s+۰/۲)(s+۱/۱)}$

۴) $\frac{۳}{(S+۰/۱)(S+۸/۸)}$

۱۴ـ در مدار زیر تابع تغییرات $V_o(t)$ کدام است؟



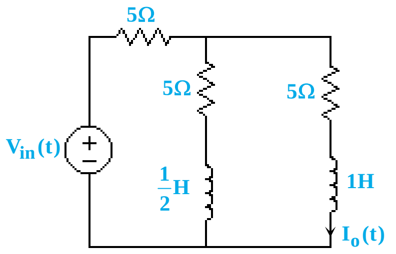
۱) $(-۱+۳e^{-\frac{t}{۳}})u(t)$

۲) $(-۴+۳e^{-\frac{t}{۳}})u(t)$

۳) $(-۴+۴e^{-\frac{t}{۶}})u(t)$

۴) $(-۱+۶e^{-\frac{t}{۶}})u(t)$

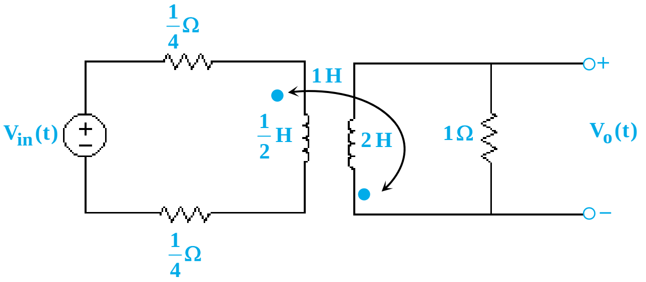
۱۵ـ تابع انتقال $\frac{I_o(S)}{V_{in}(S)}$ در مدار زیر، کدام است؟



۱) $\frac{\frac{۱}{۲}S+۵}{S(S^۲+۳۰S+۱۵۰)}$ ۲) $\frac{S+۱۰}{S^۲+۳۰S+۱۵۰}$

۳) $\frac{S+۱۰}{S(S^۲+۳۰S+۱۵۰)}$ ۴) $\frac{\frac{۱}{۲}S+۵}{S^۲+۳۰S+۱۵۰}$

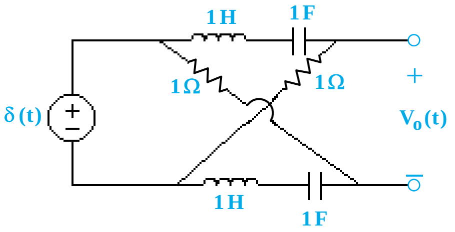
۱۶ـ در مدار زیر تابع انتقال $\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ کدام است؟



۱) $\frac{-۲S}{۳(S+\frac{۱}{۳})}$ ۲) $\frac{S}{(S+\frac{۱}{۳})}$

۳) $\frac{۲S}{۳(S+\frac{۱}{۳})}$ ۴) $\frac{-S}{(S+\frac{۱}{۳})}$

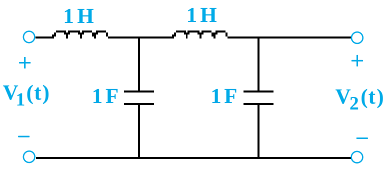
۱۷ـ پاسخ ضربه مدار زیر در حوزه فرکانس کدام است؟



۱) $\frac{-S^۲+۲S-۱}{S^۲+S+۱}$ ۲) $\frac{-S^۲+S-۱}{S^۲+S+۱}$

۳) $\frac{S^۲+۲S-۱}{S^۲+۳S+۱}$ ۴) $\frac{S^۲+۲S+۱}{S^۲-۳S+۱}$

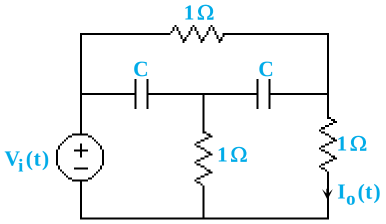
۱۸ـ تابع انتقال در مدار زیر کدام است؟ $H(S)=\frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}$



۱) $\frac{S^۲}{S^۴+۳S^۲+۱}$ ۲) $\frac{۱}{S^۴+۳S^۲+۱}$

۳) $\frac{S}{S^۲+۳S+۱}$ ۴) $\frac{۱}{S^۲+۳S+۱}$

۱۹ـ تابع انتقال $\frac{I_o(S)}{V_i(S)}$ در مدار زیر کدام است؟



۱) $\frac{S^۲C+۲SC+۱}{S^۲C+۶SC+۴}$ ۲) $\frac{S^۲C+۳SC+۲}{S^۲C+۳S+۴}$

۳) $\frac{S^۲C^۲+۲SC+۱}{S^۲C^۲+۵SC+۲}$ ۴) $\frac{S^۲C^۲+۲SC+۳}{S^۲C^۲+۴SC+۱}$

۲۰ـ پاسخ ضربه یک مدار به صورت $H(S)=\frac{۲S(S+۱)}{S^۲+۸}$ است. اگر یک ورودی سینوسی به صورت $۶\cos(۲t+۳۰^\circ)$ به این مدار اعمال شود، پاسخ حالت دائمی سینوسی در کدام گزینه خواهد بود؟

۱) $۳/۲\cos(۲t+۳۰^\circ)$ ۲) $۱۳/۳۸\cos(۲t+۱۸۳^\circ)$ ۳) $۳/۲\cos(۲t+۱۸۳^\circ)$ ۴) $۱۳/۳۸\cos(۲t-۱۸۳^\circ)$

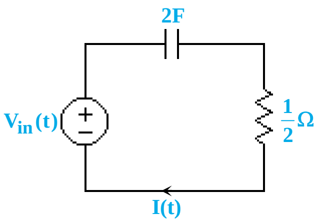
۲۱ـ در صورتی که تابع ورودی به صورت $V_{in}(t)$ باشد، جریان مدار کدام است؟

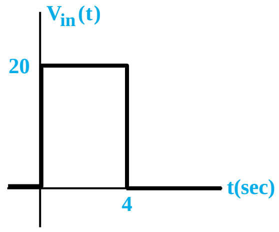
۱) $(۱۰e^{-۲t}-۲۰e^{-t})u(t)$

۲) $۴۰e^{-t}u(t)-۴۰e^{-(t-۴)}u(t-۴)$

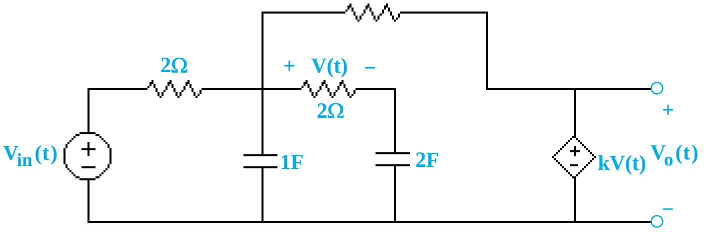
۳) $۲۰e^{-۲t}-۴۰e^{-t}u(t)$

۴) $۲۰e^{-t}u(t)-۱۰e^{-(t-۴)}u(t-۴)$





۲۲ـ در مدار زیر k چه مقداری باشد تا پاسخ ضربه‌ی مدار به صورت $۲e^{-t} - e^{-\frac{۱}{۲}t}$ باشد؟



۱) $k = ۳$

۲) $k = ۴$

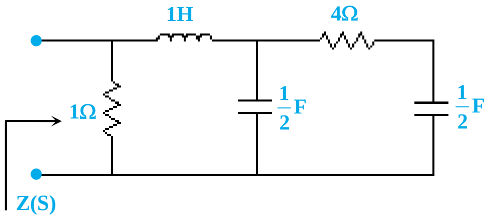
۳) $k = ۶$

۴) $k = ۲$

۲۳ـ در صورتی که پاسخ ضربه‌ی یک مدار به صورت $۱۲e^{-۲t}$ باشد، مدار مذکور با اعمال تابع $\cos ۲t$ کدام پاسخ را ارائه خواهد داد؟

۱) $\cos ۲t - ۳\sin t$
۲) $-\cos ۲t + ۴\sin ۲t$
۳) $۳\cos ۲t + ۳\sin ۲t$
۴) $-۳\cos ۲t + ۲\sin ۲t$

۲۴ـ در مدار زیر رابطه‌ی $Z(S)$ کدام است؟



۱) $\dfrac{S^۳ + S^۲ + ۲S + ۱}{S^۳ + ۲S^۲ + ۳S + ۱}$

۲) $\dfrac{S^۳ + ۲S^۲ + ۲S + ۲}{S^۳ + ۴S^۲ + ۲S + ۲}$

۳) $\dfrac{S^۳ + S^۲ + S + ۱}{S^۳ + S^۲ + S + ۲}$

۴) $\dfrac{S^۳ + ۳S^۲ + ۳S + ۳}{S^۳ + ۳S^۲ + S + ۳}$

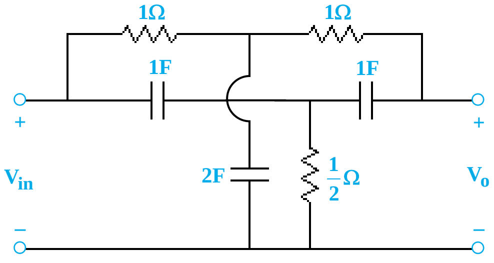
۲۵ـ در صورتی که پاسخ یک مدار به ورودی تابع ضربه به صورت $H(S) = \dfrac{S^۲ + ۳S + ۵}{S^۲ + ۵S + ۶}$ باشد، آنگاه پاسخ مدار مذکور به ورودی $e^{-t}u(t)$ کدام است؟

۱) $۱۰e^{-t} - ۴e^{-۴t} - ۳e^{-۳t}$
۲) $۱/۵e^{-t} - ۳e^{-۲t} + ۲/۵e^{-۳t}$
۳) $۱۶e^{-t} - ۳e^{-۴t} - ۲e^{-۳t}$
۴) $۱/۵e^{-t} - ۲e^{-۲t} - ۲/۵e^{-۳t}$

۲۶ـ در صورتی که معادلات حالت یک مدار به صورت $I_o = \begin{bmatrix} \frac{۱}{R} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{RC} & \frac{۱}{C} \\ -\frac{۱}{L} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{L} \end{bmatrix} V_S$ باشد، آنگاه تابع تبدیل $H(S)$ در مدار کدام است؟ $(R = ۱\Omega\ ,\ C = \frac{۱}{۴}F\ ,\ L = \frac{۱}{۲}H)$

۱) $\dfrac{۲}{S^۲ + ۲S + ۱}$
۲) $\dfrac{۳S}{S^۲ + S + ۱}$
۳) $\dfrac{۸}{S^۲ + ۴S + ۸}$
۴) $\dfrac{۲S}{S^۲ + ۳S + ۱}$

۲۷ـ تابع تبدیل $H(S) = \dfrac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ کدام است؟



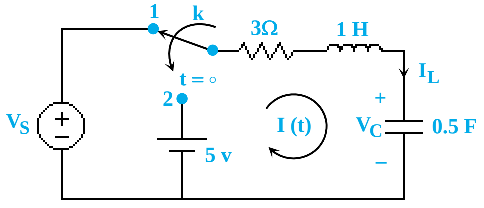
۱) $\dfrac{S + ۱}{S^۲ + ۴S + ۱}$

۲) $\dfrac{S^۲ + ۱}{S^۲ + S + ۴}$

۳) $\dfrac{S^۲ + ۱}{S^۲ + ۴S + ۱}$

۴) $\dfrac{S + ۱}{S^۲ + S + ۴}$

۲۸ـ در مدار شکل زیر کلید k در لحظه $t = ۰$، از حالت (۱) به حالت (۲) می‌رود. با فرض اینکه $I_L(۰^-) = ۲A$ و $V_C(۰^-) = ۲v$ باشد، تبدیل لاپلاس جریان $I(t)$ کدام است؟

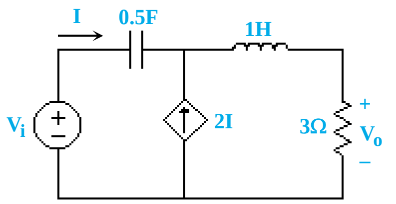


۱) $\dfrac{۲S + ۳}{(S + ۱)(S + ۲)}$

۲) $\dfrac{۲S + ۳}{(S + ۳)(S + ۲)}$

۳) $\dfrac{S + ۳}{(۲S + ۳)(۰/۵S + ۱)}$

۴) به دلیل مشخص نبودن مقدار V_S قابل محاسبه نیست.



۲۹ــ تابع تبدیل $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ برای مدار شکل زیر کدام است؟

۱) $\frac{۶S}{S^۲+۳S+۹}$

۲) $\frac{۹S}{S^۲+۳S+۹}$

۳) $\frac{۶S}{۳S^۲+۹S+۲}$

۴) $\frac{۹S}{۳S^۲+۹S+۲}$

۳۰ــ تابع تبدیل مداری به صورت $F(S)=\frac{۵S^۳-۱۶۰۰}{S(S^۳+۱۸S^۲+۹۰۰S+۸۰۰)}$ می‌باشد. حال مقدار $\frac{f(۰^+)}{f(\infty)}$ کدام است؟

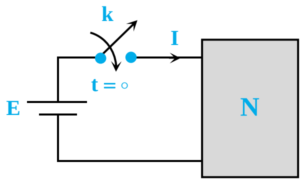
۱) $-\frac{۲}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $-\frac{۵}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۱ــ امپدانس ورودی یک‌قطبی شکل زیر برابر $Z(S)=\frac{S^۲+S+۲}{۲S^۲+S+۱}$ می‌باشد. اگر با بسته شدن کلید k در لحظه $t=۰$، جریان I در لحظه‌ی $t=۰^+$ برابر ۶ آمپر باشد، مقدار E چند ولت است؟



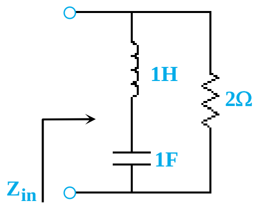
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۴

۳۲ــ مقدار Z_{in} در مدار شکل زیر کدام است؟



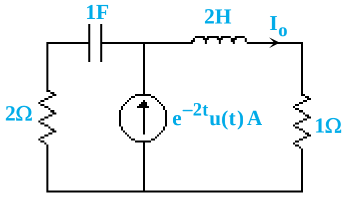
۱) $\frac{S^۲+۲}{S^۲+۲S+۱}$

۲) $\frac{S^۲+۱}{S^۲+۲S+۱}$

۳) $\frac{۲(S^۲+۱)}{S^۲+۲S+۱}$

۴) $\frac{(S+۱)(S^۲+۲)}{(S-۱)(S^۲+۲S+۱)}$

۳۳ــ با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله‌ی زمانی I_o کدام است؟



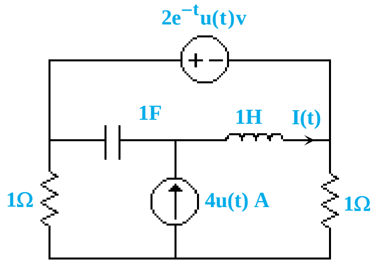
۱) $(۲e^{-۲t}-e^{-t})u(t)$

۲) $(e^{-۲t}-۲e^{-t})u(t)$

۳) $(e^{-t}-e^{-۲t})u(t)$

۴) $(۲e^{-۲t}+e^{-t})u(t)$

۳۴ــ با استفاده از تبدیل لاپلاس، قسمت گذرای معادله‌ی زمانی I(t) برای $t>۰$ از کدام گزینه به دست می‌آید؟



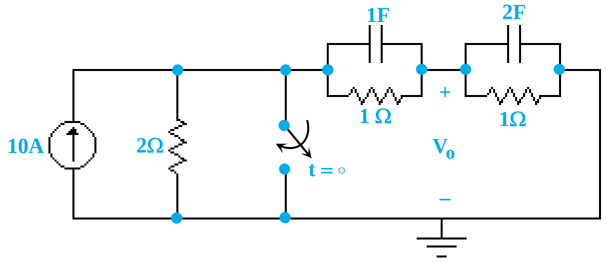
۱) $(۲+e^{-t})u(t)$

۲) $(۲-e^{-t})u(t)$

۳) $(۳-۲e^{-t})u(t)$

۴) $(۴-e^{-t})u(t)$

۳۵ــ در شکل زیر، کلید مدت زمان زیادی باز بوده و در $t=۰$ بسته می‌شود؛ ولتاژ V_o در $t=۰^+$ چند ولت است؟



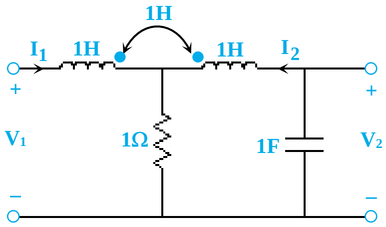
۱) -۵

۲) $-\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۳}$

۴) ۵

۳۶ـ در شکل زیر $\frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}$ برابر با کدام گزینه است؟



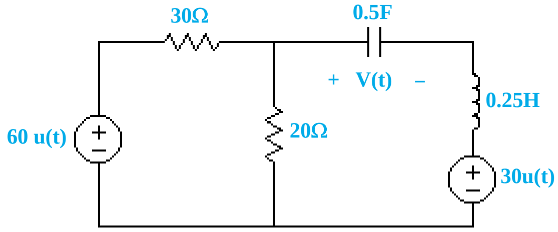
۱) $\frac{۱}{S}$

۲) $\frac{۱}{S+۱}$

۳) $\frac{۱}{S-۱}$

۴) ۱

۳۷ـ در مدار زیر $V(t)$ در زمان‌های مثبت کدام است؟



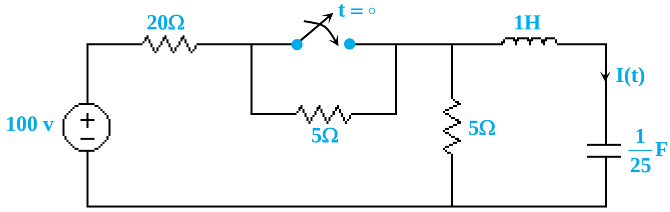
۱) $۳۰+e^{-۴/۳t}-e^{۰/۱۶t}$

۲) $۶+۰/۰۲e^{-۴۷/۳t}-۶e^{-۰/۱۶t}$

۳) $۳۰+e^{-۳/۲t}-e^{۰/۹t}$

۴) $۶+۰/۰۶e^{-۳۲/۱t}-۳e^{-۰/۹t}$

۳۸ـ در مدار زیر تابع جریان $I(t)$ کدام است؟



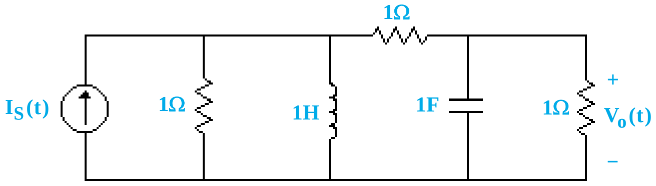
۱) $۹/۱\sin(۳t)e^{-۳t}$

۲) $۳/۹\sin(۴/۵t)e^{-۳t}$

۳) $۰/۷\sin(۴/۵t)e^{-۲t}$

۴) $۳/۹\sin(۴/۵t)e^{-۲t}$

۳۹ـ در مدار زیر تابع انتقال $\frac{V_0(S)}{I_S(S)}$ کدام است؟



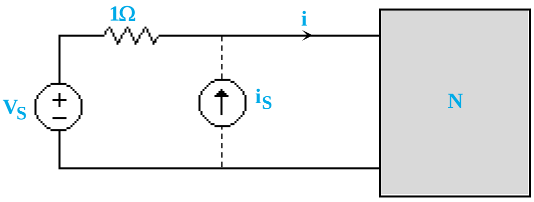
۱) $\frac{S}{(۱+S)^۲}$

۲) $\frac{۳S}{(S^۲+S+۱)}$

۳) $\frac{S}{۲(۱+S)^۲}$

۴) $\frac{۲S}{(S^۲+۳S+۱)}$

۴۰ـ N در شکل زیر، LTI و فاقد منابع مستقل است. جریان i به ازای ورودی $V_s(t)=u(t)$ و با حالت صفر برابر $i(t)=u(t)\times g$ می‌شود. اگر منبع جریان $i_s=۲\delta(t)+۳u(t)$ را به مدار اضافه کنیم، پاسخ حالت صفر جدید i کدام است؟



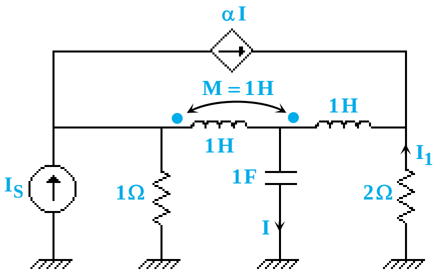
۱) $[۲\delta(t)+۴u(t)]\times g$

۲) $[-۲\delta(t)-۲u(t)]\times g$

۳) $[۲\delta(t)+۲u(t)]\times g$

۴) $[-۲\delta(t)-۴u(t)]\times g$

۴۱ـ در مدار زیر به ازای $\alpha=۳$، تابع انتقال $\frac{I_۱}{I_S}$ کدام است؟



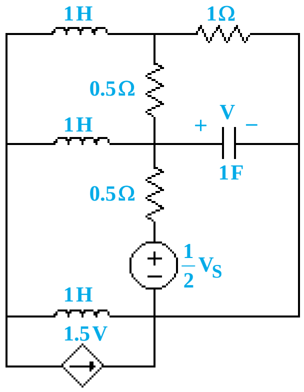
۱) $\frac{۲S^۲-۱}{S^۳+S^۲+۶S+۴}$

۲) $\frac{S^۲-۴}{S^۳+S^۲+۷S+۳}$

۳) $\frac{-۹S^۲+۲}{S^۳+S^۲+۶S+۴}$

۴) $\frac{-۸S^۲-۱}{S^۳+S^۲+۷S+۳}$

۴۲ـ در مدار زیر معادله‌ی مشخصه مدار کدام است؟



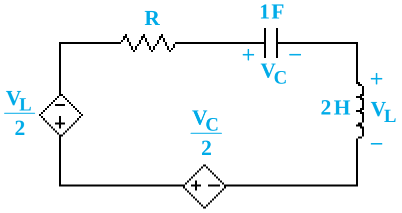
۱) $S^{۳}+\frac{۲۳}{۴}S^{۲}+\frac{۱۶}{۴}S+\frac{۱}{۵}=۰$

۲) $S^{۳}+\frac{۴}{۲۳}S^{۲}+\frac{۴}{۱۶}S+۵=۰$

۳) $S^{۳}+\frac{۶۷}{۱۳}S^{۲}+\frac{۲۳}{۱۸}S+\frac{۱}{۹}=۰$

۴) $S^{۳}+\frac{۱۳}{۶۷}S^{۲}+\frac{۱۸}{۲۳}S+۹=۰$

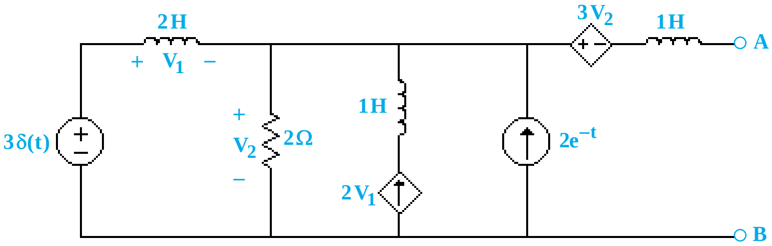
۴۳ـ در مدار زیر فرکانس تشدید برحسب رادیان بر ثانیه کدام است؟



۱) $\sqrt{\frac{۱}{۶}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱}{۳}}$

۳) $\sqrt{\frac{۱}{۲}}$ ۴) ۱

۴۴ـ امپدانس معادل تونن مدار زیر کدام است؟



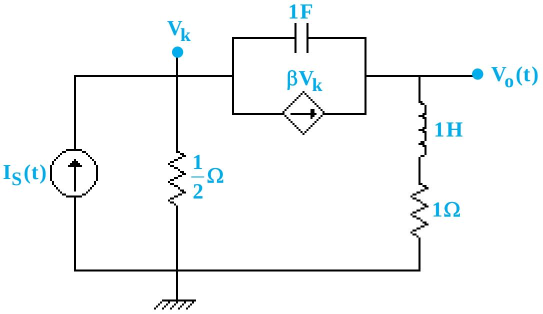
۱) $\frac{۳S+۲}{۱+۵S}$

۲) $\frac{۳S-۲}{۱+۵S}$

۳) $\frac{۵S^{۲}-۳S}{۱+۵S}$

۴) $\frac{۵S^{۲}+۳S}{۱+۵S}$

۴۵ـ در شکل زیر β کدام باشد تا تابع شبکه $\frac{V_o(S)}{I_S(S)}$ مستقل از فرکانس باشد؟



۱) $\beta=۲$

۲) $\beta=-۲$

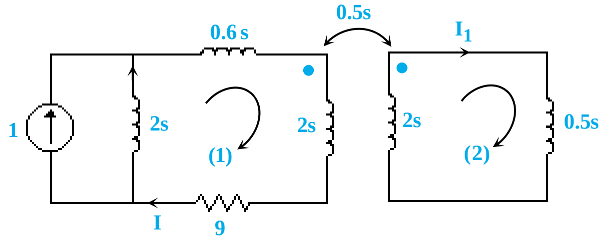
۳) $\beta=۱$

۴) هیچ مقداری برای β نمی‌توان در نظر گرفت.

پاسخنامه آزمون فصل هشتم

۱ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم (همچنین M را محاسبه می‌کنیم: $M=k\sqrt{L_۱L_۲}=۰/۵$).

حال با اعمال KVL در حلقه‌های ۱و۲ داریم:



$$KVL(۱):۲s(I-۱)+۰/۶sI+۲sI-۰/۵sI_۱+۹I=۰$$

$$\Rightarrow\ (۴/۶s+۹)I-۰/۵sI_۱=۲s\quad(۱)$$

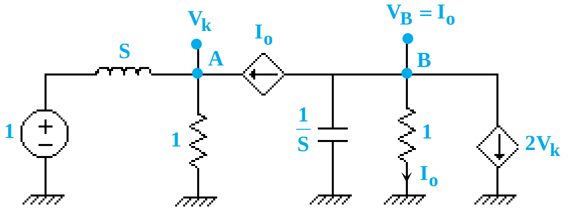
$$KVL(۲):۲sI_۱-۰/۵sI+۰/۵sI_۱=۰\Rightarrow I=۵I_۱\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\ \to(۴/۵s+۹)\times I=۲s\Rightarrow I=\frac{۲s}{۴/۵s+۹}=\frac{\frac{۴}{۹}(s+۲)-\frac{۸}{۹}}{s+۲}=\frac{۴}{۹}-\frac{\frac{۸}{۹}}{s+۲}$$

با اعمال لاپلاس معکوس داریم:

$$i(t)=\frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$$

۲ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم سپس با اعمال KCL در گره‌های A و B، تبدیل لاپلاس V_k را بدست می‌آوریم:



$$KCL(A):\frac{V_k-۱}{s}+V_k=I_o\Rightarrow(s+۱)V_k-sI_o=۱\quad(۱)$$

$$KCL(B):۲V_k+I_o+sI_o+I_o=۰\Rightarrow I_۰=-\frac{۲V_k}{s+۲}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\to(s+۱)V_k+\frac{۲s}{s+۲}V_k=۱\Rightarrow V_k=\frac{s+۲}{s^۲+۵s+۲}$$

۳ـ گزینه «۳» **روش تشریحی:** با توجه به تعریف تابع شبکه داریم:

$$H(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{s+۱}{s^۲+۳s+۲}\to(s^۲+۳s+۲)y=(s+۱)x\Rightarrow y''+۳y'+۲y=x'+x$$

از آنجا که ورودی برابر صفر است، بنابراین خواهیم داشت:

$$x=۰\Rightarrow y''+۳y'+۲y=۰\ ,\ y(۰)=۲\ ,\ y'(۰)=-۱$$

با حل معادله‌ی دیفرانسیل فوق داریم:

$$y=k_۱e^{-۲t}+k_۲e^{-t}\ \xrightarrow[y'(۰)=-۱]{y(۰)=۲}\begin{cases}k_۱=-۱\\k_۲=۳\end{cases}$$

روش تستی: با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود که تنها در گزینه‌ی ۳ شرط $y(۰)=۲$ ارضا می‌شود.

۴ـ گزینه «۴» ابتدا تابع تبدیل مدار مورد نظر را بدست می‌آوریم:

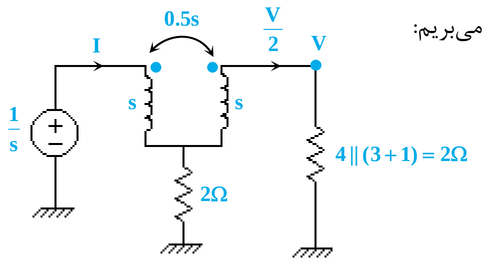
$$s(t)=۱-te^{-t}-e^{-t}\ \to h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=-e^{-t}+te^{-t}+e^{-t}=te^{-t}\ \Rightarrow H(s)=L(h(t))=\frac{۱}{(s+۱)^۲}$$

حال با توجه به فاز ورودی و فاز تابع شبکه به ازای فرکانس ورودی داریم:

$$x(t)=۶\cos(t+۳۰^\circ)\to X=۶\measuredangle۳۰$$

$$H(j\omega)=\frac{۱}{(۱+j\omega)^۲}\to H(۱j)=\frac{۱}{(۱+j)^۲}=-۰/۵\,j\Rightarrow\ Y=X\times H(j\omega)=(-۰/۵j)\times۶\measuredangle۳۰=۳\measuredangle-۶۰^\circ$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با اعمال kvl در دو حلقه‌ی موجود داریم:

$$\text{KVL (حلقه‌ی چپ)}: \frac{-۱}{s}+sI-۰/۵s\times(\frac{V}{۲})+۲\times(I-\frac{V}{۲})=۰ \Rightarrow (s+۲)I-(\frac{s}{۴}+۱)V=\frac{۱}{s} \quad (۱)$$

$$\text{KVL (حلقه‌ی راست)}: ۲\times(\frac{v}{۲}-I)+\frac{sv}{۲}-۰/۵sI+V=۰ \Rightarrow (\frac{s}{۲}+۲)V-(\frac{s}{۲}+۲)I=۰ \Rightarrow I=V \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \to (\frac{۳}{۴}s+۱)V=\frac{۱}{s} \Rightarrow v=\frac{\frac{۴}{۳}}{s(s+\frac{۴}{۳})}=\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s+\frac{۴}{۳}}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس داریم:

$$V(t)=۱-e^{-\frac{۴}{۳}t}$$

از طرفی داریم:

$$V_O(t)=\frac{۳}{۱+۳}V(t) \Rightarrow V_O(t)=\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۴}e^{-\frac{۴}{۳}t}$$

۶ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف امپدانس و همچنین با استفاده از قضیه‌ی مقدار اولیه مقدار V_S را به دست می‌آوریم:

$$Z(s)=\frac{V_S(s)}{I(s)}=\frac{s^۲+۳s+۴}{۳s^۲+s+۹} \Rightarrow I(s)=\frac{۳s^۲+s+۹}{s^۲+۳s+۴}V_S(s)$$

$$I(۰^+)=\lim_{s\to\infty} sI(s)=\lim_{s\to\infty} s.V_S(s).\frac{۳s^۲+s+۹}{s^۲+۳s+۴}=۱۰ \Rightarrow V_S(s)=\frac{۱۰}{۳s} \xrightarrow{L^{-۱}} V_S(t)=\frac{۱۰}{۳}u(t)$$

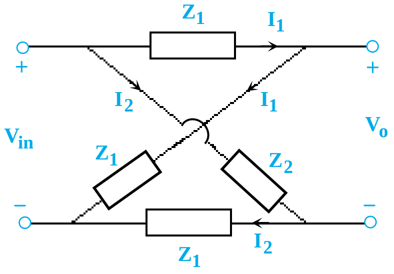
۷ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی انرژی ذخیره در خازن در $t=\infty$، کافی است ولتاژ نهایی خازن را با استفاده از قضیه‌ی مقدار نهایی بدست آوریم:

$$\begin{cases} H(s)=\dfrac{V_O(s)}{V_{in}(s)}=\dfrac{۳(s+۳۰)}{۲s+۱} \\ V_{in}(s)=\dfrac{۱}{۳s} \end{cases} \Rightarrow V_O(s)=\frac{s+۳۰}{s(۲s+۱)}$$

$$V_C(\infty)=V_O(\infty)=\lim_{s\to۰} SV_O(s)=\lim_{s\to۰}\frac{s+۳۰}{۲s+۱}=۳۰$$

$$E_C(\infty)=\frac{۱}{۲}CV_C^۲(\infty)=\frac{۱}{۲}\times۱\times۳۰^۲=۴۵۰j$$

۸ـ گزینه «۱» ابتدا به صورت پارامتری مدار را تحلیل کرده و تابع انتقال مورد نظر را بدست می‌آوریم (خروجی مدار باز است):

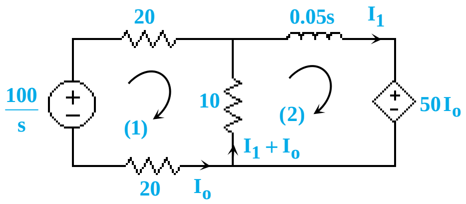


$$\underbrace{V_{in}=۲Z_۱I_۱}_{(۱)}=Z_۲I_۲+Z_۱I_۲ \Rightarrow I_۲=\frac{۲Z_۱}{Z_۱+Z_۲}I_۱ \qquad (۲)$$

$$V_O=-Z_۱I_۱+Z_۲I_۲ \xrightarrow{(۲)} V_O=\frac{Z_۱Z_۲-Z_۱^۲}{Z_۱+Z_۲}I_۱ \xrightarrow{(۱)} V_O=\frac{Z_۱Z_۲-Z_۱^۲}{۲Z_۱(Z_۱+Z_۲)}V_{in}$$

$$\frac{V_O}{V_{in}}=\frac{Z_۱Z_۲-Z_۱^۲}{(Z_۱+Z_۲)(۲Z_۱)} \xrightarrow[Z_۲=\frac{۱}{۲s}]{Z_۱=\frac{۱}{۲}} \frac{V_O(s)}{V_{in}(s)}=\frac{\frac{۱}{۴s}-\frac{۱}{۴}}{(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲s})\times۱}=\frac{۱-s}{۲s+۲}$$

۹ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم. سپس با اعمال kvl در حلقه‌ی چپ و راست، I_O را بدست می‌آوریم:



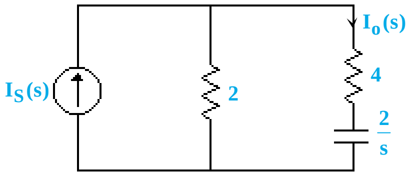
$$\begin{cases} \text{kvl}(۱): ۵۰I_O+۱۰I_۱=-\dfrac{۱۰۰}{s} & (۱) \\ \text{kvl}(۲): (۰/۰۵s+۱۰)I_۱+۱۰I_O=-۵۰I_O \Rightarrow I_۱=\dfrac{-۶۰I_O}{۰/۰۵s+۱۰} & (۲) \end{cases}$$

$$(۱),(۲) \rightarrow ۵۰I_o + ۱۰\times\left(\frac{-۶۰I_o}{۰/۰۵s+۱۰}\right) = -\frac{۱۰۰}{s} \Rightarrow I_o = \frac{۵s-۱۰۰۰}{s(۲/۵s-۱۰۰)} = \frac{-۲s-۴۰۰}{s(s-۴۰)} \Rightarrow I_o = \frac{۱۰}{s} - \frac{۱۲}{s-۴۰}$$

بنابراین در حوزه‌ی زمان خواهیم داشت:

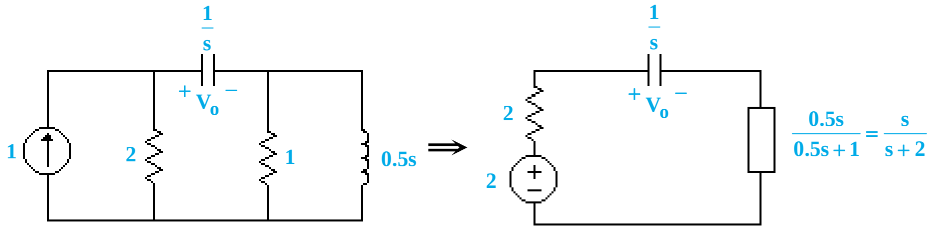
$$I_o(t) = ۱۰u(t) - ۱۲e^{۴۰t}$$

۱۰ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و سپس با اعمال تقسیم جریان $\frac{I_o}{I_S}$ را محاسبه می‌کنیم:



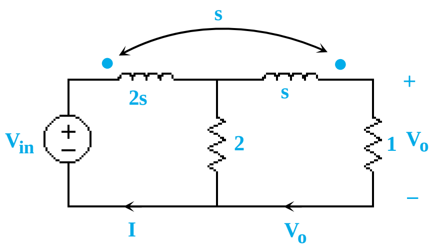
$$\frac{I_o(s)}{I_S(s)} = \frac{۲}{۲+۴+\frac{۲}{s}} = \frac{۲s}{۶s+۲} = \frac{s}{۳s+۱}$$

۱۱ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و سپس با ساده‌سازی خواهیم داشت:



$$V_o = \frac{\frac{۱}{s}}{۲+\frac{۱}{s}+\frac{s}{s+۲}} \times ۲ = \frac{۲s+۴}{۳s^۲+۵s+۲} \xrightarrow{s=j\omega} V_o(j\omega) = \frac{۴+۲\omega j}{۲-۳\omega^۲+۵\omega j}$$

۱۲ـ گزینه «۳» ابتدا تابع شبکه‌ی مدار را بدست می‌آوریم:



$$\text{kvl (حلقه چپ)}: -V_{in} + (۲s+۲)I - (s+۲)V_o = ۰ \Rightarrow (۲s+۲)I - (s+۲)V_o = V_{in}$$

$$\text{kvl (حلقه راست)}: (s+۳)V_o - (s+۲)I = ۰ \Rightarrow I = \frac{s+۳}{s+۲}V_o \qquad (۲)$$

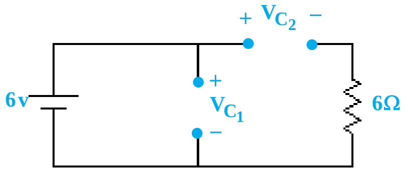
$$(۱),(۲) \rightarrow \left[\frac{(s+۳)(۲s+۲)}{s+۲} - (s+۲)\right]V_o = V_{in} \Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = H(s) = \frac{s+۲}{s^۲+۴s+۲} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{۲+\omega j}{۲-\omega^۲+۴\omega j}$$

$$V_{in} = \cos t \rightarrow \begin{cases} \omega = ۱ \\ V_{in} = ۱\angle ۰ \end{cases} \Rightarrow V_o = V_{in} \times H(j\omega) = ۱ \times \frac{۲+j}{۱+۴j} \simeq ۰/۵۴\underline{|-۴۹/۴^\circ}V$$

بنابراین در حوزه‌ی زمان خواهیم داشت:

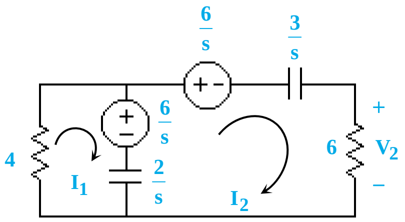
$$V_o(t) = ۰/۵۴\cos(t-۴۹/۴^\circ)$$

۱۳ـ گزینه «۱» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را محاسبه می‌کنیم:



$$V_{c_۱}(۰^-) = V_{c_۲}(۰^-) = ۶v$$

حال مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



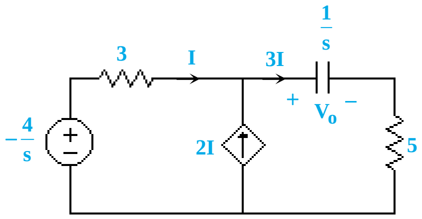
$$\text{KVL}(۱):۴I_۱+\frac{۶}{s}+\frac{۲}{s}(I_۱-I_۲)=۰\Rightarrow(۴s+۲)I_۱-۲I_۲=-۶\qquad(۱)$$

$$\text{KVL}(۲):\frac{۲}{s}(I_۲-I_۱)-\frac{۶}{s}+\frac{۶}{s}+\frac{۳}{s}I_۲+۶I_۲=۰\Rightarrow(۶s+۵)I_۲=۲I_۱\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow[\frac{(۴s+۲)(۶s+۵)}{۲}-۲]I_۲=-۶\Rightarrow I_۲=\frac{-۶}{۱۲s^۲+۱۶s+۳}\simeq\frac{-۰/۵}{(s+۰/۲)(s+۱/۱)}$$

$$V_۲=۶I_۲\simeq\frac{-۳}{(s+۰/۲)(s+۱/۱)}$$

۱۴ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

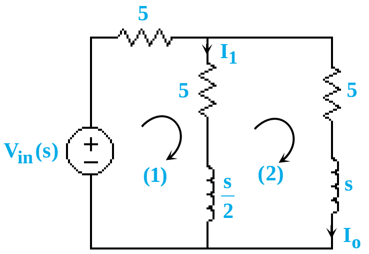


حال با اعمال KVL در حلقه‌ی بیرونی داریم:

$$+\frac{۴}{s}+۳I+\frac{۳}{s}I+۱۵I=۰\Rightarrow(۱۸s+۳)I=-۴\Rightarrow I=\frac{-۴}{۱۸s+۳}$$

$$V_o=\frac{۱}{s}\times۳I=\frac{-۴}{s(۶s+۱)}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{s(۶s+۱)}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{s(s+\frac{۱}{۶})}=\frac{-۴}{s}+\frac{۴}{s+\frac{۱}{۶}}\Rightarrow V_o(t)=(-۴+۴e^{-\frac{t}{۶}})u(t)$$

۱۵ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



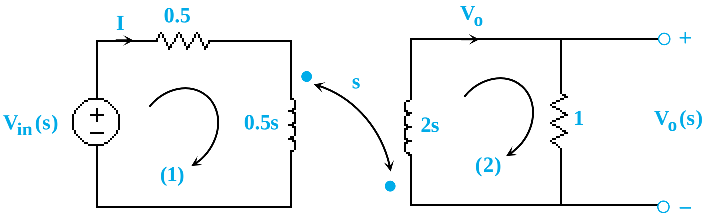
حال با اعمال kvl در حلقه‌های چپ و راست مدار داریم:

$$\text{KVL}(۱):-V_{in}+۵(I_۱+I_o)+(۵+\frac{s}{۲})I_۱=۰\Rightarrow(\frac{s}{۲}+۱۰)I_۱+۵I_o=V_{in}\qquad(۱)$$

$$\text{KVL}(۲):(۵+s)I_o=(۵+\frac{s}{۲})I_۱\Rightarrow I_۱=\frac{۲s+۱۰}{s+۱۰}I_o\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow[\frac{(s+۲۰)(s+۵)}{s+۱۰}+۵]I_o=V_{in}\Rightarrow\frac{I_o}{V_{in}}=\frac{s+۱۰}{s^۲+۳۰s+۱۵۰}$$

۱۶ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



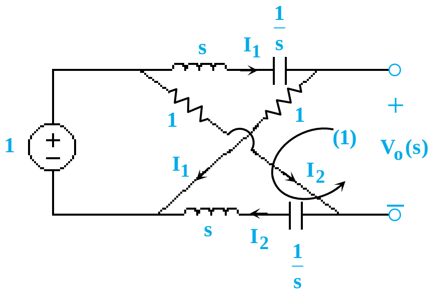
حال با اعمال kvl در حلقه‌های ۱و۲ داریم:

$$\text{kvl}(۱):-V_{in}+۰/۵I+۰/۵sI+sV_o=۰\Rightarrow(s+۱)I+۲sV_o=۲V_{in}\qquad(۱)$$

$$\text{kvl}(۲):(۲s+۱)V_o+sI=۰\Rightarrow I=-\frac{۲s+۱}{s}V_o\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow[-\frac{(s+۱)(۲s+۱)}{s}+۲s]V_o=۲V_{in}\Rightarrow\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{-۲s}{۳s+۱}$$

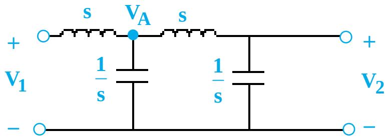
۱۷ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و سپس با اعمال kvl در حلقه‌های موجود $V_o(s)$ را بدست می‌آوریم:



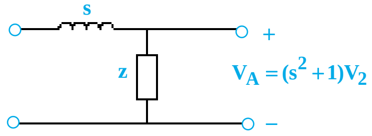
$$(s+\frac{۱}{s}+۱)I_۱=(s+\frac{۱}{s}+۱)I_۲=V_{in}(s)=۱\Rightarrow I_۱=I_۲=\frac{s}{s^۲+s+۱}\qquad(۱)$$

$$kvl(۱)\Rightarrow V_o(s)=I_۱-(s+\frac{۱}{s})I_۲=I_۲-(s+\frac{۱}{s})I_۱\xrightarrow{(۱)}V_o(s)=\frac{-s^۲+s-۱}{s^۲+s+۱}$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



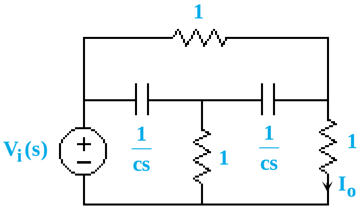
حال با اعمال تقسیم ولتاژ داریم:



$$V_۲=\frac{\frac{۱}{s}}{s+\frac{۱}{s}}V_A\Rightarrow V_A=(s^۲+۱)V_۲\qquad(۱)$$

$$Z=(s+\frac{۱}{s})\|\frac{۱}{s}=\frac{s^۲+۱}{s^۳+۲s}\Rightarrow V_A=\frac{\frac{s^۲+۱}{s^۳+۲s}}{s+\frac{s^۲+۱}{s^۳+۲s}}V_{in}=\frac{s^۲+۱}{s^۴+۳s^۲+۱}V_{in}\xrightarrow{(۱)}\frac{V_۲}{V_{in}}=\frac{۱}{s^۴+۳s^۲+۱}$$

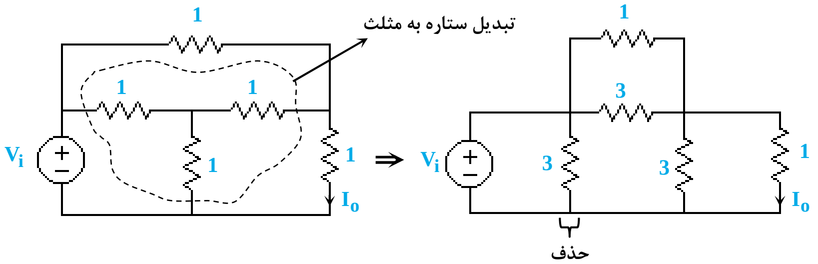
۱۹ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم (شکل روبه‌رو):

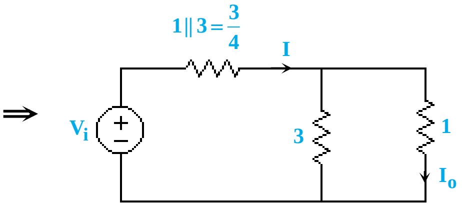


حال با تحلیل مدار به ازای sهای ۰ و $\frac{۱}{c}$ می‌خواهیم گزینه‌ی صحیح را تشخیص دهیم:

$s=۰\rightarrow I_o=\frac{V_i}{۲}\rightarrow\frac{I_o}{V_i}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$ بنابراین گزینه‌های ۲و۳ می‌توانند صحیح باشند.

و برای $S=\frac{۱}{C}$ داریم:





$$I=\frac{V_i}{\frac{۳}{۴}+۳\|۱}=\frac{۲}{۳}V_i$$

$$I_o=\frac{۳}{۱+۳}I=\frac{V_i}{۲}\Rightarrow\frac{I_o}{V_i}=\frac{۱}{۲}$$

با بررسی شرط $\frac{I_o}{V_i}\Big|_{s=\frac{۱}{c}}=\frac{۱}{۲}$ مشاهده می‌شود که تنها گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح می‌باشد.

۲۰ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه فرکانس ورودی برابر $\omega=۲$ می‌باشد، مقدار $H(j\omega)$ را به ازای این فرکانس محاسبه می‌کنیم:

$$H(۲j)=\frac{۴j(۱+۲j)}{۸-۴}=-۲+j=۲/۲۳\sphericalangle ۱۵۳^\circ$$

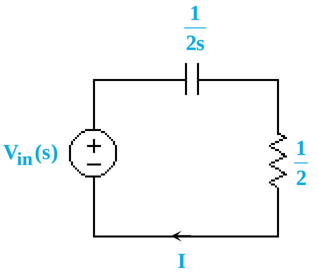
در حالت دائمی سینوسی داریم:

$$\Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)\times H(j\omega)\xrightarrow[X(۲j)=۶\sphericalangle ۳۰^\circ]{\omega=۲} Y(۲j)=(۶\sphericalangle ۳۰^\circ).(۲/۲۳\sphericalangle ۱۵۳^\circ)=۱۳/۳۸\sphericalangle ۱۸۳^\circ$$

بنابراین در حوزه‌ی زمان خواهیم داشت:

$$y(t)=۱۳/۳۸\cos(۲t+۱۸۳^\circ)$$

۲۱ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$I(s)=\frac{V_{in}(s)}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲s}}=\frac{۲sV_{in}(s)}{s+۱}$$

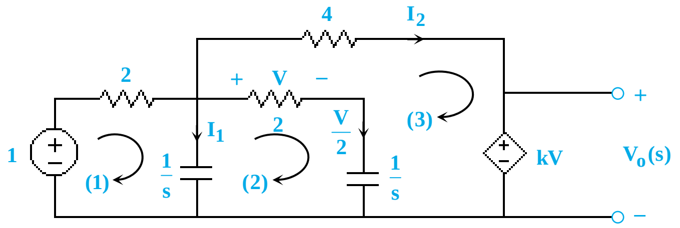
$$V_{in}(t)=(u(t)-u(t-۴))\times ۲۰\xrightarrow{\text{لاپلاس}} V_{in}(s)=\frac{۲۰}{s}-\frac{۲۰e^{-۴s}}{s}$$

$$I(s)=\frac{۴۰-۴۰e^{-۴s}}{s+۱}$$

با اعمال معکوس تبدیل لاپلاس داریم:

$$I(t)=۴۰e^{-t}u(t)-۴۰e^{-(t-۴)}u(t-۴)$$

۲۲ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با اعمال KVL در حلقه‌های موجود داریم:

$$kvl(۱):-۱+۲\times(I_۱+I_۲+\frac{V}{۲})+\frac{I_۱}{s}=۰\Rightarrow (۲s+۱)I_۱+۲sI_۲+sV=s\quad (۱)$$

$$kvl(۲):V+\frac{V}{۲s}=\frac{I_۱}{s}\Rightarrow I_۱=\frac{۲s+۱}{۲}V\quad (۲)$$

$$kvl(۳):۴I_۲+kV=V+\frac{V}{۲s}\Rightarrow I_۲=\frac{۲s(۱-k)+۱}{۸s}V\quad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳)\ \rightarrow\ \frac{(۲s+۱)(۲s+۱)}{۲}V+\frac{۲s(۱-k)+۱}{۴}V+sV=s$$

$$\Rightarrow V=\frac{s}{۲s^۲+(\frac{۷}{۲}-\frac{k}{۲})s+\frac{۱}{۴}}\xrightarrow{V_o=kV} V_o(s)=\frac{ks}{۲s^۲+(\frac{۷}{۲}-\frac{k}{۲})s+\frac{۱}{۴}}$$

از طرفی داریم:

$$V_o(s)=\frac{۴}{s+۱}-\frac{۲}{s+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲s}{s^۲+\frac{۳}{۲}s+\frac{۱}{۲}}=\frac{ks}{۲s^۲+(\frac{۷}{۲}-\frac{k}{۲})s+\frac{۱}{۴}}\Rightarrow k=۴$$

۲۳ـ گزینه «۳» با توجه به تابع ضربه‌ی داده شده، تابع شبکه را محاسبه می‌کنیم:

$$h(t)=۱۲e^{-۲t}\rightarrow H(s)=\frac{۱۲}{s+۲}$$

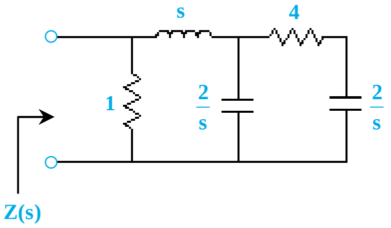
حال برای حالت دائمی سینوسی مدار به ازای ورودی کسینوسی با فرکانس ۲ داریم:

$$Y=X.H(۲j)=(۱\sphericalangle ۰)\times\frac{۱۲}{۲+۲j}=۳-۳j$$

بنابراین پاسخ غیرمیرای مدار در حوزه‌ی زمان، به شکل روبه‌روست:

$$y_{ss}(t)=۳\cos ۲t-۳\cos(۲t+۹۰)=۳\cos ۲t+۳\sin ۲t$$

۲۴ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$Z(s)=۱||[s+\underbrace{\frac{۲}{s}||(۴+\frac{۲}{s})}_{Z_۱}]$$

$$Z_۱(s)=\frac{\frac{۲}{s}(۴+\frac{۲}{s})}{۴+\frac{۴}{s}}=\frac{\frac{۸}{s}+\frac{۴}{s^۲}}{۴+\frac{۴}{s}}=\frac{۸s+۴}{۴s^۲+۴s}=\frac{۲s+۱}{s^۲+s}\longrightarrow Z(s)=\frac{\frac{۲s+۱}{s(s+۱)}+s}{\frac{۲s+۱}{s(s+۱)}+s+۱}=\frac{s^۳+s^۲+۲s+۱}{s^۳+۲s^۲+۳s+۱}$$

۲۵ـ گزینه «۲» با توجه به رابطه‌ی $Y(s)=X(s)H(s)$ داریم:

$$Y(s)=\frac{s^۲+۳s+۵}{(s+۲)(s+۳)}\times\frac{۱}{s+۱}=\frac{\frac{۳}{۲}}{s+۱}-\frac{۳}{s+۲}+\frac{\frac{۵}{۲}}{s+۳}$$

بنابراین داریم:

$$y(t)=L^{-۱}[y(s)]=(۱/۵e^{-t}-۳e^{-۲t}+۲/۵e^{-۳t})u(t)$$

۲۶ـ گزینه «۳» ابتدا با توجه به مقادیر عددی پارامترهای داده شده، ماتریس $SI-A$ را تشکیل می‌دهیم:

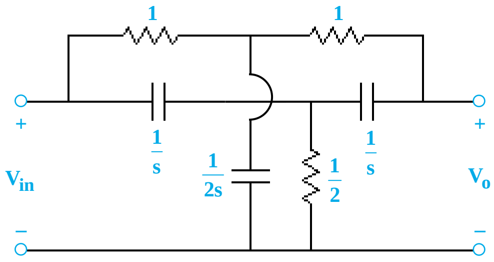
$$A=\begin{bmatrix}-۴ & ۴\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow sI-A=\begin{bmatrix}s+۴ & -۴\\ ۲ & s\end{bmatrix}$$

بنابراین معادله‌ی مشخصه‌ی مدار برابر است با: $\det(sI-A)=۰\to s^۲+۴s+۸=۰$: معادله‌ی مشخصه

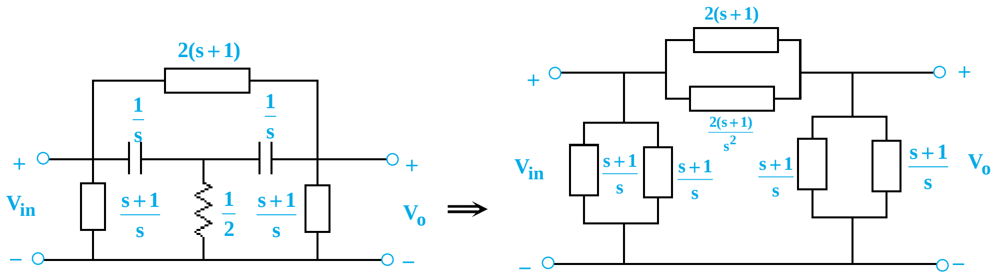
بنابراین با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود که گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح می‌باشد. البته قابل ذکر است که $H(s)$ را می‌توان از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$H(s)=C(sI-A)^{-۱}B=[۱\ \ ۰]\times\frac{۱}{s^۲+۴s+۸}\begin{bmatrix}s & ۴\\ -۲ & s+۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰\\ ۲\end{bmatrix}=\frac{۸}{s^۲+۴s+۸}$$

۲۷ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



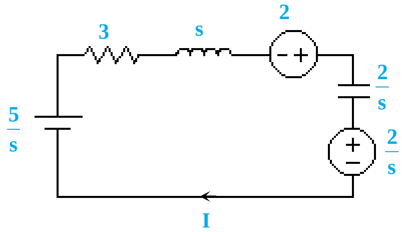
با اعمال تبدیل ستاره به مثلث در دو مرحله داریم:



بنابراین داریم:

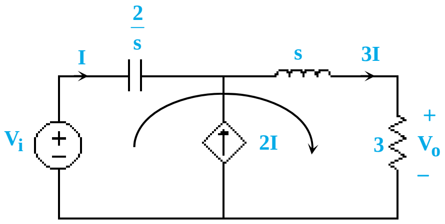
$$V_o=\frac{(\frac{s+۱}{s})||(\frac{s+۱}{s})}{(\frac{s+۱}{s})||(\frac{s+۱}{s})+۲(s+۱)||\frac{۲(s+۱)}{s^۲}}=\frac{\frac{s+۱}{۲s}}{\frac{s+۱}{۲s}+\frac{۲(s+۱)}{s^۲+۱}}=\frac{s^۲+۱}{s^۲+۴s+۱}$$

۲۸ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$I=\frac{۲+\frac{۵}{s}-\frac{۲}{s}}{s+۳+\frac{۲}{s}}=\frac{۲s+۳}{s^{۲}+۳s+۲}=\frac{۲s+۳}{(s+۱)(s+۲)}$$

۲۹ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم (شکل روبه‌رو):



حال با اعمال kvl در حلقه‌ی بیرونی داریم:

$$-V_i+\frac{۲}{s}I+(s+۳)\times ۳I=۰\Rightarrow I=\frac{V_i}{\frac{۲}{s}+۳(s+۳)}=\frac{sV_i}{۳s^{۲}+۹s+۲}$$

از طرفی داریم:

$$V_o=۳\times ۳I=۹I=\frac{۹s}{۳s^{۲}+۹s+۲}V_i\Rightarrow \frac{V_o}{V_i}=\frac{۹s}{۳s^{۲}+۹s+۲}$$

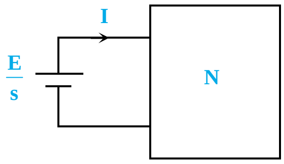
۳۰ـ گزینه «۳» با استفاده از قضیه‌های مقدار نهایی و مقدار اولیه داریم:

$$f(۰^{+})=\lim_{s\to\infty} sF(s)=۵\qquad f(\infty)=\lim_{s\to ۰} sF(s)=-۲$$

بنابراین:

$$\frac{f(۰^{+})}{f(\infty)}=-\frac{۵}{۲}$$

۳۱ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

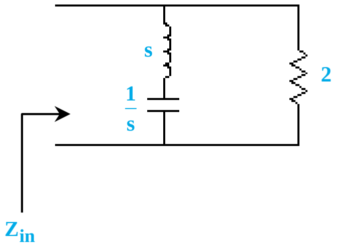


$$\frac{\frac{E}{s}}{I}=Z(s)=\frac{s^{۲}+s+۲}{۲s^{۲}+s+۱}\Rightarrow I(s)=\frac{E}{s}.\frac{۲s^{۲}+s+۱}{s^{۲}+s+۲}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی مقدار اولیه داریم:

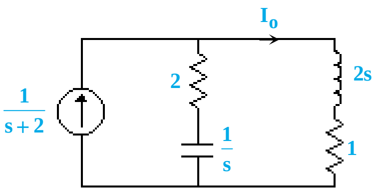
$$I(۰^{+})=\lim_{s\to\infty} sI(s)=۲E=۶\to E=۳$$

۳۲ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$Z_{in}(s)=(s+\frac{۱}{s})\|۲=\frac{۲\frac{(s^{۲}+۱)}{s}}{s+\frac{۱}{s}+۲}=\frac{۲(s^{۲}+۱)}{s^{۲}+۲s+۱}$$

۳۳ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم (شکل روبه‌رو):

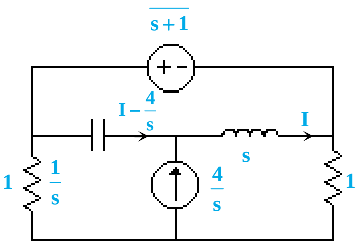


حال با استفاده از تقسیم جریان داریم:

$$I_o=\frac{۲+\frac{۱}{s}}{۲s+\frac{۱}{s}+۳}\times\frac{۱}{s+۲}$$

$$I_o=\frac{۲s+۱}{(s+۲)(۲s^{۲}+۳s+۱)}=\frac{۱}{(s+۲)(s+۱)}=\frac{۱}{s+۱}-\frac{۱}{s+۲}\to I_o(t)=(e^{-t}-e^{-۲t})u(t)$$

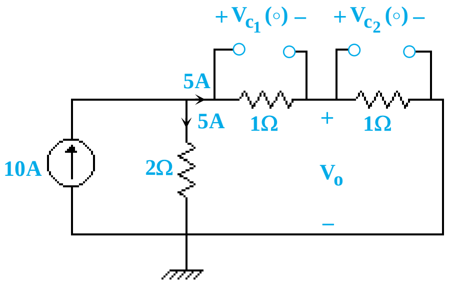
۳۴ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم، سپس با اعمال KVL در حلقه بالایی، I(s) را محاسبه می‌کنیم:



$$\text{kvl}:\frac{۲}{s+۱}-sI-\frac{۱}{s}(I-\frac{۴}{s})=۰\Rightarrow I(s+\frac{۱}{s})=\frac{۴}{s^۲}+\frac{۲}{s+۱}\Rightarrow I(s)=\frac{۲s^۲+۴s+۴}{s(s^۲+۱)(s+۱)}$$

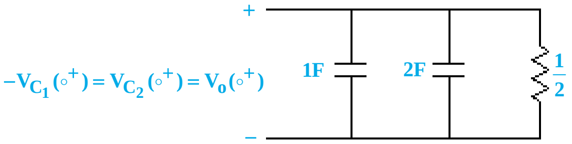
$$I(s)=\frac{AS+B}{s^۲+۱}+\underbrace{\frac{۴}{s}-\frac{۱}{s+۱}}_{\text{پاسخ گذرا}}\longrightarrow I_{\text{گذرا}}(t)=(۴-e^{-t})u(t)$$

۳۵ـ گزینه «۳» ابتدا شرایط اولیه‌ی مدار را در زمان $t=۰^+$ بدست می‌آوریم:



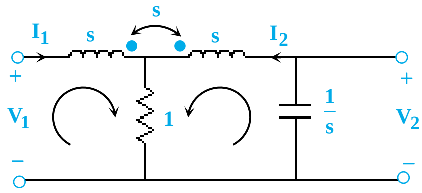
$$V_{c_۱}(۰^{\pm})=V_{c_۲}(۰^{\pm})=۵v$$

در لحظه‌ی صفر مثبت، دو خازن با هم موازی می‌شوند، ولی پلاریته‌ی معکوس نسبت به هم دارند.



$$V_0(۰^+)=\frac{c_۲V_{c_۲}(۰^-)-c_۱V_{c_۱}(۰^-)}{c_۱+c_۲}=\frac{۲\times۵-۱\times۵}{۲+۱}=\frac{۵}{۳}v$$

۳۶ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و سپس با اعمال kvl در حلقه‌های مدار نسبت $\frac{V_۲(s)}{V_۱(s)}$ را محاسبه می‌کنیم.



$$\text{KVL (حلقه‌ی چپ)}:-V_۱+sI_۱+sI_۲+(I_۱+I_۲)=۰\Rightarrow V_۱=(s+۱)I_۱+(s+۱)I_۲\qquad(۱)$$

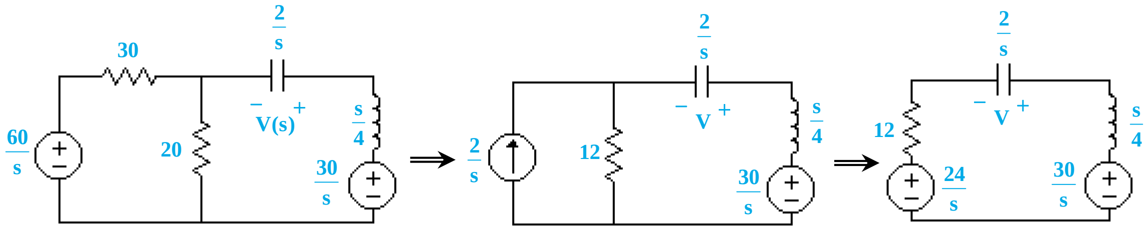
$$\text{KVL (حلقه‌ی راست)}:\frac{۱}{s}I_۲+sI_۲+sI_۱+I_۱+I_۲=۰\Rightarrow(\frac{۱}{s}+s+۱)I_۲+(s+۱)I_۱=۰\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\to V_۱=-(\frac{۱}{s}+s+۱)I_۲+(s+۱)I_۲\Rightarrow V_۱=-\frac{۱}{s}I_۲$$

از طرفی داریم:

$$V_۲=-\frac{۱}{s}I_۲=V_۱\Rightarrow\frac{V_۲}{V_۱}=۱$$

۳۷ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



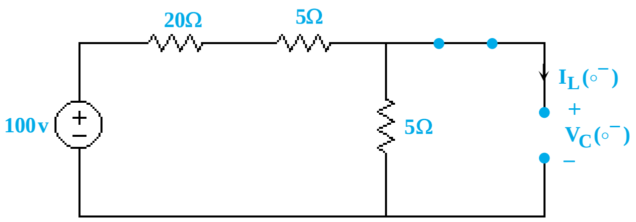
حال با اعمال تقسیم ولتاژ در مدار ساده شده داریم:

$$V(s)=\frac{\frac{۲}{s}}{\frac{s}{۴}+۱۲+\frac{۲}{s}}\times\frac{(-۲۴+۳۰)}{s}=\frac{۴۸}{s(s^۲+۴۸s+۸)}$$

$$V(s)\simeq\frac{۶}{s}+\frac{۰/۰۲}{s+۴۷/۸}-\frac{۶}{s+۰/۱۶}\Rightarrow V_0(t)=(۶+۰/۰۲e^{-۴۷/۸t}-۶e^{-۰/۱۶t})u(t)$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

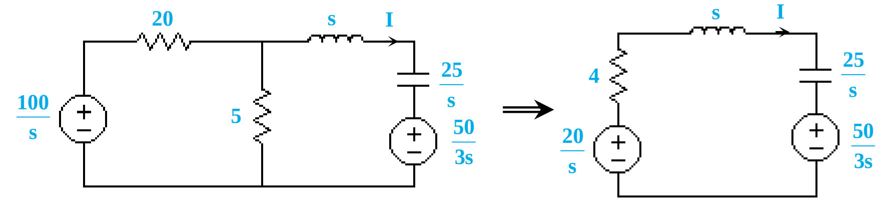
۳۸ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را در لحظه‌ی $t = ۰^-$ تحلیل می‌کنیم:



$$I_L(۰^-) = ۰$$

$$V_C(۰^-) = \frac{۵}{۳۰} \times ۱۰۰ = \frac{۵۰}{۳} v$$

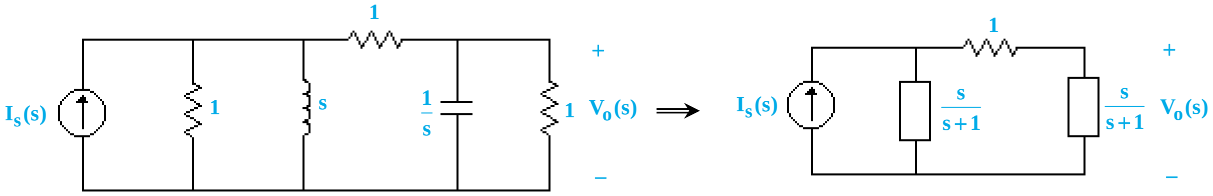
حال مدار را برای زمان‌های $t > ۰$ به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

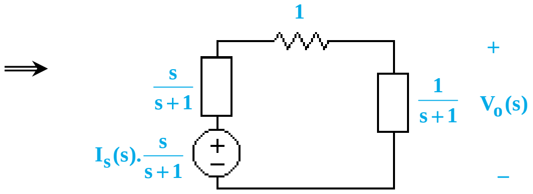


بنابراین:

$$I(s) = \frac{\frac{۱۰}{۳s}}{s + ۴ + \frac{۲۵}{s}} = \frac{\frac{۱۰}{۳}}{s^۲ + ۴s + ۲۵} = \frac{\frac{۱۰}{۳}}{(s+۲)^۲ + ۲۱} \Rightarrow I(t) = \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۲۱}} e^{-۲t} \sin\sqrt{۲۱}t \Rightarrow I(t) \simeq ۰/۷ \sin(۴/۵t) e^{-۲t}$$

۳۹ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و مرحله به مرحله ساده‌سازی انجام می‌دهیم.

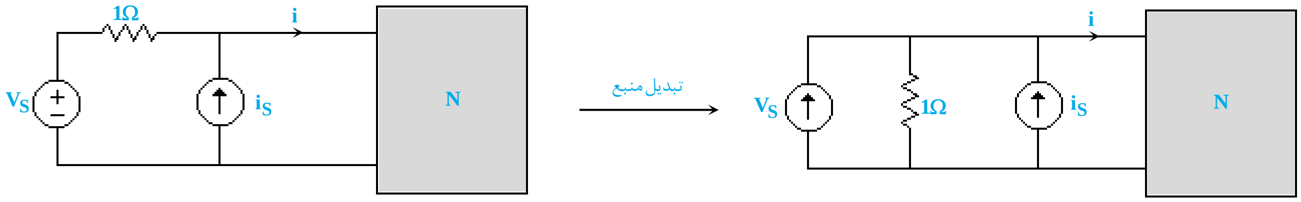


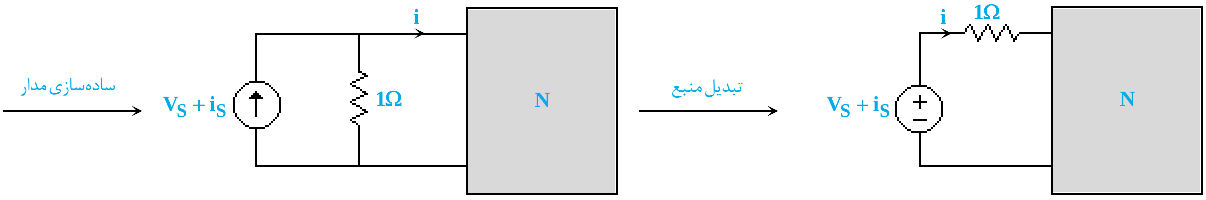


$$\Rightarrow V_o(s) = \frac{\frac{۱}{s+۱}}{\frac{۱}{s+۱} + ۱ + \frac{s}{s+۱}} \times \frac{s}{s+۱} I_s(s) = \frac{\frac{۱}{s+۱}}{۲} \times \frac{s}{s+۱} I_s(s)$$

$$\Rightarrow \frac{V_o(s)}{I_s(s)} = \frac{s}{۲(s+۱)^۲}$$

۴۰ـ گزینه «۱»





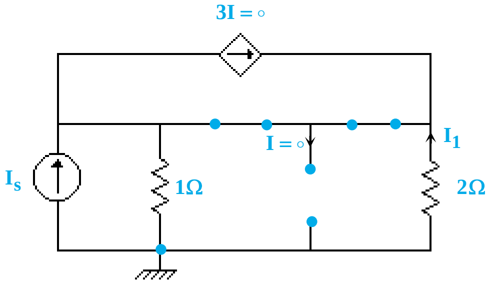
$i = H \times (V_S \times i_S)$, $H = i$ تابع تبدیل جریانی

$V_S = u(t)$, $i_S = ۰ \Rightarrow i = u(t) \times g \Rightarrow u(t) \times g = H \times [u(t) + ۰]$

$H = g \Rightarrow i = g \times (V_S + i_S)$ $V_S = u(t)$, $i_S = ۳u(t) + ۲\delta(t) \Rightarrow i = g \times [u(t) + ۳u(t) + ۲\delta(t)] = g \times [۴u(t) + ۲\delta(t)]$

$\Rightarrow i = [۲\delta(t) + ۴u(t)] \times g$

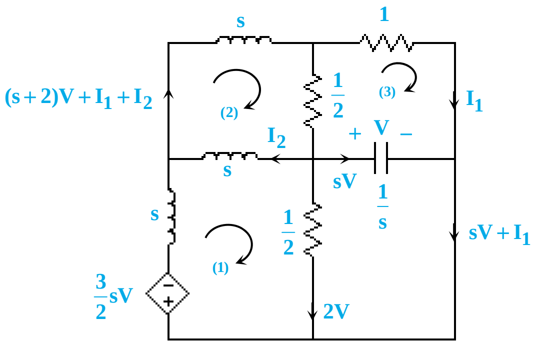
۴۱ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه‌های سؤال مشاهده می‌شود تنها با بررسی تابع انتقال در $s=۰$ می‌توان به گزینه‌ی صحیح دست یافت. بنابراین ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس برده و سپس s را برابر صفر قرار می‌دهیم.



$$I_۱=\frac{-۱}{۱+۲}I_۲\rightarrow\frac{I_۱}{I_S}=\frac{-۱}{۳}$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ صحیح می‌باشد.

۴۲ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم (برای بدست آوردن معادله‌ی مشخصه می‌توان منابع را بی‌اثر کرد):



حال با اعمال KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$KVL(۱):\frac{۳}{۲}sV+s((s+۲)V+I_۱)-sI_۲+V=۰\Rightarrow s(I_۱-I_۲)+(s^۲+\frac{۷}{۲}s+۱)V=۰\qquad(۱)$$

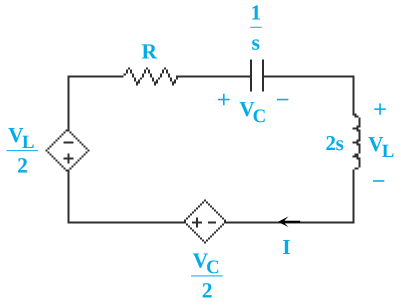
$$KVL(۲):s((s+۲)V+I_۱+I_۲)+\frac{۱}{۲}((s+۲)V+I_۲)+sI_۲=۰\Rightarrow sI_۱+(۲s+\frac{۱}{۲})I_۲+(s^۲+\frac{۵}{۲}s+۱)V=۰\qquad(۲)$$

$$KVL(۳):I_۱-V-\frac{۱}{۲}((s+۲)V+I_۲)=۰\Rightarrow I_۱-\frac{۱}{۲}I_۲-(\frac{۱}{۲}s+۲)V=۰\qquad(۳)$$

$$(۱),(۲),(۳)\rightarrow\frac{۹[s^۳+\frac{۶۷}{۱۸}s^۲+\frac{۲۳}{۱۸}s+\frac{۱}{۹}]}{۵s+۱}v=۰\rightarrow\ \text{معادله‌ی مشخصه}:s^۳+\frac{۶۷}{۱۸}s^۲+\frac{۲۳}{۱۸}s+\frac{۱}{۹}=۰$$

۴۳ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

حال با اعمال kvl در حلقه‌ی موجود داریم:



$$+\frac{V_L}{۲}+(R+\frac{۱}{s}+۲s)I-\frac{V_c}{۲}=۰$$

$$\Rightarrow(R+\frac{۱}{s}+۲s)I=\frac{V_c}{۲}-\frac{V_L}{۲}$$

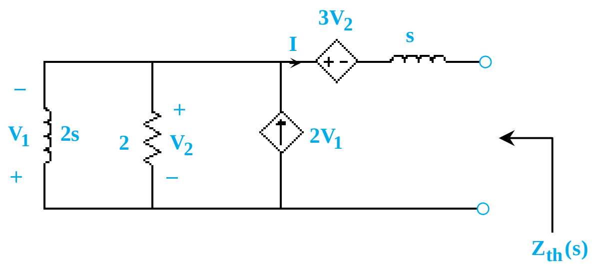
از طرفی داریم:

$$V_c=\frac{I}{s}\ ,\ V_L=۲sI$$

$$(R+\frac{۱}{s}+۲s)I=\frac{I}{۲s}-sI\Rightarrow I(۳s+\frac{۱}{۲s}+R)=۰$$

$$\text{معادله‌ی مشخصه}:s^۲+\frac{۱}{۳}Rs+\frac{۱}{۶}=۰\Rightarrow\omega_r=\sqrt{\frac{۱}{۶}}\ \frac{rad}{s}$$

۴۴ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی امپدانس تونن، ابتدا منابع را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



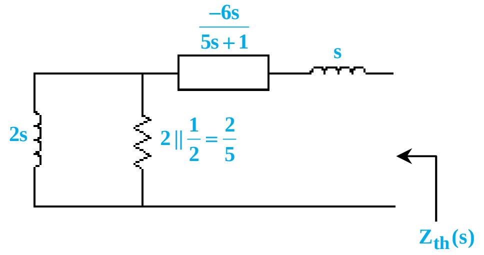
$$\Rightarrow -V_۱ = V_۲$$

حال مقاومت معادل منبع جریان و منبع ولتاژ وابسته را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{\text{منبع جریان}} = \frac{v_۱}{۲v_۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$R_{\text{منبع ولتاژ}} = \frac{۳v_۲}{I} \quad , \quad I = ۲v_۱ - \frac{v_۲}{۲} + \frac{v_۱}{۲s} = -\frac{۵s+۱}{۲s} v_۲ \;\Rightarrow\; R_{\text{منبع ولتاژ}} = \frac{-۶s}{۵s+۱}$$

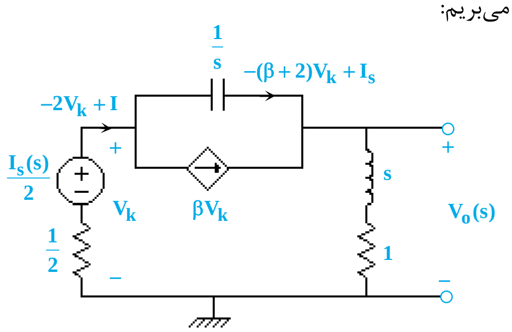
بنابراین:



$$Z_{th}(s) = s - \frac{۶s}{۵s+۱} + (۲s) || (\frac{۲}{۵})$$

$$Z_{th}(s) = s - \frac{۶s}{۵s+۱} + \frac{۲s}{۵s+۱} = s - \frac{۴s}{۵s+۱} = \frac{۵s^۲ - ۳s}{۵s+۱}$$

۴۵ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با اعمال kvl داریم:

$$-V_k + \frac{۱}{C}(I_s - (\beta+۲)v_k) + (s+۱)(I_s - ۲V_k) = ۰ \Rightarrow I_s(\frac{۱}{s} + s + ۱) = V_k(۱ + ۲(s+۱) + (\frac{\beta+۲}{s})) \Rightarrow \frac{V_k}{I_s} = \frac{s^۲+s+۱}{۲s^۲+۳s+\beta+۲}$$

حال با توجه به اینکه $v_o(s) = (s+۱)(I - ۲v_k)$ می‌باشد، بنابراین:

$$V_\circ(s) = (s+۱) \times [۱ - \frac{۲s^۲+۲s+۲}{۲s^۲+۳s+\beta+۲}] I_s \Rightarrow \frac{V_o(s)}{I_s(s)} = \frac{(s+۱)(s+\beta)}{۲s^۲+۳s+\beta+۲} = \frac{s^۲+(\beta+۱)s+\beta}{۲s^۲+۳s+\beta+۲}$$

حال برای اینکه تابع تبدیل مستقل از فرکانس باشد، باید این سه دسته تساوی به طور همزمان به ازای یک β برقرار باشد.

$$\frac{۱}{۲} = \frac{\beta+۱}{۳} = \frac{\beta}{\beta+۲}$$

$$\text{if} \quad \frac{\beta+۱}{۳} = \frac{۱}{۲} \to \beta = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{if} \quad \frac{\beta}{\beta+۲} = \frac{۱}{۲} \to \beta = ۲$$

بنابراین به ازای هیچ βای این تابع تبدیل مستقل از فرکانس نمی‌شود.

فصل نهم

«فرکانس‌های طبیعی»

مثال۱: در صورتی که معادله دیفرانسیل مربوط به پارامتر V در یک مدار به صورت زیر باشد، فرکانس‌های طبیعی متغیر V کدام است؟

$$\frac{d^۶V}{dt^۶}+۵\frac{d^۵V}{dt^۵}+۱۱\frac{d^۴V}{dt^۴}+۱۹\frac{d^۳V}{dt^۳}+۲۴\frac{d^۲V}{dt^۲}+۱۲\frac{dV}{dt}=۰$$

۱) $S=۰ , S=-۲ , S=-۱ , S=\pm j\sqrt{۳}$

۲) $S=\pm j\sqrt{۳} , S=-۱$

۳) $S=۰ , S=-۲ , S=-۱$

۴) $S=\pm j\sqrt{۳} , S=-۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» معادله مشخصه مربوط به معادله دیفرانسیل بالا، با جایگذاری عبارت S^n به جای $\frac{d^n}{dt^n}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$S^۶+۵S^۵+۱۱S^۴+۱۹S^۳+۲۴S^۲+۱۲S=۰ \quad\Rightarrow\quad S(S^۵+۵S^۴+۱۱S^۳+۱۹S^۲+۲۴S+۱۲)=۰$$

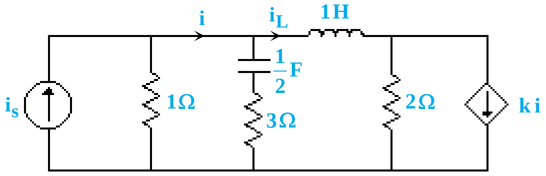
با تجزیه عبارت بالا خواهیم داشت:

$$S(S+۲)^۲(S+۱)(S^۲+۳)=۰$$

حال ریشه‌های معادله مشخصه بالا، همان فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر V هستند.

$S=۰$, $S=-۲$ (از مرتبه ۲) ، $S=-۱$, $S=\pm j\sqrt{۳}$

مثال۲: در مدار شکل زیر k مخالف کدام گزینه باشد تا فرکانس طبیعی صفر در i_L ظاهر نگردد؟



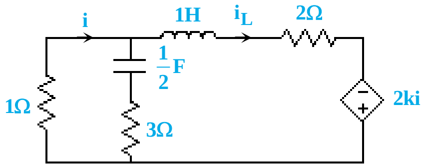
۱) ۳

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** برای حل این تست ابتدا سراغ معادله مشخصه i_L رفته و آن را محاسبه می‌کنیم. سپس باید ببینیم چه شرایطی برقرار باشد تا فرکانس طبیعی صفر در i_L ظاهر نگردد. منبع جریان مستقل i_s را صفر کرده و منبع جریان سمت راست مدار را همراه با مقاومت موازیش به معادل تونن آن تبدیل می‌کنیم تا مدار به شکل روبرو درآید:



اکنون همه‌چیز برای یک KVL خوب آماده است. قبل از آن رابطه میان i و i_L را با تکنیک تقسیم جریان در شاخه‌های موازی بدست می‌آوریم:

$$i=\frac{\frac{۲}{S}+۳}{\frac{۲}{S}+۳+۱}i_L=\frac{۳S+۲}{۴S+۲}i_L$$

و حالا در حلقه بیرونی مدار KVL می‌زنیم:

$$i+(S+۲)i_L-۲ki=۰$$

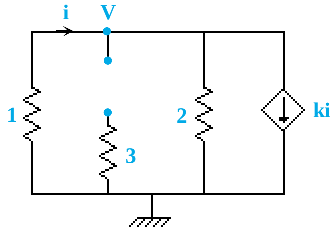
با جایگذاری i از رابطه قبلی می‌توان نوشت:

$$(۱-۲k)\frac{۳S+۲}{۴S+۲}i_L+(S+۲)i_L=۰\Rightarrow\frac{(۱-۲k)(۳S+۲)+۴S^۲+۱۰S+۴}{۴S+۲}i_L=۰\Rightarrow\frac{۴S^۲+(۱۳-۶k)S+۶-۴k}{۴S+۲}i_L=۰$$

می‌دانیم صورتِ ضریب بدست آمده برای i_L در رابطه فوق، معادله مشخصه i_L است که شامل فرکانس‌های طبیعی i_L می‌شود. برای این که فرکانس طبیعی صفر در i_L ظاهر نشود و یا به عبارت دیگر i_L دارای فرکانس طبیعی صفر نباشد، باید $S=۰$ معادله مشخصه را برآورده نسازد؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$(۴s^۲+(۱۳-۶k)s+۶-۴k)\Big|_{s=۰}=۶-۴k\neq۰\quad\Rightarrow k\neq\frac{۳}{۲}$$

روش دوم: مدار را در حالت DC تحلیل کرده، سعی می‌کنیم به رابطه $۰\times i_L=۰$ برسیم.

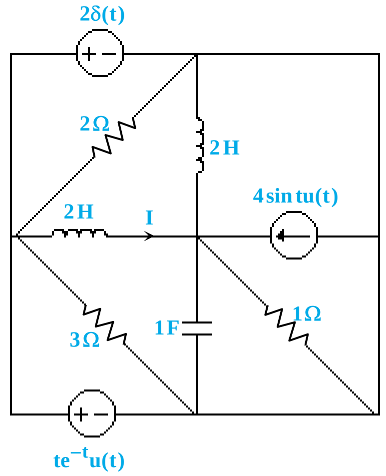


$$V=-i \qquad \text{KCL}: i=\frac{V}{۲}+ki=-\frac{i}{۲}+ki\Rightarrow(k-\frac{۳}{۲})i=۰$$

برای این که به رابطه‌ی $۰\times i_L=۰$ برسیم باید ضریب i در رابطه بدست آمده صفر شود: $k-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow k=\frac{۳}{۲}$

حال برای آن که فرکانس طبیعی صفر در i_L ظاهر نگردد، k باید مخالف $\frac{۳}{۲}$ باشد.

مثال ۳: فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مربوط به متغیر I در مدار زیر کدام است؟



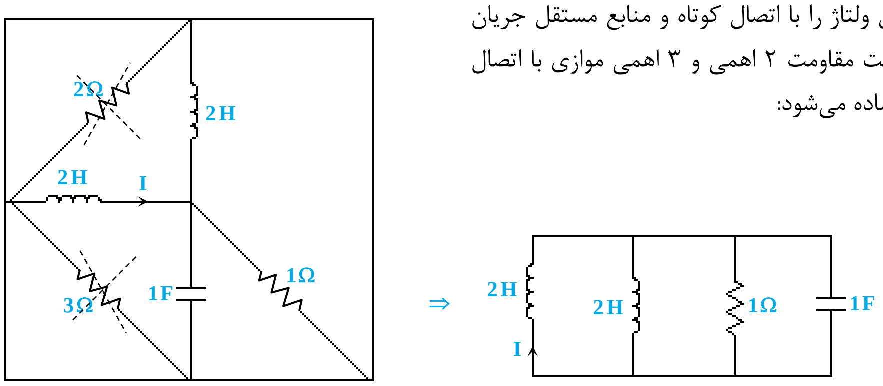
۱) $\frac{۱}{۳} \pm j۰/۳۶$

۲) $\frac{۱}{۲} \pm j۰/۸۶$

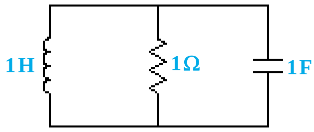
۳) $-\frac{۱}{۳} \pm j۰/۳۶$

۴) $-\frac{۱}{۲} \pm j۰/۸۶$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا منابع مستقل ولتاژ را با اتصال کوتاه و منابع مستقل جریان را با مدار باز جایگزین می‌کنیم. در این حالت مقاومت ۲ اهمی و ۳ اهمی موازی با اتصال کوتاه حذف می‌شوند و مدار به صورت زیر ساده می‌شود:

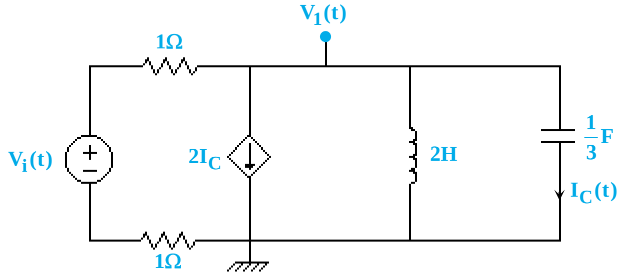


در این حالت مدار به صورت یک RLC موازی است. بنابراین فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مربوط به هر متغیر دلخواه مدار را می‌توانیم از معادله مشخصه مدار RLC موازی که در فصل مدارهای مرتبه دوم یاد گرفتیم، محاسبه کنیم. دقت کنید که با نوشتن یک KCL در گره بالای مدار نیز می‌توان معادله مشخصه مدار و فرکانس‌های طبیعی متغیر I را بدست آورد.



$$\Rightarrow \begin{cases} S^۲ + \frac{۱}{RC}S + \frac{۱}{LC} = ۰ \\ S^۲ + \frac{۱}{۱\times۱}S + \frac{۱}{۱\times۱} = ۰ \end{cases} \Rightarrow S^۲ + S + ۱ = ۰ \Rightarrow S_۱, S_۲ = -\frac{۱}{۲} \pm j۰/۸۶$$

مثال ۴: در مدار زیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر I_C کدام است؟



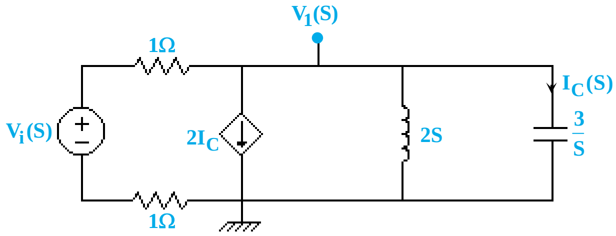
۱) $-۰/۴۵ \pm j۰/۶۶j$

۲) $-۰/۲۵ \pm j۰/۶۶j$

۳) $-۰/۲۵ \pm j۰/۳۳j$

۴) $-۰/۴۵ \pm j۰/۳۳j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید تابع تبدیل $\frac{I_C(S)}{V_i(S)}$ را محاسبه کنیم و سپس مخرج آن را مساوی صفر قرار دهیم. در صورت نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



$$\frac{V_۱(S) - V_i(S)}{۱+۱} + ۲I_C + \frac{V_۱(S)}{۲S} + \frac{V_۱(S)}{\frac{۳}{S}} = ۰$$

با توجه به اینکه $I_C = \frac{V_۱(S)}{\frac{۳}{S}}$ است، لذا با جایگذاری این رابطه در معادله KCL داریم:

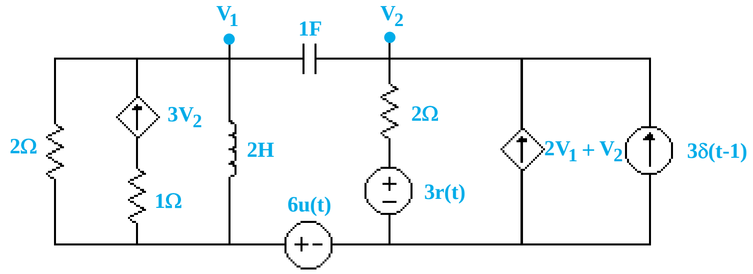
$$\frac{V_۱(S)}{۲S} + \frac{V_۱(S) - V_i(S)}{۱+۱} + ۲(\frac{V_۱(S)}{\frac{۳}{S}}) + \frac{V_۱(S)}{\frac{۳}{S}} = ۰$$

$$\Rightarrow\ V_۱(S)=V_i(S)\times\frac{۲S}{(۴S^۲+۲S+۲)}\ \Rightarrow\ I_C=\frac{V_۱(S)}{\frac{۳}{S}}=\frac{۲S^۲V_i(S)}{۳(۴S^۲+۲S+۲)}\ \Rightarrow\ H(S)=\frac{I_C(S)}{V_i(S)}=\frac{۲S^۲}{۳(۴S^۲+۲S+۲)}$$

با صفر قرار دادن ریشه‌های تابع شبکه $H(S)$، فرکانس‌های طبیعی متغیر $I_C(S)$ بدست می‌آید.

$$۳(۴S^۲+۲S+۲)=۰\ \Rightarrow\ ۴S^۲+۲S+۲=۰\ \Rightarrow\ \mathbf{S_۱\ ,\ S_۲=-۰/۲۵\pm j۰/۶۶}$$

مثال ۵: فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار زیر کدام است؟



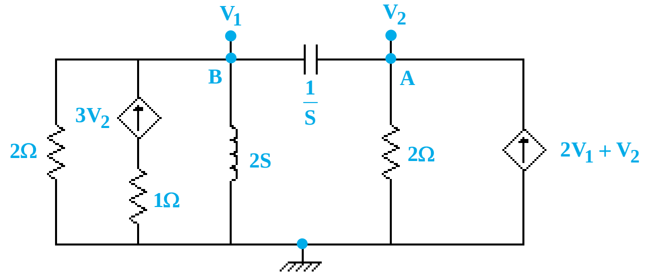
۱) $S_۱=-۱/۲$, $S_۲=-۴/۳$

۲) $S_۱=-۰/۰۴$, $S_۲=-۳$

۳) $S_۱=-۰/۰۴$, $S_۲=-۱/۱$

۴) $S_۱=-۳/۱$, $S_۲=-۱/۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی، می‌توان ماتریس ادمیتانس مدار را محاسبه کرده و دترمینان آن را مساوی صفر قرار داد. بدین منظور با غیرفعال کردن منابع مستقل ولتاژ و جریان، معادلات KCL را در گره‌های مدار می‌نویسیم.



با نوشتن KCL در گره A داریم: $\frac{V_۲}{۲}+\frac{V_۲-V_۱}{\frac{۱}{S}}=۲V_۱+V_۲$

با نوشتن KCL در گره B داریم: $\frac{V_۱}{۲S}+\frac{V_۱-V_۲}{\frac{۱}{S}}+\frac{V_۱}{۲}=۳V_۲$

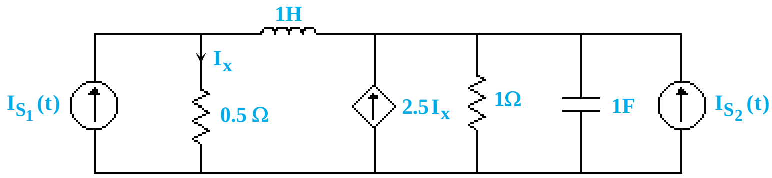
با ساده‌سازی روابط بالا، ماتریس ادمیتانس مدار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}V_۱(-۴-۲S)+V_۲(-۱+۲S)=۰\\ V_۱(۱+۲S^۲+S)+V_۲(-۲S^۲-۶S)=۰\end{cases}\ \Rightarrow\ Y=\begin{bmatrix}-۴-۲S & -۱+۲S\\ ۱+۲S^۲+S & -۲S^۲-۶S\end{bmatrix}$$

با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ادمیتانس، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر را بدست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix}-۴-۲S & -۱+۲S\\ ۱+۲S^۲+S & -۲S^۲-۶S\end{vmatrix}=۰\ \Rightarrow\ (-۴-۲S)(-۲S^۲-۶S)-(-۱+۲S)(۱+۲S^۲+S)=۰\ \Rightarrow\ ۲۰S^۲+۲۳S+۱=۰\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{S_۱=-۰/۰۴}\\ \mathbf{S_۲=-۱/۱}\end{cases}$$

مثال ۶: فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار زیر کدام است؟



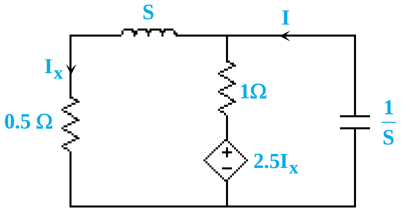
۱) −۲ و −۰/۵

۲) −۲ و ۰/۵

۳) $-۰/۷۵-j$ و $-۰/۷۵+j$

۴) $-۱/۵-j۲$ و $-۱/۵+j۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار، ابتدا ماتریس امپدانس مدار را محاسبه و سپس با استفاده از رابطه $\det[z]=۰$، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار را محاسبه می‌کنیم. حال با حذف منابع جریان و اعمال تبدیل منابع در سمت راست و چپ مدار برای منبع وابسته جریان داریم:



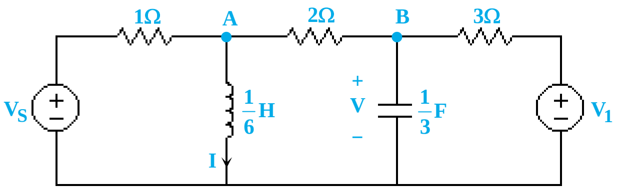
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم: $I\times\frac{۱}{S}+(I-I_x)\times۱+۲/۵I_x=۰$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم: $I_x\times(S+۰/۵)-۲/۵I_x+I_x-I=۰$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}I(\frac{۱}{S}+۱)+I_x(-۱+۲/۵)=۰\\ I(-۱)+I_x(S+۰/۵-۲/۵+۱)=۰\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}I(۱+\frac{۱}{S})+I_x(۱/۵)=۰\\ I(-۱)+I_x(S-۱)=۰\end{cases}\ \Rightarrow\ Z=\begin{bmatrix}۱+\frac{۱}{S} & ۱/۵\\ -۱ & S-۱\end{bmatrix}$$

$$\det[z]=۰\ \Rightarrow\ (۱+\frac{۱}{S})(S-۱)+۱\times۱/۵=۰\ \Rightarrow\ S^۲+۱/۵S-۱=۰\ \Rightarrow\ \mathbf{S_۱=-۲\ \ ,\ \ S_۲=\frac{۱}{۲}}$$

مثال ۷: فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار زیر کدام است؟



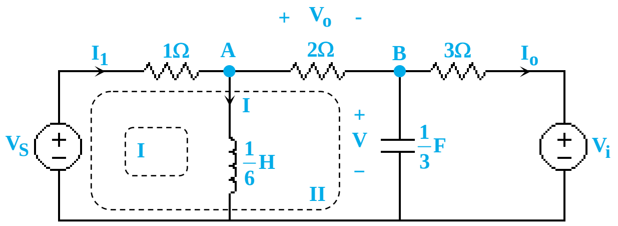
۱) $-j۳\pm۱$

۲) $-۱\pm j۳$

۳) $-۱\pm j$

۴) $-۳\pm j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** در این مدار ابتدا از روش معادلات حالت برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌کنیم. بنابراین ماتریس A در معادلات حالت را محاسبه می‌کنیم.



با نوشتن KVL در حلقه (I) داریم:

$$V_S = I_۱ + \frac{۱}{۶}\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = ۶V_S - ۶I_۱ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه (II) داریم:

$$V_S = I_۱ + V_o + V \qquad (۲)$$

حال با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$I_۱ = I + \frac{V_o}{۲} \Rightarrow V_o = ۲(I_۱ - I) \qquad (۳)$$

از ترکیب روابط (۲) و (۳) داریم:

$$V_S = ۳I_۱ + V - ۲I \Rightarrow I_۱ = \frac{۲I - V + V_S}{۳} \qquad (۴)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۴) داریم:

$$\frac{dI}{dt} = ۲V - ۴I + ۴V_S \qquad (۵)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_o}{۲} = \frac{۱}{۳}\frac{dV}{dt} + I_o \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{۳}{۲}V_o - ۳I_o \qquad (۶)$$

از ترکیب (۳) و (۴) داریم:

$$V_o = ۲[\frac{۲I - V + V_S}{۳} - I] = -\frac{۲}{۳}(V + I - V_S) \qquad (۷)$$

با توجه به شکل مدار داریم:

$$I_o = \frac{V - V_i}{۳} \qquad (۸)$$

حال با ترکیب روابط (۶) و (۷) و (۸) داریم:

$$\frac{dV}{dt} = -۲V - I + V_S + V_i \qquad (۹)$$

با کنار هم قرار دادن روابط (۵) و (۹) داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_S \\ V_i \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

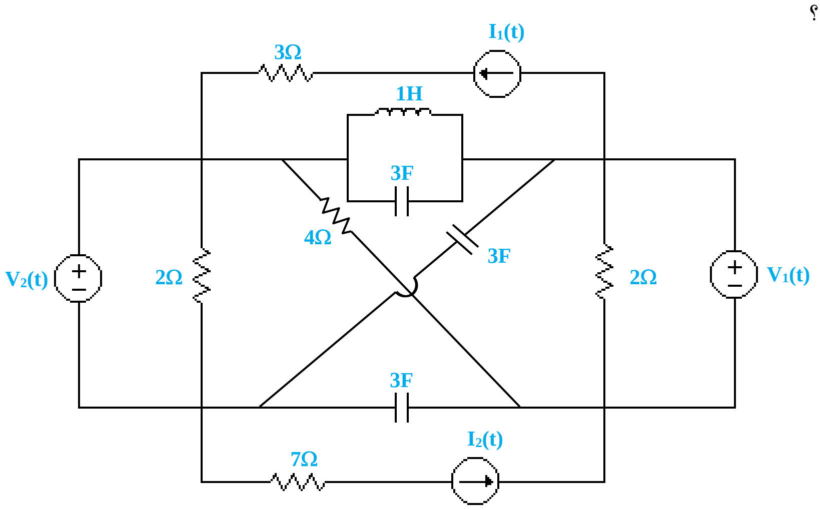
با صفر قرار دادن $\det[SI - A]$، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار بدست می‌آید.

$$\det[SI - A] = \det\left[\begin{bmatrix} S & ۰ \\ ۰ & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}\right] \Rightarrow \det\begin{bmatrix} S+۲ & ۱ \\ -۲ & S+۴ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow (S+۲)(S+۴) + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱ = -۳ + j \\ S_۲ = -۳ - j \end{cases}$$

روش دوم: در این روش از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ادمیتانس شبکه، برای بدست آوردن معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار استفاده شده است. دقت کنید که برای محاسبه ماتریس Y از روش گفته شده در فصل گراف استفاده می‌کنیم. بنابراین در قطر اصلی حاصل‌جمع ادمیتانس‌های متصل به هر گره را می‌نویسیم و در قطر فرعی منفی مجموع ادمیتانس مشترک بین گره‌ها را می‌نویسیم.

$$Y = \begin{bmatrix} ۱ + \frac{۶}{S} + \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} + \frac{S}{۳} + \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} ۱ + \frac{۶}{S} + \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{S}{۳} \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow (۱ + \frac{۶}{S} + \frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{S}{۳}) - \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱ = -۳ + j \\ S_۲ = -۳ - j \end{cases}$$

مثال۸: **فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار زیر کدام است؟**



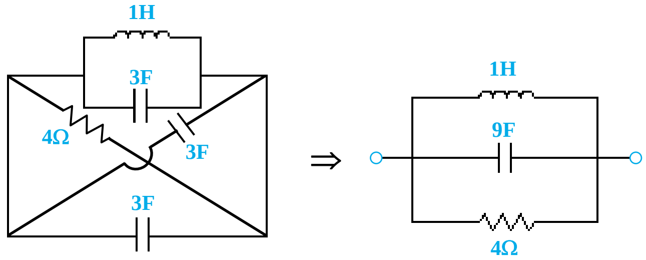
۱) $-۰/۳۳ \pm j۰/۱$

۲) $-۰/۱ \pm j۰/۳۳$

۳) $-۰/۳۳ \pm j۰/۰۱$

۴) $-۰/۰۱ \pm j۰/۳۳$

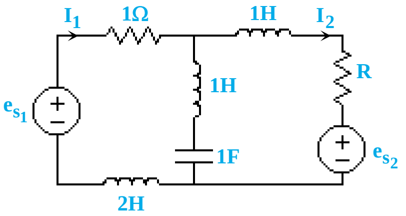
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای بدست آوردن معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار، لازم است که منابع مستقل ولتاژ اتصال کوتاه و منابع مستقل جریان مدار باز شوند. لذا شاخه‌هایی که با منابع ولتاژ موازی هستند، حذف شده و همچنین المان‌های سری با منبع جریان نیز بی‌اثر می‌شوند. با توجه به ساده‌سازی، مدار به صورت یک RLC موازی خواهد شد.



$$S_۱ , S_۲ = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^۲ - \omega_۰^۲} \quad و \quad \omega_۰^۲ = \frac{۱}{LC} = \frac{۱}{۱\times۹} = \frac{۱}{۹} \quad و \quad \alpha = \frac{۱}{۲RC} = \frac{۱}{۲\times۴\times۹} = \frac{۱}{۷۲}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S_۱ , S_۲ = -\frac{۱}{۷۲} \pm \sqrt{(\frac{۱}{۷۲})^۲ - \frac{۱}{۹}} = -۰/۰۱ \pm j۰/۳۳}$$

مثال۹: **در مدار زیر مقدار R را به صورتی تعیین کنید که فرکانس طبیعی مدار برابر $S = -۱$ شود؟**



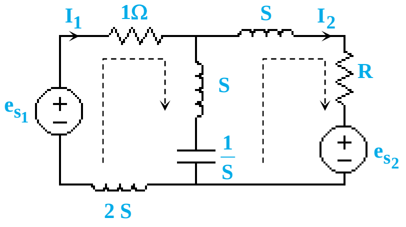
۱) $R = ۱\Omega$

۲) $R = ۲\Omega$

۳) $R = \frac{۵}{۳}\Omega$

۴) $R = \frac{۳}{۵}\Omega$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» **روش اول:** ابتدا منابع مستقل مدار را غیرفعال کرده $(e_{s_۱} = e_{s_۲} = ۰)$ و سپس با نوشتن دو KVL در حلقه‌های مدار، ماتریس امپدانس را بدست می‌آوریم. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس امپدانس، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار را بدست می‌آوریم.



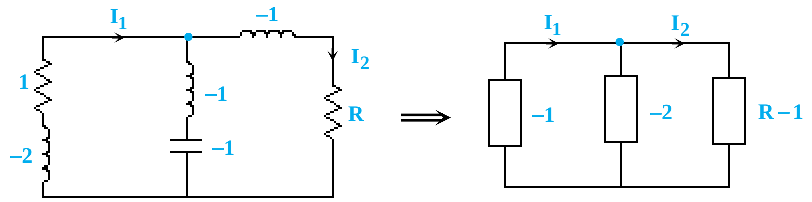
$$\begin{cases} I_۱(۲S+۱+S+\frac{۱}{S}) + I_۲(-S-\frac{۱}{S}) = ۰ \\ I_۱(-S-\frac{۱}{S}) + I_۲(۲S+\frac{۱}{S}+R) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \quad Z = \begin{bmatrix} ۳S+\frac{۱}{S}+۱ & -S-\frac{۱}{S} \\ -S-\frac{۱}{S} & ۲S+\frac{۱}{S}+R \end{bmatrix}$$

$$\det[Z] = ۰ \quad \Rightarrow \quad (۳S+\frac{۱}{S}+۱)(۲S+\frac{۱}{S}+R) - (S+\frac{۱}{S})^۲ = ۰$$

در صورتی که $S = -۱$ جزو فرکانس‌های طبیعی معادله باشد، باید در معادله مشخصه بدست آمده صادق باشد. با گذاشتن $S = -۱$ در معادله داریم:

$$\text{if} \quad S = -۱ \quad \Rightarrow \quad (-۳-۱+۱)(-۲-۱+R) - (-۱-۱)^۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R = \frac{۵}{۳}\Omega}$$

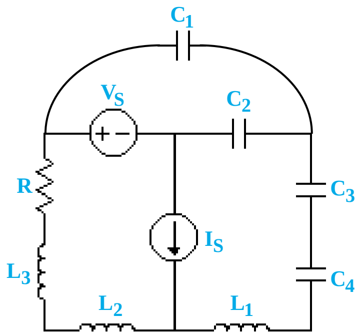
روش دوم: با فرض $S=-۱$ مدار را در حوزه S مدل‌سازی می‌کنیم. قبل از آن منابع مستقل مدار را نیز غیرفعال می‌کنیم.



حال ماتریس امپدانس مدار را نوشته و دترمینان آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$[Z]=\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۲ & R-۳\end{bmatrix} \Rightarrow \det[Z]=-۳R+۹-۴=۰ \Rightarrow R=\frac{۵}{۳}\Omega$$

مثال۱۰: مرتبه مدار زیر کدام است؟



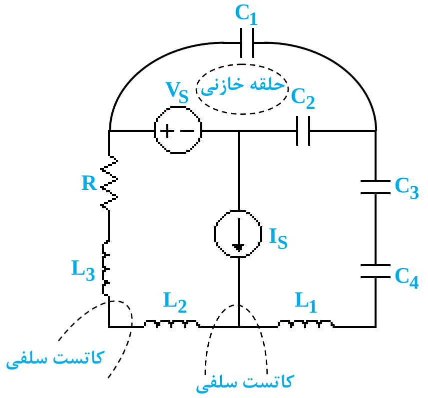
۱) ۷

۲) ۴

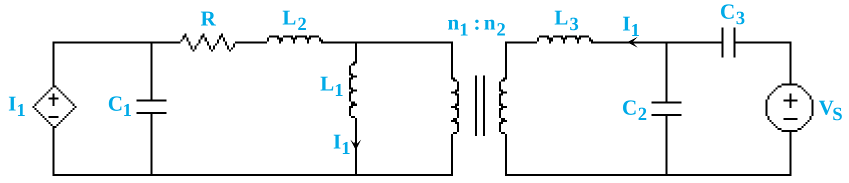
۳) ۵

۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن، در مدار، ۷ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. به علت وجود یک حلقه خازنی و دو کاتست سلفی از این تعداد، ۳ عدد کم می‌شود. لذا مرتبه مدار برابر با عدد ۴ می‌باشد.



مثال۱۱: در مدار زیر تعداد متغیرهای حالت مستقل مدار کدام است؟



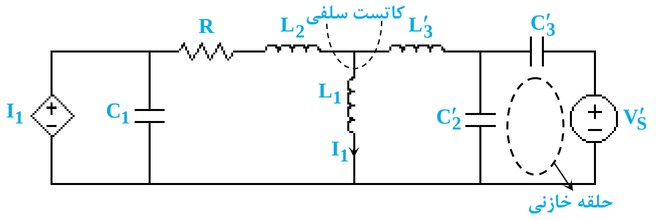
۱) ۳

۲) ۲

۳) ۵

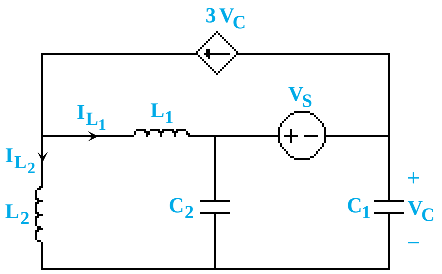
۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا تمام المان‌های سمت راست مدار را به سمت چپ ترانسفورمر منتقل می‌کنیم. دقت کنید برای شمارش فرکانس‌های طبیعی، مقدار المان‌ها مهم نیست، بنابراین نیازی به محاسبه مقدار هر المان با قانون انعکاس امپدانس نمی‌باشد.



حال با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها، تعداد ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی در مدار وجود دارد. با توجه به وجود یک کاتست سلفی و یک حلقه خازنی، از عدد ۶، دو واحد کم می‌شود. همچنین با توجه به این که ولتاژ خازن $C_۱$ به جریان سلف $L_۱$ وابسته است، این خازن نیز نباید در نظر گرفته شود. بنابراین در مدار ۳ فرکانس طبیعی وجود دارد.

مثال ۱۲: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی برابر با کدام گزینه است؟

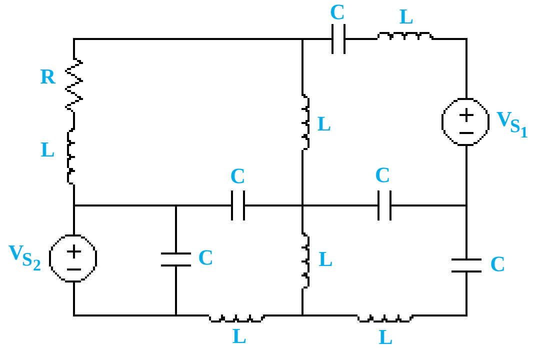


۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی در مدار ۴ عدد می‌باشد. به علت وجود یک حلقه خازنی شامل C_1 و C_2 و V_S از این تعداد یک واحد کم می‌شود. علاوه بر این اگر در گره سمت چپ مدار KCL بزنیم، داریم: $I_{L_1}+I_{L_2}=3V_C$

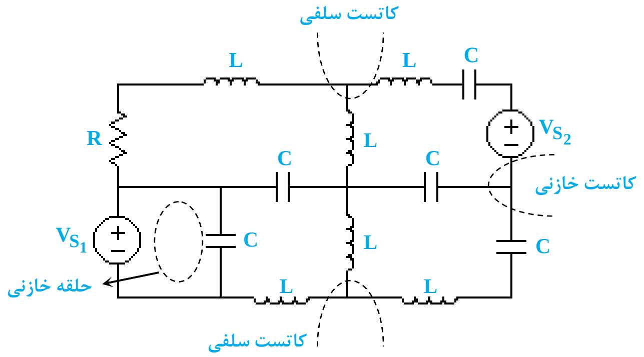
حال با توجه به این که رابطه خطی بین ۳ متغیر حالت وجود دارد، جریان یکی از سلف‌ها از مجموعه متغیرهای حالت حذف می‌شود. بنابراین از تعداد ۴ عدد سلف و خازن، یک عدد به علت وجود حلقه خازنی و یک عدد به علت رابطه خطی بین ۳ متغیر حالت مدار کم می‌شود. بنابراین مدار دارای ۲ فرکانس طبیعی است.

مثال ۱۳: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر کدام است؟

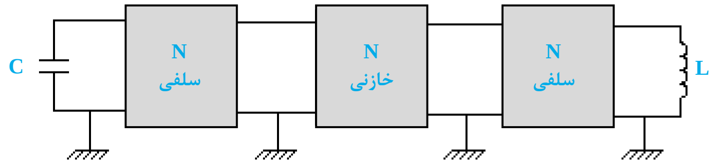


۱) ۷ تا صفر و ۱ عدد غیرصفر
۲) ۸ تا غیرصفر
۳) ۷ تا غیرصفر و ۱ عدد صفر
۴) ۶ تا غیرصفر و ۱ عدد صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با شمارش تعداد خازن‌ها و سلف‌ها دیده می‌شود که در مدار تعداد ۱۱ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود یک حلقه خازنی و دو کاتست سلفی، از این تعداد ۳ عدد کم می‌شود. لذا در مدار تعداد ۸ فرکانس طبیعی وجود دارد. با توجه به وجود یک کاتست خازنی، مدار یک فرکانس طبیعی صفر دارد. لذا در مدار ۷ فرکانس طبیعی غیرصفر و یک فرکانس طبیعی صفر وجود دارد. دقت کنید که برای تشخیص بهتر کاتست‌ها و حلقه‌های سلفی یا خازنی در بالای مدار، سمت راست، جای C و L عوض شده است و همچنین در بالا و سمت چپ مدار جای L و R نیز عوض شده است.

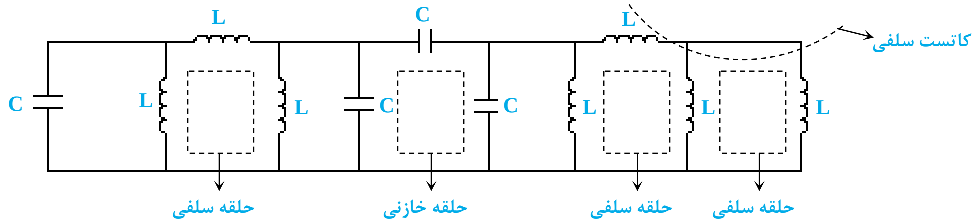


مثال ۱۴: در مدار زیر حداکثر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۶

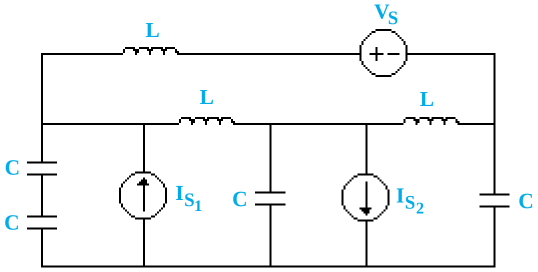
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به زمین مشترک همه شبکه‌ها، می‌توان مدار معادل π آنها را جایگزین نمود. لذا داریم:



با دقت در مدار دیده می‌شود که ۱۱ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود یک کاتست سلفی و یک حلقه خازنی از عدد ۱۱ دو واحد کم می‌شود. لذا در مدار تعداد ۹ فرکانس طبیعی وجود دارد. با توجه به وجود ۳ حلقه سلفی در مدار، مدار دارای سه فرکانس طبیعی صفر است. بنابراین مدار دارای ۶ فرکانس طبیعی غیرصفر و ۳ فرکانس طبیعی صفر است.

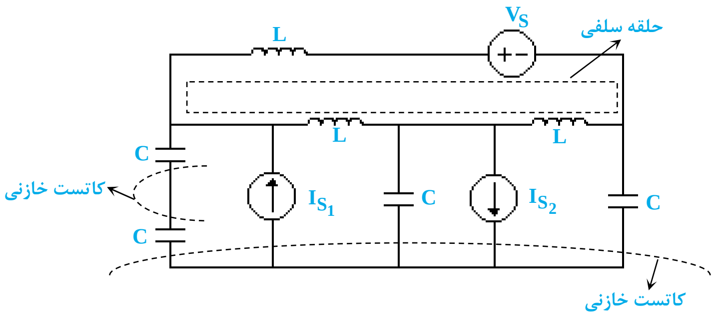
دقت شود که اگر به جای مدار π، برای یک یا دو یا هر سه شبکه مدل T در نظر گرفته شود نیز پاسخ تست تغییری نخواهد کرد، زیرا در هر حالت مجموع تعداد حلقه‌های سلفی و خازنی و کاتست‌های سلفی و خازنی ثابت خواهد ماند. شبکه خازنی در مرکز همواره دارای یک کاتست یا حلقه خازنی خواهد بود. شبکه سلفی در سمت چپ مدار نیز همواره دارای یک حلقه یا کاتست سلفی می‌باشد، و در نهایت شبکه سلفی در سمت راست مدار به همراه سلف L، همواره دارای دو کاتست و یک حلقه سلفی و یا دو حلقه و یک کاتست سلفی می‌باشد. بنابراین تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار در هر حالت برابر ۱۱−۵=۶ عدد خواهد بود. پس حداکثر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در هر حالت ثابت خواهد بود.

مثال ۱۵: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر کدام است؟

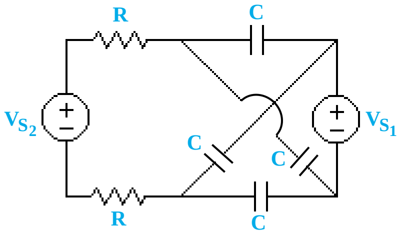


۱) ۴ تا غیرصفر و ۳ تا صفر
۲) ۴ تا صفر و ۲ تا غیرصفر
۳) ۳ تا صفر و ۳ تا غیرصفر
۴) ۶ تا غیرصفر و فرکانس صفر ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بعد از شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌های مدار، تعداد ۷ سلف و خازن در مدار دیده می‌شود. با توجه به این که در مدار حلقه خازنی یا کاتست سلفی نداریم، بنابراین مدار دارای ۷ فرکانس طبیعی خواهد بود. علاوه بر این با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار شامل دو کاتست خازنی و یک حلقه سلفی است. بنابراین مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی صفر است. با توجه به مطالب گفته شده، مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی غیرصفر و ۳ فرکانس طبیعی صفر است.

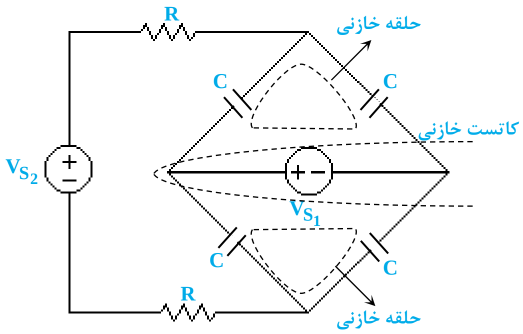


مثال ۱۶: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر کدام است؟

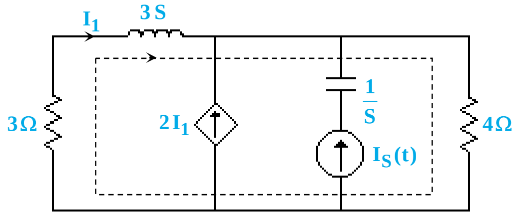


۱) ۴
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا مدار را به صورت ساده‌تری ترسیم می‌کنیم. حال در مدار ۴ خازن یا المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد، اما به دلیل وجود دو حلقه خازنی، از این تعداد ۲ واحد کم می‌شود و لذا مدار دارای دو فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود یک کاتست خازنی مدار دارای یک فرکانس طبیعی صفر است. بنابراین از دو فرکانس طبیعی مدار یکی صفر خواهد بود. لذا مدار دارای یک فرکانس طبیعی صفر و یک فرکانس طبیعی غیرصفر است.



مثال ۱۷: فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟



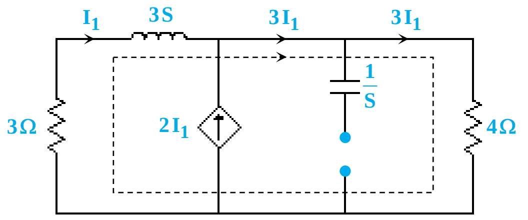
۱) S = ۰ ، S = −۵
۲) S = −۵
۳) S = −۳
۴) S = ۰ ، S = −۳

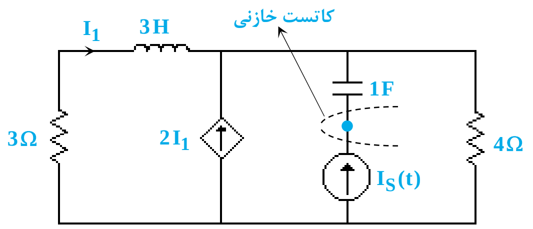
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیرصفر ابتدا منبع را بی‌اثر می‌کنیم. سپس برای بدست آوردن معادله مشخصه مدار، در حلقه بیرونی مدار KVL می‌زنیم. لذا داریم:

$$۳I_۱ + ۳SI_۱ + ۳I_۱ \times ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow I_۱(۳+۳S+۱۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۳S+۱۵ = ۰ \quad \Rightarrow \quad S = -۵$$

علاوه بر فرکانس S = −۵، با توجه به سری بودن خازن با منبع جریان، به علت وجود کاتست خازنی، S = ۰ نیز جزو فرکانس‌های طبیعی مدار است.





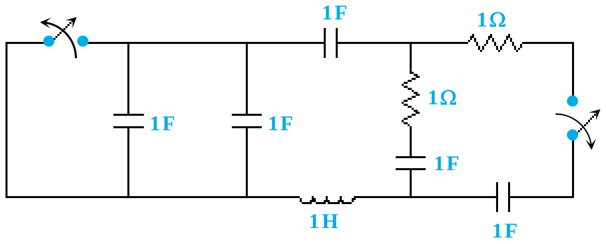
مثال ۱۸: در مدار زیر در دو حالت باز و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در حالت باز بودن کلیدها با تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در حالت بسته بودن کلیدها برابر است.

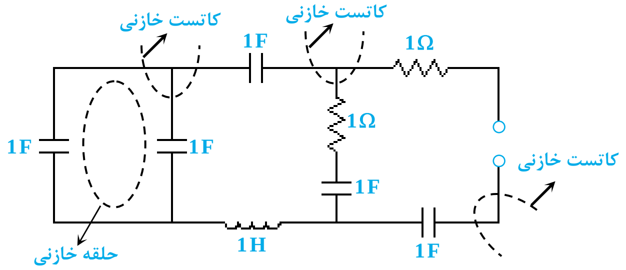
۲) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در حالت باز بودن و بسته بودن کلیدها تفاوتی ندارد.

۳) تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در حالت باز بودن و بسته بودن کلیدها تغییری ندارد.

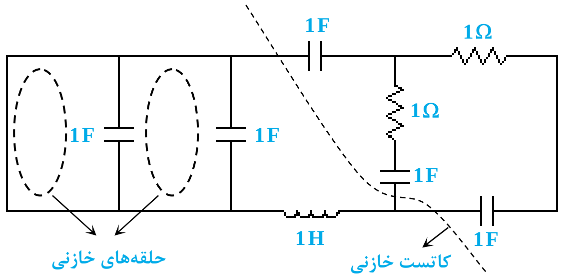
۴) در هر دو حالت تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار برابر است.



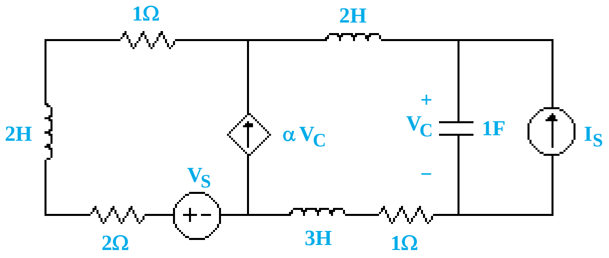
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مدار را در حالت باز بودن کلیدها تحلیل می‌کنیم. در این حالت مدار دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی (سلف و خازن) است. با توجه به وجود یک حلقه خازنی از این تعداد یک واحد کم می‌شود. بنابراین مدار دارای ۵ فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود ۳ کاتست خازنی در مدار، از ۵ فرکانس طبیعی، ۳ فرکانس طبیعی صفر و ۲ فرکانس طبیعی غیرصفر هستند.



حال اگر کلیدهای مدار را ببندیم، مدار به صورت زیر خواهد بود. با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی است. با توجه به وجود دو حلقه خازنی، از این تعداد ۲ واحد کم می‌شود. بنابراین مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی است. همچنین با توجه به وجود یک کاتست خازنی، مدار دارای یک فرکانس طبیعی صفر است. بنابراین مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی غیرصفر و یک فرکانس طبیعی صفر است. حال با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۱) صحیح است.



مثال ۱۹: در مدار زیر در صورتی که S = ۰ فرکانس طبیعی مدار باشد، مقدار α کدام است؟



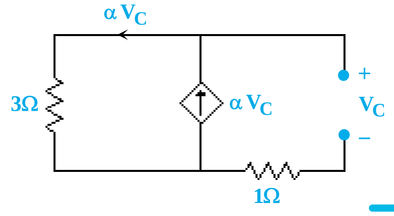
۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) ۳

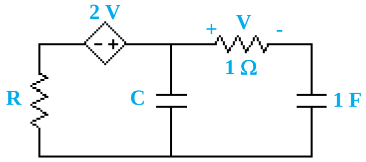
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی ابتدا منابع مستقل مدار را غیرفعال می‌کنیم. حال اگر فرکانس $S=۰$ جزو فرکانس‌های طبیعی مدار باشد، می‌توانیم مدار را در فرکانس صفر (DC) تحلیل کرده و α را بدست آوریم. بدین منظور به جای سلف‌ها اتصال کوتاه و به جای خازن‌ها مدار باز قرار می‌دهیم. با نوشتن KVL در حلقه بیرونی مدار داریم:



$$V_C=۳\alpha V_C \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{۱}{۳}$$

دقت کنید که رابطه نهایی همان رابطه‌ای است که در نکته ۳ به آن اشاره شد.

مثال۲۰: **در شبکه زیر مقادیر C و R کدام باشد تا مدار دارای فرکانس طبیعی $S=۱۰\,j$ باشد؟**



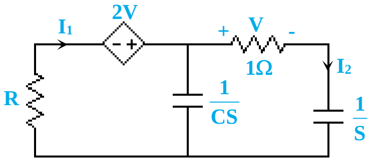
۱) $R=۰/۸۸\Omega \;,\; C=۰/۱F$

۲) $R=۰/۹۹\Omega \;,\; C=۰/۰۱F$

۳) $R=۱/۹۹\Omega \;,\; C=۱F$

۴) $R=۰/۵۵\Omega \;,\; C=۱/۱F$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:



$$-۲V+\frac{۱}{CS}(I_۱-I_۲)+RI_۱=۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V+\frac{I_۲}{S}+\frac{۱}{CS}(I_۲-I_۱)=۰ \qquad (۲)$$

با جایگذاری رابطه $V=I_۲$ در روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{cases} I_۱(R+\frac{۱}{CS})+I_۲(-۲-\frac{۱}{CS})=۰ \\ I_۱(\frac{-۱}{CS})+I_۲(۱+\frac{۱}{S}+\frac{۱}{CS})=۰ \end{cases}$$

از روابط بالا ماتریس امپدانس شبکه به صورت زیر خواهد بود:

$$Z=\begin{bmatrix} R+\frac{۱}{CS} & -۲-\frac{۱}{CS} \\ \frac{-۱}{CS} & ۱+\frac{۱}{S}+\frac{۱}{CS} \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار، $\det[Z]$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$(R+\frac{۱}{CS})(۱+\frac{۱}{S}+\frac{۱}{CS})-(\frac{۱}{CS})(۲+\frac{۱}{CS})=۰$$

در صورتی که $S=۱۰\,j$ جزو فرکانس‌های طبیعی مدار باشد، باید $S=۱۰\,j$ در رابطه بالا صادق باشد. حال داریم:

$$(R+\frac{۱}{۱۰\,jC})(۱+\frac{۱}{۱۰\,j}+\frac{۱}{۱۰\,jC})-(\frac{۱}{۱۰\,jC})(۲+\frac{۱}{۱۰\,jC})=۰$$

با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

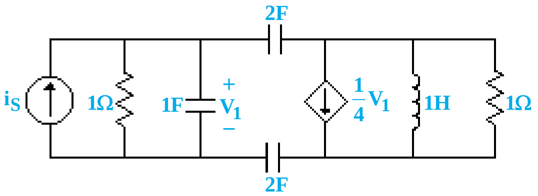
$$[R-(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰C})\times\frac{۱}{۱۰C}+\frac{۱}{۱۰۰C^۲}]-j[\frac{۱}{۱۰C}-\frac{۲}{۱۰C}+(\frac{R}{۱۰}+\frac{R}{۱۰C})]=۰$$

در صورتی که قسمت‌های موهومی و حقیقی رابطه بالا صفر باشد، داریم:

$$\begin{cases} R-\frac{۱}{۱۰۰C}-\frac{۱}{۱۰۰C^۲}+\frac{۱}{۱۰۰C^۲}=۰ \\ \frac{۱}{۱۰C}-\frac{۲}{۱۰C}+\frac{R}{۱۰}+\frac{R}{۱۰C}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R=۰/۹۹\Omega} \\ \mathbf{C=۰/۰۱F} \end{cases}$$

دقت کنید که می‌توانستیم از همان ابتدا S را برابر $۱۰\,j$ قرار داده و مسأله را حل کنیم.

مثال۲۱: در مورد مدار مقابل کدام گزینه صحیح است؟



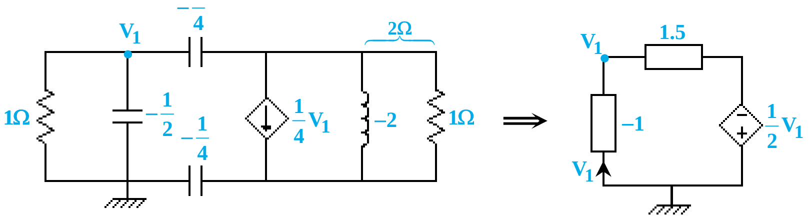
۱) مدار دارای یک فرکانس طبیعی صفر است و سه فرکانس طبیعی دیگر دارد که برابر است با $(-۲$ و $(\frac{-۵\pm j\sqrt{۷}}{۸}))$

۲) مدار دارای چهار فرکانس طبیعی غیرصفر است.

۳) مدار تنها سه فرکانس طبیعی دارد.

۴) مدار دارای یک فرکانس طبیعی صفر است و سه فرکانس طبیعی دیگر دارد که برابر است با $(-۳$ و $(\frac{-۵\pm j\sqrt{۷}}{۸}))$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مدار دارای چهار عنصر ذخیره‌کننده انرژی بوده که دارای شرایط اولیه مستقل هستند؛ بنابراین مدار چهار فرکانس طبیعـی دارد. از طرفی دو خازن ۲ فارادی موجود در مدار تشکیل یک کاتست خازنی می‌دهند؛ لذا یکی از این چهار فرکانس طبیعی صفر است. بنابراین پاسخ صحیح یکی از گزینه‌های (۱) و (۴) خواهد بود که تفاوت آن‌ها در فرکانس طبیعی حقیقی است. از این رو برای حل تست کافی است چک کنـیم آیـا $S=-۲$ یـا $S=-۳$ جزو فرکانس‌های طبیعی مدار هستند یا خیر. به ازای $S=-۲$ مدار به شکل زیر خواهد بود:

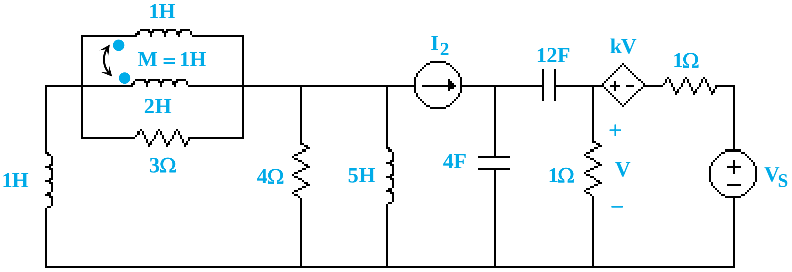


حال با تحلیل مدار باید به رابطه‌ای به شکل $۰\times V_۱=۰$ برسیم:

$$KVL:-V_۱+۱/۵\times V_۱-\frac{V_۱}{۲}=۰\Rightarrow ۰\times V_۱=۰ \checkmark$$

لذا $S=-۲$ فرکانس طبیعی مدار است و پاسخ گزینه (۱) می‌باشد.

مثال۲۲: به ازای چه مقدار k مدار چهار فرکانس طبیعی صفر دارد؟



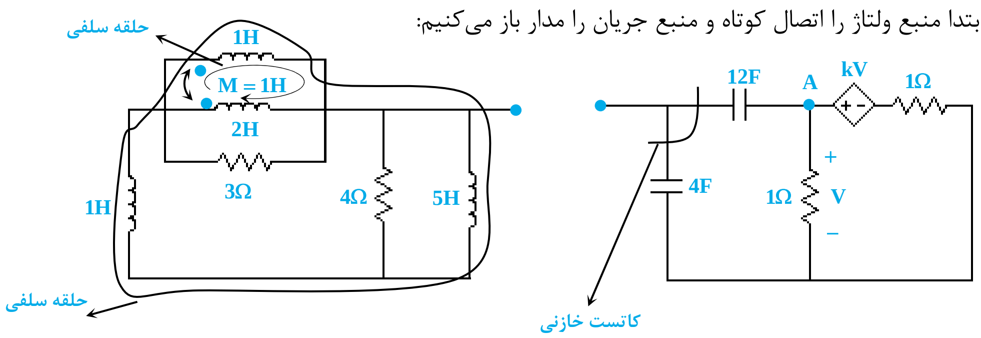
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۵

۴) به ازای هیچ مقدار k مدار دارای چهار فرکانس طبیعی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا منبع ولتاژ را اتصال کوتاه و منبع جریان را مدار باز می‌کنیم:

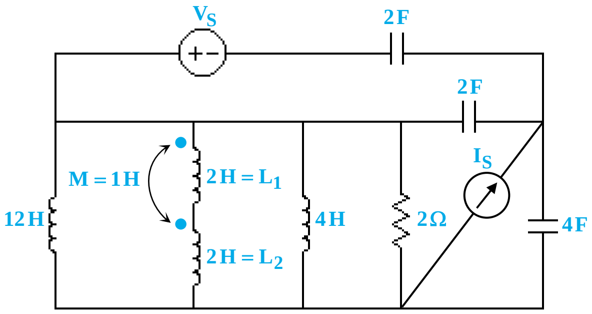


سه فرکانس طبیعی صفر مطابق با مدار بالا قابل مشاهده است. برای ساختن چهارمین فرکانس طبیعی با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$C_{eq}=\frac{۱۲\times ۴}{۱۲+۴}=۳F \xrightarrow{V_A=V} \frac{V}{\frac{۱}{۳s}}+\frac{V}{۱}+\frac{(۱-k)V}{۱}=۰\Rightarrow ۳SV+(۲-K)V=۰\Rightarrow ۲-k=۰\Rightarrow k=۲$$

به ازای $k=۲$ مدار دارای چهار فرکانس طبیعی خواهد بود. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۲۳: **در مدار زیر معادله مشخصه اصلی مدار که شامل همه فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر است، در کدام گزینه وجود دارد؟**

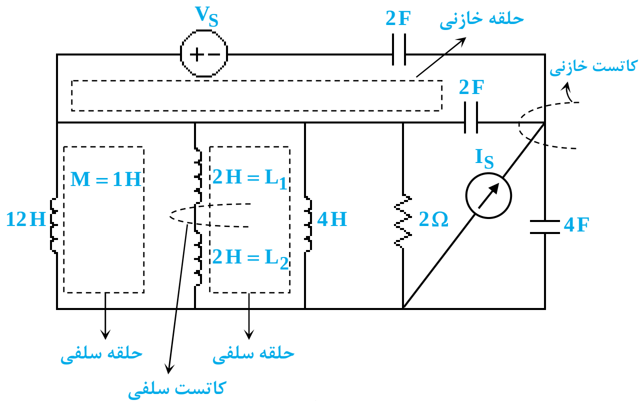


۱) $S^{۲}(S^{۲}+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۴})=۰$

۲) $S^{۲}+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۴}=۰$

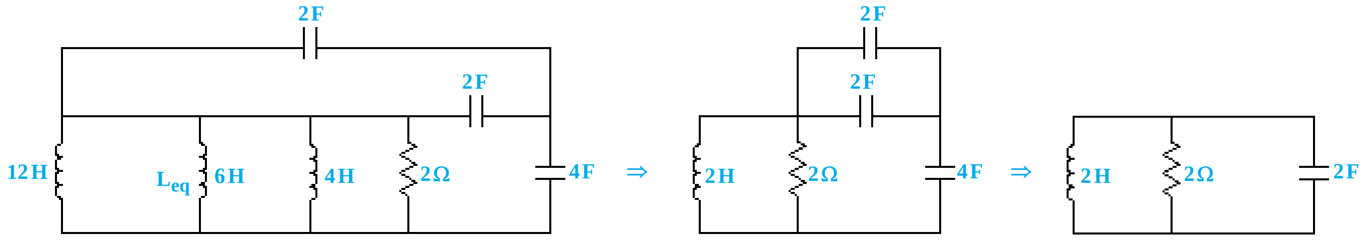
۳) $S(S^{۲}+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۴})=۰$

۴) $S^{۳}(S^{۲}+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۴})=۰$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا تعداد فرکانس‌های صفر و غیرصفر را محاسبه می‌کنیم. مدار دارای ۷ المان ذخیره‌کننده انرژی (سلف و خازن) می‌باشد. با توجه به وجود یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی، از این تعداد ۲ واحد کم می‌شود؛ لذا مدار دارای ۵ فرکانس طبیعی می‌باشد. با توجه به وجود دو حلقه سلفی و یک کاتست خازنی مدار دارای سه فرکانس طبیعی صفر است. لذا از ۵ فرکانس طبیعی مدار، ۳ تا برابر با صفر است. بنابراین مدار دارای ۲ فرکانس غیرصفر و ۳ فرکانس طبیعی صفر است.

برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر، سلف‌ها و خازن‌های مدار را ساده کرده و منابع مستقل ولتاژ و جریان را غیرفعال می‌کنیم.



$$L_{eq}=L_{۱}+L_{۲}+۲M=۲+۲+۲\times۱=۶H$$

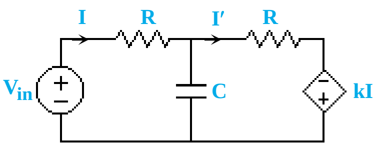
با توجه به تشکیل مدار RLC موازی، می‌توان برای تعیین معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر، از فرمول زیر استفاده کرد.

$$\alpha=\frac{۱}{۲RC}=\frac{۱}{۲\times۲\times۲}=\frac{۱}{۸} \quad و \quad \omega_{۰}=\frac{۱}{\sqrt{LC}}=\frac{۱}{\sqrt{۲\times۲}}=\frac{۱}{۲}(\frac{rad}{sec})$$

$$S^{۲}+۲\alpha S+\omega_{۰}^{۲}=۰ \Rightarrow S^{۲}+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۴}=۰$$

[معادله مشخصه اصلی مدار شامل همه فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر] : $S^{۳}(S^{۲}+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۴})=۰$

مثال ۲۴: **در مدار زیر مقدار k کدام باشد تا مدار حالت پایدار داشته باشد؟**

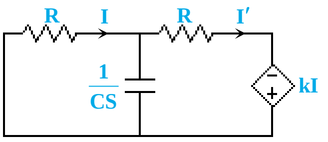


۱) $k>R$

۲) $k<R$

۳) $k<۲R$

۴) $k>۲R$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای پایدار بودن مدار باید تمام فرکانس‌های طبیعی مدار در سمت چپ محور jω قرار گیرند. حال ابتدا با غیرفعال کردن منابع مستقل، مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$\text{KVL (حلقه سمت چپ)}:\ +RI+\frac{۱}{CS}(I-I')=۰$$

$$\text{KVL (حلقه سمت راست)}:\ -kI+\frac{۱}{CS}(I'-I)+RI'=۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R+\frac{۱}{CS} & -\frac{۱}{CS} \\ -k-\frac{۱}{CS} & R+\frac{۱}{CS} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ I' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

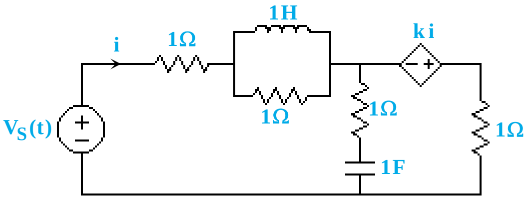
برای بدست آوردن معادله مشخصه مدار، لازم است که دترمینال ماتریس Z ، مساوی صفر قرار داده شود. حال داریم:

$$\det[Z]=(R+\frac{۱}{CS})^{۲}-\frac{k}{SC}-\frac{۱}{S^{۲}C^{۲}}=۰ \Rightarrow \frac{SR^{۲}C+۲R-k}{CS}=۰ \Rightarrow S=\frac{k-۲R}{R^{۲}C}$$

برای پایداری مدار فرکانس طبیعی حقیقی مدار باید منفی باشد.

$$\Rightarrow \quad k-۲R<۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k<۲R}$$

مثال ۲۵: به ازای چه مقدار یا مقادیری از k مدار شکل زیر نوسانی می‌شود؟



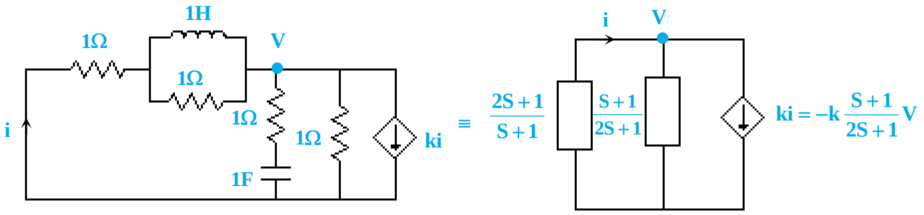
۱) $k<۲$

۲) $k>۵$

۳) $k=۳$

۴) به ازای هیچ مقداری از k ، این مدار نوسانی نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نوسانی شدن یک مدار یا یک سیستم متأثر از فرکانس‌های طبیعی آن مدار یا سیستم است؛ پس در این تست باید ابتدا فرکانس های طبیعی مدار را بدست آوریم. فرکانس‌های طبیعی مدار مستقل از ورودی‌های مدار بوده و بنابراین می‌توانیم منبع ولتاژ V_S را صفر کنیم. اکنون مدار معادل زیر را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم فرکانس‌های طبیعی مدار را از طریق محاسبه چندجمله‌ای مشخصه V بدست آوریم: (در این مدار معادل نورتن شاخه سمت راست مدار جایگزین آن شده است)



اکنون در گره مرکزی KCL می‌زنیم تا بتوانیم معادله مشخصه V را که شامل فرکانس‌های طبیعی مدار می‌شود، بدست آوریم:

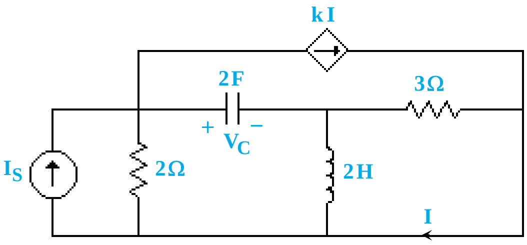
$$\frac{S+۱}{۲S+۱}V+\frac{۲S+۱}{S+۱}V-k\frac{S+۱}{۲S+۱}V=۰\Rightarrow\frac{(۱-k)(S+۱)^{۲}+(۲S+۱)^{۲}}{(S+۱)(۲S+۱)}V=۰\Rightarrow\left[(۵-k)S^{۲}+(۶-۲k)S+۲-k\right]V=۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه $(۵-k)S^{۲}+(۶-۲k)S+۲-k=۰$ فرکانس‌های طبیعی مدار هستند. برای این که سیستم نوسانی شود، ضریب S در معادله مشخصه باید صفر شود:
$۶-۲k=۰\Rightarrow k=۳$

حال به ازای $k=۳$ ریشه‌های معادله مشخصه را محاسبه می‌کنیم:
$k=۳\Rightarrow ۲S^{۲}-۱=۰\Rightarrow S=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مشخص است که ریشه‌های معادله مشخصه در این حالت حقیقی و البته ناپایدار بوده و بنابراین، این مدار نمی‌تواند نوسانی باشد.

مثال ۲۶: در مدار زیر مقدار k کدام باشد تا مدار در حالت صفر بودن I_S ، به صورت نوسان‌ساز عمل کند؟



۱) ۸

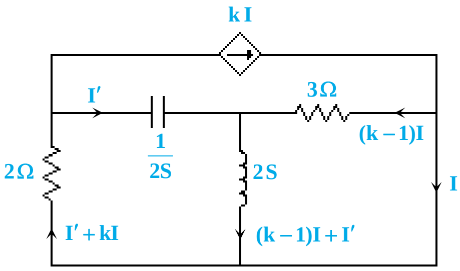
۲) ۱

۳) ۵

۴) مدار به ازای هیچ مقدار k نوسان‌ساز نخواهد بود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای برقراری حالت نوسان‌سازی در مدار، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و معادله مشخصه مدار را بدست می‌آوریم و ضریب S را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این حالت منابع مستقل را غیرفعال می‌کنیم. حال با نوشتن KVL در حلقه‌های سمت چپ و راست مدار داریم:

$$۳(I(k-۱))+۲S[(k-۱)I+I']=۰ \qquad ، \qquad ۲[I'+kI]+\frac{I'}{۲S}+۲S[(k-۱)I+I']=۰$$



$$\Rightarrow \begin{cases} I'[\frac{۱}{۲S}+۲S+۲]+I[۲S(k-۱)+۲k]=۰ \\ I'[۲S]+I[(k-۱)(۲S+۳)]=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲S}+۲S+۲ & ۲S(k-۱)+۲k \\ ۲S & (k-۱)(۲S+۳) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I' \\ I \end{bmatrix} = ۰$$

برای بدست آوردن معادله مشخصه، دترمینان ماتریس امپدانس بدست آمده را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow [\frac{۱}{۲S}+۲S+۲][(k-۱)(۲S+۳)]-۲S[۲S(k-۱)+۲k]=۰ \Rightarrow S^۲[۶k-۱۰]+۷S(k-۱)+\frac{۳}{۲}(k-۱)=۰$$

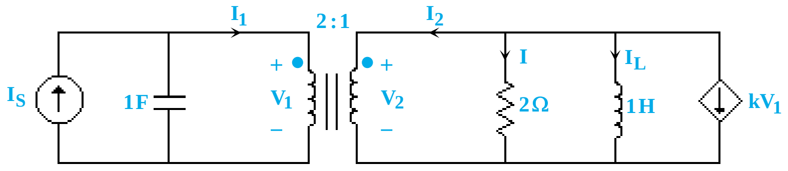
$$\Rightarrow S^۲+\frac{۷(k-۱)}{۶k-۱۰}S-\frac{۳(k-۱)}{۲(۶k-۱۰)}=۰$$

برای برقراری حالت بی‌اتلاف یا همان حالت نوسان‌سازی، فرکانس‌های طبیعی باید روی محور $j\omega$ باشند؛ لذا باید ضریب S در معادله مشخصه صفر شود.

$$۷(k-۱)=۰ \Rightarrow \mathbf{k=۱} \Rightarrow \text{معادله‌ی مشخصه}: S^۲=۰ \Rightarrow S=۰,۰$$

از آنجایی که فرکانس‌های طبیعی مدار مکرر (از مرتبه ۲) هستند، مدار ناپایدار بوده و نوسانی نیست.

مثال ۲۷: در مدار شکل زیر به ازای چه مقدار k، فرکانس‌های طبیعی I، موهومی خالص می‌شوند و مدار در حالت بی‌اتلاف کار می‌کند؟



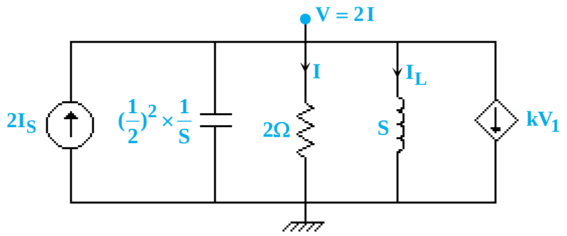
۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

۴) -۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این سؤال، ابتدا باید پارامتر I را بر حسب منبع ورودی در حوزه فرکانس محاسبه کرد و فرکانس‌های طبیعی متغیر I را بدست آورد. حال ابتدا المان‌های مدار را از سمت اولیه به سمت ثانویه منتقل می‌کنیم و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.



با نوشتن رابطه KCL در گره بالای مدار داریم:

$$I+\frac{۲I}{S}+۸SI+kV_۱=۲I_S \qquad (۱)$$

با توجه به روابط ترانسفورمر داریم:

$$\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow V_۱=۲V_۲ \quad , \quad V_۲=۲I$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه (۱) داریم:

$$I(۱+\frac{۲}{S}+۸S)+k\times ۲V_۲=۲I_S \Rightarrow I(۱+\frac{۲}{S}+۸S)+k\times ۴I=۲I_S \Rightarrow I=\frac{۲I_S}{۱+\frac{۲}{S}+۸S+۴k}$$

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر I، مخرج رابطه I را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

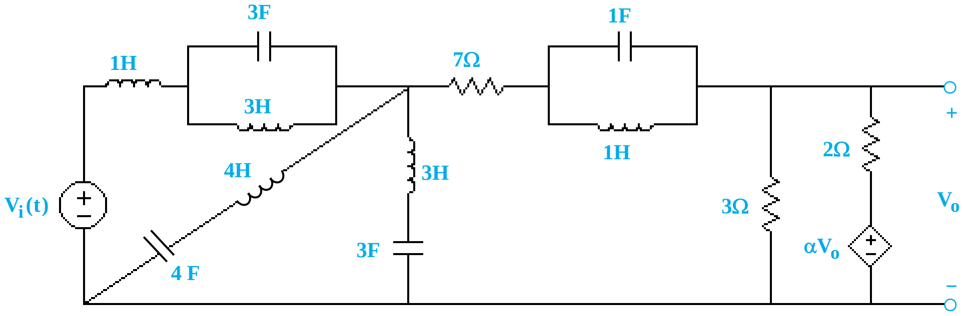
$$۱+\frac{۲}{S}+۸S+۴k=۰ \Rightarrow ۸S^۲+(۱+۴k)S+۲=۰$$

برای این‌که ریشه‌های معادله مشخصه یا فرکانس‌های طبیعی متغیر I، موهومی خالص شوند، لازم است که ضریب S در معادله مشخصه صفر شود. حال داریم:

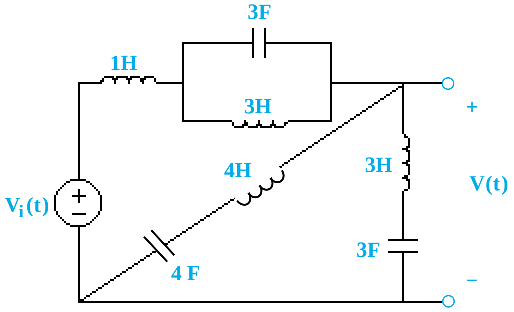
$$(۱+۴k)=۰ \Rightarrow \mathbf{k=-\frac{۱}{۴}} \Rightarrow \text{معادله‌ی مشخصه}=۸S^۲+۲=۰ \Rightarrow S^۲+\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow S=\pm j\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{نوسانی است}$$

دقت شود که می‌توانستیم I_S را برابر صفر فرض کرده و ضریب I را به عنوان معادله‌ی مشخصه در نظر بگیریم؛ در این حالت نیز به معادله‌ی فوق می‌رسیدیم.

مثال ۲۸: در مدار زیر مقدار α کدام باشد تا تمام قطب‌های $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ روی محور jω باشد؟



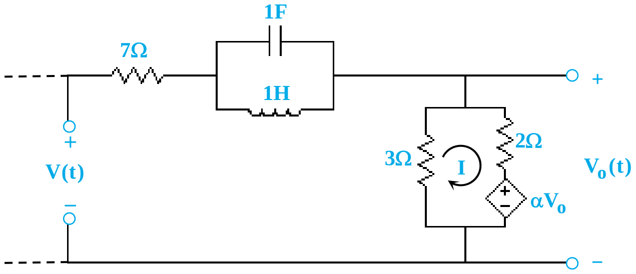
۱) $\frac{۵}{۴}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این تست ابتدا قسمت سمت چپ مدار را به شکل روبه‌رو در نظر بگیرید:

با توجه به این که این مدار تنها از سلف و خازن (با مقادیر مثبت) تشکیل شده و فاقد مقاومت و منابع وابسته است، فرکانس‌های طبیعی آن همگی بر روی محور jω قرار دارند؛ بنابراین قطب‌های تابع انتقال $\frac{V(s)}{V_i(s)}$ همگی موهومی و یا برابر صفر هستند. حال اگر مقدار α در مدار اصلی، طوری تنظیم شود که دو شاخه موازی سمت راست مدار اصلی، معادل با مقاومت بی‌نهایت یا به عبارت دیگر، مدار باز گردند، خواهیم داشت: $V_o(t)=V(t)\Rightarrow\frac{V(s)}{V_i(s)}=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

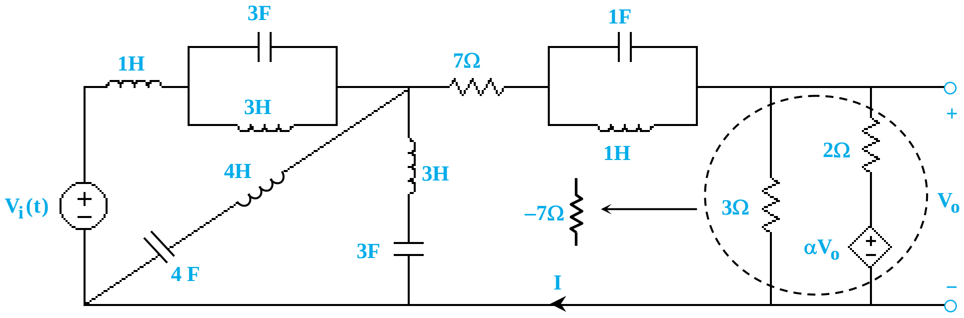
اگر جریان I در حلقه سمت راست مدار گردش کند، این امر محقق می‌شود:

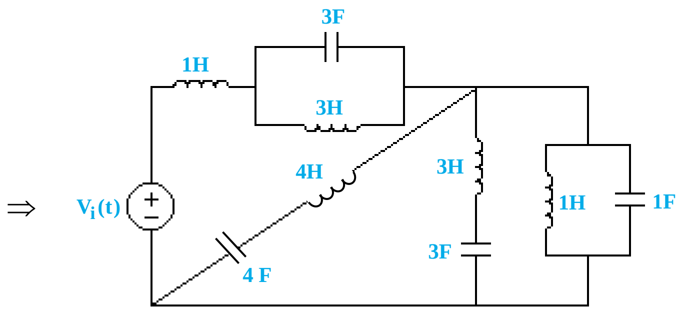


$$I=-\frac{V_o}{۳}=\frac{۱-\alpha}{۲}V_o$$

$$\Rightarrow\frac{۱-\alpha}{۲}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow\alpha=\frac{۵}{۳}$$

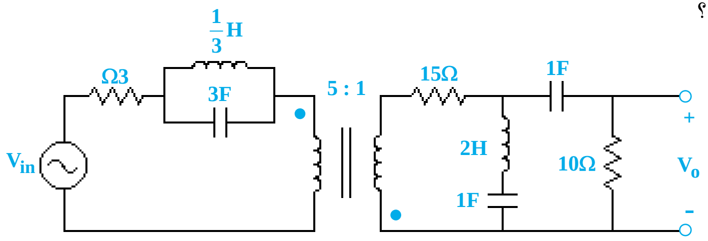
در این حالت جریانی از مقاومت و مدار LC موازی در سمت راست آن نمی‌گذرد و $V(t)=V_o(t)$ خواهد بود. بنابراین قطب‌های تابع انتقال $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ همچون قطب‌های تابع انتقال $\frac{V(s)}{V_i(s)}$ بر روی محور jω قرار خواهند گرفت. اما در یک حالت دیگر نیز ممکن است قطب‌های تابع انتقال $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ روی محور jω قرار گیرند و آن زمانی است که دو شاخه موازی سمت راست، همچون یک مقاومت ‎−۷ اهم عمل کنند. در این حالت نیز، مدار مشابه یک مدار بدون مقاومت عمل کرده و فرکانس‌های طبیعی آن تماماً روی محور jω قرار خواهند گرفت. $V_o=-۷I\ ,\ I=\frac{V_o}{۳}+\frac{(۱-\alpha)V_o}{۲}=-\frac{V_o}{۷}\Rightarrow\alpha=\frac{۴۱}{۲۱}$





در این حالت مقدار α در گزینه‌ها نیست، پس همان مقدار $\alpha = \frac{۵}{۳}$ صحیح است.

مثال۲۹: صفرهای تابع انتقال $H(S) = \frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ در مدار زیر کدام است؟



۱) $S = \pm j \ , \ S = \frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$

۲) $S = ۰ \ , \ S = \frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$

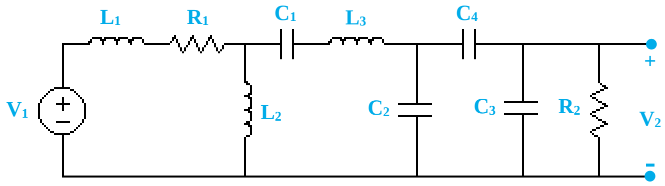
۳) $S = ۰ \ , \ S = \pm j \ , \ S = \frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$

۴) $S = ۰ \ , \ S = \pm j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با دقت در شکل دیده می‌شود که یک مدار LC سری با یک سلف ۲H و خازن ۱F در سمت راست مدار وجود دارد؛ لذا یکی از جفت صفرهای تابع انتقال $S = \frac{\pm j}{\sqrt{۲ \times ۱}}$ می‌باشد و در حالتی که فرکانس موج ورودی برابر $\frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$ شود، به جای LC سری فوق اتصال کوتاه قرار می‌گیرد و V_o صفر می‌شود. همچنین با توجه به شکل مدار دیده می‌شود که یک مدار LC موازی در سمت چپ مدار موجود است و این LC موازی باعث ایجاد یک جفت صفر به صورت $S = \frac{\pm j}{\sqrt{\frac{۱}{۳} \times ۳}} = \pm j$ در تابع شبکه خواهد شد. با بررسی بیشتر در مدار می‌بینیم که یک خازن سری با V_o نیز وجود دارد که در فرکانس $S = ۰$ باعث صفر شدن خروجی می‌شود. در نتیجه صفرهای تابع انتقال به صورت روبرو است:

$$S = ۰ \ , \ S = \pm j \ , \ S = \frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$$

مثال۳۰: کدامیک از مقادیر زیر، صفری از تابع تبدیل $\frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}$ تعریف شده در مدار زیر می‌باشد؟



۱) $j\frac{۱}{\sqrt{L_۲C_۲}}$

۲) $j\frac{۱}{\sqrt{L_۲C_۱}}$

۳) $j\frac{۱}{\sqrt{L_۲C_۳}}$

۴) هیچکدام

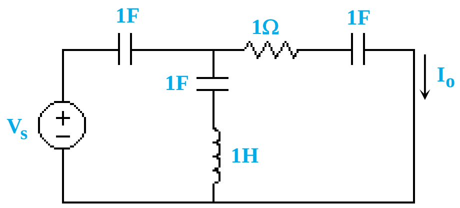
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها دیده می‌شود که صفر تابع انتقال باید در اثر رزونانس یک LC سری یا موازی تشکیل شده باشد. طبق مطالب گفته شده در صورتی که یک LC سری در شاخه‌های موازی با خروجی باشد و یا یک LC موازی در شاخه‌های سری با خروجی باشد، صفر تابع انتقال ایجاد خواهد شد. با دقت در شکل هیچ کدام از دو مورد بالا وجود ندارد و مدار دارای صفر تابع انتقال به صورت گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) نمی‌باشد.

مثال۳۱: در مدار شکل زیر، مقادیر موارد «الف» تا «ج» به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟

الف) تعداد قطب‌های تابع انتقال شبکه، $H(s) = \frac{I_o(S)}{V_s(S)}$

ب) تعداد قطب‌های صفر تابع انتقال شبکه، $H(s) = \frac{I_o(S)}{V_s(S)}$

ج) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر مدار.

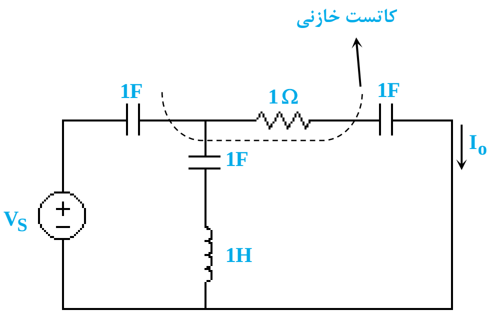


۱) ۳ ، ۱ ، ۱

۲) ۴ ، ۰ ، ۱

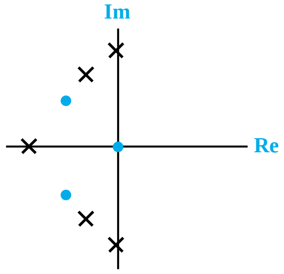
۳) ۳ ، ۰ ، ۱

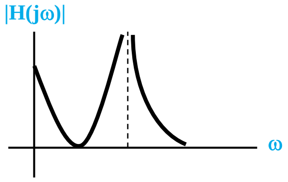
۴) ۴ ، ۰ ، ۰



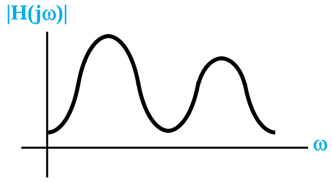
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در درجه اول با توجه به وجود ۴ عنصر ذخیره‌کننده انرژی مدار، مرتبه مدار برابر ۴ بوده و مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی می‌باشد. از طرفی به علت وجود یک کاتست خازنی، یکی از فرکانس‌های طبیعی مدار برابر صفر است. تعداد قطب‌های تابع H(S) بطور پیش‌فرض برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار یعنی برابر ۴ می‌باشد؛ اما باید این نکته را در نظر گرفت که در فرکانس صفر بعلت مدار باز شدن خازن سمت راست مدار، مقدار I_0 صفر است؛ بنابراین $S=۰$ یک صفر تابع H(S) است و نمی‌تواند همزمان قطب آن نیز باشد. پس تابع H(S) سه قطب غیرصفر دارد. با توجه به مطالب بیان شده گزینه (۳) پاسخ تست می‌باشد.

مثال ۳۲: در صورتی که نمودار صفر و قطب یک تابع شبکه به صورت زیر باشد، کدام نمودار تغییرات اندازه تابع شبکه فوق را بر حسب ω نمایش می‌دهد؟

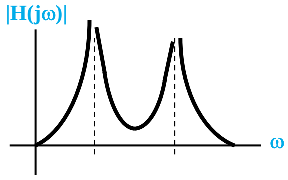




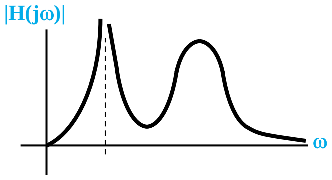
(۱)



(۲)



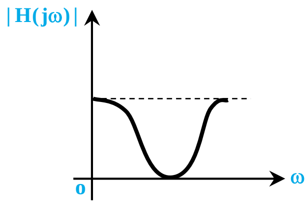
(۳)

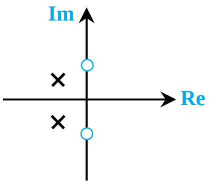


(۴)

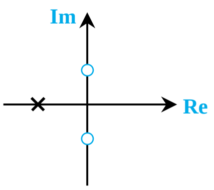
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با دقت در نمودار صفر و قطب دیده می‌شود که یک صفر در مبدأ وجود دارد. در این حالت باید اندازه تابع شبکه در مبدأ برابر صفر باشد. وجود یک زوج صفر مختلط و مزدوج باعث ایجاد یک مینیمم محلی و وجود یک زوج قطب مختلط و مزدوج باعث ایجاد یک ماکزیمم محلی می‌شود. با توجه به وجود یک زوج قطب موهومی، تابع شبکه باید یک ماکزیمم با اندازه بینهایت نیز داشته باشد. همچنین بیشتر بودن تعداد قطب‌ها از صفرها بیانگر صفر شدن تابع شبکه در $\omega=\infty$ است. بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

مثال ۳۳: اندازه تابع تبدیل یک سیستم فیزیکی به صورت شکل زیر است. دیاگرام صفر و قطب سیستم مذکور کدامیک از موارد زیر می‌تواند باشد؟

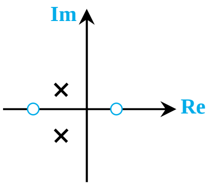




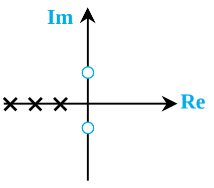
(۱)



(۲)



(۳)

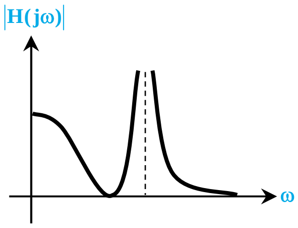


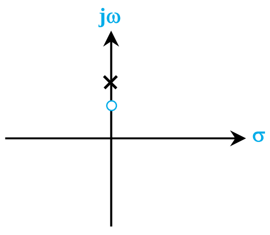
(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به وجود یک مینیمم روی محور ω، تابع انتقال باید دارای یک جفت صفر بر روی محور jω باشد. با دقت در منحنی تغییرات $|H(j\omega)|$ با ω دیده می‌شود که $|H(۰)|=|H(\infty)|=k$ است و لذا باید درجه صورت و مخرج یکی باشد. بنابراین باید مدار دارای دو قطب نیز باشد. در نتیجه تابع تبدیل می‌تواند به صورت روبرو مطابق با گزینه (۱) باشد.

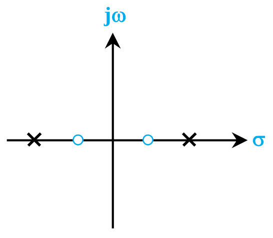
$$H(S)=\frac{S^{۲}+\alpha}{S^{۲}+\beta S+k}$$

مثال ۳۴: با فرض اینکه منحنی اندازه پاسخ فرکانسی یک سیستم فیزیکی، $|H(j\omega)|$، مطابق شکل مقابل باشد، کدام یک از آرایش‌های قطب و صفر زیر متعلق به سیستم مذکور است؟

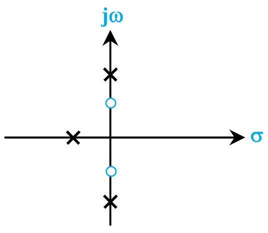




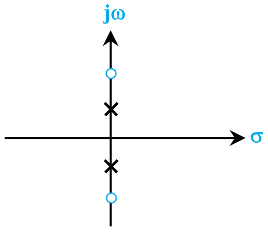
(۱)



(۲)



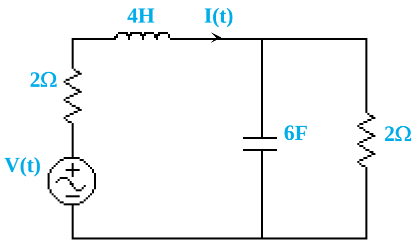
(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به یک مینیمم در روی محور افقی، تابع شبکه دارای یک زوج صفر روی محور $j\omega$ است. همچنین با توجه بـه وجـود یـک ماکزیمم، تابع شبکه دارای دو قطب است و به خاطر بینهایت بودن اندازه تابع شبکه در این ماکزیمم، این زوج قطب روی محور $j\omega$ می‌باشند. در صورتی که به اندازه تابع شبکه در بینهایت دقت کنیم، خواهیم دید که اندازه مذکور برابر صفر است؛ لذا درجه مخرج از صورت در تابع شبکه بیشتـر اسـت. پـس تـابع انتقال دارای ۲ قطب روی محور $j\omega$ و یک قطب عادی و دو صفر روی محور $j\omega$ است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مثال ۳۵: ضریب کیفیت مدار زیر کدام است؟



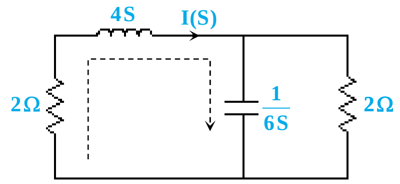
۱) $\frac{۵}{\sqrt{۱۲}}$

۲) $\frac{۷}{\sqrt{۱۲}}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۲}}{۷}$

۴) $\frac{\sqrt{۱۲}}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسـیم کـرده و بـا نوشـتن KVL در مدار، معادله مشخصه مدار را محاسبه می‌کنیم.



$$۲I(S)+۴SI(S)+I(S).(۲\|\frac{۱}{۶S})=۰ \Rightarrow I(S)[۲+۴S+\frac{۲\times\frac{۱}{۶S}}{۲+\frac{۱}{۶S}}]=۰$$

با صفر قرار دادن ضریب $I(S)$ معادله مشخصه مدار را بدست می‌آوریم:

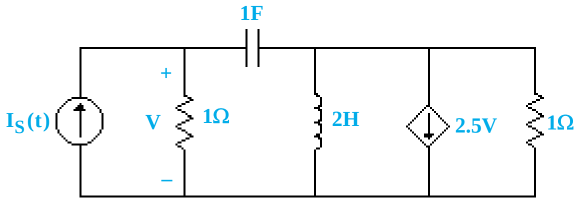
$$۲+۴S+\frac{۲}{۱۲S+۱}=۰ \Rightarrow (۲+۴S)(۱۲S+۱)+۲=۰ \Rightarrow ۴۸S^۲+۲۸S+۴=۰ \Rightarrow S^۲+\frac{۷}{۱۲}S+\frac{۱}{۱۲}=۰$$

با مقایسه معادله مشخصه بدست آمده با فرم استاندارد آن داریم:

$$S^۲+۲\alpha S+\omega_۰^۲=۰ \Rightarrow ۲\alpha=\frac{۷}{۱۲}=BW \Rightarrow \omega_۰^۲=\frac{۱}{۱۲} \quad , \quad \omega_۰=\sqrt{\frac{۱}{۱۲}}(\frac{rad}{sec})$$

$$Q=\frac{\omega_۰}{BW}=\frac{\sqrt{\frac{۱}{۱۲}}}{\frac{۷}{۱۲}}=\frac{۱۲\times\frac{۱}{\sqrt{۱۲}}}{۷}=\frac{\sqrt{۱۲}}{۷}$$

مثال ۳۶: مقدار پهنای باند مدار شکل زیر بر حسب رادیان بر ثانیه مطابق با کدام گزینه است؟



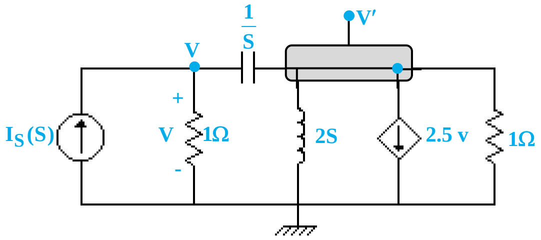
۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن مقدار BW باید معادله مشخصه مدار معلوم شود. لذا باید معادلات KCL در گره‌های مدار نوشته شده و ماتریس ادمیتانس مدار تشکیل شود و سپس دترمینان ماتریس ادمیتانس مساوی صفر قرار داده شود.



با نوشتن KCL در گره سمت چپ داریم:

$$\frac{V}{۱}+S(V-V')=I_S(S)$$

با نوشتن KCL در گره سمت راست داریم:

$$\frac{V'}{۲S}+\frac{V'}{۱}+(V'-V)S+۲/۵V=۰$$

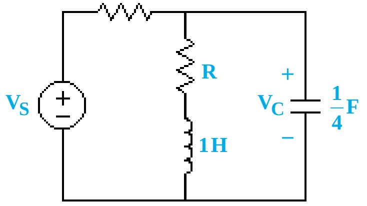
با مرتب‌سازی روابط بالا داریم:

$$\begin{cases}V(S+۱)+V'(-S)=I_S\\ V(۲/۵-S)+V'(S+۱+\frac{۱}{۲S})=۰\end{cases}\Rightarrow\quad Y=\begin{bmatrix}S+۱ & -S\\ ۲/۵-S & S+۱+\frac{۱}{۲S}\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن معادله مشخصه، دترمینان ماتریس Y را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\det[Y]=۰\quad\Rightarrow\quad S^۲+\frac{۱}{۳}S+\frac{۱}{۹}=۰\quad\Rightarrow\quad ۲\alpha=BW=\frac{۱}{۳}(\frac{rad}{sec})$$

مثال ۳۷: به ازای چه مقدار یا مقادیری از R بر حسب اهم، مدار شکل زیر در حالت میرایی بحرانی قرار می‌گیرد؟



۱) ۵

۲) ۳-

۳) ۳- یا ۵

۴) به ازای هیچ مقداری از R مدار به حالت میرایی بحرانی نمی‌رود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» حتماً می‌دانید که برای تشخیص نوع حالت گذرای مدار باید به سراغ فرکانس‌های طبیعی مدار برویم. این فرکانس‌ها را می‌توان با تعیین چندجمله‌ای مشخصه مدار که همان مخرج تابع انتقال مدار است، بدست آورد. با نوشتن روابط KCL در گره مرکزی مدار می‌توان معادله مشخصه V_C را بدست آورده و از روی آن حالت گذرای مدار را تعیین نمود:

$$\frac{۱}{۴}V_C+\frac{۱}{R+S}V_C+\frac{S}{۴}V_C=۰\Rightarrow\frac{(S+۱)(R+S)+۴}{۴(R+S)}V_C=۰\Rightarrow\frac{S^۲+(R+۱)S+R+۴}{۴(R+S)}V_C=۰$$

بنابراین چندجمله‌ای مشخصه مدار بصورت زیر است:

$$S^۲+(R+۱)S+R+۴=۰$$

برای این که مدار در حالت میرای بحرانی باشد، بایستی چندجمله‌ای مشخصه دارای یک جفت ریشه تکراری حقیقی باشد که در این صورت این چندجمله‌ای به شکل $S^۲+۲\omega_۰S+\omega_۰^۲$ خواهد بود؛ پس باید داشته باشیم:

$$R+۴=(\frac{R+۱}{۲})^۲\ \Rightarrow R^۲-۲R-۱۵=۰\ \Rightarrow(R+۳)(R-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}R=-۳\\ R=۵\end{cases}$$

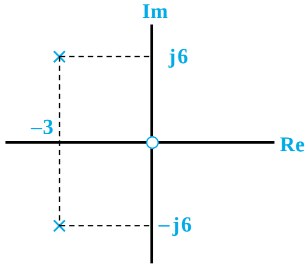
حال به ازای هر دو مقدار به دست آمده برای R پایداری ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه را بررسی می‌کنیم:

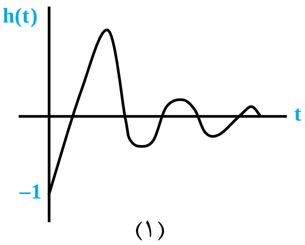
$R=-۳\ \Rightarrow S^۲-۲S+۱=۰\ \Rightarrow S_۱=۱\ ,\ S_۲=۱$ ناپایدار

$R=۵\ \Rightarrow S^۲+۶S+۹=۰\ \Rightarrow S_۱=-۳\ ,\ S_۲=-۳$ پایدار

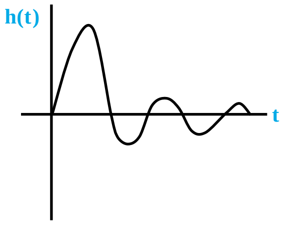
پس تنها مقدار R = ۵ قابل قبول است.

مثال۳۸: با توجه به نمودار صفر و قطب زیر برای تابع شبکه مدار، کدام گزینه برای پاسخ ضربه مدار قابل قبول است؟ (بهره ثابت را یک فرض کنید.)

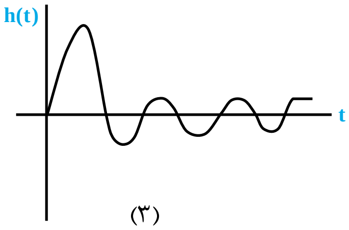




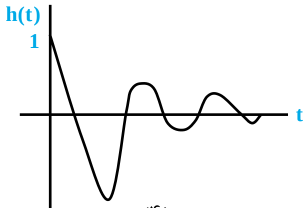
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

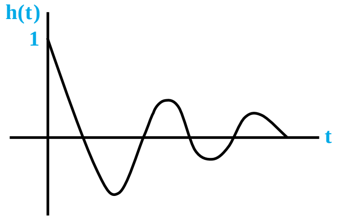
روش اول: با توجه به نمودار صفر و قطب، تابع شبکه مدار به صورت روبرو است:

$$H(S)=\frac{S}{(S+\alpha)^{۲}+\omega_d^{۲}}=\frac{S}{(S+۳)^{۲}+۶^{۲}}$$

پاسخ ضربه مدار برابر با لاپلاس معکوس تابع شبکه است. حال داریم:

$$h(t)=L^{-۱}[H(S)]=L^{-۱}[\frac{S}{(S+۳)^{۲}+۶^{۲}}]=L^{-۱}[\frac{S+۳}{(S+۳)^{۲}+۶^{۲}}-\frac{۳}{(S+۳)^{۲}+۶^{۲}}]=e^{-۳t}(\cos ۶t-۰/۵\sin ۶t)$$

با رسم پاسخ ضربه یا $h(t)$ داریم:



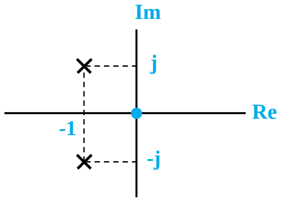
روش دوم: با توجه به تفاوت گزینه‌ها در نقاط شروع و انتهای پاسخ ضربه، مقادیر $h(t=۰)$ و $h(t=\infty)$ را با قضیه مقدار نهایی و مقدار اولیه بدست می‌آوریم:

$$h(t=\infty)=\lim_{S\to ۰}SH(S)=\lim_{S\to ۰}\frac{S^{۲}}{(S+۳)^{۲}+۶^{۲}}=۰$$

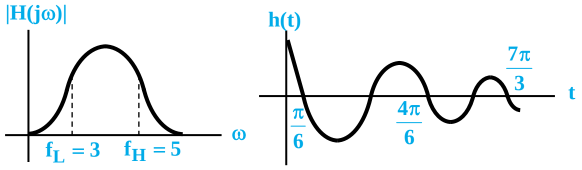
$$h(t=۰)=\lim_{S\to\infty}SH(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{S^{۲}}{(S+۳)^{۲}+۶^{۲}}=۱$$

با دقت در گزینه‌ها، دیده می‌شود که فقط گزینه (۴) صحیح است.

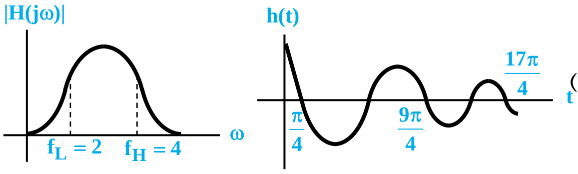
مثال۳۹: درصورتی که نمودار صفر و قطب یک مدار به صورت روبرو باشد، کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به پاسخ ضربه و اندازه تابع شبکه مدار فوق می‌باشد؟



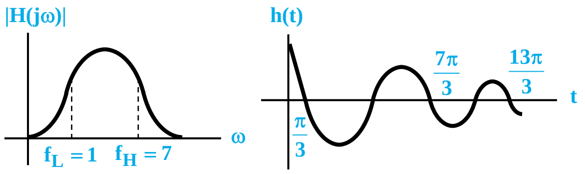
۱)



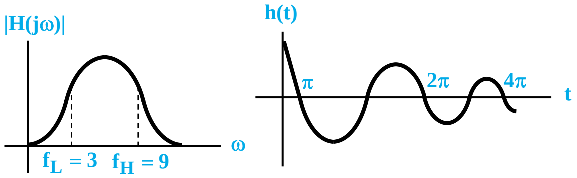
۲)



۳)



۴)



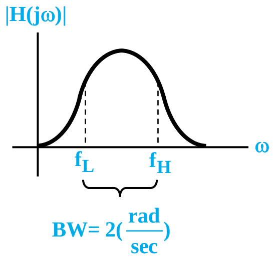
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از روی نمودار قطب و صفر داریم:

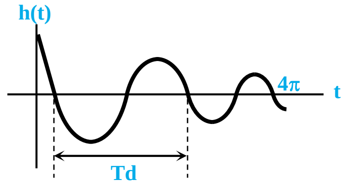
$$S_۱\ ,\ S_۲=-۱\pm j\ \ ,\ \ S_۱\ ,\ S_۲=-\alpha\pm j\omega_d$$

$$\Rightarrow\ -\alpha=-۱\ \Rightarrow\ \alpha=۱\ \Rightarrow\ BW=۲\alpha=۲(\frac{rad}{sec})$$

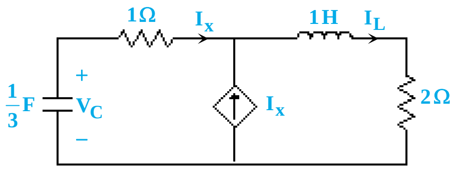
$$\omega_d=\frac{۲\pi}{T_d}\ \Rightarrow\ ۱=\frac{۲\pi}{T_d}\ \Rightarrow\ T_d=۲\pi$$

با توجه به اطلاعات بدست آمده، فقط گزینه (۲) صحیح است.





مثال۴۰: در مدار زیر شرایط اولیه شامل ولتاژ خازن و جریان سلف مطابق با کدام گزینه باشد تا جریان I_x فقط شامل جمله $ke^{-۱/۵t}$ باشد؟



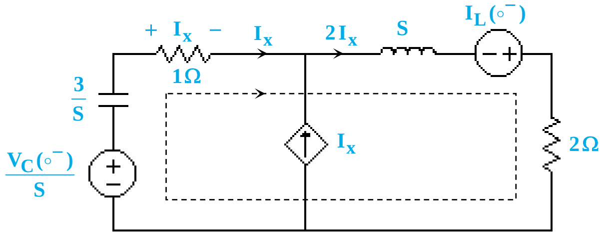
۱) $V_C(۰^-)=-۳v\ ,\ I_L(۰^-)=۱۰A$

۲) $V_C(۰^-)=۳v\ ,\ I_L(۰^-)=۱۰A$

۳) $V_C(۰^-)=۱۶v\ ,\ I_L(۰^-)=۱۶A$

۴) $V_C(۰^-)=-۱۶v\ ,\ I_L(۰^-)=۱۶A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل سؤال ابتدا با در نظر گرفتن شرایط اولیه، مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:



$$-\frac{V_C(۰^-)}{S}+\frac{۳}{S}I_x+I_x+۲I_x.S-I_L(۰^-)+۴I_x=۰$$

$$\Rightarrow I_x[\frac{۳}{S}+۱+۲S+۴]=I_L(۰^-)+\frac{V_C(۰^-)}{S}$$

$$\Rightarrow\ I_x=\frac{SI_L(۰^-)+V_C(۰^-)}{۲S^۲+۵S+۳}=\frac{\frac{۱}{۲}[SI_L(۰^-)+V_C(۰^-)]}{(S+۱)(S+۱/۵)}$$

با تفکیک کسر بالا داریم:

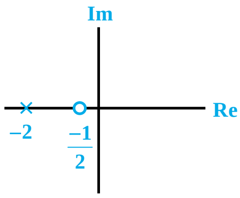
$$I_x=\frac{-I_L(۰^-)+V_C(۰^-)}{(S+۱)}+\frac{+۱/۵I_L(۰^-)-V_C(۰^-)}{(S+۱/۵)}$$

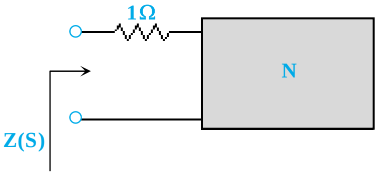
حال اگر I_x فقط شامل جمله $ke^{-۱/۵t}$ باشد، باید صورت کسر شامل فرکانس $S=-۱$، برابر صفر شود تا جمله شامل $S=-۱$ به صورت ke^{-t} در خروجی ظاهر نشود. بنابراین داریم:

$$-I_L(۰^-)+V_C(۰^-)=۰\ \Rightarrow\ V_C(۰^-)=I_L(۰^-)$$

با چک کردن این شرط در گزینه‌ها، فقط گزینه (۳) صحیح است.

مثال۴۱: اگر نمودار صفر و قطب تابع امپدانس یک مدار به صورت زیر باشد، در مورد شبکه N کدام عبارت صحیح است؟ (بهره ثابت برابر دو است.)





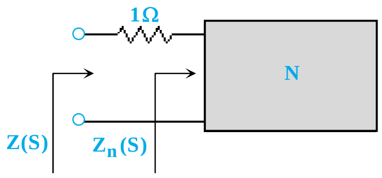
۱) شبکه مدار باز ورودی و شبکه اتصال کوتاه ورودی ناپایدار هستند.

۲) شبکه مدار باز ورودی و شبکه اتصال کوتاه ورودی پایدار هستند.

۳) شبکه مدار باز ورودی، پایدار و شبکه اتصال کوتاه ورودی، ناپایدار است.

۴) شبکه مدار باز ورودی، ناپایدار و شبکه اتصال کوتاه ورودی، پایدار است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای قضاوت در مورد پایداری حالت‌های مختلف مدار، ابتدا باید $Z_n(S)$ را بدست آورد. با توجه به نمودار صفر و قطب برای Z(S) و این که بهره ثابت برابر ۲ است، داریم:



$$Z(S)=\frac{۲(S+\frac{۱}{۲})}{S+۲}=\frac{۲S+۱}{S+۲}$$

$$Z_n(S)=Z(S)-۱=\frac{۲S+۱}{S+۲}-۱=\frac{S-۱}{S+۲}$$

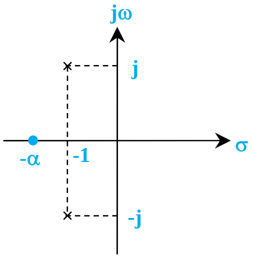
دقت کنید فرکانس‌های طبیعی شبکه اتصال کوتاه ورودی، همان صفرهای تابع امپدانس و فرکانس‌های طبیعی شبکه مدار باز ورودی، همان قطب‌های تابع امپدانس هستند. بنابراین داریم:

$S=-۲$: فرکانس طبیعی شبکه مدار باز

$S=۱$: فرکانس طبیعی شبکه اتصال کوتاه

با توجه به این که فرکانس طبیعی شبکه اتصال کوتاه در سمت راست محور jω قرار دارد، شبکه اتصال کوتاه ورودی ناپایدار است. این در حالی است که فرکانس طبیعی شبکه مدار باز ورودی در سمت چپ محور jω قرار دارد و لذا شبکه مدار باز ورودی پایدار است.

مثال ۴۲: شکل زیر صفرها و قطب‌های تابع تبدیل یک مدار را نشان می‌دهد. ضریب ثابت تابع تبدیل را برابر ۱ فرض کنید. یک جمله از پاسخ پله این مدار به شکل $ke^{-t}\cos(t+\varphi)$ است. مقدار α را به نحوی تعیین کنید که k حداقل باشد. $(k>۰)$ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۰)



۱) $\alpha = ۰$

۲) $\alpha = ۱$

۳) $\alpha = ۲$

۴) $\alpha = \frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اطلاعات مسأله و حضور دو قطب در $-۱\pm j$ و حضور یک صفر در $-\alpha$، تابع شبکه به صورت زیر است. لازم به ذکر است که ضریب ثابت $H(S)$ نیز یک فرض شده است.

$$H(S)=\frac{S+\alpha}{(S+۱)^۲+۱}$$

با توجه به اینکه تابع ورودی پله واحد است، داریم:

$$H(S)=\frac{F_o(S)}{F_i(S)}\ ,\ F_o(S)=H(S).F_i(S)\ \Rightarrow\ F_o(S)=H(S)\times\frac{۱}{S}\ \Rightarrow\ F_o(S)=\frac{۱}{S}[\frac{S+\alpha}{(S+۱)^۲+۱}]$$

$$\Rightarrow\ F_o(S)=\frac{-\frac{\alpha}{۲}S-\alpha+۱}{(S+۱)^۲+۱}+\frac{\frac{\alpha}{۲}}{S}\ \Rightarrow\ F_o(S)=\frac{-\frac{\alpha}{۲}(S+۱)+(۱-\frac{\alpha}{۲})}{(S+۱)^۲+۱}+\frac{\frac{\alpha}{۲}}{S}$$

با اعمال قانون تبدیل معکوس لاپلاس برای $F_o(S)$ داریم:

$$f_o(t)=e^{-t}[-\frac{\alpha}{۲}\cos t+(۱-\frac{\alpha}{۲})\sin t]u(t)+\frac{\alpha}{۲}u(t)\ \Rightarrow\ f_o(t)=\sqrt{(\frac{-\alpha}{۲})^۲+(۱-\frac{\alpha}{۲})^۲}\,e^{-t}\cos(t+\varphi)u(t)+\frac{\alpha}{۲}u(t)$$

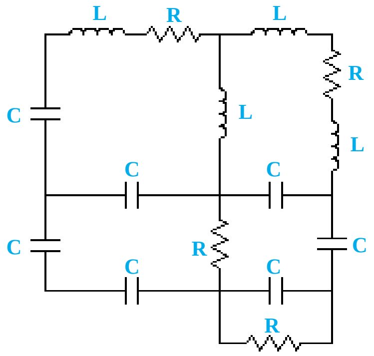
با توجه به اطلاعات مسأله داریم:

$$k=\sqrt{(\frac{-\alpha}{۲})^۲+(۱-\frac{\alpha}{۲})^۲}$$

برای اینکه k حداقل شود از رابطه مذکور بر حسب α مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dk}{d\alpha}=۰\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{۲}-۲(\frac{۱}{۲})(۱-\frac{\alpha}{۲})=۰\ \Rightarrow\ \alpha=۱$$

مثال ۴۳: مرتبه مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در مدار شکل زیر کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۱)



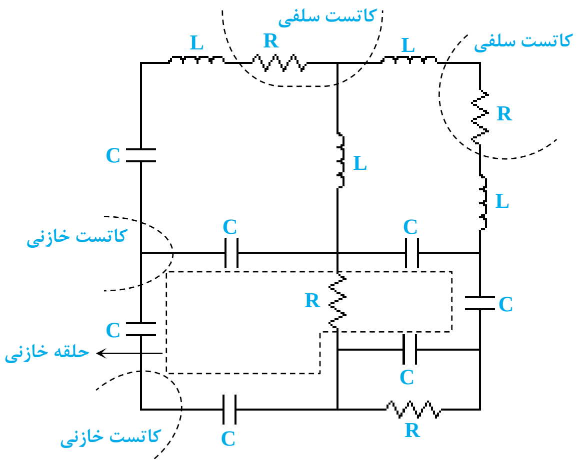
۱) ۱۱ و ۷

۲) ۱۱ و ۱۰

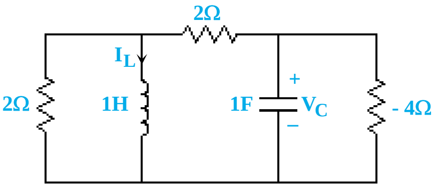
۳) ۸ و ۶

۴) ۸ و ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مدار دارای ۱۱ سلف و خازن است. به علت وجود دو کاتست سلفی و یک حلقه خازنی از این تعداد ۳ واحد کم می‌شود. لذا مدار دارای ۸ فرکانس طبیعی بوده و از مرتبه ۸ می‌باشد. با توجه به وجود دو کاتست خازنی، مدار دارای دو فرکانس طبیعی صفر است؛ بنابراین مدار دارای ۶ فرکانس طبیعی غیرصفر و دو فرکانس طبیعی صفر است.



مثال ۴۴: مداری مطابق شکل مقابل دارای شرایط اولیه $V_C(\circ)=۱v$ و $I_L(\circ)=۱A$ می‌باشد. کدامیک از پاسخ‌های زیر صحیح است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۱)



۱) مدار میرای شدید (Over damped) است.

۲) مدار میرای بحرانی (Cirtically damped) است.

۳) مدار میرای ضعیف (Under damped) است.

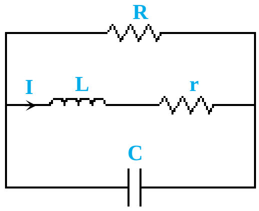
۴) مدار بدون اتلاف (Loss less) است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مدار فوق شامل دو گره می‌باشد و با تشکیل ماتریس ادمیتانس و با بدست آوردن دترمینان [y]، معادله مشخصه مدار حاصل می‌شود. حال داریم:

$$y=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}+S-\frac{۱}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow \det[y]=\begin{vmatrix}\frac{۱}{S}+۱ & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & S+\frac{۱}{۴}\end{vmatrix}=\frac{(۲S+۱)^۲}{۴S}=\circ \Rightarrow (۲S+۱)^۲=\circ \Rightarrow \mathbf{S_۱,S_۲=-\frac{۱}{۲}}$$

ریشه‌های معادله مشخصه، فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند و با صفر قرار دادن det[y] بدست می‌آیند. با توجه به برابری دو ریشه، مدار در حالت میرایی بحرانی می‌باشد.

مثال ۴۵: در مدار شکل مقابل وقتی مدار به یک نوسان‌ساز تبدیل می‌شود، کدام گزینه صحیح است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)



۱) $R=\frac{-۱}{\sqrt{LC}}$
۲) $R=\frac{-L}{rC}$
۳) $R=-\frac{rC}{L}$
۴) $R=-r$

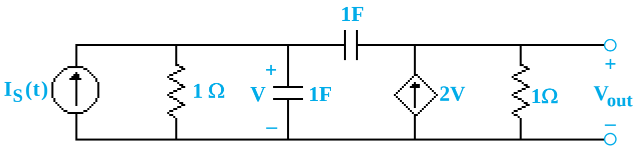
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مدار فوق شامل دو حلقه بوده و ماتریس امپدانس آن به صورت زیر می‌باشد:

$$Z=\begin{bmatrix}R+r+LS & -LS-r\\ -LS-r & LS+r+\frac{۱}{SC}\end{bmatrix}\Rightarrow \det[Z]=\circ \Rightarrow RLCS^۲+(L+RrC)S+R+r=\circ$$

جهت نوسان‌ساز بودن مدار، باید مدار در حالت بی‌اتلاف باشد یا به عبارتی ریشه‌های معادله مشخصه روی محور $j\omega$ باشد؛ لذا باید ضریب S در معادله صفر شود. بنابراین داریم:

$$L+RrC=\circ \Rightarrow \mathbf{R=\frac{-L}{rC}}$$

مثال ۴۶: اعمال کدام ورودی به مدار شکل زیر، فقط فرکانس‌های طبیعی مدار را در خروجی ظاهر می‌کند؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۵)



۱) $I_S(t)=e^{-۱/۵}u(t)$
۲) $I_S(t)=e^{-\circ/۵t}u(t)$
۳) $I_S(t)=e^{-t}u(t)$
۴) $I_S(t)=e^{-۲t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در صورتی که بخواهیم فقط فرکانس‌های طبیعی در خروجی ظاهر شود، باید تابع انتقال مدار صفری برابر قطب تبدیل لاپلاس موج ورودی داشته باشد، که در این صورت حذف صفر و قطب فوق در تبدیل لاپلاس موج خروجی مدار، باعث عدم دیده شدن فرکانس موج ورودی در خروجی سیستم خواهد شد. حال ابتدا تابع انتقال $H(S)=\frac{V_o(S)}{I(S)}$ محاسبه می‌شود. با نوشتن KCL در گره سمت چپ مدار داریم:

$$\frac{V}{\frac{۱}{S}}+\frac{V-V_o}{\frac{۱}{S}}+\frac{V}{۱}=I_S(S) \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره سمت راست داریم:

$$\frac{V_o}{۱}+\frac{V_o-V}{\frac{۱}{S}}=۲V \qquad (۲)$$

با ساده‌سازی روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}SV+S(V-V_o)+V=I_S(S)\\ V_o+S(V_o-V)-۲V=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V(۲S+۱)-SV_o=I_S(S)\\ V(-۲-S)+V_o(۱+S)=۰\end{cases}$$

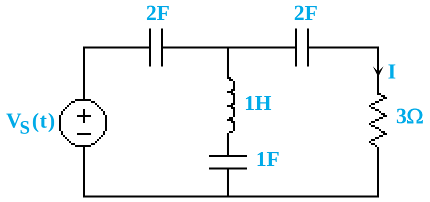
با حل دستگاه بالا داریم:

$$V_o(S)=\frac{S+۲}{S^۲+S+۱}.I(S)\ \Rightarrow\ H(S)=\frac{V_o(S)}{I(S)}=\frac{S+۲}{S^۲+S+۱}$$

با دقت در تابع $H(S)$ دیده می‌شود که تابع $H(S)$ یک صفر در $S=-۲$ دارد. لذا اگر تابع ورودی دارای یک قطب در $S=-۲$ باشد، صفر و قطب مذکور با هم ساده شده و اثر ورودی در خروجی حذف خواهد شد. لذا داریم: $\mathbf{I_S(t)=e^{-۲t}u(t)}$

مثال ۴۷: **در تابع شبکه $H(S)=\frac{I(S)}{V_S(S)}$ مدار شکل مقابل، تعداد قطب‌های تابع شبکه .... ($I(S)$ و $V_S(S)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس $I(t)$ و $V_S(t)$ می‌باشند.)**

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۶)



۱) ۳ است که یکی از آنها صفر می‌باشد.
۲) ۴ است که هیچکدام آنها صفر نمی‌باشد.
۳) ۳ است که هیچکدام آنها صفر نمی‌باشد.
۴) ۴ است که یکی از آنها صفر می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با دقت در مدار می‌بینیم که مدار دارای ۴ المان ذخیره‌کننده انرژی است و لذا تعداد فرکانس‌های طبیعی برابر ۴ است. با توجه به وجود یک کاتست خازنی یکی از آنها صفر است و با توجه به اینکه در فرکانس صفر خازن مدار باز است، لذا این فرکانس صفر در I ظاهر نمی‌شود و مدار دارای سه فرکانس طبیعی غیر صفر است. در واقع $S=۰$ باید صفر تابع شبکه باشد چون در این فرکانس جریان I صفر است، و این یعنی $S=۰$ دیگر نمی‌تواند قطب تابع شبکه $H(S)$ باشد.

مثال ۴۸: **کدامیک از عبارات زیر در مورد یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان صحیح نیست؟**

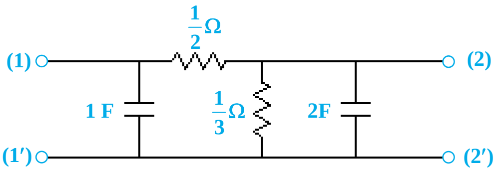
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۶)

۱) تعداد فرکانس‌های طبیعی هر متغیر شبکه با مرتبه معادله دیفرانسیل مینیمال برای آن متغیر شبکه برابر است.
۲) اگر یک متغیر شبکه دارای فرکانس طبیعی $\pm j\omega_۱$ باشد، به ازای ورودی $(\cos\omega_۱ t)u(t)$ ، پاسخ حالت دائمی سینوسی برای این متغیر وجود ندارد.
۳) هر قطب یک تابع شبکه ، حتماً یک فرکانس طبیعی متغیر خروجی آن تابع شبکه است.
۴) پاسخ گذرای هر متغیر شبکه فقط به فرکانس‌های طبیعی آن متغیر و شرایط اولیه شبکه بستگی داشته و مستقل از ورودی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» پاسخ گذرای یک شبکه به فرکانس‌های طبیعی آن و شرایط اولیه و قطب‌های تابع موج ورودی بستگی دارد. بنابراین گزینه ۴ غلط است. گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ برای یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان برقرار است.

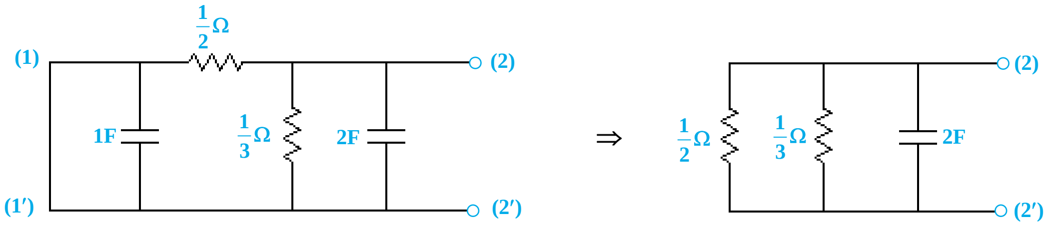
مثال ۴۹: **فرکانس طبیعی جریان اتصال کوتاه در قطب ۱ و ′۱ دوقطبی شکل مقابل کدام است؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



۱) ۰/۴−
۲) ۱−
۳) ۱/۵−
۴) ۲/۵−

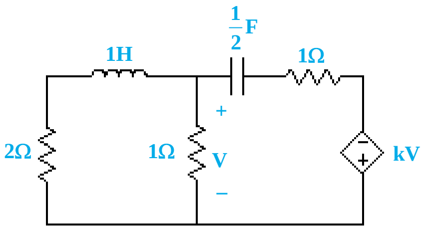
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» جهت محاسبه فرکانس طبیعی جریان اتصال کوتاه، پایانه‌های (۱) و(′۱) را اتصال کوتاه می‌کنیم و مدار زیر بدست می‌آید.



حال مدار به صورت یک مدار RC موازی با فرکانس طبیعی $S=\frac{-۱}{RC}$ خواهد بود.

$$R_{eq}=\frac{۱}{۳}\|\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۵}\Omega\quad,\quad S=\frac{-۱}{\frac{۱}{۵}\times۲}=-۲/۵$$

مثال۵۰: به ازاء چه مقدار k مدار شکل مقابل نوسان‌ساز می‌شود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)



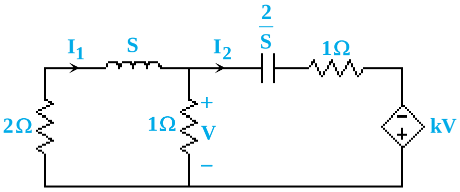
۱) ‎-۳/۵

۲) ‎-۲

۳) ۳/۵

۴) این سیستم به ازای هیچ مقدار k نمی‌تواند نوسانی باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای نوسان‌ساز بودن مدار باید ریشه‌های معادله مشخصه روی محور jω قرار گیرند. حال برای بدست آوردن معادلـه مشخصـه از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس امپدانس استفاده می‌کنیم. با نوشتن KVL دو حلقه مدار داریم:



$$I_۱(۲+S)+I_۱-I_۲=۰ \qquad (۱)$$

$$V=۱\times(I_۱-I_۲) \qquad (۲)$$

$$I_۲(\frac{۲}{S}+۱)-kV+I_۲-I_۱=۰ \qquad (۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۳) و تشکیل دستگاه با رابطه (۱) داریم:

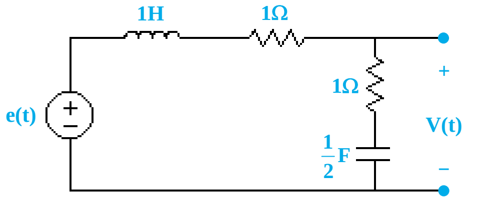
$$\begin{cases} I_۱(۳+S)-I_۲=۰ \\ I_۱(-k-۱)+I_۲(\frac{۲}{S}+۲+k)=۰ \end{cases} \Rightarrow Z=\begin{bmatrix} ۳+S & -۱ \\ -k-۱ & \frac{۲}{S}+۲+k \end{bmatrix}$$

$$\det[Z]=۰ \Rightarrow (۳+S)(\frac{۲}{S}+۲+k)-(k+۱)=۰ \Rightarrow (۲+k)S^۲+(۲k+۷)S+۶=۰$$

$$۲k+۷=۰ \Rightarrow \mathbf{k=-۳/۵} \Rightarrow \text{معادله‌ی مشخصه}: -۱/۵S^۲+۶=۰$$

$\Rightarrow S^۲=\frac{۶}{۱/۵}=۴ \Rightarrow S=\pm۲ \Rightarrow$ مقادیر ویژه روی محور jω نیستند؛ لذا مدار نوسان‌ساز نیست.

مثال۵۱: صفرها و قطب‌های تابع انتقال $\frac{V(S)}{E(S)}$ در مدار زیر برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)



۱) قطب $\begin{cases} S_۱\ ,\ S_۲=۱\pm j \\ S=-۲ \end{cases}$ صفر

۲) قطب $\begin{cases} S_۱\ ,\ S_۲=-۱\pm j \\ S=-۲ \end{cases}$ صفر

۳) قطب $\begin{cases} S=۱+j \\ S=-۲ \end{cases}$ صفر

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با اعمال قاعده تقسیم ولتاژ در مدار داریم:

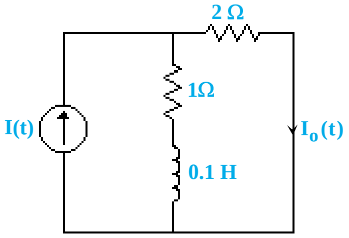
$$V(S)=E(S)\times\frac{۱+\frac{۲}{S}}{۱+\frac{۲}{S}+۱+S} \Rightarrow \frac{V(S)}{E(S)}=\frac{S+۲}{S+۲+S+S^۲} \Rightarrow \frac{V(S)}{E(S)}=\frac{S+۲}{S^۲+۲S+۲}$$

حال ریشه‌های صورت، صفرها و ریشه‌های مخرج، قطب‌ها را تشکیل خواهد داد.

$$\Rightarrow S=-۲\ (\text{صفر})$$

$$\Rightarrow S^۲+۲S+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{S_۱=-۱+j} \\ \mathbf{S_۲=-۱-j} \end{cases}$$

مثال۵۲: در مدار زیر قطب‌ها و صفرهای تابع $\frac{I_0(S)}{I(S)}$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)



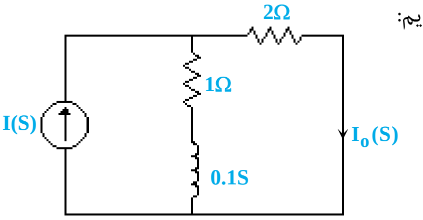
۱) قطب $\begin{cases} S=-۳۰ \\ S=-۱۰ \end{cases}$ صفر

۲) قطب $\begin{cases} S=-۳۰ \\ S=۱۰ \end{cases}$ صفر

۳) قطب $\begin{cases} S=۳۰ \\ S=۱۰ \end{cases}$ صفر

۴) هیچکدام

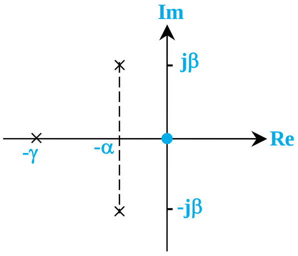
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با انتقال مدار از حوزه زمان به حوزه فرکانس و با نوشتن قانون تقسیم جریان داریم:

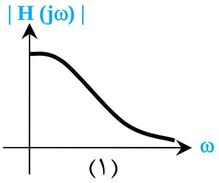


$$I_o(S)=I(S)\times\frac{۱+۰/۱S}{۱+۰/۱S+۲}\Rightarrow\frac{I_o(S)}{I(S)}=\frac{۱۰+S}{S+۳۰}$$

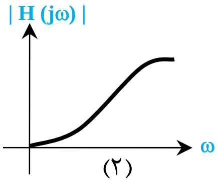
$$\Rightarrow\begin{cases}S=-۱۰ & (\text{صفر})\\ S=-۳۰ & (\text{قطب})\end{cases}$$

مثال ۵۳: **دیاگرام صفر و قطب مربوط به تابع شبکه‌ای در شکل زیر داده شده است. منحنی اندازه تابع شبکه کدام است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

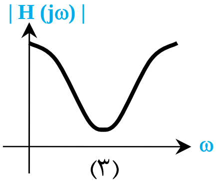




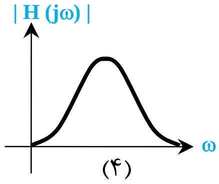
(۱)



(۲)



(۳)



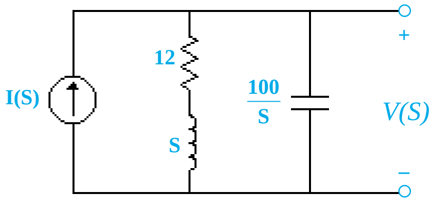
(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه تعداد صفرها از تعداد قطب‌ها کمتر است، لذا اگر $\omega=\infty$ باشد، دامنه تابع شبکه صفر است و با توجه به وجود صفر در مبدأ، در نقطه $\omega=۰$ اندازه تابع صفر خواهد بود. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

لازم به ذکر است که تابع شبکه به صورت مقابل است:

$$H(S)=A\frac{S}{[(S+\alpha)^۲+\beta^۲](S+۲)}$$

مثال ۵۴: **در مدار زیر تعداد قطب‌ها و صفرهای امپدانس خروجی $Z_o(S)$ برابر با کدام گزینه است؟** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



۱) قطب‌ها $S_{۱,۲}=-۶\pm j۸$
صفرها $\begin{cases}S=-۱۲\\ \text{و یک صفر در بینهایت}\end{cases}$

۲) قطب‌ها $S_{۱,۲}=۶\pm j۸$
صفرها $\begin{cases}S=-۱۲\\ \text{و یک صفر در بینهایت}\end{cases}$

۳) قطب‌ها $S_{۱,۲}=-۶\pm j۸$
صفرها $\begin{cases}S=۱۲\\ \text{و یک صفر در بینهایت}\end{cases}$

۴) قطب‌ها $S_{۱,۲}=-۶\pm j۸$
صفرها $\begin{cases}S=۶\\ \text{و یک صفر در بینهایت}\end{cases}$

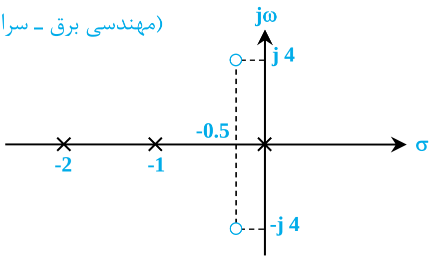
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با بی‌اثر کردن منبع جریان داریم:

$$Z_o(S)=\frac{۱۰۰}{S}\|(۱۲+S)=\frac{۱۰۰(S+۱۲)}{S^۲+۱۲S+۱۰۰}$$

قطب‌ها $\begin{cases}S=-۶+j۸\\ S=-۶-j۸\end{cases}$ و صفرها $\begin{cases}S=\infty\ \text{یک صفر در بینهایت}\\ S=-۱۲\end{cases}$

دقت کنید که در فرکانس ∞ مقدار V_o به دلیل اتصال کوتاه شدن خازن، صفر خواهد بود و لذا در $s=\infty$ یک صفر وجود دارد.

مثال ۵۵: **دیاگرام صفرـ قطب تابع شبکه‌ای به صورت $H(S)=\frac{\Pi_{i=۱}^{m}(S+Z_i)}{\Pi_{j=۱}^{n}(S+P_j)}$ در شکل زیر داده شده است. کدامیک از عبارات زیر در مورد دامنه و فاز تابع شبکه صحیح است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



۱) در $\omega=\infty$ دامنه صفر و فاز آن تابع نیز صفر است.
۲) در $\omega=۰$ دامنه نامحدود و فاز آن صفر است.
۳) در $\omega=۰$ دامنه ثابت و فاز آن صفر است.
۴) در $\omega=\infty$ دامنه صفر و فاز آن -۹۰° است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» وجود یک قطب در مبدأ مختصات باعث ۹۰- درجه شدن فاز تابع در $\omega = ۰$ و $\omega = \infty$ می‌شود. همچنین چون تعداد قطب‌ها از تعداد صفرها بیشتر است، پس در $\omega = \infty$ دامنه تابع شبکه صفر می‌شود. تابع شبکه به صورت روبرو است:

$$H(S) = \frac{k[(S+۰/۵)^۲+۱۶]}{S(S+۱)(S+۲)}$$

مثال۵۶: ماتریس ادمیتانس گره یک شبکه LTI به صورت زیر داده شده است. اگر گره‌های ۲ و ۳ به یکدیگر اتصال کوتاه شوند، فرکانس‌های طبیعی سیستم جدید چقدر خواهند بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

$$Y_n = \begin{bmatrix} S+۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & S+۳ & -۱ \\ ۰ & -۱ & S+۴ \end{bmatrix}$$

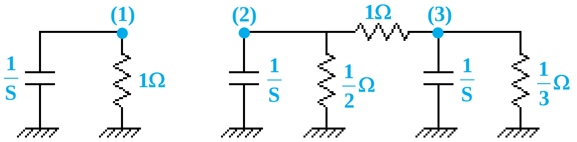
۱) ۲/۵- و ۱-

۲) $\frac{-۷-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{-۷+\sqrt{۵}}{۲}$

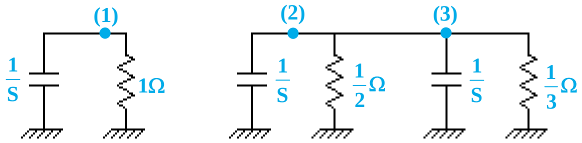
۳) ۳- و ۱-

۴) ۳- و $\frac{-۷+\sqrt{۵}}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا با استفاده از ماتریس Y_n مدار را ترسیم می‌کنیم:



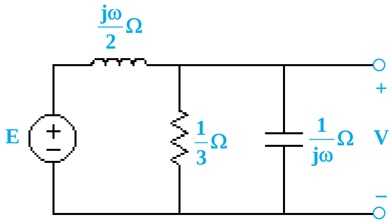
در صورت اتصال گره‌های ۲ و ۳، مقاومت ۱ اهم بین آنها حذف شده و شبکه به صورت زیر ساده می‌شود.



برای مدار بالا ماتریس Y_n را تشکیل می‌دهیم:

$$\det(Y_n) = ۰ \Rightarrow (S+۱)(۲S+۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = -۱ \\ S = -۲/۵ \end{cases} \qquad Y_n = \begin{bmatrix} S+۱ & ۰ \\ ۰ & ۲S+۵ \end{bmatrix}$$

مثال۵۷: فرکانسی که سبب صفر شدن قسمت حقیقی تابع انتقال $H(j\omega) = \frac{V}{E}$ مدار زیر خواهد شد، برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)



۱) $f = \frac{\sqrt{۲}}{\pi}(Hz)$

۲) $f = \frac{\sqrt{۲}}{۲\pi}(Hz)$

۳) $f = \frac{۲}{\sqrt{۲}\pi}(Hz)$

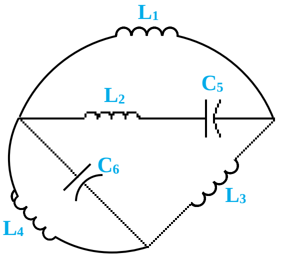
۴) $f = \frac{۲}{\pi}(Hz)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا تابع انتقال را با اعمال قانون تقسیم ولتاژ بدست می‌آوریم.

$$V(j\omega) = E(j\omega) \times \frac{\frac{۱}{j\omega} \| \frac{۱}{۳}}{\frac{j\omega}{۲} + \frac{۱}{j\omega} \| \frac{۱}{۳}} = \frac{۲(۲-\omega^۲) - j۶\omega}{(۲-\omega^۲)^۲ + ۹\omega^۲} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{۲(۲-\omega^۲)}{(۲-\omega^۲)^۲+۹\omega^۲} - j\frac{۶\omega}{(۲-\omega^۲)^۲+۹\omega^۲}$$

$$\mathrm{Re}[H(j\omega)] = ۰ \Rightarrow ۲(۲-\omega^۲) = ۰ \Rightarrow \omega = \sqrt{۲}\left(\frac{rad}{sec}\right) \Rightarrow \mathbf{f = \frac{\sqrt{۲}}{۲\pi} Hz}$$

مثال۵۸: مدار شکل زیر را در نظر بگیرید. کدام عبارت درست است؟ (مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۲)



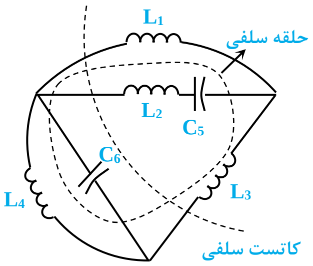
۱) شبکه دارای ۶ فرکانس طبیعی است و $S = ۰$ فرکانس طبیعی شبکه نیست.

۲) شبکه دارای ۶ فرکانس طبیعی است و $S = ۰$ جزو فرکانس‌های طبیعی آن می‌باشد.

۳) شبکه دارای ۴ فرکانس طبیعی است و $S = ۰$ فرکانس طبیعی شبکه نیست.

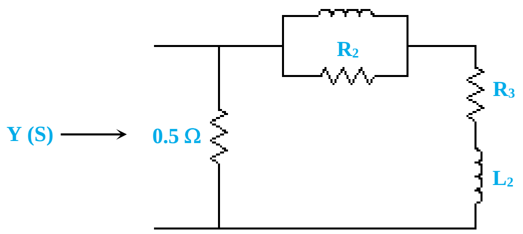
۴) شبکه دارای ۵ فرکانس طبیعی است و $S = ۰$ جزو فرکانس‌های طبیعی آن می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مدار دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی (سلف و خازن) است، ولی به علت وجود یک کاتست سلفی یکی از این تعداد کم می‌شود و مدار دارای ۵ فرکانس طبیعی بوده و از مرتبه ۵ است. همچنین با توجه به وجود یک حلقه سلفی، مدار یک فرکانس طبیعی صفر نیز دارد.



مثال۵۹: در مدار شکل زیر، ادمیتانس ورودی شامل دو صفر $S=-۲$ و $S=-۲/۵$ و یک قطب مضاعف در $S=-۱$ است. مقاومت $R_۳$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $\frac{۱}{۴}\Omega$

۲) $\frac{۱}{۸}\Omega$

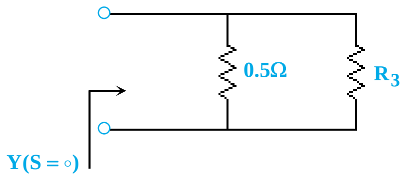
۳) ۱Ω

۴) ۲Ω

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اطلاعات مسأله در مورد صفرها و قطب‌های شبکه داریم:

$$Y(S)=\frac{A(S+۲)(S+۲/۵)}{(S+۱)^۲}$$

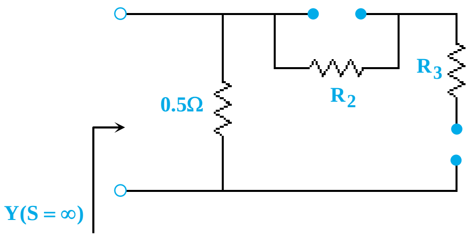
حال با تست $Y(S)$ در فرکانس‌های $S=۰$ و $S=\infty$ حل مسأله را ادامه می‌دهیم.



$$Y(S=۰)=(R_۳\|۰/۵)^{-۱}$$

$$Y(S=۰)=\frac{A(۰+۲)(۰+۲/۵)}{(۰+۱)^۲}\Rightarrow (R_۳\|۰/۵)^{-۱}=۵A \qquad (۱)$$

حال مدار در $S=\infty$ تحلیل می‌شود.



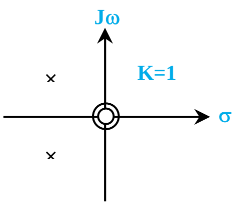
$$Y(S=\infty)=(۰/۵)^{-۱} \quad , \quad Y(S=\infty)=\lim_{S\to\infty}\frac{A(S+۲)(S+۲/۵)}{(S+۱)^۲}=A \Rightarrow A=۲ \qquad (۲)$$

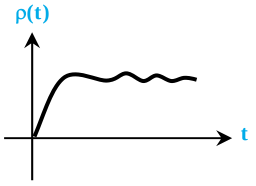
حال از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$A=۲ \;,\; (R_۳\|۰/۵)^{-۱}=۵\times A \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۰/۵R_۳}{۰/۵+R_۳}}=۵\times۲ \Rightarrow R_۳=\frac{۱}{۸}\Omega$$

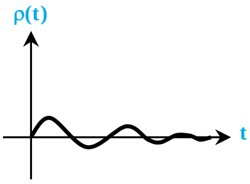
مثال۶۰: اگر نمودار قطب و صفر شکل مقابل، مربوط به تابع شبکه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، پاسخ پله این مدار در حوزه زمان برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

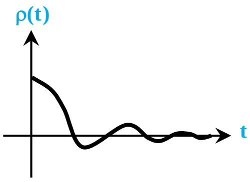




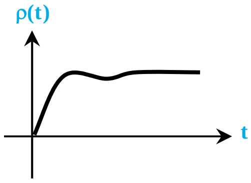
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نمودار صفر و قطب، پاسخ ضربه یا تابع شبکه به صورت زیر است:

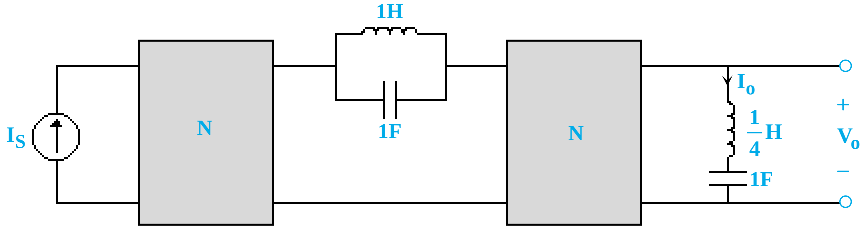
$$H(S)=\frac{S^۲}{S^۲+۲\alpha S+\omega_۰^۲} \Rightarrow \text{پاسخ پله}=L(u(t))\times H(S)=\frac{S}{S^۲+۲\alpha S+\omega_۰^۲}$$

حال با استفاده از پاسخ پله و قضیه مقدار اولیه مقدار پاسخ پله را در $t=۰$ بدست می‌آوریم:

$$\text{پاسخ پله}\,(t=۰)=\lim_{S\to\infty}S\frac{S}{S^۲+۲\alpha S+\omega_۰^۲}=۱$$

با توجه به گزینه‌ها دیده می‌شود که فقط گزینه (۳) در زمان $t=۰$ مخالف صفر است.

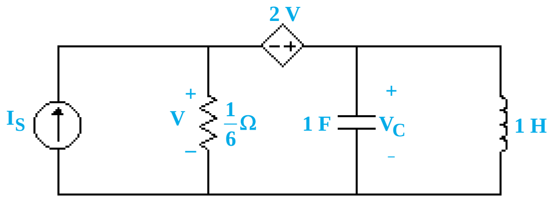
مثال۶۱: شبکه N از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. اگر $I_S(t)=\cos t+\cos ۲t$ باشد، آنگاه در حالت دائمی کدامیک از متغیرهای $V_o(t)$ و $I_o(t)$ برابر صفر می‌باشد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)



۱) فقط $I_o(t)$
۲) فقط $V_o(t)$
۳) هم $V_o(t)$ و هم $I_o(t)$
۴) نه $I_o(t)$ و نه $V_o(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به وجود یک مدار LC موازی بین دو شبکه N، مقدار $\omega=۱$ که همان فرکانس رزونانس LC موازی است، در خروجی ظاهر نمی‌شود؛ لذا خروجی در اثر $\cos t$ صفر است. از طرفی مدار LC سری در طرف راست دارای فرکانس رزونانس $\omega=۲$ است؛ یعنی به ازای $\omega=۲$ این شاخه اتصال کوتاه می‌شود. پس V_o در اثر $\cos ۲t$ صفر است، اما I_o ممکن است صفر نشود.

مثال۶۲: فرکانس‌های طبیعی مدار نشان داده شده کدام‌اند؟ (مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۴)



۱) ۱- و ۱-
۲) ۲- و ۱-
۳) $\pm\sqrt{۲}$ و ۱-
۴) $\pm j\sqrt{۳}$ و ۱-

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن KCL در ابرگره بالای مدار داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{V}{\frac{۱}{۶}}+\dfrac{V_C}{\frac{۱}{S}}+\dfrac{V_C}{S}=I_S\\ ۲V=V_C-V\Rightarrow V=\dfrac{۱}{۳}V_C\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\frac{۱}{۳}V_C}{\frac{۱}{۶}}+\dfrac{V_C}{\frac{۱}{S}}+\dfrac{V_C}{S}=I_S\Rightarrow V_C(۲+S+\dfrac{۱}{S})=I_S$$

$$\Rightarrow\frac{V_C}{I_S}=\frac{۱}{۲+S+\frac{۱}{S}}=\frac{S}{S^۲+۲S+۱}=\frac{S}{(S+۱)^۲}\Rightarrow(S+۱)^۲=۰\Rightarrow\begin{cases}S_۱=-۱\\S_۲=-۱\end{cases}$$

مثال۶۳: فرکانس‌های طبیعی کل یک مدار عبارت است از فرکانس‌های طبیعی: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) جریان‌های مستقل مدار
۲) ولتاژهای مستقل مدار
۳) ولتاژها و جریان‌های مستقل مدار
۴) موارد ۱ و ۲ صحیح است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرکانس‌های طبیعی کل مدار، همان فرکانس‌های طبیعی ولتاژها و جریان‌های مستقل مدار هستند.

مثال۶۴: اگر پاسخ ضربه واحد یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t)=(۲e^{-۲t}-e^{-t})u(t)$ باشد و معادلات حالت این مدار به صورت $\dot{X}=AX+BW$ باشد، ماتریس A به کدامیک از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

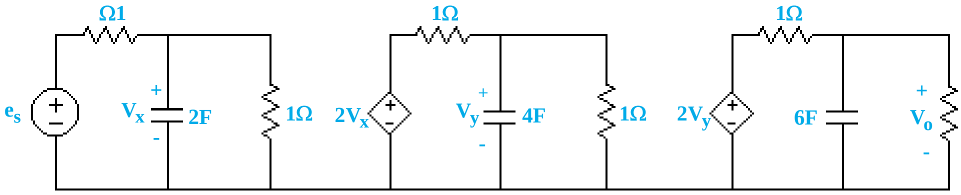
۱) $\begin{pmatrix}-۲&۰\\۰&-۳\end{pmatrix}$
۲) $\begin{pmatrix}۰&۱\\-۲&-۳\end{pmatrix}$
۳) $\begin{pmatrix}-۱&۰\\۰&-۳\end{pmatrix}$
۴) $\begin{pmatrix}۰&۱\\-۳&-۲\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل پاسخ ضربه، می‌توان $S_۱=-۱$ و $S_۲=-۲$ را به عنوان فرکانس‌های طبیعی مدار معرفی کرد. حال اگر ماتریس A را داشته باشیم، رابطه $\det[SI-A]=۰$ فرکانس‌های طبیعی را به ما خواهد داد. می‌توان با تست گزینه‌ها در رابطه مذکور به جواب رسید. با تست گزینه‌ها می‌بینیم که فقط گزینه (۲) به ترتیب زیر صادق است:

$$A=\begin{bmatrix}۰&۱\\-۲&-۳\end{bmatrix}\Rightarrow[SI-A]=\begin{bmatrix}S&۰\\۰&S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&۱\\-۲&-۳\end{bmatrix}\Rightarrow[SI-A]=\begin{bmatrix}S&-۱\\۲&S+۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\det[SI-A]=\det\begin{bmatrix}S&-۱\\۲&S+۳\end{bmatrix}=۰\Rightarrow S(S+۳)+۲=۰\Rightarrow(S+۲)(S+۱)=۰\Rightarrow S=-۱\ ,\ S=-۲$$

مثال ۶۴: **فرکانس‌های طبیعی شکل زیر کدام است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)



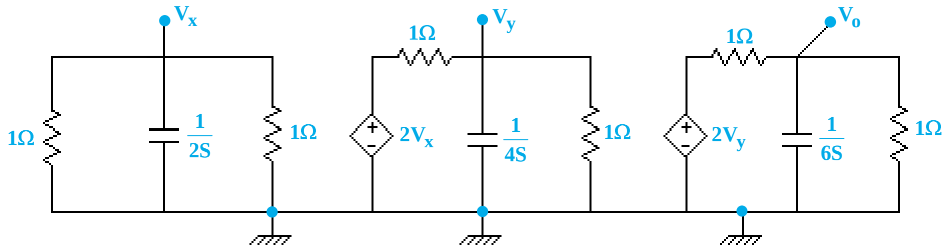
۱) $-۳,-۲,-۱$

۲) $-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۲},-۱$

۳) $-۳,-\frac{۱}{۲},-۱$

۴) -۱ مکرر مرتبه سوم

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل ساده‌تر، باید مدار را در حوزه فرکانس تحلیل کنیم. همچنین برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی لازم است که منابع ولتاژ مستقل اتصال کوتاه شده و ماتریس ادمیتانس شبکه بدست آورده شود.



با نوشتن KCL در گره‌های بالا داریم.

$$KCL[V_x \text{ گره با ولتاژ }]: \quad V_x + ۲SV_x + V_x = ۰$$

$$KCL[V_y \text{ گره با ولتاژ }]: \quad V_y + ۴SV_y + \frac{V_y - ۲V_x}{۱} = ۰$$

$$KCL[V_o \text{ گره با ولتاژ }]: \quad \frac{V_o}{۱} + ۶SV_o + \frac{V_o - ۲V_y}{۱} = ۰$$

با نوشتن روابط بالا به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{cases} (۲S+۲)V_X + ۰V_o + ۰V_y = ۰ \\ -۲V_X + ۰V_o + (۴S+۲)Vy = ۰ \\ ۰V_X + (۶S+۲)V_o + (-۲)V_y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \quad Y = \begin{bmatrix} ۲S+۲ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۴S+۲ \\ ۰ & ۶S+۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

حال $\det[Y]$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا فرکانس‌های طبیعی بدست آید.

$$\det[y] = ۰ \Rightarrow ۶S^۳ + ۱۱S^۲ + ۶S + ۱ = ۰ \Rightarrow (S+\frac{۱}{۳})(S+\frac{۱}{۲})(S+۱) = ۰ \Rightarrow S_۱ = -\frac{۱}{۳} \text{ , } S_۲ = -\frac{۱}{۲} \text{ , } S_۳ = -۱$$

مثال ۶۵: **در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان تابع تبدیل $H(S) = \frac{V_o}{I_S}$، قطب‌های $S = \pm j۲$ را دارد. تمام فرکانس‌های طبیعی مدار به‌جز $\pm j۲$ در نیمه چپ صفحه مختلط است. کدام بیان در این مدار درست است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) مدار به ازای هیچ ورودی، پاسخ حالت دائمی سینوسی ندارد.

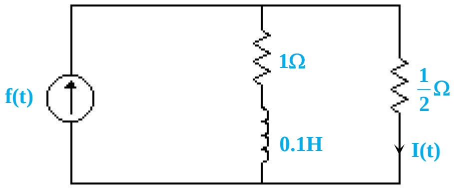
۲) مدار به ازای I_S با فرکانس $\omega = ۲$ پاسخ حالت دائمی سینوسی دارد.

۳) مدار به ازای $I_S = \cos t$ به شرط $H(\pm j) = ۰$، پاسخ حالت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega = ۲$ دارد.

۴) مدار به ازای $I_S = \cos t$ به شرط $H(\pm j) = ۰$، پاسخ حالت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega = ۱$ دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در صورتی که فرکانس موج ورودی مخالف $\pm j۲$ باشد، پاسخ حالت دائمی ایجاد خواهد شد؛ لذا گزینه (۱) غلط است. در صورتی که فرکانس موج ورودی برابر با فرکانس قطب‌های تابع شبکه مدار باشد، مدار به حالت ناپایداری خواهد رسید. بنابراین گزینه (۲) غلط است و در این حالت پاسخ حالت دائمی سینوسی وجود نخواهد داشت. در صورتی که $H(\pm j) = ۰$ باشد، بدین معنا خواهد بود که $\pm j$ جزء صفرهای تابع شبکه هستند. حال در صورتی که ورودی مدار هم‌فرکانس با صفرهای تابع شبکه باشد، موج ورودی در خروجی ظاهر نخواهد شد و پاسخ حالت دائمی سینوسی با $\omega = ۲$ در خروجی ظاهر خواهد شد و $\omega = ۱$ در خروجی وجود نخواهد داشت. بنابراین گزینه (۴) غلط و گزینه (۳) صحیح است.

مثال ۶۶: **در مدار زیر قطب‌ها و صفرهای تابع $H(S)=\frac{I(S)}{F(S)}$ کدام است؟** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۵)



۱) $\begin{cases} S=-۱۰ & \text{(صفر)} \\ S=-۱۵ & \text{(قطب)} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} S=-۵ & \text{(صفر)} \\ S=-۱۰ & \text{(قطب)} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} S=-۱۰ & \text{(صفر)} \\ S=-۵ & \text{(قطب)} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} S=-۱۵ & \text{(صفر)} \\ S=-۱۰ & \text{(قطب)} \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از قانون تقسیم جریان داریم:

$$I(S)=F(S)\times\frac{۱+۰/۱S}{\frac{۱}{۲}+۱+۰/۱S} \Rightarrow H(S)=\frac{I(S)}{F(S)}=\frac{۱۰+S}{۱۵+S} \Rightarrow \begin{cases} S=-۱۰ & \text{(صفر)} \\ S=-۱۵ & \text{(قطب)} \end{cases}$$

مثال ۶۷: **معادلات حالت یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e(t)$ داده شده است. پاسخ ضربه واحد $V_C(t)$ چگونه است؟ (V_C و I_L متغیرهای حالت مدار هستند.)** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $V_C(t)=(k_۱+k_۲t)e^{-\frac{t}{۲}}u(t)$

۲) $V_C(t)=ke^{-\frac{t}{۲}}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t+\theta)u(t)$

۳) $V_C(t)=(k_۱e^{-\frac{t}{۲}}+k_۲e^{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}t})u(t)$

۴) $V_C(t)=kt\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t+\theta)u(t)$

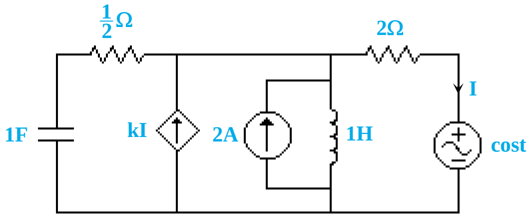
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از رابطه $\det[SI-A]=۰$ فرکانس‌های طبیعی مدار را بدست آورده و با توجه به آنها نوع پاسخ را مشخص می‌کنیم:

$$[SI-A]=\begin{bmatrix} S & ۰ \\ ۰ & S \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S & -۱ \\ ۱ & S+۱ \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} S & -۱ \\ ۱ & S+۱ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow S(S+۱)+۱=۰ \Rightarrow S^۲+S+۱=۰ \Rightarrow S_۱,S_۲=-\frac{۱}{۲}\pm j\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \text{(حالت زیر میرا)}$$

با توجه به گزینه‌ها دیده می‌شود که فرم زیر میرا فقط در گزینه «۲» دیده می‌شود و همان گزینه، پاسخ صحیح است.

مثال ۶۸: **در مدار شکل زیر با فرض $k=۲$، حالت دائمی جریان $I(t)$:** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)



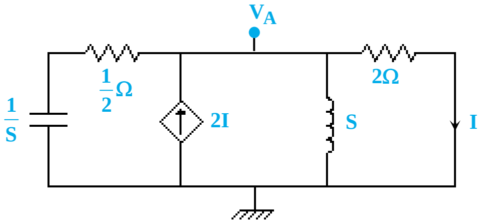
۱) فرکانس‌های $\omega=۱$ و $\omega=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ را دارد.

۲) فرکانس‌های $\omega=۱$ و $\omega=۲\sqrt{۳}$ را دارد.

۳) فرکانس‌های $\omega=۱$ و $\omega=۰$ و $\omega=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ را دارد.

۴) حالت دائمی ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا فرکانس‌های طبیعی مدار را بدست می‌آوریم. بنابراین منابع مستقل مدار را غیرفعال می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره بالایی مدار داریم:



$$\frac{V_A}{S}+\frac{V_A}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S}}+\frac{V_A}{۲}=۲I \quad و \quad I=\frac{V_A}{۲}$$

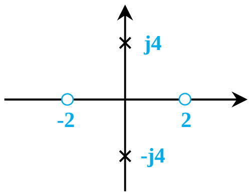
با ترکیب دو رابطه بالا داریم:

$$\Rightarrow \frac{V_A}{S}+\frac{V_A}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S}}+\frac{V_A}{۲}=۲(\frac{V_A}{۲}) \Rightarrow \frac{۱}{S}+\frac{۲S}{S+۲}-\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow \frac{۳S^۲+۴}{۲S(S+۲)}=۰ \Rightarrow ۳S^۲+۴=۰ \Rightarrow S=\pm j\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

جریان حالت دائمی مدار دارای فرکانس $\omega=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ به علت وجود فرکانس طبیعی و $\omega=۱$ به علت حضور منبع $\cos t$ خواهد بود.

مثال۶۹: محل صفرها و قطب‌های یک شبکه در شکل زیر نشان داده شده است. اگر بدانیم بهره DC این شبکه ۱- است، به ازاء کدام مقدار $a > 0$، ورودی به صورت $e^{-at}u(t)$، پاسخی به صورت $ke^{-at}u(t)$، ایجاد نخواهد کرد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) یافتن چنین مقدار a ممکن نیست.

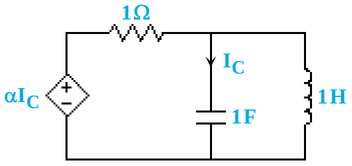
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دقت در نمودار صفرها و قطب‌ها دیده می‌شود که تابع شبکه دارای دو عدد قطب در $S = j۴$ و $S = -j۴$ و دو عدد صفر در $S = ۲$ و $S = -۲$ است. بنابراین تابع شبکه به صورت مقابل خواهد بود.

$$H(S) = k'\frac{(S+۲)(S-۲)}{(S+j۴)(S-j۴)}$$

برای اینکه در خروجی $ke^{-at}u(t)$ ظاهر نشود، باید $e^{-at}u(t)$ یا به عبارتی $\frac{۱}{S+a}$، توسط صفرهای تابع شبکه خنثی شود. لذا باید $a = ۲$ باشد تا عبارت $(S+۲)$ در صورت تابع شبکه، با ورودی $\frac{۱}{S+۲}$ ساده شود و $ke^{-at}u(t)$ در خروجی ظاهر نشود.

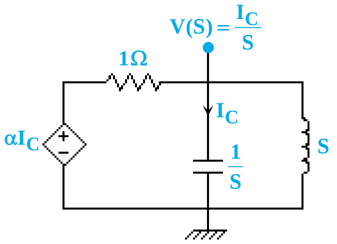
مثال۷۰: در مدار شکل زیر α را چنان تعیین کنید که مدار میرای بحرانی باشد.(یعنی فرکانس طبیعی مضاعف داشته باشد.)

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۸)



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



$$\frac{\frac{I_C}{S} - \alpha I_C}{۱} + I_C + \frac{\frac{I_C}{S}}{S} = ۰ \Rightarrow \frac{I_C}{S} - \alpha I_C + I_C + \frac{I_C}{S^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow SI_C - \alpha S^۲ I_C + S^۲ I_C + I_C = ۰ \Rightarrow I_C(S - \alpha S^۲ + S^۲ + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow (۱-\alpha)(S^۲) + S + ۱ = ۰ \Rightarrow S^۲ + \frac{۱}{۱-\alpha}S + \frac{۱}{۱-\alpha} = ۰$$

برای وجود حالت میرایی بحرانی باید ضریب میرایی مدار (α') با فرکانس طبیعی نامیرا یا $\omega_۰$ برابر شود.

$$\alpha' = \omega_۰ \quad و \quad \alpha' = \frac{۱}{۲(۱-\alpha)} \quad و \quad \omega_۰ = \sqrt{\frac{۱}{۱-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲(۱-\alpha)} = \sqrt{\frac{۱}{۱-\alpha}} \Rightarrow \frac{۱}{۴(۱-\alpha)^۲} = \frac{۱}{(۱-\alpha)} \Rightarrow \frac{۱}{۱-\alpha} = ۴ \Rightarrow ۱-\alpha = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \alpha = \frac{۳}{۴}$$

مثال۷۱: در یک مدار الکتریکی، ورودی و خروجی با رابطه $V_{in} = ۵e^{-۲t}$ و $V_o = ۳te^{-۲t} + ۲e^{-۳t}\sin ۶t$ داده شده‌اند. قطب‌های $H(S) = \frac{V_{out}(S)}{V_{in}(S)}$ چگونه هستند؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)

۱) یک قطب در $S = -۲$ و دو قطب در $S = \pm j۶$
۲) یک قطب در $S = ۲$ و یک قطب در $S = ۳$ و یک قطب در $S = ۰$
۳) یک قطب در $S = ۲$، یک قطب در $S = ۳$ و دو قطب در $S = \pm j۶$
۴) یک قطب در $S = -۲$ و دو قطب در $S = -۳ \pm j۶$

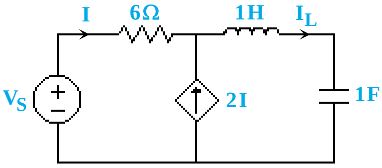
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با تبدیل لاپلاس برای توابع ورودی و خروجی داریم:

$$V_{in}(S) = \frac{۵}{S+۲} \quad و \quad V_o(S) = \frac{۳}{(S+۲)^۲} + \frac{۲\times۶}{(S+۳)^۲ + ۳۶}$$

$$\Rightarrow H(S) = \frac{V_o(S)}{V_{in}(S')} = \frac{\frac{۳}{(S+۲)^۲} + \frac{۱۲}{(S+۳)^۲ + ۳۶}}{\frac{۵}{S+۲}} \Rightarrow H(S) = \frac{۳(۵S^۲ + ۲۲S + ۶۱)}{۵(S+۲)((S+۳)^۲ + ۳۶)}$$

$$\Rightarrow ۵(S+۲)((S+۳)^۲ + ۳۶) = ۰ \Rightarrow S_۱ = -۲ \;,\; S_۲ = -۳ + j۶ \;,\; S_۳ = -۳ - j۶$$

مثال ۷۲: **فرکانس‌های طبیعی مدار نشان داده شده در شکل مقابل کدام‌اند؟** (مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر«گرایش معماری» ـ سراسری ۸۹)



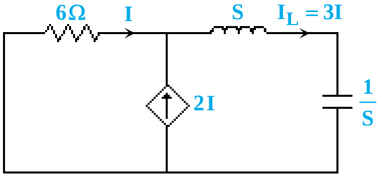
۱) $-۱\pm j\sqrt{۳}$

۲) $-۱, \pm\sqrt{۲}$

۳) -۲ و -۱

۴) -۱ و -۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار منبع ولتاژ V_S را اتصال کوتاه کرده و در حوزه فرکانس در مدار KVL می‌زنیم.

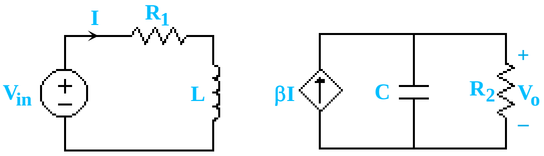


$$۶I + ۳IS + \frac{۱}{S}\cdot ۳I = ۰ \quad \Rightarrow \quad I(۶ + ۳S + \frac{۳}{S}) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad ۳S^۲ + ۶S + ۳ = ۰ \quad \Rightarrow \quad (S+۱)^۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad S_۱ = -۱ \quad , \quad S_۲ = -۱$$

مثال ۷۳: **در مدار شکل مقابل مقدار C را چگونه انتخاب کنیم تا پاسخ پله V_o میرای بحرانی درآید؟**

(مهندسی کامپیوتر«گرایش هوش مصنوعی» ـ سراسری ۸۹)



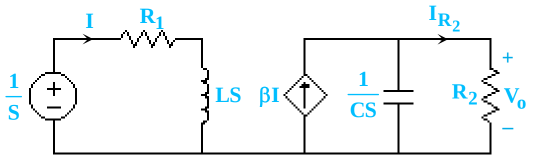
۱) $\frac{L}{\beta R_۱ R_۲}$

۲) $\frac{L}{R_۱ R_۲}$

۳) $\frac{R_۱ R_۲}{L}$

۴) $\frac{\beta L}{R_۱ R_۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس، ابتدا رابطه I را از حلقه سمت چپ محاسبه کرده و سپس مقدار V_o را محاسبه می‌کنیم.



$$I = \frac{\frac{۱}{S}}{R_۱ + LS} = \frac{۱}{LS^۲ + R_۱ S} \quad \text{و} \quad I_{R_۲} = \beta I.\frac{\frac{۱}{CS}}{R_۲ + \frac{۱}{CS}} \quad \Rightarrow \quad I_{R_۲} = \beta I.\frac{۱}{R_۲ CS + ۱} \quad \Rightarrow \quad I_{R_۲} = \beta.\frac{۱}{LS^۲ + R_۱ S}.\frac{۱}{R_۲ CS + ۱}$$

$$V_o = R_۲ . I_{R_۲} = \frac{\beta R_۲}{(LS^۲ + R_۱ S)(۱ + R_۲ CS)} \quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{\beta R_۲}{LS^۲ + R_۲ CLS^۳ + R_۱ S + R_۱ R_۲ CS^۲}$$

برای وجود حالت میرایی بحرانی شرط $\alpha = \omega_o$ را در مدار اعمال می‌کنیم.

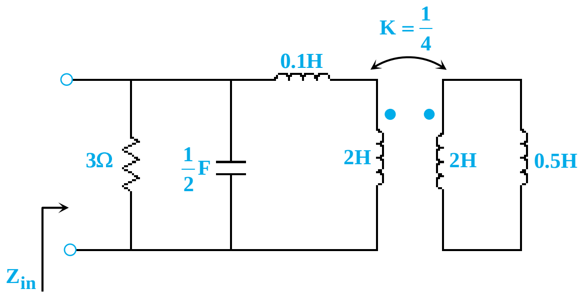
$$\Rightarrow \quad V_o = \frac{\beta R_۲}{S[R_۲ CLS^۲ + (L + R_۱ R_۲ C)S + R_۱]} \quad \Rightarrow \quad \frac{L + R_۱ R_۲ C}{۲LR_۲ C} = \sqrt{\frac{R_۱}{LR_۲ C}}$$

$$\frac{L^۲ + R_۱^۲ R_۲^۲ C^۲ + ۲LR_۱ R_۲ C}{۴L^۲ R_۲^۲ C^۲} = \frac{R_۱}{LR_۲ C} \quad \Rightarrow \quad L^۲ + R_۱^۲ R_۲^۲ C^۲ + ۲LR_۱ R_۲ C = ۴R_۱ R_۲ LC$$

$$C^۲ - \frac{۲R_۱ R_۲ LC}{R_۱^۲ R_۲^۲} + \frac{L^۲}{R_۱^۲ R_۲^۲} = ۰ \quad \Rightarrow \quad C^۲ - \frac{۲L}{R_۱ R_۲}C + \frac{L^۲}{R_۱^۲ R_۲^۲} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = \frac{L}{R_۱ R_۲}}$$

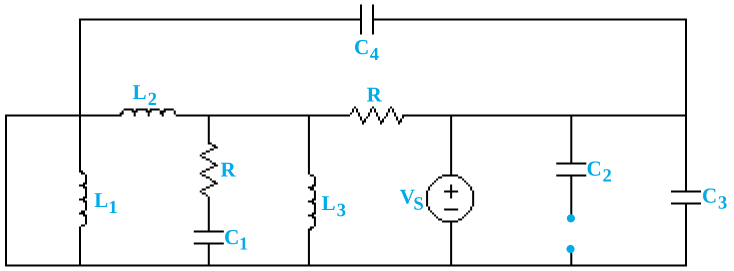
آزمون فصل نهم

۱ـ قطب‌ها و صفرهای تابع امپدانس مدل زیر کدام است؟



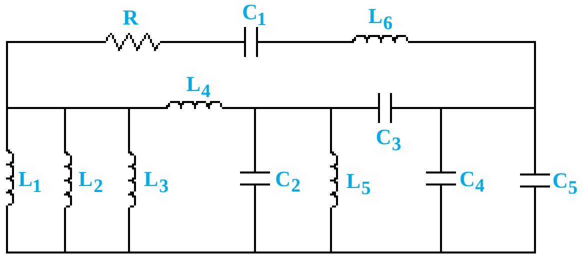
۱) یک صفر در S = ۰ و قطب مکرر در S = −۱
۲) یک صفر در بی‌نهایت و یک صفر در S = ۰ و قطب مکرر در S = −۱
۳) یک صفر در بی‌نهایت و یک صفر در S = ۰ و قطب مکرر در S = +۱
۴) یک صفر در بی‌نهایت و قطب مکرر در S = −۱

۲ـ مدار شکل زیر دارای چند فرکانس طبیعی غیرصفر است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۳ـ تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟

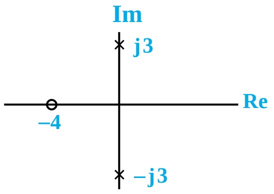


۱) ۷
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۴

۴ـ در مدار تست قبل تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر کدام است؟

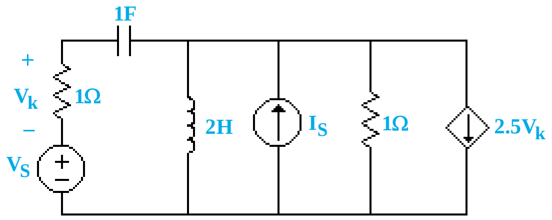
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵ـ نمودار صفر و قطب مداری مطابق شکل زیر است. مقدار α کدام باشد تا پاسخ خروجی به ورودی $e^{-\alpha t}$ دارای فرکانس طبیعی S = −α نباشد؟



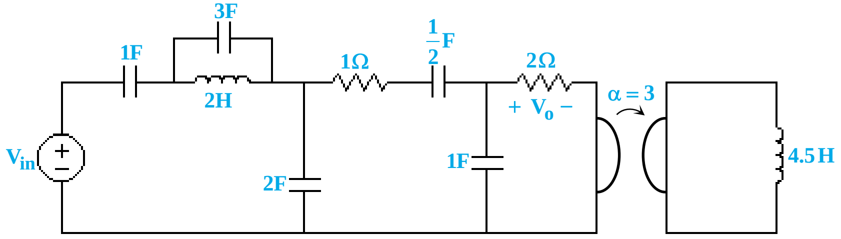
۱) α = ۳
۲) α = ۴
۳) α = ۲
۴) α = ۱

۶ـ پهنای باند مدار زیر برحسب رادیان بر ثانیه کدام است؟



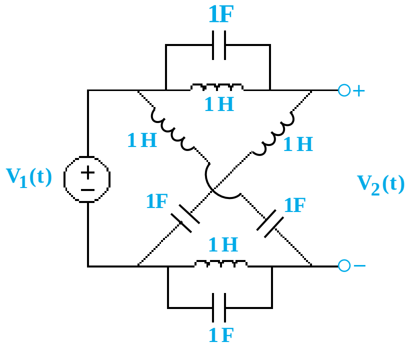
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۳

۷ـ در مدار شکل زیر، تابع انتقال شبکه $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ دارای چند قطب است و چه تعداد از آن‌ها صفر است؟



۱) ۵، یکی از آن‌ها صفر می‌باشد.
۲) ۴، هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نمی‌باشد.
۳) ۵، هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نمی‌باشد.
۴) ۷، یکی از آنها صفر می‌باشد.

۸ـ قطب‌های تابع انتقال $\frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}$ در مدار مقابل، کدام است؟



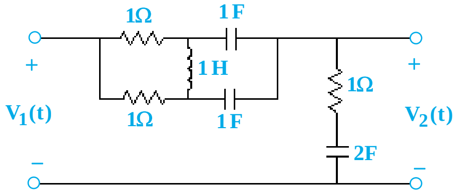
۱) $S = \pm j۰/۳$ ، $S = \pm j۱/۳$

۲) $S = \pm j۰/۹$ ، $S = \pm j۱/۹$

۳) $S = \pm j۰/۶$ ، $S = \pm j۱/۶۱$

۴) $S = \pm j۰/۲$ ، $S = \pm j۱/۲$

۹ـ قطب و صفرهای تابع انتقال مدار زیر کدام است؟ $(H(S) = \frac{V_۲(S)}{V_۱(S)})$



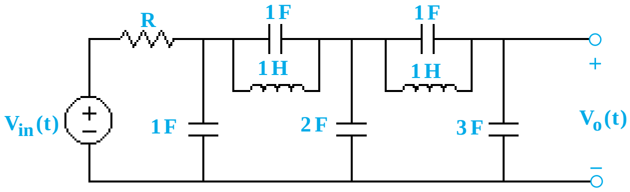
۱) $P = -۴ \, , \, Z = -۲$

۲) $P = -\frac{۱}{۴} \, , \, Z = -\frac{۱}{۲}$

۳) $P = -۲ \, , \, Z = -۴$

۴) $P = -\frac{۱}{۲} \, , \, Z = -\frac{۱}{۴}$

۱۰ـ صفرهای تابع انتقال مدار زیر کدام است؟ $(H(S) = \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)})$



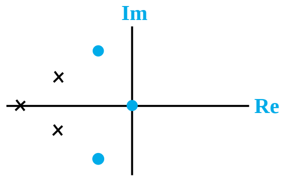
۱) (۳ مرتبه) $S = ۰$ و (۲ مرتبه) $S = \pm j$

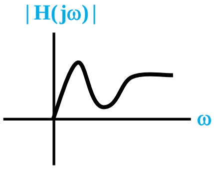
۲) (۲ مرتبه) $S = ۰$ و (۳ مرتبه) $S = \pm j$

۳) $S = ۰$ و $S = \pm j$

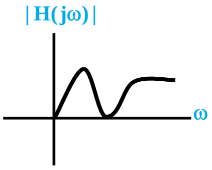
۴) $S = ۰$ و $S = \pm ۲j$

۱۱ـ در صورتی که نمایش قطب و صفر یک تابع شبکه به صورت مقابل باشد، آنگاه نمودار تغییرات $H(j\omega)$ برحسب ω کدام است؟

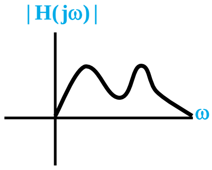




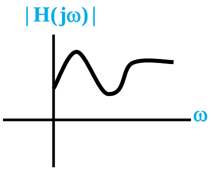
(۱)



(۲)

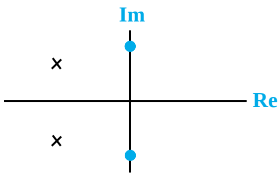


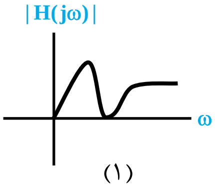
(۳)



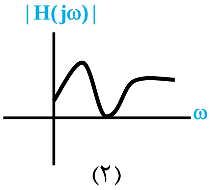
(۴)

۱۲ـ در صورتی که نمایش صفر و قطب یک تابع شبکه به صورت زیر باشد، آنگاه تغییرات $|H(j\omega)|$ برحسب ω کدام است؟

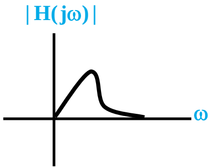




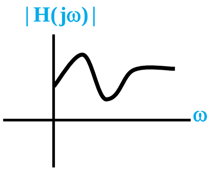
(۱)



(۲)

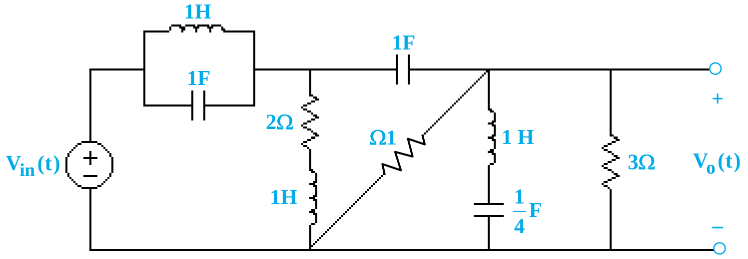


(۳)



(۴)

۱۳ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر شامل صفرهای تابع انتقال مدار زیر است؟



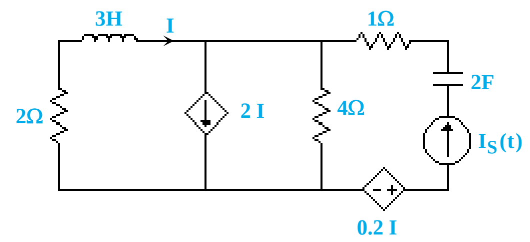
۱) $S = -۱$ و $S = ۰$ و $S = \pm j$

۲) $S = -۲$ و $S = -۱$ و $S = \pm j$

۳) $S = \pm j۲$ و $S = -۲$ و $S = \pm j$

۴) $S = ۰$ و $S = \pm j۲$ و $S = -۲$

۱۴ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



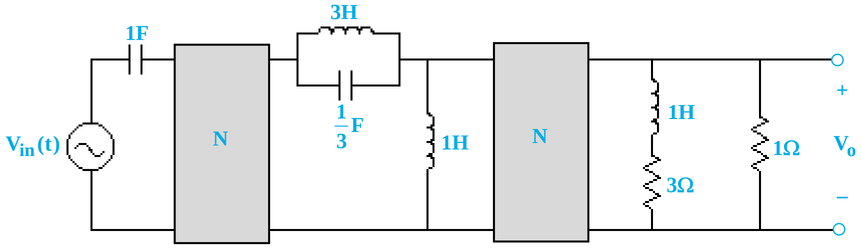
۱) $S=-\frac{۲}{۳}$ و $S=۰$

۲) $S=\frac{۲}{۳}$ و $S=۰$

۳) $S=-\frac{۲}{۳}$

۴) $S=\frac{۲}{۳}$

۱۵ـ صفرهای تابع انتقال مدار زیر کدام است؟



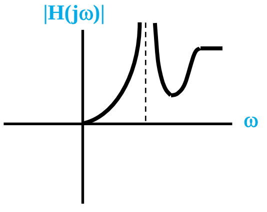
۱) $S=\pm j$ و $S=۰$ و $S=۰$

۲) $S=\pm j$ و $S=\pm ۲j$ و $S=۰$

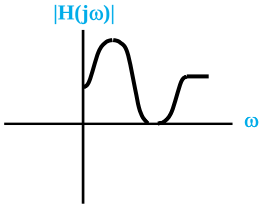
۳) $S=-۳$ و $S=\pm j$ و $S=۰$

۴) $S=-۳$ و $S=\pm j$ و $S=۰$ و $S=۰$

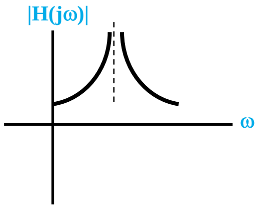
۱۶ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر، تغییر $|H(j\omega)|$ را برحسب ω برای یک تابع شبکه به صورت $H(S)=\frac{S(S+a)(S-aj)(S+aj)}{(S^۲+S+۱)(S-۲j)(S+۲j)}$ ترسیم می‌کند؟



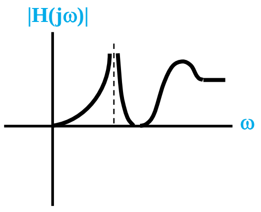
(۱)



(۲)



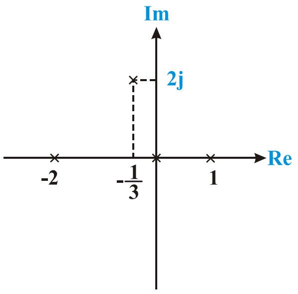
(۳)



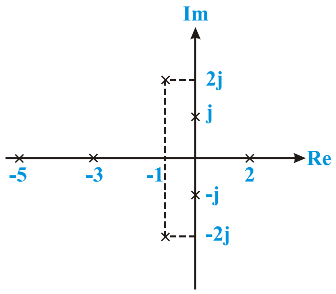
(۴)

۱۷ـ چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح‌اند؟

الف: دیاگرام‌های نشان داده شده در شکل‌های (۱) و (۲) می‌توانند مجموعه فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشند:



شکل (۱)



شکل (۲)

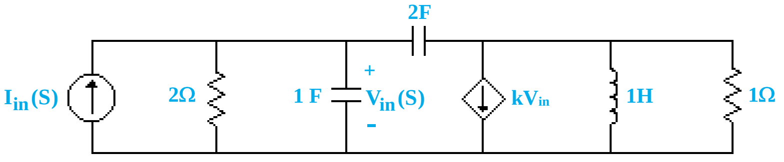
ب: اگر در مداری به جای منبع جریان مستقل، منبع ولتاژ مستقل قرار دهیم، تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار تغییر می‌کند.

ج: اگر فرکانس‌های طبیعی یک مدار همگی روی محور $j\omega$ و سمت چپ محور $j\omega$ باشند، پاسخ ورودی صفر همواره کراندار است.

د: اگر تابع تبدیل در یک مدار $H(S)=\frac{X(S)}{Y(S)}$ باشد، ریشه‌های مخرج همواره فرکانس‌های طبیعی را نشان می‌دهند.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۸ـ در مدار زیر مقدار k کدام باشد تا دو عدد از قطب‌های تابع شبکه $\frac{V_{in}(S)}{I_{in}(S)}$ به صورت $\frac{-۵\pm j\sqrt{۷}}{۸}$ باشد؟



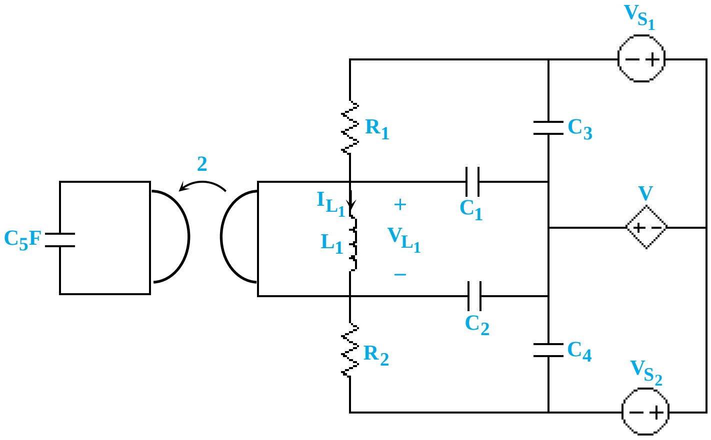
۱) $k=\frac{۱}{۲}$

۲) $k=۲$

۳) $k=۱$

۴) $k=\frac{۱}{۴}$

۱۹ـ در مدار شکل زیر با تغییر منبع ولتاژ وابسته $V = V_{L_1}$ به $V = I_{L_1}$ درجه مدار:

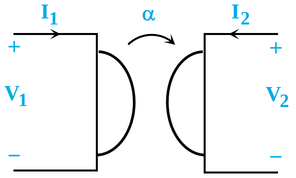


۱) از سه به چهار تغییر می‌کند.

۲) از پنج به چهار تغییر می‌کند.

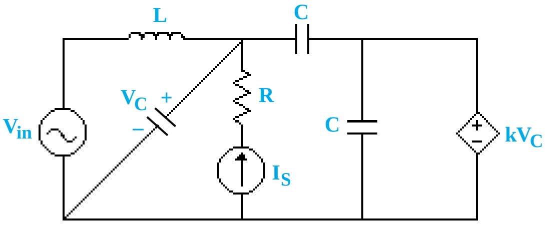
۳) از چهار به پنج تغییر می‌کند.

۴) تغییر نمی‌کند.



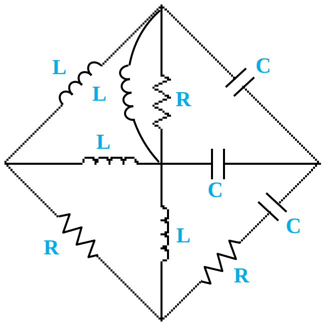
$V_1 = \alpha I_2$
$V_2 = -\alpha I_1$

۲۰ـ تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



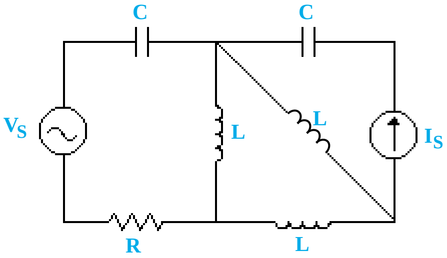
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۱

۲۱ـ تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار زیر کدام است؟



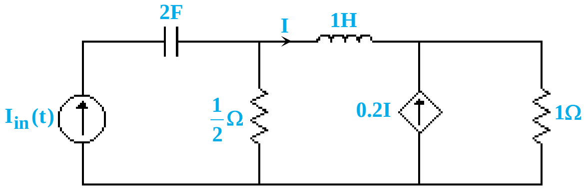
۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۶

۲۲ـ تعداد فرکانس‌های صفر مدار زیر کدام است؟



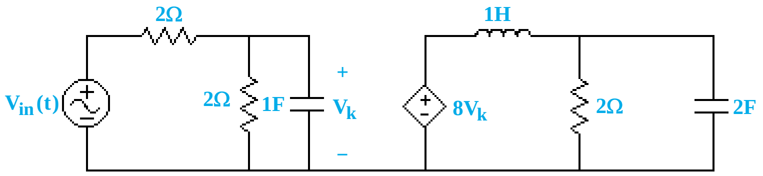
۱) ۳
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۲۳ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



۱) S = ۰ , S = −۱/۷
۲) S = ۰ , S = −۳
۳) S = −۱/۷
۴) S = −۳

۲۴ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



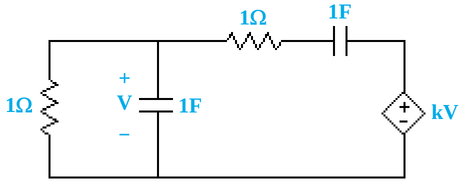
۱) $S=۰\ ,\ S=-\frac{۱}{۲}\pm j$

۲) $S=۰\ ,\ S=-۰/۲\pm j۳/۱$

۳) $S=-۱\ ,\ S=-۰/۱۲\pm j۰/۷$

۴) $S=-۱\ ,\ S=-۰/۴\pm j۰/۹$

۲۵ـ مدار زیر با فرض $k=۳$ در کدام حالت قرار دارد؟



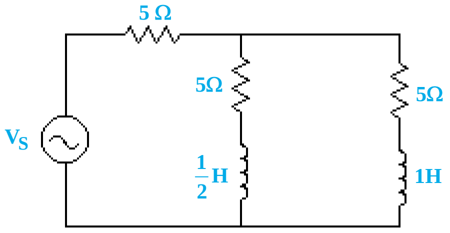
۱) فوق‌میرا

۲) بی‌اتلاف

۳) زیرمیرا

۴) بحرانی

۲۶ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



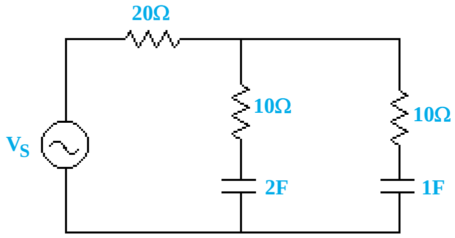
۱) $\begin{cases}S=-۶/۹\\S=-۱۷/۳\end{cases}$

۲) $\begin{cases}S=-۷/۲۴\\S=-۲۶/۲\end{cases}$

۳) $\begin{cases}S=-۲/۱۲\\S=-۱۶/۱۲\end{cases}$

۴) $\begin{cases}S=-۶/۳\\S=-۲۳/۶\end{cases}$

۲۷ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



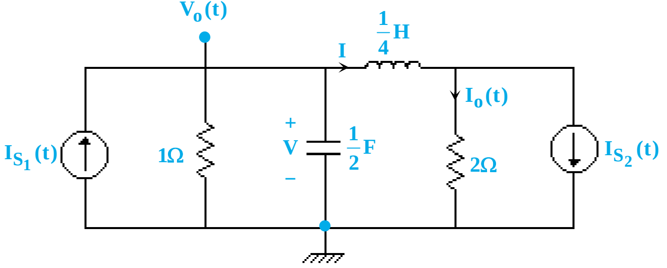
۱) $\begin{cases}S=-۰/۰۱۳\\S=-۰/۰۷۷\end{cases}$

۲) $\begin{cases}S=-۰/۰۹۴\\S=-۰/۰۳۴\end{cases}$

۳) $\begin{cases}S=-۰/۱۳\\S=-۰/۶۱\end{cases}$

۴) $\begin{cases}S=-۰/۲۳\\S=-۰/۷۳\end{cases}$

۲۸ـ در مدار زیر شرایط اولیه برای خازن و سلف کدام باشد تا فقط فرکانس طبیعی $S=-۴$ در خروجی ظاهر شود؟



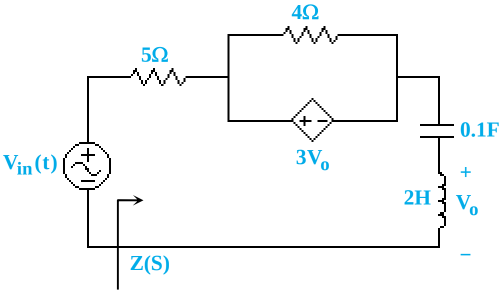
۱) $V_C(۰^-)=۱v\ ,\ I_L(۰^-)=۰/۷A$

۲) $V_C(۰^-)=۳v\ ,\ I_L(۰^-)=۰/۲A$

۳) $V_C(۰^-)=۲v\ ,\ I_L(۰^-)=۲A$

۴) $V_C(۰^-)=۴v\ ,\ I_L(۰^-)=۰/۶A$

۲۹ـ در مدار زیر امپدانس ورودی $Z(S)$ کدام است؟



۱) $۲S+۳$

۲) $۲S+۳+\frac{۹}{S}$

۳) $۶S+\frac{۹}{S}+۴$

۴) $۸S+۵+\frac{۱۰}{S}$

۳۰ـ در مدار تست قبل پهنای باند برحسب رادیان بر ثانیه کدام است؟

۱) ۰/۹۱۲

۲) ۱/۱۱۸

۳) ۰/۱۱۹

۴) ۰/۸۸

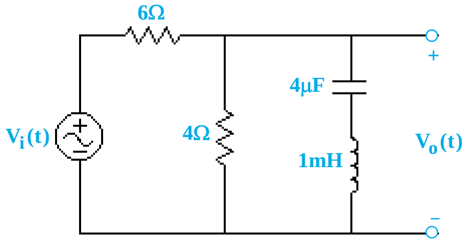
۳۱ـ در مدار زیر پهنای باند و فرکانس رزونانس چند رادیان بر ثانیه است؟

۱) $\omega_r = ۵$, $BW = ۹/۶$

۲) $\omega_r = ۲$, $BW = ۳/۲$

۳) $\omega_r = ۹/۶$, $BW = ۵$

۴) $\omega_r = ۳/۲$, $BW = ۲$



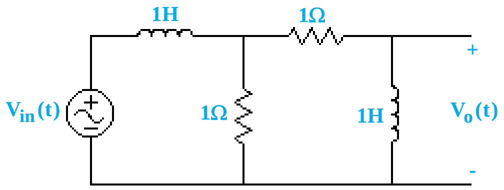
۳۲ـ در مدار زیر پهنای باند و فرکانس رزونانس چند رادیان بر ثانیه است؟

۱) $\omega_r = ۳$, $BW = ۱$

۲) $\omega_r = ۱$, $BW = ۳$

۳) $\omega_r = ۳$, $BW = ۶$

۴) $\omega_r = ۶$, $BW = ۳$



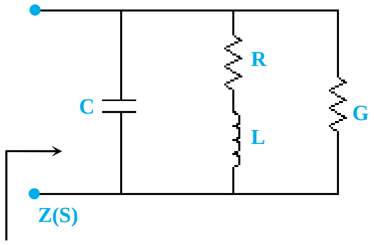
۳۳ـ در مدار زیر امپدانس ورودی به صورت $Z(S) = \frac{۱۰۰۰(S+۱)}{(S+۱+j۵۰)(S+۱-j۵۰)}$ است. حال مقادیر R، L، C و G کدام است؟

۱) $G = ۶m℧$, $C = ۱۰mF$, $L = ۰/۲H$, $R = ۰/۶\Omega$

۲) $G = ۳m℧$, $C = ۱mF$, $L = ۰/۱H$, $R = ۰/۱\Omega$

۳) $G = ۱m℧$, $C = ۱۰mF$, $L = ۰/۲H$, $R = ۰/۲\Omega$

۴) $G = ۱m℧$, $C = ۱mF$, $L = ۰/۴H$, $R = ۰/۴\Omega$



۳۴ـ در مدار زیر به ازای کدام مقدار β، در مدار دو فرکانس طبیعی صفر وجود دارد؟

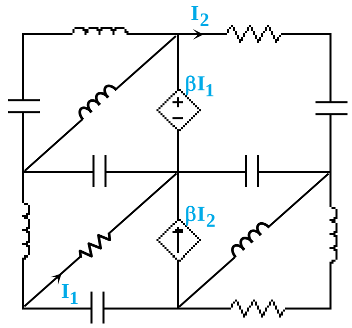
(اندازه تمامی عناصر برابر واحد است)

۱) $\beta = ۰$

۲) $\beta = ۱$

۳) $\beta = -۱$

۴) به ازای هیچ مقدار β



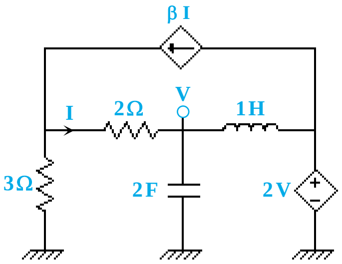
۳۵ـ در مدار زیر به ازای کدام مقدار β، مدار در حالت بی‌اتلاف است؟

۱) $\frac{۶}{۱۰}$

۲) $\frac{۱۰}{۶}$

۳) به ازای همه مقادیر β

۴) به ازای هیچ مقدار β



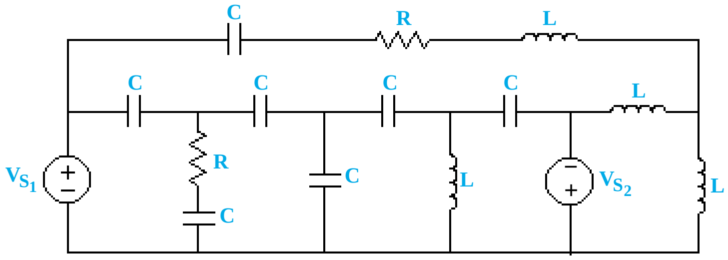
۳۶ـ در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر کدام است؟

۱) ۱۰

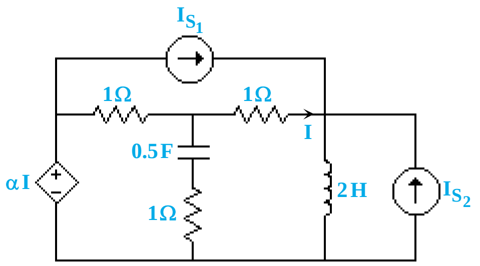
۲) ۹

۳) ۵

۴) ۸



۳۷ـ در مدار زیر به ازای کدام مقدار α، مدار در حالت بی‌اتلاف کار خواهد کرد؟



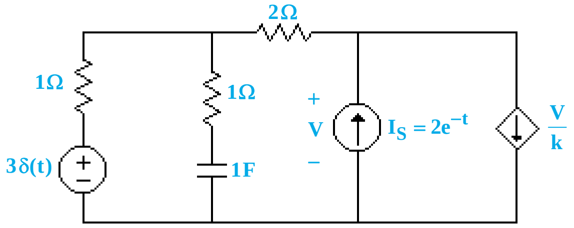
۱) $\alpha =$ ۱۱

۲) $\alpha = -$۱۱

۳) $\alpha =$ ۷

۴) $\alpha = -$۷

۳۸ـ در مدار زیر k کدام باشد تا فرکانس طبیعی مدار برابر با $-\frac{۱}{۳}$ شود؟



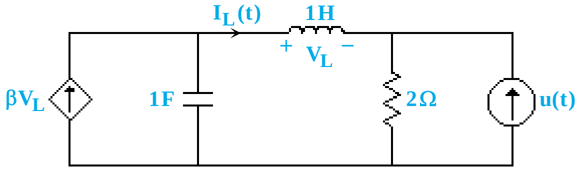
۱) −۴

۲) −۱

۳) −۳

۴) −۲

۳۹ـ به ازای کدام مقدار β، پاسخ مدار برای $I_L(t)$ میرا نمی‌شود؟



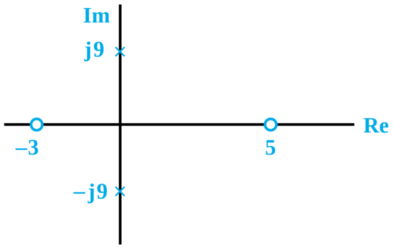
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴۰ـ در صورتی که نمودار صفر و قطب یک مدار به صورت زیر باشد، به ازای کدام مقدار α، به ازای ورودی $e^{-\alpha t}u(t)$، خروجی مدار شامل جمله $ke^{-\alpha t}u(t)$ نخواهد بود؟



۱) ۳

۲) ۲

۳) ۵

۴) ۹

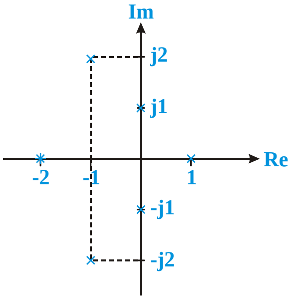
۴۱ـ با توجه به عبارت‌های زیر، کدام گزینه تعداد عبارت‌های صحیح را نشان می‌دهد؟

الف) اگر در مداری به جای یک منبع ولتاژ مستقل، منبع جریان مستقل بگذاریم، فرکانس‌های طبیعی آن مدار تغییر می‌کند.

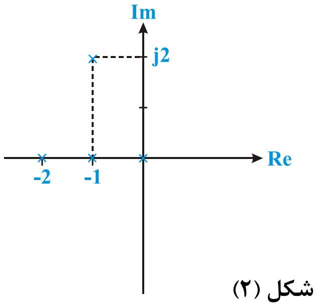
ب) اگر در یک مدار RLC به جای خازن‌ها، سلف و به جای سلف‌ها، خازن بگذاریم، تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار ممکن است تغییر کند، اما تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار ثابت می‌ماند.

پ) در مداری که فرکانس‌های طبیعی آن همگی روی محور $j\omega$ و سمت چپ آن قرار گرفته‌اند، پاسخ ورودی صفر لزوماً کراندار می‌ماند.

ت) دیاگرام شکل (۱) می‌تواند نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد، اما دیاگرام شکل (۲) خیر.



شکل (۱)



شکل (۲)

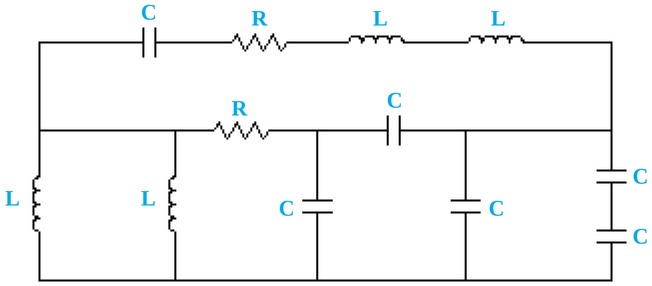
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴۲ـ مرتبه مدار مقابل کدام است؟



۱) ۵

۲) ۷

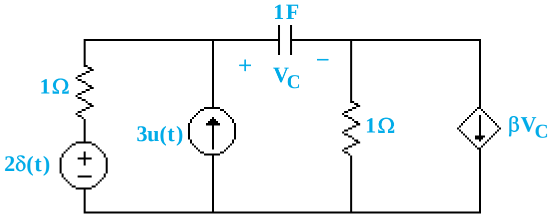
۳) ۸

۴) ۹

۴۳ـ در مدار بالا تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر کدام است؟

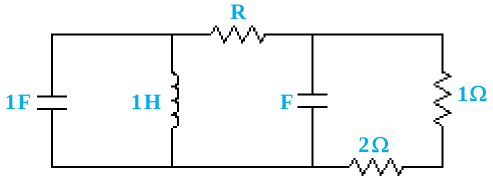
۱) ۳
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۴۴ـ به ازای کدام مقدار β مدار مقابل ناپایدار است؟



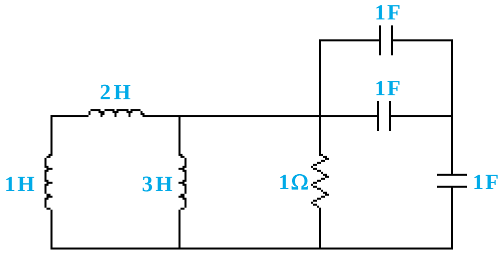
۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

۴۵ـ در مدار زیر مقدار R کدام باشد تا پاسخ ورودی صفر مدار، شامل جمله ke^{-t} نباشد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۶ـ معادله مشخصه مدار زیر در کدام گزینه وجود دارد؟

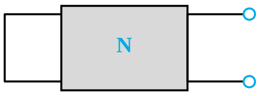


۱) $S^{۲}(S^{۲}+۳S+۱)=۰$
۲) $S^{۳}(S^{۲}+۳S+۱)=۰$
۳) $S^{۳}(۲S^{۲}+۳S+۲)=۰$
۴) $S^{۲}(۲S^{۲}+۳S+۲)=۰$

۴۷ـ با توجه به آزمایش‌های انجام شده در زیر، امپدانس ورودی مدار در حالتی که خروجی مدار باز باشد، کدام است؟ (روابط زیر بیانگر معادله‌ی مشخصه‌ی هر حالت هستند).

$S^{۲}+۴S+۲=۰$

$S^{۲}+۴S+۱=۰$

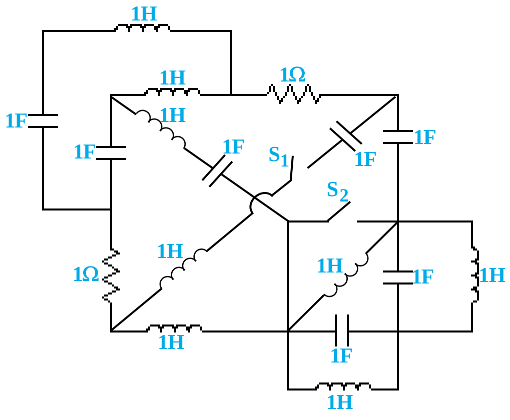


$S^{۲}+۶S+۲=۰$

$S^{۲}+۳S+۱=۰$

۱) $\frac{S^{۲}+۴S+۲}{S^{۲}+۶S+۲}$
۲) $\frac{S^{۲}+۶S+۲}{S^{۲}+۴S+۱}$
۳) $\frac{S^{۲}+۴S+۱}{S^{۲}+۶S+۲}$
۴) $\frac{S^{۲}+۳S+۱}{S^{۲}+۴S+۱}$

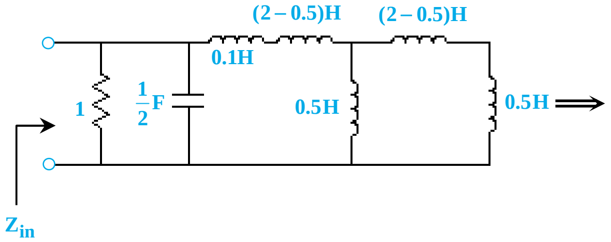
۴۸ـ در مدار مقابل اگر کلید $S_۱$ باز و کلید $S_۲$ بسته باشد، مرتبه‌ی مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار به ترتیب کدام است؟

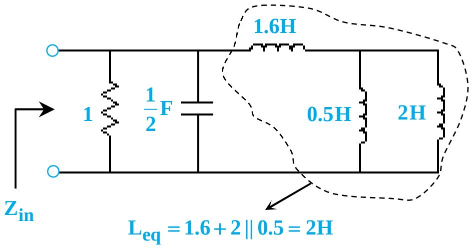


۱) ۱۲ و ۷
۲) ۱۲ و ۸
۳) ۱۳ و ۹
۴) ۱۳ و ۸

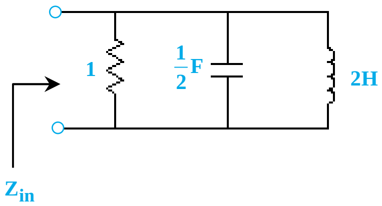
پاسخنامه آزمون فصل نهم

۱ـ گزینه «۲» ابتدا مدل T سلف‌های ترویج را به کار می‌بریم: $(M = k\sqrt{L_۱ L_۲} = \frac{۱}{۲})$





بنابراین داریم:

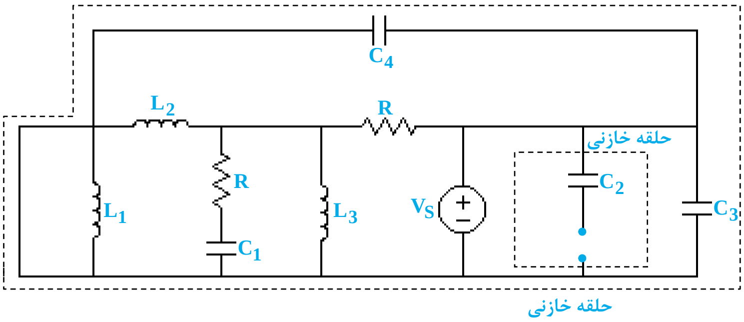


$$Z_{in}(s) = ۱\|\frac{۲}{s}\|۲s = \frac{۲s}{s^۲ + ۲s + ۱} = \frac{۲s}{(s+۱)^۲}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود Z_{in} دارای یک قطب مکرر در $s = -۱$ و یک صفر در $s = ۰$ و یک صفر در بی‌نهایت (به دلیل این که درجه‌ی مخرج یک درجه از صورت بیشتر می‌باشد) است.

۲ـ گزینه «۴» ابتدا تعداد سلف‌ها و خازن‌ها را بدون ساده کردن به دست می‌آوریم. ۳ = تعداد سلف ۴ = تعداد خازن

تعداد کاتست‌های سلفی و حلقه‌های خازنی از روی شکل به صورت زیر است:



کاتست سلفی در مدار وجود ندارد، اما دو حلقه خازنی داریم. بنابراین مرتبه این مدار برابر است با:

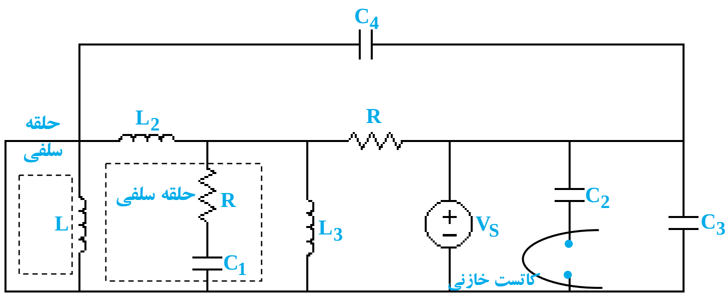
تعداد حلقه خازنی − تعداد کاتست سلفی − تعداد خازن + تعداد سلف = مرتبه مدار

۵ = ۲ − ۰ − ۴ + ۳ = مرتبه مدار

حال تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر مدار را به دست می‌آوریم.

تعداد حلقه سلفی + تعداد کاتست خازنی = تعداد فرکانس صفر

با توجه به مدار زیر ۱ کاتست خازنی و ۲ حلقه سلفی داریم پس:



۳ = ۲ + ۱ = تعداد فرکانس صفر

بنابراین تعداد فرکانس غیرصفر برابر است با:

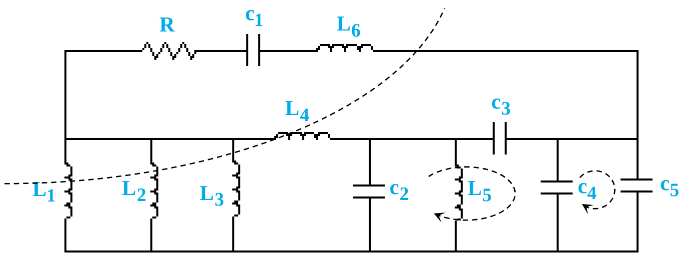
۲ = ۳ − ۵ = تعداد فرکانس صفر − مرتبه مدار = تعداد فرکانس غیرصفر

۳ـ گزینه «۳» ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی را محاسبه می‌کنیم:

۱۱ = تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی

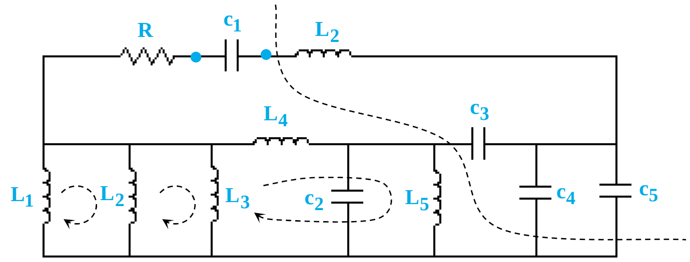
حال به تعداد حلقه‌های خازنی و کاتست‌های سلفی از تعداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی کم می‌کنیم تا درجه‌ی مدار را به دست آوریم:

درجه‌ی مدار = تعداد فرکانس طبیعی = ۱۱−۱−۲ = ۸



۴ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی تعداد فرکانس طبیعی صفر کافی است تعداد حلقه‌های سلفی و کاتست‌های خازنی مدار را به دست آوریم:

تعداد فرکانس طبیعی صفر = ۴

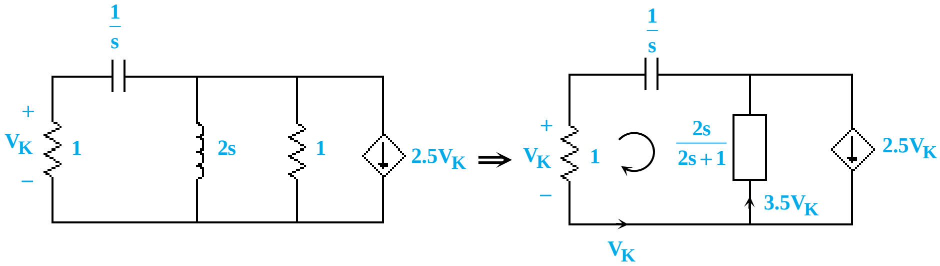


۵ـ گزینه «۲» ابتدا تبدیل لاپلاس ورودی را به دست می‌آوریم:

$$e^{-\alpha t} \xrightarrow{L} \frac{۱}{s+\alpha}$$

برای اینکه فرکانس $s=-\alpha$ در خروجی ظاهر نشود، باید $(s+\alpha)^{-۱}$ مربوط به ورودی با $s+\alpha$ مربوط به صفر تابع تبدیل مدار ساده شود. از طرفی با توجه به نمودار صفر و قطب مدار، مدار تنها دارای صفر در $s=-۴$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت: $\alpha=۴$

۶ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

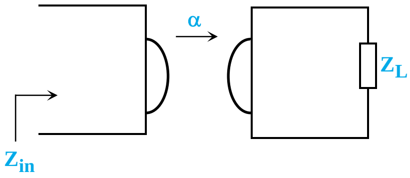


با اعمال KVL داریم:

$$KVL:-V_k-\frac{۱}{s}V_k-\frac{۲s}{۲s+۱}\times ۳/۵\,V_k=۰ \Rightarrow [\frac{s+۱}{s}+\frac{۷s}{۲s+۱}]V_k=۰ \Rightarrow [\frac{۹s^۲+۳s+۱}{s(۲s+۱)}]V_k=۰$$

$$\text{معادله‌ی مشخصه}: ۹s^۲+۳s+۱=۰ \rightarrow s^۲+\frac{۱}{۳}s+\frac{۱}{۹}=۰ \rightarrow \text{پهنای باند}=۲\alpha=\frac{۱}{۳}$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر ژیراتور را به دست می‌آوریم. می‌دانیم:

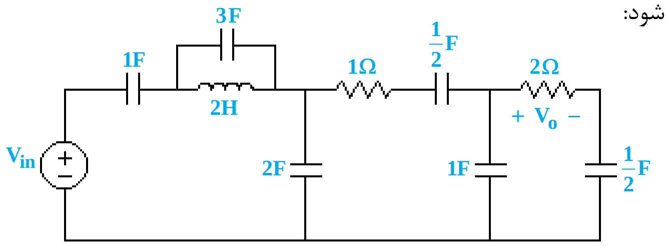


$$Z_{in}=\frac{\alpha^۲}{Z_L}$$

در اینجا Z_L ما در حوزه لاپلاس برابر با $۴/۵S$ می‌باشد. بنابراین Z_{in} برابر است با:

$$Z_{in}=\frac{(۳)^۲}{۴/۵S}=\frac{۲}{S} \quad \equiv \quad \frac{۱}{۲}F \text{ یک خازن به ظرفیت}$$

بنابراین مدار به‌صورت شکل زیر ساده می‌شود:



(تعداد کات‌ست سلفی ـ تعداد حلقه خازنی ـ تعداد خازن + تعداد سلف)= تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار بالا

در این مدار ۱ سلف، ۶ خازن، یک حلقه خازنی (شامل خازن ۱F و ۳F و ۲F و منبع V_{in}) و صفر کات‌ست سلفی داریم. بنابراین تعداد کل فرکانس‌های طبیعی مدار برابر با ۶ = ۱ − ۶ + ۱ می‌باشد.

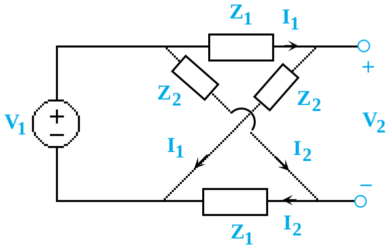
حال سراغ تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر می‌رویم. تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر برابر است با: (تعداد حلقه سلفی + تعداد کات ست خازنی)

در مدار فوق حلقه سلفی نداریم، اما خازن‌های $\frac{۱}{۲}$F و ۱F و $\frac{۱}{۲}$F و همچنین خازن‌های $\frac{۱}{۲}$F و ۲F و ۱F هر کدام تشکیل یک کات‌ست خازنی را می‌دهد.

بنابراین ۶ فرکانس طبیعی داریم که دو تا از آن‌ها صفر است. اما فرکانس‌های طبیعی در حالی قطب‌های تابع تبدیل $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ هستند که ریشه صورت H(S) نباشند.

اگر $S=۰$ شود به علت وجود خازن چسبیده به منبع V_{in}، خازن مدار باز شده و V_o برابر با صفر می‌شود. پس $S=۰$ نمی‌تواند قطب تابع تبدیل H(S) باشد، زیرا باید در صورت H(S) عاملی از توان S باشد. پس ریشه‌های مخرج برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر، یعنی ۴ می‌باشد که هیچ‌کدام از آنها صفر نیست.

۸ـ گزینه «۳» ابتدا تابع تبدیل $\frac{V_۲}{V_۱}$ را برحسب $Z_۱$ و $Z_۲$ محاسبه می‌کنیم (شکل زیر):



حال با اعمال KVL در حلقه‌های ورودی و خروجی داریم:

$$V_۱=(Z_۱+Z_۲)I_۲=(Z_۱+Z_۲)I_۱\Rightarrow I_۱=I_۲$$

$$V_۲=Z_۲I_۱-Z_۱I_۲=(Z_۲-Z_۱)I_۲\Rightarrow\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{Z_۲-Z_۱}{Z_۱+Z_۲}$$

از طرفی داریم:

$$Z_۱=\frac{۱}{s}\|s=\frac{s}{s^۲+۱}\quad و \quad Z_۲=s+\frac{۱}{s}=\frac{s^۲+۱}{s}$$

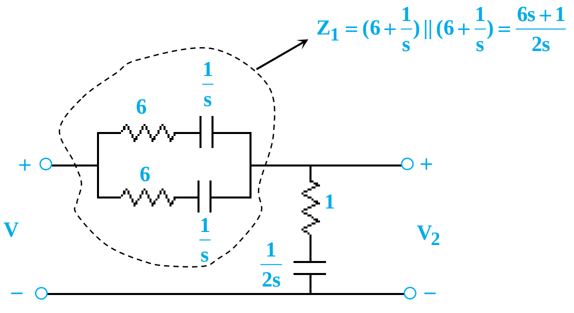
بنابراین:

$$\Rightarrow\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{\frac{s^۲+۱}{s}-\frac{s}{s^۲+۱}}{\frac{s^۲+۱}{s}+\frac{s}{s^۲+۱}}=\frac{s^۴+s^۲+۱}{s^۴+۳s^۲+۱}$$

معادله‌ی مشخصه: $s^۴+۳s^۲+۱=۰\rightarrow s^۲=-۰/۳۸,-۲/۶۲\rightarrow s=\pm j۰/۶,\pm j۱/۶۱$

۹ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم (دقت شود به دلیل برقراری پل وتسون از سلف ۱H، جریانی عبور نمی‌کند).

حال با تقسیم ولتاژ داریم:



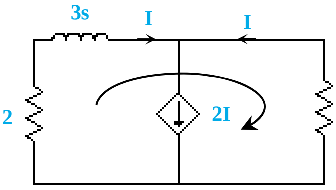
$$\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۱+\frac{۱}{۲s}}{\frac{۶s+۱}{۲s}+۱+\frac{۱}{۲s}}=\frac{\frac{۲s+۱}{۲s}}{\frac{۸s+۲}{۲s}}=\frac{۲s+۱}{۸s+۲}\rightarrow P=-\frac{۱}{۴},\ Z=-\frac{۱}{۲}$$

۱۰ـ گزینه «۱» با توجه به شکل مدار مشاهده می‌شود که سه سلف به صورت موازی با خروجی قرار گرفته‌اند. بنابراین تابع انتقال دارای صفر مرتبه ۳ در فرکانس $s=۰$ می‌باشد. از طرفی ۲ شاخه‌ی LC موازی هم در مدار وجود دارد. بنابراین تابع انتقال دارای ۲ صفر دیگر نیز در فرکانس $s=\pm\frac{j}{\sqrt{۱\times۱}}=\pm j$ می‌باشد.

۱۱ـ گزینه «۱» با توجه به نمودار قطب و صفر مشاهده می‌شود که تابع شبکه یک صفر در $\omega=۰$ دارد، پس مقدار تابع شبکه در این فرکانس برابر با صفر می‌باشد. از طرفی تابع شبکه دارای یک صفر مزدوج و یک قطب مزدوج با مقدار حقیقی مخالف صفر است. بنابراین تابع شبکه‌ای دارای مینیمم و ماکزیمم نسبی می‌باشد (دقت شود چون صفر مزدوج روی محور موهومی قرار ندارد، بنابراین اندازه‌ی مینیمم تابع شبکه مخالف صفر است). همچنین با توجه به برابر بودن تعداد صفر و قطب اندازه‌ی تابع شبکه در بی‌نهایت محدود به یک مقدار غیرصفر می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۱۲ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه تابع شبکه صفری در $s=۰$ ندارد، بنابراین اندازه‌ی تابع شبکه در $\omega=۰$ مخالف صفر است. همچنین تابع شبکه دارای یک صفر مزدوج روی محور موهومی می‌باشد، پس اندازه‌ی تابع شبکه دارای یک مینیمم نسبی با اندازه‌ی صفر می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی ۲ صحیح می‌باشد.

۱۳ـ گزینه «۳» با توجه به مدار مشاهده می‌شود یک شاخه‌ی LC سری و یک شاخه‌ی LC موازی وجود دارد. بنابراین تابع انتقال به ترتیب دارای صفرهای $s=\frac{\pm j}{\sqrt{۱\times\frac{۱}{۴}}}=\pm۲j$ و $s=\frac{\pm j}{\sqrt{۱\times۱}}=\pm j$ می‌باشد. از طرفی مدار دارای یک شاخه‌ی RL سری می‌باشد که باعث به وجود آمدن صفر در فرکانس $s=-\frac{R}{L}=-۲$ در تابع انتقال می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح این سؤال می‌باشد.



۱۴ـ گزینه «۴» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

با اعمال kvl در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

$$(۲+۳s)I-۴I=۰\ \Rightarrow\ (۳s-۲)I=۰$$

بنابراین $s=\frac{۲}{۳}$ فرکانس طبیعی مدار می‌باشد (دقت شود مدار از مرتبه‌ی ۱ بوده و فقط ۱ فرکانس طبیعی دارد).

۱۵ـ گزینه «۴» با توجه به مدار مشاهده می‌شود یک شاخه‌ی RL سری در سمت راست مدار وجود دارد که باعث ایجاد صفر تابع انتقال در فرکانس $s=-\frac{R}{L}=-۳$ می‌شود. از طرفی شاخه‌ی LC موازی نیز یک صفر با فرکانس $s=\frac{\pm j}{\sqrt{Lc}}=\pm j$ در تابع انتقال موجود می‌آورد. همچنین خازن ۱ F و سلف ۱ H نیز دو صفر با فرکانس $s=۰$ نیز به وجود می‌آورند.

۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به تابع تبدیل داده‌شده، اندازه‌ی این تابع به ازای $s=۰$ و $s=\pm aj$ برابر صفر می‌شود. از طرفی اندازه $H(j\omega)$ در فرکانس $s=\pm۲j$ به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۱۷ـ گزینه «۱» تک‌تک عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

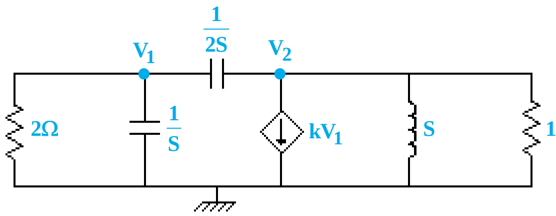
عبارت الف: شکل (۱) نمی‌تواند مجموعه فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد؛ زیرا مزدوج $(-\frac{۱}{۳}+۲j)$ یعنی $(-\frac{۱}{۳}-۲j)$ در شکل وجود ندارد. شکل (۲) می‌تواند مجموعه فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد. پس این گزینه غلط است.

عبارت ب: برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی یک مدار، منابع جریان و ولتاژ مستقل را خاموش می‌کنیم. بنابراین منابع جریان مستقل مدار باز شده و منابع ولتاژ مستقل، اتصال کوتاه. این جابه‌جایی منجر به تغییر ساختار مدار می‌گردد و تعداد فرکانس‌ها تغییر می‌کند. پس عبارت (ب) صحیح است.

عبارت ج: اگر فرکانس‌های طبیعی، سمت چپ و روی محور $j\omega$ به صورت غیرتکراری باشند، پاسخ ورودی صفر کراندار است. پس اگر فرکانس‌های طبیعی روی محور $j\omega$ باشند و در مورد تکراری بودن آن‌ها چیزی گفته نشود، نمی‌توان گفت که همواره پاسخ ورودی صفر کراندار است؛ یعنی ممکن است ریشه‌های روی محور $j\omega$ تکراری بوده و پاسخ کراندار نشود. پس عبارت (ج) هم نادرست است.

عبارت د: ریشه‌های مخرج به شرطی که ریشه‌های صورت تابع تبدیل نباشند، فرکانس طبیعی سیستم هستند. پس این عبارت هم نادرست است.

در بین عبارات بالا فقط یک عبارت درست بود، پس پاسخ تست گزینه (۱) می‌باشد.



۱۸ـ گزینه «۴» می‌دانیم که قطب‌های هر تابع شبکه، زیرمجموعه فرکانس‌های طبیعی مدار هستند؛ بنابراین ابتدا معادله مشخصه و فرکانس‌های طبیعی را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور معادلات KCL را می‌نویسیم و ماتریس ادمیتانس را به دست می‌آوریم.

$$\frac{V_۱}{۲}+SV_۱+۲S(V_۱-V_۲)=۰\Rightarrow(۳S+\frac{۱}{۲})V_۱-۲SV_۲=۰$$

$$۲S(V_۲-V_۱)+kV_۱+\frac{V_۲}{S}+V_۲=۰\Rightarrow(k-۲S)V_۱+(۱+\frac{۱}{S}+۲S)V_۲=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۳S+\frac{۱}{۲} & -۲S\\ k-۲S & ۲S+۱+\frac{۱}{S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_۱\\ V_۲\end{bmatrix}=۰\Rightarrow Y=\begin{bmatrix}۳S+\frac{۱}{۲} & -۲S\\ k-۲S & ۲S+۱+\frac{۱}{S}\end{bmatrix}$$

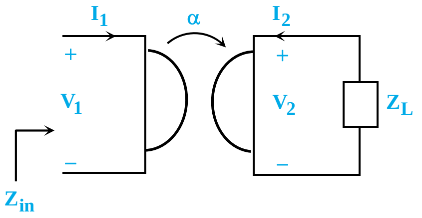
$$|Y|=(۳S+\frac{۱}{۲})(۲S+۱+\frac{۱}{S})+۲S(k-۲S)=۰\xrightarrow{\times S}۲S^۳+(۴+۲k)S^۲+۳/۵S+۰/۵=۰$$ معادله مشخصه

با توجه به این که دو قطب تابع شبکه برابر $\frac{-۵\pm j\sqrt{۷}}{۸}$ هستند، پس باید معادله مشخصه بر عبارت $S^۲+۱/۲۵S+۰/۵$ بخش‌پذیر باشد. حال داریم:

$$۲S^۳+(۴+۲k)S^۲+۳/۵S+۰/۵=(S^۲+۱/۲۵S+۰/۵)(۲S+۱/۵+۲k)+(k-۰/۲۵)(۱-۲/۵S)$$

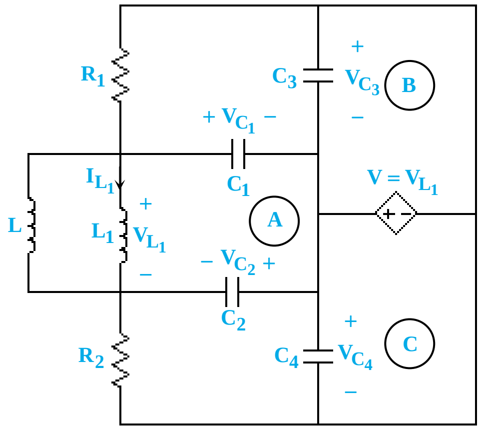
مشخص است که به ازای $k=۰/۲۵$، جمله باقی‌مانده در عبارت فوق برابر صفر شده و معادله مشخصه بر $S^۲+۱/۲۵S+۰/۵$ بخش‌پذیر است.

۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا اثر ژیراتور را لحاظ می‌کنیم. امپدانس دیده شده از ژیراتور مطابق شکل زیر است:



$$Z_{in}=\frac{\alpha^۲}{Z_L}$$

در مدار سؤال $Z_L=\frac{۱}{C_۵S}$ است که طبق رابطه بالا $Z_{in}=\frac{۴}{\frac{۱}{C_۵S}}=۴C_۵S=L$ یعنی معادل با یک سلف به امپدانس $۴C_۵$ هانری است. با خاموش کردن منابع ولتاژ مستقل مدار به صورت مقابل تبدیل می‌شود.



اگر $V=V_{L_۱}$ باشد، تعداد فرکانس‌های طبیعی برابر است با تعداد جریان سلف‌ها و ولتاژهای خازن‌ها که از هم مستقل‌اند.

با اعمال KVL در حلقه A داریم: $V_{L_۱}=V_{C_۱}+V_{C_۲}$ (۱)

همچنین با KVL در حلقه مشترک B و C داریم: $V_{C_۳}+V_{C_۴}=۰$ (۲)

با KVL در حلقه B داریم: $V_{C_۳}+V_{L_۱}=۰$ (۳)

با KVL در حلقه C داریم: $-V_{L_۱}+V_{C_۴}=۰$ (۴)

با حذف V_L طبق رابطه (۱) از رابطه (۳) و (۴) داریم:

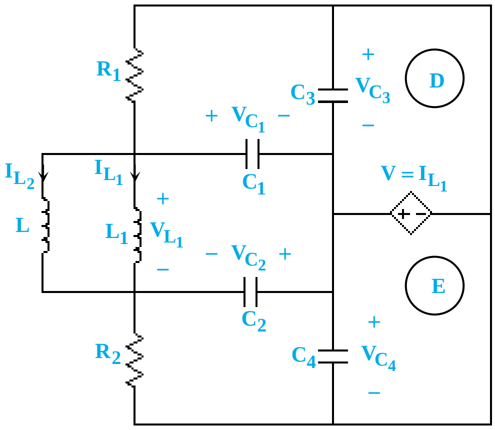
رابطه (۲) $\Rightarrow V_{C_۳}+V_{C_۴}=۰$

رابطه (۳) $\Rightarrow V_{C_۳}+V_{C_۱}+V_{C_۲}=۰$

رابطه (۳) $\Rightarrow -V_{C_۱}-V_{C_۲}+V_{C_۴}=۰$

با توجه به معادلات بالا مشخص است که اگر ولتاژ ۲ خازن را داشته باشیم، ولتاژ بقیه خازن‌ها به دست می‌آید.

از طرفی ۲ سلف هم داریم که جریان‌های آنها با هم رابطه‌ای ندارد، پس در حالت $V=V_{L_۱}$ مرتبه مدار ۴ است.



حال اگر $V=I_{L_۱}$ باشد، داریم:

با اعمال KVL در حلقه D و E داریم:

$-V_{C_۳}-V=۰\Rightarrow -V_{C_۳}-I_{L_۱}=۰$ (۵)

$V-V_{C_۴}=۰\Rightarrow I_{L_۱}-V_{C_۴}=۰$ (۶)

بنابراین با داشتن جریان $I_{L_۱}$ ولتاژ خازن‌های $C_۳$ و $C_۴$ هم به دست می‌آید.

پس مرتبه مدار برابر است با ۴ (ولتاژ $V_{C_۱}$ و $V_{C_۲}$ و $I_{L_۱}$ و $I_{L_۲}$ متغیرهای مستقل ما هستند).

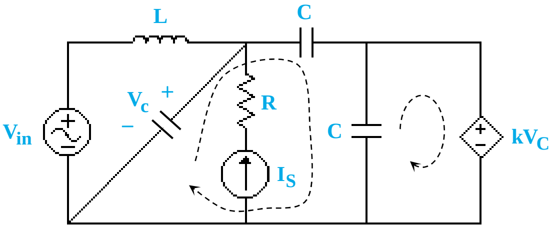
پس نتیجه می‌شود که با تبدیل $V=V_{L_۱}$ به $V=I_{L_۱}$ تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار (مرتبه مدار) تغییر نکند.

۲۰ـ گزینه «۳» ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی را محاسبه می‌کنیم:

۴ = تعداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی

از طرفی با توجه به شکل مدار مشاهده می‌شود ۲ حلقه‌ی خازنی در مدار وجود دارد، بنابراین مرتبه‌ی مدار برابر است با:

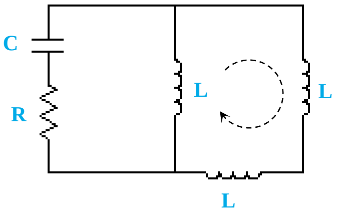
۲ تا فرکانس طبیعی داریم $\leftarrow$ $n = ۴ - ۲ = ۲$ = مرتبه‌ی مدار



۲۱ـ گزینه «۲» همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، مدار از هفت المان ذخیره‌کننده‌ی انرژی تشکیل شده است. از طرفی مدار دارای یک حلقه‌ی سلفی و یک کاتست خازنی می‌باشد، بنابراین مدار دارای ۲ فرکانس طبیعی صفر است. در نتیجه تعداد فرکانس طبیعی غیرصفر برابر است با:

$۷ - ۲ = ۵$ = فرکانس طبیعی غیرصفر

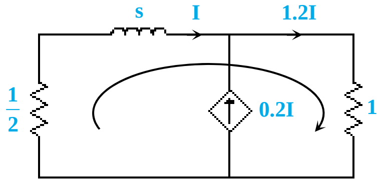
۲۲ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر می‌کنیم:



حال با توجه به مدار مشاهده می‌شود که مدار دارای یک حلقه‌ی سلفی می‌باشد؛ بنابراین یک فرکانس طبیعی صفر در مدار وجود دارد.

۲۳ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر می‌کنیم:

حال با اعمال kvl در مدار داریم:

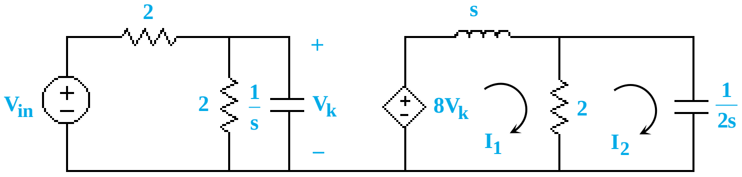


$$(\frac{۱}{۲}+s)I+۱/۲I=۰ \Rightarrow (s+۱/۷)I=۰ \rightarrow s=-۱/۷$$

دقت شود که خازن ۲F به دلیل سری شدن با منبع جریان، بی‌اثر می‌شود. بنابراین تأثیری روی مرتبه‌ی مدار نداشته و مدار از مرتبه‌ی اول می‌باشد.

۲۴ـ گزینه «۳» ابتدا مدارها را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

حال با توجه به مدار داریم:



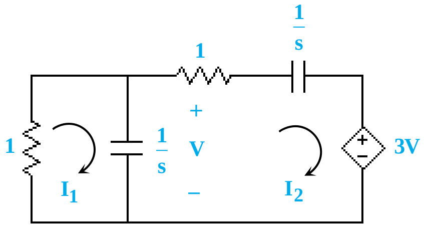
$$V_k = \frac{\frac{۱}{s}||۲}{\frac{۱}{s}||۲+۲}V_{in} = \frac{۲}{۲s+۲}V_{in} = \frac{۱}{s+۱}V_{in}$$

بنابراین $s=-۱$ یک فرکانس طبیعی مدار می‌باشد. از طرفی با نوشتن ماتریس مش مدار سمت راست داریم:

$$\begin{bmatrix} s+۲ & -۲ \\ -۲ & \frac{۱}{۲s}+۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸V_k \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{معادله‌ی مشخصه}:(s+۲)(\frac{۱}{۲s}+۲)-۴=۰ \Rightarrow ۴s^۲+s+۲=۰ \Rightarrow s=\frac{-۱\pm\sqrt{۳۱}\,j}{۸}=-۰/۱۲\pm j۰/۷$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی مدار برابر است با: $s=-۱,-۰/۱۲\pm j۰/۷$

۲۵ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم. سپس با نوشتن معادلات مش معادله‌ی مشخصه‌ی مدار را بدست می‌آوریم:

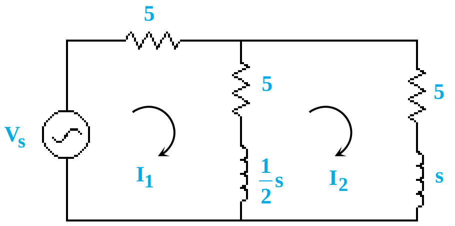


$$\begin{bmatrix} ۱+\frac{۱}{s} & -\frac{۱}{s} \\ -\frac{۱}{s} & ۱+\frac{۲}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ -۳v \end{bmatrix} \xrightarrow{v=(\frac{I_۱-I_۲}{s})} \begin{bmatrix} \frac{s+۱}{s} & -\frac{۱}{s} \\ \frac{۲}{s} & ۱-\frac{۱}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\text{معادله‌ی مشخصه}:\frac{s+۱}{s}\times\frac{s-۱}{s}+\frac{۲}{s^۲}=۰ \Rightarrow \frac{s^۲+۱}{s^۲}=۰ \Rightarrow s^۲+۱=۰ \rightarrow \alpha=۰$$

بنابراین مدار در حالت بی‌اتلاف قرار دارد.

۲۶ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس برده و سپس معادلات مش مدار را می‌نویسیم:



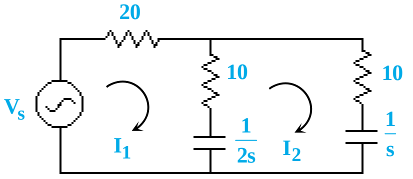
$$\begin{bmatrix} ۱۰+\frac{۱}{۲}s & -۵-\frac{s}{۲} \\ -۵-\frac{s}{۲} & ۱۰+\frac{۳s}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_S \\ ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله‌ی مشخصه‌ی مدار برابر است با:

$$(۱۰+\frac{s}{۲})(۱۰+\frac{۳s}{۲})-(۵+\frac{s}{۲})^۲=۰\Rightarrow ۱۰۰+۲۰s+\frac{۳}{۴}s^۲-۲۵-۵s-\frac{s^۲}{۴}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{s^۲}{۲}+۱۵s+۷۵=۰ \ \rightarrow \ \text{فرکانس‌های طبیعی}:s=\frac{-۱۵\pm ۸/۶۶}{۲\times\frac{۱}{۲}}\simeq -۲۳/۶\ ,\ -۶/۳$$

۲۷ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس برده و معادلات مش مدار را می‌نویسیم:



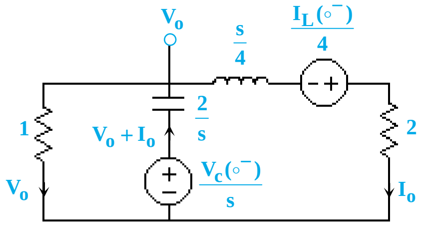
$$\begin{bmatrix} ۳۰+\frac{۱}{۲s} & -۱۰-\frac{۱}{۲s} \\ -۱۰-\frac{۱}{۲s} & ۲۰+\frac{۳}{۲s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_S \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حال معادله‌ی مشخصه مدار را به دست می‌آوریم:

$$(۳۰+\frac{۱}{۲s})(۲۰+\frac{۳}{۲s})-(۱۰+\frac{۱}{۲s})^۲=۰ \Rightarrow ۲۰۰۰s^۲+۱۸۰s+۲=۰$$

$$\text{فرکانس‌های طبیعی}:s=-۰/۰۱۳\ ,\ -۰/۰۷۷$$

۲۸ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با نوشتن معادلات KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$\text{KVL}\ (\text{حلقه‌ی چپ}):-V_o-\frac{۲}{s}(V_o+I_o)+\frac{V_c(۰^-)}{s}=۰\Rightarrow(\frac{۲}{s}+۱)V_o+\frac{۲}{s}I_o=\frac{V_c(۰^-)}{s}\Rightarrow(s+۲)V_o+۲I_o=V_c(۰^-)\quad (۱)$$

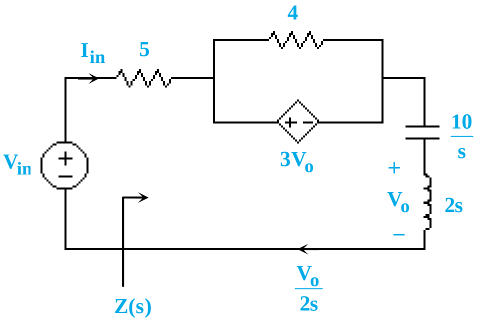
$$\text{KVL}\ (\text{حلقه‌ی بیرونی}):-V_o+(۲+\frac{s}{۴})I_o-\frac{I_L(۰^-)}{۴}=۰\Rightarrow(s+۸)I_o-۴V_o=I_L(۰^-)\quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow(s+۲)[\frac{(s+۸)I_o-I_L(۰^-)}{۴}]+۲I_o=V_c(۰^-)$$

$$\Rightarrow(s^۲+۱۰s+۲۴)I_o=۴V_c(۰^-)+(s+۲)I_L(۰^-)\Rightarrow I_o=\frac{I_L(۰^-)(s+۲+\frac{۴V_c(۰^-)}{I_L(۰^-)})}{(s+۴)(s+۶)}$$

برای اینکه فقط فرکانس $s=-۴$ در خروجی ظاهر شود، باید $(s+۶)$ موجود در مخرج با صورت ساده شود. بنابراین $V_C(۰^-)=I_L(۰^-)$ می‌باشد.

۲۹ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$KVL:-V_{in}+۵I_{in}+۳V_o+\frac{۱۰}{s}\times I_{in}+V_o=۰$$

$$\xrightarrow[V_o=۲sI_{in}]{I_{in}=\frac{V_o}{۲s}}-V_{in}+۵I_{in}+۶sI_{in}+\frac{۱۰}{s}I_{in}+۲sI_{in}=۰\Rightarrow V_{in}=(\frac{۱۰}{s}+۸s+۵)I_{in}$$

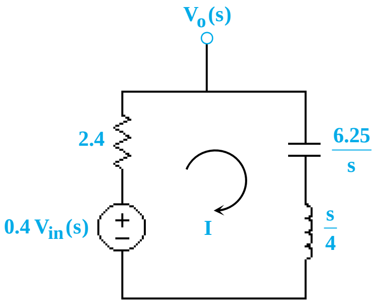
۳۰ـ گزینه «۲» با توجه به معادله‌ی بدست آمده در تست قبل داریم:

$$(۸s^۲+۵s+۱۰)I_{in}=sV_{in}$$

بنابراین داریم:

$$\text{معادله‌ی مشخصه}:s^۲+۰/۶۲۵s+۱/۲۵=۰\Rightarrow\begin{cases}BW=۰/۶۲۵\\ \omega_r=۱/۱۱۸\end{cases}$$

۳۱ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



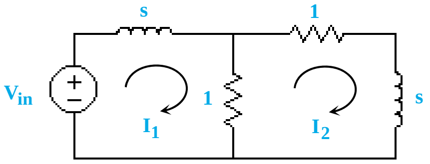
$$kvl:-۰/۴V_{in}+(۲/۴+\frac{۶/۲۵}{s}+\frac{s}{۴})I=۰$$

$$\Rightarrow\text{معادله‌ی مشخصه}:s^۲+۹/۶s+۲۵=۰$$

بنابراین داریم:

$$BW=۹/۶\quad\text{و}\quad\omega_r=۵$$

۳۲ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس برده و سپس معادلات مش آن را می‌نویسیم:



$$\begin{bmatrix}s+۱&-۱\\-۱&s+۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_۱\\I_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_{in}\\۰\end{bmatrix}$$

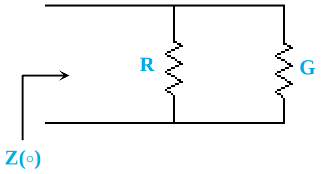
معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم برابر است با:

$$\text{معادله‌ی مشخصه}:(s+۱)(s+۲)-۱=s^۲+۳s+۱=۰\Rightarrow\begin{cases}BW=۲\alpha=۳\\ \omega_r=۱\end{cases}$$

۳۳ـ گزینه «۴» به ازای $s=۰$ خواهیم داشت:

$$Z(۰)=\frac{۱۰۰۰}{۲۵۰۱}\simeq۰/۴$$

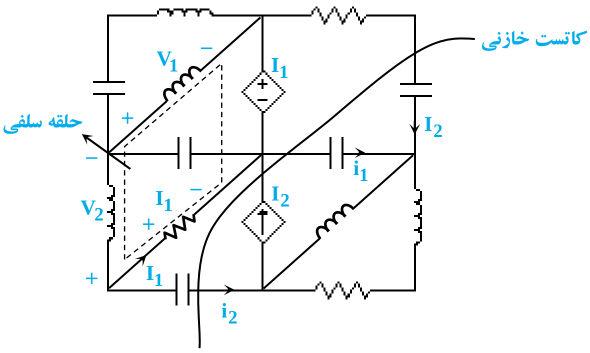
حال به ازای $s=۰$ مدار به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow Z(۰)=\frac{\frac{R}{G}}{R+\frac{۱}{G}}=\frac{R}{RG+۱}\simeq۰/۴$$

با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود که تنها گزینه‌ی ۴ این شرط را ارضا می‌کند.

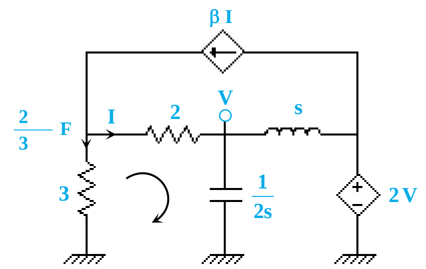
۳۴ـ گزینه «۲» با توجه به شکل روبه‌رو، به ازای $\beta=۱$ مدار دارای یک حلقـه سلفی و یک کاتست خازنی است:



$$i_۱+i_۲=۰$$
$$V_۱+V_۲=۰$$

بنابراین به ازای $\beta=۱$ مدار دو فرکانس طبیعی صفر دارد. به ازای $\beta=۰$ مدار تنها یک کاتست خازنی و در نتیجه یک فرکـانس طبیعـی صـفر دارد و بـه ازای $\beta=-۱$ مدار فرکانس طبیعی صفر ندارد.

۳۵ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با اعمال KVL در گره با پتانسیل V و همچنین اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

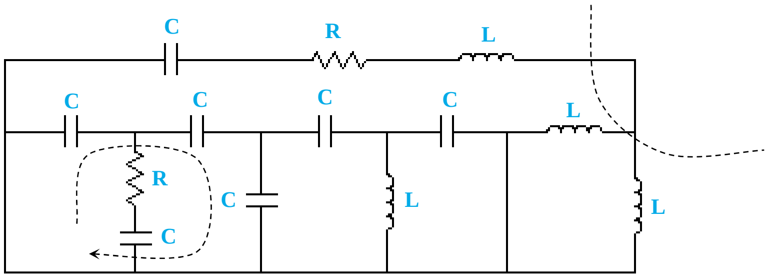
$$\text{KCL}: I+\frac{۲v-v}{s}=۲sv \Rightarrow (۲s^{۲}-۱)v=sI \qquad (۱)$$

$$\text{KVL}: -(\beta-۱)I\times ۳+۲I+v=۰ \Rightarrow v=I(۳\beta-۵) \qquad (۲)$$

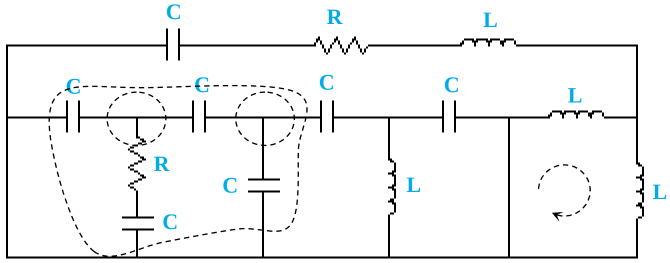
$$(۱),(۲)\rightarrow ((۲s^{۲}-۱)(۳\beta-۵)-s)I=۰$$

در نتیجه با توجه به اینکه ضریب s به هیچ عنوان نمی‌تواند صفر شود، بنابراین این مدار هیچ‌گاه نمی‌تواند در حالت بی‌اتلاف باشد.

۳۶ـ گزینه «۳» ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی مدار را محاسبه می‌کنیم (منابع بی‌اثر می‌شوند):



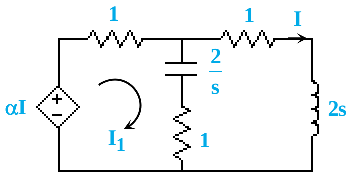
تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی $= n = ۱۱$



حال با توجه به وجود یک حلقه‌ی خازنی و یک کاتست سلفی مدار از مرتبه‌ی ۹ می‌باشد. از طرفی با توجه به وجود ۳ کاتست خازنی و یک حلقه‌ی سلفی، مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی صفر می‌باشد. بنابراین:

تعداد فرکانس طبیعی غیرصفر $= ۹-۴=۵$

۳۷ـ گزینه «۳» ابتدا منابع را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با نوشتن معادلات مش داریم:

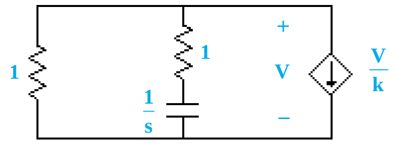
$$\begin{bmatrix} ۲+\frac{۲}{s} & -۱-\frac{۲}{s} \\ -۱-\frac{۲}{s} & ۲+۲s+\frac{۲}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha I \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۲s+۲}{s} & -\frac{(\alpha+۱)s+۲}{s} \\ -\frac{(s+۲)}{s} & \frac{۲s^{۲}+۲s+۲}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

معادله‌ی مشخصه‌ی مدار برابر است با:

$$\frac{۴(s+۱)}{s^{۲}}(s^{۲}+s+۱)-\frac{(s+۲)((\alpha+۱)s+۲)}{s^{۲}}=۰ \Rightarrow ۴s^{۳}+(۷-\alpha)s^{۲}+(۴-۲\alpha)s=۰ \Rightarrow s(s^{۲}+(۷-\alpha)s+۴-۲\alpha)=۰$$

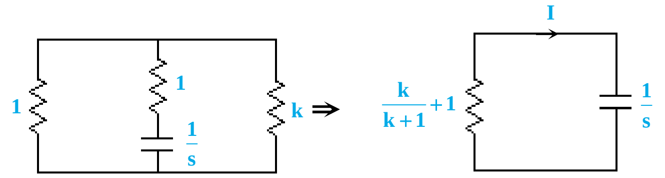
بنابراین به ازای $\alpha=۷$ مدار در حالت بی‌اتلاف خواهد بود.

۳۸ـ گزینه «۴» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$R_{\text{معادل منبع وابسته}}=\frac{V}{\frac{V}{k}}=k\Omega$$

بنابراین داریم:

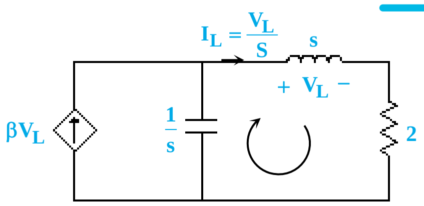


$$\Rightarrow (\frac{۱}{s}+\frac{k}{k+۱}+۱)I=۰ \Rightarrow (\frac{۲k+۱}{k+۱}s+۱)I=۰$$

با توجه به اینکه $s=-\frac{۱}{۳}$ فرکانس طبیعی مدار است، بنابراین:

$$\frac{۲k+۱}{k+۱}=۳ \rightarrow ۳k+۳=۲k+۱ \rightarrow k=-۲$$

۳۹ـ گزینه «۲» ابتدا منابع را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با اعمال kvl داریم:

$$KVL:\frac{۱}{s}(\frac{v_L}{s}-\beta v_L)+v_L+۲\times(\frac{v_L}{s})=۰ \Rightarrow (s^۲+(۲-\beta)s+۱)v_L=۰$$

بنابراین به ازای $\beta=۲$ پاسخ مدار نامیرا خواهد بود.

۴۰ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس ورودی برابر $\frac{۱}{s+\alpha}$ می‌باشد، در نتیجه برای اینکه $ke^{-\alpha t}$ در خروجی ظاهر نشود، باید تبدیل لاپلاس ورودی با صورت تابع تبدیل ساده شود. بنابراین تابع تبدیل باید صفری در $s=-\alpha$ داشته باشد. پس با توجه به نمودار قطب و صفر داریم:

$$\begin{cases}-\alpha=-۳\\-\alpha=۵\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\alpha=۳\\\alpha=-۵\end{cases}$$

۴۱ـ گزینه «۳» برای پاسخ‌گویی به این سؤال درستی تک‌تک عبارت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

عبارت (الف): می‌دانیم که برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی مدار می‌توان منابع ولتاژ مستقل را با اتصال کوتاه و منابع جریان را با مدار باز جایگزین کرد. بر این اساس واضح است که جایگزینی یک منبع ولتاژ توسط یک منبع جریان باعث تغییر ساختار ذاتی مدار و به تبع فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود. لذا این عبارت صحیح است.

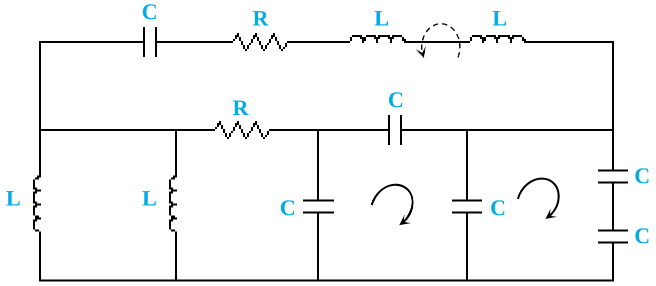
عبارت (ب): با قرار دادن سلف به جای خازن و خازن به جای سلف در مدارهای RLC، مشخصاً کاتست‌ها و حلقه‌های خازنی به کاتست‌ها و حلقه‌های سلفی تبدیل شده و بالعکس. در این پروسه ممکن است یا چند یک فرکانس طبیعی صفر حذف شود یا پدیدار شود؛ اما مطمئناً فرکانس‌های طبیعی غیرصفر بیشتری تولید نشده و حذف هم نخواهد شد، هرچند مقدار این فرکانس‌های طبیعی غیرصفر تغییر خواهد کرد. لذا این عبارت هم صحیح است.

عبارت (پ): برای این که پاسخ ورودی صفر یک مدار کراندار بماند، باید این مدار پایدار مرزی باشد. چنین مداری فرکانس‌های طبیعی در سمت چپ و روی محور $j\omega$ خواهد داشت، با این شرط که فرکانس‌های طبیعیِ روی محور $j\omega$ ساده باشند. به عبارت دیگر هر مداری که صرفاً فرکانس‌های طبیعی‌اش سمت چپ و روی محور $j\omega$ هستند، نمی‌تواند پایدار مرزی باشد و پاسخ ورودی صفر کراندار داشته باشد؛ لذا این عبارت نادرست است.

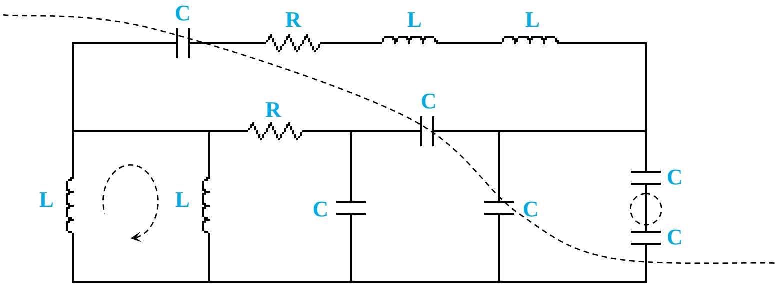
عبارت (ت): می‌دانیم که فرکانس‌های طبیعی یک مدار می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند و فرکانس‌های طبیعی مختلط لزوماً مزدوج هستند؛ لذا دیاگرام شکل (۲) نمی‌تواند نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد، اما دیاگرام شکل (۱) مشکلی نداشته و می‌تواند نماینده فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد که البته ناپایدار است. لذا این عبارت صحیح است.

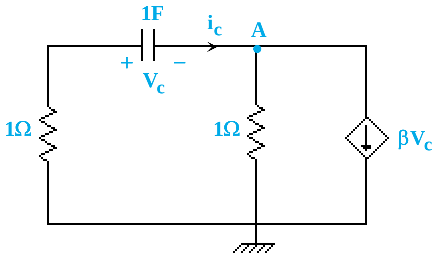
می‌بینیم که عبارت‌های (الف)، (ب) و (ت) صحیح هستند؛ لذا پاسخ گزینه‌ی (۳) می‌باشد.

۴۲ـ گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود مدار از ۱۰ المان ذخیره‌کننده‌ی انرژی تشکیل شده است اما به دلیل وجود یک کاتست سلفی و دو حلقه‌ی خازنی مدار از مرتبه‌ی ۷ می‌باشد.



۴۳ـ گزینه «۱» با توجه به وجود یک حلقه‌ی سلفی و دو کاتست خازنی مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی صفر می‌باشد.





۴۴ـ گزینه «۱» ابتدا با غیرفعال کردن منابع تغذیه مستقل مدار، فرکانس‌های طبیعی و معادله‌ی مشخصه مدار را محاسبه می‌کنیم:

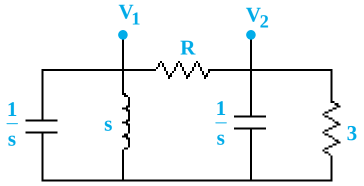
با نوشتن رابطه KCL در گره A داریم:

$$i_c = \frac{-i_c \times ۱ - V_c}{۱} + \beta V_c \xrightarrow{i_c = SV_c} (۲S + ۱ - \beta)V_c = ۰$$

برای پایداری مدار باید داشته باشیم:

$$۱ - \beta > ۰ \Rightarrow \beta < ۱$$

با توجه به این که به ازای مقدار مرزی $\beta = ۱$، مدار دارای فرکانس طبیعی $S = ۰$ است و با توجه به این که مدار با منبع پله (با قطب $S = ۰$) تحریک شده است، بنابراین به ازای $\beta = ۱$ مدار ناپایدار بوده و پاسخ گزینه (۱) می‌باشد.



۴۵ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و سپس معادلات گره‌ی مربوطه را می‌نویسیم:

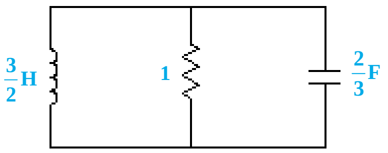
$$\begin{bmatrix} s + \frac{۱}{s} + \frac{۱}{R} & -\frac{۱}{R} \\ -\frac{۱}{R} & s + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = ۰$$

معادله‌ی مشخصه مدار برابر است با:

$$(s + \frac{۱}{s} + \frac{۱}{R})(s + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R}) - \frac{۱}{R^۲} = ۰ \Rightarrow s^۳ + (\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{R})s^۲ + (\frac{۱}{۳R} + ۱)s + (\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R}) = ۰$$

حال با توجه به اینکه ke^{-t} در پاسخ ورودی صفر ظاهر شود، باید $s = -۱$ در معادله‌ی مشخصه مدار صدق کند. بنابراین:

$$-۱ + (\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{R}) + (\frac{۱}{۳R} + ۱) + (\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R}) = ۰ \Rightarrow R = ۲$$

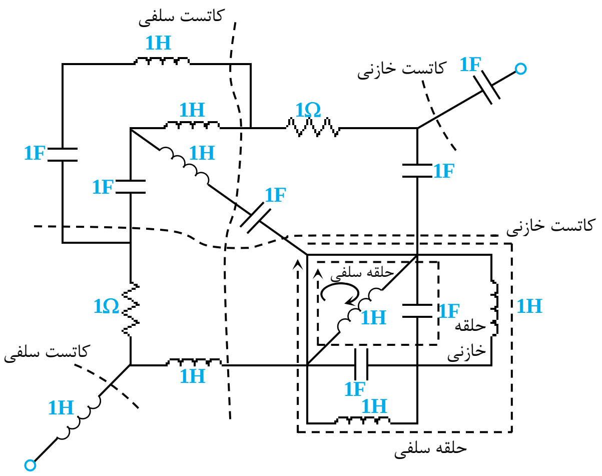


۴۶ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که مدار دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی است. از طرفی وجود یک کاتست سلفی و یک حلقه‌ی خازنی باعث می‌شود که مرتبه‌ی مدار برابر ۴ شود. بنابراین گزینه‌های ۲و۳ نادرست می‌باشند. همچنین با توجه به وجود یک حلقه‌ی سلفی و یک کاتست خازنی، ۲ فرکانس طبیعی صفر در مدار داریم. حال برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی غیرصفر سلف و خازن معادل را با ترکیب سری و موازی آن‌ها بدست می‌آوریم. بنابراین:

معادله‌ی مشخصه RLC موازی: $s^۲ + \frac{۱}{RC}s + \frac{۱}{LC} = s^۲ + \frac{۳}{۲}s + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲s^۲ + ۳s + ۲ = ۰$

۴۷ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه می‌خواهیم $Z(s)$ را در حالتی که خروجی مدار باز است بدست بیاوریم، باید از معادله‌های مشخصه‌ی بدست آمده در آزمایش‌های دوم و سوم استفاده کنیم. از طرفی می‌دانیم معادله‌ی مشخصه در مخرج تبدیل لاپلاس هر متغیر ظاهر می‌شود، از آنجا که $Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$ می‌باشد. پس معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به آزمایشی که $I(s)$ محاسبه می‌شود در صورت $Z(s)$ و معادله‌ی مشخصه‌ی آزمایشی که $V(s)$ محاسبه می‌شود در مخرج $Z(s)$ ظاهر می‌شود. بنابراین با توجه به اینکه $V(s)$ از آزمایش دوم و $I(s)$ محاسبه می‌شود، داریم: $Z(s) = \frac{s^۲ + ۶s + ۲}{s^۲ + ۴s + ۱}$

۴۸ـ گزینه «۲» با توجه به باز بودن کلید $S_۱$ و بسته بودن کلید $S_۲$ می‌توان مدار را به شکل مقابل درنظر گرفت:

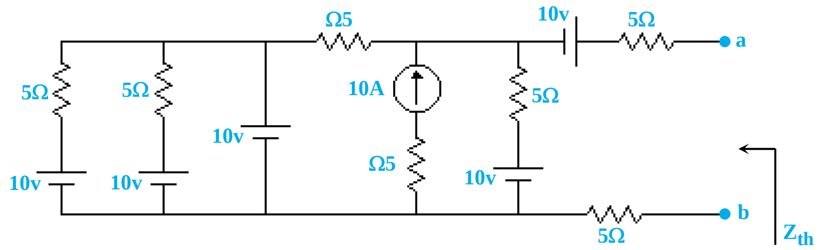


می‌بینیم که مدار دارای ۱۵ عنصر ذخیره‌کننده انرژی است؛ لذا می‌تواند تا ۱۵ فرکانس طبیعی داشته باشد. از طرفی مدار دارای ۲ کاتست سلفی و یک حلقه خازنی است و درنتیجه تعداد فرکانس‌های طبیعی آن و مرتبه‌ی آن برابر $۱۲ = ۱ - ۲ - ۱۵$ می‌باشد. همچنین مدار به علت داشتن دو کاتست خازنی و دو حلقه سلفی، ۴ فرکانس طبیعی صفر دارد؛ لذا در مجموع مدار از مرتبه‌ی ۱۲ است و تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر آن برابر $۸ = ۴ - ۱۲$ می‌باشد.

فصل دهم

«قضایای شبکه»

مثال ۱: در مدار زیر مقدار Z_{th} برحسب اهم کدام است؟



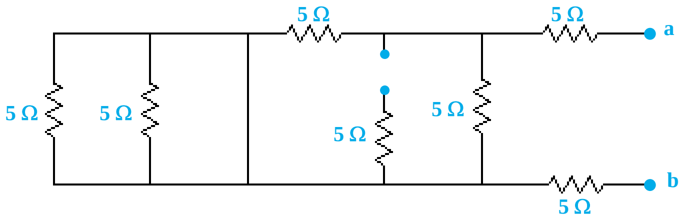
۱) ۱۰

۲) ۱۲/۵

۳) ۵/۵

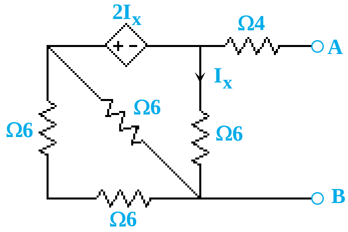
۴) ۱۱/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن Z_{th} تمام منابع مستقل ولتاژ، اتصال کوتاه و منابع مستقل جریان، مدار باز شده و از دو سر a و b، امپدانس معادل دیده می‌شود.



$$Z_{th} = ۵+۵+۵\|۵ = ۱۲/۵\Omega$$

مثال ۲: مقاومت معادل نورتن از دو پایانه B و A در شکل داده شده چند اهم است؟



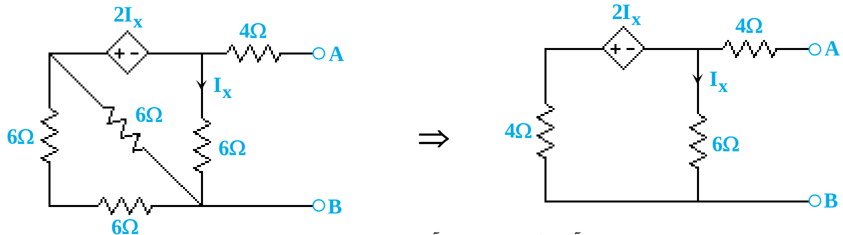
۱) ۶

۲) ۴

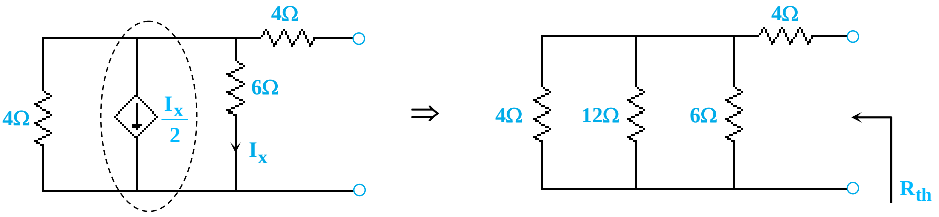
۳) ۶/۴

۴) ۱۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا مدار را ساده کرده و سپس در سمت چپ مدار، تبدیل منابع انجام می‌دهیم.



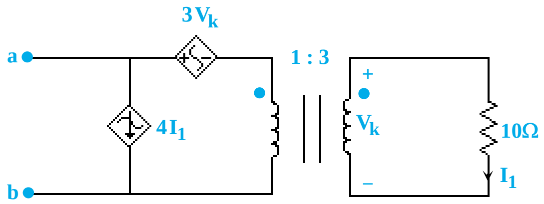
در ادامه، ولتاژ دو سر منبع جریان را بر جریان آن تقسیم می‌کنیم و مقاومت معادل آن را بدست می‌آوریم.



$$R = \frac{6I_x}{\frac{I_x}{2}} = 12\Omega$$

$$R_{th} = ۴ + [۶ \| ۱۲ \| ۴] = ۶\Omega$$

مثال ۳: در مدار زیر مقدار R_{th} برحسب اهم کدام است؟



۱) ۳/۲۱

۲) ۴/۷۶

۳) ۵/۱۳

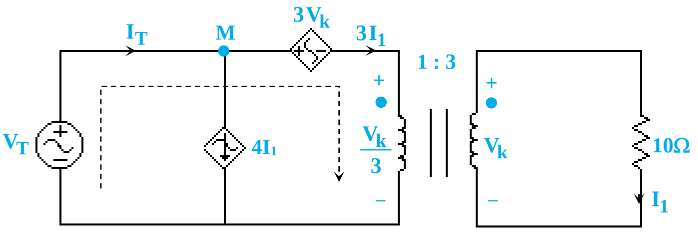
۴) ۴/۱۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با اعمال منبع ولتاژ V_T به مدار، رابطه V_T را با I_T محاسبه می‌کنیم.

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست و سمت چپ داریم:

$$I_۱=\frac{V_K}{۱۰} \quad (۱) \quad , \quad V_T=۳V_K+\frac{V_K}{۳}=\frac{۱۰}{۳}V_K \quad (۲)$$

با نوشتن KCL در گره M داریم:

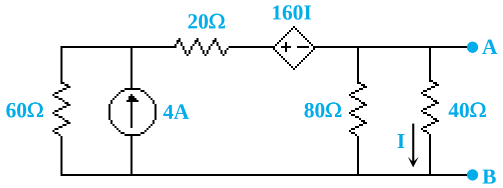


$$I_T=۴I_۱+۳I_۱=۷I_۱ \Rightarrow I_T=۷I_۱ \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} I_۱=\frac{۰/۳V_T}{۱۰} \quad (۴)$$

$$\xrightarrow{(۴),(۳)} I_T=\frac{۷\times ۰/۳V_T}{۱۰}=۰/۲۱V_T \Rightarrow \frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{I_T}}=۴/۷۶\Omega$$

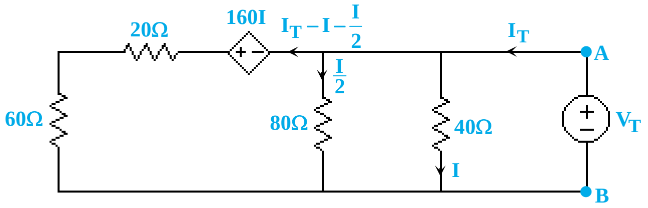
مثال۴: با توجه به شکل زیر، مقاومت معادل نورتن بین A و B برحسب اهم چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای پیدا کردن مقاومت تونن منبع جریان را غیرفعال می‌کنیم و منبع ولتاژ V_T که به مدار جریان I_T تزریق می‌کند را به دو سر A و B وصل می‌کنیم. ابتدا توجه کنید چون جریان مقاومت ۴۰ اهمی برابر I است، جریان مقاومت ۸۰ اهمی نصف این جریان یعنی برابر $\frac{I}{۲}$ است.

حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:

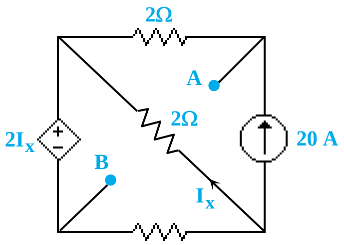


$$-۱۶۰I+(۲۰+۶۰)(I_T-\frac{۳}{۲}I)-۸۰(\frac{I}{۲})=۰ \Rightarrow -۱۶۰I+۸۰I_T-۱۲۰I-۴۰I=۰ \Rightarrow ۸۰I_T=۳۲۰I \Rightarrow I=\frac{۸۰I_T}{۳۲۰}=\frac{I_T}{۴}$$

از طرفی چون $V_T=۴۰I$، لذا داریم:

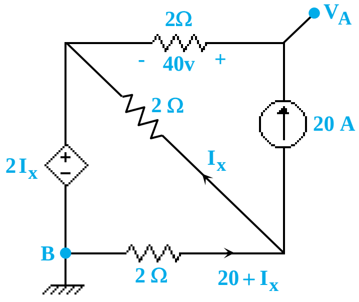
$$V_T=۴۰(\frac{I_T}{۴})=\underset{R_{th}}{\underset{\downarrow}{۱۰}}\ I_T \Rightarrow \mathbf{R_{th}=۱۰\Omega}$$

مثال۵: ولتاژ تونن در شکل داده شده از دیدگاه B و A چند ولت است؟



۱) $\frac{۴۰}{۳}$
۲) ۸۰
۳) ۴۰
۴) $\frac{۸۰}{۳}$

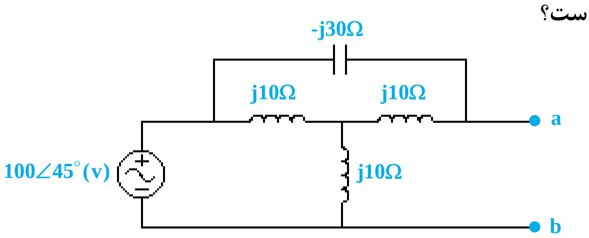
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به علت وجود منبع جریان در حلقه بالا، مدار زیر دارای فقط یک حلقه مفید برای KVL می‌باشد که در پایین مدار قرار دارد. لذا با نوشتن KVL در آن داریم:



$$۲I_x+۲I_x+۲(۲۰+I_x)=۰ \Rightarrow I_x=-\frac{۴۰}{۶}(A)$$

$$V_A=۴۰+۲I_x=۴۰+۲(-\frac{۴۰}{۶})=\frac{۸۰}{۳}v$$

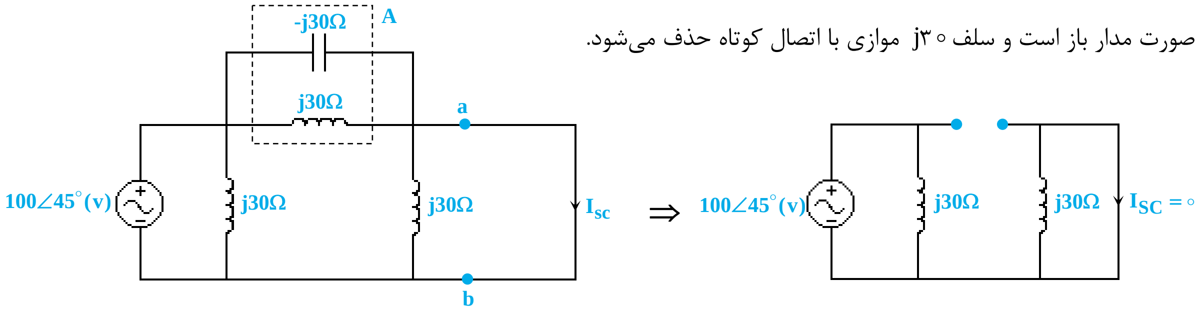
مثال ۶: در مدار زیر مقدار جریان اتصال کوتاه برحسب آمپر در نقاط (a,b) کدام است؟



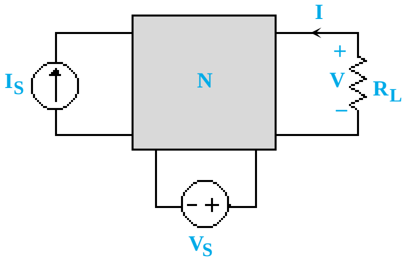
۱) ۲A
۲) ۱A
۳) ۳A
۴) ۰A

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با تبدیل ستاره به مثلث برای سه سلف j۱۰، مدار به صورت زیر خواهد شد.

حال قسمت A به صورت مدار باز است و سلف j۳۰ موازی با اتصال کوتاه حذف می‌شود.



مثال ۷: یک شبکه شامل مقاومت‌های خطی و مثبت می‌باشد. به این شبکه یک منبع جریان و یک منبع ولتاژ متصل است. در این حالت برای مقاومت متصل به شبکه رابطه زیر برقرار است. حداکثر توان انتقالی به مقاومت چند وات است؟



$$(۳V + ۴\sin ۲t = ۲ + ۳I)$$

۱) ۰/۳۳
۲) ۰/۲۲
۳) ۰/۱۱
۴) ۰/۴۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن حداکثر توان انتقالی به بار R_L، باید مقدار آن با R_{th} دیده شده از دو سرش برابر باشد و در این حالت می‌توان از فرمول‌های $I_{rms}{}^{۲}.R_L$ یا $\frac{V_{th}^{۲}}{۴R_{th}}$ برای بدست آوردن توان حداکثر استفاده کرد.

$$۳V + ۴\sin ۲t = ۲ + ۳I \Rightarrow V = \frac{۳}{۳}I + \frac{۲}{۳} - \frac{۴}{۳}\sin ۲t$$

با توجه به رابطه $V = R_{th}.I + V_{th}$ داریم:

$$R_{th} = \frac{۳}{۳} = ۱\Omega \quad , \quad V_{th} = \frac{۲}{۳} - \frac{۴}{۳}\sin ۲t$$

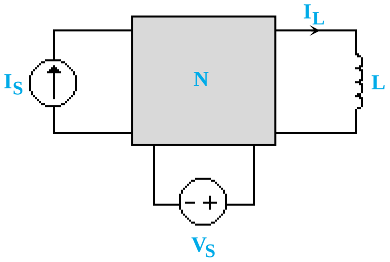
برای بدست آوردن مقدار rms ولتاژ تونن از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$f(t) = f_۱(t) + f_۲(t) \Rightarrow \text{rms}(f(t)) = \sqrt{\text{rms}(f_۱(t))^{۲} + \text{rms}(f_۲(t))^{۲}}$$

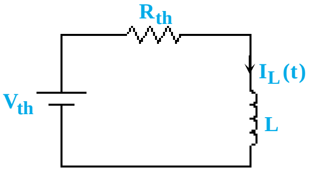
$$f_۱(t) = \frac{۲}{۳} \quad , \quad f_۲(t) = -\frac{۴}{۳}\sin ۲t \quad و \quad \text{rms}\,[f_۱(t)] = \frac{۲}{۳}A \quad , \quad \text{rms}[f_۲(t)] = \frac{۴}{۳\sqrt{۲}}A$$

$$\Rightarrow V_{th}(\text{rms}) = \text{rms}(f(t)) = \sqrt{(\frac{۲}{۳})^{۲} + (\frac{۴}{۳\sqrt{۲}})^{۲}} = \sqrt{\frac{۴+۸}{۹}} = \sqrt{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow P_L(\max) = \frac{V_{th}^{۲}}{۴R_{th}} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۴\times ۱} = \frac{۱}{۳} = ۰/۳۳w$$

مثال ۸: شبکه N فقط شامل مقاومت‌های خطی و مثبت می‌باشد. اگر $I_S = ۴A$ و $V_S = ۶v$ باشد، آنگاه معادله جریان سلف به صورت $I_L = ۷ - ۳e^{-at}$ خواهد بود. حال اگر $I_S = ۸A$ و $V_S = ۱۲v$ شود، معادله جریان سلف کدام است؟



۱) $۷ - ۱۲e^{-at}$
۲) $۷ - ۶e^{-at}$
۳) $۱۴ - ۱۰e^{-at}$
۴) $۱۴ - ۸e^{-at}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر معادل تونن شبکه N جایگزین شود، داریم:

$$I_L(t)=I_L(\infty)+[I_L(\circ^+)-I_L(\infty)]e^{-at}$$

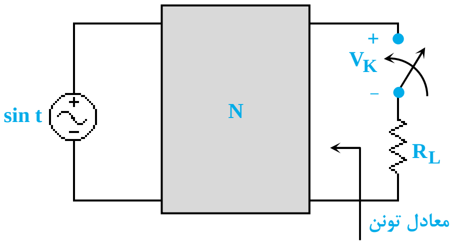
$$I_L(\infty)=\frac{V_{th}}{R_{th}}=۷A \qquad و \qquad I_L(\circ^+)-I_L(\infty)=-۳ \Rightarrow I_L(\circ^+)=۴A$$

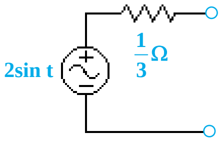
در صورت دو برابر شدن منابع ورودی، مقدار R_{th} ثابت و مقدار V_{th} دو برابر می‌شود. اما دقت کنید که این مسأله تأثیری در جریان اولیه سلف ندارد و جریان اولیه سلف ثابت باقی می‌ماند. لذا داریم:

$$V_{th}'=۲V_{th} \Rightarrow I_L'(\infty)=\frac{V_{th}'}{R_{th}}=۷\times۲=۱۴A$$

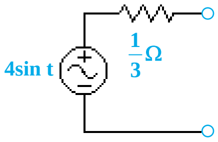
$$\Rightarrow I_L(t)=I_L'(\infty)+[I_L(\circ^+)-I_L'(\infty)]e^{-at} \Rightarrow \mathbf{I_L(t)=۱۴+[۴-۱۴]e^{-at}=۱۴-۱\circ e^{-at}}$$

مثال ۹: **در شبکه مقاومتی و خطی زیر حداکثر توان انتقالی به بار R_L در حالتی که کلید بسته باشد، برابر ۶w می‌باشد. اگر ولتاژ دو سر کلید K در $t=\frac{\pi}{۳}$ برابر $۲\sqrt{۳}$ ولت باشد، مدار معادل تونن شبکه کدام است؟**

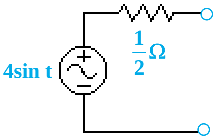




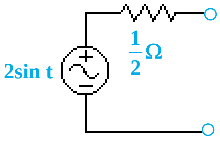
(۱)



(۲)



(۳)



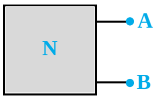
(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مقدار توان حداکثر از فرمول $\frac{V_{th}^۲(rms)}{۴R_{th}}$ محاسبه می‌شود. لذا ابتدا مقدار V_{th} باید محاسبه شود. ولتاژ دو سر کلید در حالتی که کلید باز باشد، همان ولتاژ تونن شبکه بوده و تابعی از sin t خواهد بود. حال داریم:

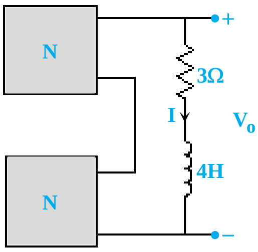
$$V_{th}=A\sin t \quad , \quad V_{th}(t=\frac{\pi}{۳})=V_k(t=\frac{\pi}{۳})=۲\sqrt{۳} \Rightarrow A\sin(\frac{\pi}{۳})=۲\sqrt{۳} \Rightarrow A=۴ \Rightarrow V_{th}=۴\sin t$$

$$rms(V_{th})=\frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow P_{max}=\frac{V_{th}^۲(rms)}{۴R_{th}} \Rightarrow ۶=\frac{(\frac{۴}{\sqrt{۲}})^۲}{۴R_{th}} \Rightarrow \mathbf{R_{th}=\frac{۱}{۳}\Omega}$$

مثال ۱۰: **در مدار زیر شبکه N شامل عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان است. اگر در مدار (الف) بین پایه‌های (A,B) یک سلف یک هانری قرار گیرد، جریان سلف به صورت $e^{-۲t}$ خواهد بود و اگر به جای سلف یک هانری، یک مقاومت یک اهمی قرار گیرد، ولتاژ V_{AB} به صورت e^{-t} می‌شود. حال در مدار (ب) مقدار جریان مدار در $t=\circ^+$ برابر با چند آمپر است؟**



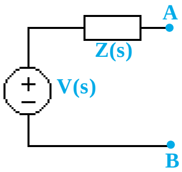
(الف)

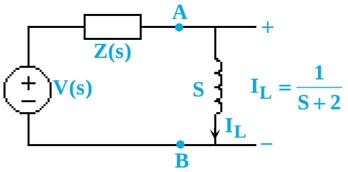


(ب)

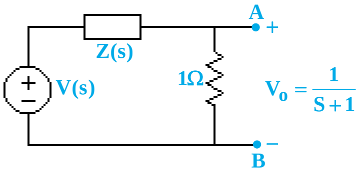
۱) ۰
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در صورتی که مدار معادل شبکه N در حوزه فرکانس به صورت زیر باشد، داریم:





(1)



(2)

با نوشتن رابطه جریان در مدار (۱) داریم:

$$I_L(S) = \frac{V(S)}{Z(S)+S} = \frac{۱}{S+۲} \qquad (۱)$$

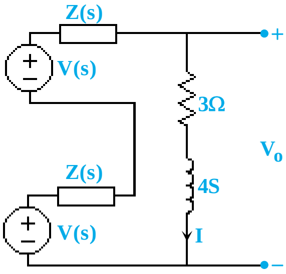
با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ از مدار (۲) داریم:

$$V_o(S) = \frac{۱}{۱+Z(S)} \times V(S) = \frac{۱}{S+۱} \qquad (۲)$$

از حل دستگاه معادلات شامل روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V(S) = S-۱ \qquad Z(S) = S^۲ - ۲$$

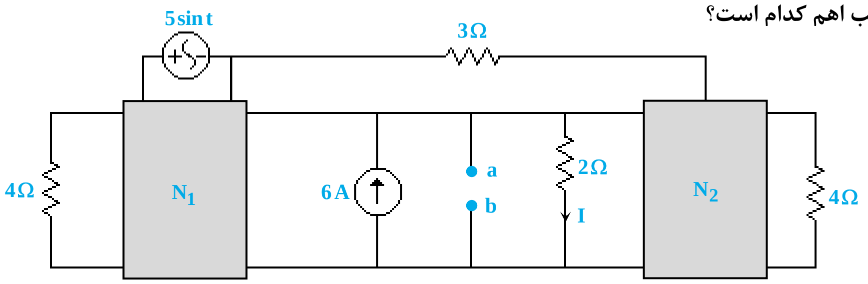
با قرار دادن مدار معادل شبکه N در مدار (ب) داریم:



$$I = \frac{۲V(S)}{۲Z(S)+۳+۴S} = \frac{۲(S-۱)}{۲(S^۲-۲)+۳+۴S} = \frac{۲(S-۱)}{۲S^۲+۴S-۱}$$

$$I(t=\circ^+) = \lim_{s\to\infty} SI(S) = \frac{S(۲(S-۱))}{۲S^۲+۴S-۱} = ۱A$$

مثال۱۱: در مدارشکل زیر $N_۱$ و $N_۲$، شبکه‌های مقاومتی خطی و فاقد منابع مستقل هستند و معادله جریان I به صورت $I = ۴ - ۳\sin t$ می‌باشد. در این حالت مقاومت تونن دیده شده از پایه‌های b و a بر حسب اهم کدام است؟



۱) ۳

۲) ۱

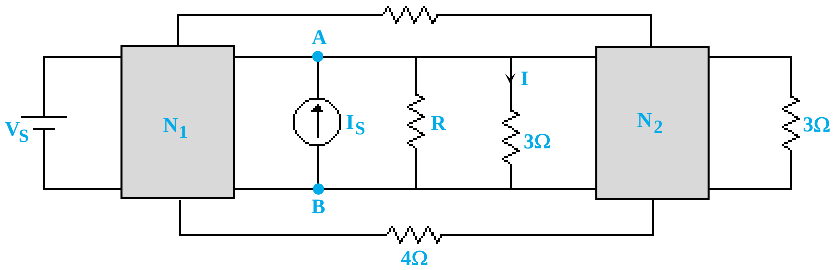
۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای بدست آوردن مقاومت تونن از دو سر b و a، می‌توان یک منبع جریان در نقاط a و b قرار داد و ولتاژ دو سر آن را به جریان آن تقسیم کرد. در این سؤال، می‌توان این منبع جریان را همان منبع جریان ۶ آمپر فرض کرد. لازم به ذکر است که در این حالت، بقیه منابع مستقل ولتاژ و جریان (که در اینجا فقط منبع ولتاژ $۵\sin t$است) باید حذف شوند، زیرا فقط R_{th} را می‌خواهیم حساب کنیم و با V_{th} کاری نداریم. بنابراین قسمت سینوسی I نیز صفر خواهد شد. حال داریم:

$$I = ۴A \Rightarrow V_{ab} = ۲I = ۲\times۴ = ۸v \Rightarrow R_{th} = \frac{V_{ab}}{۶} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}\Omega$$

مثال۱۲: در مدار زیر، شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ به صورت خطی و شامل مقاومت‌های مثبت می‌باشند. به ازای $R = ۳\Omega$ رابطه $I = \frac{۱}{۶}I_S + \frac{۱}{۷}V_S$ برقرار است. به ازای چه مقدار R، توان جذبی مقاومت R برحسب اهم حداکثر می‌شود؟



۱) ۰/۶

۲) ۰/۵

۳) ۰/۴

۴) ۰/۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اعمال منبع جریان بین پایه‌های B و A، می‌توان مقاومت تونن از دو سر B و A را از تقسیم ولتاژ دو سر منبع جریان، بر مقدار جریان منبع جریان محاسبه کرد. ولتاژ دو سر منبع جریان با توجه به موازی بودن مقاومت ۳ اهمی با آن، به صورت ۳I است. بنابراین مقاومت تونن از دو سر B و A به صورت روبرو است:

$$R_{th} = \frac{V_{AB}}{I_S} = \frac{۳I}{I_S}$$

برای محاسبه مقاومت تونن، باید منابع مستقل غیرفعال شوند. (زیرا به دنبال یافتن مقاومت تونن شبکه هستیم و با V_{th} کاری نداریم و لذا تمامی منابع مستقل به جز I_T و V_T (که خودمان قرار می‌دهیم و در اینجا با I_S برابر است) را بی‌اثر می‌کنیم.) بنابراین با صفر شدن V_S در رابطه I داریم:

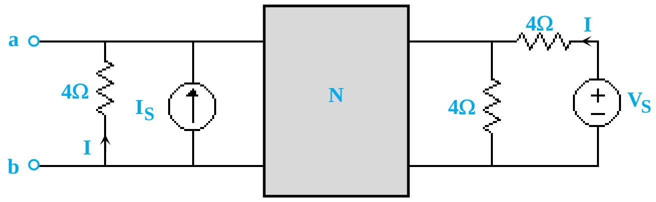
$$I=\frac{۱}{۶}I_S \Rightarrow R_{th}=\frac{۳I}{I_S}=\frac{۳\times\frac{۱}{۶}I_S}{I_S}=\frac{۱}{۲}\Omega$$

با توجه به موازی بودن R با پایانه‌های B و A، در صورتی که مقاومت تونن شبکه در حالت نبودن مقاومت R را R'_{th} نامگذاری کنیم، داریم:

$$R'_{th}\parallel R=R_{th} \Rightarrow R_{th}=R'_{th}\parallel ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}=R'_{th}\parallel ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۳R'_{th}}{۳+R'_{th}} \Rightarrow R'_{th}=۰/۶\Omega$$

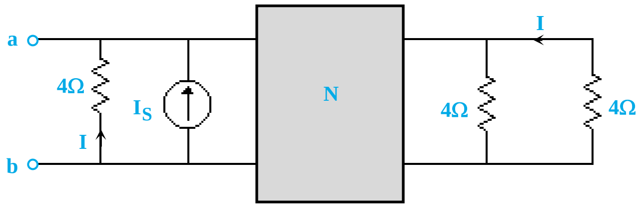
برای اینکه توان تلفاتی مقاومت R حداکثر شود، باید مقدار R برابر مقاومت تونن از دو سر آن در حالت عدم وجود R باشد. بنابراین R باید برابر R'_{th} باشد. $\mathbf{R=R'_{th}=۰/۶\Omega}$

مثال ۱۳: در مدار زیر مقدار جریان I برابر با $-\frac{۱}{۴}I_S-\frac{۱}{۱۶}V_S$ می‌باشد. در صورتی که مقدار I_S برابر صفر و مقدار V_S برابر با $\frac{۳۲}{۳}$ ولت باشد، مقدار جریان $I_۱$ کدام است؟ (شبکه N از تعداد متناهی مقاومت موازی، مثبت و مساوی تشکیل شده است.)



۱) ۱A
۲) ۳A
۳) ۲A
۴) ۴A

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا از دو سر (a,b) مقاومت تونن مدار را محاسبه می‌کنیم. در این حالت V_S را برابر صفر فرض می‌کنیم.



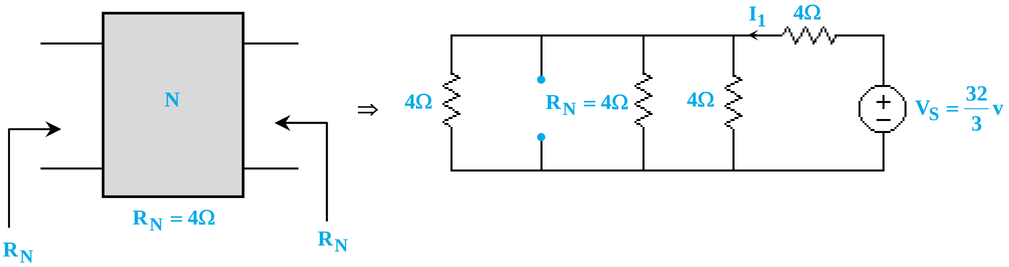
$$V_S=۰ \Rightarrow I=-\frac{۱}{۴}I_S$$

$$R_{th}=\frac{V_{ab}}{I_S}=-\frac{۴I}{I_S}=\frac{-۴\times(-\frac{۱}{۴}I_S)}{I_S}=۱\Omega$$

اگر حاصل موازی مقاومت‌های داخل شبکه N را R_N فرض کنیم، داریم:

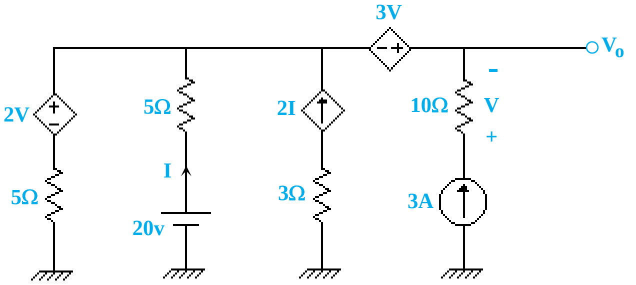
$$R_{th}=۴\Omega\parallel R_N\parallel ۴\Omega\parallel ۴\Omega \Rightarrow ۱\Omega=۴\Omega\parallel R_N\parallel ۴\Omega\parallel ۴\Omega \Rightarrow R_N=۴\Omega$$

دقت کنید که به علت وجود مقاومت‌های موازی در درون شبکه N، مقدار مقاومت معادل شبکه از هر دو سر برابر است.

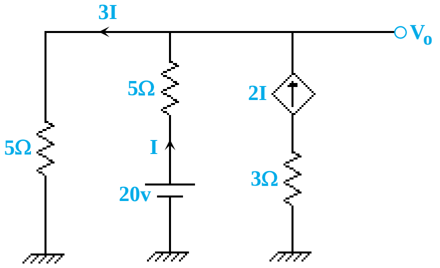


$$I_۱=\frac{\frac{۳۲}{۳}}{(۴+۴\parallel ۴\parallel ۴)}=\frac{\frac{۳۲}{۳}}{۴+\frac{۴}{۳}}=\frac{\frac{۳۲}{۳}}{\frac{۱۶}{۳}}=\mathbf{۲A}$$

مثال ۱۴: در مدار زیر مقدار ولتاژ V_o چند ولت است؟

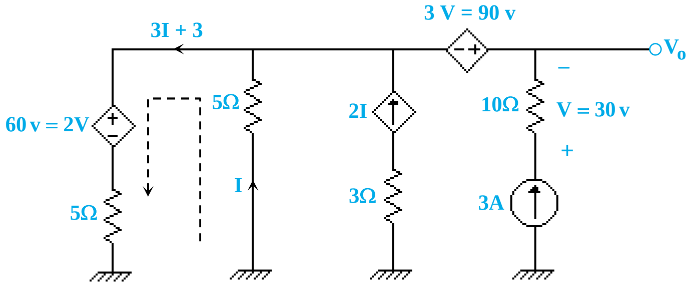


۱) ۱۷۶/۷۱
۲) ۲۳۱/۱۷
۳) ۱۱۵/۱۱
۴) ۱۲۳/۷۵



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از قضیه جمع آثار، ابتدا منبع جریان ۳A را غیرفعال (مدار باز) کرده و خروجی را در اثر منبع ولتاژ ۲۰v بدست می‌آوریم. با غیرفعال شدن منبع جریان، $V = ۰$ شده و منابع ولتاژ وابسته به V اتصال کوتاه می‌شوند. حال با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$۲۰ = ۵I + ۳I \times ۵ \quad \Rightarrow \quad I = ۱A \quad , \quad \mathbf{V_o = ۳I \times ۵ = ۱۵v}$$



حال منبع جریان ۳A را در مدار قرار داده و منبع ولتاژ ۲۰v را غیرفعال (اتصال کوتاه) می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

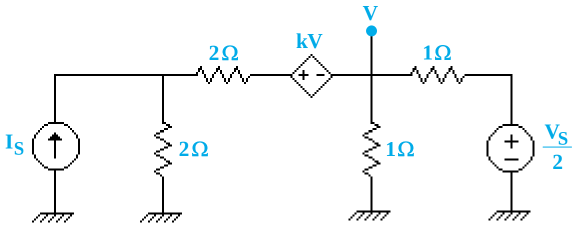
$$۵I + ۶۰ + (۳I + ۳)(۵) = ۰ \quad \Rightarrow \quad I = -۳/۷۵A$$

$$\Rightarrow \quad V_o = ۳V + (-۵I) = ۹۰ + (-۵ \times -۳/۷۵) = ۱۰۸/۷۵v$$

حال با استفاده از قضیه جمع آثار، خروجی به صورت زیر بدست می‌آید.

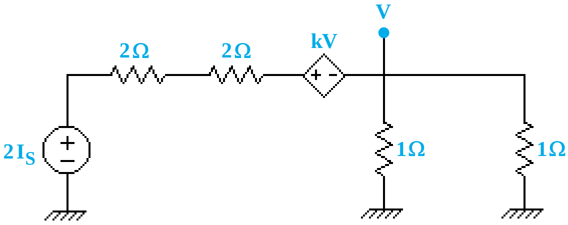
$$\mathbf{V_o = ۱۵ + ۱۰۸/۷۵ = ۱۲۳/۷۵v}$$

مثال ۱۵: در مدار زیر به ازای کدام گزینه، مقدار ولتاژ V در اثر منبع ولتاژ مستقل مدار دو برابر ولتاژ V در اثر منبع جریان مستقل مدار است؟



۱) $V_S = I_S$ ، $k = ۱$
۲) $V_S = ۲I_S$ ، $k = ۲$
۳) $V_S = I_S$
۴) $V_S = ۲I_S$

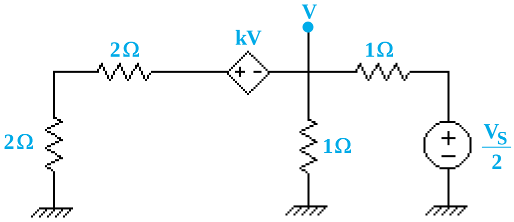
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا ولتاژ V در اثر منبع جریان I_S را با غیرفعال کردن منبع $\frac{V_S}{۲}$، محاسبه می‌کنیم. با تبدیل منابع در سمت چپ مدار و نوشتن قانون KCL در گره شامل ولتاژ V داریم:



$$\frac{V + kV - ۲I_S}{۴} + \frac{V}{۱} + \frac{V}{۱} = ۰$$

$$\Rightarrow \quad V + kV - ۲I_S + ۸V = ۰ \quad \Rightarrow \quad V = \frac{۲I_S}{۹ + k}$$

در ادامه ولتاژ V ناشی از منبع ولتاژ $\frac{V_S}{۲}$ را بعد از غیرفعال کردن منبع I_S، با نوشتن KCL در گره شامل ولتاژ V محاسبه می‌کنیم.



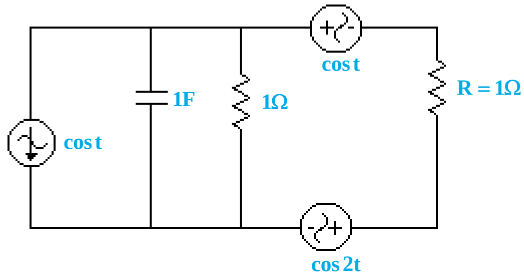
$$\frac{V + kV}{۴} + \frac{V}{۱} + \frac{V - \frac{V_S}{۲}}{۱} = ۰$$

$$V + kV + ۴V + ۴V - ۲V_S = ۰ \quad \Rightarrow \quad V = \frac{۲V_S}{۹ + k}$$

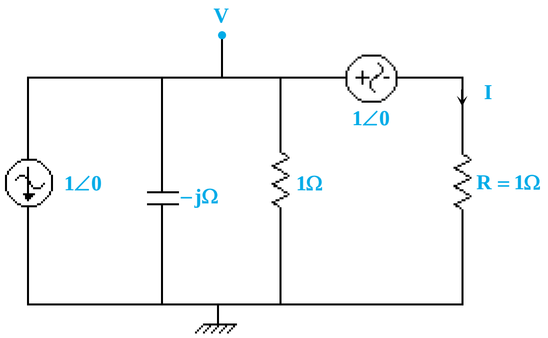
با توجه به فرض مسأله مبنی بر اینکه ولتاژ V ناشی از منبع ولتاژ $\frac{V_S}{۲}$، دو برابر ولتاژ V ناشی از منبع جریان است، داریم:

$$\frac{۲V_S}{۹ + k} = ۲ \times \frac{۲I_S}{۹ + k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_S = ۲I_S}$$

مثال ۱۶: در مدار زیر اندازه توان راکتیو خازن چند برابر اندازه توان مصرفی مقاومت R است؟



۱) ۰/۲
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۰۵



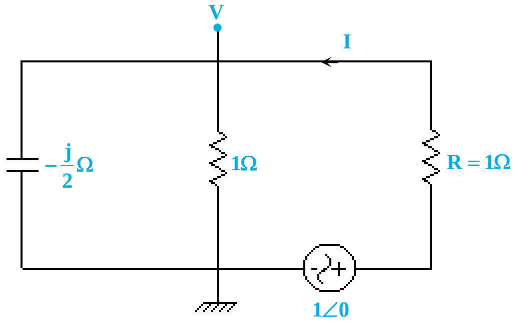
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا با توجه به اینکه فرکانس منابع مدار مختلف است، از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم و فقط منابع با $\omega = ۱$ را در نظر می‌گیریم.

با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$\frac{V}{-j}+\frac{V}{۱}+\frac{V-۱}{۱}+۱=۰ \Rightarrow V=۰ \Rightarrow Q_C=-\frac{V_{rms}^۲}{X_C}=۰$$

$$I=\frac{V-۱}{۱}=\frac{۰-۱}{۱}=-۱A \Rightarrow P_R=I_{rms}^۲\times ۱=(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲\times ۱=\frac{۱}{۲}w$$

حال در ادامه فقط منبع ولتاژ با $\omega = ۲$ را در نظر می‌گیریم:



$$I=\frac{۱}{۱+۱\|(-\frac{j}{۲})}=\frac{۱}{۱+\frac{-\frac{j}{۲}}{۱-\frac{j}{۲}}}=\frac{۱}{\frac{۶}{۵}-j\frac{۲}{۵}} \qquad |I|=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۶}{۵})^۲+(\frac{۲}{۵})^۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}A$$

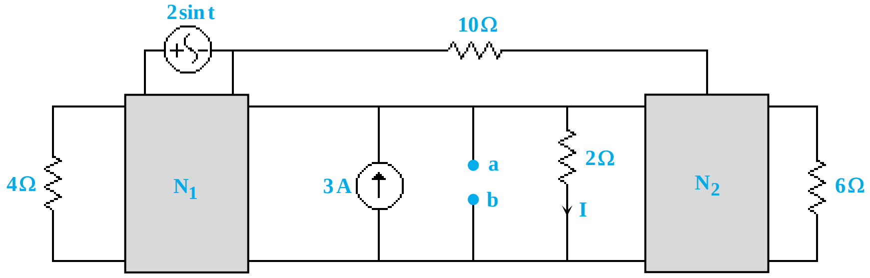
$$V=۱\angle ۰-R\ .\ I=۱\angle ۰-۱\times\frac{۱}{\frac{۶}{۵}-j\frac{۲}{۵}}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}j \Rightarrow |V|=\frac{۱}{۴}\sqrt{۲}v$$

$$Q_c=\frac{-V_{rms}^۲}{X_c}=\frac{-(\frac{۱}{۴}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}})^۲}{۰/۵}=-۰/۱۲۵\ VAR \quad و \quad P_R=I_{rms}^۲\times ۱=\frac{۱}{۲}\times(\frac{\sqrt{۱۰}}{۴})^۲\times ۱=\frac{۵}{۱۶}w$$

با توجه به قضیه جمع آثار داریم:

$$P_R(T)=\frac{۵}{۱۶}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱۳}{۱۶}w$$
$$Q_c(T)=۰-۰/۱۲۵=-۰/۱۲۵\ VAR$$
$$\Rightarrow \frac{|Q_c|}{|P_R|}=\frac{۰/۱۲۵}{\frac{۱۳}{۱۶}}=\frac{۲}{۱۳}\simeq ۰/۱۵$$

مثال ۱۷: **در مدار شکل زیر $N_۱$ و $N_۲$، شبکه‌های مقاومتی خطی و فاقد منابع مستقل هستند و معادله جریان I به صورت $I=۲-\frac{۱}{۵}\sin t$ می‌باشد. در صورتی که منبع جریان ۳ آمپری به منبع جریان ۴ آمپری تبدیل شود، جریان I، چقدر زیاد می‌شود؟**



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این مثال، ابتدا معادله‌ی جریان I را بصورت ترکیب خطی منبع ولتاژ و منبع جریان مدار بدست می‌آوریم و در ادامه جریان I را در دو حالت سؤال محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که در مدار فقط دو منبع مستقل وجود دارد، جریان I را می‌توان بصورت ترکیبی خطی از آنها بیان کرد:

$$I=\alpha I_S+\beta V_S \quad , \quad I(\text{حالت اول})=۲-\frac{۱}{۵}\sin t$$

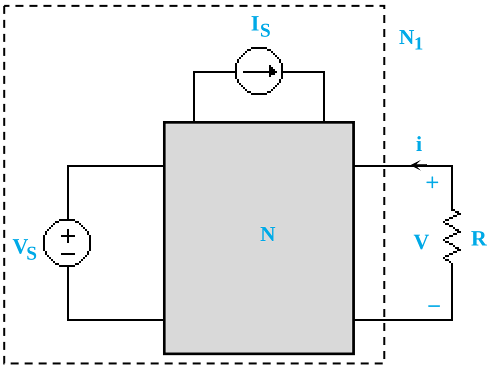
$$I=۲-\frac{۱}{۵}\sin t=\alpha\times ۳+\beta\times ۲\sin t \Rightarrow \alpha=\frac{۲}{۳} \quad , \quad \beta=-\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow I=\frac{۲}{۳}I_S-\frac{۱}{۱۰}V_S$$

حال اگر منبع جریان I_S، ۴ آمپر باشد و V_S تغییری نکند، داریم:

$$I(\text{حالت دوم})=\frac{۲}{۳}\times ۴-\frac{۱}{۱۰}\times ۲\sin t \Rightarrow I(\text{حالت دوم})=\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۵}\sin t$$

$$\Delta I=I\ (\text{حالت دوم})-I\ (\text{حالت اول})=\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۵}\sin t-(۲-\frac{۱}{۵}\sin t)=\frac{۲}{۳}\mathbf{A}$$

مثال ۱۸: در مدار زیر، شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی متغیر با زمان است. اگر $V_S = \cos t$ و $I_S = ۲$ باشد، رابطه ولتاژ-جریان شبکه $N_۱$ به صورت $۳V - ۲i + ۶\cos ۲t + ۲ = ۰$ خواهد بود. به ازای $V_S = ۲\sin t$ و $I_S = ۱۲\cos ۲t$ حداکثر توان قابل جذب توسط مقاومت R کدام است؟



۱) ۵ وات

۲) ۱۰ وات

۳) ۱۵ وات

۴) ۳۰ وات

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا سعی می‌کنیم از روی رابطه ولتاژ ـ جریان شبکه $N_۱$ مقادیر R_{th} و V_{th} دیده شده از سمت راست شبکه $N_۱$ را به دست آوریم. در گام بعدی با استفاده از قضیه جمع آثار مقدار V_{th} به دست آمده را به صورت ترکیبی خطی از منابع V_S و I_S بیان می‌کنیم. حال داریم:

$$۳V - ۲i + ۶\cos ۲t + ۲ = ۰ \Rightarrow V = \frac{۲}{۳}i - ۲\cos ۲t - \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\cos ۲t = ۲\cos^۲ t - ۱} V = \frac{۲}{۳}i - ۴\cos^۲ t + \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{۲}{۳} \ , \ V_{th} = -۴\cos^۲ t + \frac{۴}{۳} = -۴\cos t \cdot V_S + \frac{۲}{۳}I_S$$

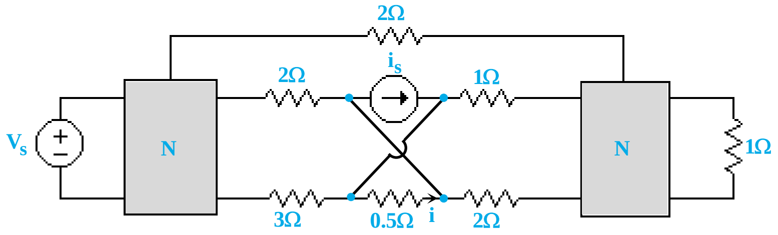
اکنون در شرایط جدید مقدار V_{th} را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{th} = -۴\cos t \cdot V_S + \frac{۲}{۳}I_S = -۴\cos t \times ۲\sin t + \frac{۲}{۳} \times ۱۲\cos ۲t = -۴\sin ۲t + ۸\cos ۲t$$

در نهایت حداکثر توانی که به بار R_L می‌رسد، برابر خواهد بود با:

$$P_{R_L,\max} = \frac{V_{th}^۲(\text{rms})}{۴R_{th}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times (۴^۲ + ۸^۲)}{۴ \times \frac{۲}{۳}} = ۱۵\text{w}$$

مثال ۱۹: در مدار زیر شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی می‌باشد و می‌دانیم $i = \frac{۲}{۳}i_s - V_s$. به جای مقاومت ۰/۵ اهم چه مقاومتی در مدار قرار دهیم تا توان منبع جریان i_s دو برابر شود؟

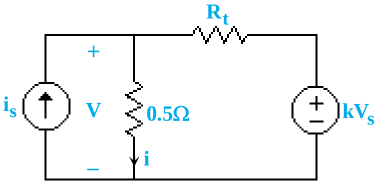


۱) ۱Ω

۲) ۱/۵Ω

۳) ۲Ω

۴) ۳Ω



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دقت کنید که در این مدار، منبع جریان i_s و مقاومت ۰/۵ اهم موازی هستند. حال می‌توان از دو سر این عناصر موازی به باقی مدار نگاه کرده و یک مدار معادل تونن برای آن در نظر گرفت:

حال با استفاده از اطلاعات مسئله و شکل روبه‌رو مقادیر R_t و k را پیدا می‌کنیم:

$$i = \frac{۲}{۳}i_s - V_s \ , \ V = \frac{۱}{۳}i - \frac{V_s}{۲} \begin{cases} V_s = ۰ \Rightarrow i = \dfrac{R_t}{R_t + ۰/۵} \times i_s = \dfrac{۲}{۳}i_s \Rightarrow R_t = ۱\Omega \\ i_s = ۰ \Rightarrow i = \dfrac{kV_s}{R_t + ۰/۵} = \dfrac{kV_s}{۱/۵} = -V_s \Rightarrow k = -۱/۵ \end{cases}$$

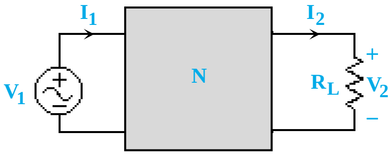
اکنون با فرض این که به جای مقاومت ۰/۵ اهم مقاومت R اهم در مدار قرار گیرد، داریم:

$$V' = \frac{R}{R+۱}i_s - \frac{۱/۵R}{R+۱}V_s$$

برای آنکه توان منبع جریان دو برابر شود، باید ولتاژ دو سر آن دو برابر شود:

$$V' = ۲V = \frac{۲}{۳}i - V_s = \frac{R}{R+۱}i_s - \frac{۱/۵R}{R+۱}V_s \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{R}{R+۱} = \dfrac{۲}{۳} \\ \dfrac{۱/۵R}{R+۱} = ۱ \end{cases} \Rightarrow R = ۲\Omega$$

مثال۲۰: مدار شکل زیر از تعدادی مقاومت خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است. دو آزمایش بر روی شبکه انجام شده است و نتایج آن به صورت زیر است. حال مقدار $\hat{V}_۲$ برحسب ولت کدام است؟



$R_L = ۷\Omega$	$R_L = ۱۰\Omega$
$\hat{V}_۱ = ۱۵۰\,v$	$V_۱ = ۱۰۰\,v$
$\hat{I}_۱ = ۱۶A$	$I_۱ = ۱۰\,A$
$\hat{V}_۲ = ?$	$V_۲ = ۲۰\,v$

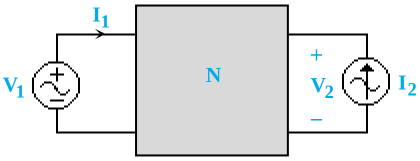
۱) ۱۰۱/۲
۲) ۱۲۱/۳
۳) ۱۰۵/۲
۴) ۱۱۶/۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از قضیه تلگان و رعایت جهت قراردادی جریان و ولتاژ (جهت قراردادی جریان با توجه به پلاریته ولتاژ در هر دو سمت شبکه به سوی خارج شبکه می‌باشد) داریم:

$$\sum V_K.\hat{I}_K = \sum \hat{V}_K.I_K \Rightarrow V_۱.(-\hat{I}_۱) + V_۲.(\hat{I}_۲) = \hat{V}_۱(-I_۱) + \hat{V}_۲.(I_۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۰۰.(-۱۶) + ۲۰.(\hat{I}_۲) = ۱۵۰(-۱۰) + \hat{V}_۲(I_۲) \\ I_۲ = \frac{V_۲}{R_L} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲A \ , \ \hat{I}_۲ = \frac{\hat{V}_۲}{۷} \end{cases} \Rightarrow ۱۰۰(-۱۶) + ۲۰(\frac{\hat{V}_۲}{۷}) = ۱۵۰(-۱۰) + \hat{V}_۲ \times ۲ \Rightarrow \hat{V}_۲ = \frac{۷۰۰}{۶} = ۱۱۶/۶v$$

مثال۲۱: در یک شبکه RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان آزمایش‌های زیر انجام گرفته است. حال مقدار $\hat{V}_۱$ کدام است؟



$$\begin{cases} V_۱ = ۲\sin(\omega t - ۳۰^\circ) \\ V_۲ = ۰ \\ I_۱ = ۶\sin(\omega t - ۴۵^\circ) \\ I_۲ = \sin(\omega t + ۵۵^\circ) \end{cases} , \begin{cases} \hat{V}_۱ = ? \\ \hat{V}_۲ = ۲\sin(\omega t - ۱۰^\circ) \\ \hat{I}_۱ = ۳\sin(\omega t + ۷۵^\circ) \end{cases}$$

۱) $۰/۶۶\sin(\omega t + ۹۰^\circ)$
۲) $۰/۶۶\sin \omega t$
۳) $۰/۳۷\sin \omega t$
۴) $۰/۳۷\sin(\omega t + ۹۰^\circ)$

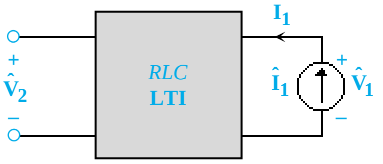
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای شبکه فوق، قضیه تلگان در حالت فازوری اعمال می‌شود و جهت قراردادی جریان‌ها به سمت خارج شبکه در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} V_۱ = ۲e^{-j۳۰}(v) \\ V_۲ = ۰ \\ I_۱ = ۶e^{-j۴۵}(A) \\ I_۲ = e^{j۵۵}\,(A) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \hat{V}_۱ = ? \\ \hat{I}_۱ = ۳e^{j۷۵}(A) \\ \hat{V}_۲ = ۲e^{-j۱۰}(v) \end{cases} \qquad \sum_{K=۱}^{M} V_K\hat{I}_K = \sum_{K=۱}^{M} \hat{V}_K I_K$$

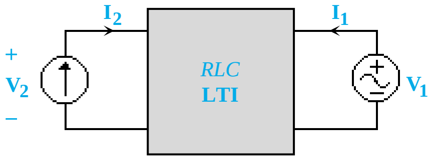
$$V_۱(-\hat{I}_۱) + V_۲(-\hat{I}_۲) = \hat{V}_۱(-I_۱) + \hat{V}_۲(-I_۲) \Rightarrow ۲e^{-j۳۰} \times (-۳e^{j۷۵}) + ۰ \times (-\hat{I}_۲) = \hat{V}_۱ \times (-۶e^{-j۴۵}) + ۲e^{-j۱۰} \times (-e^{j۵۵})$$

$$\Rightarrow \hat{V}_۱ = \frac{۴e^{+j۴۵}}{۶e^{-j۴۵}} = ۰/۶۶e^{+j۹۰} = ۰/۶۶\sin(\omega t + ۹۰^\circ)$$

مثال۲۲: در یک شبکه RLC به صورت LTI دو آزمایش زیر انجام شده است. مقدار $\hat{V}_۲$ کدام است؟



$$\begin{cases} \hat{V}_۱ = ۳e^{-j۴۵} \\ \hat{V}_۲ = ? \\ \hat{I}_۱ = ۵e^{-j۱۰۰} \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_۱ = ۱۰e^{j۱۰} \\ I_۲ = ۳e^{-j۴۵} \\ I_۱ = ۲e^{j۱۳۵} \end{cases}$$

۱) $۱۸/۶e^{j۱۳۵}$
۲) $-۱۸/۶e^{j۱۳۵}$
۳) $-۱۸/۶e^{-j۱۳۵}$
۴) $۱۸/۶e^{-j۱۳۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با اعمال قضیه تلگان به مدار داریم:

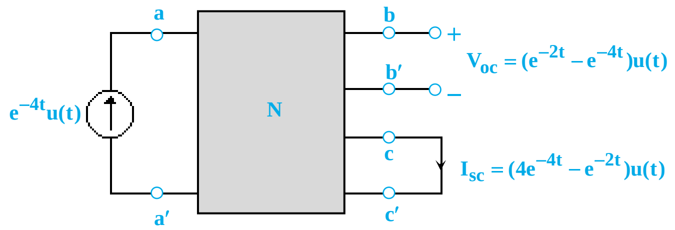
$$V_۱(-\hat{I}_۱) + V_۲(-\hat{I}_۲) = \hat{V}_۱(-I_۱) + \hat{V}_۲(-I_۲)$$

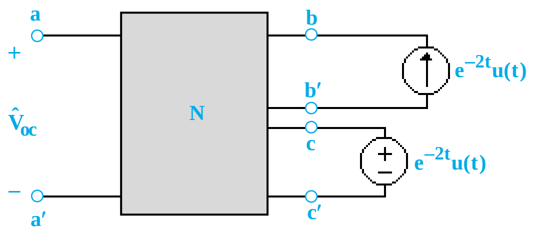
$$\begin{cases} V_۱ = ۱۰e^{j۱۰}(v) \\ I_۲ = ۳e^{-j۴۵}(A) \\ I_۱ = ۲e^{j۱۳۵}(A) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \hat{V}_۱ = ۳e^{-j۴۵}(v) \\ \hat{V}_۲ = ? \\ \hat{I}_۱ = ۵e^{-j۱۰۰}(A) \end{cases} \Rightarrow ۱۰e^{j۱۰} \times (-۵e^{-j۱۰۰}) + V_۲ \times ۰ = ۳e^{-j۴۵} \times (-۲e^{j۱۳۵}) + \hat{V}_۲ \times (-۳e^{-j۴۵})$$

$$-۵۰e^{-j۹۰} = -۶e^{j۹۰} + \hat{V}_۲(-۳e^{-j۴۵}) \Rightarrow ۵۰e^{j۹۰} = -۶e^{j۹۰} + \hat{V}_۲(-۳e^{-j۴۵}) \Rightarrow \hat{V}_۲ = \frac{۵۶e^{j۹۰}}{-۳e^{-j۴۵}} = -۱۸/۶e^{۱۳۵j}$$

دقت شود چنانچه جهت جریان در هر دو طرف برعکس باشد، علامت منفی از دو طرف معادله ساده شده و لذا نیازی به لحاظ کردن آن نیست.

مثال ۲۳: نتایج دو آزمایش بر روی یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر است. مقدار $\hat{V}_{oc}$ کدام است؟



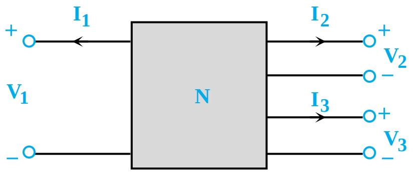


۱) $e^{-t}u(t)$ ۲) $۲e^{-t}u(t)$ ۳) $۳e^{-۲t}u(t)$ ۴) $۴e^{-t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از قضیه تلگان در حوزه‌ی لاپلاس و رعایت جهت قراردادی جریان داریم: $\hat{V}_۱I_۱ + \hat{V}_۲I_۲ + \hat{V}_۳I_۳ = V_۱\hat{I}_۱ + V_۲\hat{I}_۲ + V_۳\hat{I}_۳$

$$\begin{cases} \hat{V}_۱ = ? \\ \hat{I}_۱ = ۰ \\ \hat{V}_۲ = ? \\ \hat{I}_۲ = -e^{-۲t}u(t) \Rightarrow L[\hat{I}_۲] = \frac{-۱}{S+۲} \\ \hat{V}_۳ = e^{-۲t}u(t) \Rightarrow L[\hat{V}_۳] = \frac{۱}{S+۲} \\ \hat{I}_۳ = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_۱ = ? \\ I_۱ = -e^{-۴t}u(t) \Rightarrow L[I_۱] = \frac{-۱}{S+۴} \\ V_۲ = e^{-۲t} - e^{-۴t} \Rightarrow L[V_۲] = \frac{۱}{S+۲} - \frac{۱}{S+۴} \\ I_۲ = ۰ \\ V_۳ = ۰ \\ I_۳ = ۴e^{-۴t} - e^{-۲t} \Rightarrow L[I_۳] = \frac{۴}{S+۴} - \frac{۱}{S+۲} \end{cases}$$



حال با جایگذاری داریم: (جهت قراردادی جریان‌ها به سمت خارج شبکه است)

$$\hat{V}_۱.(\frac{-۱}{S+۴}) + \hat{V}_۲ \times ۰ + \frac{۱}{S+۲}(\frac{۴}{S+۴} - \frac{۱}{S+۲}) = V_۱ \times ۰ + (\frac{۱}{S+۲} - \frac{۱}{S+۴})(-\frac{۱}{S+۲}) + ۰ \times \hat{I}_۳ \Rightarrow \hat{V}_{OC}(t) = \hat{V}_۱(t) = ۳e^{-۲t}u(t)$$

مثال ۲۴: **مدارهای N و $N_۱$ از عناصر R، L و C تشکیل شده‌اند. دو آزمایش مطابق شکل‌های نشان داده شده انجام شده است. $N_۱$ از چه عناصری تشکیل شده است؟**

$$\begin{cases} V_{S_۲}(t) = ۲\cos ۲t \\ i'_۱(t) = \cos ۲t \\ V_{o_۲}(t) = \cos(۲t - ۴۰^\circ) \end{cases}$$

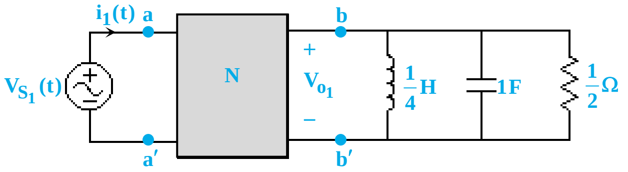
$$\begin{cases} V_{S_۱}(t) = ۲\cos ۲t \\ i_۱(t) = \frac{۱}{۲}\cos(۲t - ۶۰^\circ) \\ V_{o_۱}(t) = \frac{۱}{۲}\cos(۲t - ۲۰^\circ) \end{cases}$$

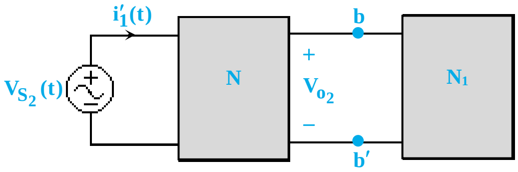
۱) یک مقاومت با رسانایی $\frac{۱}{۲}$ مهو که با یک خازن با ظرفیت $۲\sqrt{۳}$ فاراد سری است.

۲) یک مقاومت با رسانایی ۲ مهو که با یک خازن با ظرفیت $۲\sqrt{۳}$ فاراد سری است.

۳) یک مقاومت ۲ اهمی که با یک خازن با ظرفیت $\sqrt{۳}$ فاراد موازی است.

۴) یک مقاومت $\frac{۱}{۲}$ اهمی که با یک خازن با ظرفیت $\sqrt{۳}$ فاراد موازی است.





☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بهترین روش برای حل این مثال، استفاده از قضیه تلگان می‌باشد.

با استفاده از این روش می‌توان $I'_۲$ را پیدا کرد و سپس با محاسبه $-\frac{V'_۲}{I'_۲}$ می‌توانیم امپدانس شبکه $N_۱$ را یافته و اجزای داخلی آن را تشخیص دهیم. ($I'_۲$ به سمت خارج شبکه $N_۱$ در نظر گرفته شده است). در مرحله اول سعی می‌کنیم متغیرهای فوق را در حالت دائمی سینوسی بدست آوریم. دقت کنید که مدار LC موجود در آزمایش اول دارای فرکانس تشدیدی به اندازه ۲ رادیان بر ثانیه است؛ پس در شرایط تحریک موجود، این قسمت مدار باز است.

برای آزمایش ۱ داریم:

$$\begin{cases} V_۱ = ۲ \\ V_۲ = ۰/۵ \angle -۲۰^\circ \\ I_۱ = ۰/۵ \angle -۶۰^\circ \\ I_۲ = -۲ \times V_۲ = -۱ \angle -۲۰^\circ \end{cases}$$

و برای آزمایش ۲ نیز داریم:

$$\begin{cases} V'_۱ = ۲ \\ V'_۲ = ۱ \angle -۴۰^\circ \\ I'_۱ = ۱ \\ I'_۲ = ? \end{cases}$$

حال با بکارگیری قضیه تلگان سعی می‌کنیم $I'_۲$ را محاسبه کنیم:

$$V_۱\ I'_۱ + V_۲\ I'_۲ = V'_۱\, I_۱ + V'_۲\ I_۲$$

$$\Rightarrow ۲\times ۱ + ۰/۵\angle -۲۰^\circ \times I'_۲ = ۲\times ۰/۵\angle -۶۰^\circ - ۱\angle -۴۰^\circ \times ۱\angle -۲۰^\circ \Rightarrow I'_۲ = -۴\angle ۲۰^\circ$$

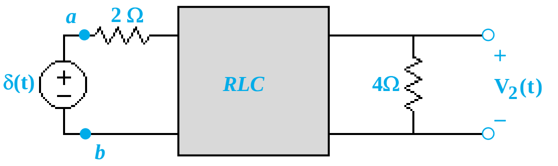
و حال می‌توانیم امپدانس شبکه $N_۱$ را محاسبه کنیم:

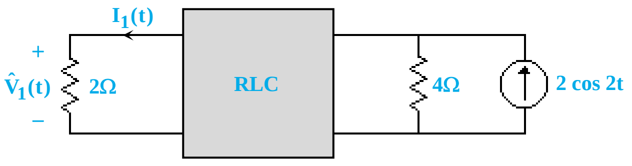
$$Z_{N_۱} = -\frac{V'_۲}{I'_۲} = -\frac{۱\angle -۴۰^\circ}{-۴\angle ۲۰^\circ} = \frac{۱}{۴}\angle -۶۰^\circ = (\frac{۱}{۸} - j\frac{\sqrt{۳}}{۸})\Omega$$

این امپدانس تنها با گزینه (۴) سازگاری دارد:

$$Z\left(R = ۰/۵ \parallel C = \sqrt{۳}\right) = \frac{۰/۵ \times \frac{۱}{j۲\sqrt{۳}}}{۰/۵ + \frac{۱}{j۲\sqrt{۳}}} = \frac{۰/۵}{j\sqrt{۳}+۱} = (\frac{۱}{۸} - j\frac{\sqrt{۳}}{۸})\Omega$$

مثال ۲۵: در مدار زیر در پایه‌های b و a منبع ولتاژ ورودی $\delta(t)$ اعمال شده است و ولتاژ $V_۲(t)$ به اندازه $۴e^{-۲t}$ است. حال اگر برای همین شبکه یک منبع جریان سینوسی به صورت $۲\cos ۲t$ به خروجی اعمال شود، ولتاژ $\hat{V}_۱(t)$ در حالت دائمی کدام است؟





۱) $۲\sqrt{۲}\cos(۲t - ۴۵^\circ)$

۲) $۴\sqrt{۲}\cos(۲t + ۴۵^\circ)$

۳) $۴\sqrt{۲}\cos(۲t - ۴۵^\circ)$

۴) $۲\sqrt{۲}\cos(۲t + ۴۵^\circ)$

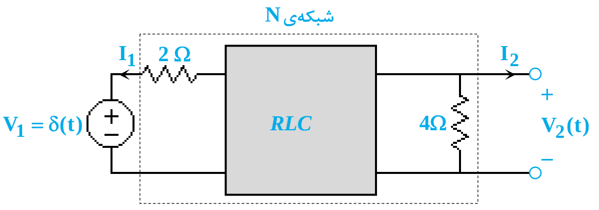
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** با توجه به قضیه هم‌پاسخی $G_{۱۲}(S) = -G_{۲۱}(S)$ و همچنین فرکانس زاویه‌ای موج ورودی $\omega = ۲$ (معادل با $S = j۲$) می‌باشد. بنابراین با تحلیل فازوری داریم:

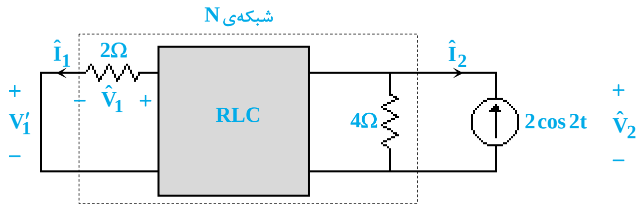
$$\frac{V_۲(S=j۲)}{V_۱(S=j۲)} = -\frac{I_۱ \rightarrow \text{فازور}}{I_۲ \rightarrow \text{فازور}} \quad \text{و} \quad V_۲(S=j۲) = \frac{۴}{S+۲} = \frac{۴}{۲j+۲} = \frac{۲}{j+۱} = \sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ\,(v) \ ,\ V_۱(S=j۲) = ۱ \ ,\ I_۲ = -۲\angle ۰$$

$$\frac{\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ}{۱} = \frac{I_۱}{۲\angle ۰} \Rightarrow I_۱ = ۲\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ (A) \quad \text{و} \quad \hat{V}_۱ = ۲I_۱$$

$$\Rightarrow \hat{V}_۱ = ۲\times ۲\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ = ۴\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ (v) \Rightarrow \mathbf{\hat{V}_۱(t) = ۴\sqrt{۲}\cos(۲t - ۴۵^\circ)}$$

روش دوم: ابتدا مدار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و سپس با استفاده از قضیه تلگان سؤال را حل می‌کنیم.





حال با استفاده از قضیه‌ی تلگان داریم:

$$V_۱\hat{I}_۱ + V_۲\hat{I}_۲ = \hat{V}_۱ I_۱ + \hat{V}_۲ I_۲$$

$$\begin{cases} \hat{V}_۱ = ۰ \\ \hat{I}_۱ = ? \\ \hat{V}_۲ = ? \\ \hat{I}_۲(t) = -۲\cos ۲t \Rightarrow \hat{I}_۲ = -۲\angle ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} V_۱(t) = \delta(t) \Rightarrow V_۱(S = j۲) = ۱ \\ I_۱ = ? \\ I_۲ = ۰ \\ V_۲(t) = ۴e^{-۲t} \Rightarrow V_۲(S = j۲) = \frac{۴}{S+۲} = \frac{۴}{j۲+۲} = \sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ \end{cases}$$

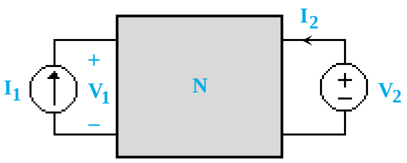
حال با جایگذاری داریم:

$$۱\times\hat{I}_۱ + \sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ \times (-۲\angle ۰) = ۰\times I_۱ + \hat{V}_۲ \times ۰$$

$$\Rightarrow \hat{I}_۱ = ۲\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ \Rightarrow \hat{V}_۱ = ۲\hat{I}_۱ \Rightarrow \hat{V}_۱ = ۲\times ۲\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ \Rightarrow \mathbf{\hat{V}_۱(t) = ۴\sqrt{۲}\cos(۲t - ۴۵)^\circ}$$

مثال ۲۶: شبکه N شامل مقاومت‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان است. آزمایش‌های زیر بر روی آن انجام شده است. حال مقادیر عددی A و B کدام است؟

$I_۲(A)$	$V_۲(v)$	$I_۱(A)$	$V_۱(v)$	شماره آزمایش
۹	۰	-۳	۱۵	۱
۳	۶۰	۰	A	۲
B	۱۹	-۱۰	۷	۳



۱) $B = ۴۵$, $A = ۱۵/۰۲$

۲) $B = ۳۰/۹$, $A = ۱۸۰$

۳) $B = ۱۵۱/۲$, $A = ۴۵$

۴) $B = ۱۸۰$, $A = ۳۰/۹$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با استفاده از قضیه تلگان و رعایت جهت قراردادی برای آزمایش‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} V_۱ = ۱۵v \\ I_۱ = -۳A \\ \hat{V}_۱ = ? \\ \hat{I}_۱ = ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} V_۲ = ۰ \\ I_۲ = ۹A \\ \hat{V}_۲ = ۶۰v \\ \hat{I}_۲ = ۳A \end{cases} \Rightarrow \mathbf{\hat{V}_۱(-I_۱) + \hat{V}_۲(-I_۲) = V_۱(-\hat{I}_۱) + V_۲(-\hat{I}_۲)}$$

$$\hat{V}_۱ \times (-(-۳)) + ۶۰\times(-۹) = ۱۵\times ۰ + ۰\times(-۳) \Rightarrow \mathbf{\hat{V}_۱ = A = ۱۸۰\,v}$$

لازم به ذکر است که می‌توان مقدار A را از قضیه هم‌پاسخی نیز به صورت زیر محاسبه کرد:

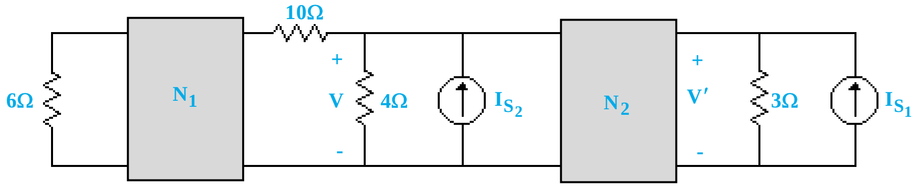
$$\frac{I_۲}{I_۱} = -\frac{\hat{V}_۱}{\hat{V}_۲} \Rightarrow \hat{V}_۱ = -\frac{\hat{V}_۲ I_۲}{I_۱} = -\frac{۶۰\times ۹}{-۳} \Rightarrow \mathbf{\hat{V}_۱ = A = ۱۸۰\,v}$$

محاسبه B با استفاده از قضیه تلگان برای آزمایش‌های ۲ و ۳ به صورت مقابل است:

$$\hat{\hat{V}}_۱ = ۷v \qquad \hat{\hat{V}}_۲ = ۱۹v \qquad \hat{\hat{I}}_۱ = -۱۰A \qquad \hat{\hat{I}}_۲ = ?$$

$$\mathbf{\hat{\hat{V}}_۱(-\hat{I}_۱) + \hat{\hat{V}}_۲(-\hat{I}_۲) = \hat{V}_۱(-\hat{\hat{I}}_۱) + \hat{V}_۲(-\hat{\hat{I}}_۲)} \Rightarrow ۷\times ۰ + ۱۹\times(-۳) = ۱۸۰\times(+۱۰) + ۶۰\times(-\hat{\hat{I}}_۲) \Rightarrow \mathbf{\hat{\hat{I}}_۲ = B = ۳۰/۹A}$$

مثال ۲۷: در مدار زیر $N_۱$ و $N_۲$ مدارهای مقاومتی خطی و هم‌پاسخ و بدون منابع وابسته هستند. برای $I_{S_۱} = ۲$ و $I_{S_۲} = ۳ + ۴\cos t$ معادله $V = ۱۴ + ۱۶\cos t$ است. برای $I_{S_۱} = ۰$ و $I_{S_۲} = ۲\cos t$، توان متوسط مقاومت ۳ اهمی چند وات است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به خطی بودن شبکه‌های فوق، قضیه جمع آثار برای آنها برقرار است. با توجه به اینکه V ناشی از قسمت سینوسی $I_{S_۲}$ یعنی عبارت $۴\cos t$ برابر $۱۶\cos t$ می‌باشد، نسبت موجود بین آنها یا به عبارتی تابع شبکه مربوط به آنها عدد $۴ = \frac{۱۶}{۴}$ است. این بدین معناست که قسمت سینوسی $I_{S_۲}$ در عدد ۴ ضرب شده است و قسمت سینوسی V با دامنه ۱۶ بدست آمده است. قسمت ثابت معادله V یعنی عدد ۱۴ ناشی از قسمت‌های ثابت ورودی‌های $I_{S_۱}$ و $I_{S_۲}$ است؛ با توجه به تابع شبکه بدست آمده بین V و $I_{S_۲}$ که برابر ۴ است، از عدد ۱۴، مقدار ۴×۳ یعنی ۱۲ ناشی از $I_{S_۲}$ و ۲×۱ ناشی از $I_{S_۱}$ می‌باشد. لذا داریم:

$$\begin{cases} I_{S_۱} = ۲A \\ I_{S_۲} = ۳+۴\cos t \end{cases} \Rightarrow \quad V = ۴I_{S_۲} + I_{S_۱}$$

برای بدست آوردن توان مصرفی مقاومت ۳Ω باید ولتاژ V' بدست آورده شود. با توجه به قضیه هم‌پاسخی برای شبکه $N_۲$ در صورتی که $I_{S_۲} = ۰$ شود، معادله V به صورت زیر خواهد بود:

$$V = ۴I_{S_۲} + I_{S_۱} = I_{S_۱} = ۲(A)$$

حال اگر $I_{S_۱} = ۰$ شود و با فرض $I_{S_۲} = ۲\cos t$ داریم:

$$\begin{cases} I_{S_۲} = ۰ \\ V = ۲v \\ I_{S_۱} = ۲A \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} I'_{S_۱} = ۰ \\ I'_{S_۲} = ۲\cos t \\ V' = ? \end{cases}$$

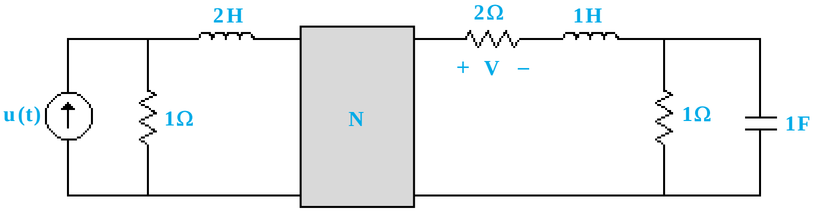
$$\Rightarrow \frac{V}{I_{S_۱}} = \frac{V'}{I'_{S_۲}} \Rightarrow \frac{۲}{۲} = \frac{V'}{۲\cos t} \Rightarrow V' = ۲\cos t \Rightarrow P_{۳\Omega} = \frac{V'^۲}{۳\Omega} = \frac{۴\cos^۲ t}{۳\Omega} = \frac{۴}{۳}(\frac{۱+\cos ۲t}{۲}) \Rightarrow \mathbf{P_{۳\Omega}(ave) = \frac{۲}{۳}w}$$

در نوشتن روابط فوق از بیان دوم قضیه هم‌پاسخی استفاده شده است.

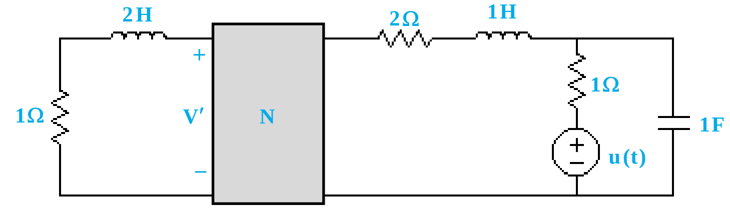
لازم به ذکر است توان متوسط مصرفی مقاومت ۳Ω از رابطه مقابل نیز قابل محاسبه است:

$$\mathbf{P_{۳\Omega} = \frac{(V'(rms))^۲}{۳\Omega} = \frac{(\frac{۲}{\sqrt{۲}})^۲}{۳} = \frac{۲}{۳}w}$$

مثال ۲۸: **مدارهای (الف) و (ب) مدارهای هم‌پاسخ هستند. اگر پاسخ حالت صفر V در مدار (الف) به صورت $V = (۱-e^{-۲t})$ باشد، آنگاه در شکل (ب) معادله V' کدامیک از گزینه‌های زیر است؟**



(الف)



(ب)

۱) $[\frac{۱}{۲}+e^{-t}+\frac{۱}{۲}e^{-۲t}]u(t)$

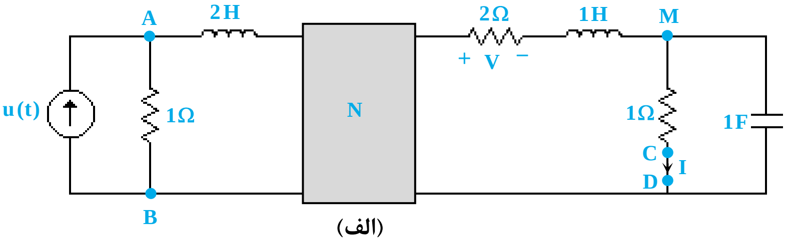
۲) $[\frac{۱}{۲}-e^{-t}-\frac{۱}{۲}e^{-۲t}]u(t)$

۳) $[\frac{۱}{۲}-e^{-t}+\frac{۳}{۲}e^{-۲t}]u(t)$

۴) $[\frac{۱}{۲}+e^{-t}-\frac{۳}{۲}e^{-۲t}]u(t)$

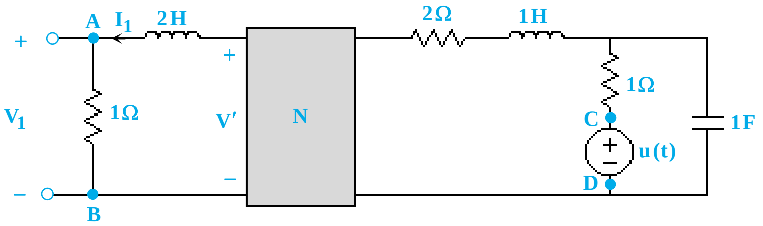
☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: با توجه به اینکه هر دو مدار (الف) و (ب) مدارهای هم‌پاسخ هستند، در حالات قضیه هم‌پاسخی نیز صادق می‌باشند. از آن‌جایی که ورودی اعمال شده به سمت چپ مدار (الف) به دو سر مقاومت ۱Ω اعمال شده، پس درگاه $A-B$ را مطابق شکل رسم شده در دو سر مقاومت ۱Ω در نظر می‌گیریم و چون ورودی اعمال شده به سمت راست مدار (ب) سری با مقاومت ۱Ω است، پورت



(الف)

C−D مربوط به طرف دوم را هم مطابق شکلی که مجدداً رسم شده در نظر می‌گیریم. حال با معلوم شدن محل پورت‌ها باید بفهمیم که از کدام بیان هم‌پاسخی استفاده کنیم. طبق نکته گفته شده با توجه به این که یکی از ورودی‌ها ولتاژ و دیگری جریان است، از بیان سوم یعنی $H_{۱۲}=-H_{۲۱}$ استفاده می‌کنیم.



(ب)

حال سراغ تحلیل مدار می‌رویم و برطبق قضیه هم‌پاسخی اگر در مدار (الف) منبع $u(t)$ بین پایه‌های A و B قرار گیرد و جریان I را در شاخه شامل نقاط C و D بسازد، می‌توان گفت که در مدار (ب) اگر منبع ولتاژی به همان اندازه $u(t)$ بین نقاط D و C قرار گیرد، بین نقاط B و A ولتاژ $V_۱$ ای به اندازه I در مدار (الف) ایجاد می‌کند. لذا ابتدا در مدار (الف) جریان I را محاسبه می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره M در مدار (الف) و در حوزه فرکانس داریم:

$$V=\frac{۱}{S}-\frac{۱}{S+۲}\quad \text{و}\quad I+\frac{I}{\frac{۱}{S}}=\frac{V}{۲}\Rightarrow I(۱+S)=\frac{V}{۲}\Rightarrow I=\frac{V}{۲(S+۱)}\Rightarrow I=\frac{\frac{۱}{S}-\frac{۱}{S+۲}}{۲(S+۱)}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۲(S)(S+۱)}-\frac{۱}{۲(S+۱)(S+۲)}\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}[\frac{۱}{S}-\frac{۲}{S+۱}+\frac{۱}{S+۲}]\Rightarrow I(t)=\frac{۱}{۲}[۱-۲e^{-t}+e^{-۲t}]u(t)$$

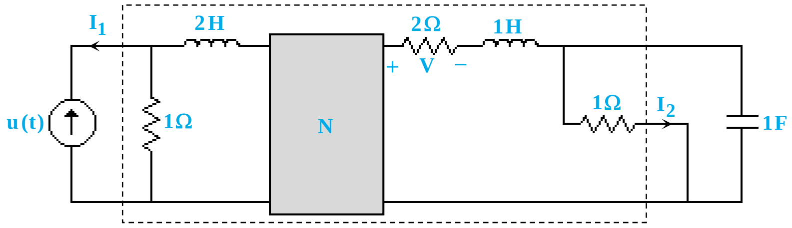
برطبق قضیه هم‌پاسخی، رابطه $I(t)$ در مدار (الف)، برابر با معادله $V_۱$ در مدار (ب) است. حال در مدار (ب) داریم:

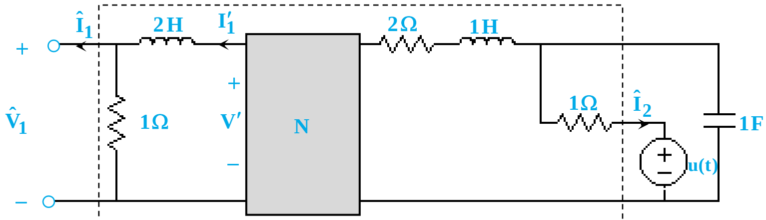
$$V_۱(t)=I(t)=\frac{۱}{۲}[۱-۲e^{-t}+e^{-۲t}]u(t)$$

$$V'(t)=\frac{۲dI_۱(t)}{dt}+V_۱(t)\quad \text{و}\quad I_۱(t)=\frac{V_۱(t)}{۱}\Rightarrow V'(t)=۲[\frac{۱}{۲}[۰+۲e^{-t}-۲e^{-۲t}]]+\frac{۱}{۲}[۱-۲e^{-t}+e^{-۲t}]$$

$$\Rightarrow V'(t)=۲e^{-t}-۲e^{-۲t}+\frac{۱}{۲}-e^{-t}+\frac{۱}{۲}e^{-۲t}\Rightarrow \mathbf{V'(t)=[\frac{۱}{۲}+e^{-t}-\frac{۳}{۲}e^{-۲t}]u(t)}$$

روش دوم: مدارهای ۲ آزمایش را به صورت زیر رسم می‌کنیم و سپس با استفاده از قضیه‌ی تلگان سؤال را حل می‌کنیم.





با توجه به روش حل قبلی داریم:

$$I_۲(t)=\frac{۱}{۲}[۱-۲e^{-t}+e^{-۲t}]u(t)$$

حال با توجه به قضیه تلگان داریم:

$$V_۱\hat{I}_۱+V_۲\hat{I}_۲=\hat{V}_۱I_۱+\hat{V}_۲I_۲$$

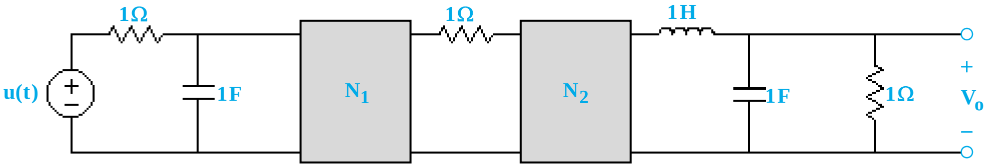
$$\begin{cases}V_۱=?\\ V_۲=۰\\ I_۱=-u(t)\\ I_۲=\frac{۱}{۲}[۱-۲e^{-t}+e^{-۲t}]u(t)\end{cases}\qquad \begin{cases}\hat{V}_۱=?\\ \hat{V}_۲=u(t)\\ \hat{I}_۱=۰\\ \hat{I}_۲=?\end{cases}$$

حال با جایگذاری داریم:

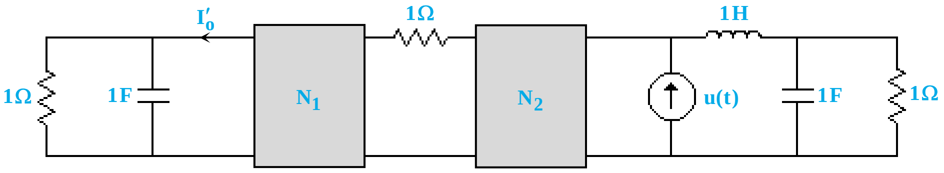
$$\hat{V}_۱(t)=I_۲(t)=\frac{۱}{۲}[۱-۲e^{-t}+e^{-۲t}]u(t)$$

$$V'(t)=\frac{۲dI'_۱(t)}{dt}+\hat{V}_۱\ ,\ I'_۱(t)=\frac{\hat{V}_۱(t)}{۱}\Rightarrow V'(t)=۲[\frac{۱}{۲}(۰+۲e^{-t}-۲e^{-۲t})]+\frac{۱}{۲}[۱-۲e^{-t}+e^{-۲t}]\Rightarrow \mathbf{V'(t)=[\frac{۱}{۲}+e^{-t}-\frac{۳}{۲}e^{-۲t}]u(t)}$$

مثال ۲۹: در مدارهای زیر، شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ شبکه‌هایی هم‌پاسخ هستند. در مدار (الف) مقدار V_o برابر با $e^{-۲t}+e^{-۳t}-۳e^{-t}$ می‌باشد. حال در مدار (ب) مقدار I'_o کدام است؟



(مدار الف)



(مدار ب)

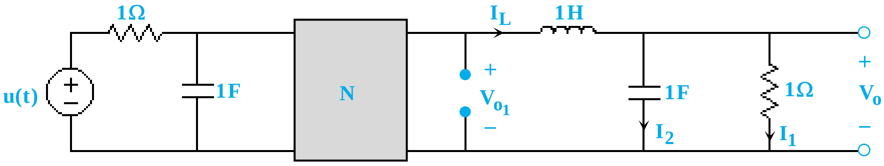
۱) $-۴e^{-۲t}-۱۴e^{-۳t}+e^{-t}$

۲) $-۳e^{-۲t}-۱۴e^{-۳t}$

۳) $۳e^{-۲t}+۱۴e^{-۳t}$

۴) $۴e^{-۲t}-۱۴e^{-۳t}-e^{-t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ و سایر اجزای مدار، هم‌پاسخ هستند، می‌توان آنها را مجموعاً یک شبکه N هم‌پاسخ فرض کرد. با توجه به قضیه هم‌پاسخی اگر در مدار (الف) ورودی u(t) باشد، $V_{o_۱}$ اندازه‌گیری می‌شود. حال در مدار (ب) اگر همان منبع u(t) با همان دامنه واحد اما به صورت منبع جریان در نقطه‌های اتصال $V_{o_۱}$ به مدار (ب) وصل شود، مقدار جریان مقاومت ۱Ω در سمت چپ مدار و در محلی که قبلاً منبع ولتاژ u(t) در مدار (الف) متصل بوده است، (یعنی I_o) برابر با همان مقدار $V_{o_۱}$ در مدار (الف) است.



حال ابتدا در مدار (الف) مقدار $V_{o_۱}$ را محاسبه می‌کنیم.

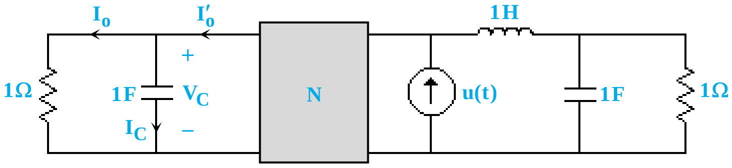
$$I_۱=\frac{V_o}{۱\Omega}=V_o=e^{-۲t}+e^{-۳t}-۳e^{-t} \quad \text{و} \quad I_۲=C\frac{dV_o}{dt}=۱\times[-۲e^{-۲t}-۳e^{-۳t}+۳e^{-t}]$$

$$I_L=I_۱+I_۲=e^{-۲t}+e^{-۳t}-۳e^{-t}-۲e^{-۲t}-۳e^{-۳t}+۳e^{-t} \Rightarrow I_L=-e^{-۲t}-۲e^{-۳t} \;,\; V_L=L\frac{dI_L}{dt}$$

$$\Rightarrow V_L=۱\times[۲e^{-۲t}+۶e^{-۳t}]=۲e^{-۲t}+۶e^{-۳t} \Rightarrow V_{o_۱}=V_L+V_o=۲e^{-۲t}+۶e^{-۳t}+e^{-۲t}+e^{-۳t}-۳e^{-t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V_{o_۱}=۳e^{-۲t}+۷e^{-۳t}-۳e^{-t}}$$

حال طبق قضیه هم‌پاسخی در مدار (ب)، مقدار I_o برابر $V_{o_۱}$ است. حال مقدار I'_o را در مدار (ب) محاسبه می‌کنیم.



$$V_{o_۱}=I_o=۳e^{-۲t}+۷e^{-۳t}-۳e^{-t}$$

$$\Rightarrow V_C=I_o\times۱=I_o$$

$$I_C=C\frac{dV_C}{dt}=۱\times[-۶e^{-۲t}-۲۱e^{-۳t}+۳e^{-t}] \Rightarrow I_C=-۶e^{-۲t}-۲۱e^{-۳t}+۳e^{-t}$$

$$I'_o=I_C+I_o=-۶e^{-۲t}-۲۱e^{-۳t}+۳e^{-t}+۳e^{-۲t}+۷e^{-۳t}-۳e^{-t} \Rightarrow \mathbf{I'_o=-۳e^{-۲t}-۱۴e^{-۳t}}$$

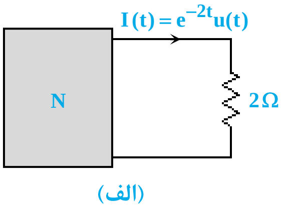
مثال ۳۰: یک‌قطبی N شامل مقاومت‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان بوده و شامل منابع مستقل و وابسته است. در صورتی که جریان $I(t)$ در مدارهای (الف) و (ب) به صورت زیر باشد، معادله $I(t)$ در مدار (ج) کدام است؟

۱) $e^{-۲t}-e^{-۶t}$

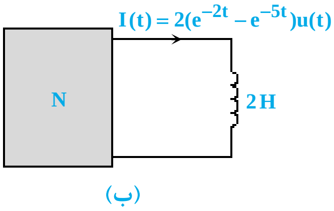
۲) $\frac{۳}{۲}e^{-۲t}-\frac{۳}{۲}e^{-۶t}$

۳) $\frac{۳}{۲}e^{-۲t}+\frac{۳}{۲}e^{-۶t}$

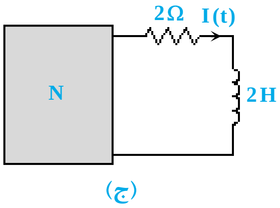
۴) $-e^{-۲t}+e^{-۶t}$



(الف)

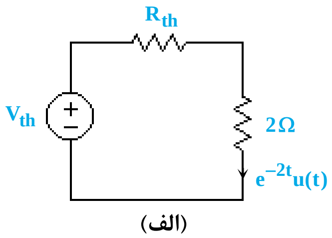


(ب)

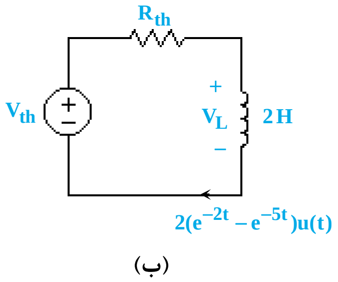


(ج)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در صورتی که مدار معادل تونن را در مدارهای (الف) و (ب) جایگزین کنیم، داریم:



(الف)



(ب)

$$V_{th}=(۲+R_{th})e^{-۲t} \qquad (۱)$$

$$V_{th}=R_{th}.۲(e^{-۲t}-e^{-۵t})+۲\frac{d(۲e^{-۲t}-۲e^{-۵t})}{dt}$$

$$\Rightarrow V_{th}=R_{th}۲(e^{-۲t}-e^{-۵t})+۲۰e^{-۵t}-۸e^{-۲t} \qquad (۲)$$

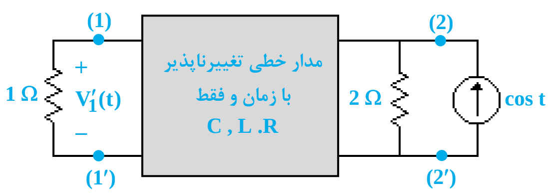
با تشکیل یک دستگاه با معادلات (۱) و (۲) و حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases}V_{th}=R_{th}e^{-۲t}+۲e^{-۲t}\\ V_{th}=R_{th}.۲(e^{-۲t}-e^{-۵t})+۲۰e^{-۵t}-۸e^{-۲t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_{th}=۱۲e^{-۲t}\\ R_{th}=۱۰\Omega\end{cases}$$

با جایگذاری مدار معادل تونن در مدار (ج) و با ترسیم مدار در حوزه فرکانس داریم:

$$I(S)=\frac{\frac{۱۲}{S+۲}}{۱۰+۲+۲S}=\frac{۶}{(S+۲)(S+۶)}\Rightarrow I(S)=\frac{\frac{۳}{۲}}{S+۲}+\frac{-\frac{۳}{۲}}{S+۶}\Rightarrow \mathbf{I(t)=\frac{۳}{۲}e^{-۲t}-\frac{۳}{۲}e^{-۶t}}$$

مثال ۳۱: در مدار سمت چپ، وقتی که ورودی دو قطب $۱\ ۱'$، برابر $\delta(t)$ باشد، ولتاژ خروجی در قطب $۲\ ۲'$، برابر با $V_۲(t)=۲e^{-t}$ می‌باشد. حال اگر منبع تغذیه را اتصال کوتاه کنیم و در خروجی یک منبع جریان برابر $\cos t$ قرار دهیم، ولتاژ $V_۱'(t)$ در قطب $۱\ ۱'$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)



۱) $V_۱'(t)=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos(t+۳۰^\circ)$

۲) $V_۱'(t)=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos(t+۴۵^\circ)$

۳) $V_۱'(t)=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos(t-۴۵^\circ)$

۴) $V_۱'(t)=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos(t-۳۰^\circ)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: برطبق قضیه هم‌پاسخی $G_{۱۲}(S)=-G_{۲۱}(S)$ است. بنابراین داریم:

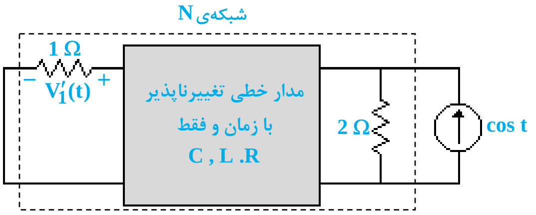
$$V_۱(t)=\delta(t)\Rightarrow V_۱(S=j)=۱$$

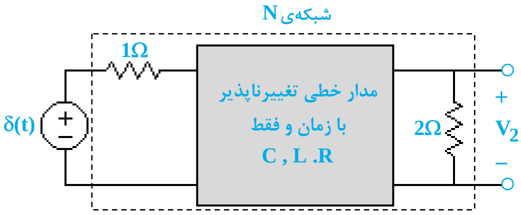
$$V_۲(t)=۲e^{-t}u(t)\Rightarrow V_۲(S=j)=\frac{۲}{S+۱}=\frac{۲}{j+۱}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\angle-۴۵^\circ$$

$I'_۱(t)=\frac{V'_۱(t)}{۱}\Rightarrow I'_۱=V'_۱$　　و　　$I'_۲(t)=-\cos t\Rightarrow I'_۲=-۱\angle ۰$

$$\frac{V_۲}{V_۱}=-\frac{I'_۱}{I'_۲}\Rightarrow\frac{\frac{۲}{\sqrt{۲}}\angle-۴۵^\circ}{۱}=\frac{-I'_۱}{-۱}\Rightarrow I'_۱=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\angle-۴۵^\circ\Rightarrow V'_۱=I'_۱=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\angle-۴۵^\circ\Rightarrow V'_۱(t)=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos(t-۴۵^\circ)$$

روش دوم: ابتدا مدارها و شبکه N را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و سپس از قضیه تلگان سؤال را حل می‌کنیم:





با توجه به قضیه تلگان داریم:

$$V_۱\hat{I}_۱+V_۲\hat{I}_۲=\hat{V}_۱I_۱+\hat{V}_۲I_۲$$

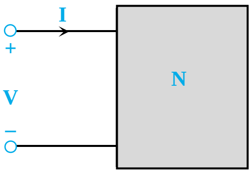
$$\begin{cases}\hat{V}_۱(t)=۰\\ \hat{V}_۲(t)=?\\ \hat{I}_۱(t)=?\\ \hat{I}_۲(t)=-\cos t\Rightarrow\hat{I}_۲=-۱\angle ۰\end{cases}\qquad\begin{cases}V_۱(t)=\delta(t)\Rightarrow V_۱(S=j)=۱\\ V_۲(t)=۲e^{-t}\Rightarrow V_۲(S=j)=\frac{۲}{S+۱}=\frac{۲}{j+۱}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\angle-۴۵^\circ\\ I_۱(t)=?\\ I_۲(t)=۰\end{cases}$$

حال با جایگذاری داریم:

$$۱\times\hat{I}_۱+\frac{۲}{\sqrt{۲}}\measuredangle-۴۵^\circ\times(-۱\measuredangle ۰)=۰\times I_۱+\hat{V}_۲\times ۰\quad\Rightarrow\quad\hat{I}_۱=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\measuredangle-۴۵^\circ\quad\Rightarrow\quad V'_۱=۱\times\hat{I}_۱=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\measuredangle-۴۵^\circ=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\cos(t-۴۵^\circ)$$

مثال ۳۲: می‌دانیم که یک‌قطبی N متشکل از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان و منابع مستقل DC و منابع وابسته از هر نوع می‌باشد. کدامیک از توصیف‌های زیر برای مشخص‌سازی آن همواره برقرار است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)



۱) $I=\alpha_۱V+\alpha_۲$ ، $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ ثابت‌های وابسته به N

۲) $V=K_۱I+K_۲$ ، $K_۱$ و $K_۲$ ثابت‌های وابسته به N

۳) $aV+bI+c=۰$ ، a ،b و c ثابت‌های وابسته به N

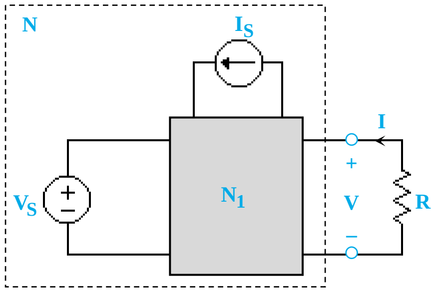
۴) هر سه گزینه فوق صحیح هستند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه در رابطه گزینه «۱» ثابت I همواره غیرصفر است، این رابطه کلی نیست و صحیح نمی‌باشد. همچنین در رابطه گزینه «۲» امکان صفر بودن ضریب V وجود ندارد و این رابطه نیز می‌تواند غلط باشد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۲) می‌توانید از دو مثال نقض نیز استفاده کنید؛ مدار اتصال کوتاه برای رد گزینه (۱) و مدار باز برای رد گزینه (۲).

مثال ۳۳: در مدار شکل زیر، $N_۱$ شامل مقاومت‌های خطی مثبت دو سر بوده و رابطه ولتاژ جریان برای $N_۱$ با $I_S=۲A$ و $V_S=۲\cos t$ به صورت $۲V-۳I-۱+۳\cos t=۰$ است. اگر $I_S=۲\cos t$ و $V_S=۲$ شود، ماکزیمم توان R چند وات می‌شود؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{۱۱}{۱۲}$

۲) $\frac{۵}{۲۴}$

۳) $\frac{۱۹}{۴۸}$

۴) $\frac{۱۹}{۲۲۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن توان جذبی حداکثر توسط R، زمانی که مقدار R برابر با R_{th} مدار باشد، از فرمول $P(\max)=(I_{rms})^{۲}\times R$ استفاده می‌شود. با توجه به رابطه $V=R_{th}.I+V_{th}$ داریم:

$$۲V-۳I-۱+۳\cos t=۰ \Rightarrow V=\frac{۳}{۲}I+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}\cos t$$

$$R_{th}=\frac{۳}{۲}\Omega \;,\; V_{th}=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}\cos t$$

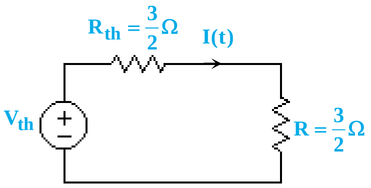
مقادیر V_S و I_S را در V_{th} وارد کرده و V_{th} را برحسب آنها مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases}I_S=۲A\\V_S=۲\cos t\end{cases}\Rightarrow V_{th}=\frac{۱}{۴}I_S-\frac{۳}{۴}V_S$$

با جایگذاری I_S و V_S جدید به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases}I_S=۲\cos t\\V_S=۲\end{cases}\Rightarrow V_{th}=\frac{۱}{۲}\cos t-\frac{۳}{۲}$$

حال مدار معادل به صورت زیر خواهد شد:

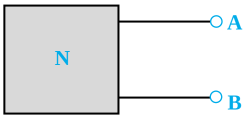


$$P_{max}=(I_{rms})^{۲}.R$$

$$\Rightarrow I(t)=\frac{V_{th}}{R+R_{th}}=\frac{\frac{۱}{۲}\cos t-\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow I(t)=\frac{۱}{۶}\cos t-\frac{۱}{۲} \;,\; I_{rms}=\sqrt{(\frac{۱}{۶\sqrt{۲}})^{۲}+(\frac{۱}{۲})^{۲}}=\sqrt{\frac{۱۹}{۷۲}}A \Rightarrow \mathbf{P_{max}=(I_{rms})^{۲}.R=(\sqrt{\frac{۱۹}{۷۲}})^{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۹}{۷۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۹}{۴۸}watt}$$

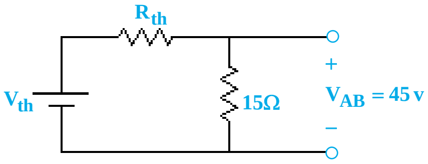
مثال ۳۴: **مدار مقاومتی N از تعدادی مقاومت خطی و منابع نابسته و وابسته تشکیل می‌شود. اگر مقاومت ۱۵ اهمی را در سرهای A و B وصل کنیم، $V_{AB}=۴۵$ ولت می‌شود. اگر مقاومت ۵ اهمی را در سرهای A و B وصل کنیم، $V_{AB}=۲۵$ ولت می‌شود. اگر مقاومت ۴۰ اهمی را در سرهای A و B وصل کنیم، V_{AB} چند ولت خواهد بود؟** (مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۳)



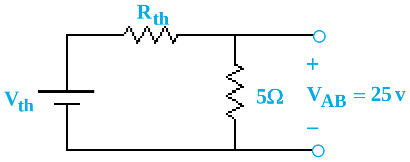
۱) ۴۸
۲) ۵۴
۳) ۶۰
۴) ۷۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» معادل تونن شبکه را در نظر می‌گیریم:

حالت اول ⇒



حالت دوم ⇒

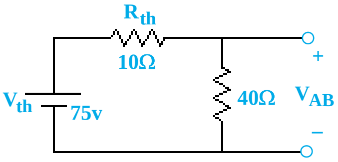


با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ در هر دو حالت داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}V_{AB}=۴۵=\dfrac{V_{th}\times۱۵}{R_{th}+۱۵}\Rightarrow V_{th}=۳R_{th}+۴۵\\V_{AB}=۲۵=\dfrac{V_{th}\times۵}{R_{th}+۵}\Rightarrow V_{th}=۵R_{th}+۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{R_{th}=۱۰\Omega}\\\mathbf{V_{th}=۷۵v}\end{cases}$$

با جایگذاری مدار معادل تونن در حالت سوم داریم:

حالت سوم ⇒

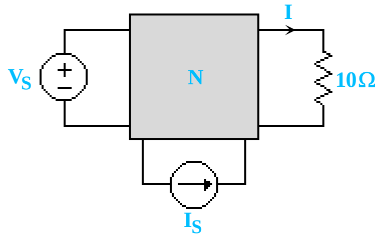


$$\Rightarrow \mathbf{V_{AB}=\frac{۷۵\times۴۰}{۴۰+۱۰}=۶۰\,v}$$

مثال۳۵: مدار N شامل تعدادی مقاومت خطی و منابع وابسته است. دو آزمایش زیر انجام می‌گیرد.

الف) برای $V_S=۷v$ و $I_S=۳A$، $I=۱A$ را بدست می‌آوریم.   ب) برای $V_S=۹v$ و $I_S=۱A$، $I=۳A$ را بدست می‌آوریم.

برای $V_S=۱۵v$ و $I_S=۹A$، مقدار I برحسب آمپر کدام گزینه است؟   (مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۸)



۱) ۰/۳

۲) ۰/۶

۳) ۳

۴) ۶

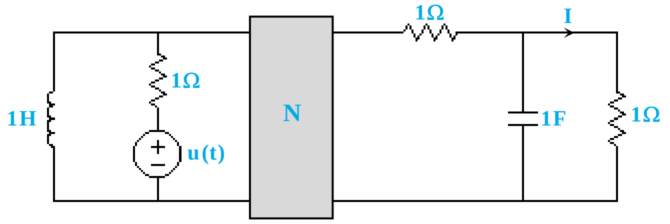
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه شبکه N، شامل تعدادی مقاومت خطی و منابع وابسته است، می‌توان گفت که جریان I از یک رابطه خطی برحسب I_S و V_S قابل محاسبه است. حال داریم: $I=\alpha I_S+\beta V_S$

با توجه به نتایج آزمایشات انجام شده داریم:

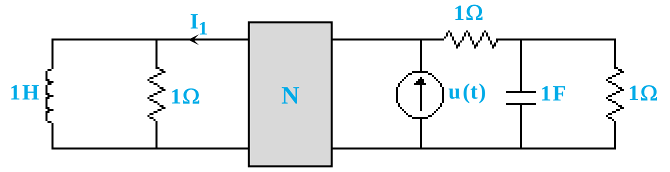
$$\begin{cases}I=۱=\alpha\times۳+\beta\times۷\\I=۳=\alpha\times۱+\beta\times۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳\alpha+۷\beta=۱\\\alpha+۹\beta=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-۰/۶\\\beta=۰/۴\end{cases}\Rightarrow\ I=-۰/۶I_S+۰/۴V_S$$

با جایگذاری V_S و I_S در آزمایش سوم داریم: $V_S=۱۵v\ ,\ I_S=۹A\ \Rightarrow\ I=-۰/۶\times۹+۰/۴\times۱۵=۰/۶A$

مثال۳۶: در مدار شکل (۱)، جریان حالت صفر I(t) به صورت $I(t)=(۲e^{-t}-e^{-۲t}-e^{-۳t})u(t)$ است. جریان حالت صفر $I_۱(t)$ را در شکل (۲) بیابید؟ (N شبکه هم‌پاسخ است.)   (مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)



شکل (۱)



شکل (۲)

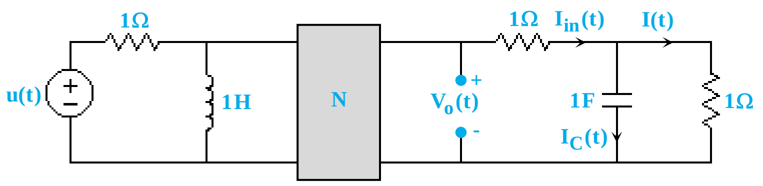
۱) $I_۱(t)=(۴e^{-۲t}-e^{-۳t}+۱)u(t)$

۲) $I_۱(t)=(۵-e^{-۲t}-\frac{۱}{۲}e^{-۳t}-\frac{۱}{۲}e^{-t})u(t)$

۳) $I_۱(t)=\frac{۲}{۳}e^{-۳t}u(t)$

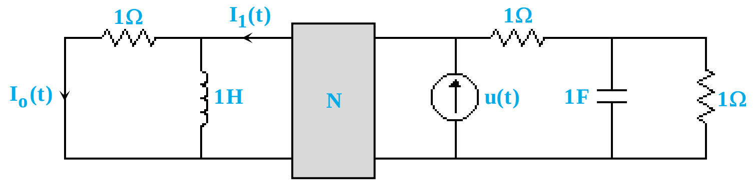
۴) $I_۱(t)=\frac{۱}{۳}(۷+۲e^{-۳t})u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه شبکه N یک شبکه هم‌پاسخ است، بنا به قضیه هم‌پاسخی در مدارهای (۱) و (۲) داریم:



مدار (۱)

$\Rightarrow V_o(t)=I_o(t)$



مدار (۲)

در صورتی که در مدار (۱) مقدار $V_o(t)$ را محاسبه کنیم، داریم:

$V_o(t)=۱\times I_{in}(t)+I(t)\times۱$ و $I_{in}(t)=I(t)+I_C(t)$

$$I_C(t)=C\frac{dV_C}{dt}=C\frac{d[I(t)\times۱]}{dt}\Rightarrow I_C(t)=۱\times[-۲e^{-t}+۲e^{-۲t}+۳e^{-۳t}]u(t)$$

$$\Rightarrow I_{in}(t)=I(t)+I_C(t)=[۲e^{-t}-e^{-۲t}-e^{-۳t}]u(t)+[-۲e^{-t}+۲e^{-۲t}+۳e^{-۳t}]u(t) \Rightarrow I_{in}(t)=[e^{-۲t}+۲e^{-۳t}]u(t)$$

$$\Rightarrow V_o(t)=۱\times I_{in}(t)+I(t)\times ۱$$

$$\Rightarrow V_o(t)=۱\times[e^{-۲t}+۲e^{-۳t}]u(t)+[۲e^{-t}-e^{-۲t}-e^{-۳t}]u(t)\times ۱ \Rightarrow V_o(t)=[e^{-۳t}+۲e^{-t}]u(t)$$

برطبق قضیه هم‌پاسخی $V_o(t)$ در مدار (۱) برابر $I_o(t)$ در مدار (۲) است.

$$\Rightarrow I_o(t)=V_o(t)=[e^{-۳t}+۲e^{-t}]u(t)$$

حال در مدار (۲) داریم:

$$V_{۱H}=I_o(t)\times ۱=[e^{-۳t}+۲e^{-t}]u(t)\times ۱=[۲e^{-t}+e^{-۳t}]u(t)$$

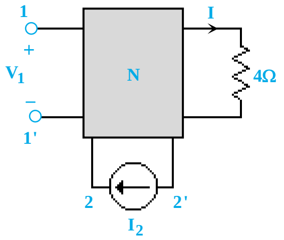
$$I_{۱H}=\frac{۱}{L}\int_۰^t V_{۱H}dt=\frac{۱}{۱}\int_۰^t [۲e^{-t}+e^{-۳t}]u(t)dt=[-۲e^{-t}]_۰^t+[-\frac{۱}{۳}e^{-۳t}]_۰^t=-۲e^{-t}+۲-\frac{۱}{۳}e^{-۳t}+\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow I_{۱H}=[\frac{۷}{۳}-۲e^{-t}-\frac{۱}{۳}e^{-۳t}]u(t) \Rightarrow I_۱(t)=I_o(t)+I_{۱H}=[e^{-۳t}+۲e^{-t}]u(t)+[\frac{۷}{۳}-۲e^{-t}-\frac{۱}{۳}e^{-۳t}]u(t)$$

$$\Rightarrow I_۱(t)=[\frac{۷}{۳}+\frac{۲}{۳}e^{-۳t}]u(t) \Rightarrow \mathbf{I_۱(t)=\frac{۱}{۳}[۷+۲e^{-۳t}]u(t)}$$

مثال ۳۷: در شبکه شکل داده شده که مقاومتی، خطی و تغییرناپذیر با زمان است، اگر $V_۱=۳v$ و $I_۲=۳A$ باشد، آنگاه $I=۶A$ است. اگر درگاه '۱-۱ اتصال کوتاه و $I_۲=-۲A$ باشد، آنگاه $I=۲A$ می‌شود. اگر $V_۱=-۲v$ و درگاه '۲-۲ مدار باز شود، آنگاه I برابر خواهد شد با:

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)



۱) $I=۶A$

۲) $I=-۴A$

۳) $I=۴A$

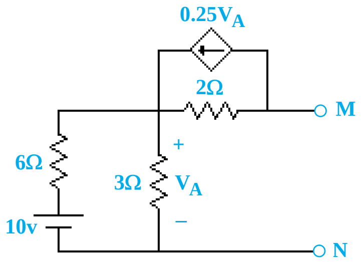
۴) $I=-۶A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به خطی بودن شبکه داریم:

$$I=k_۱V_۱+k_۲I_۲ \Rightarrow \begin{cases} ۶=۳k_۱+k_۲\times ۳ \\ ۲=۰k_۱+(-۲)k_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_۱=۳ \\ k_۲=-۱ \end{cases} \Rightarrow I=۳V_۱-I_۲ \Rightarrow \begin{cases} V_۱=-۲ \\ I_۲=۰ \end{cases} \Rightarrow I=۳\times(-۲)=\mathbf{-۶A}$$

آزمون فصل دهم

۱ـ در شکل زیر مقدار مقاومت نورتن برحسب اهم کدام است؟



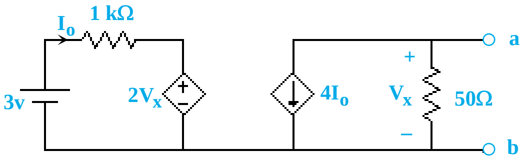
۱) ۱

۲) ۳

۳) $\frac{۳}{۷}$

۴) ۲

۲ـ در مدار زیر مقادیر ولتاژ تونن و جریان نورتن کدام هستند؟



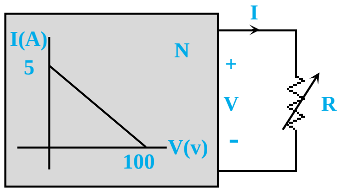
۱) $V_{th} = -۱v\ ,\ I_N = -۰/۱۲A$

۲) $V_{th} = -۲v\ ,\ I_N = ۰/۲A$

۳) $V_{th} = -۱v\ ,\ I_N = ۰/۳A$

۴) $V_{th} = ۱v\ ,\ I_N = -۱A$

۳ـ در یک شبکه‌ی خطی و تغییرناپذیر با زمان با نام N، اگر مقدار مقاومت R متغیر باشد، آنگاه حداکثر توان دریافتی توسط آن برحسب وات کدام است؟



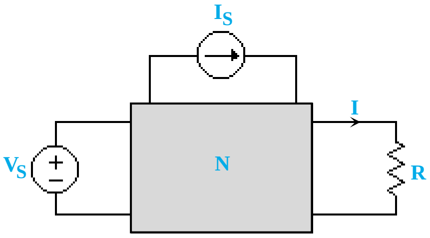
۱) ۱۱۰

۲) ۱۰۰

۳) ۱۳۵

۴) ۱۲۵

۴ـ در صورتی که در شبکه‌ی زیر $V_S = ۱۰۰v$ و $I_S = ۱۰A$ باشد، مقدار جریان I برابر ۴A است. حال اگر $V_S = ۵۰v$ و $I_S = ۳A$ شود، مقدار جریان I برابر ۲/۵A می‌شود. با این شرایط در صورتی که $V_S = ۸۰v$ و $I_S = ۷A$ باشد، مقدار I برحسب آمپر کدام است؟



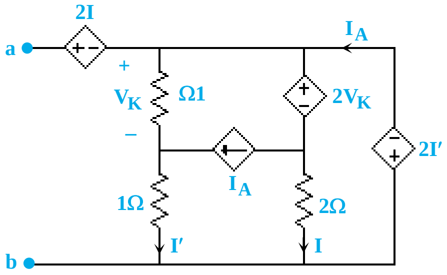
۱) ۳/۴۵

۲) ۴/۱

۳) ۲/۳۵

۴) ۳/۱

۵ـ در مدار زیر مقدار R_{th} برحسب اهم کدام است؟



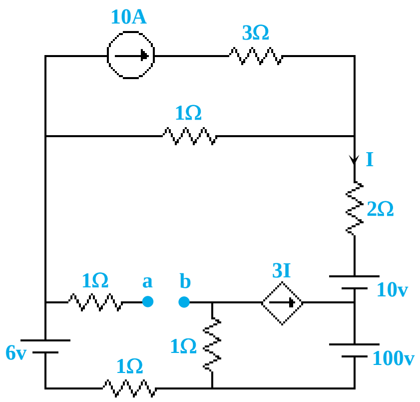
۱) −۱

۲) −۲

۳) ۱

۴) ۲

۶ـ مقدار R_{th} از دو سر a و b برحسب اهم کدام است؟



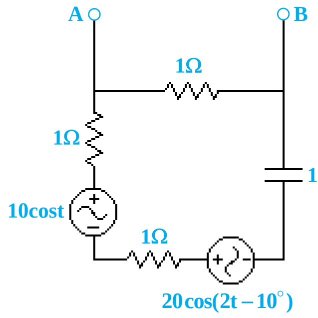
۱) ۲/۵

۲) ۲

۳) ۳/۵

۴) ۶

۷ــ در مدار زیر مقدار ولتاژ تونن از پایه‌های A و B کدام است؟



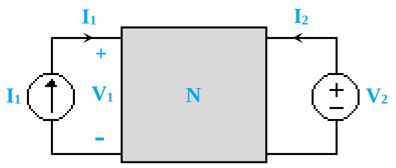
۱) $۲/۲\cos(۲t-۱۲/۱^{\circ})+۳/۲\cos(۲t)$

۲) $۲/۲\cos(t-۶/۱^{\circ})-۳/۲\cos(۲t)$

۳) $۳/۲\cos(t+۶۱/۲^{\circ})-۰/۶۶\cos(۲t-۱۲^{\circ})$

۴) $۳/۲\cos(t+۱۸/۴^{\circ})+۰/۶۶\cos(۲t-۲۰/۵^{\circ})$

۸ــ در یک شبکه‌ی خطی و تغییرناپذیر با زمان، آزمایش‌های زیر انجام شده است. مقدار $\hat{V}_۱$ برحسب ولت کدام است؟

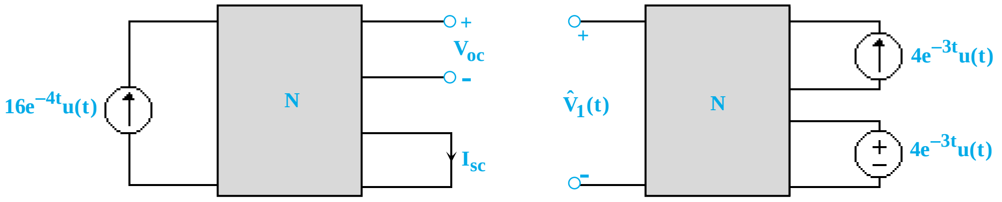


آزمایش (۱) $\begin{cases} V_۱ = ۱۰\,v \\ I_۱ = -۳A \\ V_۲ = ۰ \\ I_۲ = ۴A \end{cases}$

آزمایش (۲) $\begin{cases} \hat{V}_۱ = ? \\ \hat{I}_۱ = ۰ \\ \hat{V}_۲ = ۱۰\,v \\ \hat{I}_۲ = ۱۱A \end{cases}$

۱) $\frac{۴۰}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴۰}$ ۳) $\frac{۵۰}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵۰}$

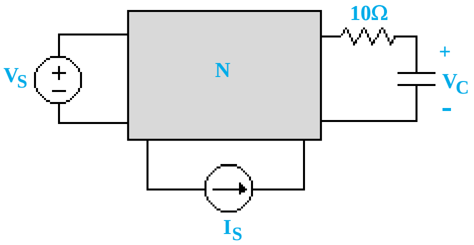
۹ــ نتایج یک آزمایش بر روی یک شبکه‌ی خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر است. مقدار $\hat{V}_۱$ کدام است؟



$V_{oc}=(۴e^{-۳t}-۴e^{-۴t})u(t)$ و $I_{sc}=(۱۴e^{-۴t}-e^{-۳t})u(t)$

۱) $۵e^{-۴t}u(t)$ ۲) $۱۰e^{-۳t}u(t)$ ۳) $۱۲e^{-۴t}u(t)$ ۴) $۱۲e^{-۳t}u(t)$

۱۰ــ در صورتی که شبکه N فقط شامل مقاومت‌های خطی و مثبت باشد، با حضور $I_S=۱۵A$ و $V_S=۱۰\,V$ ولتاژ خازن با معادله $V_C(t)=۱۰-۴e^{-at}$ تغییر خواهد کرد. حال با فرض شرایط اولیه‌ی یکسان، اگر $I_S=۳۰\,A$ و $V_S=۲۰\,v$ شود، آنگاه معادله‌ی ولتاژ دو سر خازن کدام است؟



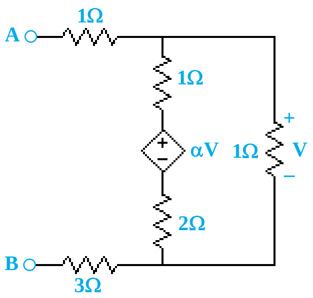
۱) $۲۰-۱۴e^{-at}$

۲) $۲۰-۶e^{-at}$

۳) $۱۰-۱۴e^{-at}$

۴) $۱۰-۶e^{-at}$

۱۱ــ در مدار شکل نشان داده شده، مقدار α چقدر باید باشد تا مقاومت دیده شده از دو سر (AB) برابر با صفر باشد؟



۱) $\frac{۵}{۲}$

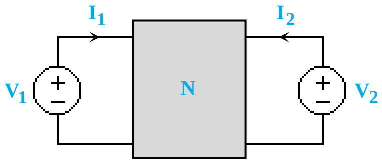
۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۱۳}$

۴) $\frac{۱۹}{۴}$

۱۲ـ شبکه‌ی N فقط از عناصر RLC پسیو، تغییرناپذیر با زمان و خطی تشکیل شده است. اندازه‌گیری‌های زیر در شبکه انجام شده است:

$\begin{cases} V_۱ = ۸\cos(\omega t + ۱۶۰^\circ)\ ,\ V_۲ = ۰ \\ I_۱ = ۲\cos(\omega t + ۱۸۰^\circ)\ ,\ I_۲ = ۴\cos(\omega t + ۷۰^\circ) \end{cases}$. اگر $V_۱ = ۲\cos(\omega t + ۵^\circ)$ و $V_۲ = \cos(\omega t + ۱۵^\circ)$ باشد، معادله‌ی جریان $I_۱$ کدام است؟



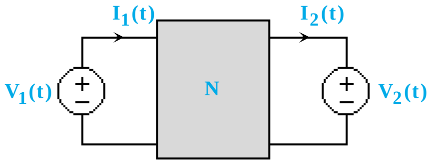
۱) $۲\cos(\omega t + ۹۰^\circ)$

۲) $۳\cos(\omega t + ۶۰^\circ)$

۳) $\cos(\omega t + ۳۰^\circ)$

۴) $۴\cos\omega t$

۱۳ـ در شبکه‌ی مقاومتی خطی تغییرناپذیر با زمان زیر، اطلاعات $\begin{cases} V_۱(t) = ۳۰t\ ,\ V_۲(t) = ۰ \\ I_۱(t) = ۱۰t\ ,\ I_۲(t) = ۴t \end{cases}$ داده شده است. حال اگر $V_۱(t) = ۱۵t + ۳۰$ و $V_۲(t) = ۳۰t + ۷/۵$ باشد، آنگاه $I_۱(t)$ کدام است؟



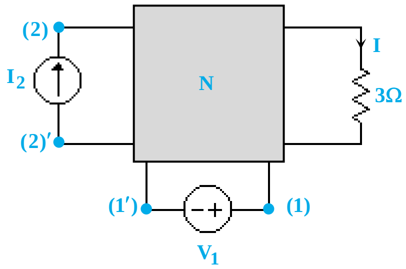
۱) $I_۱(t) = ۵t + ۲۰$

۲) $I_۱(t) = -۲t - ۲$

۳) $I_۱(t) = t + ۹$

۴) $I_۱(t) = ۹t$

۱۴ـ در شکل زیر شبکه‌ی N، مقاومتی، خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشد. اگر $I_۲ = ۳A$ و $V_۱ = ۳v$ انتخاب گردند، $I = ۶A$ می‌شود. اگر قطب ۱ و ′۱ اتصال کوتاه و $I_۲ = -۲A$ باشد، مقدار $I = ۲A$ بدست خواهد آمد. اکنون $V_۱ = -۲v$ و قطب ۲ و ′۲ مدار باز می‌شود؛ در این حالت I برابر چند آمپر است؟



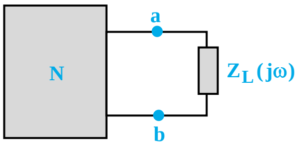
۱) ۶-

۲) ۶

۳) ۱

۴) ۳

۱۵ـ در دوقطبی N اندازه‌گیری‌های زیر انجام گرفته است. دوقطبی شامل مقاومت‌ها، سلف‌ها، خازن‌های تغییرناپذیر با زمان و منابع نابسته هم‌فرکانس می‌باشد. مدار معادل تونن نقاط b و a در کدام گزینه است؟



$Z_L(\Omega)$	∞	$-j۸$	$-j۴$
$V_{ab}(v)$	۱۰۰	۱۶۰	۱۳۳/۳

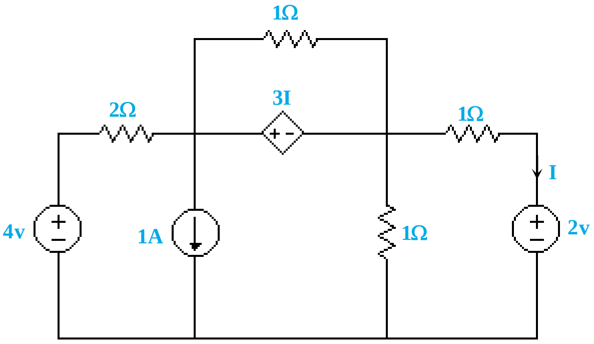
۱) $V_{th} = ۱۰۰v\ ,\ Z_{th} = (۲ - j۴)\Omega$

۲) $V_{th} = ۵۰v\ ,\ Z_{th} = (۳ + j۴)\Omega$

۳) $V_{th} = ۱۰۰v\ ,\ Z_{th} = (-۳ + j۴)\Omega$

۴) $V_{th} = ۵۰v\ ,\ Z_{th} = (۲ - j۳)\Omega$

۱۶ـ در مدار زیر به جای منبع وابسته چه مقاومتی می‌توان قرار داد، به طوری که جریان هیچ شاخه‌ای از مدار تغییر نکند؟



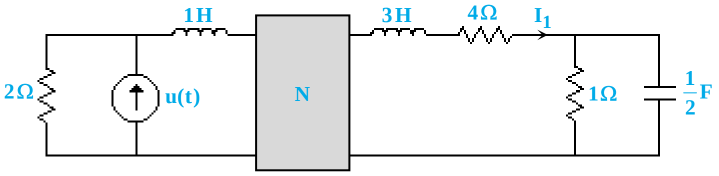
۱) ۰/۶ اهم

۲) ۰/۶− اهم

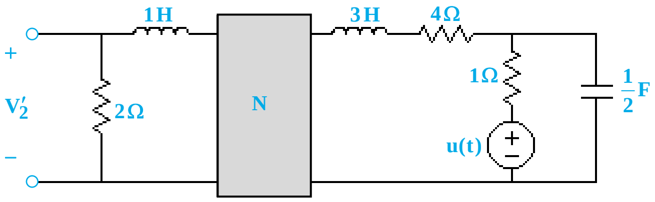
۳) $\frac{۵}{۳}$ اهم

۴) $-\frac{۵}{۳}$ اهم

۱۷ـ اگر شبکه‌ی N یک شبکه هم‌پاسخ بوده و پاسخ حالت صفر برای جریان $I_۱$ در مدار (الف) به صورت $I_۱ = (\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴}e^{-t} - \frac{۱}{۲}e^{-۳t})u(t)$ باشد، حال معادله‌ی $V'_۲$ در مدار (ب) کدام است؟



(الف)



(ب)

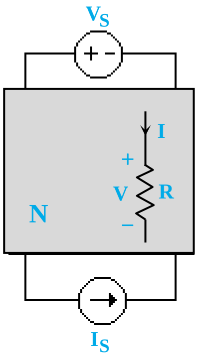
۱) $\frac{۳}{۴} + ۱/۲۵e^{-۲t} - \frac{۱}{۲}e^{-t} - e^{-۳t}$

۲) $\frac{۳}{۸} - ۱/۲۵e^{-t} - e^{-t} + e^{-۳t}$

۳) $\frac{۳}{۸} - ۱/۲۵e^{-t} + \frac{۱}{۲}e^{-t} + e^{-۳t}$

۴) $\frac{۳}{۴} - ۱/۲۵e^{-۲t} - \frac{۱}{۲}e^{-t} + e^{-۳t}$

۱۸ـ در مدار زیر شبکه‌ی N شامل یک مدار خطی و پسیو می‌باشد. اگر $V_S = ۴\cos t$ و $I_S = ۴A$ باشد، آنگاه $۴V - ۶I - ۱ + ۶\cos t = ۰$ است. حال اگر $V_S = ۲v$ و $I_S = ۲\cos t$ شود، حداکثر توان جذبی R چند وات است؟



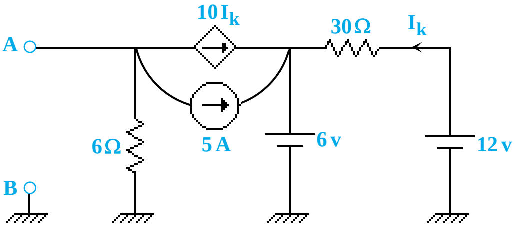
۱) ۱/۳۳

۲) ۰/۶۶

۳) ۰/۳۸

۴) ۲/۶۶

۱۹ـ در مدار زیر مقادیر V_{th} و R_{th} از دیدگاه (A و B) کدام است؟



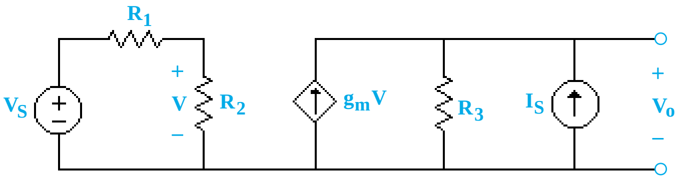
۱) $V_{th} = -۴۲v$, $R_{th} = ۶\Omega$

۲) $V_{th} = -۴۲v$, $R_{th} = -۶\Omega$

۳) $V_{th} = ۴۲v$, $R_{th} = ۴\Omega$

۴) $V_{th} = ۴۲v$, $R_{th} = -۴\Omega$

۲۰ـ در مدار شکل زیر در صورتی که I_S را نصف و V_S را سه برابر کنیم، چه تغییری در V_o ایجاد می‌شود؟



۱) ۳ برابر

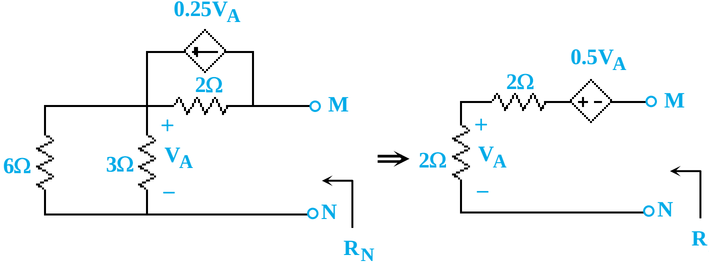
۲) ۴ برابر

۳) ۱/۵ برابر

۴) تغییرات V_o با توجه به مقادیر المان‌های مدار و مقادیر اولیه V_S و I_S می‌تواند متفاوت باشد.

پاسخنامه آزمون فصل دهم

۱ـ گزینه «۲» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر می‌کنیم:



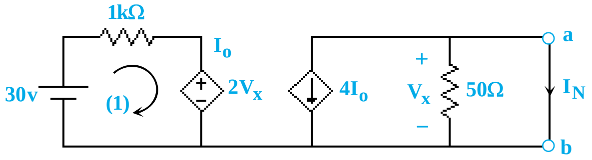
حال مقاومت معادل منبع ولتاژ وابسته را محاسبه می‌کنیم:

$$R_q=\frac{۰/۵V_A}{-\frac{V_A}{۲}}=-۱\Omega$$

بنابراین داریم:

$$R_N=۲+۲-۱=۳\Omega$$

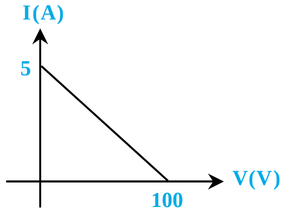
۲ـ گزینه «۱» با توجه به متفاوت بودن جریان نورتن در گزینه‌ها، کافی است ایـن جریان را محاسبه کنیم، بنابراین با اتصال کوتاه کردن خروجی داریم:



$$\Rightarrow\begin{cases}V_x=۰\\ I_N=-۴I_o\end{cases}$$

$$\text{KVL (۱)}:-۳۰+۱۰^{۳}I_o+۲V_x=۰\rightarrow I_{o}=\frac{۳۰}{۱۰^{۳}}A\rightarrow I_N=-۰/۱۲\ A$$

۳ـ گزینه «۴» ابتدا با توجه به مشخصه‌ی $V-I$ داده شده برای شبکه، معادل تونن را محاسبه می‌کنیم:



$$I=-\frac{۵}{۱۰۰}V+۵\Rightarrow\ V=۲۰I+۱۰۰$$

می‌دانیم که حداکثر توان دریافتی توسط مقاومت R زمانی رخ می‌دهد که R برابر مقاومت تونن دیده شده از دو سر آن باشد. بنابراین حداکثر توان دریافتی برابر است با:

$$P_{o\,max}=\frac{۱}{۴}\frac{V_{th}^{۲}}{R_{th}}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۰۰^{۲}}{۲۰}=۱۲۵\,w$$

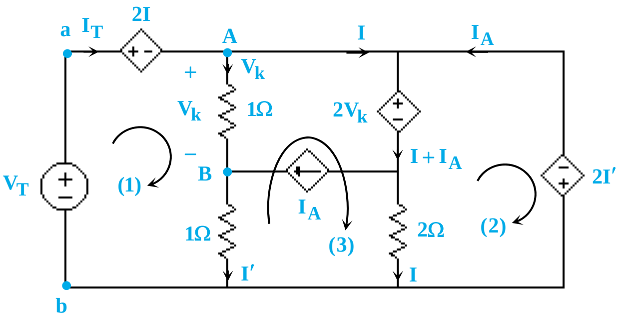
۴ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه شبکه مقاومتی می‌باشد، برای I داریم:

$$I=aV_s+b\,I_s\ \rightarrow\begin{cases}۱۰۰a+۱۰b=۴\\ ۵۰a+۳b=۲/۵\end{cases}\rightarrow\ a=۰/۰۶۵,b=-۰/۲۵$$

بنابراین به ازای مقادیر جدید منابع ولتاژ و جریان خواهیم داشت:

$$I=۰/۰۶۵\times۸۰-۰/۲۵\times۷=۳/۴۵A$$

۵ـ گزینه «۲» با اعمال منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T در دو سر b,a و اعمال KVL و KCL های مورد نیاز داریم:



$$\text{KCL}(A):I_T=V_k+I\qquad(۱)$$

$$\text{KVL (۱)}: V_T=۲I+V_k+I'\qquad(۲)$$

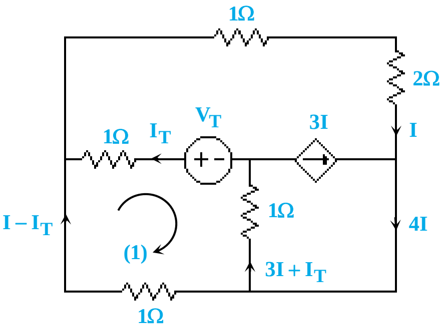
$$\text{KVL}(۲):-۲V_k-۲I'-۲I=۰\Rightarrow I+I'+V_k=۰\quad(۳)$$

$$\text{KVL}(۳):-V_k+۲V_k+۲I-I'=۰\Rightarrow I'=V_k+۲I\quad(۴)$$

$$(۳),(۲)\rightarrow V_T=I$$

$$(۳),(۴)\rightarrow V_k=-\frac{۳}{۲}I\xrightarrow{(۱)}I_T=-\frac{۱}{۲}I\ \Rightarrow\ R_{th}=\frac{V_T}{I_T}=-۲\Omega$$

۶ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر می‌کنیم. پس با اعمال KVL در حلقه‌های مدار داریم:

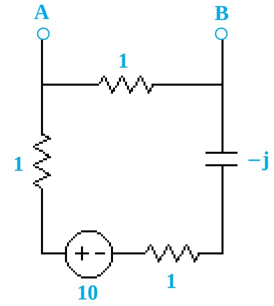


$$\mathrm{KVL}(۱):-I_T+V_T-(۳I+I_T)+(I-I_T)=۰\Rightarrow V_T=۳I_T+۲I \quad (۱)$$

$$\mathrm{KVL}\ (\text{حلقه‌ی بیرونی}):\ ۳I+(I-I_T)=۰\Rightarrow I=\frac{I_T}{۴} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow\ V_T=(۳+\frac{۱}{۲})I_T=۳/۵I_T\rightarrow R_{th}=۳/۵\Omega$$

۷ـ گزینه «۴» برای محاسبه‌ی ولتاژ مدار باز دو سر A و B از قضیه‌ی جمع آثار استفاده می‌کنیم:

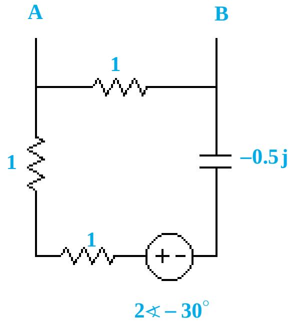


حالت اول: ولتاژ مدار باز ناشی از منبع $۱۰\cos t$:

$$\Rightarrow V_{AB_۱}=\frac{۱}{۳-j}\times ۱۰=۳/۲\measuredangle ۱۸/۴^\circ$$

$$\Rightarrow V_{oc_۱}(t)=۳/۲\cos(t+۱۸/۴^\circ)$$

حالت دوم: ولتاژ مدار باز ناشی از منبع $۲\cos(۲t-۳۰^\circ)$:



$$V_{AB_۲}=\frac{۱}{۳-۰/۵j}\times ۲\measuredangle -۳۰^\circ=۰/۶۶\measuredangle -۲۰/۵^\circ$$

$$V_{oc_۲}(t)=۰/۶۶\cos(۲t-۲۰/۵^\circ)$$

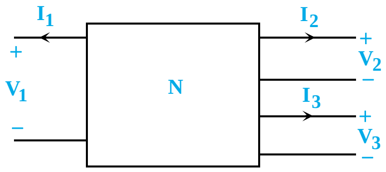
بنابراین ولتاژ مدار باز برابر است با:

$$V_{oc}(t)=V_{oc_۱}(t)+V_{oc_۲}(t)=۳/۲\cos(t+۱۸/۴^\circ)+۰/۶۶\cos(۲t-۲۰/۵^\circ)$$

۸ـ گزینه «۱» با استفاده از قضیه‌ی تلگان داریم:

$$V_۱\hat{I}_۱+V_۲\hat{I}_۲=\hat{V}_۱I_۱+\hat{V}_۲I_۲\Rightarrow ۱۰\times۰+۰\times۱۱=\hat{V}_۱\times(-۳)+۱۰\times۴\Rightarrow \hat{V}_۱=\frac{۴۰}{۳}v$$

۹ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشد، بنابراین قضیه‌های جمع آثار و هم‌پاسخی برقرار می‌باشد. در نتیجه داریم:



$$\text{قضیه‌ی جمع آثار}:\hat{V}_۱=\hat{V}_۱\,\Big|_{\text{ناشی از منبع ولتاژ}}+\hat{V}_۱\,\Big|_{\text{ناشی از منبع جریان}}$$

از طرفی با توجه به قضیه‌ی هم‌پاسخی داریم:

$$\frac{\hat{V}_۱}{\hat{V}_۳}\Big|_{\hat{I}_۱=۰}=\frac{I_۳}{-I_۱}\Big|_{V_۳=۰}\Rightarrow \hat{V}_۱\,\Big|_{\text{ناشی از منبع ولتاژ}}=\frac{\frac{-۱}{s+۴}+\frac{۱۳}{s+۳}}{\frac{۱۶}{s+۴}}\times\frac{۱۶}{s+۴}=\frac{۱۳}{s+۳}-\frac{۱}{s+۴}$$

$$\frac{\hat{V}_۱}{-\hat{I}_۲}\Big|_{\hat{I}_۱=۰}=\frac{V_۲}{-I_۱}\Big|_{I_۲=۰}\Rightarrow \hat{V}_۱\,\Big|_{\text{ناشی از منبع جریان}}=\frac{\frac{-۴}{s+۳}+\frac{۴}{s+۴}}{\frac{۱۶}{s+۴}}\times\frac{۴}{s+۴}=\frac{۱}{s+۴}-\frac{۱}{s+۳}$$

$$\hat{V}_۱=\frac{۱۲}{s+۳}\Rightarrow \hat{V}_۱(t)=۱۲e^{-۳t}$$

۱۰ـ گزینه «۱» با توجه به فرم کلی پاسخ مدار مرتبه‌ی اول داریم:

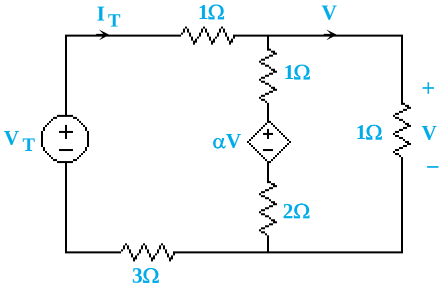
$$V_c(t)=V_c(\infty)+[V_c(۰)-V_c(\infty)]e^{-\frac{t}{Rc}}$$

$$V_c(t)=۱۰-۴e^{-at}\rightarrow\begin{cases}V_c(\infty)=۱۰v\\V_c(۰)=۶v\end{cases}$$

در صورتی که مدار معادل تونن دیده شده از دو سر خازن را محاسبه کنیم، $V_c(\infty)$ همان ولتاژ تونن می‌باشد (خازن در بی‌نهایت مدار باز می‌شود). از طرفی وقتی در حالت جدید منابع ۲ برابر شود، ولتاژ تونن نیز ۲ برابر می‌شود. بنابراین داریم:

$$V_c(\infty)=۱۰\times۲=۲۰v\Rightarrow V_c(t)=۲۰+(۶-۲۰)e^{-at}=۲۰-۱۴e^{-at}$$

۱۱ـ گزینه «۴» برای محاسبه‌ی مقاومت تونن دیده شده از دو سر AB منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T را در دو سر A,B قرار می‌دهیم:



$$\text{KVL (حلقه‌ی چپ)}:V_T=۴I_T+۳(I_T-V)+\alpha V$$

$$\Rightarrow V_T=۷I_T+(\alpha-۳)V\quad(۱)$$

$$\text{KVL (حلقه‌ی بیرونی)}:V_T=۴I_T+V\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow V_T=۴I_T+\frac{V_T-۷I_T}{\alpha-۳}\Rightarrow(\alpha-۴)V_T=[۴(\alpha-۳)-۷]I_T\Rightarrow V_T=\frac{۴\alpha-۱۹}{\alpha-۴}I_T$$

$$\Rightarrow R_{AB}=\frac{۴\alpha-۱۹}{\alpha-۴}\xrightarrow{R_{AB}=۰}\alpha=\frac{۱۹}{۴}$$

۱۲ـ گزینه «۳» ابتدا اندازه‌گیری‌های انجام شده را به حوزه‌ی فازور می‌بریم:

آزمایش اول $\begin{cases}V_۱=۸\measuredangle۱۶۰^\circ\\I_۱=۲\measuredangle۱۸۰^\circ\\V_۲=۰\\I_۲=۴\measuredangle-۱۸۰^\circ\end{cases}$ آزمایش دوم $\begin{cases}\hat{V}_۱=۲\measuredangle۵۰^\circ\\\hat{I}_۱=?\\\hat{V}_۲=۱\measuredangle۱۵^\circ\\\hat{I}_۲=?\end{cases}$

با استفاده از قضیه‌ی تلگان داریم:

$$V_۱\hat{I}_۱+V_۲\hat{I}_۲=\hat{V}_۱I_۱+\hat{V}_۲I_۲\Rightarrow(۸\measuredangle۱۶۰)\times(\hat{I}_۱)+\cancelto{۰}{۰\times\hat{I}_۲}=(۲\measuredangle۵^\circ)(۲\measuredangle۱۸۰^\circ)+(۱\measuredangle۱۵^\circ)(۴\measuredangle-۱۸۰^\circ)$$

$$\Rightarrow\hat{I}_۱=۱\measuredangle۳۰\rightarrow I_۱(t)=\cos(\omega t+۳۰^\circ)$$

۱۳ـ گزینه «۳» با استفاده از قضیه‌ی تلگان داریم: (دقت شود که جهت جریان $I_۲$ معکوس می‌باشد)

$$V_۱\hat{I}_۱+V_۲(-\hat{I}_۲)=V_۱\hat{I}_۱+V_۲(-\hat{I}_۲)$$

$$\Rightarrow۳۰t\times I_۱(t)+۰\times-I_۲(t)=(۱۵t+۳۰)(۱۰t)+(۳۰t+۷/۵)(-۴t)\Rightarrow I_۱(t)=۵t+۱۰-۴t-۱=t+۹$$

۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه شبکه‌ی N مقاومتی می‌باشد، داریم:

$$I=aI_۲+bV_۱$$

حال با توجه به آزمایش‌های انجام شده، پارامترهای a و b را محاسبه می‌کنیم:

آزمایش اول: $I_۲=۳\,,\,V_۱=۳\,,\,I=۶\Rightarrow۳a+۳b=۶\Rightarrow a+b=۲\quad(۱)$

آزمایش دوم: $I_۲=-۲\,,\,V_۱=۰\,,\,I=۲\Rightarrow-۲a=۲\Rightarrow a=-۱\xrightarrow{(۱)}b=۳$

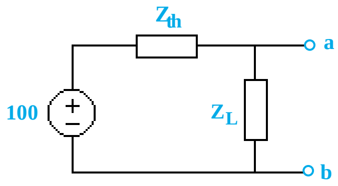
بنابراین به ازای مقادیر جدید $I_۱,V_۱$ داریم:

$$I=-I_۲+۳V_۱=-۰+۳\times(-۲)=-۶A$$

۱۵ـ گزینه «۳» می‌دانیم ولتاژ تونن همان ولتاژ مدار باز می‌باشد. از طرفی وقتی امپدانس Z_L بی‌نهایت باشد، معادل مدار باز بودن سرهای b,a می‌باشد. بنابراین داریم:

$V_{th}=V_{ab}\,|_{Z_L\rightarrow\infty}=۱۰۰V$ پس گزینه‌های ۲ و ۴ نادرست هستند.

حال فرض می‌کنیم مدار معادل تونن شامل $V_{th}=۱۰۰V$ و $Z_{th}=R+jX$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

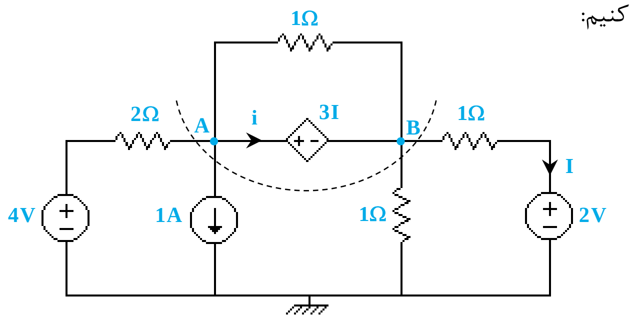


$$\text{if}\ \ Z_L=-۸j\Rightarrow|V_{ab}|=۱۶۰$$

$$\Rightarrow\frac{|Z_L|}{|Z_{th}+Z_L|}\times ۱۰۰=۱۶۰\Rightarrow\frac{۸۰}{\sqrt{R^۲+(X-۸)^۲}}=۱۶\Rightarrow R^۲+(X-۸)^۲=۲۵$$

با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود که گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح می‌باشد.

۱۶ـ گزینه «۲» ابتدا با تحلیل مدار ولتاژ و جریان منبع ولتاژ وابسته را محاسبه می‌کنیم:



$$I=\frac{V_B-۲}{۱}=V_B-۲\qquad(۱)$$

با نوشتن KCL در ابرگره AB داریم:

$$\frac{V_A-۴}{۲}+۱+\frac{V_B}{۱}+\frac{V_B-۲}{۱}=۰\Rightarrow V_A+۴V_B=۶\qquad(۲)$$

از طرف دیگر داریم:

$$V_A=V_B+۳I=V_B+۳V_B-۶=۴V_B-۶\qquad(۳)$$

$$(۲),(۳)\Rightarrow\begin{cases}V_A+۴V_B=۶\\V_A-۴V_B=-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_A=۰\\V_B=۱/۵V\end{cases}$$

حال می‌توان نوشت:

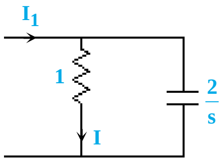
$$I=V_B-۲=-۰/۵A$$

$$i=-\frac{V_A-۴}{۲}-۱+\frac{V_B-V_A}{۱}=۲-۱+۱/۵=۲/۵A$$

طبق قضیه جانشینی می‌توان منبع وابسته را با مقاومت معادل R به صورت مقابل جایگزین کرد:

$$R=\frac{V}{i}=\frac{۳I}{i}=\frac{-۳\times ۰/۵}{۲/۵}=-۰/۶\Omega$$

۱۷ـ گزینه «۴» ابتدا جریان مقاومت ۱ اهمی را در شکل الف محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases}I(s)=\dfrac{\frac{۲}{s}}{۱+\frac{۲}{s}}I_۱(s)=\dfrac{۲}{s+۲}I_۱(s)\\[2ex] I_۱(s)=\dfrac{۳}{۴s}-\dfrac{\frac{۱}{۴}}{s+۱}-\dfrac{\frac{۱}{۲}}{s+۳}\end{cases}\to I(s)=\frac{\frac{۳}{۲}}{s(s+۲)}-\frac{\frac{۱}{۲}}{(s+۱)(s+۲)}-\frac{۱}{(s+۳)(s+۲)}$$

$$\Rightarrow I(s)=\frac{۳}{۴s}-\frac{\frac{۱}{۲}}{s+۱}+\frac{۱}{s+۳}-\frac{\frac{۵}{۴}}{s+۲}\ \Rightarrow\ I(t)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}e^{-t}+e^{-۳t}-\frac{۵}{۴}e^{-۲t}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی هم‌پاسخی داریم:

$$\frac{I}{u(t)}=\frac{V'_۲}{u(t)}\ \Rightarrow\ V'_۲(t)=I(t)\ \Rightarrow V'_۲(t)=\frac{۳}{۴}-۱/۲۵e^{-۲t}-\frac{۱}{۲}e^{-t}+e^{-۳t}$$

۱۸ـ گزینه «۳» با توجه به معادله‌ی بدست آمده در آزمایش اول داریم:

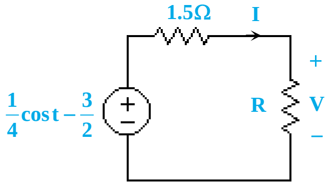
$$۴V+۶I-۱+۶\cos t=۰\ \Rightarrow V=\frac{۳}{۲}(-I)+\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲}\cos t$$

$$V_T=R_{th}I_T+k_۱I_s+k_۲V_s\xrightarrow[I=-I_T]{V=V_T}R_{th}=۱/۵\ ,\ k_۱=\frac{۱}{۱۶}\ ,\ k_۲=-\frac{۳}{۸}$$

حال در صورت تغییر منابع مستقل، ولتاژ تونن را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{th} = k_۱ I_s + k_۲ V_s = \frac{I_s - ۶V_s}{۱۶} = \frac{۱}{۴}\cos t - \frac{۳}{۲}$$

بنابراین داریم:



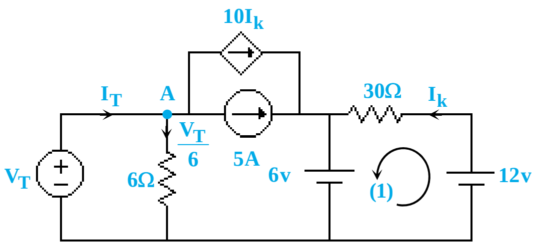
برای جذب توان حداکثر توسط مقاومت بار، مقدار R باید برابر ۱/۵ باشد. حال با استفاده از قضیه‌ی جمع آثار داریم:

$$P_R = P_{۱R}\big|_{ds} + P_{۲R}\big|_{ac\ \text{منبع}}$$

$$P_{۱R} = \frac{V_{th}^۲}{۴R_{th}} = \frac{(\frac{۳}{۲})^۲}{۴\times ۱/۵} = ۰/۳۷۵w \quad , \quad P_{۲R} = \frac{V_{th(rms)}^۲}{۴R_{th}} = \frac{(\frac{۱}{۴\sqrt{۲}})^۲}{۴\times ۱/۵} = ۰/۰۰۵w$$

$$P_R = ۰/۳۸w$$

۱۹ـ گزینه «۱» ابتدا منبع ولتاژ V_T با جریان تزریقی I_T را در دو سر B, A متصل می‌کنیم. سپس با اعمال KVL و KCL مدار معادل تونن را بدست می‌آوریم:



$$KVL(۱): -۱۲ + ۳۰ I_k + ۶ = ۰ \rightarrow I_k = \frac{۱}{۵}\ A$$

$$KCL(A): I_T = \frac{V_T}{۶} + ۵ + ۱۰ I_k = \frac{V_T}{۶} + ۷$$

$$\Rightarrow V_T = ۶I_T - ۴۲ \Rightarrow \begin{cases} R_{th} = ۶\Omega \\ V_{th} = -۴۲\ v \end{cases}$$

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مدار داریم:

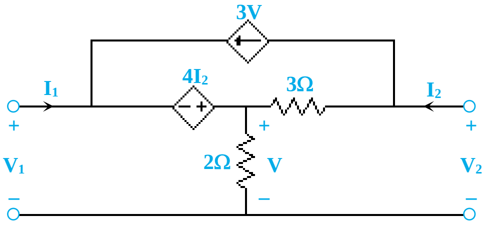
$$\begin{cases} V = \dfrac{R_۲}{R_۱ + R_۲} V_s \\ V_o = R_۳ (I_s + g_m V) \end{cases} \rightarrow V_o = R_۳ (I_s + \frac{g_m R_۲ V_s}{R_۱ + R_۲})$$

با توجه به معادله‌ی V_o تنها در صورتی می‌توانیم بگوییم خروجی در حالت جدید چند برابر شده است که I_s و V_s به یک میزان تغییر کنند. به طور مثال در صورتی که هر دو ۲ برابر شوند، خروجی نیز دو برابر می‌شود. بنابراین تغییرات V_o در حالت خواسته شده وابسته به المان‌های مدار و مقادیر اولیه‌ی V_s و I_s می‌باشد.

فصل یازدهم

«شبکه‌های دو دریچه‌ای»

مثال ۱: در مدار زیر ماتریس امپدانس کدام است؟



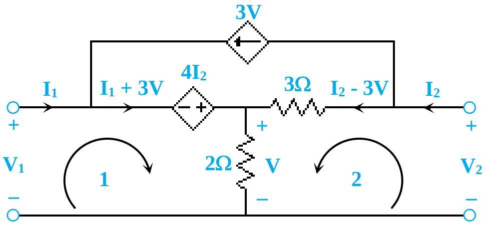
۱) $Z=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۱۶ & ۱۳\end{bmatrix}$

۲) $Z=\begin{bmatrix}-۲ & ۲\\ ۱۶ & ۱۳\end{bmatrix}$

۳) $Z=\begin{bmatrix}-۲ & ۲\\ ۱۶ & -۱۳\end{bmatrix}$

۴) $Z=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۱۶ & -۱۳\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای حل مدار در حلقه‌های ورودی و خروجی، KVL می‌زنیم.



با نوشتن KVL در حلقه ورودی داریم:

$$V_۱=-۴I_۲+V \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه خروجی داریم:

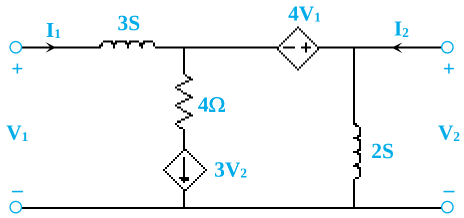
$$V_۲=۳(I_۲-۳V)+V \qquad (۲)$$

$$V=۲(I_۱+I_۲) \qquad (۳)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{cases}V_۱=۲I_۱-۲I_۲\\ V_۲=-۱۶I_۱-۱۳I_۲\end{cases} \Rightarrow \mathbf{Z}=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۱۶ & -۱۳\end{bmatrix}$$

مثال ۲: در مدار زیر، ماتریس امپدانس کدام است؟



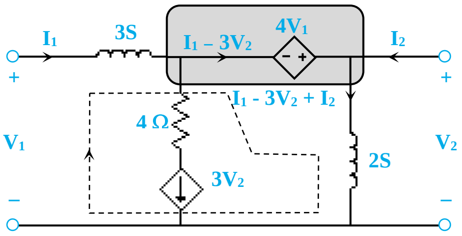
۱) $\begin{bmatrix}\frac{۱۸S^۲+۵S}{۵(۱+۶S)} & \frac{۲S}{۵(۱+۶S)}\\ \frac{۲S}{۱+۶S} & \frac{۲S}{۱+۶S}\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}\frac{۶S^۲+۱}{۵(۱+۲S)} & \frac{۲S}{۱+۳S}\\ \frac{۲S}{۱+۶S} & \frac{۱۸S^۲+۵S}{۵(۱+۶S)}\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\frac{۲S}{۱+۲S} & \frac{۲S}{۱+S}\\ \frac{۱۸S+۲}{۳S+۴} & \frac{S}{۱+۶S}\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}\frac{۲S^۲}{S+۱} & \frac{۳S}{۲(S+۲)}\\ \frac{۶S^۲+۲}{۴S+۱} & \frac{۶}{S+۴}\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش اول:** برای حل مدار، در ابرگره مشخص شده KCL، و در حلقه مشخص شده KVL می‌زنیم.



با نوشتن KCL در ابرگره داریم:

$$I_۱-۳V_۲+I_۲=\frac{V_۲}{۲S} \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه داریم:

$$V_۱=۳S\,I_۱-۴V_۱+V_۲ \qquad (۲)$$

از رابطه (۱) داریم:

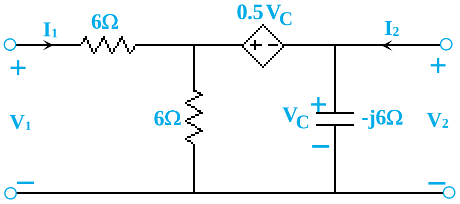
$$V_۲=\frac{۲S}{۱+۶S}I_۱+\frac{۲S}{۱+۶S}I_۲ \qquad (۳)$$

از همین جا می‌توان متوجه شد که گزینه‌ی (۱) جواب درست می‌باشد.

$$\xrightarrow{(۳),(۲)} V_۱=\frac{۱۸S^۲+۵S}{۵(۱+۶S)}I_۱+\frac{۲S}{۵(۱+۶S)}I_۲ \Rightarrow \mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\frac{۱۸S^۲+۵S}{۵(۱+۶S)} & \frac{۲S}{۵(۱+۶S)}\\ \frac{۲S}{۱+۶S} & \frac{۲S}{۱+۶S}\end{bmatrix}$$

روش دوم: در صورتی که در فرکانس $S=\infty$ مدار تحلیل شود، مقدار $Z_{۱۱}$ به علت مدار باز شدن سلف ورودی ∞ است؛ لذا گزینه‌های (۲) و (۳) غلط هستند. علاوه بر این، در فرکانس $S=۰$ به علت اتصال کوتاه بودن سلف‌ها، مقدار $Z_{۲۲}=۰$ است و این مورد در میان گزینه‌های باقیمانده در گزینه (۱) صادق است.

مثال ۳: اندازه $Z_{۲۱}$ در ماتریس امپدانس، در چهارقطبی شکل داده شده چند اهم است؟



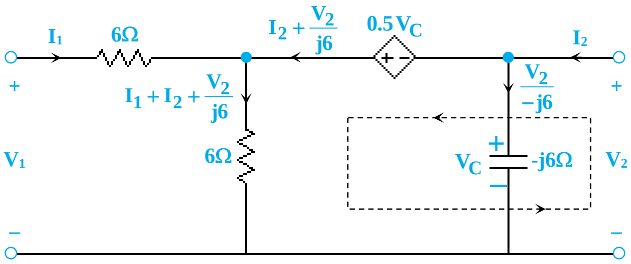
۱) $\frac{۱۶}{۱/۵-j}$

۲) $\frac{۱۸}{۱/۵+j}$

۳) $\frac{۱}{۱/۵-j}$

۴) $\frac{۶}{۱/۵+j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با نوشتن KVL در حلقه نشان داده شده داریم:



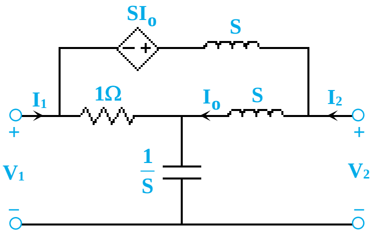
$$V_۲ = -۰/۵V_C + ۶(I_۱ + I_۲ + \frac{V_۲}{j۶})$$

$$\xrightarrow{V_۲=V_C} V_۲ = -۰/۵V_۲ + ۶I_۱ + ۶I_۲ + \underset{-jV_۲}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{V_۲}{j}}}}$$

$$\Rightarrow (۱/۵+j)V_۲ = ۶I_۱ + ۶I_۲ \Rightarrow V_۲ = \frac{۶}{۱/۵+j}I_۱ + \frac{۶}{۱/۵+j}I_۲ \Rightarrow \mathbf{Z_{۲۱} = (\frac{۶}{۱/۵+j})\Omega}$$

توجه: چون $Z_{۲۱}$ را می‌خواهیم و داریم $Z_{۲۱} = \frac{V_۲}{I_۱}\Big|_{I_۲=۰}$، به راحتی می‌توانستیم از همان ابتدا $I_۲$ را صفر قرار دهیم.

مثال ۴: در مدار زیر چه رابطه‌ای میان پارامترهای $Z_{۲۱}$ و $Z_{۱۱}$ وجود دارد؟



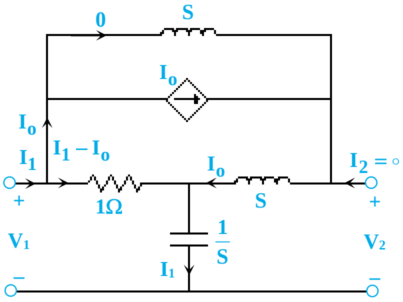
۱) $Z_{۱۱} = Z_{۲۱}$

۲) $Z_{۱۱} = Z_{۲۱}^{۲}$

۳) $Z_{۱۱} = \frac{Z_{۲۱}}{۲}$

۴) $Z_{۱۱} = ۲Z_{۲۱}$

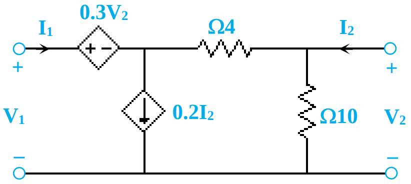
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تعاریف مربوط به $Z_{۱۱}$ و $Z_{۲۱}$، در هر دو مورد جریان $I_۲ = ۰$ لحاظ می‌شود. حال باید ارتباط $V_۲$ و $I_۱$ و ارتباط $V_۱$ و $I_۱$ را بدست آوریم. قبل از آن در قسمت بالای مدار تبدیل منابع انجام می‌دهیم.



$$Z_{۲۱} = \frac{V_۲}{I_۱}\Big|_{I_۲=۰} \quad , \quad Z_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱}\Big|_{I_۲=۰}$$

با توجه به عبور جریان صفر از سلف ۱H، در بالای مدار، می‌توان گفت که $V_۱$ برابر $V_۲$ است. پس می‌توان نوشت: $V_۱ = V_۲ \Rightarrow \frac{V_۱}{I_۱} = \frac{V_۲}{I_۱} \Rightarrow Z_{۱۱} = Z_{۲۱}$

مثال ۵: در مدار زیر مقدار $\frac{Z_{۱۲}}{Z_{۲۲}}$ کدام گزینه است؟

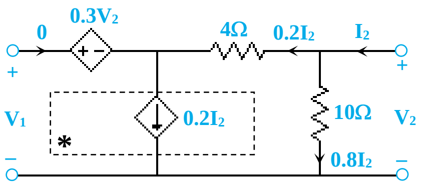


۱) ۳/۱

۲) ۲/۱

۳) ۱/۳

۴) ۱/۲



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای بدست آوردن پارامتر $Z_{۱۲}$ مطابق تعریف آن، مقدار $I_۱ = ۰$ را در مدار اعمال کرده و نسبت $\frac{V_۱}{I_۲}$ را بدست می‌آوریم.

$$Z_{۱۲} = \frac{V_۱}{I_۲}\Big|_{I_۱ = ۰}$$

با نوشتن KVL در مسیر مشخص شده داریم:

$$V_۱ = ۰/۳V_۲ + (-۰/۲I_۲)\times ۴ + V_۲ \quad\Rightarrow\quad V_۱ = ۱/۳V_۲ - ۰/۸I_۲$$

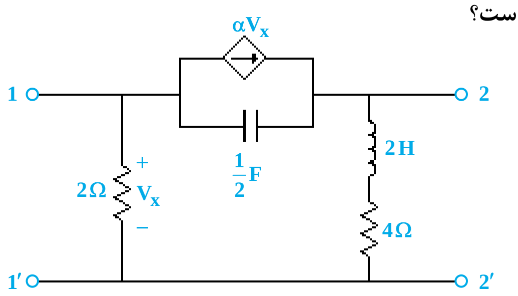
با توجه به رابطه $V_۲ = ۰/۸I_۲ \times ۱۰ = ۸I_۲$، مقدار $V_۲$ را برحسب $I_۲$ جایگزین می‌کنیم. حال داریم:

$$V_۱ = ۱/۳\times ۸I_۲ - ۰/۸I_۲ \quad\Rightarrow\quad V_۱ = ۹/۶I_۲ \quad\Rightarrow\quad \frac{V_۱}{I_۲} = Z_{۱۲} = ۹/۶\Omega$$

پس از بدست آوردن پارامتر $Z_{۱۲}$، نوبت به محاسبه پارامتر $Z_{۲۲}$ می‌رسد. حال داریم:

$$Z_{۲۲} = \frac{V_۲}{I_۲}\Big|_{I_۱=۰} \quad و \quad V_۲ = ۰/۸I_۲ \times ۱۰ = ۸I_۲ \quad\Rightarrow\quad Z_{۲۲} = \frac{V_۲}{I_۲} = ۸\Omega \quad\Rightarrow\quad \frac{Z_{۱۲}}{Z_{۲۲}} = \frac{۹/۶}{۸} = ۱/۲$$

مثال ۶: **به ازای چه مقداری از α امپدانس انتقالی معکوس مدار زیر مستقل از فرکانس است؟**

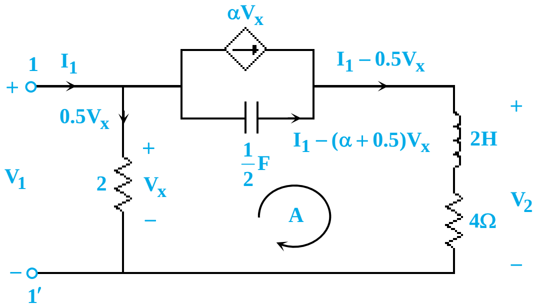


۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۰/۵
۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» امپدانس انتقالی معکوس یک دوقطبی از رابطه روبرو بدست می‌آید:

$$Z_{۲۱} = \frac{V_۲}{I_۱}\Big|_{I_۲=۰}$$

برای محاسبه $Z_{۲۱}$ باید $I_۲ = ۰$ باشد، یا به بیان دیگر باید سرهای خروجی دو قطبی در سمت راست باز شوند. در این حالت با مدار روبرو سر و کار خواهیم داشت: جریان‌های شاخه‌های مختلف مدار با در نظر گرفتن روابط ساده‌ی KCL در گره‌های مختلف در شکل مقابل مشخص شده‌اند. اکنون باید نسبت $\frac{V_۲}{I_۱}$ را پیدا کنیم. ابتدا شاخه سمت راست مدار شامل سلف و مقاومت را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم $V_۲$ را برحسب $I_۱$ بیان کنیم. با توجه به جریان و امپدانس این شاخه می‌توان نوشت:



$$V_۲ = (۲S + ۴)(I_۱ - ۰/۵V_x)$$

برای این که بتوانیم $V_۲$ را بطور کامل بر حسب $I_۱$ بیان کنیم، نیاز به پارامتر V_x داریم. برای محاسبه V_x کافیست در حلقه‌ی مرکزی A یک KVL بزنیم:

$$-V_x + \frac{۲}{S}(I_۱ - \alpha V_x - ۰/۵V_x) + (۲S+۴)(I_۱ - ۰/۵V_x) = ۰ \Rightarrow (\frac{۲}{S} + ۲S + ۴)I_۱ - (S + ۳ + \frac{۲}{S}(\alpha + ۰/۵))V_x = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\frac{(S+۱)^۲}{S}I_۱ = \frac{S^۲ + ۳S + ۲\alpha + ۱}{S}V_x \Rightarrow V_x = ۲\frac{(S+۱)^۲}{S^۲ + ۳S + ۲\alpha + ۱}I_۱$$

حال مقدار V_x را در رابطه قبلی جایگذاری می‌کنیم:

$$V_۲ = (۲S+۴)(I_۱ - ۰/۵V_x) = ۲(S+۲)(۱ - \frac{(S+۱)^۲}{S^۲ + ۳S + ۲\alpha + ۱})I_۱ = ۲(S+۲)\frac{S^۲ + ۳S + ۲\alpha + ۱ - S^۲ - ۲S - ۱}{S^۲ + ۳S + ۲\alpha + ۱}I_۱ = \frac{۲(S+۲)(S+۲\alpha)}{S^۲ + ۳S + ۲\alpha + ۱}I_۱$$

بنابراین امپدانس انتقالی $Z_{۲۱}$ برابر است با:

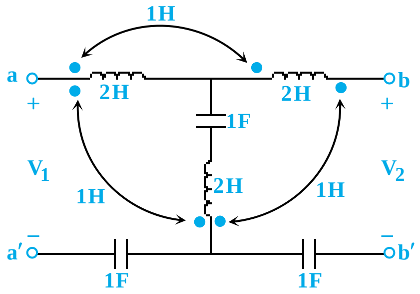
$$Z_{۲۱} = \frac{V_۲}{I_۱} = \frac{۲(S+۲)(S+۲\alpha)}{S^۲ + ۳S + ۲\alpha + ۱}$$

به ازای $\alpha = ۰/۵$ می‌بینیم که $Z_{۲۱}$ مستقل از $S = j\omega$ خواهد بود:

$$\alpha = ۰/۵ \Rightarrow Z_{۲۱} = \frac{۲(S+۲)(S+۱)}{S^۲ + ۳S + ۲} = ۲$$

لذا گزینه (۳) گزینه صحیح می‌باشد.

مثال۷: **در مدار شکل زیر $Z_{۱۲}$ کدام است؟**

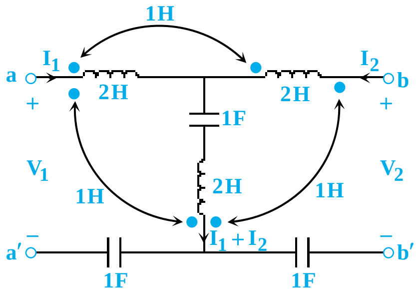


۱) $\frac{۲s^۲+۲}{s+۱}$

۲) $\frac{۲s^۲+۲}{s}$

۳) $\frac{۱-s^۲}{s}$

۴) $\frac{۱-s^۲}{۱+s^۲}$



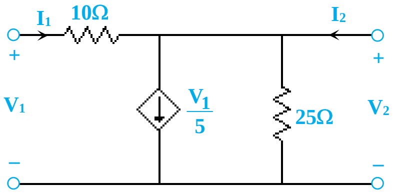
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به تعریف ماتریس امپدانس داریم $Z_{۱۲}=\left.\frac{V_۱}{I_۲}\right|_{I_۱=۰}$. حال رابطه‌ی KVL را در حلقه‌ی سمت چپ مدار می‌نویسیم و داریم:

$$V_۱=۲sI_۱-sI_۲-s(I_۱+I_۲)+\frac{۱}{s}(I_۱+I_۲)+۲s(I_۱+I_۲)-sI_۲-sI_۱+\frac{۱}{s}I_۱$$

با توجه به این‌که $I_۱=۰$ است، داریم:

$$V_۱=\frac{۱}{s}I_۲-sI_۲ \Rightarrow \frac{V_۱}{I_۲}=\frac{۱-s^۲}{s}$$

مثال۸: **در مدار دو دریچه‌ای زیر، مقدار $y_{۱۱}+y_{۲۱}$ چند مهو می‌باشد؟**

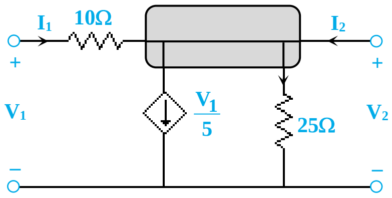


۱) $\frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۱}{۱۰}$

۳) $-\frac{۱}{۱۰}$

۴) $\frac{۷}{۵۰}$



☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با نوشتن KCL در ابرگره بالایی مدار داریم:

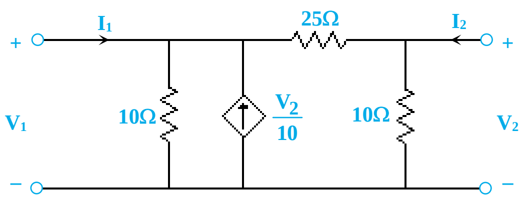
$$\frac{V_۱-V_۲}{۱۰}+I_۲=\frac{V_۲}{۲۵}+\frac{V_۱}{۵} \Rightarrow I_۲=(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۵})V_۲+(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۱۰})V_۱$$

$$\Rightarrow I_۲=\frac{۱}{۱۰}V_۱+\frac{۷}{۵۰}V_۲$$

از طرفی $I_۱=\frac{V_۱-V_۲}{۱۰}$ می‌باشد و لذا داریم:

$$\begin{cases} I_۱=\frac{۱}{۱۰}V_۱-\frac{۱}{۱۰}V_۲ \\ I_۲=\frac{۱}{۱۰}V_۱+\frac{۷}{۵۰}V_۲ \end{cases} \Rightarrow y_{۱۱}=\frac{۱}{۱۰}\mho \quad , \quad y_{۲۱}=\frac{۱}{۱۰}\mho \Rightarrow \mathbf{y_{۱۱}+y_{۲۱}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}}\mho$$

مثال۹: **ماتریس ادمیتانس دوقطبی شکل زیر کدام است؟**



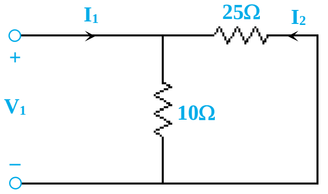
۱) $\begin{bmatrix} \frac{۷۰}{۵۰} & \frac{-۴}{۵۰} \\ \frac{-۴}{۵۰} & \frac{۷}{۵۰} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \frac{۷}{۵۰} & \frac{-۷}{۵۰} \\ \frac{-۲}{۵۰} & \frac{۷}{۵۰} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{۷}{۵۰} & \frac{۷}{۵۰} \\ \frac{۲}{۵۰} & \frac{۷}{۵۰} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \frac{۷}{۵۰} & \frac{۴}{۵۰} \\ \frac{۴}{۵۰} & \frac{۷}{۵۰} \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» توجه شود که پارامتر $y_{۲۱}$ در هر چهار گزینه با یکدیگر متفاوت است؛ لذا با مشخص کردن همین پارامتر، می‌توان گزینه صحیح را انتخاب نمود. می‌دانیم $y_{۲۱}=\frac{I_۲}{V_۱}$ است، وقتی $V_۲=۰$ باشد. زمانی‌که $V_۲=۰$، مقدار منبع جریان وابسته نیز صفر شده و این منبع از مدار خارج می‌شود؛ لذا مدار شکل مقابل را داریم:



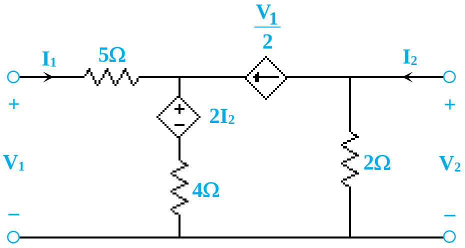
حال با توجه به شکل، به سادگی داریم:

$$V_۱ = -۲۵ I_۲$$

$$y_{۲۱} = \frac{I_۲}{V_۱} = -\frac{۱}{۲۵} = -\frac{۲}{۵۰} \mho$$

لذا گزینه (۲) پاسخ تست می‌باشد.

مثال ۱۰: در مدار روبرو مقدار $y_{۱۱}$ بر حسب مهو کدام گزینه است؟

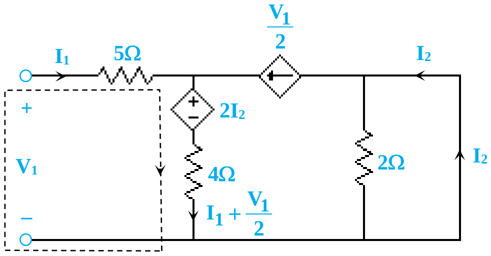


۱) $-\frac{۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۹}{۲}$

۳) $-\frac{۴}{۹}$ ۴) $-\frac{۹}{۴}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای حل تست، رابطه $y_{۱۱}$ را نوشته و خروجی را اتصال کوتاه می‌کنیم.

$$y_{۱۱} = \frac{I_۱}{V_۱}\bigg|_{V_۲ = ۰}$$

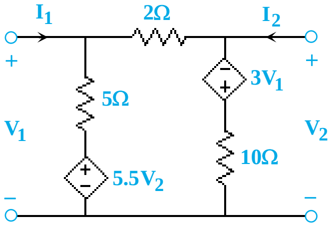


حال در مسیر مشخص شده KVL می‌زنیم.

$$V_۱ = ۵I_۱ + ۲I_۲ + ۴(I_۱ + \frac{V_۱}{۲}) \quad , \quad I_۲ = \frac{V_۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -V_۱ + ۵I_۱ + ۲(\frac{V_۱}{۲}) + ۴I_۱ + ۲V_۱ = ۰ \Rightarrow y_{۱۱} = \frac{I_۱}{V_۱} = -\frac{۲}{۹}\mho$$

مثال ۱۱: در مدار زیر ماتریس ادمیتانس کدام است؟



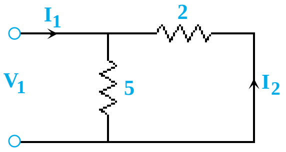
۱) $\begin{bmatrix} ۰/۷ & -۱/۶ \\ -۰/۲ & ۰/۶ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰/۷۵ & -۱/۶ \\ -۰/۲۵ & ۰/۶ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰/۶ & -۱/۵ \\ -۰/۲ & ۰/۷ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰/۸ & -۱/۴ \\ -۰/۲۵ & ۰/۷ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش اول:** برای بدست آوردن ماتریس ادمیتانس در گره‌های ورودی و خروجی KCL می‌زنیم. حال داریم:

$$\begin{cases} I_۱ = \frac{V_۱ - V_۲}{۲} + \frac{V_۱ - ۵/۵V_۲}{۵} \\ I_۲ = \frac{V_۲ - V_۱}{۲} + \frac{V_۲ + ۳V_۱}{۱۰} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_۱ = ۰/۷V_۱ - ۱/۶V_۲ \\ I_۲ = -۰/۲V_۱ + ۰/۶V_۲ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} ۰/۷ & -۱/۶ \\ -۰/۲ & ۰/۶ \end{bmatrix}$$

روش دوم: کافی است $y_{۱۱}$ را به دست آوریم.



$$y_{۱۱} = \frac{I_۱}{V_۱}\bigg|_{V_۲ = ۰}$$

$$\text{امپدانس ورودی}\ \frac{V_۱}{I_۱} = ۲ \| ۵ = \frac{۱۰}{۷} \Rightarrow \frac{I_۱}{V_۱} = y_{۱۱} = ۰/۷ \mho$$

مثال ۱۲: در مدار مثال قبل، ماتریس امپدانس و نسبت $\frac{V_۱}{V_۲}$ در صورتی که $I_۱ = ۳A$ و $I_۲ = ۲A$ باشد، کدام است؟

۱) $Z = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۶ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ و $\frac{V_۱}{V_۲} = ۲/۵$ ۲) $Z = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۶ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ و $\frac{V_۱}{V_۲} = ۲/۴$

۳) $Z = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۶ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ و $\frac{V_۱}{V_۲} = ۲/۵$ ۴) $Z = \begin{bmatrix} ۷ & -۱۶ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}$ و $\frac{V_۱}{V_۲} = -۱/۸$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن ماتریس امپدانس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$[Z] = [Y]^{-۱} \Rightarrow [Z] = \begin{bmatrix} ۰/۷ & -۱/۶ \\ -۰/۲ & ۰/۶ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۶ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

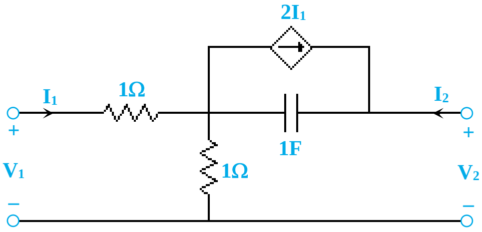
با توجه به ماتریس امپدانس بدست آمده، مقادیر $V_۱$ و $V_۲$ با جایگذاری $I_۱$ و $I_۲$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}=[Z]\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۱۶ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵۰ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به مقادیر بدست آمده برای $V_۱$ و $V_۲$ نسبت $\frac{V_۱}{V_۲}$ به صورت مقابل است:

$$\mathbf{\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۵۰}{۲۰}=۲/۵}$$

مثال ۱۳: در مدار زیر پارامترهای $h_{۱۱}$ و $h_{۲۱}$ کدامند؟



۱) $h_{۱۱}=\frac{S}{S+۱}\ ,\ h_{۲۱}=\frac{-(S+۲)}{S+۱}$

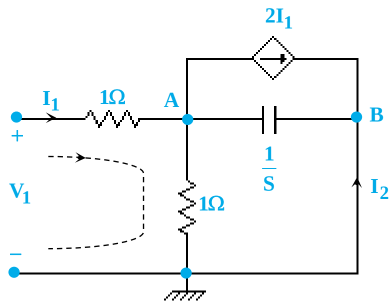
۲) $h_{۱۱}=\frac{۱}{S+۱}\ ,\ h_{۲۱}=\frac{S+۲}{S+۱}$

۳) $h_{۱۱}=S\ ,\ h_{۲۱}=\frac{۱}{S+۱}$

۴) $h_{۱۱}=-S\ ,\ h_{۲۱}=\frac{-(S+۲)}{S+۱}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» **روش اول:** با توجه به تعاریف $h_{۱۱}$ و $h_{۲۱}$، ابتدا خروجی را اتصال کوتاه می‌کنیم:

$$h_{۱۱}=\frac{V_۱}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰} \quad , \quad h_{۲۱}=\frac{I_۲}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰}$$



با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_۱-V_A}{۱}=\frac{V_A}{۱}+\frac{V_A}{\frac{۱}{S}}+۲I_۱ \Rightarrow V_A=V_۱(\frac{۱}{۲+S})-(\frac{۲}{۲+S})I_۱ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه ورودی داریم:

$$V_۱=I_۱\times ۱+V_A \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_۱=I_۱+V_۱(\frac{۱}{۲+S})-(\frac{۲}{۲+S})I_۱$$

$$\Rightarrow \frac{V_۱}{I_۱}=\frac{S}{۱+S}=h_{۱۱} \Rightarrow h_{۱۱}=\frac{S}{S+۱} \Rightarrow V_۱=I_۱\times(\frac{S}{۱+S}) \qquad (۳)$$

از همین جا می‌توان متوجه شد که گزینه‌ی (۱) جواب درست است اما $h_{۲۱}$ را نیز به دست می‌آوریم.

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$SV_A+۲I_۱+I_۲=۰$$

با جایگذاری V_A از رابطه (۱) و $V_۱$ از رابطه (۳) در معادله بالا داریم:

$$S\,[V_۱(\frac{۱}{۲+S})-(\frac{۲}{۲+S})I_۱]+۲I_۱+I_۲=۰$$

$$\Rightarrow S[\frac{S}{S+۱}.\frac{I_۱}{۲+S}-\frac{۲}{۲+S}I_۱]+۲I_۱+I_۲=۰ \Rightarrow I_۱[\frac{S+۲}{S+۱}]=-I_۲ \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱}=\frac{-(S+۲)}{(S+۱)} \Rightarrow \mathbf{h_{۲۱}=\frac{-(S+۲)}{(S+۱)}}$$

روش دوم: در فرکانس $S=\infty$ به علت اتصال کوتاه بودن خازن، مقدار $h_{۱۱}=۱\Omega$ است و این مورد فقط در گزینه (۱) رعایت شده است.

مثال ۱۴: در مدار مثال قبل ماتریس هایبرید کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{-۱}{S+۱} & \frac{-۱}{S+۱} \\ \frac{S-۲}{S+۱} & \frac{-۱}{S+۱} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \frac{S}{S-۱} & \frac{S}{S-۱} \\ \frac{-(S+۲)}{(S-۱)} & \frac{S}{S-۱} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{S+۱} & \frac{۱}{S+۱} \\ \frac{S+۲}{S+۱} & \frac{۱}{S+۱} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \frac{S}{S+۱} & \frac{S}{S+۱} \\ \frac{-(S+۲)}{(S+۱)} & \frac{S}{S+۱} \end{bmatrix}$

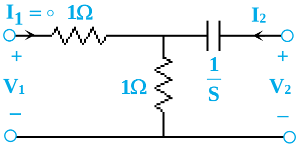
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در مثال قبل، مقادیر $h_{۱۱}$ و $h_{۲۱}$ را محاسبه کردیم. حال برای کامل شدن ماتریس H، مقادیر $h_{۱۲}$ و $h_{۲۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}\Big|_{I_۱=۰} \quad و \quad h_{۱۲}=\frac{V_۱}{V_۲}\Big|_{I_۱=۰}$$

با توجه به تعاریف بالا، $I_۱$ را صفر کرده و منبع جریان وابسته به $I_۱$ را با مدار باز مدل می‌کنیم.

$$\frac{V_۲}{I_۲}=\frac{۱}{S}+۱ \Rightarrow h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}=\frac{S}{S+۱}$$

با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ داریم:



$$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{S}{S+۱}=h_{۱۲} \Rightarrow \mathbf{H}=\begin{bmatrix} \mathbf{\frac{S}{S+۱}} & \mathbf{\frac{S}{S+۱}} \\ \mathbf{\frac{-(S+۲)}{(S+۱)}} & \mathbf{\frac{S}{S+۱}} \end{bmatrix}$$

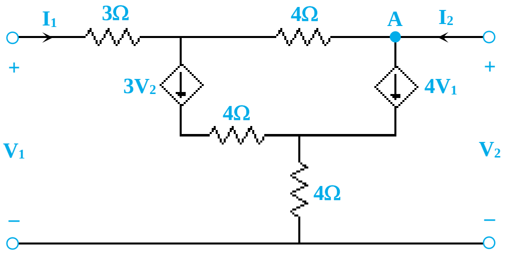
مثال ۱۵: در مدار زیر ماتریس هایبرید کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۲۵ & -۵۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -۷ & ۱۱ \\ -۲۵ & ۴۱ \end{bmatrix}$

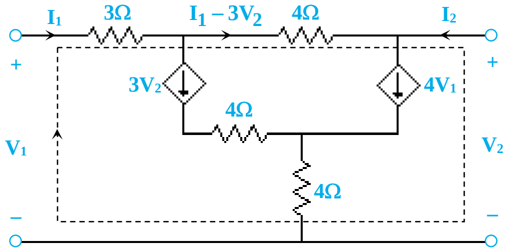
۳) $\begin{bmatrix} ۷ & -۱۱ \\ ۲۷ & -۴۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۲۷ & -۴ \end{bmatrix}$



☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با نوشتن KCL در ابرگره بالای مدار داریم:

$$I_{۱} - ۳V_{۲} + I_{۲} = ۴V_{۱} \qquad (۱)$$



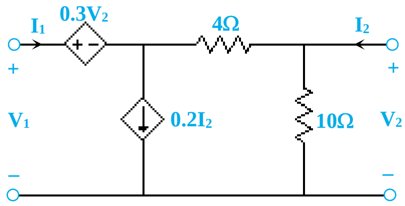
همچنین با نوشتن KVL در حلقه مشخص شده داریم:

$$-V_{۱} + ۳I_{۱} + ۴(I_{۱} - ۳V_{۲}) + V_{۲} = ۰ \;\Rightarrow\; V_{۱} = ۷I_{۱} - ۱۱V_{۲} \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

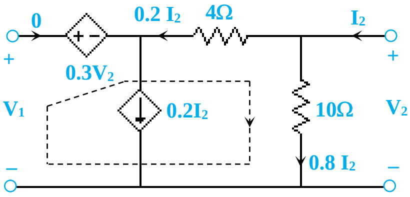
$$I_{۲} = ۲۷I_{۱} - ۴۱V_{۲} \;\Rightarrow\; \begin{cases} V_{۱} = ۷I_{۱} - ۱۱V_{۲} \\ I_{۲} = ۲۷I_{۱} - ۴۱V_{۲} \end{cases} \;\Rightarrow\; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{۷} & \mathbf{-۱۱} \\ \mathbf{۲۷} & \mathbf{-۴۱} \end{bmatrix}$$

مثال ۱۶: در مدار زیر پارامتر $h_{۱۲}$ کدام است؟



۱) ۰/۸
۲) ۲/۱
۳) ۱/۲
۴) ۱/۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن پارامتر $h_{۱۲}$ مطابق با تعریف آن، مقدار جریان $I_{۱}$ را صفر قرار داده و نسبت $V_{۱}$ بر $V_{۲}$ را بدست می‌آوریم. حال با اعمال KVL در مسیر مشخص شده داریم:



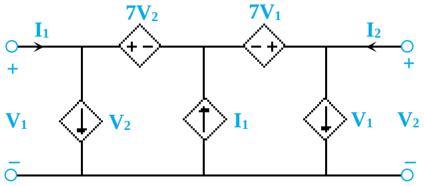
$$h_{۱۲} = \left.\frac{V_{۱}}{V_{۲}}\right| I_{۱} = ۰$$

$$V_{۱} = ۰/۳V_{۲} - ۴\times ۰/۲I_{۲} + ۰/۸I_{۲}\times ۱۰ \;\Rightarrow\; V_{۱} = ۰/۳V_{۲} + ۷/۲I_{۲} \qquad (۱)$$

با توجه به برقراری رابطه $V_{۲} = ۱۰\times ۰/۸I_{۲}$ و جایگذاری آن در رابطه (۱) داریم:

$$V_{۲} = ۸I_{۲} \;\Rightarrow\; I_{۲} = ۰/۱۲۵V_{۲} \;\Rightarrow\; V_{۱} = ۰/۳V_{۲} + ۷/۲\times ۰/۱۲۵V_{۲} \;\Rightarrow\; V_{۱} = ۱/۲V_{۲} \;\Rightarrow\; \mathbf{h_{۱۲}} = \frac{\mathbf{V_{۱}}}{\mathbf{V_{۲}}} = \mathbf{۱/۲}$$

مثال ۱۷: در مدار زیر ماتریس هایبرید کدام است؟



۱) $H = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$

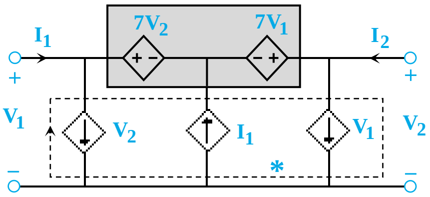
۲) $H = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$

۳) $H = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$

۴) $H = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن KVL در حلقه بیرونی (*) مدار داریم:

$$-V_{۱} + ۷V_{۲} - ۷V_{۱} + V_{۲} = ۰ \;\Rightarrow\; ۸V_{۲} = ۸V_{۱} \;\Rightarrow\; V_{۱} = V_{۲} \qquad (۱)$$



حال با نوشتن یک KCL در ابرگره بالای مدار داریم:

$$I_{۱} + I_{۲} + I_{۱} = V_{۲} + V_{۱} \;\Rightarrow\; ۲I_{۱} + I_{۲} = V_{۱} + V_{۲} \qquad (۲)$$

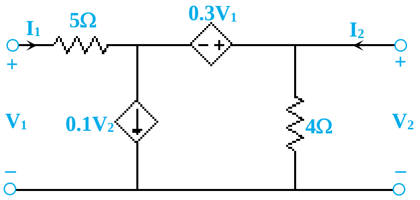
با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$۲I_{۱} + I_{۲} = ۲V_{۲} \;\Rightarrow\; I_{۲} = -۲I_{۱} + ۲V_{۲} \qquad (۳)$$

با بازنویسی روابط (۱) و (۳) داریم:

$$\begin{cases} V_{۱} = ۰I_{۱} + V_{۲} \\ I_{۲} = -۲I_{۱} + ۲V_{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

مثال ۱۸: در مدار زیر ماتریس T کدام است؟

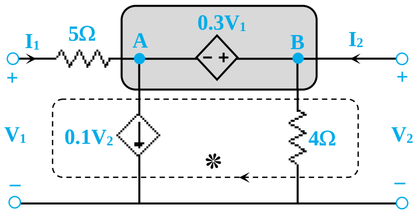


۱) $T = \begin{bmatrix} ۲/۱۲ & ۳/۸۵ \\ ۱ & ۰/۳۵ \end{bmatrix}$

۲) $T = \begin{bmatrix} ۲/۱۲ & ۳/۸۵ \\ ۰/۳۵ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $T = \begin{bmatrix} ۳/۸۵ & ۱ \\ ۲/۱۲ & ۳/۸۵ \end{bmatrix}$

۴) $T = \begin{bmatrix} ۳/۸۵ & -۲/۱۲ \\ -۱ & ۰/۳۵ \end{bmatrix}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به وجود یک منبع ولتاژ وابسته بین دو گره A و B، یک ابرگره برای گره‌های A و B وجود دارد. حال با نوشتن KCL در ابرگره مذکور داریم:

$$I_۱ + I_۲ = ۰/۱V_۲ + \frac{V_۲}{۴} \Rightarrow I_۱ = -I_۲ + ۰/۳۵V_۲ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$V_۱ = ۵I_۱ - ۰/۳V_۱ + V_۲ \Rightarrow V_۱ = ۰/۷۷V_۲ + ۳/۸۵I_۱ \qquad (۲)$$

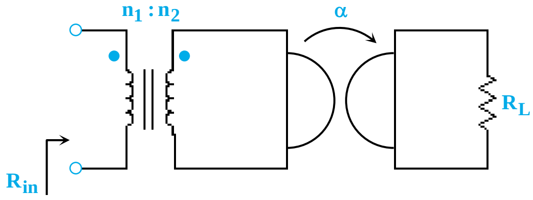
با جایگذاری $I_۱$ از رابطه (۱) و جایگذاری آن در رابطه (۲) داریم:

$$V_۱ = ۰/۷۷V_۲ + ۳/۸۵(-I_۲ + ۰/۳۵V_۲) \Rightarrow V_۱ = ۲/۱۲V_۲ - ۳/۸۵I_۲ \qquad (۳)$$

حال با بازنویسی روابط (۳) و (۱) به صورت مقابل داریم:

$$\begin{cases} V_۱ = ۲/۱۲V_۲ - ۳/۸۵I_۲ \\ I_۱ = ۰/۳۵V_۲ - I_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_۱ \\ I_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۱۲ & ۳/۸۵ \\ ۰/۳۵ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۲ \\ -I_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} ۲/۱۲ & ۳/۸۵ \\ ۰/۳۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۹: امپدانس ورودی در مدار زیر کدام است؟



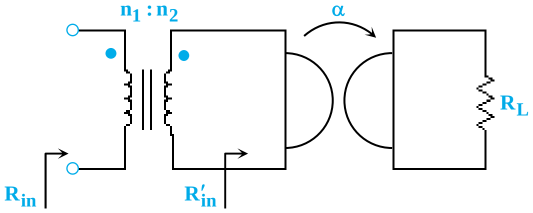
۱) $(\frac{n_۱}{n_۲})^۲.\frac{\alpha^۲}{R_L}$

۲) $(\frac{n_۲}{n_۱})^۲.\frac{\alpha^۲}{R_L}$

۳) $(\frac{n_۱}{n_۲})^۲.\alpha^۲.R_L$

۴) $(\frac{n_۲}{n_۱})^۲.\alpha^۲.R_L$

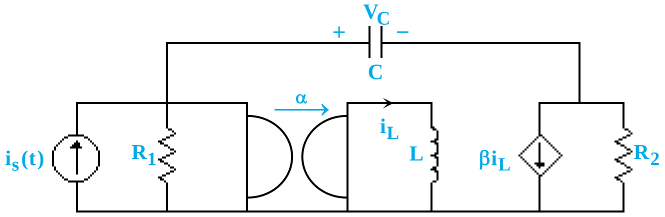
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در این مدار ابتدا R'_{in} را محاسبه کرده و سپس مقدار R_{in} را محاسبه می‌کنیم:



$$R'_{in} = \frac{\alpha^۲}{R_L} \quad , \quad R_{in} = (\frac{n_۱}{n_۲})^۲.R'_{in}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R_{in} = (\frac{n_۱}{n_۲})^۲.\frac{\alpha^۲}{R_L}}$$

مثال ۲۰: معادلات حالات مدار شکل زیر کدامند؟



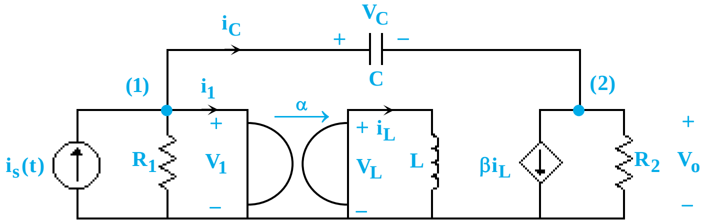
۱) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{R_۲C} & \frac{\beta}{C} - \frac{\alpha}{CR_۲} \\ -\frac{\alpha}{LR_۲} & \frac{\alpha\beta}{L} - \frac{\alpha^۲}{LR_۱} - \frac{\alpha^۲}{LR_۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -\frac{\alpha}{L} \end{bmatrix} i_s$

۲) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{R_۲C} & \frac{\beta}{C} - \frac{\alpha}{CR_۲} \\ -\frac{۱}{LR_۲} & \frac{\beta}{L} - \frac{\alpha}{LR_۱} - \frac{\alpha}{LR_۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -\frac{۱}{L} \end{bmatrix} i_s$

۳) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{R_۲C} & \frac{\beta}{C} + \frac{\alpha}{CR_۲} \\ -\frac{\alpha}{LR_۲} & \frac{\alpha\beta}{L_۲} + \frac{\alpha^۲}{LR_۱} + \frac{\alpha^۲}{LR_۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -\frac{\alpha}{L} \end{bmatrix} i_s$

۴) $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{R_۲C} & \frac{\beta}{C} + \frac{\alpha}{CR_۲} \\ -\frac{۱}{LR_۲} & \frac{\beta}{L} + \frac{\alpha}{LR_۱} + \frac{\alpha}{LR_۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -\frac{۱}{L} \end{bmatrix} i_s$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به منظور ساده‌تر شدن روند حل تست، متغیرهای مختلف مدار در شکل زیر نام‌گذاری شده‌اند:



ابتدا سعی می‌کنیم جریان خازن C را برحسب i_L و V_C بنویسیم. با توجه به معادلات ژیراتور که به صورت زیر هستند، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V_{۱}=\alpha i_{۲} \\ V_{۲}=-\alpha i_{۱} \end{cases} \Rightarrow V_{۱}=\alpha i_{۲}=-\alpha i_L$$

اگر یک KVL در حلقه بیرونی مدار بزنیم، می‌توانیم V_o و جریان مقاومت $R_{۲}$ را بدست آوریم:

$$-V_{۱}+V_C+V_o=۰ \Rightarrow V_o=V_{۱}-V_C=-\alpha i_L-V_C \Rightarrow i_{R_{۲}}=\frac{V_o}{R_{۲}}=-\frac{\alpha i_L}{R_{۲}}-\frac{V_C}{R_{۲}}$$

حال با KCL زدن در گره (۲) جریان i_C را به دست می‌آوریم:

$$i_C=\beta i_L+i_{R_{۲}}=(\beta-\frac{\alpha}{R_{۲}})i_L-\frac{V_C}{R_{۲}}$$

و در نهایت معادله حالت اول به شکل روبرو خواهد بود:

$$\dot{V}_C=\frac{۱}{C}i_C=(\frac{\beta}{C}-\frac{\alpha}{CR_{۲}})i_L-\frac{V_C}{R_{۲}C}$$

کار برای یافتن معادله حالت دوم دشوارتر خواهد بود. ابتدا سعی می‌کنیم $i_{۱}$ را برحسب i_L و V_C بنویسیم. بدین منظور در گره (۱)، KCL می‌زنیم:

$$i_s-\frac{V_{۱}}{R_{۱}}-i_{۱}-i_C=۰\xrightarrow{V_{۱}=-\alpha i_L\ \ ,\ \ i_C=(\beta-\frac{\alpha}{R_{۲}})i_L-\frac{V_C}{R_{۲}}} i_{۱}=i_s+\frac{\alpha i_L}{R_{۱}}-(\beta-\frac{\alpha}{R_{۲}})i_L+\frac{V_C}{R_{۲}} \Rightarrow i_{۱}=(-\beta+\frac{\alpha}{R_{۱}}+\frac{\alpha}{R_{۲}})i_L+\frac{V_C}{R_{۲}}+i_s$$

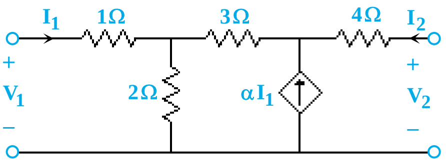
در نهایت با استفاده از روابط ژیراتور و سلف می‌توان نوشت:

$$\dot{i}_L=\frac{۱}{L}V_L\xrightarrow{V_L=V_{۲}=-\alpha i_{۱}}\dot{i}_L=-\frac{\alpha}{L}\times\left[(-\beta+\frac{\alpha}{R_{۱}}+\frac{\alpha}{R_{۲}})i_L+\frac{V_C}{R_{۲}}+i_s\right]=(\frac{\alpha\beta}{L}-\frac{\alpha^{۲}}{LR_{۱}}-\frac{\alpha^{۲}}{LR_{۲}})i_L-\frac{\alpha V_C}{LR_{۲}}-\frac{\alpha i_s}{L}$$

با جمع‌آوری روابط بدست آمده، معادلات حالت سیستم را می‌توان بصورت روبرو نوشت:

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_C \\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{R_{۲}C} & \frac{\beta}{C}-\frac{\alpha}{CR_{۲}} \\ -\frac{\alpha}{LR_{۲}} & \frac{\alpha\beta}{L}-\frac{\alpha^{۲}}{LR_{۱}}-\frac{\alpha^{۲}}{LR_{۲}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C \\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ \\ -\frac{\alpha}{L}\end{bmatrix}i_s$$

مثال۲۱: به ازای کدام مقدار α دوقطبی زیر دارای پارامترهای امپدانس نیست؟



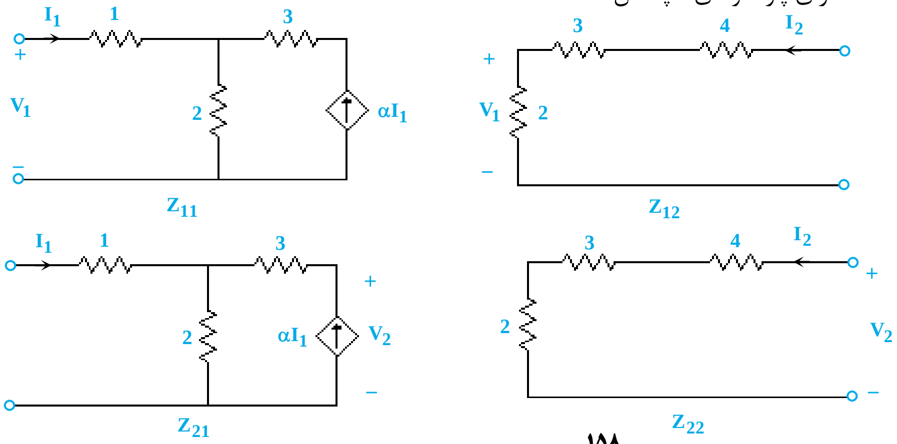
۱) $\frac{۲۳}{۸}$

۲) $-\frac{۲۳}{۸}$

۳) ۰

۴) به ازای تمام مقادیر α، دوقطبی داده شده دارای پارامترهای امپدانس است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این مثال، ابتدا پارامترهای امپدانس را محاسبه می‌کنیم تا سپس ببینیم این پارامترها به ازای چه مقادیری از α موجود هستند. مدار معادل مربوط به محاسبه هر یک از پارامترها در شکل مقابل رسم شده است:



Z_{11} Z_{12} Z_{21} Z_{22}

از روی شکل فوق می‌توان تک تک پارامترها را به سادگی بدست آورد:

$$Z_{۱۱}=\left.\frac{V_۱}{I_۱}\right|_{I_۲=۰}=\frac{۱\times I_۱+۲\times(I_۱+\alpha I_۱)}{I_۱}=\frac{(۳+۲\alpha)I_۱}{I_۱}=(۳+۲\alpha)$$

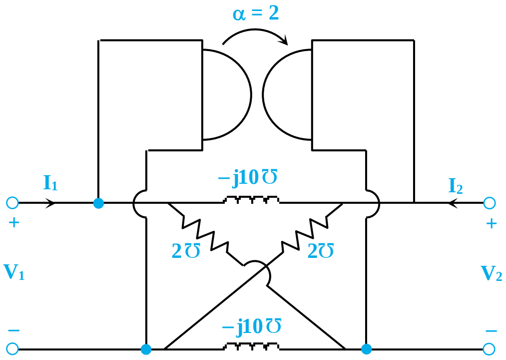
$$Z_{۱۲}=\left.\frac{V_۱}{I_۲}\right|_{I_۱=۰}=۲$$

$$Z_{۲۱}=\left.\frac{V_۲}{I_۱}\right|_{I_۲=۰}=\frac{۲\times(I_۱+\alpha I_۱)+۳\times\alpha I_۱}{I_۱}=\frac{(۲+۵\alpha)I_۱}{I_۱}=(۲+۵\alpha)$$

$$Z_{۲۲}=\left.\frac{V_۲}{I_۲}\right|_{I_۱=۰}=۹$$

مشخص است که به ازای تمامی مقادیر α، پارامترهای امپدانس موجود هستند.

مثال ۲۲: در مدار زیر ماتریس ادمیتانس کدام است؟



۱) $Y_T=\begin{bmatrix}۱-j۵ & \frac{۱}{۲}-j۵\\ \frac{۱}{۲}-j۵ & ۱-j۲\end{bmatrix}$

۲) $Y_T=\begin{bmatrix}j۱/۵ & ۱/۵+j۵\\ ۱/۵+j۵ & ۱+j۵\end{bmatrix}$

۳) $Y_T=\begin{bmatrix}۱-j۵ & -۱/۵-j۵\\ -\frac{۱}{۲}-j۵ & -j۵+۱\end{bmatrix}$

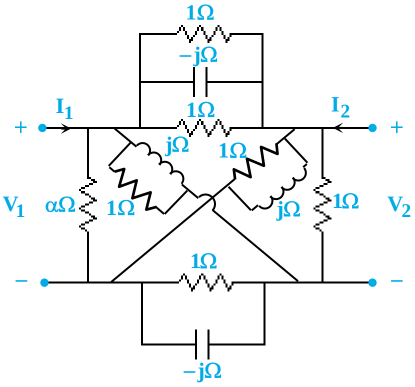
۴) $Y_T=\begin{bmatrix}۱-j۵ & \frac{۱}{۲}+j۵\\ ۱/۵+j۵ & ۱-j۵\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به موازی شدن دو شبکه، ابتدا ماتریس‌های y آنها را جداگانه محاسبه کرده، سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$Y\text{ (شبکه لتیس)}=\begin{bmatrix}\frac{y_A+y_B}{۲} & \frac{y_A-y_B}{۲}\\ \frac{y_A-y_B}{۲} & \frac{y_A+y_B}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲-j۱۰}{۲} & \frac{۲+j۱۰}{۲}\\ \frac{۲+j۱۰}{۲} & \frac{۲-j۱۰}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-j۵ & ۱+j۵\\ ۱+j۵ & ۱-j۵\end{bmatrix}\quad\text{و}\quad Y\text{ (مدار ژیراتور)}=\begin{bmatrix}۰ & \frac{-۱}{\alpha}\\ \frac{۱}{\alpha} & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & \frac{-۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}$$

$$Y_T=\begin{bmatrix}۰ & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱-j۵ & ۱+j۵\\ ۱+j۵ & ۱-j۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{۱-j۵} & \mathbf{۰/۵+j۵}\\ \mathbf{۱/۵+j۵} & \mathbf{۱-j۵}\end{bmatrix}$$

مثال ۲۳: در مدار زیر مقدار α کدام باشد تا مدار دارای ماتریس هایبرید نباشد؟



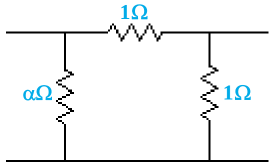
۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) -۲

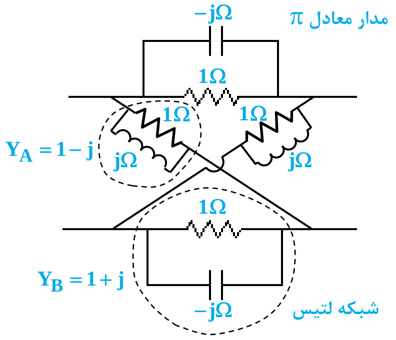
۳) ۲

۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مدار از موازی شدن دو شبکه زیر تشکیل شده است. حال ابتدا ماتریس ادمیتانس هر کدام از شبکه‌ها را به‌دست می‌آوردیم:



$$\Rightarrow Y_۱=\begin{bmatrix}\frac{۱}{\alpha}+۱ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$



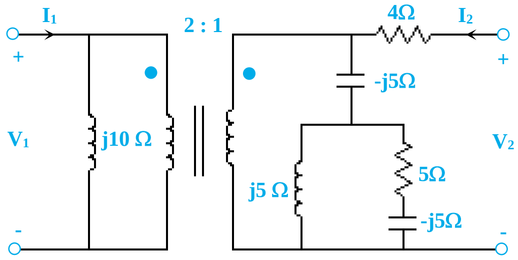
$$\Rightarrow Y_۲=\begin{bmatrix}\frac{۱-j+۱+j}{۲} & \frac{۱-j-(۱+j)}{۲}\\ \frac{۱-j-(۱+j)}{۲} & \frac{۱-j+۱+j}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow Y_۲=\begin{bmatrix}۱ & -j\\ -j & ۱\end{bmatrix}$$

$$Y_T=Y_۱+Y_۲=\begin{bmatrix}۱+\frac{۱}{\alpha} & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & -j\\ -j & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+\frac{۱}{\alpha} & -۱-j\\ -۱-j & ۳\end{bmatrix}$$

برای عدم وجود ماتریس هایبرید باید درایه $y_{۱۱}$ برابر صفر باشد. حال داریم:

$$۲+\frac{۱}{\alpha}=۰\Rightarrow \alpha=-\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲۴: در مدار زیر ماتریس T کل شبکه کدام است؟



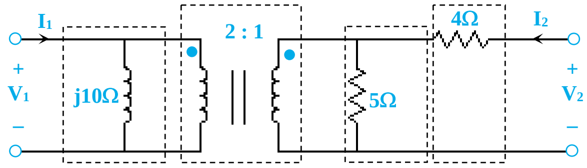
۱) $T=\begin{bmatrix}۲ & ۸\\ ۰/۱+j۰/۲ & j۰/۸+۰/۹\end{bmatrix}$

۲) $T=\begin{bmatrix}۲ & ۸\\ -j۰/۲+۰/۱ & -j۰/۸+۰/۹\end{bmatrix}$

۳) $T=\begin{bmatrix}-۲ & -۸\\ ۰/۱+j۰/۲ & j۰/۸+۰/۹\end{bmatrix}$

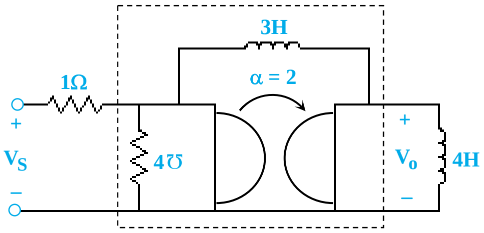
۴) $T=\begin{bmatrix}-۲ & -۸\\ -j۰/۲-۰/۱ & -j۰/۸-۰/۹\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بعد از ساده‌سازی مدار، آن را به چند بخش تقسیم می‌کنیم و برای بدست آوردن ماتریس T کل مدار، ماتریس T قسمت‌های مختلف آن را در هم ضرب می‌کنیم:



$$T_T=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ \frac{۱}{j۱۰} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ \frac{۱}{۵} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۸\\ ۰/۱-j۰/۲ & -j۰/۸+۰/۹\end{bmatrix}$$

مثال ۲۵: در مدار زیر مقدار تابع شبکه $\frac{V_o}{V_S}$ ، در حالت $S=۱$ کدام است؟



۱) $-۰/۰۶$

۲) $-۰/۰۵$

۳) $-۰/۰۴$

۴) $-۰/۰۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن تابع شبکه، ابتدا می‌توان ماتریس y مدار مشخص شده به‌صورت خط‌چین را محاسبه کرد. با توجه به موازی بودن ژیراتور با المان‌های اطراف آن، ماتریس Y_T به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Y\ (\text{ژیراتور})=\begin{bmatrix}۰ & \frac{-۱}{\alpha}\\ \frac{۱}{\alpha} & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & \frac{-۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow Y_T=\begin{bmatrix}۰+۴+(۳S)^{-۱} & \frac{-۱}{۲}-(۳S)^{-۱}\\ \frac{۱}{۲}-(۳S)^{-۱} & ۰+(۳S)^{-۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+\frac{۱}{۳S} & \frac{-۱}{۲}-\frac{۱}{۳S}\\ \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳S} & \frac{۱}{۳S}\end{bmatrix}$$

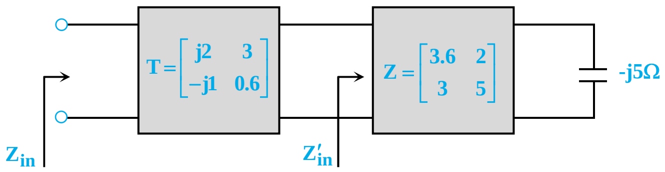
با توجه به روابط پارامترهای ادمیتانس داریم:

$$\frac{V_o}{V_S}=\frac{-y_{۲۱}Z_S^{-۱}}{(y_{۲۲}+Z_L^{-۱})(y_{۱۱}+Z_S^{-۱})-y_{۱۲}y_{۲۱}} \Rightarrow \frac{V_o}{V_S}=\frac{-(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳S})(۱)}{(\frac{۱}{۳S}+\frac{۱}{۴S})(۴+\frac{۱}{۳S}+۱)-(\frac{-۱}{۲}-\frac{۱}{۳S})(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳S})}$$

حال اگر به جای S عدد یک قرار دهیم، داریم:

$$\frac{\mathbf{V_o}}{\mathbf{V_S}}=-۰/۰۵۱۲\simeq-۰/۰۵$$

مثال ۲۶: در مدار زیر مقدار امپدانس ورودی Z_{in} بر حسب اهم کدام گزینه است؟



۱) $-۱+j۱/۶$

۲) $۱/۶-j۱$

۳) $۱/۴-j۲$

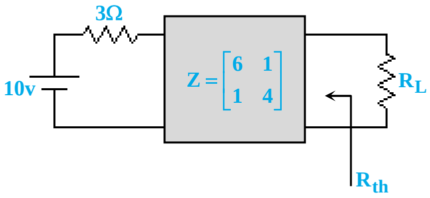
۴) $-۲+j۱/۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا مقدار Z'_{in} محاسبه می‌شود و سپس مقدار Z'_{in} به عنوان بار یا Z_L برای شبکه سمت چپ فرض می‌شود؛ لذا داریم:

$$Z'_{in}=Z_{۱۱}-\frac{Z_{۱۲}Z_{۲۱}}{Z_{۲۲}+Z_L}=۳/۶-\frac{۲\times۳}{۵-j۵}=(۳-j۰/۶)\Omega$$

$$Z_{in}=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}=\frac{j۲\times(۳-j۰/۶)+۳}{-j(۳-j۰/۶)+۰/۶}=\frac{۴/۲+j۶}{-j۳}=(-۲+j۱/۴)\Omega$$

مثال ۲۷: در مدار زیر مقدار R_L بر حسب اهم، برای جذب توان حداکثر کدام است؟



۱) ۰/۸۸

۲) ۱/۸۸

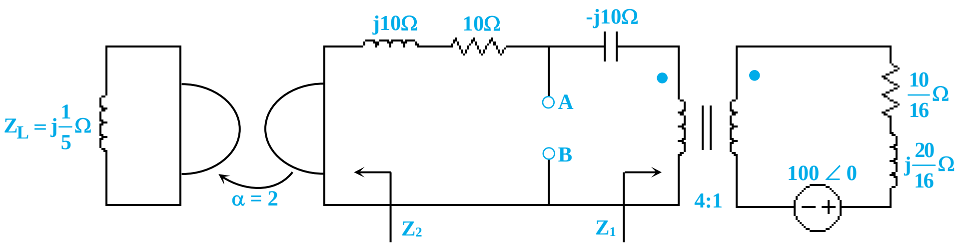
۳) ۲/۸۸

۴) ۳/۸۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای جذب توان حداکثر توسط R_L، باید $R_L=R_{th}$ باشد. لذا با اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ مستقل و استفاده از جدول ذکر شده در قبل، داریم:

$$R_{th}=Z_{۲۲}-\frac{Z_{۱۲}Z_{۲۱}}{Z_{۱۱}+Z_S}=۴-\frac{۱\times۱}{۶+۳} \Rightarrow \mathbf{R_{th}=۳/۸۸\Omega}$$

مثال ۲۸: در مدار زیر مقدار V_{th} بر حسب ولت و مقدار Z_{th} بر حسب اهم از دو سر A و B کدام است؟



۱) $V_{th}=۲۰۰\angle۳۰^\circ \quad , \quad Z_{th}=۱۰\angle۳۰^\circ$

۲) $V_{th}=۲۰۰\angle۴۵^\circ \quad , \quad Z_{th}=۱۰\sqrt{۲}\angle۴۵^\circ$

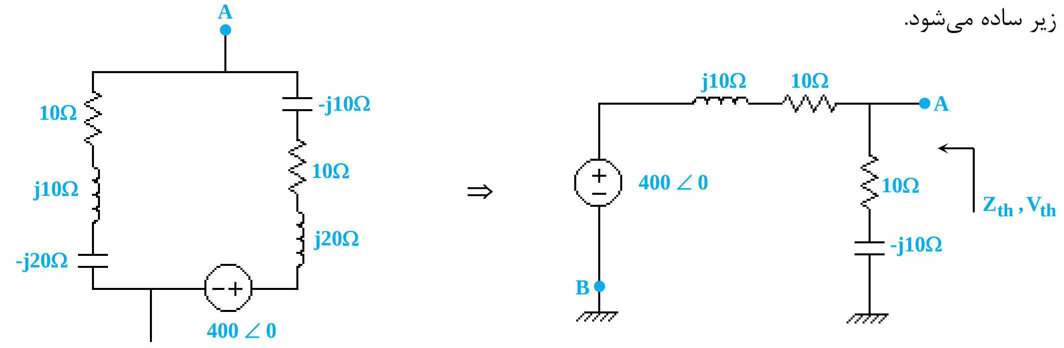
۳) $V_{th}=۲۰۰\sqrt{۲}\angle-۴۵^\circ \quad , \quad Z_{th}=۱۰$

۴) $V_{th}=۲۰۰\sqrt{۲}\angle۴۵^\circ \quad , \quad Z_{th}=۱۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نکات گفته شده در این فصل و فصل القای متقابل داریم:

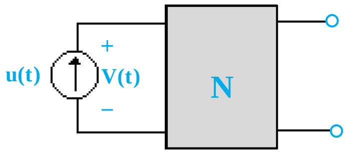
$$Z_۱=(\frac{۴}{۱})^۲\times(\frac{۱۰}{۱۶}+j\frac{۲۰}{۱۶})=۱۰+j۲۰ \quad \text{و} \quad Z_۲=\frac{\alpha^۲}{Z_L}=\frac{۲^۲}{j\frac{۱}{۵}}=-j۲۰\Omega$$

حال مدار به صورت زیر ساده می‌شود.



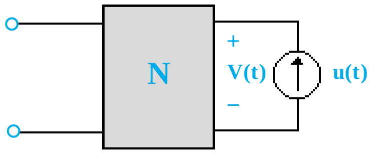
$$Z_{th} = (۱۰+j۱۰) \,||\, (۱۰-j۱۰) = ۱۰\Omega \qquad V_{th} = ۴۰۰\times\frac{(۱۰-j۱۰)}{۱۰-j۱۰+j۱۰+۱۰} = ۲۰۰-j۲۰۰ = ۲۰۰\sqrt{۲}\angle-۴۵^\circ(v)$$

مثال ۲۹: شبکه متقابل N تحت سه آزمایش مطابق شکل‌های زیر قرار می‌گیرد و نتایج آن روی هر شکل مشخص شده است. ولتاژ V(t) در حالت دائمی در شکل (د) به چه صورت خواهد بود؟



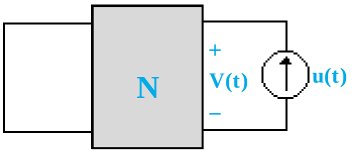
$$V(t) = ۲u(t) - e^{-t}$$

«الف»



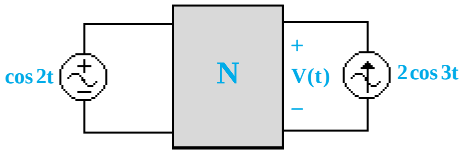
$$V(t) = \delta(t) + u(t) - e^{-t}$$

«ب»



$$V(t) = \delta(t) + \frac{۱}{۲}u(t) - \frac{۱}{۲}e^{-۲t}$$

«ج»



$$V(t) = ?$$

«د»

۱) $V(t) = \frac{۱}{۴}\cos ۲t - \frac{۱}{۴}\sin ۲t + \frac{۴}{۱۳}\cos ۳t + \frac{۷۲}{۱۳}\sin ۳t$

۲) $V(t) = \frac{۱}{۴}\cos ۲t + \frac{۱}{۴}\sin ۲t + \frac{۴}{۱۳}\cos ۳t - \frac{۷۲}{۱۳}\sin ۳t$

۳) $V(t) = \frac{۱}{۴}\cos ۲t + \frac{۱}{۴}\sin ۲t + \frac{۹}{۱۳}\cos ۳t - \frac{۷}{۱۳}\sin ۳t$

۴) $V(t) = \frac{۱}{۴}\cos ۲t - \frac{۱}{۴}\sin ۲t + \frac{۹}{۱۳}\cos ۳t + \frac{۷}{۱۳}\sin ۳t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» معمولاً برای حل این گونه تست‌ها از قضایای شبکه و بخصوص قضیه هم‌پاسخی استفاده می‌شود؛ اما ممکن است به راحتی با بکارگیری صورت‌های استاندارد قضیه هم‌پاسخی به جواب نرسیم؛ بنابراین باید از روش‌های کلی‌تری همچون محاسبه مستقیم پارامترهای ماتریس‌های مختلف سیستم در حل تست بهره برد. ما این تست را با این روش حل خواهیم کرد. ابتدا بیایید شکل (د) را در نظر گرفته، ببینیم در عمل نیازمند چه پارامترهایی برای محاسبه متغیر مجهول سیستم هستیم. $V_۱$ و $i_۲$ را داریم و $V_۲$ را می‌خواهیم؛ پس باید توصیفی از سیستم بصورت زیر داشته باشیم: $V_۲ = \alpha V_۱ + \beta i_۲$

مقدار β را به راحتی می‌توان از آزمایش (ج) مشخص نمود:

$$\beta = \left.\frac{V_۲}{i_۲}\right|_{V_۱=۰} = \frac{۱+\frac{۱}{۲S}-\frac{۱}{۲(S+۲)}}{\frac{۱}{S}} = s+\frac{۱}{۲}-\frac{s}{۲(S+۲)} = \frac{(S+۱)^۲}{S+۲}$$

برای یافتن α نیازمند محاسبات بیشتری هستیم. اگر ماتریس امپدانس یک دوقطبی متقابل را در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\alpha = \left.\frac{V_۲}{V_۱}\right|_{i_۲=۰} = \frac{Z_{۱۲}}{Z_{۱۱}}$$

بنابراین با محاسبه ماتریس امپدانس دوقطبی N مقدار α نیز بدست خواهد آمد. از آزمایش‌های (الف) و (ب) مقادیر $Z_{۱۱}$ و $Z_{۲۲}$ بدست خواهند آمد:

$$Z_{۲۲} = \left.\frac{V_۲}{i_۲}\right|_{i_۱=۰} = \frac{۱+\frac{۱}{S}-\frac{۱}{S+۱}}{\frac{۱}{S}} = S+۱-\frac{S}{S+۱}$$

$$Z_{۱۱} = \left.\frac{V_۱}{i_۱}\right|_{i_۲=۰} = \frac{\frac{۲}{S}-\frac{۱}{S+۱}}{\frac{۱}{S}} = ۲-\frac{S}{S+۱} = \frac{S+۲}{S+۱}$$

مقدار $Z_{۱۲}$ را باید با استفاده از نتایج آزمایش (ج) بدست آوریم:

$$V_{۱}=\circ \Rightarrow i_{۱}=-\frac{Z_{۱۲}}{Z_{۱۱}}i_{۲} \Rightarrow V_{۲}=(Z_{۲۲}-\frac{Z_{۱۲}^{۲}}{Z_{۱۱}})i_{۲} \Rightarrow Z_{۱۲}=\sqrt{Z_{۱۱}(Z_{۲۲}-\frac{V_{۲}}{i_{۲}})}$$

$$\Rightarrow Z_{۱۲}=\sqrt{\frac{S+۲}{S+۱}(S+۱-\frac{S}{S+۱}-S-\frac{۱}{۲}+\frac{S}{۲(S+۲)})}=\sqrt{\frac{۱}{(S+۱)^{۲}}}=\frac{۱}{S+۱}$$

بنابراین مقدار α برابر است با:

$$\alpha=\frac{Z_{۱۲}}{Z_{۱۱}}=\frac{۱}{S+۲}$$

حالا می‌توانیم مقدار دائمی $V_{۲}$ را در آزمایش (د) بدست آوریم. ابتدا مقدار $V_{۲}$ ناشی از منبع ولتاژ $\cos ۲t$ را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{۲}(S)=\alpha\, V_{۱}(S)=\frac{۱}{S+۲}V_{۱}(S)\xrightarrow{S=j۲}V_{۲}=\frac{۱}{۲+j۲}\times ۱=\frac{۱}{۲(۱+j)}=\frac{۱}{۴}-\frac{j}{۴}\Rightarrow V_{۲}(t)=\frac{۱}{۴}\cos ۲t+\frac{۱}{۴}\sin ۲t \qquad (-j\equiv \sin \omega t)$$

اکنون مقدار $V_{۲}$ ناشی از منبع جریان $۲\cos ۳t$ را بدست می‌آوریم:

$$V_{۲}(S)=\beta I_{۲}(S)=\frac{(S+۱)^{۲}}{S+۲}I_{۲}(S)\xrightarrow{S=j۳}V_{۲}=\frac{(j۳+۱)^{۲}}{j۳+۲}\times ۲=\frac{۴}{۱۳}+j\frac{۷۲}{۱۳}\Rightarrow V_{۲}(t)=\frac{۴}{۱۳}\cos ۳t-\frac{۷۲}{۱۳}\sin ۳t$$

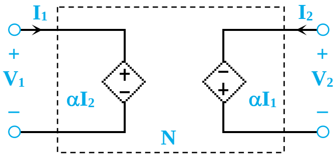
حال با استفاده از قضیه جمع آثار داریم:

$$\mathbf{V_{۲}(t)=\frac{۱}{۴}\cos ۲t+\frac{۱}{۴}\sin ۲t+\frac{۴}{۱۳}\cos ۳t-\frac{۷۲}{۱۳}\sin ۳t}$$

شایان ذکر است که $Z_{۱۲}$ می‌تواند برابر $-\frac{۱}{S+۱}$ نیز باشد، اما در این صورت مقدار $V(t)$ در شکل (د) مقداری بدست می‌آید که در هیچ‌یک از گزینه‌ها موجود نیست.

نکته: پیدا کردن پارامترهای امپدانس یک دوقطبی متقابل معادل با پیدا کردن مدل T آن دوقطبی است. پس در واقع در این تست و تست قبلی ما می‌توانستیم مدار معادل T را پیدا کنیم که البته در نحوه‌ی انجام محاسبات تفاوت چندانی نمی‌کرد.

مثال۳۰: شبکه دوقطبی N به صورت زیر را در نظر می‌گیریم. اگر دو عدد از این شبکه‌ها را به صورت پشت سر هم (tandem) به هم ببندیم، در مورد شبکه دوقطبی حاصل شده کدامیک از عبارات زیر برای ماتریس پارامترهای Z ،Y و H درست است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۰)

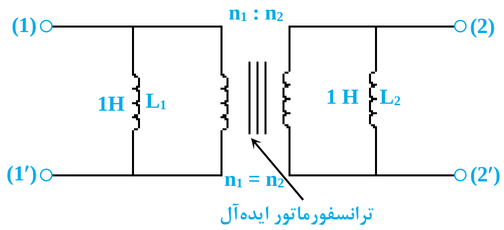


۱) هر سه ماتریس موجود است.
۲) ماتریس پارامترهای Z و H وجود ندارد و Y وجود دارد.
۳) فقط پارامترهای Z وجود دارد.
۴) ماتریس پارامترهای Z و Y وجود ندارد و H وجود دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به روابط زیر، مدار مذکور مانند یک ترانسفورمر عمل می‌کند و حاصل پشت سر هم بستن دو ترانسفورمر نیز یک ترانسفورمر است و می‌دانیم که ماتریس Z و Y برای ترانسفورمر وجود ندارد.

$$\begin{cases} V_{۱}=\alpha I_{۲} \\ V_{۲}=-\alpha I_{۱} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{\frac{V_{۱}}{V_{۲}}=\frac{-I_{۲}}{I_{۱}}}$$

مثال۳۱: ماتریس اندوکتانس (Inductance Matrix) مدار شکل داده شده، کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)



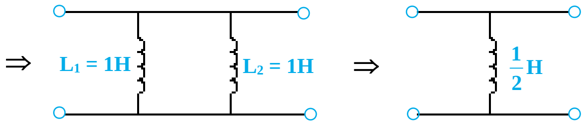
۱) $L=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۲) $L=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۳) $L=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

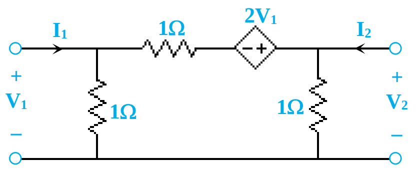
۴) $L=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه ترانسفورمر دارای نسبت تبدیل یک است، بنابراین حضور یا عدم حضور آن تفاوتی ندارد. پس مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



$$\Rightarrow\ L=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

مثال ۳۲: ماتریس ادمیتانس Y دوقطبی مقابل کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)



۱) $Y=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}$

۲) $Y=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۳ & ۴\end{bmatrix}$

۳) $Y=\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن ماتریس ادمیتانس، در گره ورودی و خروجی مدار KCL می‌زنیم:

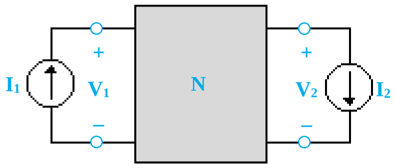
با نوشتن KCL در گره سمت چپ داریم:

$$\frac{V_۱}{۱}+\frac{V_۱+۲V_۱-V_۲}{۱}=I_۱\ \Rightarrow\ I_۱=۴V_۱-V_۲$$

با نوشتن KCL در گره سمت راست داریم:

$$\frac{V_۲}{۱}+\frac{V_۲-۲V_۱-V_۱}{۱}=I_۲\ \Rightarrow\ I_۲=-۳V_۱+۲V_۲\Rightarrow\ \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}$$

مثال ۳۳: در مدار شکل زیر پارامترهای $Z_{۱۱}=۲۰\Omega$ و $Z_{۱۲}=Z_{۲۱}=۱۵\Omega$ و $Z_{۲۲}=۲۵\Omega$ داده شده است. در صورتیکه $V_۱=۱۰\text{v}$ و $V_۲=-۵\text{v}$ باشد، جریان $I_۱$ و $I_۲$ برابر با کدام گزینه زیر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



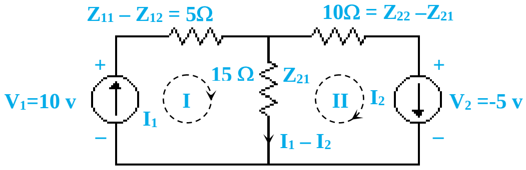
۱) $\begin{cases}I_۱=-۰/۹۱\text{A}\\ I_۲=۱/۱۸\text{A}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}I_۱=۱/۱۸\text{A}\\ I_۲=۰/۹۱\text{A}\end{cases}$

۳) $\begin{cases}I_۱=۱/۱\text{A}\\ I_۲=-۰/۵۵\text{A}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}I_۱=-۰/۵۵\text{A}\\ I_۲=۱/۱\text{A}\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با جایگذاری مدار معادل امپدانسی برای شبکه با توجه به پارامترهای Z و با نوشتن KVL در حلقه‌های مدار داریم:

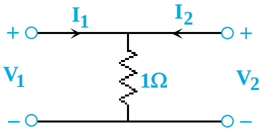


$$\left.\begin{aligned}V_۱&=I_۱\times ۵+۱۵\,(I_۱-I_۲)=۱۰\,\text{v}\\ -V_۲&=۱۰\,I_۲+۱۵\,(I_۲-I_۱)=۵\,\text{v}\end{aligned}\right.\ \Rightarrow\ \begin{cases}\mathbf{I_۱=۱/۱۸A}\\ \mathbf{I_۲=۰/۹۱A}\end{cases}$$

دقت شود که لزوماً نیازی به نوشتن و رسم مدار معادل T برای ماتریس نیست و از همان روابط نیز می‌توان به راحتی به جواب رسید.

$$\begin{aligned}V_۱&=Z_{۱۱}I_۱+Z_{۱۲}I_۲=۲۰I_۱+۱۵I_۲=۱۰\\ V_۲&=Z_{۲۱}I_۱+Z_{۲۲}I_۲=۱۵I_۱+۲۵I_۲=-۵\end{aligned}\ \xrightarrow[\text{۲ مجهول}]{\text{۲ معادله}}\ \begin{aligned}I_۱&=۱/۱۸\\ I_۲&=۰/۹۱\end{aligned}$$

مثال ۳۴: در مدار شکل زیر پارامترهای Z برابر با کدام گزینه زیر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



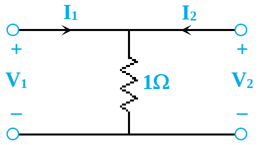
۱) $Z=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$

۲) $Z=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$

۳) $Z=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$

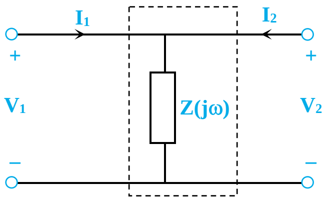
۴) $Z=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به جدول موجود در متن درس داریم:



$$\Rightarrow\ Z=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

مثال۳۵: در مدار زیر امپدانس انتقال T برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)



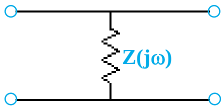
۱) $T=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ Z(j\omega) & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $T=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ \frac{۱}{Z(j\omega)} & -۱ \end{bmatrix}$

۳) $T=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ \frac{۱}{Z(j\omega)} & ۰ \end{bmatrix}$

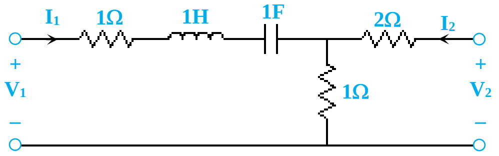
۴) $T=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{Z(j\omega)} & ۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به جدول موجود در متن درس داریم:



$$\Rightarrow \mathbf{T}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{Z(j\omega)} & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال۳۶: در مدار زیر امپدانس $Z_{۱۱}(j\omega)$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)



۱) $Z_{۱۱}(j\omega)=\frac{\omega^۲+۱}{j\omega}$

۲) $Z_{۱۱}(j\omega)=\frac{۲j\omega-\omega^۲+۱}{j\omega}$

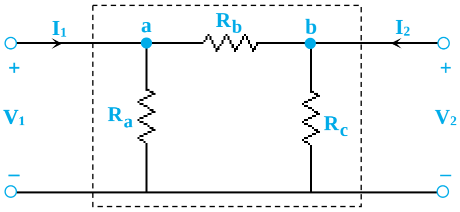
۳) $Z_{۱۱}(j\omega)=\frac{j\omega+\omega^۲+۱}{\omega}$

۴) $Z_{۱۱}(j\omega)=\frac{\omega+\omega^۲+۱}{j\omega}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» $Z_{۱۱}$ برابر جمع امپدانس‌های موجود در حلقه ورودی است؛ لذا داریم:

$$Z_{۱۱}=۲+S+\frac{۱}{S}=۲+j\omega+\frac{۱}{j\omega} \Rightarrow \mathbf{Z_{۱۱}=\frac{۲(j\omega)-\omega^۲+۱}{j\omega}}$$

مثال۳۷: در مدار زیر در حالتی که $y_{۱۱}=۰/۰۹۱S$ و $y_{۱۲}=y_{۲۱}=-۰/۰۵۴۵S$ و $y_{۲۲}=۰/۰۷۲۸S$ باشد، مقادیر R_c و R_b و R_a برابر با کدام گزینه زیر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)



۱) $\begin{cases} R_a=۱۶/۴\Omega \\ R_b=۲۵/۲\Omega \\ R_c=۵۰\Omega \end{cases}$

۲) $\begin{cases} R_a=۲۰/۴\Omega \\ R_b=۲۷/۴\Omega \\ R_c=۵۵\Omega \end{cases}$

۳) $\begin{cases} R_a=۱۸/۴\Omega \\ R_b=۲۷/۴\Omega \\ R_c=۵۰\Omega \end{cases}$

۴) $\begin{cases} R_a=۲۷/۴\Omega \\ R_b=۱۸/۴\Omega \\ R_c=۵۵\Omega \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به فرمول‌های مدار معادل π داریم:

$$y_{۱۱}=\frac{۱}{R_a}+\frac{۱}{R_b} \quad , \quad y_{۱۲}=-\frac{۱}{R_b} \quad , \quad y_{۲۲}=\frac{۱}{R_b}+\frac{۱}{R_c}$$

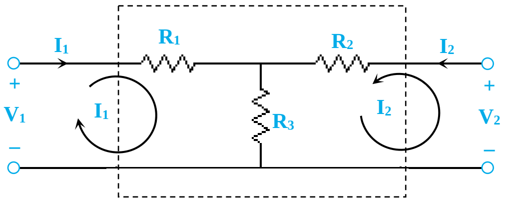
$$\mathbf{R_b}=\frac{۱}{۰/۰۵۴۵}=\mathbf{۱۸/۳۴\Omega} \Rightarrow y_{۱۱}=۰/۰۹۱=\frac{۱}{R_a}+۰/۰۵۴۵$$

$$\mathbf{R_a=۲۷/۴\Omega} \quad , \quad y_{۲۲}=۰/۰۷۲۸=۰/۰۵۴۵+\frac{۱}{R_c} \Rightarrow \mathbf{R_c=۵۵\Omega}$$

دقت کنید که حرف S در جلوی پارامترهای ادمیتانس در صورت سؤال، بیانگر واحد پارامترهای ادمیتانس که زیمنس است، می‌باشد.

مثال۳۸: در مدار زیر $Z_{۱۱} = ۲۰\Omega$ و $Z_{۱۲} = Z_{۲۱} = ۱۵\Omega$ و $Z_{۲۲} = ۲۵\Omega$ است. مقادیر $R_۱$ و $R_۲$ و $R_۳$ برابر با کدام گزینه زیر است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۴)



۱) $\begin{cases} R_۱ = ۱۰\Omega \\ R_۲ = ۱۰\Omega \\ R_۳ = ۱۵\Omega \end{cases}$

۲) $\begin{cases} R_۱ = ۵\Omega \\ R_۲ = ۱۰\Omega \\ R_۳ = ۱۵\Omega \end{cases}$

۳) $\begin{cases} R_۱ = ۵\Omega \\ R_۲ = ۱۰\Omega \\ R_۳ = ۱۰\Omega \end{cases}$

۴) $\begin{cases} R_۱ = ۱۵\Omega \\ R_۲ = ۱۰\Omega \\ R_۳ = ۵\Omega \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به مدار معادل داده شده و با استفاده از پارامترهای Z داریم:

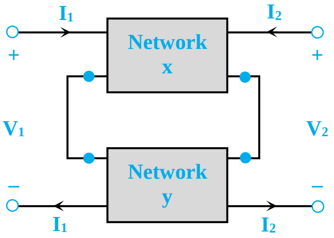
$$R_۱ + R_۳ = Z_{۱۱} = ۲۰ \quad (۱) \quad \text{و} \quad R_۲ + R_۳ = Z_{۲۲} = ۲۵\Omega \quad (۲) \quad \text{و} \quad R_۳ = Z_{۱۲} = Z_{۲۱} = ۱۵\,\Omega \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۳)} R_۱ + ۱۵ = ۲۰ \Rightarrow \mathbf{R_۱ = ۵\Omega}$$

$$\xrightarrow{(۲),(۳)} R_۲ + ۱۵ = ۲۵ \Rightarrow \mathbf{R_۲ = ۱۰\,\Omega}$$

مثال۳۹: در مدار زیر $Z_x = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $Z_y = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix}$ می‌باشد. کدام گزینه زیر صحیح است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۴)



۱) $\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۸ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۸ \\ ۸ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۶ \\ ۶ & ۱۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}$

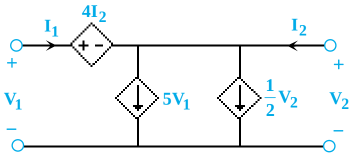
۴) $\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۸ \\ ۸ & ۱۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به سری بودن دو شبکه، ماتریس امپدانس آنها با هم جمع می‌شود:

$$[Z_T] = [Z_x] + [Z_y] = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{[Z_T]} = \begin{bmatrix} ۶ & ۸ \\ ۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

مثال۴۰: پارامترهای هایبرید $h_{۱۱}$ و $h_{۲۱}$ مدار داده شده برابر است با:

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)



۱) $h_{۱۱} = \frac{۴}{۱۹}$, $h_{۲۱} = \frac{۱}{۱۹}$

۲) $h_{۱۱} = \frac{۱}{۱۹}$, $h_{۲۱} = \frac{۴}{۱۹}$

۳) $h_{۱۱} = -۱$, $h_{۲۱} = -۴$

۴) $h_{۱۱} = -۴$, $h_{۲۱} = -۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن KVL در حلقه بیرونی مدار داریم:

$$V_۱ = ۴I_۲ + V_۲ \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$I_۱ + I_۲ = ۵V_۱ + \frac{۱}{۲}V_۲ \qquad (۲)$$

$$(۲) \Rightarrow I_۲ = ۵V_۱ + \frac{۱}{۲}V_۲ - I_۱ \qquad (۳)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۳) داریم:

$$\Rightarrow V_۱ = ۴(۵V_۱ + \frac{۱}{۲}V_۲ - I_۱) + V_۲ \Rightarrow V_۱ = ۲۰V_۱ + ۲V_۲ - ۴I_۱ + V_۲ \Rightarrow V_۱ = \frac{۴}{۱۹}I_۱ - \frac{۳}{۱۹}V_۲ \qquad (۴)$$

با جایگذاری $V_۱$ از رابطه (۱) در رابطه (۳) داریم:

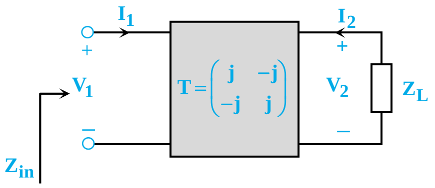
$$\Rightarrow I_۲ = ۵(۴I_۲ + V_۲) + \frac{۱}{۲}V_۲ - I_۱ \Rightarrow I_۲ = \frac{۱}{۱۹}I_۱ + \frac{۵/۵}{۱۹}V_۲ \Rightarrow I_۲ = \frac{۱}{۱۹}I_۱ + \frac{۱۱}{۳۸}V_۲ \qquad (۵)$$

با نوشتن روابط (۴) و (۵) به صورت ماتریسی داریم:

$$\xrightarrow{(۴),(۵)} \begin{bmatrix} V_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۹} & -\frac{۳}{۱۹} \\ \frac{۱}{۱۹} & \frac{۱۱}{۳۸} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{h_{۱۱} = \frac{۴}{۱۹}} \ , \ \mathbf{h_{۲۱} = \frac{۱}{۱۹}}$$

مثال۴۱: در یک دوقطبی خطی تغییرناپذیر با زمان پارامترهای انتقال T مفروضند. امپدانس Z_L چقدر باشد تا امپدانس ورودی Z_{in} نیز برابر Z_L باشد؟ (مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱Ω
۲) jΩ
۳) −jΩ
۴) ±jΩ



$$\begin{pmatrix} V_۲ \\ I_۲ \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} V_۱ \\ -I_۱ \end{pmatrix}$$

☑ **پاسخ:** هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. دقت کنید که با توجه به رابطه ارائه شده برای توصیف ماتریس T در صورت سؤال، این ماتریس متفاوت از ماتریس استاندارد انتقال شبکه می‌باشد؛ لذا برای محاسبه امپدانس ورودی به معادلات ماتریس داده شده رجوع می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} V_۲ \\ I_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & -j \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ -I_۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_۲ = jV_۱ + jI_۱ \\ I_۲ = -jV_۱ - jI_۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_۲ = jV_۱ + jI_۱ \\ -I_۲ = jV_۱ + jI_۱ \end{cases}$$

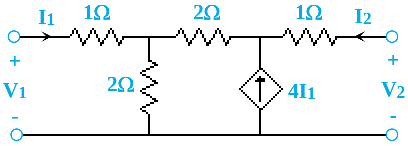
با تقسیم معادلات بدست آمده در بالا داریم:

$$\frac{V_۲}{-I_۲} = \frac{jV_۱ + jI_۱}{jV_۱ + jI_۱} = ۱ \quad , \quad \frac{V_۲}{-I_۲} = Z_L \Rightarrow \mathbf{Z_L = ۱\Omega}$$

با توجه به معادلات بالا باید $Z_L = ۱\Omega$ باشد تا روابط ماتریس T' برقرار باشد، لذا مقدار Z_L فقط می‌تواند عدد یک باشد. با این حال با توجه به روابط توصیف‌کننده دوقطبی و مدار، این مدار دارای پاسخ یکتا نیست و امپدانس ورودی آن تعریف نشده می‌باشد؛ (در واقع به علت صفر بودن دترمینان ماتریس T محاسبه $V_۱$ برحسب $I_۱$ غیرقابل انجام بوده و بنابراین نمی‌توان امپدانس ورودی مدار را به دست آورد). لذا این تست ایراد دارد و غلط است.

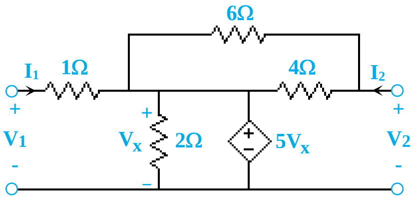
آزمون فصل یازدهم

۱ـ در مدار زیر پارامتر $h_{۲۲}$ برحسب مهو کدام گزینه است؟



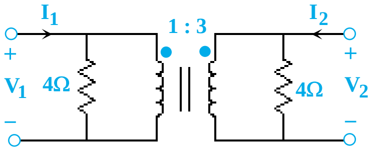
۱) ۰/۱
۲) ۰/۳
۳) ۰/۲
۴) ۰/۴

۲ـ در مدار زیر ماتریس T کدام گزینه است؟



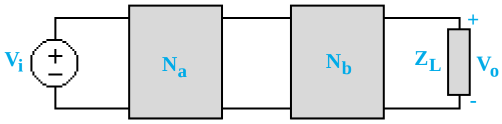
۱) $\begin{bmatrix} ۰/۳۲ & ۱/۱۷ \\ ۰/۰۲ & ۰/۴۷ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۰/۱۷ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۰/۴۱ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰/۱۹ & ۰/۳ \\ ۰/۱ & ۴/۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱/۱۷ & ۳/۵ \\ ۰/۲ & ۱/۵ \end{bmatrix}$

۳ـ ماتریس Z مدار زیر کدام گزینه است؟



۱) $\begin{bmatrix} ۰/۷ & ۲/۱ \\ ۲/۱ & ۰/۲ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۰/۴ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۳/۶ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰/۷ & ۰/۱ \\ ۰/۱ & ۰/۳ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱/۱ & ۰/۹ \\ ۰/۹ & ۱/۳ \end{bmatrix}$

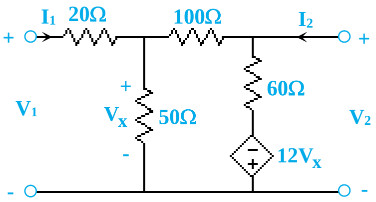
۴ـ در مدار زیر $\frac{V_o}{V_{in}}$ برای $Z_L = ۲\Omega$ کدام گزینه است؟



$$y_b = \begin{bmatrix} ۸ & -۴ \\ ۲ & ۱۰ \end{bmatrix} \qquad Z_a = \begin{bmatrix} ۸ & ۶ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

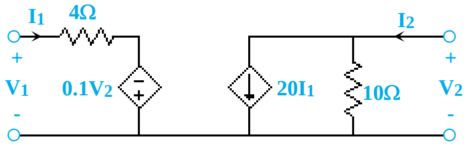
۱) −۰/۰۰۴
۲) ۰/۰۰۵
۳) −۰/۰۰۵
۴) ۰/۰۰۴

۵ـ ماتریس Z مدار زیر کدام گزینه است؟



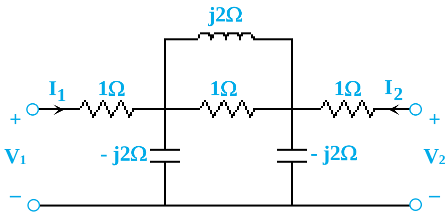
۱) $\begin{bmatrix} ۳۰ & ۳/۷ \\ -۷۰ & ۱۱ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۲/۱ \\ -۱۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۳۰ & ۳/۷ \\ ۷۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۳/۷ \\ -۳/۷ & ۱۵ \end{bmatrix}$

۶ـ پارامترهای y مدار زیر کدام گزینه است؟



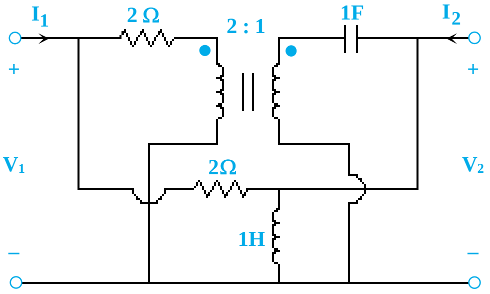
۱) $\begin{bmatrix} ۰/۲۵ & ۰/۲۵ \\ ۰/۱۵ & ۰/۳۵ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۰/۱۵ & ۰/۲۵ \\ ۰/۱۵ & ۰/۲ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰/۲۵ & ۰/۳۵ \\ ۰/۳۵ & ۰/۲ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۰/۲۵ & ۰/۰۲۵ \\ ۵ & ۰/۶ \end{bmatrix}$

۷ـ در مدار زیر برای $\omega = ۱(\frac{rad}{sec})$ دترمینان ماتریس T کدام گزینه است؟



۱) j۲/۳
۲) −j۱/۲
۳) ۱
۴) −۱

۸ـ در ماتریس Y مدار زیر مقدار $y_{۲۲}$ کدام گزینه است؟



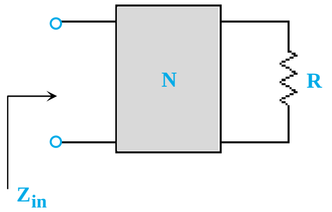
۱) $\frac{۵S^۲+۴S+۴}{۲S(S+۲)}$

۲) $\frac{۲S^۲+۳S+۴}{۲S(S+۱)}$

۳) $\frac{S+۱}{S^۲+۳S+۴}$

۴) $\frac{S^۲+۱}{S^۲(S+۴)}$

۹ـ دوقطبی N در مدار زیر متقارن و متقابل است. می‌دانیم حد امپدانس ورودی وقتی $R\to ۰$ برابر با $\frac{۸}{۳}$ اهم و برای $R\to\infty$ برابر با ۳ اهم است. ماتریس انتقال دوقطبی در کدام گزینه به درستی آمده است؟



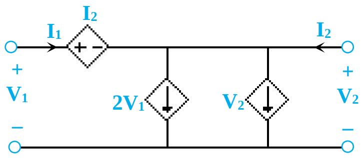
۱) $T=\begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۲) $T=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

۳) $T=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$

۴) $T=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

۱۰ـ ماتریس هایبرید (H) مدار زیر کدام گزینه است؟



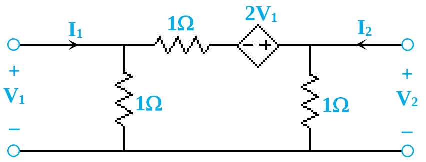
۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۱۱ـ ماتریس ادمیتانس شبکه دو دریچه‌ای شکل زیر کدام گزینه است؟



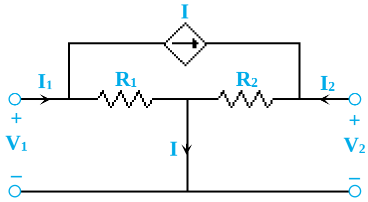
۱) $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

۱۲ـ مقدار پارامتر $h_{۲۱}$ در مدار شکل مقابل کدام گزینه است؟



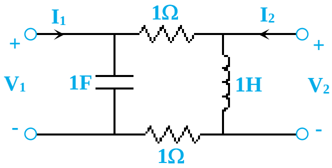
۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) صفر

۱۳ـ ماتریس ادمیتانس شبکه دو دریچه‌ای شکل زیر در حوزه فرکانس کدام گزینه است؟



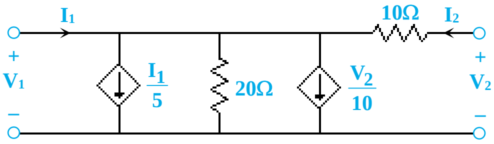
۱) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{S}+۰/۵ & -۰/۵ \\ -۰/۵ & S+۰/۵ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} S+۰/۵ & S \\ S & \frac{۱}{S}+۰/۵ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} S+۰/۵ & -S \\ -S & S+۰/۵ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} S+۰/۵ & -۰/۵ \\ -۰/۵ & ۰/۵+\frac{۱}{S} \end{bmatrix}$

۱۴ـ برای مدار شکل زیر مقدار $Z_{۲۱}$ بر حسب اهم کدام گزینه است؟



۱) صفر

۲) $\frac{۱۶}{۳}$

۳) ۱۰

۴) ۱۲

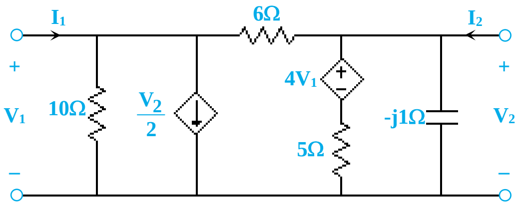
۱۵ــ پارامتر $t_{۱۲}$ مدار شکل زیر کدام گزینه است؟

۱) ۱

۲) ۰/۳

۳) ۱+j۰/۵

۴) ۰/۵+j۱



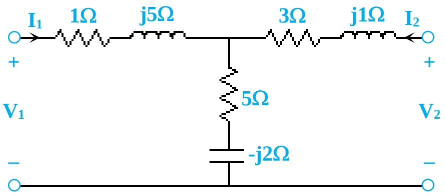
۱۶ــ برای شبکه دو دریچه‌ای شکل زیر مقدار $Z_{۱۱}+Z_{۲۲}$ برحسب اهم کدام گزینه است؟

۱) ۱۰−j۴

۲) ۱۱+j

۳) ۱۴+j۴

۴) ۱۴+j۲



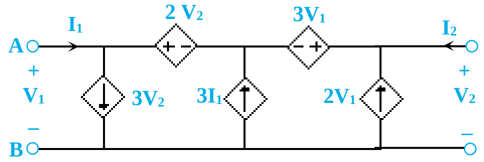
۱۷ــ مقاومت دیده شده در سرهای A و B مدار شکل زیر چند اهم است؟

۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) بینهایت



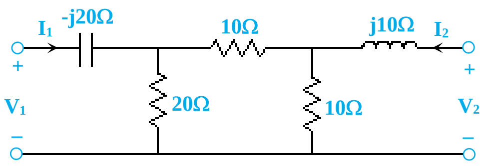
۱۸ــ در دوقطبی (Two port) مقابل، پارامتر $Z_{۱۱}$ برحسب اهم کدام گزینه است؟

۱) ۱۰−j۱۰

۲) ۲۰−j۱۰

۳) ۱۰−j۲۰

۴) ۲۰−j۲۰



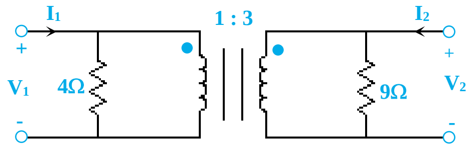
۱۹ــ مقدار پارامتر $Z_{۲۲}$ برحسب اهم کدام گزینه است؟

۱) ۴/۲

۲) ۲/۴

۳) ۷/۲

۴) ۰/۸



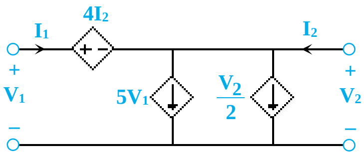
۲۰ــ پارامتر $h_{۲۱}$ دو دریچه‌ای زیر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۱۹}$

۲) $\frac{۴}{۱۹}$

۳) $-\frac{۳}{۱۹}$

۴) $-\frac{۱۱}{۳۸}$



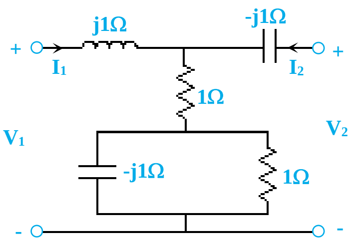
۲۱ــ پارامتر $Z_{۱۲}$ شبکه دو دریچه‌ای شکل زیر برحسب اهم کدام گزینه است؟

۱) ۱/۵−j۰/۵

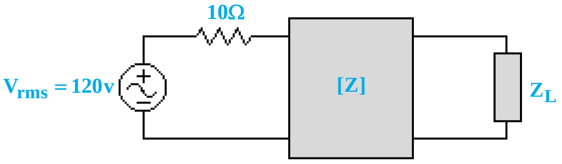
۲) ۱/۵−j۱/۵

۳) ۱/۵+j۱/۵

۴) ۱/۵+j۰/۵



۲۲ـ در شکل زیر ماکزیمم توان جذب شده توسط Z_L، چند وات است؟



$$[Z]=\begin{bmatrix}40 & 60\\ 80 & 120\end{bmatrix}$$

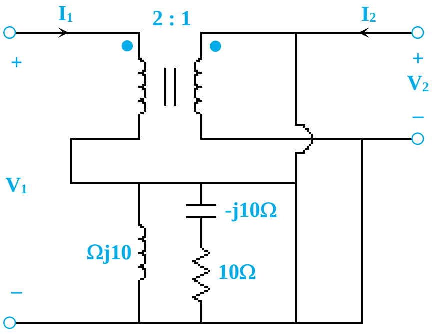
۱) ۳۸۴

۲) ۲۴

۳) ۱۹۲

۴) ۱۹۶

۲۳ـ ماتریس هایبرید مدار زیر کدام گزینه است؟



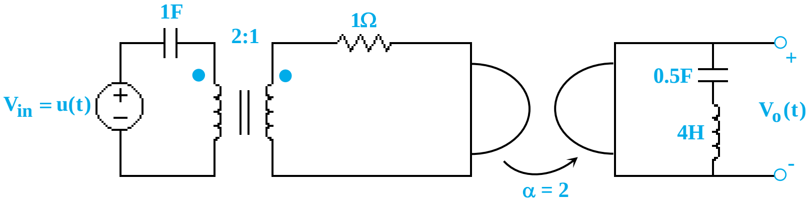
۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۱/۵\\ -۱/۵ & ۱۰+j۱۰\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}۱ & -۱/۵\\ ۱/۵ & ۱۰-j۱۰\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}۰ & -۱/۵\\ -۱/۵ & ۱۰-j۱۰\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۳ & \frac{۱}{۱۰+j۱۰}\end{bmatrix}$

۲۴ـ در مدار زیر ولتاژ خروجی در $t=\infty$، به ازای ورودی پله برحسب ولت کدام گزینه است؟



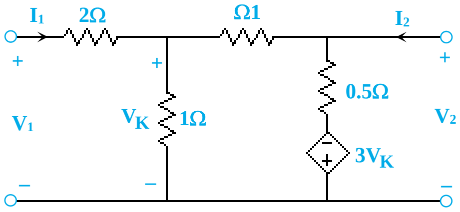
۱) ۲

۲) ۱

۳) ۱-

۴) ۰

۲۵ـ در مدار زیر پارامتر $g_{۱۲}$ کدام است؟



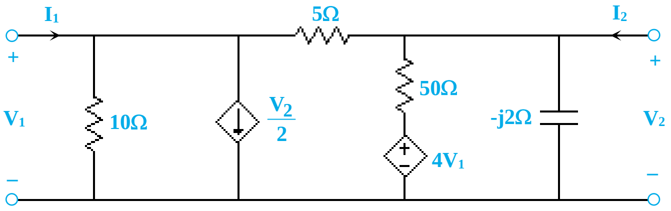
۱) $-\frac{۱}{۲۵}$

۲) $\frac{۱}{۲۵}$

۳) $-\frac{۱}{۱۹}$

۴) $\frac{۱}{۱۹}$

۲۶ـ در مدار زیر مقدار پارامتر $\left.\frac{V_۱}{-I_۲}\right|_{V_۲=۰}$ برحسب اهم کدام گزینه است؟



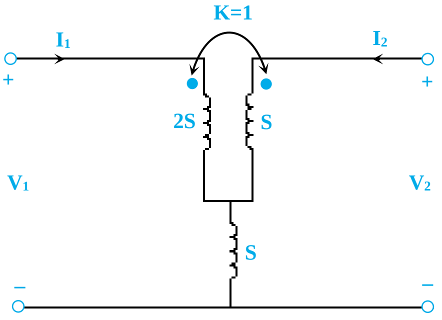
۱) $\frac{۲۵}{۷}$

۲) $-\frac{۷}{۲۵}$

۳) $-\frac{۲۵}{۷}$

۴) $\frac{۷}{۲۵}$

۲۷ـ ماتریس انتقال مدار زیر کدام گزینه است؟



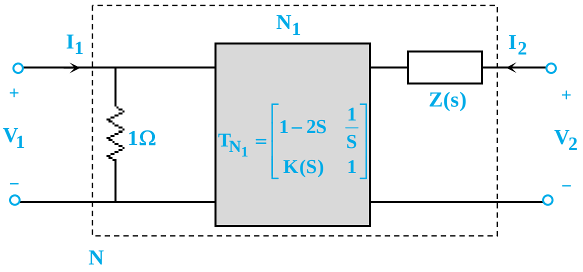
۱) $\begin{bmatrix}\frac{۳}{۱+\sqrt{۲}} & (۵-۷\sqrt{۲})S\\ \frac{۱}{S(۱+\sqrt{۲})} & \frac{-۲}{۱+\sqrt{۲}}\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}\frac{۳}{۱-\sqrt{۲}} & S\\ S & \frac{۲}{۱-\sqrt{۲}}\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\frac{-۳}{۱+\sqrt{۲}} & (۵+۷\sqrt{۲})S\\ (۵+۷\sqrt{۲})S & \frac{۲}{۱+\sqrt{۲}}\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}\frac{-۳}{۱+\sqrt{۲}} & (۵-۷\sqrt{۲})S\\ \frac{۱}{S(۱+\sqrt{۲})} & \frac{۲}{۱-\sqrt{۲}}\end{bmatrix}$

۲۸ـ در مدار زیر، دوقطبی N متقابل و متقارن است. اگر T ماتریس انتقال این دوقطبی باشد، پارامتر $T_{۱۲}$ کدام است؟ (K(s) و Z(s) نامعلوم هستند.)



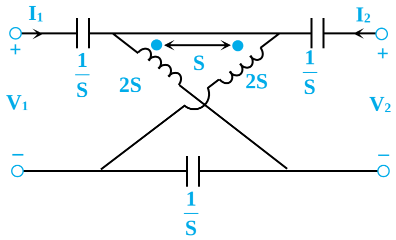
۱) صفر

۲) $\dfrac{۲-S^{۲}}{S(S^{۲}+S-۰/۵)}$

۳) $\dfrac{۲S^{۲}+۱}{S(۲S^{۲}+۲S-۱)}$

۴) $\dfrac{۴S(۱-S)}{۲S^{۲}+۲S-۱}$

۲۹ـ در مدار زیر پارامتر $t_{۲۲}$ کدام گزینه است؟



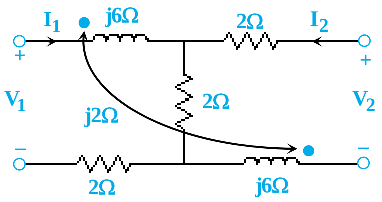
۱) $S+\dfrac{۱}{S}$

۲) $۱+\dfrac{۱}{S^{۲}}$

۳) $S+۱$

۴) $S+\dfrac{۱}{S^{۲}}$

۳۰ـ در مدار زیر فاکتور $h_{۱۲}$ کدام گزینه است؟



۱) $۱-j۲$

۲) $۱+j۲$

۳) $\dfrac{۱+j۵}{۱۳}$

۴) $\dfrac{-۱-j۵}{۱۳}$

۳۱ـ در مدار سؤال قبل، فاکتور $Z_{۱۱}$ برحسب اهم کدام گزینه است؟

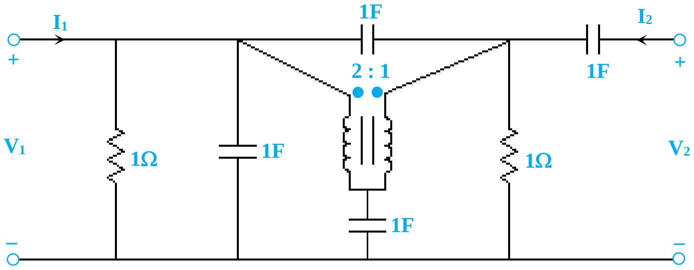
۱) $۲+j۳$

۲) $۴+j۶$

۳) $۲-j۳$

۴) $۳-j۴$

۳۲ـ در مدار زیر فاکتور $t_{۱۱}$ کدام گزینه است؟



۱) $۲S-۳$

۲) $\dfrac{۵}{۳}+\dfrac{۱}{۳S}$

۳) $\dfrac{۳}{۵}+۳S$

۴) $۲S+۳$

۳۳ـ در مدار سؤال قبل، فاکتور $t_{۲۲}$ کدام است؟

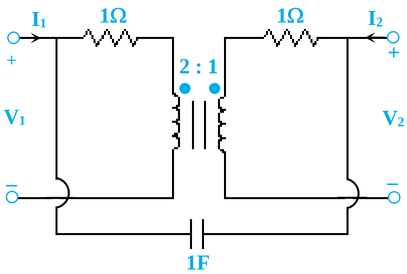
۱) $۳+\dfrac{۳}{S}+\dfrac{۱}{۳S^{۲}}$

۲) $۴+\dfrac{۴}{S}+\dfrac{۱}{۴S^{۲}}$

۳) $۳+\dfrac{۲}{S}+\dfrac{۱}{S^{۲}}$

۴) $۴+\dfrac{۴}{S}+\dfrac{۱}{S^{۲}}$

۳۴ـ پارامتر $y_{۱۱}$ در مدار زیر کدام گزینه است؟



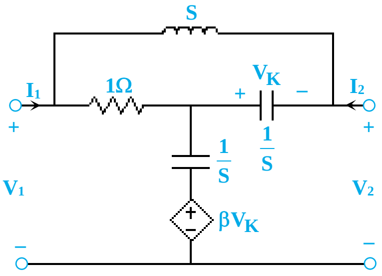
۱) $۰/۱+\dfrac{S}{۲}$

۲) $۰/۲+\dfrac{S}{۲}$

۳) $۰/۲+S$

۴) $۰/۱+S$

۳۵ـ در مدار زیر، شرط اینکه دوقطبی دارای شرط تقابل باشد، کدام گزینه است؟



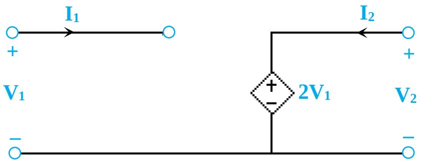
۱) $\beta = ۰$

۲) $\beta = ۱$

۳) $\beta = ۲$

۴) $\beta = ۴$

۳۶ـ در مدار زیر کدام دسته ماتریس‌ها وجود ندارند؟



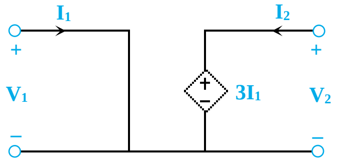
۱) G و T

۲) H و T

۳) G و Y

۴) H و Y

۳۷ـ در مدار زیر کدام دسته ماتریس‌ها وجود دارد؟



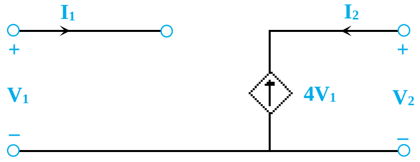
۱) T و Z

۲) Y و G

۳) G و Z

۴) H و T

۳۸ـ در مدار زیر کدام دسته ماتریس‌ها وجود ندارد؟



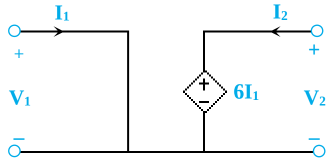
۱) T و H

۲) Z و H

۳) G و T

۴) Y و T

۳۹ـ در مدار زیر کدام دسته ماتریس‌ها وجود دارند؟



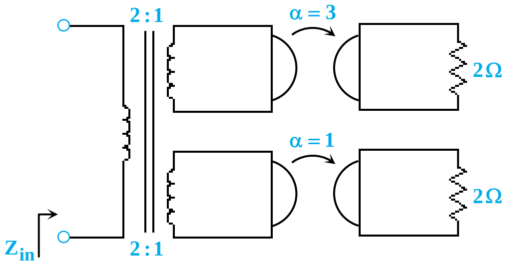
۱) G و Y

۲) T و H

۳) Z و G

۴) T و Z

۴۰ـ در مدار زیر مقدار امپدانس ورودی مدار برحسب اهم، کدام گزینه است؟



۱) ۱۰

۲) ۵

۳) ۲۰

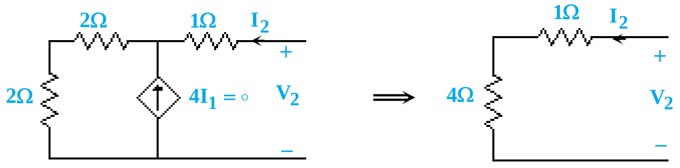
۴) ۳۰

پاسخنامه آزمون فصل یازدهم

۱ـ گزینه «۳» با توجه به تعریف پارامتر $h_{۲۲}$ داریم:

$$h_{۲۲} = \frac{I_۲}{V_۲}\Big|_{I_۱=۰}$$

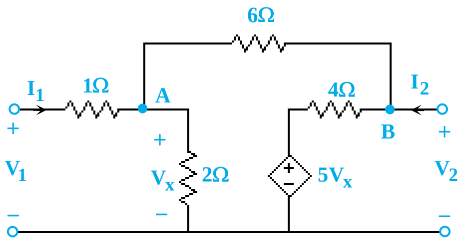
بنابراین با مدار باز کردن سمت چپ مدار داریم:



$$\Rightarrow I_۲ = \frac{V_۲}{۵}$$

$$\Rightarrow h_{۲۲} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲\ \mho$$

۲ـ گزینه «۱» با اعمال KCL, KVL در مدار داریم:



$$KCL(A): I_۱ = \frac{V_x}{۲} + \frac{V_x - V_۲}{۶}$$

$$۶I_۱ = ۳V_x + V_x - V_۲ \Rightarrow ۴V_x - V_۲ = ۶I_۱ \qquad (۱)$$

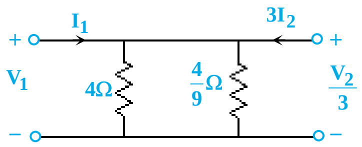
$$KCL(B): I_۲ = \frac{V_۲ - ۵V_x}{۴} + \frac{V_۲ - V_x}{۶} \Rightarrow ۱۲I_۲ = ۳V_۲ - ۱۵V_x + ۲V_۲ - ۲V_x$$

$$\Rightarrow ۵V_۲ - ۱۷V_x = ۱۲I_۲ \qquad (۲)$$

$$KVL\ (\text{حلقه‌ی چپ}): V_۱ = I_۱ + V_x \Rightarrow V_x = V_۱ - I_۱ \quad (۳) \xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} ۴V_۱ - ۴I_۱ = V_۲ + ۶I_۱ \Rightarrow ۴V_۱ = V_۲ + ۱۰I_۱ \\ ۵V_۲ - ۱۷(V_۱ - I_۱) = ۱۲I_۲ \Rightarrow ۱۷V_۱ - ۵V_۲ = ۱۷I_۱ - ۱۲I_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۰/۳۲V_۲ - ۱/۱۷I_۲ \\ I_۱ = ۰/۰۲V_۲ - ۰/۴۷I_۲ \end{cases} \to T = \begin{bmatrix} ۰/۳۲ & ۱/۱۷ \\ ۰/۰۲ & ۰/۴۷ \end{bmatrix}$$

۳ـ گزینه «۲» با انتقال همه‌ی المان‌ها به سمت اولیه‌ی ترانسفورمر داریم:



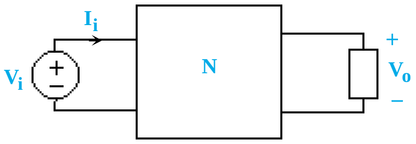
$$V_۱ = \frac{V_۲}{۳} = (۴ \| \frac{۴}{۹})\,(I_۱ + ۳I_۲) = ۰/۴I_۱ + ۱/۲I_۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۰/۴I_۱ + ۱/۲I_۲ \\ V_۲ = ۱/۲I_۱ + ۳/۶I_۲ \end{cases} \to Z = \begin{bmatrix} ۰/۴ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۳/۶ \end{bmatrix}$$

۴ـ گزینه «۳» ابتدا ماتریس انتقال شبکه‌های Nb, Na را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_a = \begin{bmatrix} ۸ & ۶ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۸I_۱ + ۶I_۲ \\ V_۲ = ۴I_۱ + ۵I_۲ \end{cases} \to \begin{cases} V_۱ = ۲V_۲ - ۴I_۲ \\ I_۱ = ۰/۲۵V_۲ - ۱/۲۵I_۲ \end{cases} \to T_a = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{bmatrix}$$

$$y_b = \begin{bmatrix} ۸ & -۴ \\ ۲ & ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_۱ = ۸V_۱ - ۴V_۲ \\ I_۲ = ۲V_۱ + ۱۰V_۲ \end{cases} \to \begin{cases} V_۱ = -۵V_۲ + ۰/۵I_۲ \\ I_۱ = -۴۴V_۲ + ۴I_۲ \end{cases} \to T_b = \begin{bmatrix} -۵ & -۰/۵ \\ -۴۴ & -۴ \end{bmatrix}$$



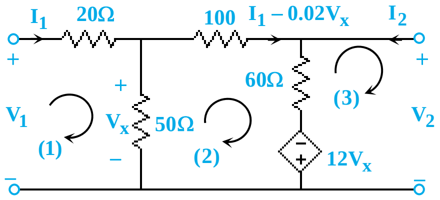
حال داریم:

$$T_N = T_a \times T_b = \begin{bmatrix} -۱۸۶ & -۱۷ \\ -۵۶/۲۵ & -۵/۱۲۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_i = -۱۸۶V_o - ۱۷I_o \\ I_i = -۵۶/۲۵V_o - ۵/۱۲۵I_o \end{cases} \xrightarrow[V_o = ۲I_o]{Z_L = ۲} \begin{cases} V_i = -۱۹۴/۵\ V_o \\ I_i = -۵۸/۸۱۲۵\ V_o \end{cases}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-۱}{۱۹۴/۵} = -۰/۰۰۵$$

۵ـ گزینه «۱» با اعمال KVL در حلقه‌های موجود داریم:



$$KVL(۱): V_۱ = ۲۰ I_۱ + V_X \quad (۱)$$

$$KVL(۲): -V_X + ۱۰۰ \times (I_۱ - ۰/۰۲ V_X) + ۶۰ \times (I_۱ + I_۲ - ۰/۰۲ V_X) - ۱۲ V_X = ۰$$

$$۱۶۰ I_۱ + ۶۰ I_۲ = ۱۶/۲\ V_X \quad (۲)$$

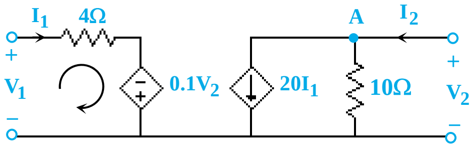
$$KVL(۳): V_۲ = ۶۰(I_۱ + I_۲ - ۰/۰۲ V_X) - ۱۲ V_X \Rightarrow V_۲ = ۶۰ I_۱ + ۶۰ I_۲ - ۱۳/۲\ V_X \quad (۳)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow ۱۶۰ I_۱ + ۶۰ I_۲ = ۱۶/۲ \times (V_۱ - ۲۰ I_۱) \Rightarrow V_۱ = ۲۹/۹\ I_۱ + ۳/۷ I_۲ \quad (۴)$$

$$(۱),(۳) \rightarrow V_۲ = ۶۰ I_۱ + ۶۰ I_۲ - ۱۳/۲ \times (V_۱ - ۲۰ I_۱) \overset{(۴)}{\Rightarrow} V_۲ = -۷۰/۷ I_۱ + ۱۱/۱\ I_۲$$

$$\rightarrow Z \simeq \begin{bmatrix} ۳۰ & ۳/۷ \\ -۷۰ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

۶ـ گزینه «۴» با اعمال KVL در حلقه‌ی سمت چپ و همچنین اعمال KCL در گره A داریم:



$$KVL: V_۱ = ۴ I_۱ - ۰/۱\ V_۲ \rightarrow I_۱ = ۰/۲۵ V_۱ + ۰/۰۲۵ V_۲$$

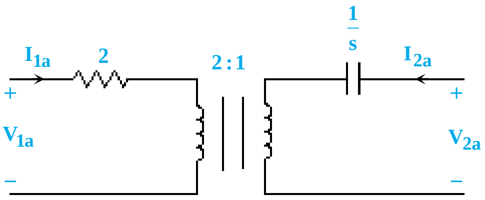
$$KCL(A): I_۲ = \frac{V_۲}{۱۰} + ۲۰ I_۱ \rightarrow I_۲ = ۵ V_۱ + ۰/۶ V_۲$$

$$\rightarrow Y = \begin{bmatrix} ۰/۲۵ & ۰/۰۲۵ \\ ۵ & ۰/۶ \end{bmatrix}$$

۷ـ گزینه «۳» با توجه به شکل مدار، مشخص است که مدار یک دوقطبی متقارن است؛ بنابراین دترمینان ماتریس T برابر یک می‌باشد: $\det(T) = ۱$

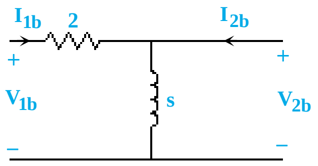
۸ـ گزینه «۱» با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که مدار از دو بخش که با هم موازی شده‌اند تشکیل شده است. بنابراین داریم: $y_{۲۲} = y_{۲۲a} + y_{۲۲b}$

بخش اول:



$$y_{۲۲a} = \frac{I_{۲a}}{V_{۲a}}\Big|_{V_{۱a}} = \frac{۱}{\frac{۱}{s} + ۲ \times (\frac{۱}{۲})^۲} = \frac{۲s}{s+۲}$$

بخش دوم:



$$y_{۲۲b} = \frac{I_{۲b}}{V_{۲b}}\Big|_{V_{۱b=۰}} = \frac{s+۲}{۲s}$$

بنابراین داریم:

$$y_{۲۲} = y_{۲۲a} + y_{۲۲b} = \frac{۲s}{s+۲} + \frac{s+۲}{۲s} = \frac{۵s^۲ + ۴s + ۴}{۲s(s+۲)}$$

۹ـ گزینه «۱» از آنجا که شبکه‌ی N هم متقارن و هم متقابل است، بنابراین در ماتریس امپدانس هم $Z_{۱۲} = Z_{۲۱}$ و هم $Z_{۱۱} = Z_{۲۲}$ و در ماتریس انتقال $A = D$ و $\det[T] = ۱$ است.

با استفاده از رابطه‌ی امپدانس ورودی دوقطبی از روی ماتریس امپدانس داریم:

$$Z_{in} = Z_{۱۱} - \frac{Z_{۱۲}.Z_{۲۱}}{Z_{۲۲} + Z_L} \xrightarrow[Z_{۲۲}=Z_{۱۱}]{Z_{۱۲}=Z_{۲۱}} Z_{in} = Z_{۱۱} - \frac{Z_{۱۲}^۲}{Z_{۱۱} + Z_L}$$

حال با توجه به داده‌های صورت سؤال یک بار Z_L را به سمت بی‌نهایت و بار دیگر Z_L را به سمت صفر میل می‌دهیم و معادله‌ی به دست آمده را سعی می‌کنیم حل کنیم:

$$Z_L \rightarrow ۰ \Rightarrow Z_{in} = \boxed{\frac{۸}{۳} = Z_{۱۱} - \frac{Z_{۱۲}^۲}{Z_{۱۱} + ۰}} \quad (۱) \qquad , \qquad Z_L \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{in} = \boxed{Z_{۱۱} = ۳\Omega} \quad (۲)$$

حال $Z_{۱۱} = ۳$ را در معادله‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{۸}{۳} = ۳ - \frac{Z_{۱۲}^۲}{۳} \Rightarrow ۸ = ۹ - Z_{۱۲}^۲ \Rightarrow Z_{۱۲} = ۱\Omega$$

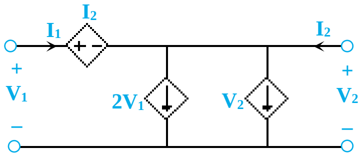
بنابراین ماتریس Z به صورت مقابل است:

$$Z = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

با نوشتن روابط ولتاژ و جریان، ابتدا برحسب ولتاژ و جریان ثانویه‌ی شبکه به ماتریس T می‌رسیم. با توجه به ماتریس Z، برای $V_۱$ و $V_۲$ داریم:

$$\begin{cases} V_۱ = ۳I_۱ + I_۲ \Rightarrow V_۱ = ۳(V_۲ - ۳I_۲) + I_۲ \Rightarrow \boxed{V_۱ = ۳V_۲ - ۸I_۲} \\ V_۲ = I_۱ + ۳I_۲ \Rightarrow \boxed{I_۱ = V_۲ - ۳I_۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_۱ \\ I_۱ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} V_۲ \\ -I_۲ \end{bmatrix}$$

۱۰ـ گزینه «۱» با اعمال KVL و KCL در مدار فوق داریم:

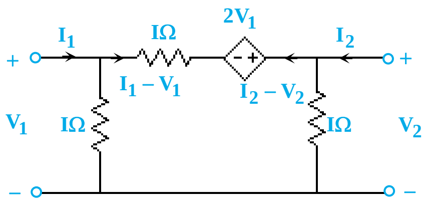


$$\text{KVL (حلقه‌ی بیرونی)} : V_۱ - V_۲ = I_۲ \quad (۱)$$

$$\text{KCL(A)} : I_۲ + I_۱ = ۲V_۱ + V_۲ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \begin{cases} V_۱ = I_۱ - ۲V_۲ \\ I_۲ = I_۱ - ۳V_۲ \end{cases} \rightarrow H = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

۱۱ـ گزینه «۲» با اعمال KVL در حلقه‌ی میانی و KCL در گره مرکب (شامل شاخه بالایی) داریم:



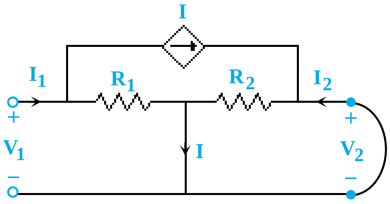
$$\text{KVL} : -V_۱ + (I_۱ - V_۱) - ۲V_۱ + V_۲ = ۰ \Rightarrow I_۱ = ۴V_۱ - V_۲$$

$$\text{KCL} : I_۱ - V_۱ + I_۲ - V_۲ = ۰ \rightarrow I_۲ = -۳V_۱ + ۲V_۲$$

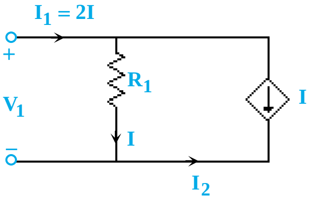
$$\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱۲ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف پارامتر $h_{۲۱}$ داریم:

$$h_{۲۱} = \frac{I_۲}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰} \xrightarrow{\text{را اتصال کوتاه می‌کنیم } V_۲}$$

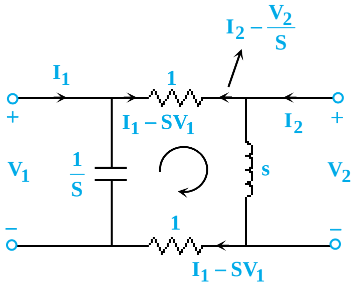


$$\xrightarrow{\text{حذف می‌شود } R_۲}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} I_۲ = -I \\ I_۱ = ۲I \end{cases} \rightarrow h_{۲۱} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۳ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم. سپس با اعمال KCL در گره مکعب (شامل شاخه‌ی بالایی) و KVL در حلقه میانی داریم:



$$\text{KCL} : I_۱ - sV_۱ + I_۲ - \frac{V_۲}{s} = ۰ \rightarrow I_۱ + I_۲ = sV_۱ + \frac{V_۲}{s} \quad (۱)$$

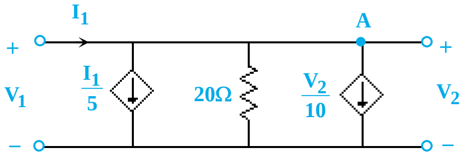
$$\text{KVL} : -V_۱ + (I_۱ - sV_۱) + V_۲ + (I_۱ - sV_۱) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲I_۱ = (۲s + ۱)V_۱ - V_۲ \rightarrow I_۱ = (s + \frac{۱}{۲})V_۱ - \frac{۱}{۲}V_۲ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow I_۲ = -۰/۵V_۱ + \frac{s+۲}{۲s}V_۲$$

$$Y = \begin{bmatrix} s + ۰/۵ & -۰/۵ \\ -۰/۵ & ۰/۵ + \frac{۱}{s} \end{bmatrix}$$

۱۴ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف $Z_{۲۱}$ داریم:



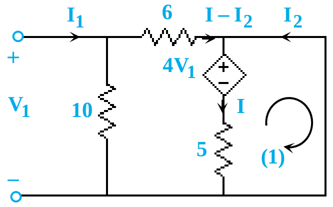
$$Z_{۲۱} = \frac{V_۲}{I_۱}\Big|_{I_۲=۰}$$

بنابراین سمت راست مدار را مدار باز کرده و نسبت $\frac{V_۲}{I_۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$KCL\,(A): \frac{V_۲}{۱۰}+\frac{V_۲}{۲۰}+\frac{I_۱}{۵}=I_۱ \Rightarrow ۲V_۲+V_۲+۴I_۱=۲۰I_۱$$

$$۳V_۲=۱۶I_۱ \rightarrow \frac{V_۲}{I_۱}=\frac{۱۶}{۳}$$

۱۵ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف $t_{۱۲}$ داریم:



$$t_{۱۲}=\frac{V_۱}{-I_۲}\Big|_{V_۲=۰}$$

بنابراین $V_۲$ را اتصال کوتاه کرده و این نسبت را محاسبه می‌کنیم:

$$KVL\ (۱): -۴V_۱-۵I=۰ \rightarrow I=-۰/۸\ V_۱$$

بنابراین داریم:

$$-V_۱+۶\times(-۰/۸V_۱-I_۲)=۰$$

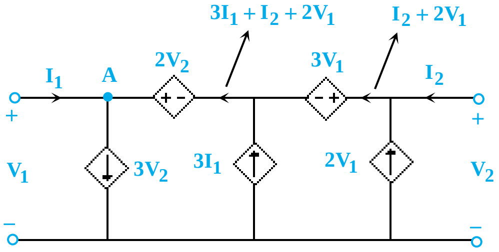
$$۵/۸\,V_۱=۶(-I_۲) \Rightarrow \frac{V_۱}{-I_۲}=\frac{۶}{۵/۸}=۱/۰۳\simeq ۱$$

۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مدار داریم:

$$Z_{۱۱}=۱+۵j+۵-۲j=۶+۳j$$

$$Z_{۲۲}=j+۳+۵-۲j=۸-j \rightarrow Z_{۱۱}+Z_{۲۲}=۱۴+۲j$$

۱۷ـ گزینه «۳» با توجه به شکل مدار داریم:



$$KCL(A): I_۱+۳I_۱+I_۲+۲V_۱=۳V_۲$$

$$\Rightarrow ۴I_۱+I_۲=۳V_۲-۲V_۱ \qquad (۱)$$

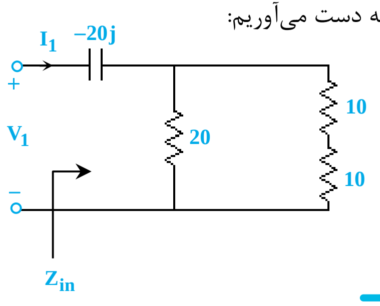
$$KVL\ (\text{حلقه‌ی بیرونی}): -V_۱+۲V_۲-۳V_۱+V_۲=۰ \Rightarrow ۴V_۱=۳V_۲ \rightarrow V_۲=\frac{۴}{۳}V_۱ \quad (۲)$$

از طرفی می‌دانیم که امپدانس دیده شده از سری‌های A,B معادل $Z_{۱۱}$ می‌باشد که برابر است با نسبت $\frac{V_۱}{I_۱}$ در شرایطی که $I_۲$ برابر صفر باشد.

بنابراین داریم:

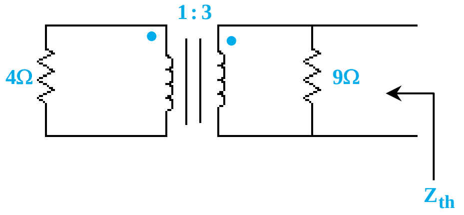
$$(۱),(۲) \quad ۴I_۱=۳\times(\frac{۴}{۳})V_۱-۲V_۱ \rightarrow \frac{V_۱}{I_۱}=۲=Z_{۱۱}$$

۱۸ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی $Z_{۱۱}$ ، $I_۲$ را برابر صفر قرار داده و امپدانس دیده شده از دو سر سمت اول را به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow Z_{in}=۲۰||۲۰-j۲۰=۱۰-j۲۰$$

۱۹ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی $Z_{۲۲}$ قطب اول را مدار باز کرده و امپدانس تونن دیده شده از دو سر قطب دوم را بدست می‌آوریم:

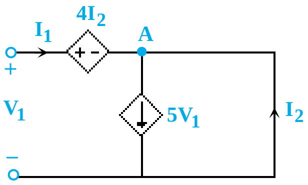


$$Z_{۲۲}=Z_{th}=۹\,||\,(۴\times(۳)^۲)=۷/۲\ \Omega$$

۲۰ـ گزینه «۱» طبق تعریف $h_{۲۱}$ داریم:

$$h_{۲۱}=\frac{I_۲}{I_۱}\Big|_{V_۲=۰}$$

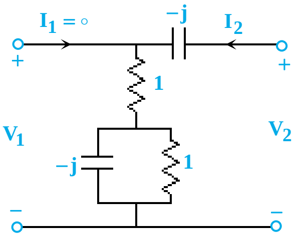
بنابراین قطب دوم را اتصال کوتاه کرده و بهره‌ی جریان را محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{aligned}&KCL\ A: I_۱+I_۲=۵V_۱\\&KVL: V_۱=۴I_۲\end{aligned}\ \Rightarrow\ I_۱+I_۲=۲۰\,I_۲\Rightarrow I_۱=۱۹I_۲$$

$$\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۱}{۱۹}$$

۲۱ـ گزینه «۱» طبق تعریف داریم:

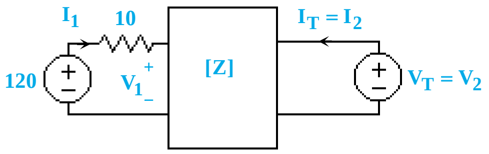


$$Z_{۱۲}=\frac{V_۱}{I_۲}\Big|_{I_۱=۰}$$

بنابراین قطب اول را مدار باز کرده و نسبت $\frac{V_۱}{I_۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$V_۱=[۱+۱\|(-j)]I_۲=(۱/۵-j۰/۵)\ I_۲\to Z_{۱۲}=۱/۵-j۰/۵$$

۲۲ـ گزینه «۱» ابتدا مدار معادل تونن دو سر بار Z_L را محاسبه می‌کنیم. با توجه به تعریف ماتریس Z داریم:



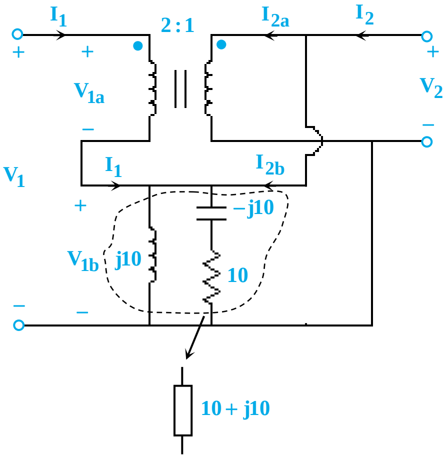
$$\begin{cases}V_۱=۴۰I_۱+۶۰I_T\\V_T=۸۰I_۱+۱۲۰I_T\\V_۱=۱۲۰-۱۰I_۱\end{cases}\Rightarrow ۱۲۰=۵۰I_۱+۶۰I_T\to I_۱=\frac{۱۲۰-۶۰I_T}{۵۰}$$

$$V_T=۲۴I_T+۱۹۲$$

بنابراین ماکزیمم توان جذب شده برابر است با:

$$P_{L,max}=\frac{V_{th}^{۲}(rms)}{۴R_{th}}=\frac{۱۹۲^{۲}}{۴\times۲۴}=۳۸۴w$$

۲۳ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مدار داریم:

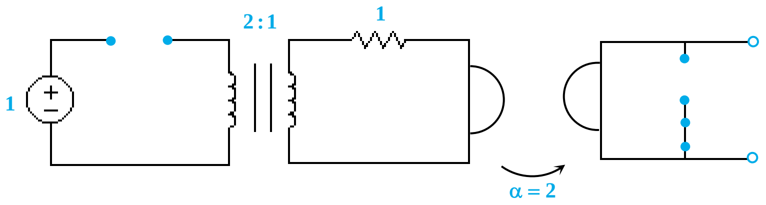


$$\begin{cases}V_{۱a}=۲V_۲\\V_{۱b}=V_۲\end{cases}\to V_۱=۳V_۲$$

$$\begin{cases}I_۲=I_{۲a}+I_{۲b}=-۲I_۱+I_{۲b}\\I_{۲b}+I_۱=\frac{V_۲}{۱۰+j۱۰}\end{cases}\to I_۲=-۳I_۱+\frac{V_۲}{۱۰+j۱۰}$$

$$\Rightarrow H=\begin{bmatrix}۰&۳\\-۳&\frac{۱}{۱۰+j۱۰}\end{bmatrix}$$

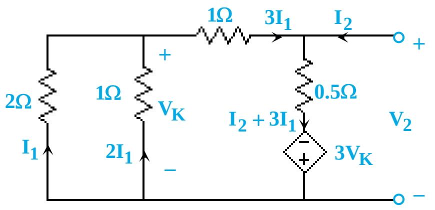
۲۴ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه در زمان بی‌نهایت خازن مدار باز شده و سلف بی‌نهایت می‌شود، بنابراین در $t=\infty$ مدار به شکل زیر خواهد بود:



از آنجا که در $t=\infty$ ولتاژ ورودی به خروجی منتقل نمی‌شود، بنابراین داریم:

$$V_o=۰$$

۲۵ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف پارامتر $g_{۱۲}$ به صورت زیر، دو سر ورودی مدار را اتصال کوتاه کرده و سپس $I_۲$ را برحسب $I_۱$ به دست می‌آوریم:



$$g_{۱۲} = \frac{I_۱}{I_۲}\Big|_{V_۱=۰}$$

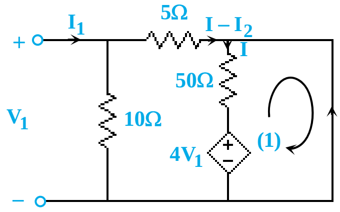
$$V_K = -۲I_۱ \qquad (۱)$$

$$V_۲ = -۲I_۱ - ۳I_۱ = -۵I_۱ \qquad (۲)$$

$$V_۲ = ۰/۵(I_۲ + ۳I_۱) - ۳V_K \xrightarrow{(۱)} V_۲ = ۰/۵I_۲ + ۷/۵I_۱ \qquad (۳)$$

$$(۲),(۳) \Rightarrow -۵I_۱ = ۰/۵I_۲ + ۷/۵I_۱ \Rightarrow -۱۲/۵I_۱ = ۰/۵I_۲ \Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = -\frac{۱}{۲۵}$$

۲۶ـ گزینه «۱» پارامتر خواسته شده همان $t_{۱۲}$ می‌باشد که برای محاسبه‌ی آن باید قطب دوم مدار اتصال کوتاه شده و نسبت $\frac{V_۲}{-I_۱}$ محاسبه شود.

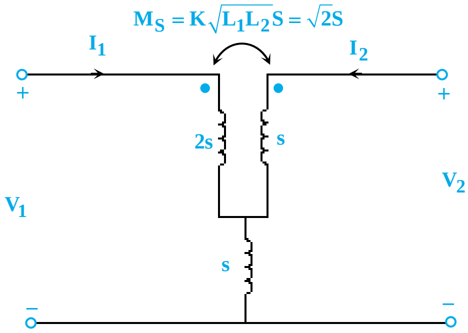


$$\text{KVL}\,(۱): ۵۰I + ۴V_۱ = ۰ \Rightarrow I = -۰/۰۸V_۱$$

$$\text{KVL}\ (\text{حلقه بیرونی}): V_۱ = ۵(I - I_۲) = -۰/۴V_۱ - ۵I_۲$$

$$\Rightarrow ۱/۴V_۱ = -۵I_۲ \Rightarrow \frac{V_۱}{-I_۲} = \frac{۲۵}{۷}\Omega$$

۲۷ـ گزینه «۱» با اعمال KVL در حلقه‌های چپ و راست مدار داریم:



$$\text{KVL}\ (\text{سمت چپ}): V_۱ = ۳sI_۱ + (\sqrt{۲}+۱)sI_۲ \qquad (۱)$$

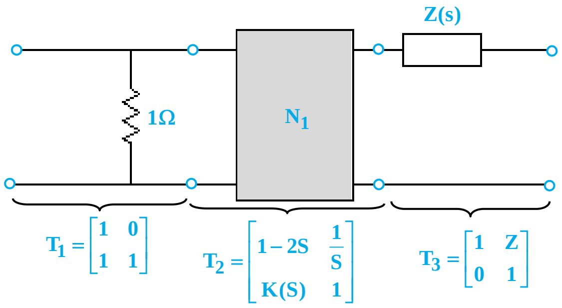
$$\text{KVL}\ (\text{سمت راست}): V_۲ = (\sqrt{۲}+۱)sI_۱ + ۲sI_۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = \frac{۳}{۱+\sqrt{۲}} + (۷\sqrt{۲}-۵)sI_۲ \\ I_۱ = \frac{۳V_۲}{(\sqrt{۲}+۱)s} + \frac{۲I_۲}{۱+\sqrt{۲}} \end{cases} \rightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱+\sqrt{۲}} & (۵-۷\sqrt{۲})s \\ \frac{۱}{(\sqrt{۲}+۱)s} & \frac{-۲}{۱+\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

۲۸ـ گزینه «۴» برای این‌که یک دوقطبی متقابل و متقارن باشد، باید دو شرط مقابل برای ماتریس انتقال آن محقق شود:

$$\det(T) = ۱ \qquad , \qquad T_{۱۱} = T_{۲۲}$$

اکنون باید با محاسبه ماتریس T چگونگی تحقق دو شرط فوق را بررسی نماییم. می‌دانیم که در شبکه‌های متوالی، ماتریس انتقال کل برابر حاصل‌ضرب ماتریس انتقال تک‌تک شبکه‌هاست. در شبکه فعلی داریم:



$$T = T_۱ \times T_۲ \times T_۳$$

قبل از محاسبه ماتریس انتقال کل، شرط تقابل دوقطبی N را بررسی می‌کنیم:

$$\det(T) = \det(T_۱ \times T_۲ \times T_۳) = \det(T_۱) \times \det(T_۲) \times \det(T_۳) = \det(\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}) \times \det(\begin{bmatrix} ۱-۲S & \frac{۱}{S} \\ K(S) & ۱ \end{bmatrix}) \times \det(\begin{bmatrix} ۱ & Z \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix})$$

$$= ۱ \times (۱-۲S-\frac{K(S)}{S}) \times ۱ = ۱-۲S-\frac{K(S)}{S} \Rightarrow \det(T) = ۱ \Rightarrow ۱-۲S-\frac{K(S)}{S} = ۱ \Rightarrow K(S) = -۲S^۲$$

با معلوم شدن مقدار $K(S)$، حال مقدار T را محاسبه می‌کنیم:

$$T=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱-۲S & \frac{۱}{S}\\ -۲S^۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & Z\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-۲S & \frac{۱}{S}\\ ۱-۲S-۲S^۲ & \frac{۱}{S}+۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & Z\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-۲S & Z(۱-۲S)+\frac{۱}{S}\\ ۱-۲S-۲S^۲ & Z(۱-۲S-۲S^۲)+۱+\frac{۱}{S}\end{bmatrix}$$

حال شرط تقارن را چک می‌کنیم:

$$T_{۱۱}=T_{۲۲}\Rightarrow ۱-۲S=Z(۱-۲S-۲S^۲)+۱+\frac{۱}{S}\Rightarrow Z(S)=\frac{۲S^۲+۱}{S(۲S^۲+۲S-۱)}$$

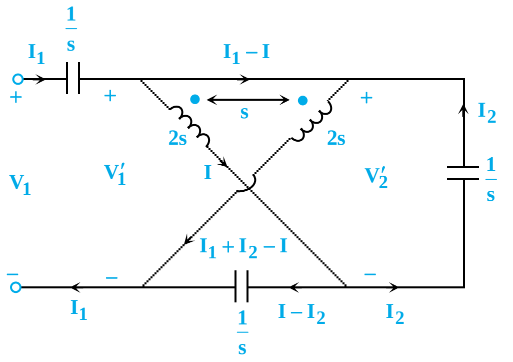
در نهایت داریم:

$$T_{۱۲}=Z(۱-۲S)+\frac{۱}{S}=\frac{(۲S^۲+۱)(۱-۲S)}{S(۲S^۲+۲S-۱)}+\frac{۱}{S}=\frac{۲S^۲-۴S^۳+۱-۲S+۲S^۲+۲S-۱}{S(۲S^۲+۲S-۱)}=\frac{۴S^۲-۴S^۳}{S(۲S^۲+۲S-۱)}=\frac{۴S(۱-S)}{۲S^۲+۲S-۱}$$

۲۹ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف $t_{۲۲}$ داریم:

$$t_{۲۲}=\frac{I_۱}{-I_۲}|_{V_۲=۰}$$

بنابراین قطب دوم مدار را اتصال کوتاه کرده و بهره‌ی جریان مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:



$$KVL:۲s(I_۱+I_۲-I)+sI=۲sI+s(I_۱+I_۲-I)+\frac{۱}{s}(I-I_۲)=V_۱'$$

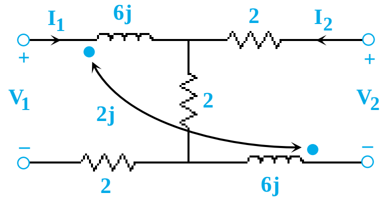
$$\Rightarrow s(I_۱+I_۲-I)=sI+\frac{۱}{s}(I-I_۲)\Rightarrow sI_۱+(s+\frac{۱}{s})I_۲=(۲s+\frac{۱}{s})I \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow sI_۱+(s+\frac{۱}{s})I_۲=-sI \qquad (۲)$$

$$KVL:V_۲'=۲sI+s(I_۱+I_۲-I)=-\frac{I_۲}{s}$$

$$(۱),(۲)\rightarrow(۲s+\frac{۱}{s})I=-sI\Rightarrow I=۰\Rightarrow sI_۱+\frac{s^۲+۱}{s}I_۲=۰\rightarrow\frac{I_۱}{-I_۲}=۱+\frac{۱}{s^۲}$$

۳۰ـ گزینه «۴» با توجه به تعریف $h_{۱۲}$ داریم:



$$h_{۱۲}=\frac{V_۱}{V_۲}|_{I_۱=۰}$$

بنابراین قطب اول را مدار باز کرده و بهره‌ی ولتاژ را محاسبه می‌کنیم:

$$V_۲=j۶I_۲-j۲I_۱+۲I_۲+۲(I_۱+I_۲)=(۴+j۶)I_۲+(۲-j۲)I_۱\xrightarrow{I_۱=۰}V_۲=(۴+j۶)I_۲$$

$$V_۱=j۶I_۱-j۲I_۲+۲(I_۱+I_۲)+۲I_۱\Rightarrow V_۱=(۴+j۶)I_۱+(۲-j۲)I_۲\xrightarrow{I_۱=۰}V_۱=(۲-j۲)I_۲$$

$$\Rightarrow\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۲-j۲}{۴+j۶}=\frac{-۱-j۵}{۱۳}$$

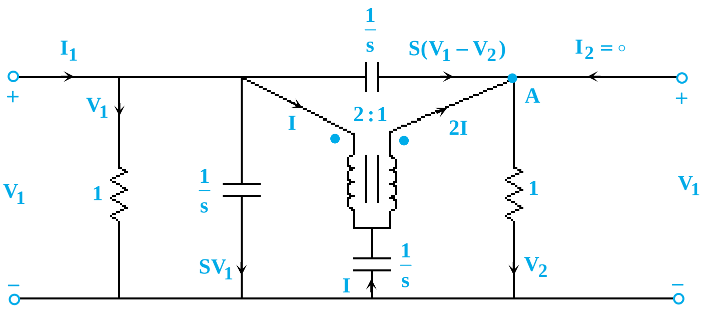
۳۱ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی $Z_{۱۱}$، قطب دوم مدار تست قبل را مدار باز کرده و امپدانس دیده شده از دو سر قطب اول را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_{۱۱}=۲+۲+j۶=۴+j۶$$

۳۲ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف $t_{۱۱}$ داریم:

$$t_{۱۱}=\frac{V_۱}{V_۲}|I_۲=۰$$

بنابراین قطب دوم مدار را باز کرده و بهره‌ی ولتاژ مورد نظر را بدست می‌آوریم:



$$\text{KCL}(A): s(V_۱ - V_۲) + ۲I = V_۲ \Rightarrow sV_۱ + ۲I = (s+۱)V_۲ \qquad (۱)$$

نسبت تبدیل ترانس: $۲ \rightarrow (V_۱ + \frac{I}{s}) = ۲(V_۲ + \frac{I}{s}) \Rightarrow V_۱ - \frac{I}{s} = ۲V_۲ \qquad (۲)$

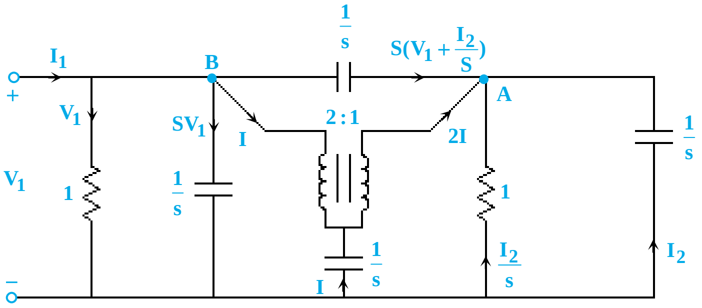
$$(۱),(۲) \rightarrow sV_۱ + ۲s \times (V_۱ - ۲V_۲) = (s+۱)V_۲$$

$$\Rightarrow ۳sV_۱ = (۵s+۱)V_۲ \Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۵s+۱}{۳s} = \frac{۵}{۳} + \frac{۱}{۳s}$$

۳۳ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف $t_{۲۲}$ داریم:

$$t_{۲۲} = \frac{I_۱}{-I_۲}\Big|_{V_۲=۰}$$

بنابراین قطب دوم مدار را اتصال کوتاه کرده و بهره‌ی جریان را محاسبه می‌کنیم:



$$\text{KCL}(A): s(V_۱ + \frac{I_۲}{s}) + ۲I + I_۲ + \frac{I_۲}{s} = ۰ \Rightarrow sV_۱ + I_۲(۲ + \frac{۱}{s}) = -۲I \qquad (۱)$$

$$\text{KCL}(B): I_۱ = V_۱ + sV_۱ + I + s(V_۱ + \frac{I_۲}{s}) \Rightarrow I_۱ = V_۱(۲s+۱) + I_۲ + I \qquad (۲)$$

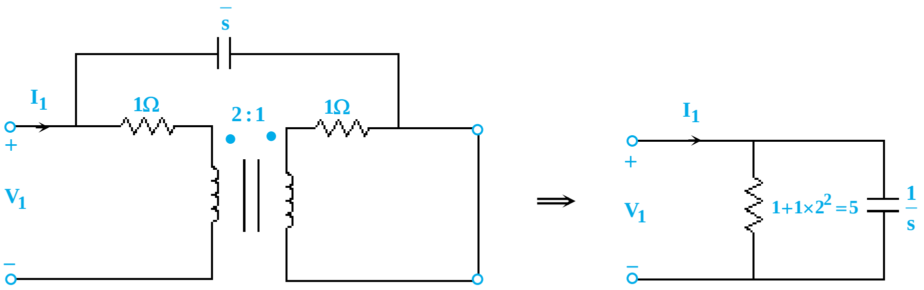
نسبت تبدیل ترانس: $۲ \Rightarrow V_۱ + \frac{I}{s} = ۲ \times (\frac{I}{s} - \frac{I_۲}{s}) \Rightarrow sV_۱ + ۲I_۲ = I \qquad (۳)$

$$(۱),(۲),(۳) \rightarrow I_۱ = -(۳ + \frac{۳}{s} + \frac{۱}{۳s^۲})\, I_۲ \rightarrow t_{۲۲} = ۳ + \frac{۳}{s} + \frac{۱}{۳s^۲}$$

۳۴ـ گزینه «۳» با توجه به تعریف $y_{۱۱}$ داریم:

$$y_{۱۱} = \frac{I_۱}{V_۱}\Big|_{V_۲=۰}$$

بنابراین قطب دوم مدار را اتصال کوتاه کرده و نسبت $\frac{I_۱}{V_۱}$ را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow V_۱ = \frac{\frac{۵}{s}}{۵ + \frac{۱}{s}} I_۱ = \frac{۵}{۵s+۱} I_۱ \Rightarrow I_۱ = s + \frac{۱}{۵} = s + ۰/۲$$

۳۵ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه اگر دوقطبی فاقد منبع وابسته باشد، دوقطبی متقابل و یا هم‌پاسخ است بنابراین حتماً گزینه‌ی ۱ پاسخ سؤال می‌باشد.

۳۶ـ گزینه «۴» با توجه به مدار داریم:

$$\begin{cases} I_۱ = ۰ \\ V_۲ = ۲V_۱ \end{cases} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} , \ G = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

از آنجا که نمی‌توانیم $I_۲$ را برحسب $V_۱$ و $V_۲$ بنویسیم، بنابراین ماتریس Y تعریف نمی‌شود.

از آنجا که نمی‌توانیم $V_۱$ و $V_۲$ را برحسب $I_۱$ و $I_۲$ بنویسیم، بنابراین ماتریس Z تعریف نمی‌شود.

از آنجا که نمی‌توانیم $I_۲$ را برحسب $I_۱$ و $V_۲$ بنویسیم، بنابراین ماتریس H تعریف نمی‌شود.

۳۷ـ گزینه «۱» با توجه به مدار داریم:

$$V_۱ = ۰ , \ V_۲ = ۳I_۱ \ \rightarrow Z = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$$

از آنجا که نمی‌توان $I_۲$ را برحسب $V_۱$ و $V_۲$ نوشت بنابراین ماتریس Y وجود ندارد.

از آنجا که نمی‌توان $I_۲$ را برحسب $V_۲$ و $I_۱$ نوشت بنابراین ماتریس H وجود ندارد.

از آنجا که نمی‌توان $I_۱$ را برحسب $V_۱$ و $I_۲$ نوشت بنابراین ماتریس G وجود ندارد.

۳۸ـ گزینه «۲» با توجه به مدار داریم:

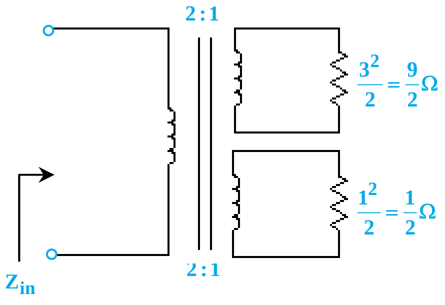
$$I_۱ = ۰ , \ I_۲ = -۴V_۱ \ \rightarrow y = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۴} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با مشاهده‌ی گزینه‌ها به راحتی می‌توان به گزینه‌ی ۲ رسید.

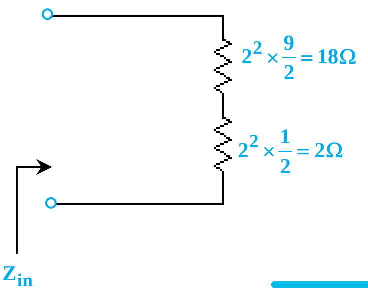
۳۹ـ گزینه «۴» با توجه به مدار داریم:

$$V_۱ = ۰ , \ V_۲ = ۶I_۱ \ \rightarrow Z = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۶ & ۰ \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۶} & ۰ \end{bmatrix}$$

۴۰ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه در ژیراتور امپدانس ورودی برابر است با $\frac{\alpha^۲}{Z_{out}}$، مقاومت‌های موجود در سمت راست ژیراتور را به سمت چپ انتقال می‌دهیم. بنابراین داریم:



حال مقاومت‌ها را به سمت اولیه‌ی ترانس انتقال می‌دهیم:

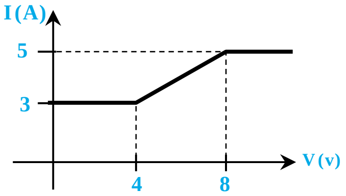


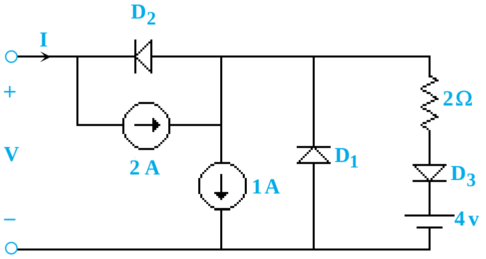
$$\Rightarrow Z_{in} = ۲ + ۱۸ = ۲۰\Omega$$

فصل دوازدهم

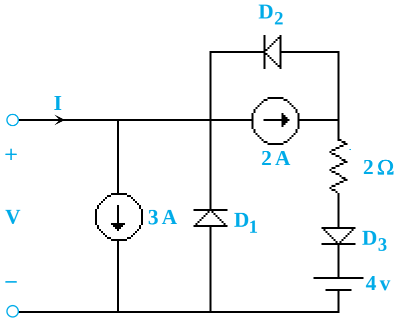
«مدارهای غیرخطی، تقویت‌کننده عملیاتی و انتگرال کانولوشن»

مثال ۱: کدامیک از مدارهای زیر دارای منحنی $(I - V)$ به صورت زیر است؟

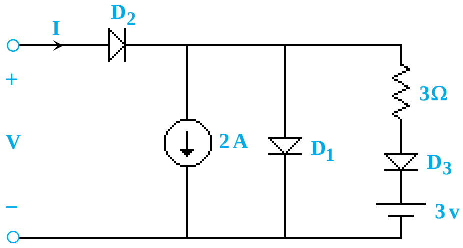




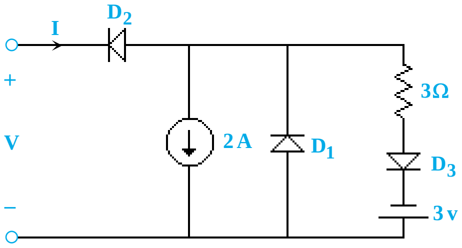
(۱)



(۲)

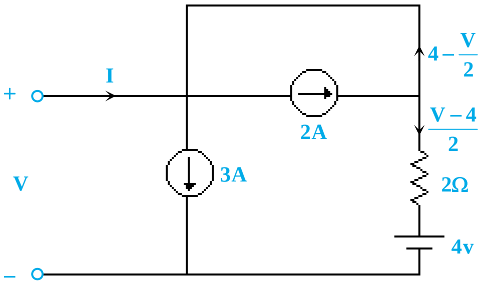


(۳)



(۴)

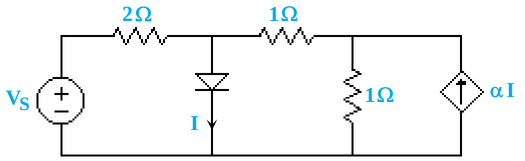
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دقت در گزینه‌های (۳) و (۴) دیده می‌شود که مقاومت موجود در آنها برابر ۳Ω است. پس در این حالت در صورت تأثیر مقاومت ۳Ω مذکور در منحنی $(I - V)$، باید شیب نمودار برابر $\frac{۱}{۳}$ شود. ولی با توجه به نمودار $(I - V)$ در صورت سؤال، شیب مذکور برابر $\frac{۱}{۲}$ است. لذا این گزینه‌ها غلط هستند. در گزینه (۱)، اگر $V = ۰$ فرض شود، دیود $D_۲$ خاموش است و حداکثر جریان در این حالت برابر ۲A است. ولی در نمودار $(I - V)$، اگر $V = ۰$ باشد، مقدار $I = ۳A$ است. لذا این گزینه نیز غلط است. بنابراین تنها گزینه باقی‌مانده، گزینه (۲) است و این گزینه پاسخ تست می‌باشد.

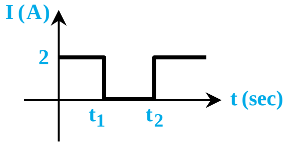


برای کامل شدن حل سؤال به تحلیل مدار گزینه (۲) می‌پردازیم. در صورتی که V بین ۰ تا ۴ ولت باشد، دیودهای $D_۳$ و $D_۱$ خاموش و دیود $D_۲$ روشن است. در این صورت جریان I برابر ۳A است. در این حالت منبع جریان ۲A در دیود $D_۲$ می‌چرخد. درباره $۴ < V < ۸$، دیود $D_۱$ خاموش و دیودهای $D_۲$ و $D_۳$ روشن هستند. در این حالت مدار به شکل روبرو عمل کرده و رابطه $I = \frac{V}{۲} + ۱$ برقرار است.

در ادامه اگر $V > ۸$ باشد، دیودهای $D_۱$ و $D_۲$ خاموش و دیود $D_۳$ روشن است. در این حالت جریان I برابر با جمع جریان‌های منابع جریان ۲A و ۳A یعنی ۵A خواهد بود.

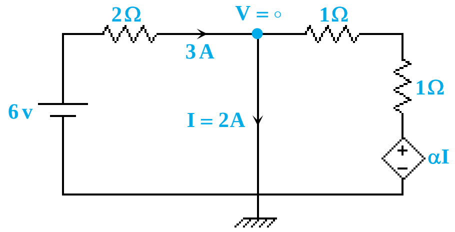
مثال ۲: در مدار زیر منبع ولتاژ V_S به صورت پالس مربعی با پیک ۶ ولت است. حال مقدار α کدام باشد تا نمودار جریان I به صورت زیر باشد؟





۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۲-

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای عبور جریان I به اندازه ۲A، در حالتی که $V_S > ۰$ باشد، باید دیود هدایت کرده و اتصال کوتاه شود. حال با تبدیل منابع در سمت راست مدار و اتصال کوتاه کردن دیود، در گره بالای مدار KCL می‌زنیم.

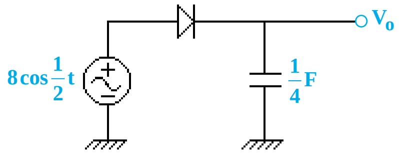


$$۳ = I + \frac{۰ - \alpha I}{۲}$$

$$I = ۲A \Rightarrow ۳ = ۲ + \frac{-۲\alpha}{۲} \Rightarrow \alpha = -۱$$

دقت کنید که به ازای $V_S < ۰$ دیود هدایت نمی‌کند و جریان I صفر است.

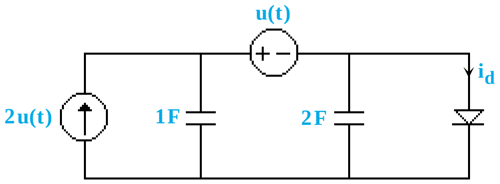
مثال ۳: در مدار زیر معادله ولتاژ V_o کدام است؟



۱) ۸
۲) −۸
۳) $۸\sin\frac{۱}{۲}t$
۴) $۴\sin\frac{۱}{۲}t$

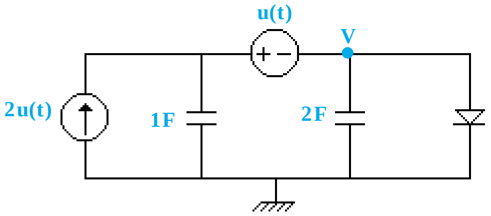
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» خازن در ابتدای شروع کارکرد مدار بصورت آنی به اندازه پیک ولتاژ ورودی یعنی ۸v شارژ می‌شود و پس از رسیدن خازن به حداکثر ولتاژ، دیود به علت ولتاژ منفی دو سرش، خاموش شده و هدایتی نخواهد داشت. لذا ولتاژ روی خازن ثابت می‌ماند و برابر ۸ ولت DC خواهد بود.

مثال ۴: در مدار شکل زیر ولتاژ اولیه‌ی خازن‌ها صفر و دیود ایده‌آل است. چند ثانیه بعد دیود روشن می‌شود؟

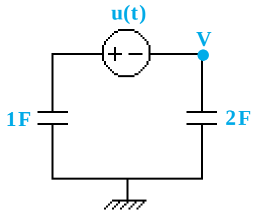


۱) ۰/۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۸
۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

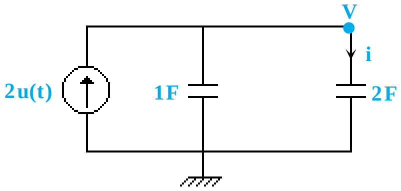


دیود زمانی روشن می‌شود که ولتاژ دو سرش یعنی ولتاژ V در مدار روبرو بزرگتر از صفر شود. بنابراین باید ولتاژ V را محاسبه کنیم که برای این کار از جمع آثار استفاده می‌کنیم.



ابتدا اثر منبع ولتاژ را در نظر گرفته و ولتاژ V را با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ روی خازن‌ها محاسبه می‌کنیم.

$$V = -\frac{۱}{۲+۱} \times u(t) = -\frac{۱}{۳}u(t)$$



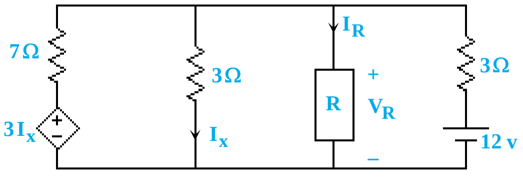
حال اثر منبع جریان را در نظر می‌گیریم:

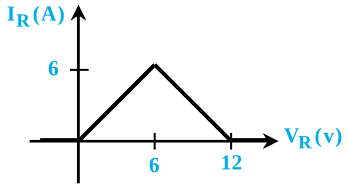
$$i = \frac{۲}{۳} \times ۲u(t) = \frac{۴}{۳}u(t) \Rightarrow V = \frac{۱}{C}\int idt = \frac{۲}{۳}t\,u(t)$$

در نهایت داریم:

$$V = \frac{۲}{۳}tu(t) - \frac{۱}{۳}u(t) > ۰ \Rightarrow t > ۰/۵s$$

مثال ۵: منحنی مشخصه یک مقاومت غیرخطی به صورت زیر ترسیم شده است. در این مدار مقدار جریان I_R کدام است؟



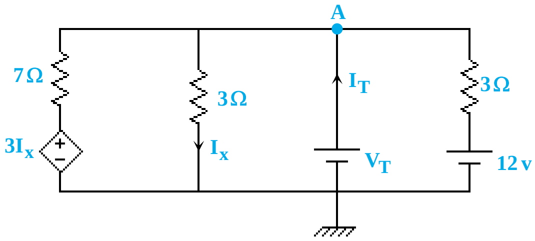


۱) ۲/۴A
۲) ۳/۴A
۳) ۴/۳A
۴) ۶/۲A

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا از دو سر مقاومت غیرخطی، مدار معادل تونن دیده می‌شود. برای این منظور در دو نقطه مذکور به مدار، V_T اعمال شده و جریان I_T اندازه‌گیری می‌شود. با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$I_T = I_x + \frac{V_T - ۱۲}{۳} + \frac{V_T - ۳I_x}{۷} \quad (۱) \qquad \text{و} \qquad I_x = \frac{V_T}{۳} \quad (۲)$$

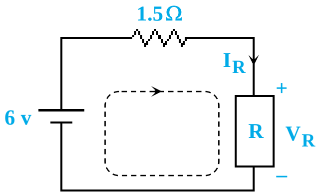
با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:



$$I_T = \frac{V_T}{۳} + \frac{V_T - ۱۲}{۳} + \frac{V_T - ۳(\frac{V_T}{۳})}{۷}$$

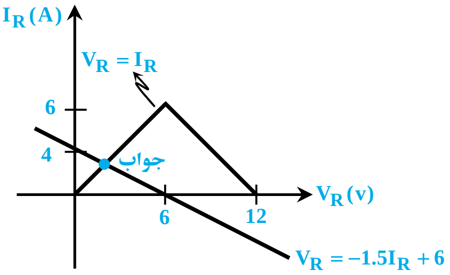
$$\Rightarrow V_T = ۱/۵I_T + ۶ \Rightarrow \begin{cases} R_{th} = ۱/۵\Omega \\ V_{th} = ۶\,v \end{cases}$$

با معادل‌گذاری مدار معادل تونن از دو سر المان غیرخطی، در حلقه مدار، KVL می‌زنیم.



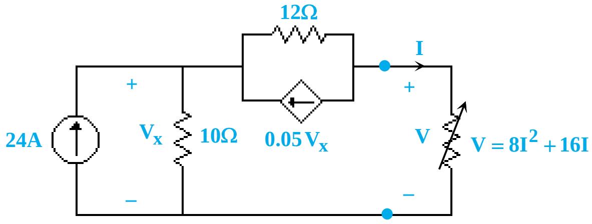
$$V_R = -۱/۵I_R + ۶ \qquad (۳)$$

با ترسیم معادله (۳) در دستگاه مختصات $(I_R - V_R)$ مربوط به المان غیرخطی داریم:



$$\begin{cases} V_R = I_R \\ V_R = -۱/۵I_R + ۶ \end{cases} \Rightarrow I_R = -۱/۵I_R + ۶ \Rightarrow \mathbf{I_R = \frac{۶}{۲/۵} = ۲/۴A}$$

مثال ۶: در مدار مقابل جریان I برحسب آمپر کدام است؟



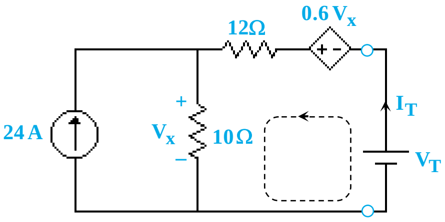
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا از دو سر المان غیرخطی، مدار معادل تونن دیده می‌شود. با تبدیل منابع در بالای مدار و نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:



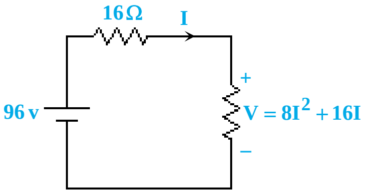
$$V_T = -۰/۶V_x + ۱۲I_T + V_x \qquad (۱)$$

$$V_x = (۲۴ + I_T) \times ۱۰ \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow V_T = ۰/۴ \times (۲۴ + I_T) \times ۱۰ + ۱۲I_T \Rightarrow V_T = ۱۶I_T + ۹۶ \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R_{th} = ۱۶\Omega} \\ \mathbf{V_{th} = ۹۶\,v} \end{cases}$$

با جایگذاری مدار معادل تونن و نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

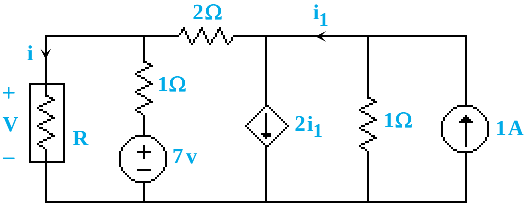


$$V = -۱۶I + ۹۶$$

با جایگذاری معادله مقاومت غیرخطی در رابطه بالا داریم:

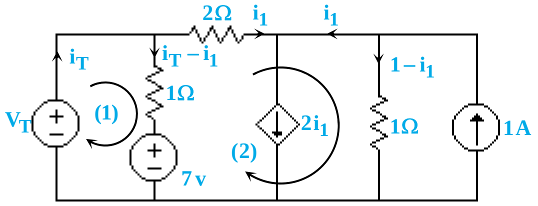
$$۸I^۲ + ۱۶I = -۱۶I + ۹۶ \Rightarrow ۸I^۲ + ۳۲I - ۹۶ = ۰ \Rightarrow \mathbf{I = ۲A}$$

مثال ۷: اگر در مدار شکل زیر مقاومت R غیرخطی با مشخصه‌ی $i = ۲(V^۲ - V)$ باشد، ولتاژ V برحسب ولت کدام است؟



۱) ۲
۲) −۲
۳) ±۲
۴) ±۴

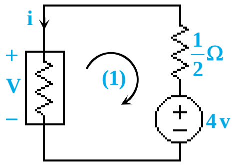
☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا مدار معادل تونن را از دو سر مقاومت به دست می‌آوریم. بدین منظور جریان تمام شاخه‌ها را مطابق شکل زیر مشخص می‌کنیم؛ حال داریم:



$$KVL\ \ (۲):۲i_۱ + ۱\times(۱-i_۱) - ۷ - ۱\times(i_T - i_۱) = ۰$$

$$\Rightarrow i_۱ = ۳ + \frac{i_T}{۲} \qquad (۱)$$

$$KVL\ \ (۱):V_T = ۱\times(i_T - i_۱) + ۷ \xrightarrow{(۱)} V_T = \frac{i_T}{۲} + ۴$$



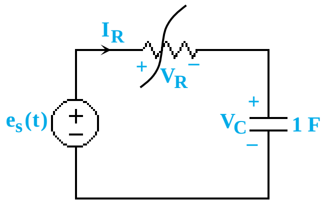
حال با قرار دادن مقاومت غیرخطی در دو سر مدار معادل داریم:

$$i = ۲(V^۲ - V)$$

با نوشتن رابطه KVL در حلقه‌ی (۱) داریم:

$$V = ۴ - \frac{i}{۲} = \frac{-۲}{۲}(V^۲ - V) + ۴ \ \Rightarrow\ V^۲ - ۴ = ۰ \ \Rightarrow\ V = \pm ۲v$$

مثال ۸: یک مقاومت غیرخطی با مشخصه $I_R = ۱۰^{-۳}\ V_R^۳$ به طور سری با یک خازن یک فارادی قرار گرفته است. پس از چه مدت زمان ولتاژ خازن به ۵ ولت می‌رسد؟ (خازن در ابتدا بدون ولتاژ بوده است. منبع ولتاژ $e_s(t) = ۱۰u(t)$ است.)



۱) $t = ۱۰s$
۲) $t = ۱۵s$
۳) $t = ۲۰s$
۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با نوشتن KVL در مدار داریم:

$$e_s(t) = V_C + V_R \ \Rightarrow\ ۱۰ = V_C + V_R \qquad (۱)$$

$$I_R = I_C = C\frac{dV_C}{dt} \ \Rightarrow\ I_R = ۱۰^{-۳}\ V_R^۳ = \frac{dV_C}{dt}$$

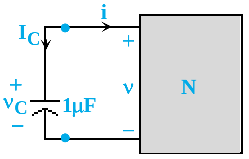
با جایگذاری V_R بدست آمده از رابطه (۱) داریم:

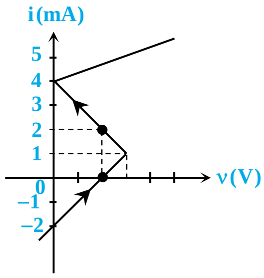
$$V_R = ۱۰ - V_C \ \Rightarrow\ ۱۰^{-۳}(۱۰ - V_C)^۳ = \frac{dV_C}{dt} \ \Rightarrow\ \frac{dV_C}{۱۰^{-۳}(۱۰ - V_C)^۳} = dt$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا در بازه ولتاژی ۰ تا ۵ ولت داریم:

$$\int_۰^{V_C} \frac{dV_C}{۱۰^{-۳}(۱۰ - V_C)^۳} = \int_۰^t dt \ \Rightarrow\ \left.\frac{۵۰۰}{(۱۰ - V_C)^۲}\right|_۰^۵ = t \ \Rightarrow\ t = \frac{۵۰۰}{۲۵} - \frac{۵۰۰}{۱۰۰} = \mathbf{۱۵sec}$$

مثال ۹: با توجه به مدار شکل زیر، در صورتی که داشته باشیم $i_C(۰) = -۲mA$ و $V(۰) = ۲v$ مدت زمانی که طول می‌کشد تا ولتاژ دو سر خازن صفر شود، چند میکروثانیه است و آیا این نقطه یک نقطه‌ی کار پایدار می‌تواند باشد؟ (نمودار $i - v$ رسم شده مربوط به دو قطبی N می‌باشد.)

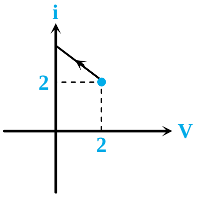




۱) Ln۲ ، خیر
۲) Ln۴ ، بله
۳) Ln۲ ، بله
۴) Ln۴ ، خیر

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به نمودار $i-v$ و شرایط اولیه داریم: $i(۰)=-i_C(۰)=۲mA\ ,\ V(۰)=۲v$

در این حالت جریان i مثبت است، یعنی خازن در حال تخلیه می‌باشد. بنابراین ولتاژ خازن رو به کاهش می‌رود؛ به این دلیل روی منحنی نشان داده شده از نقطه‌ی $(۲,۲)$ به نقطه‌ی $(۰,۴)$ خواهیم رفت. لذا داریم:



$$i=-V+۴\ (\text{معادله‌ی مسیر})$$

$$C\frac{dV_C}{dt}=i_C\ \Rightarrow ۱۰^{-۶}\frac{dV}{dt}=-i=V-۴$$

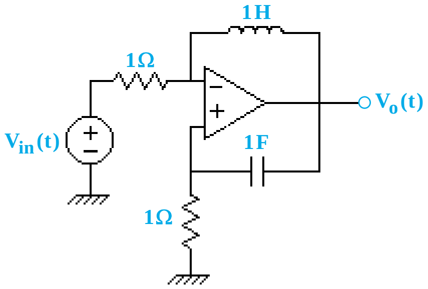
$$\Rightarrow\frac{dV}{dt}-۱۰^{۶}V=-۴\times۱۰^{۶}\Rightarrow V(t)=-۲e^{۱۰^{۶}t}+۴$$

برای به‌دست آوردن زمان صفر شدن ولتاژ کافی است مقدار $V(t)$ را برابر با صفر قراردهیم:

$$V(t)=۰\ \rightarrow\ -۲e^{۱۰^{۶}t}+۴=۰\ \rightarrow\ e^{۱۰^{۶}t}=۲\ \rightarrow\ t=Ln۲\times۱۰^{-۶}=Ln۲(\mu s)$$

این نقطه یک نقطه‌ی کار پایدار نیست، زیرا در این نقطه مقدار جریان i مثبت است، بنابراین ولتاژ باید کاهش داشته باشد؛ به همین دلیل در این نقطه یک پرش جریان خواهیم داشت.

مثال۱۰: تابع انتقال $\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ در مدار زیر کدام است؟



۱) $\frac{S}{S-۱}$

۲) $\frac{S}{S+۱}$

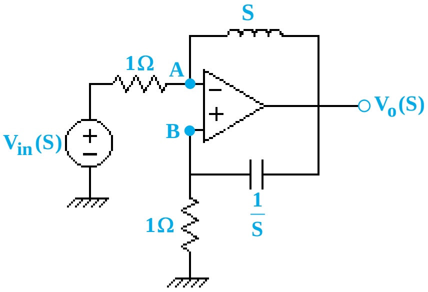
۳) $\frac{۱}{S-۱}$

۴) $\frac{۱}{S+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و با توجه به برابری ولتاژ پایه‌های ورودی مثبت و منفی در آپ‌امپ (به علت وجود فیدبک) در گره A، KCL می‌زنیم.

$$\frac{V_A-V_{in}(S)}{۱}+\frac{V_A-V_o(S)}{S}=۰\ \Rightarrow\ V_A=\frac{V_{in}(S)\times S+V_o(S)\times۱}{۱+S}\qquad(۱)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

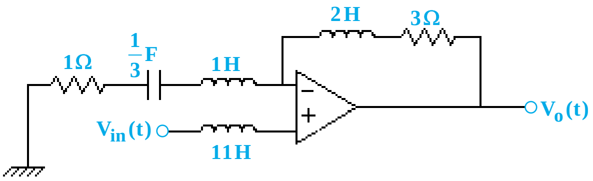


$$\frac{V_B-V_o(S)}{\frac{۱}{S}}+\frac{V_B}{۱}=۰\ \Rightarrow\ V_B=\frac{SV_o(S)}{۱+S}\qquad(۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) و با توجه به برابری $V_A=V_B$ داریم:

$$\frac{SV_o(S)}{۱+S}=\frac{SV_{in}(S)+V_o(S)}{۱+S}\ \Rightarrow\ V_o(S)[S-۱]=SV_{in}(S)\ \Rightarrow\ \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}=\frac{S}{S-۱}$$

مثال۱۱: در مدار زیر قطب‌های تابع انتقال $\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}\pm۰/۳۶j$

۲) $-\frac{۱}{۲}\pm۱/۶۵j$

۳) $-۱\pm۰/۳۶j$

۴) $-۱\pm۱/۶۵j$

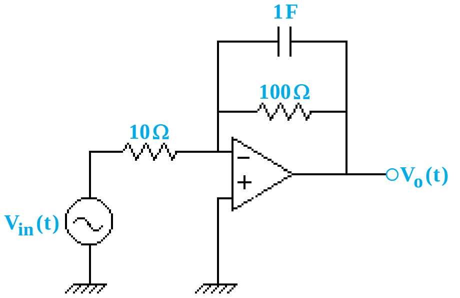
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه مدار یک تقویت‌کننده مثبت‌ساز است، مطابق با فرمول تابع انتقال این تقویت‌کننده داریم:

$$V_o(S)=V_{in}(S)[۱+\frac{۲S+۳}{۱+\frac{۳}{S}+S}]\ \Rightarrow\ \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}=\frac{۱+\frac{۳}{S}+S+۲S+۳}{۱+\frac{۳}{S}+S}\ \Rightarrow\ \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}=\frac{S+۳+S^{۲}+۲S^{۲}+۳S}{S+۳+S^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)} = \frac{۳S^۲+۴S+۳}{S^۲+S+۳} \Rightarrow S^۲+S+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱ = -\frac{۱}{۲} + j۱/۶۵ \\ S_۲ = -\frac{۱}{۲} - j۱/۶۵ \end{cases}$$

دقت شود که جریان سلف $۱۱H$ صفر بوده و بدون تأثیر می‌باشد.

مثال ۱۲: فرکانس طبیعی فیلتر پایین‌گذر روبرو کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۱۰}$

۲) -۱۰۰

۳) $-\frac{۱}{۱۰۰}$

۴) -۱۰

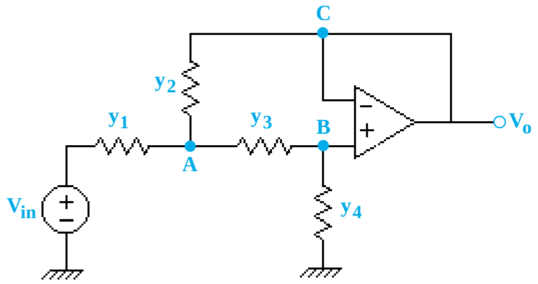
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه تقویت‌کننده از نوع منفی‌ساز است، با استفاده از فرمول تابع تبدیل در این حالت داریم:

$$\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)} = \frac{-(\frac{۱}{S}\|۱۰۰)}{۱۰} = \frac{-\frac{\frac{۱۰۰}{S}}{\frac{۱}{S}+۱۰۰}}{۱۰} \Rightarrow \frac{V_o(S)}{V_{in}(S)} = \frac{-\frac{۱۰}{S}}{\frac{۱}{S}+۱۰۰} = \frac{-۱۰}{۱۰۰S+۱} \Rightarrow H(S) = \frac{-۱۰}{۱۰۰S+۱}$$

با صفر قرار دادن مخرج $H(S)$، فرکانس طبیعی مدار بدست می‌آید:

$$۱۰۰S+۱=۰ \Rightarrow S = \frac{-۱}{۱۰۰}$$

مثال ۱۳: در مدار زیر تابع انتقال $\frac{V_o}{V_{in}}$ کدام است؟ (y_i ها همگی رسانایی هستند.)



۱) $\frac{y_۳y_۱}{y_۱y_۲+y_۴(y_۱+y_۲)}$

۲) $\frac{y_۱y_۲}{y_۱y_۲+y_۳(y_۱+y_۲+y_۴)}$

۳) $\frac{y_۱y_۲}{y_۱y_۲+y_۳(y_۱+y_۲)}$

۴) $\frac{y_۱y_۳}{y_۱y_۳+y_۴(y_۱+y_۲+y_۳)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$y_۱(V_A-V_{in})+y_۳(V_A-V_B)+(V_A-V_C)y_۲=۰$$

با جایگذاری رابطه $V_o=V_C=V_B$ در رابطه بالا داریم:

$$y_۱(V_A-V_{in})+y_۳(V_A-V_o)+y_۲(V_A-V_o)=۰ \Rightarrow y_۱V_{in}=(y_۱+y_۲+y_۳)V_A-(y_۲+y_۳)V_o \qquad (۱)$$

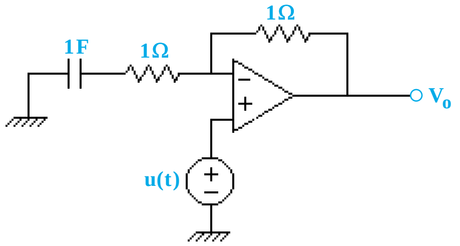
با نوشتن KCL در گره B و جایگذاری رابطه $V_o=V_C=V_B$ داریم:

$$y_۴(V_B)+(V_B-V_A)y_۳=۰ \Rightarrow y_۴(V_o)+(V_o-V_A)y_۳=۰ \Rightarrow V_A=\frac{۱}{y_۳}(y_۳+y_۴)V_o \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$y_۱V_{in}=(y_۱+y_۲+y_۳)(y_۳+y_۴)\frac{V_o}{y_۳}-(y_۲+y_۳)V_o \Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}}=\frac{y_۱y_۳}{y_۱y_۳+y_۴(y_۱+y_۲+y_۳)}$$

مثال ۱۴: پاسخ پله مدار زیر کدام است؟



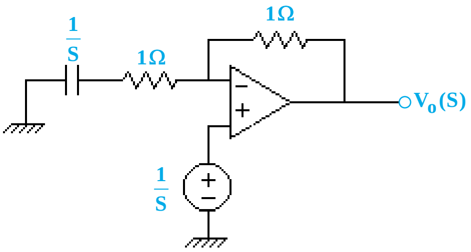
۱) $(۱-e^{-t})u(t)$

۲) $(۱+e^{-t})u(t)$

۳) $e^{-t}u(t)$

۴) $-e^{-t}u(t)$

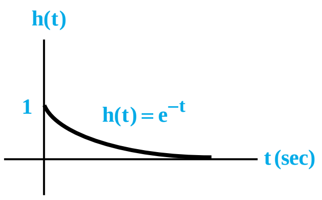
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تقویت‌کننده از نوع مثبت‌ساز بوده و با استفاده از فرمول ولتاژ خروجی این تقویت‌کننده در حوزه فرکانس داریم:

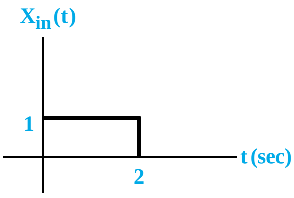


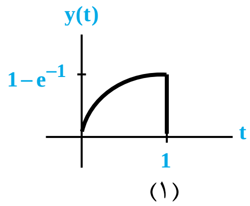
$$V_o(S)=\frac{۱}{S}\times(۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}})\ \Rightarrow\ V_o(S)=\frac{۱}{S}+\frac{۱}{S+۱}$$

$$\Rightarrow\ V_o(t)=u(t)+e^{-t}u(t)\ \Rightarrow\ \mathbf{V_o(t)=(۱+e^{-t})u(t)}$$

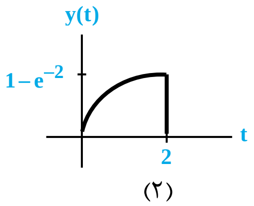
مثال ۱۵: در یک مدار، پاسخ حالت صفر با ورودی ضربه به صورت h(t) می‌باشد. در صورتی که ورودی $X_{in}(t)$ به مدار اعمال شود، پاسخ خروجی کدام است؟



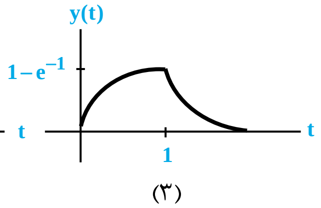




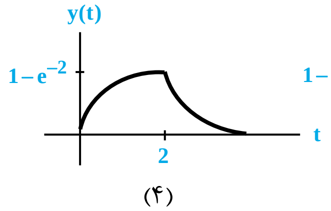
(۱)



(۲)

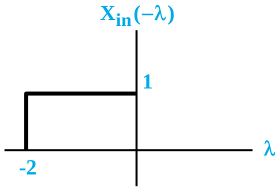


(۳)

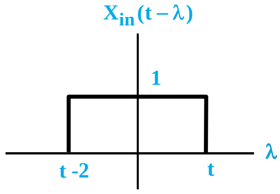


(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** برای بدست آوردن پاسخ خروجی، از انتگرال کانولوشنِ h(t) و $X_{in}(t)$ استفاده می‌کنیم. لذا داریم:

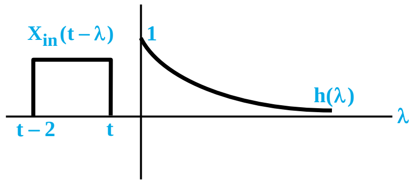


$\Rightarrow$



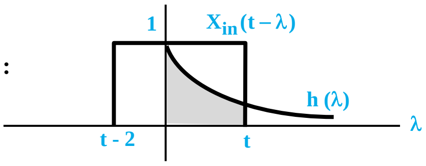
$$y(t)=h(t)*X_{in}(t)=\int_۰^t X_{in}(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda$$

t < ۰ :



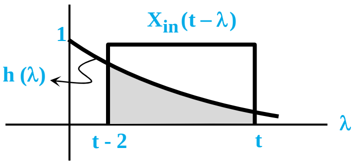
$$y(t)=۰$$

۰ ≤ t ≤ ۲ :

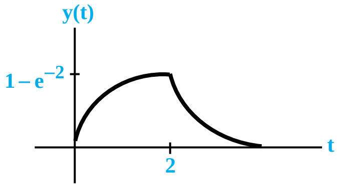


$$y(t)=\int_۰^t ۱\times e^{-\lambda}d\lambda=-e^{-\lambda}\Big|_۰^t=۱-e^{-t}$$

t ≥ ۲ :



$$y(t)=\int_{t-۲}^t ۱\times e^{-\lambda}d\lambda=-e^{-\lambda}\Big|_{t-۲}^t\ \Rightarrow\ y(t)=e^{-t}(e^۲-۱)$$



با توجه به توابع بدست آمده فرم پاسخ به صورت زیر است:

$$\Rightarrow\ \mathbf{y(t)}=\begin{cases}۰ & t<۰\\ \mathbf{۱-e^{-t}} & ۰\le t\le ۲\\ \mathbf{(e^۲-۱)e^{-t}} & t\ge ۲\end{cases}$$

روش دوم: می‌دانیم که پاسخ پله مدار برابر با انتگرال پاسخ ضربه مدار است. تابع ورودی مدار $u(t)-u(t-۲)$ می‌باشد. در نتیجه خروجی مدار برابر است با:

$$\int h(t)dt-\int h(t-۲)\,dt$$

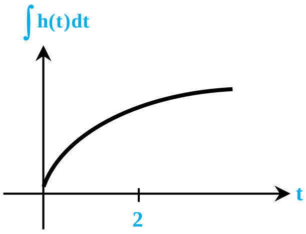
$$h(t)=e^{-t} \qquad t>۰$$

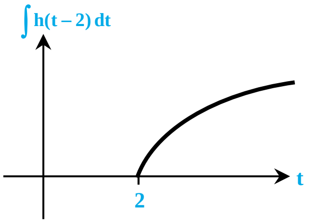
$$h(t-۲)=e^{-(t-۲)} \qquad t>۲$$

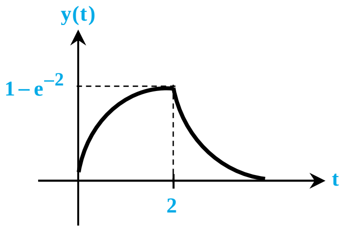
$$\int h(t)\,dt=\int_{۰}^{t}e^{-\tau}d\tau=-e^{-\tau}\Big]_{۰}^{t}=(۱-e^{-t})u(t)$$

$$\int h(t-۲)\,dt=\int_{۲}^{t}e^{-(\tau-۲)}d\tau=-e^{-(\tau-۲)}\Big]_{۲}^{t}=[۱-e^{-(t-۲)}]u(t-۲)$$

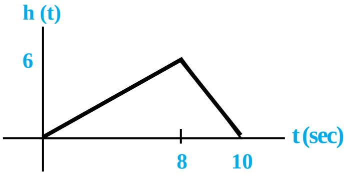
$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases}۰ & t<۰\\ ۱-e^{-t} & ۰\le t\le ۲\\ e^{-(t-۲)}-e^{-t} & t>۲\end{cases}$$

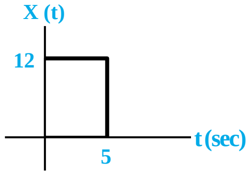






مثال ۱۶: **پاسخ ضربه یک مدار به صورت $h(t)$ تعریف شده است. در این مدار پاسخ حالت صفر خروجی به ورودی $X(t)$ کدام است؟**





۱) $y(t)=\begin{cases}۳t & ۰\le t<۵\\ ۴t^{۲}-۱۰/۵ & ۵\le t<۸\\ ۳۳t^{۲}-۲t-۱ & ۸\le t<۱۰\\ t-۳ & ۱۰\le t<۱۵\end{cases}$

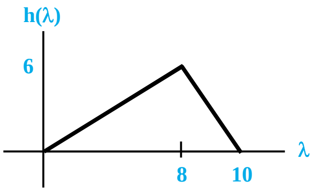
۲) $y(t)=\begin{cases}۴/۵t^{۲} & ۰\le t<۵\\ ۴۵t-۱۱۲/۵ & ۵\le t<۸\\ -۲۲/۵t^{۲}+۴۰۵t-۱۵۵۲/۵ & ۸\le t<۱۰\\ ۲۴۷/۵+۴۵t-۴/۵t^{۲} & ۱۰\le t<۱۳\\ ۱۸t^{۲}-۵۴۰t+۴۰۵۰ & ۱۳\le t<۱۵\end{cases}$

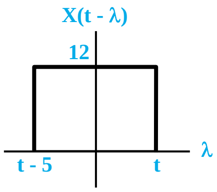
۳) $y(t)=\begin{cases}۶t & ۰\le t<۵\\ ۵t^{۲}-۱۱ & ۵\le t<۸\\ ۴۰t^{۲}-۲t+۱ & ۸\le t<۱۰\\ t-۵ & ۱۰\le t<۱۵\end{cases}$

۴) $y(t)=\begin{cases}۳t^{۲} & ۰\le t<۵\\ ۳t-۹۲/۵ & ۵\le t<۸\\ -t^{۲}-۱۰۱t+۱۶۲۰ & ۸\le t<۱۰\\ ۲۴۷/۵-۴۵t-۴/۵t^{۲} & ۱۰\le t<۱۳\\ ۳۰t^{۲}-۱۹۰t+۹۰ & ۱۳\le t<۱۵\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن پاسخ خروجی نسبت به ورودی مورد نظر، باید انتگرال کانولوشن $h(t)$ و $X(t)$ را محاسبه کرد. لذا داریم:

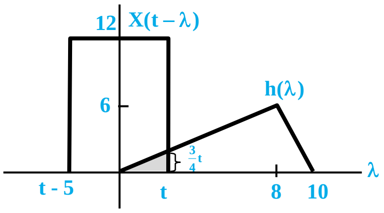
$$y(t)=h(t)*X(t)$$





$$h(t)=\begin{cases}\frac{۳}{۴}t & ۰\le t\le ۸\\ -۳t+۳۰ & ۸\le t\le ۱۰\end{cases}$$

$۰\le t<۵$:

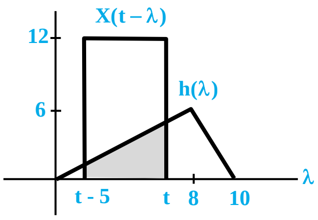


$$y(t)=\int_{۰}^{t}\frac{۳}{۴}\lambda\times ۱۲d\lambda=\frac{۹}{۲}\lambda^{۲}\Big|_{۰}^{t}=۴/۵t^{۲}$$

برای بدست آوردن انتگرال کانولوشن در این بازه زمانی به جای استفاده از انتگرال می‌توان از حاصلضرب مساحت هاشور خورده در عدد ۱۲ نیز استفاده کرد.

(از روش دوم) $y(t)=\frac{۳}{۴}t\times t\times\frac{۱}{۲}\times ۱۲=۴/۵t^{۲}$

$۵ \le t < ۸$:

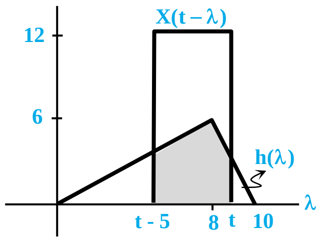


$$y(t)=\int_{t-۵}^{t}\frac{۳}{۴}\lambda\times ۱۲\,d\lambda=\left(\frac{۹}{۲}\lambda^{۲}\right)\Big|_{t-۵}^{t}=۴/۵t^{۲}-۴/۵(t-۵)^{۲}$$

$$y(t)=۴/۵t^{۲}-۴/۵t^{۲}-۴/۵\times(-۱۰t)-۴/۵\times ۲۵ \;\Rightarrow\; y(t)=۴۵t-۱۱۲/۵$$

در این قسمت نیز می‌توان انتگرال مذکور را از حاصلضرب مساحت هاشور خورده در عدد ۱۲ محاسبه کرد.

$۸ \le t < ۱۰$:



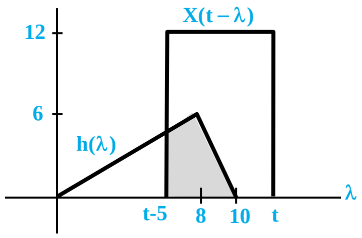
$$y(t)=\int_{t-۵}^{۸}\frac{۳}{۴}\lambda\times ۱۲\,d\lambda+\int_{۸}^{t}(-۳\lambda+۳۰)\times ۱۲\,d\lambda$$

$$\Rightarrow\; y(t)=\frac{۹}{۲}\lambda^{۲}\Big|_{t-۵}^{۸}+\left(۱۲\times\left(\frac{-۳}{۲}\lambda^{۲}+۳۰\lambda\right)\right)\Big|_{۸}^{t}$$

$$\Rightarrow\; y(t)=\frac{۹}{۲}\times ۶۴-\left[۴/۵\times(t-۵)^{۲}\right]+۱۲\left(-\frac{۳}{۲}t^{۲}+۳۰t\right)-\left[۱۲\left(-\frac{۳}{۲}\times ۶۴+۳۰\times ۸\right)\right]$$

$$\Rightarrow\; y(t)=-۲۲/۵t^{۲}+۴۰۵t-۱۵۵۲/۵$$

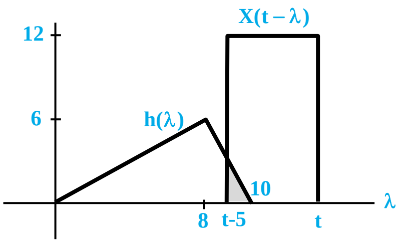
$۱۰ \le t < ۱۳$:



$$y(t)=\int_{t-۵}^{۸}\frac{۳}{۴}\lambda\times ۱۲\,d\lambda+\int_{۸}^{۱۰}(-۳\lambda+۳۰)\times ۱۲\,d\lambda$$

$$\Rightarrow\; y(t)=\frac{۹}{۲}\times ۶۴-۴/۵(t-۵)^{۲}+۷۲=۲۴۷/۵+۴۵t-۴/۵t^{۲}$$

$۱۳ \le t < ۱۵$:



$$y(t)=\int_{t-۵}^{۱۰}(-۳\lambda+۳۰)\times ۱۲\,d\lambda=\left[۱۲\left(-\frac{۳}{۲}\lambda^{۲}+۳۰\lambda\right)\right]_{t-۵}^{۱۰}$$

$$\Rightarrow\; y(t)=\left[۱۲\left(-\frac{۳}{۲}\times ۱۰^{۲}+۳۰\times ۱۰\right)\right]-\left[۱۲\left[-\frac{۳}{۲}(t-۵)^{۲}+۳۰(t-۵)\right]\right]$$

$$\Rightarrow\; y(t)=۱۸t^{۲}-۵۴۰t+۴۰۵۰$$

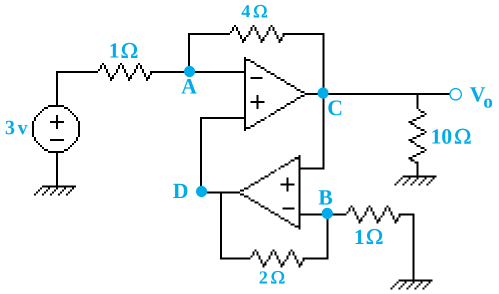
با توجه به توابع بدست آمده برای پاسخ خروجی داریم:

$$\Rightarrow\; y(t)=\begin{cases}۴/۵t^{۲} & ۰\le t<۵\\ ۴۵t-۱۱۲/۵ & ۵\le t<۸\\ -۲۲/۵t^{۲}+۴۰۵t-۱۵۵۲/۵ & ۸\le t<۱۰\\ ۲۴۷/۵+۴۵t-۴/۵t^{۲} & ۱۰\le t<۱۳\\ ۱۸t^{۲}-۵۴۰t+۴۰۵۰ & ۱۳\le t<۱۵\end{cases}$$

روش حل دیگر این تست، نوشتن $X(t)$ بصورت مجموع دو تابع پله و سپس استفاده از انتگرال پاسخ ضربه در محاسبه خروجی مدار است:

$$X(t)=۱۲(u(t)-u(t-۵)) \;\Rightarrow\; y(t)=۱۲\int h(t)\,dt-۱۲\int h(t-۵)\,dt$$

مثال ۱۷: در مدار زیر مقدار توان مصرفی مقاومت ۱۰ اهمی برحسب وات کدام است؟



۱) ۱/۳۲

۲) ۱/۰۲

۳) ۰/۰۵۱

۴) ۰/۰۷۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه ولتاژ پایه‌های مثبت و منفی در آپامپ در صورت وجود فیدبک منفی با هم برابر است، داریم:

$$(V_A=V_D)\ ,\ (V_B=V_C)$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A-۳}{۱}+\frac{V_A-V_o}{۴}=۰ \Rightarrow ۴V_A-۱۲+V_A-V_o=۰ \Rightarrow ۵V_A=V_o+۱۲ \Rightarrow V_A=\frac{V_o+۱۲}{۵} \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_B}{۱}+\frac{V_B-V_D}{۲}=۰ \Rightarrow ۳V_B=V_D \qquad (۲)$$

$$V_B=V_C=V_o\ ,\ V_D=V_A \qquad (۳)$$

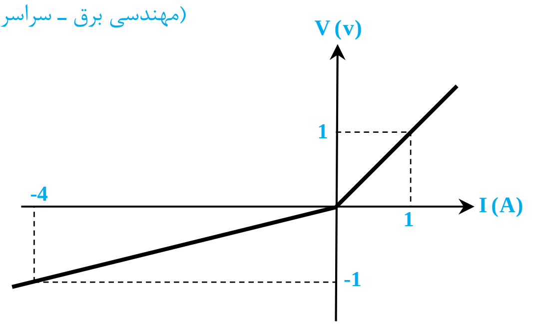
با قرار دادن روابط (۱) و (۳) در رابطه (۲) داریم:

$$۳V_o=\frac{V_o+۱۲}{۵} \Rightarrow ۱۵V_o=V_o+۱۲ \Rightarrow V_o=\frac{۱۲}{۱۴}=\frac{۶}{۷}v$$

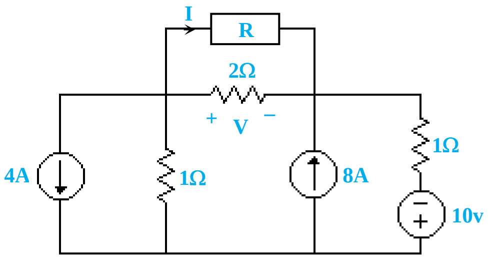
$$P_{۱۰\Omega}=\frac{V_o^۲}{۱۰}=\frac{(\frac{۶}{۷})^۲}{۱۰}=۰/۰۷۳w$$

مثال ۱۸: مشخصه $(V-I)$ مقاومت غیرخطی R در شکل (الف) داده شده است. جریان I گذرنده از این عنصر در شکل (ب) برحسب آمپر کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۱)



«الف»



«ب»

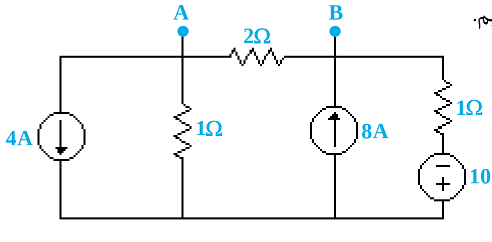
۱) −۰/۸

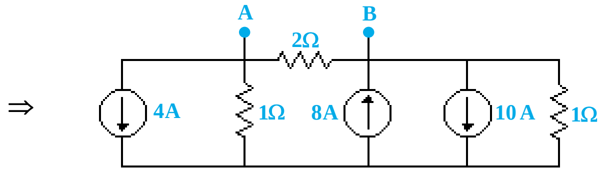
۲) −۰/۲

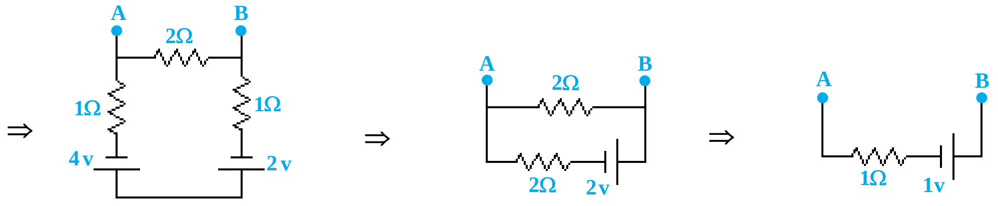
۳) ۰/۱

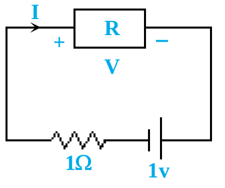
۴) ۰/۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا از دو سر مقاومت غیرخطی، مدار معادل تونن را به دست می‌آوریم.





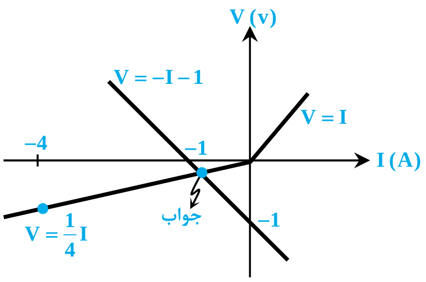




با معادل‌گذاری مدار معادل تونن بدست آمده و نوشتن KVL داریم:

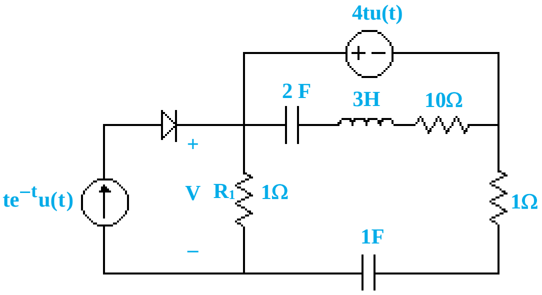
$$V+۱+I=۰ \Rightarrow V=-I-۱$$

حال از برخورد نمودار به دست آمده در بالا با منحنی داده شده در شکل سؤال در ربع سوم داریم:



$$\begin{cases} V=-I-۱ \\ V=\frac{۱}{۴}I \end{cases} \Rightarrow -I-۱=\frac{۱}{۴}I \Rightarrow \mathbf{I=-۰/۸A}$$

مثال ۱۹: **در مدار شکل زیر ولتاژ دو سر مقاومت $R_۱$ کدامیک از پاسخ‌های زیر است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)



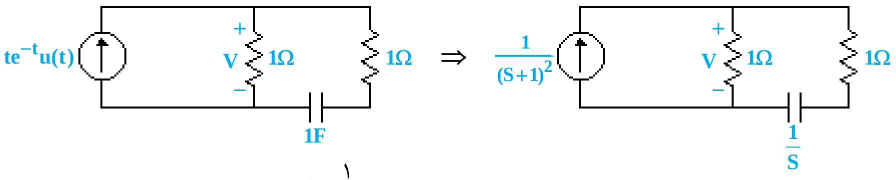
۱) $V(t)=(۴+e^{-t}+۳e^{-t/۲})u(t)$

۲) $V(t)=۲tu(t)+(e^{-t}+۳e^{-t/۲})u(t)$

۳) $V(t)=(۴-e^{-t}-۳e^{-t/۲})u(t)$

۴) هیچکدام

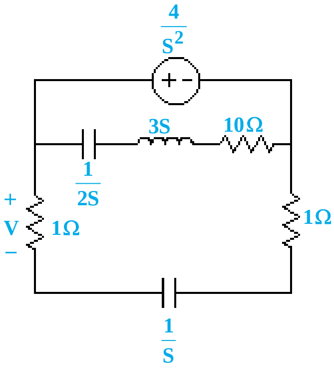
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به وجود دو منبع ولتاژ در مدار، از قانون جمع آثار استفاده می‌شود. ابتدا اثر منبع جریان $te^{-t}u(t)$ را در خروجی بررسی می‌کنیم. در این حالت منبع ولتاژ $۴tu(t)$ را اتصال کوتاه می‌کنیم. لذا شاخهٔ RLC موازی با آن حذف خواهد شد. در این حالت با توجه به جهت منبع جریان، دیود هدایت خواهد کرد. حال داریم:



$$V=\frac{۱}{(S+۱)^۲}\times[(۱+\frac{۱}{S})\,\|\,۱] \Rightarrow V=\frac{۱}{(S+۱)^۲}\times\frac{۱+\frac{۱}{S}}{۱+\frac{۱}{S}+۱}=\frac{۱}{(S+۱)^۲}\times\frac{S+۱}{۲S+۱}$$

$$\Rightarrow V=\frac{\frac{۱}{۲}}{(S+۱)(S+\frac{۱}{۲})}=\frac{-۱}{S+۱}+\frac{۱}{S+\frac{۱}{۲}} \Rightarrow V=(-e^{-t}+e^{-\frac{t}{۲}})u(t)$$

حال اثر منبع ولتاژ $۴tu(t)$ را بررسی می‌کنیم. در این حالت با توجه به مدار باز شدن منبع جریان، دیود هدایت نمی‌کند. حال با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ داریم:



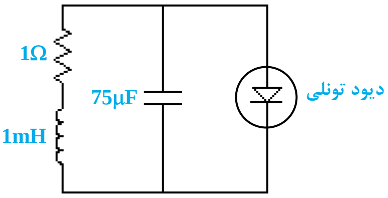
$$V=\frac{۴}{S^۲}\times\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}+۱} \Rightarrow V=\frac{۴}{S^۲}\times\frac{S}{۲S+۱}=\frac{۴}{S(۲S+۱)}$$

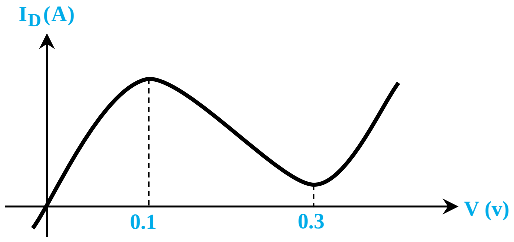
$$\Rightarrow V=\frac{۴}{S}-\frac{۴}{S+\frac{۱}{۲}} \Rightarrow V=۴u(t)-۴e^{\frac{-t}{۲}}u(t)$$

حال با استفاده از قانون جمع آثار داریم:

$$V=(-e^{-t}+e^{-\frac{t}{۲}})u(t)+۴u(t)-۴e^{-\frac{t}{۲}}u(t) \Rightarrow \mathbf{V=(۴-e^{-t}-۳e^{-\frac{t}{۲}})u(t)}$$

مثال۲۰: در مدار شکل زیر مقدار مقاومت دیود تونلی باید برابر $R=-\frac{۴۰}{۳}\Omega$ باشد تا مدار به یک نوسان‌ساز تبدیل شود. اگر معادله مشخصه دیود به صورت $I_D=۲/۵v^۳-۱/۵v^۲+۰/۲۲۵v$ باشد، با فرض اینکه شرایط سیگنال کوچک (Small Signal) برقرار است، ولتاژ نقطه کار مدار (V_D) در حالت نوسانی برحسب ولت کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)





۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۱۵

۳) ۰/۱۸

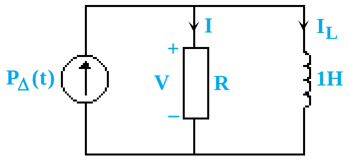
۴) ۰/۲

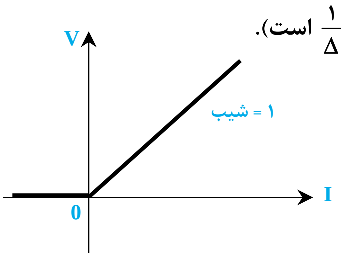
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این نکته که این دیود تونلی باید برای حالت نوسان‌سازی در ناحیه مقاومت منفی کار کند، لذا باید شیب منحنی در بازه ولتاژ ۰/۱ تا ۰/۳ برابر با $-\frac{۴۰}{۳}$ مطابق با اطلاعات مسأله باشد. برای به دست آوردن شیب منحنی در بازه ولتاژ ۰/۱ تا ۰/۳ از معادله منحنی I_D مشتق می‌گیریم:

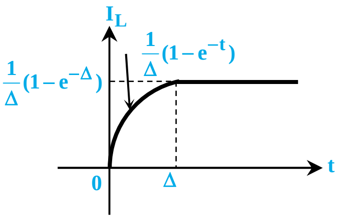
$$\frac{dI_D}{dV_D}=\frac{۱}{R}=۷/۵V^۲-۳V+۰/۲۲۵ \Rightarrow \frac{۱}{R}=۷/۵V^۲-۳V+۰/۲۲۵=\frac{-۳}{۴۰} \Rightarrow ۳۰۰V^۲-۱۲۰V+۱۲=۰ \Rightarrow \mathbf{V=۰/۲v}$$

مثال۲۱: اگر R یک مقاومت غیرخطی با مشخصه V − I نشان داده شده باشد، پاسخ پالس مدار برای I_L کدام است؟ (انرژی اولیه سلف صفر است)، ($P_\Delta(t)$ تابع پالس واحد با پهنای Δ و بلندی $\frac{۱}{\Delta}$ است).

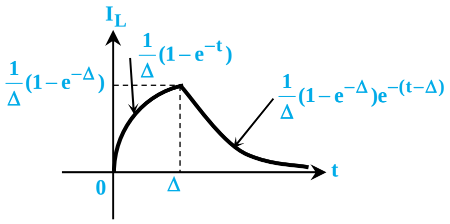
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۳)



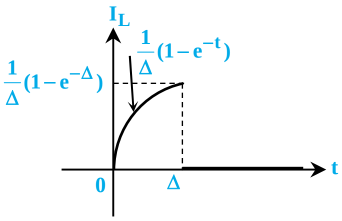




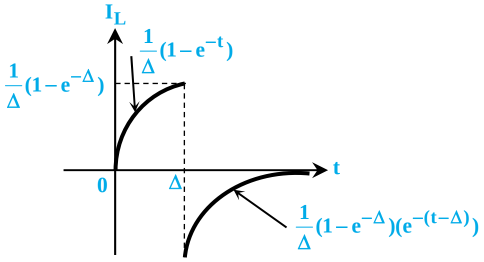
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش اول:** ابتدا مدار را در حالتی تحلیل می‌کنیم که $۰<t<\Delta$ باشد. در این حالت جریان سلف همان پاسخ یک مدار RL موازی خواهد بود، در صورتی که با یک منبع جریان تحریک شود. بنابراین داریم:

$$I_L(t)=\frac{۱}{\Delta}[۱-e^{-\frac{R}{L}t}]\ ,\ L=۱H\ ,\ R=۱\Omega\ \ (\text{به دلیل منحنی }(m=۱)) \Rightarrow I_L(t)=\frac{۱}{\Delta}[۱-e^{-t}]$$

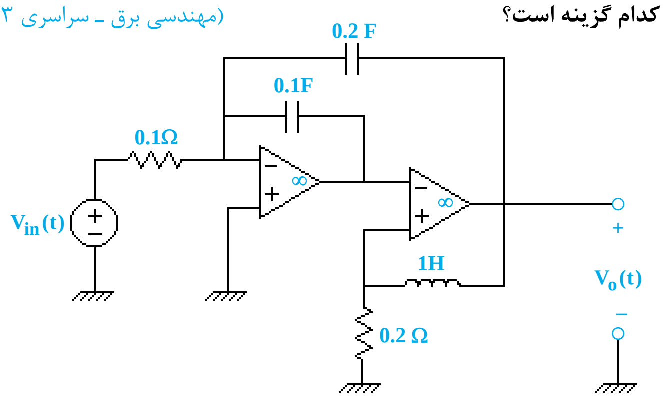
حال زمان $t=\Delta$ را در معادله بالا قرار می‌دهیم.

$$I_L(t=\Delta)=\frac{۱}{\Delta}[۱-e^{-\Delta}]$$

برای زمان $t>\Delta$ پالس $P_\Delta(t)$ صفر شده و منبع جریان سمت چپ مدار به صورت مدار باز خواهد شد. در این زمان با توجه به عدم تغییر لحظه‌ای جریان سلف، سلف به صورت منبع جریان مدل می‌شود. حال به دلیل تغییر جهت جریان عبوری از مقاومت، منحنی کارکرد آن مقاومت صفر را در این حالت نشان می‌دهد و لذا سلف اتصال کوتاه شده و جریان آن ثابت می‌ماند.

روش دوم: با توجه به اینکه فرم تغییرات I_L بعد از $t=\Delta$ در همه گزینه‌ها متفاوت است، نیازی به تحلیل مدار در $t<\Delta$ نمی‌باشد. لذا مدار را در $t>\Delta$ تحلیل می‌کنیم. با توجه به عدم وجود تابع ضربه، جریان سلف باید پیوسته باشد؛ لذا گزینه‌های (۳) و (۴) غلط هستند. همچنین با توجه به تحلیل انجام شده در بالا در $t>\Delta$ فقط گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۲۲: برای مدار زیر در شرایط اولیه صفر $\left(H(S)=\dfrac{V_o(S)}{V_{in}(S)}\right)$ برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۳)



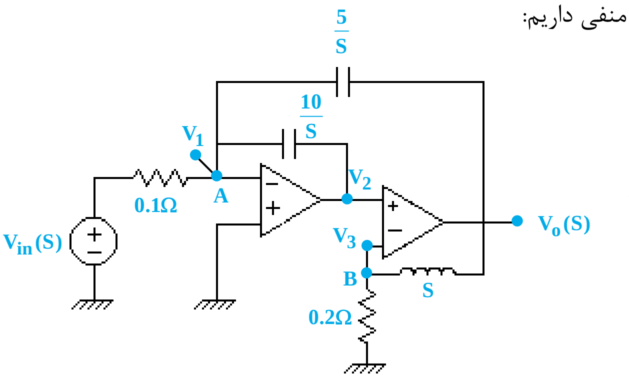
۱) $\dfrac{۱۰(۵S+۱)}{S(S+۰/۳)}$

۲) $\dfrac{S+۱}{S(S+۰/۳)}$

۳) $\dfrac{-۵(S+۱)}{S(۱۰S+۱)}$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به برابری ولتاژ پایه‌های آپامپ در حالت وجود فیدبک منفی داریم:



$$V_۱=۰\ \ ,\ \ V_۲=V_۳$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_۱-V_{in}(S)}{۰/۱}+\frac{V_۱-V_۲}{\frac{۱۰}{S}}+\frac{V_۱-V_o(S)}{\frac{۵}{S}}=۰$$

$$\Rightarrow\ \frac{-V_{in}(S)}{۰/۱}+\frac{-V_۲}{\frac{۱۰}{S}}-\frac{V_o(S)}{\frac{۵}{S}}=۰\qquad(۱)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_۳}{۰/۲}+\frac{V_۳-V_o(S)}{S}=۰\qquad(۲)$$

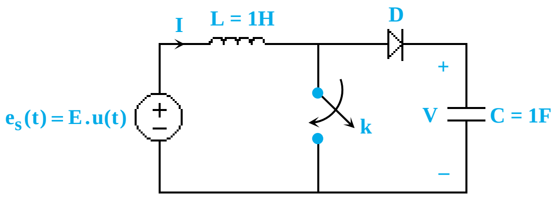
با توجه به برابری $V_۳$ و $V_۲$ داریم:

$$\frac{V_۲}{۰/۲}+\frac{V_۲-V_o(S)}{S}=۰\ \Rightarrow\ V_۲=\frac{۱}{۵S+۱}V_o(S)\qquad(۳)$$

با ترکیب روابط (۳) و (۱) داریم:

$$\frac{-V_{in}(S)}{۰/۱}+\frac{-\frac{۱}{۵S+۱}V_o(S)}{\frac{۱۰}{S}}+\frac{-V_o(S)}{\frac{۵}{S}}=۰\ \Rightarrow\ H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}=\frac{-۱۰۰(۵S+۱)}{S(۱۰S+۳)}=\mathbf{\frac{-۱۰(۵S+۱)}{S(S+۰/۳)}}$$

مثال ۲۳: در مدار شکل زیر دیود ایده‌آل فرض می‌شود و قبل از $t=۰$ شرایط اولیه مدار صفر می‌باشد. اگر کلید k را در لحظه $t=۴$ ثانیه وصل و در لحظه $t=۵$ ثانیه کلید را دوباره قطع کنیم، ولتاژ نهایی خازن چقدر خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۴)



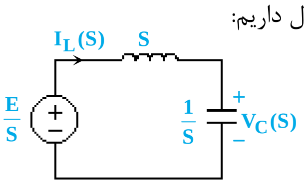
۱) $۲E$

۲) $(۱+\sqrt{۲})E$

۳) $(۲+\sqrt{۲})E$

۴) $(۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲})E$

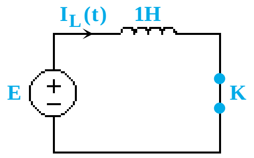
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا فرض کنیم دیود هدایت کرده و مدار به صورت یک LC سری و به صورت روبرو باشد. حال داریم:



$$I_L(S)=\frac{\frac{E}{S}}{S+\frac{۱}{S}}=\frac{E}{S^۲+۱}\ \Rightarrow\ I_L(t)=E\sin t\ \ ,\ \ V_C(S)=I_L(S).\frac{۱}{S}$$

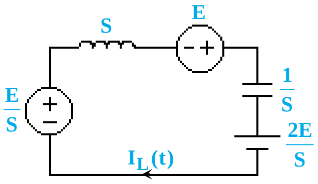
$$\Rightarrow\ V_C(S)=\frac{E}{S^۲+۱}\cdot\frac{۱}{S}=\frac{E}{S}-\frac{ES}{S^۲+۱}\ \Rightarrow\ V_C(t)=E-E\cos t=E(۱-\cos t)\qquad V_C(t=\pi)=۲E$$

لازم به ذکر است که دیود تا زمانی هدایت می‌کند که جریان عبوری از آن هم‌جهت با جهت دیود باشد؛ لذا با تغییر جهت جریان $I_L(t)$ در زمان $t=\pi(sec)$، دیود قطع خواهد بود. حال از زمان $t=\pi(sec)$ تا زمان $t=۴(sec)$ دیود قطع بوده و ولتاژ خازن ثابت خواهد ماند. با وصل کلید در $t=۴(sec)$، چون ولتاژ دیود منفی است، دیود همچنان قطع مانده و مدار به صورت زیر خواهد بود.



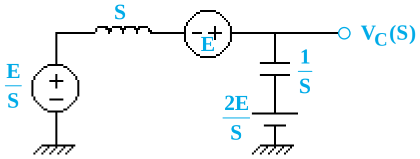
$$\Rightarrow I_L(t)=\frac{۱}{L}\int_{۴}^{t}V_L(t)dt \Rightarrow I_L(t)=\int_{۴}^{t}Edt=Et-۴E \Rightarrow I_L(t=۵sec)=E\times ۵-۴E=E$$

در این حالت جریان سلف روند افزایشی را طی خواهد کرد و در زمان $t=۵(sec)$ به عدد E خواهد رسید. در این زمان کلید قطع می‌شود و مدار در حالت جدید با شرایط اولیه جدید به صورت $I_L(t=۵^-)=E$ و $V_C(t=۵^-)=۲E$ خواهد بود. حال با هدایت مجدد دیود و فرض $t=۵(sec)$ به عنوان مبدأ زمان داریم:



$$I_L(S)=\frac{\frac{E}{S}+E-\frac{۲E}{S}}{S+\frac{۱}{S}}=\frac{E+ES-۲E}{S^۲+۱} \Rightarrow I_L(S)=\frac{ES}{S^۲+۱}+\frac{-E}{S^۲+۱}$$

$$\Rightarrow I_L(t)=E\cos t-E\sin t$$



با تغییر جهت جریان به دست آمده برای دیود به صورت رابطه بالا در $t=\frac{\pi}{۴}(sec)$ دیود قطع می‌شود. لذا

با توجه به معادله جریان سلف می‌توان از معادله ولتاژ خازن، ولتاژ آن را در $t=\frac{\pi}{۴}(sec)$ محاسبه کرد.

با اعمال قانون تقسیم ولتاژ داریم:

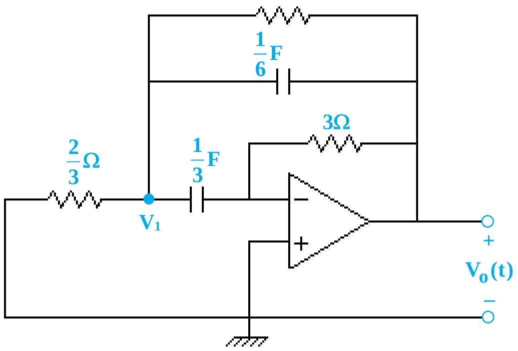
$$V_C(S)=\frac{\frac{۱}{S}[\frac{E}{S}+E]+S[\frac{۲E}{S}]}{S+\frac{۱}{S}} \Rightarrow V_C(S)=\frac{\frac{E}{S}+E+۲SE}{S^۲+۱} \Rightarrow V_C(S)=\frac{E}{S(S^۲+۱)}+\frac{E}{S^۲+۱}+\frac{۲SE}{S^۲+۱}$$

$$\Rightarrow V_C(S)=\frac{E}{S}-\frac{ES}{S^۲+۱}+\frac{E}{S^۲+۱}+\frac{۲SE}{S^۲+۱} \Rightarrow V_C(t)=E-E\cos t+E\sin t+۲E\cos t$$

$$\Rightarrow V_C(t=\frac{\pi}{۴})=E-E\cos\frac{\pi}{۴}+E\sin\frac{\pi}{۴}+۲E\cos\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \mathbf{V_C(t=\frac{\pi}{۴})=E+\sqrt{۲}E=E(۱+\sqrt{۲})}$$

مثال ۲۴: در شکل زیر فرض کنید تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل است و همواره در ناحیه خطی عمل می‌کند. مقاومت R را یک بار مدار باز و بار دوم $R=\frac{۱}{۲}\Omega$ بگیرید. حالت گذرای خروجی $V_o(t)$ مدار در دو مورد به چه صورت است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۵)



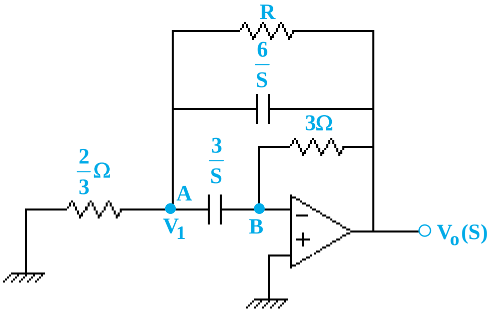
۱) بار اول میرای بدون نوسان و بار دوم میرای با نوسان است.

۲) بار اول میرای با نوسان و بار دوم میرای بدون نوسان است.

۳) بار اول و بار دوم میرای بدون نوسان است.

۴) بار اول و بار دوم میرای با نوسان است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با نوشتن KCL در گره B داریم: $(V_B=۰)$



$$\frac{۱}{۳}SV_۱+\frac{V_o}{۳}=۰$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_۱}{\frac{۲}{۳}}+\frac{۱}{۳}SV_۱+\frac{۱}{۶}S(V_۱-V_o)+\frac{V_۱-V_o}{R}=۰$$

با ترکیب دو معادله بالا و محاسبه تابع انتقال داریم:

$$V_o(S^۲+(۳+\frac{۶}{R})S+۹+\frac{۶}{R})=۰ \Rightarrow S^۲+(۳+\frac{۶}{R})S+۹+\frac{۶}{R}=۰$$

if $R=\infty \Rightarrow S^۲+۳S+۹=۰ \Rightarrow$ ریشه‌ها مختلط $\Rightarrow$ میرای نوسانی

if $R=\frac{۱}{۲} \Rightarrow S^۲+۱۵S+۲۱=۰ \Rightarrow$ دو ریشه حقیقی $\Rightarrow$ فوق میرا (میرای بدون نوسان)

مثال ۲۵: مدار شکل زیر در حالت صفر بوده و دیود D ایده‌آل فرض می‌شود. شکل موج جریان $I_L(t)$ کدام است؟ ($u(t)$ پله واحد و $r(t)$ شیب واحد است.)

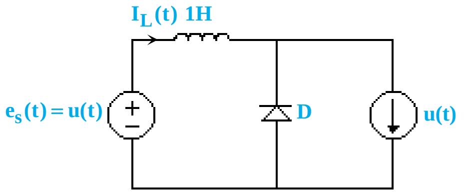
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)

۱) $r(t)-r(t-۱)$

۲) $r(t)+r(t-۱)$

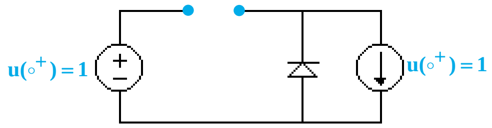
۳) $r(t-۱)-r(t)$

۴) $u(t-۱)+r(t)$



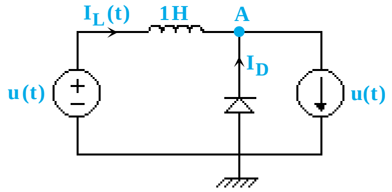
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به صفر بودن جریان اولیه سلف، مدار را در $t=۰^+$ ترسیم می‌کنیم. در این زمان به علت مدار باز بودن سلف، جریان منبع جریان $u(t)$ از دیود عبور کرده و دیود هدایت می‌کند. در $t>۰$ جریان عبوری از سلف شروع به زیاد شدن می‌کند. با توجه به هدایت دیود و اتصال کوتاه بودن آن، ولتاژ سلف برابر $u(t)$ است. حال برای جریان سلف داریم:

$t=۰^+$:



$$I_L(t)=\frac{۱}{L}\int_۰^t V_L(t)dt=\int_۰^t u(t)dt=r(t)$$

$t>۰$:



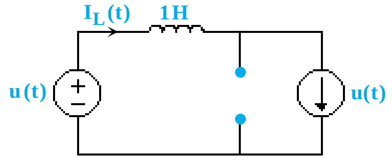
حال مدار را در $t=۱sec$ بررسی می‌کنیم و در گره A، KCL می‌زنیم:

$$I_D+I_L(t)=u(t) \Rightarrow I_D+r(t)=u(t)$$

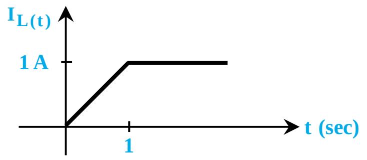
$$t=۱ \Rightarrow I_D+۱=۱ \Rightarrow I_D=۰$$

با صفر شدن جریان دیود در $t=۱sec$، دیود قطع خواهد شد. حال مدار به صورت زیر است:

$t=۱\,sec$:



$$I_L(t)=u(t)$$

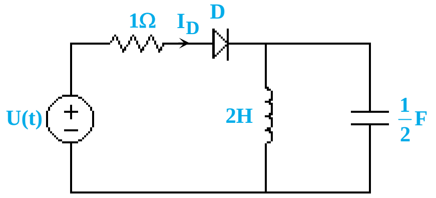


دیده می‌شود که در $t>۰$ مقدار جریان سلف ثابت و به اندازه $u(t)$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \mathbf{I_L(t)=r(t)-r(t-۱)}$$

مثال ۲۶: دیود D در مدار شکل مقابل ایده‌آل است. منبع ولتاژ ورودی، پله واحد است. جریان I_D گذرنده از دیود برای تمام زمان‌ها کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



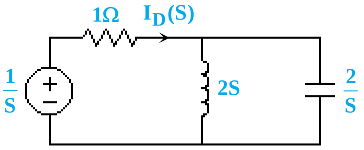
۱) $\begin{cases} ۱-۳te^{-t} & t<۰/۶ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} ۱-۴te^{-t} & t<۰/۳۵ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۳) $(۱-۲te^{-t})u(t)$

۴) $(۱-te^{-t})u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه منبع ولتاژ ورودی به صورتی است که دیود را همیشه در وضعیت روشن بودن در $t > ۰$ قرار می‌دهد، به‌جای دیود اتصال کوتاه قرار می‌دهیم و مدار را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم.

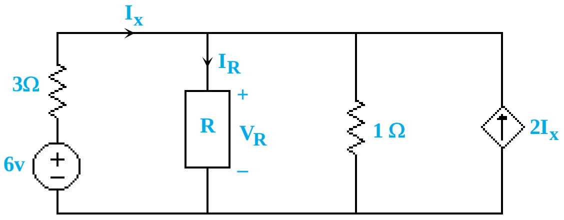


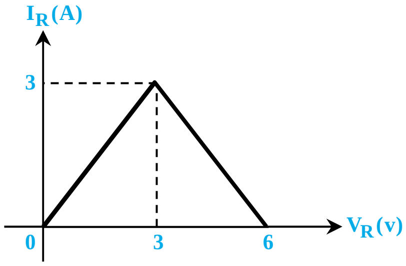
$$I_D(S) = \frac{\frac{۱}{S}}{۱+۲S \parallel \frac{۲}{S}} = \frac{(S^۲+۱)}{S(S+۱)^۲} = \frac{۱}{S} - \frac{۲}{(S+۱)^۲}$$

$$I_D(t) = u(t) + (-۲te^{-t})u(t) = [۱-۲te^{-t}]u(t)$$

مثال ۲۷: در مدار شکل زیر مشخصه مقاومت غیرخطی R در شکل داده شده است. جریان I_R گذرنده از این مقاومت برحسب آمپر کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)





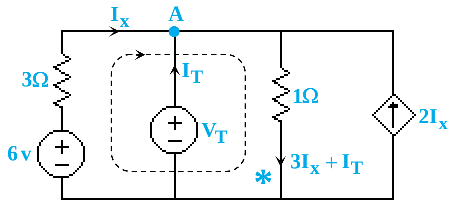
۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۲/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا از دو سر المان غیرخطی مدار معادل تونن دیده می‌شود. لذا به جای المان غیرخطی منبع V_T قرار داده و رابطه I_T را با V_T بدست می‌آوریم. با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$I_T + I_X + ۲I_X = \frac{V_T}{۱} \Rightarrow V_T = ۳I_X + I_T \qquad (۱)$$

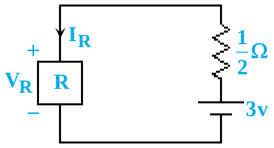
با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$-۶+۳I_X+۱(۳I_X+I_T) = ۰ \Rightarrow -۶+۳I_X+۳I_X+I_T = ۰ \Rightarrow I_X = -\frac{۱}{۶}I_T+۱ \qquad (۲)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

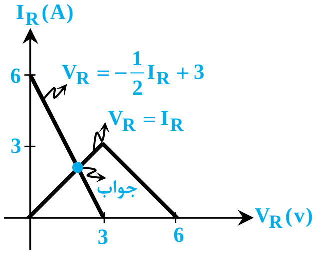
$$V_T = ۳(-\frac{۱}{۶}I_T+۱)+I_T \Rightarrow V_T = \frac{۱}{۲}I_T+۳ \Rightarrow V_{th} = ۳V \quad , \quad R_{th} = \frac{۱}{۲}\Omega$$

با معادل‌گذاری تونن داریم:



$$\Rightarrow -۳+\frac{۱}{۲}I_R+V_R = ۰ \Rightarrow V_R = -\frac{۱}{۲}I_R+۳$$

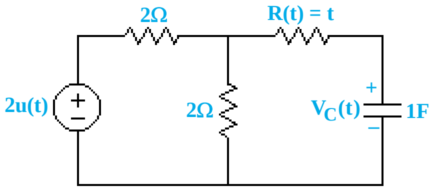
از قطع دادن رابطه بدست آمده در بالا با منحنی $(I-V)$ داریم:



$$V_R = -\frac{۱}{۲}I_R+۳ = I_R \Rightarrow \mathbf{I_R = ۲A}$$

مثال ۲۸: برای مدار خطی تغییرپذیر با زمان شکل زیر، $V_C(t)$ برای $t \geq ۰$ برابر کدام گزینه است؟ $(V_C(۰^-) = ۰)$

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)



۱) $\frac{t}{t+۱}$

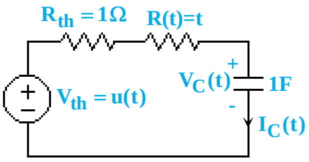
۲) $\frac{t}{۲(t+۱)}$

۳) $\frac{۱-e^{-t}}{t+۱}$

۴) $\frac{۱-e^{-t}}{۲(t+۱)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

روش اول: برای حل مدار ابتدا از مقاومت $R(t)$ به سمت چپ، معادل تونن دیده می‌شود. حال با نوشتن KVL داریم:



$$(۱+t)I_C(t)+V_C(t) = u(t) \Rightarrow (۱+t)(\frac{dV_C(t)}{dt})+V_C(t) = u(t)$$

با توجه به قوانین مشتق حاصلضرب، می‌توان عبارت بدست آمده از KVL را به صورت روبرو نوشت:

$$\frac{d}{dt}[(۱+t)V_C(t)]=u(t)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله از ۰ تا t داریم:

$$\int_۰^t \frac{d}{dt}[(۱+t)V_C(t)]dt=\int_۰^t u(t)dt \Rightarrow (۱+t)V_C(t)=t \Rightarrow \mathbf{V_C(t)=\frac{t}{۱+t}}$$

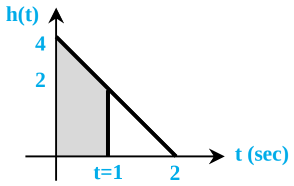
روش دوم: برای حل سریع‌تر تست، مقدار $V_C(\infty)$ را محاسبه می‌کنیم. در $t=\infty$ مقدار مقاومت $R(t)$ برابر بی‌نهایت می‌شود؛ لذا جریان شاخه شامل خازن صفر شده و $V_C(\infty)$ با ولتاژ $V_{۲\Omega}$ برابر می‌شود و با اعمال تقسیم ولتاژ $V_C(\infty)=V_{۲\Omega}=۱V$ خواهد بود. حال معادله $V_C(t)$ را در گزینه‌ها با فرض $t=\infty$ چک می‌کنیم. در این حالت فقط گزینه (۱) عدد یک ولت را به ما می‌دهد و لذا گزینه (۱) صحیح است.

مثال۲۹: پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t)=۲r(۲-t)u(t)$ می‌باشد. مقدار پاسخ پله این مدار در $t=۱sec$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۱

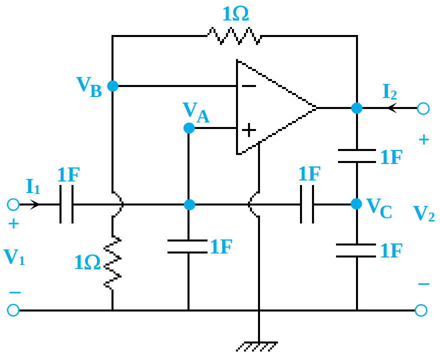
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در صورت ترسیم پاسخ ضربه به صورت شکل روبرو و با توجه به این نکته که پاسخ پله انتگرال پاسخ ضربه است، می‌توان گفت که مقدار پاسخ پله در $t=۱$، برابر با مساحت قسمت هاشور خورده است.



$$\text{پاسخ پله} = (۲+۴)\times\frac{۱}{۲}=۳$$

مثال۳۰: ماتریس پارامترهای z دوقطبی شکل زیر کدام است؟ (تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل است و در ناحیه خطی عمل می‌کند).

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\begin{pmatrix} \frac{۲}{S} & ۰ \\ ۰ & \frac{۲}{S} \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۲}{S} \\ \frac{۲}{S} & ۰ \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} \frac{۲}{S} & ۰ \\ \frac{۲}{S} & ۰ \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} \frac{۲}{S} & \frac{۲}{S} \\ ۰ & \frac{۲}{S} \end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با نوشتن KCL در گره C داریم:

$$S(V_C-V_۲)+SV_C+S(V_C-V_A)=۰ \Rightarrow ۳V_C=V_۲+V_A \qquad (۱)$$

با تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_B=\frac{۱}{۲}V_۲=V_A \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۳V_C=V_۲+\frac{۱}{۲}V_۲ \Rightarrow V_C=\frac{۱}{۲}V_۲=V_A=V_B \qquad (۳)$$

با اعمال KCL در گره A داریم:

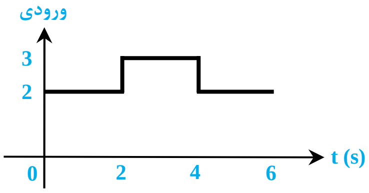
$$S(V_A-V_۱)+SV_A+S(V_A-V_C)=۰ \Rightarrow V_A=\frac{۱}{۲}V_۱ \qquad (۴)$$

با ترکیب روابط (۳) و (۴) داریم:

$$V_A=\frac{۱}{۲}V_۲=\frac{۱}{۲}V_۱ \Rightarrow V_۱=V_۲ \quad \text{و} \quad I_۱=S(V_۱-V_A)=\frac{۱}{۲}SV_۱ \Rightarrow V_۱=\frac{۲}{S}I_۱ \qquad V_۲=V_۱=\frac{۲}{S}I_۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_۱=\frac{۲}{S}I_۱+۰I_۲ \\ V_۲=\frac{۲}{S}I_۱+۰I_۲ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Z}=\begin{bmatrix} \frac{۲}{S} & ۰ \\ \frac{۲}{S} & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال۳۱: پاسخ ضربه یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t)=e^{-t}u(t)$ معلوم است. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی مقابل در $t=۳s$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $۳-e^{-۱}-e^{-۳}$

۲) $۳-e^{-۱}-۲e^{-۳}$

۳) $۲-۲e^{-۱}-۳e^{-۳}$

۴) $۳-۲e^{-۱}-۳e^{-۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا معادله موج ورودی را بر حسب توابع پله می‌نویسیم.

$$f(t)=۲u(t)+u(t-۲)-u(t-۴)$$

با توجه به اینکه پاسخ ضربه سیستم موجود است، می‌توان با استفاده از انتگرال، پاسخ پله را بدست آورد.

$$h(t)=e^{-t}u(t) \quad\Rightarrow\quad \text{پاسخ پله}=k(t)=(۱-e^{-t})u(t)$$

لازم به ذکر است که با توجه به اینکه پاسخ حالت صفر مطلوب است و شرایط اولیه صفر در نظر گرفته شده است، لذا $k(t)$ باید در $t=۰$ برابر صفر باشد. بنابراین در تابع $k(t)$ عدد ثابت ۱ اضافه شده است.

حال با توجه به قضیه جمع آثار به صورت جداگانه توابع موجود در $f(t)$ به مدار اعمال می‌شود.

$$\text{if}\quad f_۱(t)=۲u(t) \quad\Rightarrow\quad k_۱(t)=(۱-e^{-t})۲u(t)$$

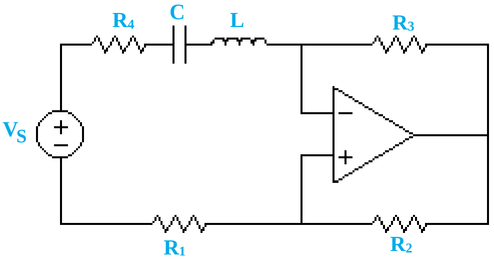
$$\text{if}\quad f_۲(t)=u(t-۲) \quad\Rightarrow\quad k_۲(t)=(۱-e^{-(t-۲)})u(t-۲)$$

$$\text{if}\quad f_۳(t)=-u(t-۴) \quad\Rightarrow\quad k_۳(t)=-(۱-e^{-(t-۴)})u(t-۴)$$

$$k(t)=k_۱(t)+k_۲(t)+k_۳(t) \quad\Rightarrow\quad k(t)=(۱-e^{-t})۲u(t)+(۱-e^{-(t-۲)})u(t-۲)-(۱-e^{-(t-۴)})u(t-۴)$$

$$k(t=۳\sec)=(۱-e^{-۳})۲+(۱-e^{-۱})=\mathbf{۳-۲e^{-۳}-e^{-۱}}$$

مثال۳۲: مدار شکل مقابل تحت چه شرایطی نوسان‌ساز می‌شود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



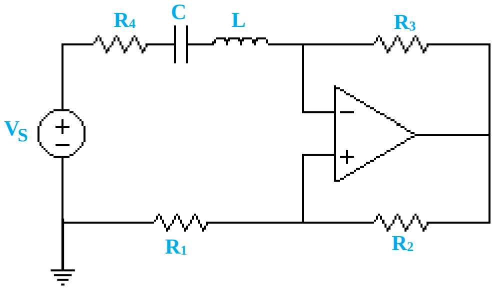
۱) $R_۱R_۳=R_۲R_۴$

۲) $\dfrac{L}{R_۱R_۳}=\dfrac{R_۴C}{R_۲}$

۳) $R_۱R_۲=R_۳R_۴$

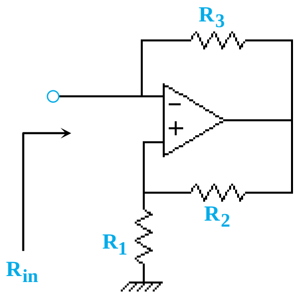
۴) این مدار هرگز نمی‌تواند نوسان‌ساز گردد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به ساختار مدار و نحوه بکارگیری آپ‌امپ در مدار، به احتمال زیاد مدار زیر مدنظر طراح سوال بوده است:



تفاوت این مدار با مدار ترسیم شده در صورت سوال در زمین شدن پایه منفی منبع ولتاژ ورودی است که با در نظر گرفتن تغذیه‌های منفی و مثبت آپ‌امپ و زمین آنها، مشخص خواهد بود که مسیر عبور جریانِ منبع ولتاژ، محدود به عناصر پسیو مدار (مقاومت‌ها، خازن و سلف) نخواهد بود و خروجی آپ‌امپ نیز می‌تواند جریان از خود عبور دهد. (در حالی که در مدار اصلی، جریان منبع بطور کامل در حلقه مدار شامل عناصر پسیو می‌چرخد و آپ‌امپ کاملاً بی‌تاثیر بوده و حتی با وجود فیدبک منفی پایه‌های مثبت و منفیش هم‌ولتاژ نخواهند بود و به‌نوعی مدار با اصول کارکردی آپ‌امپ در تناقض است.) حال با این فرض به حل تست می‌پردازیم.

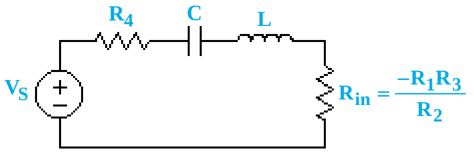
ابتدا مدار مولد مقاومت منفی را یادآوری می‌کنیم.



$$R_{in}=\frac{-R_۱R_۳}{R_۲}$$

حال با جایگذاری مقدار R_{in} در شبکه داریم:

برای نوسان‌ساز شدن مدار باید مقاومت $R_۴$ مقدار مقاومت R_{in} را خنثی کند. لذا داریم:



$$R_۴ = \frac{R_۱ . R_۳}{R_۲} \Rightarrow \mathbf{R_۲R_۴ = R_۱R_۳}$$

مثال ۳۳: دیود D در مدار شکل زیر ایده‌آل است. شکل موج جریان گذرنده از سلف کدام است؟ (شرایط اولیه مدار صفر می‌باشد.) ($P_\Delta(t)$ تابع پالس واحد می‌باشد و $\delta(t)$ تابع ضربه واحد می‌باشد.)

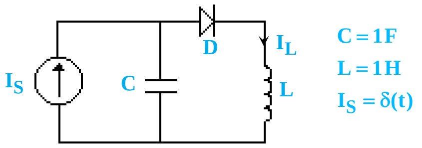
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $I_L = P_۱(t).\sin t$

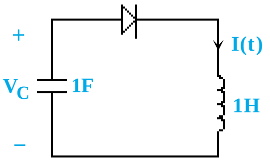
۲) $I_L = P_۱(t).\cos t$

۳) $I_L = \pi P_\pi(t).\sin t$

۴) $I_L = \pi P_\pi(t).\cos t$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل مدار ابتدا باید مدار را در $t = ۰$ تحلیل کرد. در این زمان $\delta(t)$ با عبور از خازن، ولتاژ خازن را به صورت زیر تغییر می‌دهد.



$$V_C = \frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+} I_C(t)dt = \frac{۱}{۱}\int_{۰^-}^{۰^+} \delta(t)dt = ۱v$$

ولتاژ بدست آمده برای خازن در حکم ولتاژ اولیه خازن عمل می‌کند. بعد از صفر شدن $\delta(t)$ در $t > ۰$ داریم:

$$۱\times\frac{dI(t)}{dt} + \frac{۱}{۱}\int I(t)dt = ۰ \Rightarrow \frac{d^۲I(t)}{dt^۲} + I(t) = ۰$$

حال باید معادله دیفرانسیل فوق را با شرایط اولیه زیر حل کرد.

$$I(۰^+) = ۰ \quad , \quad \frac{dI(۰^+)}{dt} = \frac{V_C(۰^+)}{C} = \frac{۱}{۱} = ۱\frac{A}{sec}$$

$$S^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow S = \pm j$$

$$\omega_r^۲ = ۱ \quad , \quad \alpha = ۰ \Rightarrow \mathbf{I(t) = A\sin t + B\cos t}$$

حال ضرایب A و B را محاسبه می‌کنیم.

$$I(۰^+) = ۰ \Rightarrow B = ۰$$

$$\frac{dI(۰^+)}{dt} = ۱ \Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = A\cos t - B\sin t \Rightarrow ۱ = A\times۱ \Rightarrow A = ۱ \Rightarrow I(t) = \sin t$$

در زمان $۰ < t < \pi$ مقدار تابع $\sin t$ یا همان $I(t)$ مثبت بوده و دیود هدایت می‌کند. در زمان $\pi < t < ۲\pi$، مقدار جریان $I(t)$ منفی شده و دیود خاموش می‌شود. حال داریم:

$$I(t) = \begin{cases} \sin t & ۰ < t < \pi \\ ۰ & \pi < t < ۲\pi \end{cases}$$

حال اگر جریان $I(t)$ برحسب تابع پالس واحد $P_\Delta(t)$ با عرض $\Delta = \pi$ نوشته شود، داریم:

$$\mathbf{I(t) = \pi P_\pi(t).\sin t}$$

مثال ۳۴: خازن C در مدار شکل زیر چگونه انتخاب شود تا مدار میرای شدید (میرای بدون نوسان) بشود؟

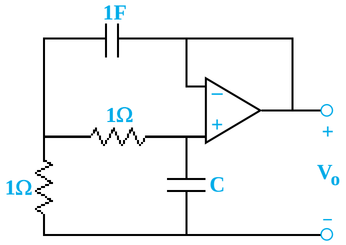
(مهندسی کامپیوتر «گرایش هوش مصنوعی» ـ سراسری ۸۲)

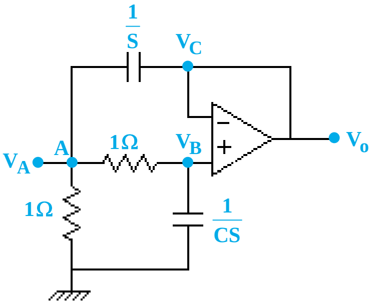
۱) $C > ۱F$

۲) $C > ۲F$

۳) $C > \frac{۱}{۳}F$

۴) $C > \frac{۱}{۲}F$





☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به وجود فیدبک منفی، ولتاژ پایه‌های مثبت و منفی با هم برابر است. حال داریم:

$$V_B = V_C = V_o$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A - V_B}{۱} + \frac{V_A}{۱} + \frac{V_A - V_o}{\frac{۱}{S}} = ۰ \Rightarrow V_A = \frac{(۱+S)V_o}{۲+S} \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_B - V_A}{۱} + \frac{V_B}{\frac{۱}{CS}} = ۰ \Rightarrow V_B(۱+CS) = V_A \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

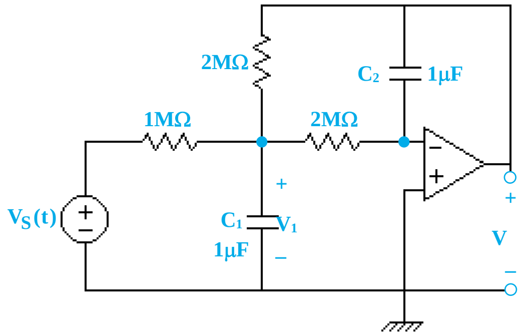
$$V_o(۱+CS) = \frac{(۱+S)V_o}{۲+S} \Rightarrow CS^۲ + ۲CS + ۱ = ۰ \Rightarrow S^۲ + ۲S + \frac{۱}{C} = ۰$$

برای حالت میرایی شدید باید $\alpha > \omega_r$ باشد. حال داریم:

$$۲\alpha = ۲ \Rightarrow \alpha = ۱ \quad , \quad \omega_۰^۲ = \frac{۱}{C} \quad , \quad \alpha > \omega_۰ \Rightarrow ۱ > \sqrt{\frac{۱}{C}} \Rightarrow \mathbf{C > ۱F}$$

مثال ۳۵: مداری مطابق شکل زیر مفروض است. پاسخ مربوط به $V(t)$ برای $t > ۰$ کدام است؟(**Opamp** ایده‌آل است) $[V_۱(۰^-) = ۰, V(۰^-) = ۰, V_S = ۴v]$

(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۲)

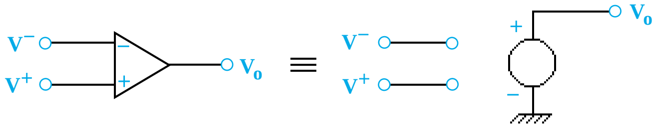


۱) $e^{-\sqrt{۳}t}[k_۱e^{-۱t} + k_۲e^{-۲t}] - ۸$

۲) $e^{-\sqrt{۳}t}[k_۱e^{-۱t} + k_۲e^{-۲t}] + ۸$

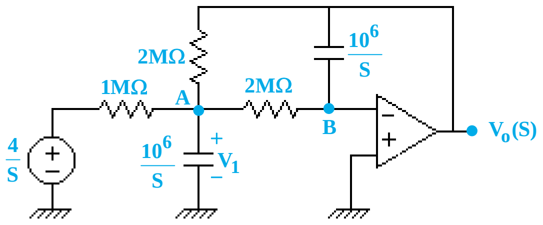
۳) $e^{-t}[k_۱e^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}t} + k_۲e^{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}t}] - ۸$

۴) $e^{-t}[k_۱e^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}t} + k_۲e^{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}t}] + ۸$



$$\mathbf{V_o = A(V^+ - V^-)\ ,\ A \to \infty}$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس با فرض $V_B = ۰$، در گره A، KCL می‌زنیم.



$$\frac{V_A - \frac{۴}{S}}{۱۰^۶} + \frac{V_A}{\frac{۱۰^۶}{S}} + \frac{V_A - V_o(S)}{۲\times۱۰^۶} + \frac{V_A}{۲\times۱۰^۶} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲V_A - \frac{۸}{S} + ۲SV_A + V_A - V_o(S) + V_A = ۰$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{V_o(S) + \frac{۸}{S}}{۴ + ۲S} \qquad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره B داریم:

$$\frac{V_B - V_A}{۲\times۱۰^۶} + \frac{V_B - V_o(S)}{\frac{۱۰^۶}{S}} = ۰ \quad , \quad V_B = ۰ \Rightarrow -V_A - ۲SV_o(S) = ۰ \Rightarrow V_A = -۲SV_o(S) \qquad (۲)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

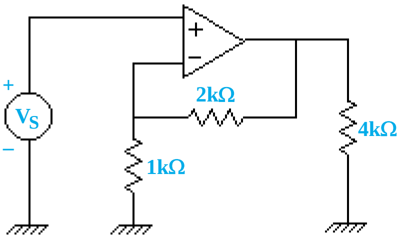
$$-۲SV_o(S) = \frac{V_o(S) + \frac{۸}{S}}{۴ + ۲S} \Rightarrow -۸SV_o(S) - ۴S^۲V_o(S) = V_o(S) + \frac{۸}{S} \Rightarrow V_o(S) = \frac{\frac{-۸}{S}}{۴S^۲ + ۸S + ۱}$$

$$\Rightarrow\ V_o(S)=\frac{-۸}{S(۴S^۲+۸S+۱)}\ \Rightarrow\ V_o(S)=\frac{-۸}{S}+\frac{A}{S+۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}+\frac{B}{S+۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow\ V_o(t)=-۸+Ae^{(-۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})t}+Be^{(-۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})t}\ \Rightarrow\ \mathbf{V_o(t)=-۸+e^{-t}[Ae^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}t}+Be^{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}t}]}$$

مثال ۳۶: در شکل نشان داده شده تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل بوده و منبع ولتاژ، سینوسی با مقدار rms یک ولت می‌باشد. توان متوسط جذب شده توسط مقاومت ۴kΩ کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۳)



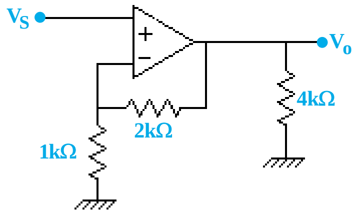
۱) ۱mw

۲) ۱/۱۲۵mw

۳) ۲mw

۴) ۲/۲۵mw

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به نکات موجود در متن درس داریم:

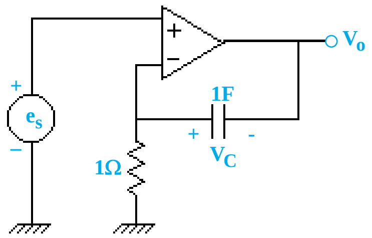


$$V_o=V_S(۱+\frac{۲}{۱})=۳V_S\ \Rightarrow\ V_o=۳\times۱=۳\ v(rms)$$

$$P_{۴k\Omega}=\frac{V_o(rms)^۲}{۴۰۰۰}=\frac{۳^۲}{۴۰۰۰}=\frac{۹}{۴۰۰۰}=\mathbf{۲/۲۵mw}$$

مثال ۳۷: اگر پاسخ حالت پایدار $V_o(t)$ برابر با cos t باشد، شکل موج ولتاژ خازن، $V_C(t)$ کدام گزینه است؟

(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۴)



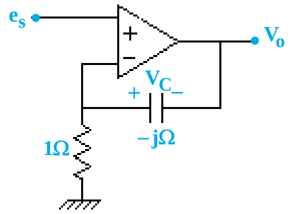
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\left(t-\frac{\pi}{۴}\right)$

۲) $\frac{۱}{۲}\cos\left(t-\frac{۳\pi}{۴}\right)$

۳) $\frac{۱}{۲}\cos\left(t-\frac{\pi}{۴}\right)$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\left(t-\frac{۳\pi}{۴}\right)$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به اینکه جریان پایه منفی آپ‌امپ صفر است، لذا خازن ۱F و مقاومت ۱Ω سری هستند. با توجه به قانون تقسیم ولتاژ داریم:

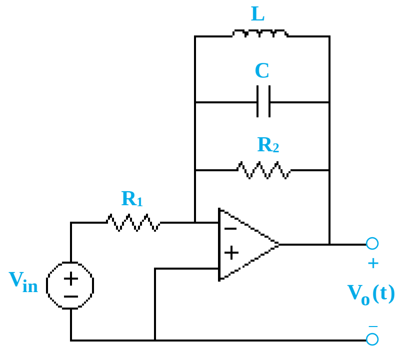


$$V_C=-V_o\times(\frac{-j}{۱-j})\ \Rightarrow\ V_C=-۱\angle۰\times\frac{-j}{۱-j}$$

$$\Rightarrow\ V_C=\frac{j}{۱-j}=۰/۷\angle۱۳۵^\circ\ \Rightarrow\ \mathbf{V_C(t)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(t+۱۳۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(t+\frac{۳\pi}{۴})}$$

مثال ۳۸: در مدار شکل مقابل $V_{in}(t)=V_m\cos\omega t$ و مدار در حالت دائمی سینوسی است. در چه فرکانسی رابطه ورودی و خروجی به صورت $V_o(t)=kV_{in}(t)$ در می‌آید که k یک مقدار ثابت است و مقدار k کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)



۱) $k=-\frac{R_۲}{R_۱}\quad,\quad\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}$

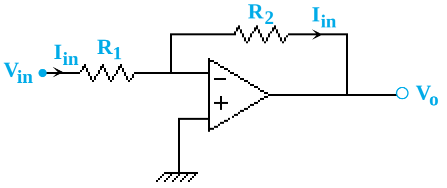
۲) $k=-\frac{R_۱}{R_۲}\quad,\quad\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}$

۳) $k=-\frac{R_۲}{R_۱}\quad,\quad\omega=\sqrt{\frac{L}{C}}$

۴) $k=-\frac{R_۱}{R_۲}\quad,\quad\omega=\sqrt{\frac{L}{C}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به رابطه $V_o(t) = kV_{in}(t)$ دیده می‌شود که ورودی مدار با خروجی آن هم‌فاز است. بنابراین سلف مدار باید اثر خازن را خنثی کرده تا مدار مقاومتی شود. همچنین می‌توان گفت که برای هم‌فاز شدن ورودی و خروجی لازم است که LC موجود در فیدبک مدار رزونانس کند.

بنابراین رابطه $V_o(t) = kV_{in}(t)$ در فرکانس رزونانس LC به صورت $\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$ برقرار است. با فرض رزونانس سلف و خازن داریم:

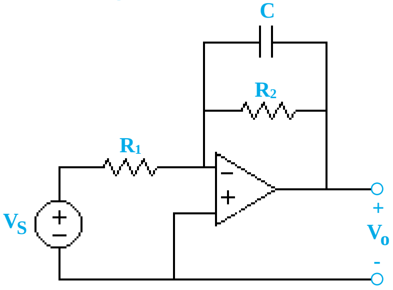


$$I_{in} = \frac{V_{in}}{R_۱}$$

$$V_o = -R_۲ I_{in} = -R_۲ \cdot \frac{V_{in}}{R_۱} \Rightarrow V_o = -\frac{R_۲}{R_۱} V_{in} \Rightarrow \mathbf{k} = \frac{\mathbf{-R_۲}}{\mathbf{R_۱}}$$

مثال۳۹: **در شکل مقابل مقادیر $R_۱$ و $R_۲$ را چنان انتخاب کنید که رفتار مدار، معادل فیلتر پایین‌گذری باشد که در باند گذر، دارای بهره ۵ بوده و فرکانس قطع آن ۱۰۰۰ Hz باشد. مقدار C را برابر $\frac{۱}{\pi}$ میکروفاراد بگیرید.**

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)



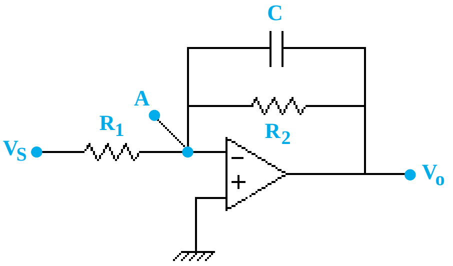
۱) $R_۲ = ۵۰۰\Omega \quad , \quad R_۱ = ۱۰۰\Omega$

۲) $R_۲ = ۱۰۰\Omega \quad , \quad R_۱ = ۱۰۰\Omega$

۳) $R_۲ = ۱۰۰۰\pi\Omega \quad , \quad R_۱ = ۲۰۰\pi\Omega$

۴) $R_۲ = ۲۰۰\pi\Omega \quad , \quad R_۱ = ۱۰۰۰\pi\Omega$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا در گره A که دارای ولتاژ صفر است، KCL می‌زنیم.



$$\frac{۰ - V_S}{R_۱} + \frac{۰ - V_o}{R_۲} + \frac{۰ - V_o}{\frac{۱}{CS}} = ۰ \Rightarrow V_o = \frac{-\frac{۱}{R_۱}}{CS + \frac{۱}{R_۲}} V_S$$

در صورتی که به‌جای S عبارت $j\omega$ قرار داده شود، داریم:

$$V_o = \frac{-\frac{۱}{R_۱}}{Cj\omega + \frac{۱}{R_۲}} . V_S \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{V_S} = \frac{-\frac{۱}{R_۱}}{Cj\omega + \frac{۱}{R_۲}} = \frac{-\frac{R_۲}{R_۱}}{j\omega R_۲ C + ۱}$$

تابع بدست آمده مربوط به یک فیلتر پایین‌گذر است. فرکانس قطع و بهره آن در باند گذر به صورت زیر است:

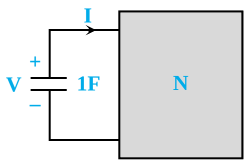
$$|\text{بهره}| = |H(j\omega)|\Big|_{\omega=۰} = \frac{R_۲}{R_۱} \quad \text{و} \quad \omega = \frac{۱}{R_۲ C} \Rightarrow f = \frac{\omega}{۲\pi} = ۱۰۰۰ = \frac{۱}{۲\pi \times R_۲ \times \frac{۱}{\pi} \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow \mathbf{R_۲ = ۵۰۰\Omega}$$

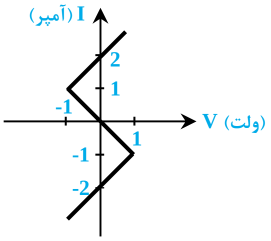
$$\frac{R_۲}{R_۱} = ۵ \Rightarrow \frac{۵۰۰}{R_۱} = ۵ \Rightarrow \mathbf{R_۱ = ۱۰۰\Omega}$$

دقت کنید که فرکانس قطع برحسب Hz داده شده است و بنابراین باید در ۲π ضرب شود تا مقدار ω بدست آید.

مثال۴۰: **در مدار شکل زیر N یک‌قطبی مقاومتی غیرخطی است که مشخصه $(I - V)$ آن داده شده است. اگر ولتاژ اولیه خازن برابر (۱−) ولت باشد، چه مدت طول می‌کشد تا ولتاژ خازن صفر شود؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)





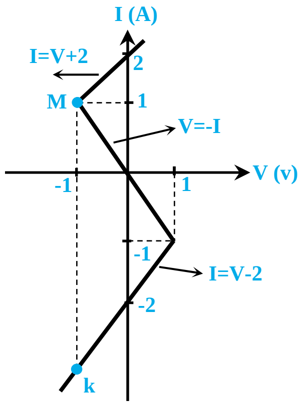
۱) ثانیه $\text{Ln}\frac{۴}{۳}$

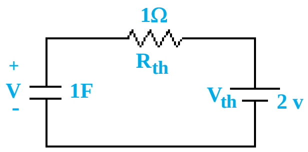
۲) ثانیه $\text{Ln}(\frac{۳}{۲})$

۳) ثانیه $\text{Ln}۲$

۴) ثانیه $\text{Ln}۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه ولتاژ اولیه خازن ۱- ولت است، لذا نقطه کار آن در روی نقطه k می‌باشد. دقت کنید که در نقطه M جریان I مثبت و برابر یک آمپر خواهد بود. این جریان خازن را دشارژ و ولتاژ آن را منفی‌تر می‌کند؛ حال با توجه به منحنی $V-I$ شبکه N، مشخص است که نقطه کار نمی‌تواند در همسایگی نقطه M بماند و سریعاً به نقطه K منتقل خواهد شد. در نقطه K معادله شبکه N به صورت $I=V-۲$ یا $V=I+۲$ می‌باشد. یعنی R_{th} معادل آن ۱Ω و V_{th} معادل آن ۲v است.





$$V(0^{\pm})=-۱v \quad و \quad V(\infty)=۲v$$

$$\tau=R_{th}\cdot C=۱\times۱=۱(sec)$$

$$V(t)=V(\infty)+[V(t)-V(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=۲+[-۱-۲]e^{-t}$$

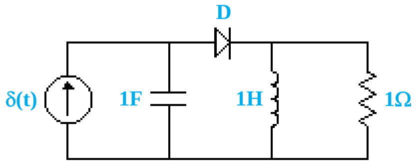
$$V(t)=۲-۳e^{-t}$$

حال اگر ولتاژ $V(t)$ یا همان ولتاژ خازن صفر باشد، داریم:

$$0=۲-۳e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t=Ln(\frac{۳}{۲})sec}$$

مثال۴۱: در مدار شکل زیر شرایط اولیه همگی صفر می‌باشند و دیود D ایده‌آل می‌باشد. ($R=۱\Omega$ و $L=۱H$ ، $C=۱F$) پس از چند ثانیه جریان دیود D قطع می‌گردد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)



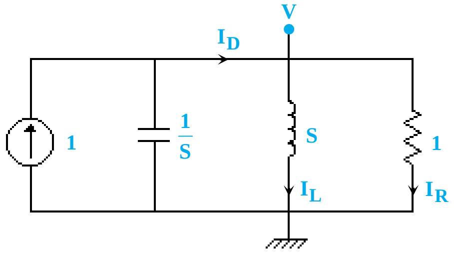
۱) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$

۲) $\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۳}$

۳) $\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۳}\pi}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل مدار ابتدا با فرض هدایت دیود، آن را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:



$$\frac{V}{S}+\frac{V}{۱}+SV=۱ \quad \Rightarrow \quad V=\frac{S}{S^۲+S+۱}$$

$$I_D=I_L+I_R=\frac{V}{S}+\frac{V}{۱}=\frac{S}{S(S^۲+S+۱)}+\frac{S}{S^۲+S+۱} \quad \Rightarrow \quad I_D=\frac{S+۱}{S^۲+S+۱}=\frac{S+\frac{۱}{۲}}{(S+\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}+\frac{0/۵}{(S+\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}$$

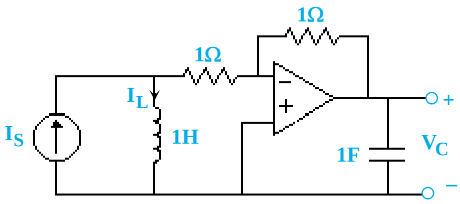
$$I_D(t)=[e^{-\frac{t}{۲}}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t+\frac{۱}{۲}e^{-\frac{t}{۲}}\times\frac{\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}]u(t) \Rightarrow I_D(t)=e^{-\frac{t}{۲}}[\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t]u(t) \Rightarrow I_D(t)=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}e^{-\frac{t}{۲}}\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t-\frac{\pi}{۶})u(t)$$

در صورت صفر شدن $I_D(t)$ باید زاویه cos برابر $\frac{\pi}{۲}$ شود.

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}t-\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t=\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}sec}$$

مثال۴۲: در مدار شکل زیر آپ‌امپ ایده‌آل است. اگر I_S ورودی و $V_C(t)$ پاسخ باشد، پاسخ حالت صفر به ورودی ضربه واحد کدام مورد خواهد بود؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

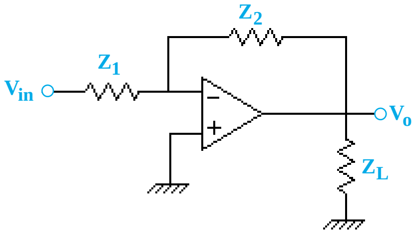


۱) $V_C(t)=e^{-t}u(t)$

۲) $V_C(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$

۳) $V_C(t)=e^{-t}u(t)-\delta(t)$

۴) $V_C(t)=e^{-t}u(t)+\delta(t)$

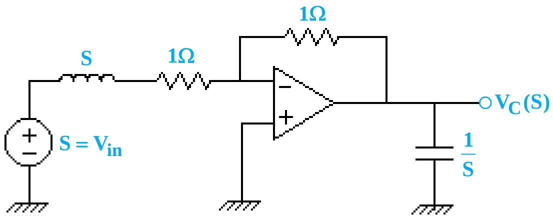


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه مدار یک تقویت‌کننده منفی‌ساز است، داریم:

$$V_o = V_{in}(\frac{-Z_۲}{Z_۱})$$

باید دقت شود که مقدار Z_L تأثیری در مقدار V_o ندارد.

حال با تبدیل منابع در سمت چپ مدار داریم:

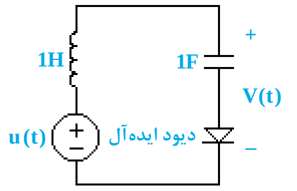


$$V_C(S) = V_{in}(\frac{-۱}{۱+S}) = \frac{-S}{S+۱}$$

$$\Rightarrow V_C(S) = -\left[\frac{S+۱}{S+۱} - \frac{۱}{S+۱}\right] \Rightarrow \mathbf{V_C(t) = -\delta(t) + e^{-t}u(t)}$$

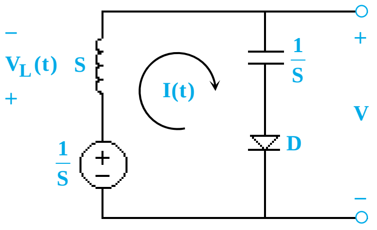
مثال۴۳: مدار داده شده، قبل از زمان صفر در حالت استراحت است. مقدار V در زمان‌های بزرگ ($t \to +\infty$) برحسب ولت چقدر است؟

(مهندسی ابزاردقیق ـ سراسری ۸۸)



۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که سلف و خازن از لحظه‌ی اعمال ورودی ($t = ۰$) دارای مقادیر اولیه‌ی صفر هستند، ابتدا دیود روشن است. پس با فرض روشن بودن دیود مدار را تحلیل می‌کنیم.



$$I = \frac{\frac{۱}{S}}{S+\frac{۱}{S}} = \frac{۱}{S^۲+۱} \Rightarrow I(t) = \sin t \Rightarrow \begin{cases} ۰<t<\pi & I=\sin t \\ t>\pi & I=۰ \end{cases}$$

$$V_C = \frac{۱}{C}\int I_C = \int_۰^\pi \sin t = -\cos t]_۰^\pi = ۲$$

$$V_L(t) = \frac{LdI_L(t)}{dt} = L\frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} \cos t & t \le \pi \\ ۰ & t > \pi \end{cases}$$

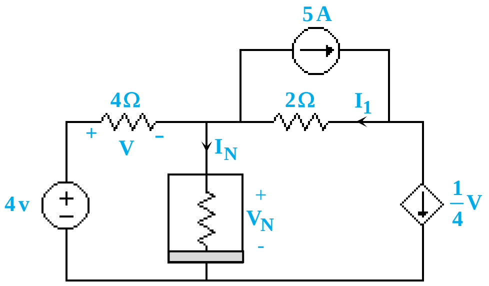
$$\Rightarrow V(t)\Big|_{t=\pi} = u(t)\Big|_{t=\pi} - V_L(t)\Big|_{t=\pi} = ۱-(-۱) = ۲v$$

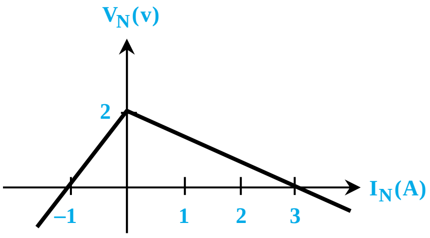
اما بعد از $t = \pi$ دیود قطع می‌شود و ولتاژ خازن ثابت و برابر ۲ ولت باقی می‌ماند و همچنین چون دیود قطع و جریان $I(t) = ۰$ می‌شود، ولتاژ سلف هم صفر شده و لذا ولتاژ خروجی برابر است با:

$$V(t)\Big|_{t=\infty} = u(t)\Big|_{t=\infty} - V_L(t)\Big|_{t=\infty} = ۱-۰ = \mathbf{۱v}$$

مثال۴۴: در مدار شکل روبرو اگر $I_N = \frac{۳}{۲}A$ باشد، جریان $I_۱$ چند آمپر است؟ (مدار دارای جواب یگانه است.)

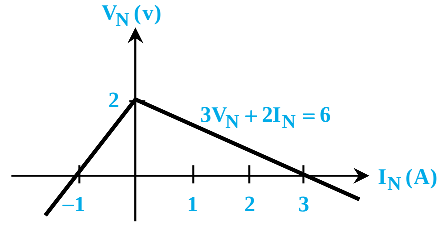
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)





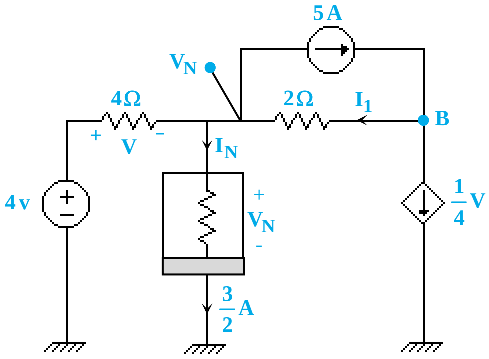
۱) $\frac{۲۳}{۴}$
۲) $\frac{۱۷}{۴}$
۳) $\frac{۱۷}{۸}$
۴) $\frac{۲۳}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱ و ۲» با توجه به اینکه $I_N=\frac{۳}{۲}A$ است، از روی منحنی مشخصه (V_N-I_N) می‌توان مقدار V_N را بدست آورد. با توجه به مثبت بودن جریان I_N، کافی است که معادله خط موجود در سمت راست منحنی مشخصه (V_N-I_N) را بدست آورده و با استفاده از آن مقدار V_N را محاسبه کنیم.



$$I_N=\frac{۳}{۲}A \;\Rightarrow\; ۳V_N+۲\times\frac{۳}{۲}=۶ \;\Rightarrow\; V_N=۱v$$

با توجه به موارد فوق، نقطه کار المانِ دارای مشخصه (V_N-I_N) به صورت $(V_N=۱v\;,\;I_N=\frac{۳}{۲}A)$ بدست می‌آید.



حال با نوشتن KCL در گره بالای المانِ دارای مشخصه (V_N-I_N) داریم:

$$\frac{V_N-۴}{۴}+I_N+۵=I_۱ \quad و \quad V_N=۱v \quad و \quad I_N=\frac{۳}{۲}A$$

$$\Rightarrow\; \frac{۱-۴}{۴}+\frac{۳}{۲}+۵=I_۱ \;\Rightarrow\; I_۱=۵/۷۵A=\mathbf{\frac{۲۳}{۴}A}$$

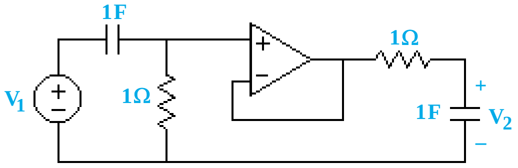
نکته: در صورتی که در نقطه B، KCL زده شود، داریم:

$$۵=I_۱+\frac{۱}{۴}V \;\;,\;\; V=۴-V_N \;\Rightarrow\; V=۴-۱=۳\,v \;\Rightarrow\; ۵=I_۱+\frac{۳}{۴} \;\Rightarrow\; I_۱=\mathbf{\frac{۱۷}{۴}A}$$

دیده می‌شود که اگر از طریق KCL در نقطه B مسأله حل شود، جواب گزینه (۲) خواهد بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این تست دارای اشکال می‌باشد.

مثال۴۵: در مدار شکل مقابل تقویت‌کننده‌ی عملیاتی ایده‌آل است. تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_۲(j\omega)}{V_۱(j\omega)}$ برابر است با:

(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۸۹)



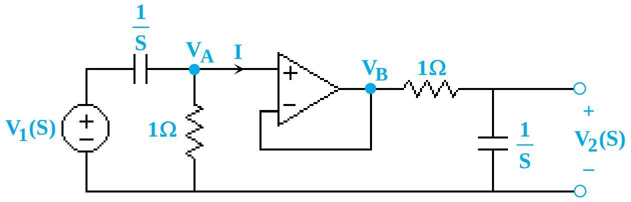
۱) $\frac{۱}{j\omega(۱+j\omega)}$

۲) $\frac{۱}{۱-\omega^۲+۲j\omega}$

۳) $\frac{j\omega}{۱-\omega^۲+۲j\omega}$

۴) $\frac{۱}{۱+j\omega}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به وجود فیدبک در آپامپ، ولتاژ پایه‌های ورودی آپامپ برابر است. بنابراین $V_A=V_B$ بوده و جریان $I=۰$ است. با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ برای $V_۲$ و V_A داریم:



$$V_A=V_۱(S)\times\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}} \;\Rightarrow\; V_A=V_۱(S)\times\frac{S}{S+۱}=V_B$$

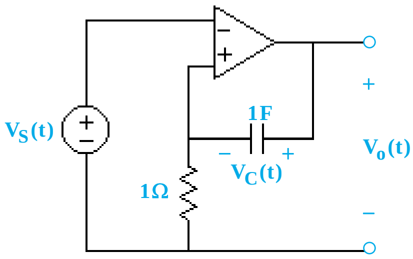
$$V_۲(S)=V_B\times\frac{\frac{۱}{S}}{\frac{۱}{S}+۱} \;\Rightarrow\; V_۲(S)=V_B\times\frac{۱}{S+۱}$$

$$\Rightarrow\; V_۲(S)=V_۱(S)\times\frac{S}{S+۱}\times\frac{۱}{S+۱} \;\Rightarrow\; \frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}=H(S)=\frac{S}{(S+۱)^۲}=\frac{S}{S^۲+۲S+۱}$$

$$\Rightarrow\; H(j\omega)=\frac{V_۲(j\omega)}{V_۱(j\omega)}=\frac{j\omega}{(j\omega)^۲+۲j\omega+۱} \;\Rightarrow\; \mathbf{H(j\omega)=\frac{j\omega}{۱+۲j\omega-\omega^۲}}$$

مثال ۴۶: مدار زیر، در حالت دائمی سینوسی است. اگر $V_o(t)=\cos t\, u(t)$ باشد، ولتاژ خازن $V_C(t)$ در حالت دائمی سینوسی، کدام است؟ (تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل فرض می‌شود.)

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



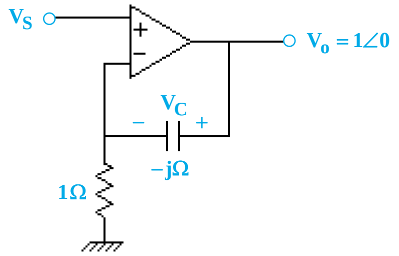
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(t+۴۵^\circ)u(t)$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(t-۴۵^\circ)u(t)$

۳) $\sqrt{۲}\cos(t+۴۵^\circ)u(t)$

۴) $\sqrt{۲}\cos(t-۴۵^\circ)u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به صفر بودن جریان پایه ورودی منفی آپامپ، مقدار V_C را از تقسیم ولتاژ محاسبه می‌کنیم.



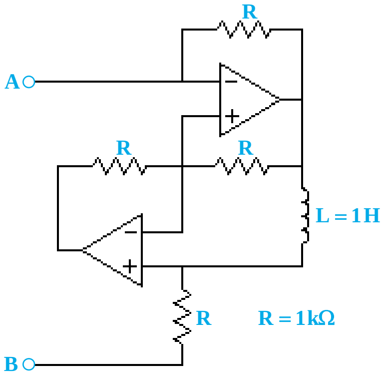
$$V_C=V_o\times\frac{-j}{۱-j}=V_o\times\frac{۱\angle-۹۰^\circ}{\sqrt{۲}\angle-۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow\ V_C=\frac{\sqrt{۲}V_o}{۲}\angle-۴۵^\circ\ ,\ V_o=۱\angle۰\ \Rightarrow\ V_C=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\angle-۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow\ V_C(t)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(t-۴۵^\circ)u(t)$$

مثال ۴۷: در مدار مقابل، مدار معادل دیده شده در سرهای A و B چقدر است؟ (تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل هستند)

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)

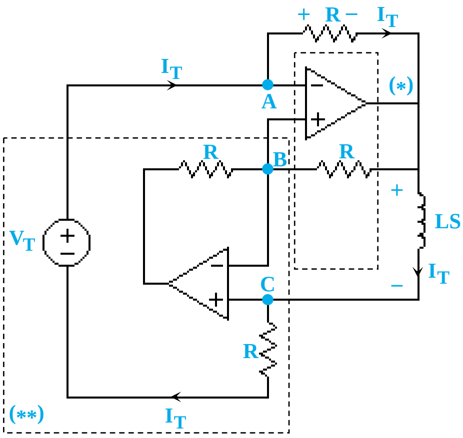


۱) خازنی با ظرفیت منفی یک میکروفاراد $(C_{eq}=-۱\mu F)$

۲) خازنی با ظرفیت یک میکروفاراد $(C_{eq}=+۱\mu F)$

۳) سلفی با اندوکتانس منفی یک میلی‌هانری $(L_{eq}=-۱mH)$

۴) سلفی با اندوکتانس یک میلی‌هانری $(L_{eq}=+۱mH)$



☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای بدست آوردن مدار معادل، به دو سر A و B منبع V_T را متصل می‌کنیم و ارتباط V_T و I_T را بدست می‌آوریم. با توجه به وجود فیدبک در مدار، ولتاژ پایه‌های مثبت و منفی آپامپ با هم برابر است. $V_A=V_B=V_C$

$$KVL(*): RI_T+LSI_T=۰ \quad (۱)$$

$$KVL(**): V_T=RI_T \quad (۲)$$

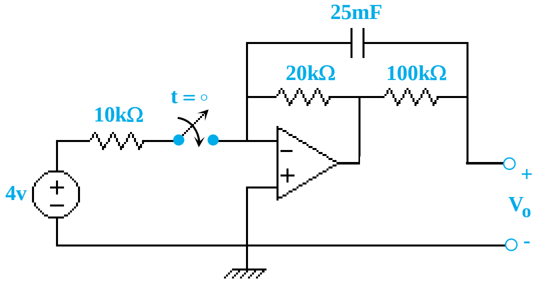
رابطه (۲) بیان می‌کند که مدار، معادل یک مقاومت با اندازه R اهم است. با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$RI_T=-LSI_T \quad , \quad V_T=RI_T \ \Rightarrow\ V_T=-LSI_T$$

بنابراین مدار، معادل یک سلف با اندازه L− هانری یا ۱H− است. با توجه به این که دو پاسخ متفاوت بدست آمده تست اشکال دارد.

آزمون فصل دوازدهم

۱ـ در مدار زیر معادله‌ی $V_o(t)$ برابر با کدام گزینه است؟



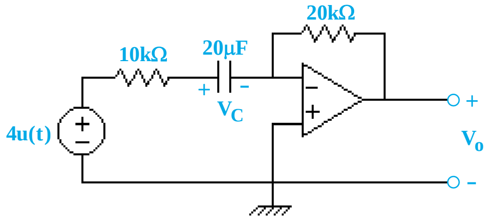
۱) $۸[e^{-\frac{t}{۳۰۰۰}}-۱]$

۲) $\frac{۲۰}{۳}[e^{-\frac{t}{۳۰۰۰}}-۱]$

۳) $۸[e^{-۰/۰۰۲۴t}-۱]$

۴) $\frac{۲۰}{۳}[e^{-۰/۰۰۲۴t}-۱]$

۲ـ در مدار زیر معادله‌ی $V_o(t)$ کدام گزینه است؟ $(V_C(۰^+)=۱v)$



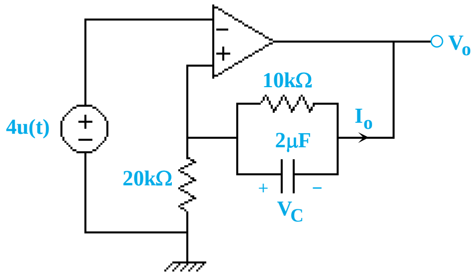
۱) $-۶e^{-\frac{t}{۵}}u(t)$

۲) $۶e^{-\frac{t}{۵}}u(t)$

۳) $۶e^{-۵t}u(t)$

۴) $-۶e^{-۵t}u(t)$

۳ـ معادله‌ی V_o در مدار زیر کدام گزینه است؟ $(V_C(۰^+)=۱v)$



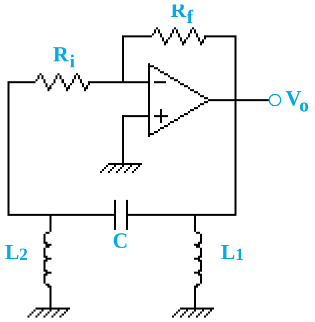
۱) $۶-۳e^{-۵۰t}$

۲) $۳-۳e^{-۵۰t}$

۳) $۳e^{-۵۰t}$

۴) $۶e^{-۵۰t}$

۴ـ در مدار زیر فرکانس رزونانس سیستم کدام گزینه است؟



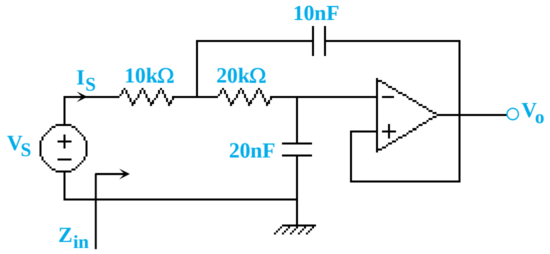
۱) $f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(L_۱+L_۲)C}}$

۲) $f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{L_۱C}}$

۳) $f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{CL_۲}}$

۴) $f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{CL_۱L_۲}}$

۵ـ در مدار زیر امپدانس ورودی برحسب اهم کدام است؟ $(\omega=۵۰۰۰\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{sec}})$



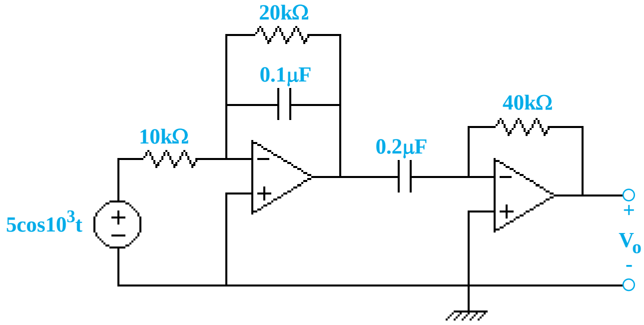
۱) $۲۱/۲۱\measuredangle-۴۵^\circ$

۲) $۱۱/۱۱\measuredangle-۴۵^\circ$

۳) $۵/۵\measuredangle-۴۵^\circ$

۴) $۷/۷\measuredangle-۴۵^\circ$

۶ـ معادله‌ی زمانی $V_o(t)$ برای مدار زیر کدام گزینه است؟



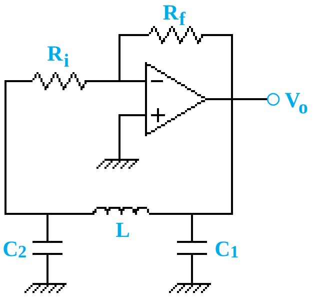
۱) $۲/۳۲\cos(۱۰^۳t-۱۲۰^\circ)$

۲) $۵/۲\cos(۱۰^۳t+۱۲۰^\circ)$

۳) $۳/۶\cos(۱۰^۳t+۲۶/۶^\circ)$

۴) $۷/۲\cos(۱۰^۲t+۲۶/۶^\circ)$

۷ـ فرکانس رزونانس مدار زیر کدام گزینه است؟



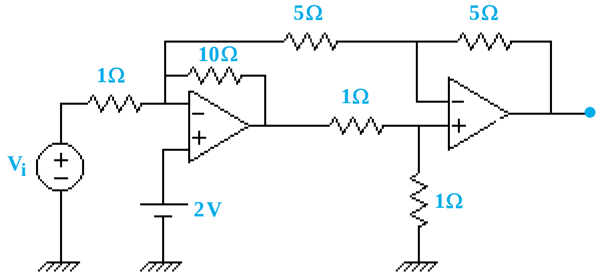
۱) $f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{L\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}}}$

۲) $f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{L\frac{C_۱}{C_۱+C_۲}}}$

۳) $f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC_۱C_۲}}$

۴) $f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{L\frac{C_۱}{C_۲}R_f}}$

۸ـ مدار زیر شامل دو تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل بوده که با منابع ولتاژ ۲۰± ولت، تغذیه شده‌اند. محدوده تغییرات V_i برای آن‌که هیچ‌کدام از تقویت‌کننده‌ها به اشباع نرود، برحسب ولت کدام است؟



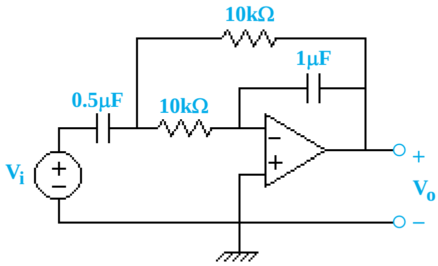
۱) $-۱/۴ < V_i < ۶/۲$

۲) $-۱/۴ < V_i < ۱/۸$

۳) $-۱/۸ < V_i < ۶/۶$

۴) $-۱/۸ < V_i < ۱/۸$

۹ـ در صورتی که تابع $\frac{V_o}{V_i}$ برابر $\frac{aS}{S^۲+bS+c}$ باشد، ضرایب c و b و a کدام است؟



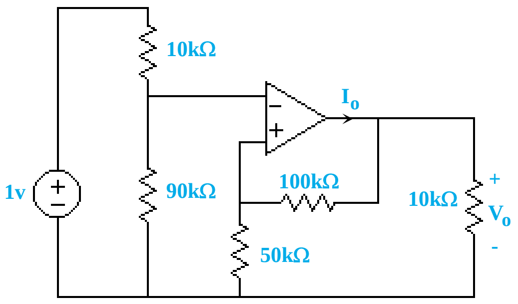
۱) $\begin{cases} a=-۵۰ \\ b=-۲۰۰ \\ c=۲۰۰۰ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a=۵۰ \\ b=۲۰۰ \\ c=۲۰۰۰ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a=۱۰۰ \\ b=-۴۰۰ \\ c=۲۰۰۰۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a=-۱۰۰ \\ b=۴۰۰ \\ c=۲۰۰۰۰ \end{cases}$

۱۰ـ در مدار زیر مقدار V_o برحسب ولت کدام است؟



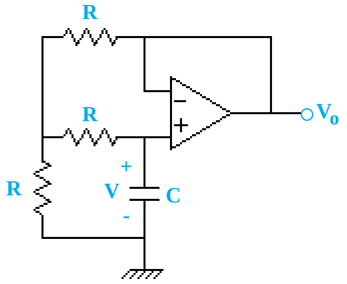
۱) ۱/۲

۲) ۲/۷

۳) ۳/۴

۴) ۶/۱

۱۱ـ در مدار زیر $V_C(۰^+)=۵v$ و $C=۱\mu F$ و $R=۱۰k\Omega$ می‌باشد. حال معادله‌ی $V_o(t)$ کدام گزینه است؟



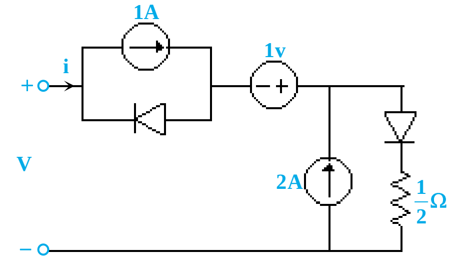
۱) $۵e^{-\frac{۳}{۱۰۰}t}$

۲) $۵e^{-\frac{۱۰۰}{۳}t}$

۳) $۵-۵e^{-\frac{۱۰۰}{۳}t}$

۴) $۵-۵e^{-\frac{۳}{۱۰۰}t}$

۱۲ـ به ازای کدام محدوده‌ی V در مدار مقابل، رابطه‌ی $i = ۲V$ برقرار است؟



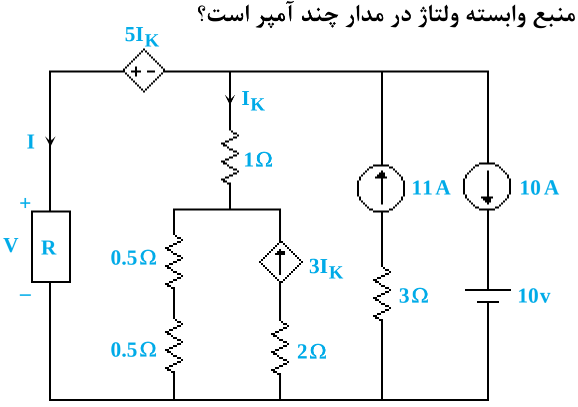
۱) $-۱ \le V \le \frac{۱}{۲}$

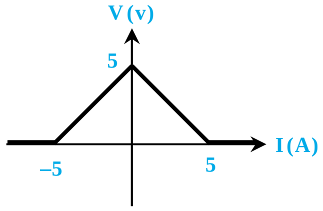
۲) $-۱ \le V \le ۱$

۳) $-\frac{۱}{۲} \le V \le ۱$

۴) $-\frac{۱}{۲} \le V \le \frac{۱}{۲}$

۱۳ـ در مدار زیر منحنی مشخصه مقاومت غیرخطی R داده شده است. حال جریان منبع وابسته ولتاژ در مدار چند آمپر است؟





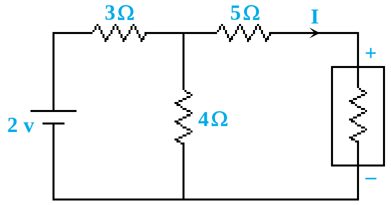
۱) ۰/۹۴

۲) ۰/۵۵

۳) ۰/۲۲

۴) ۰/۱۲

۱۴ـ در صورتی که یک مقاومت غیرخطی با معادله $I = \frac{\sqrt{۲}V}{\sqrt{۱-V^۲}}$ در مدار مفروض باشد، توان المان غیرخطی کدام است؟



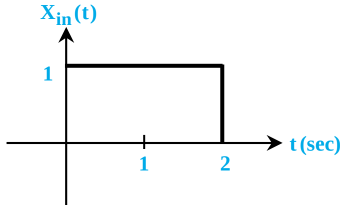
۱) ۱۱mw

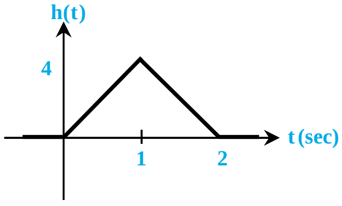
۲) ۷mw

۳) ۱۷mw

۴) ۲۰mw

۱۵ـ در یک مدار خطی فرم پاسخ ضربه سیستم به صورت مقابل است. در صورتی که ورودی $X_{in}(t)$ به مدار اعمال شود، پاسخ حالت صفر مدار کدام است؟





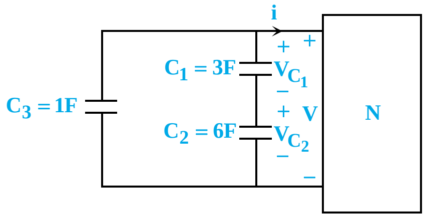
۱) $$y(t) = \begin{cases} ۲t^۳ & ۰ < t < ۱ \\ t^۳ - t + ۱ & ۱ < t < ۳ \\ ۱۶ - t^۲ + t & ۳ < t < ۴ \end{cases}$$

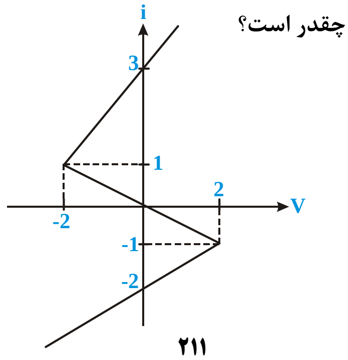
۲) $$y(t) = \begin{cases} t^۲ & ۰ < t < ۱ \\ t^۲ - t + ۴ & ۱ < t < ۳ \\ ۱۶ - t^۲ + t & ۳ < t < ۴ \end{cases}$$

۳) $$y(t) = \begin{cases} t^۲ & ۰ < t < ۱ \\ ۸t - t^۲ & ۱ < t < ۳ \\ ۳۲ + t^۲ + t & ۳ < t < ۴ \end{cases}$$

۴) $$y(t) = \begin{cases} ۲t^۲ & ۰ < t < ۱ \\ ۸t - ۲t^۲ - ۴ & ۱ < t < ۳ \\ ۳۲ - ۱۶t + ۲t^۲ & ۳ < t < ۴ \end{cases}$$

۱۶ـ در مدار شکل زیر، N یک قطبی مقاومتی غیرخطی است که مشخصه $V - i$ آن داده شده است. اگر ولتاژ اولیه خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ به‌ترتیب برابر با ۴v و ۲v باشد، بعد از گذشت زمان $۳Ln\frac{۳}{۲}$ ثانیه ولتاژ V چقدر است؟





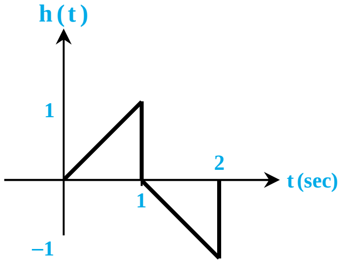
۱) ۴

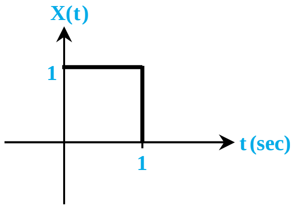
۲) ۳/۵

۳) ۳

۴) ۴/۵

۱۷ـ پاسخ ضربه h(t) سیستمی به صورت زیر است. پاسخ سیستم به ورودی X(t) در فاصله $۱ < t < ۲$ کدام است؟





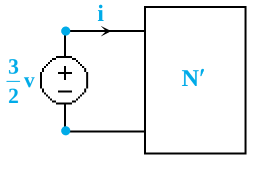
۱) $y(t) = -t^{۲} - ۲t + \frac{۱}{۲}$

۲) $y(t) = -t^{۲} + ۲t - \frac{۱}{۲}$

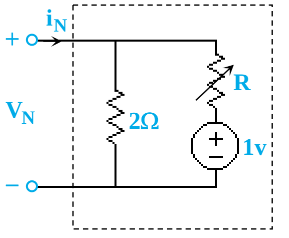
۳) $y(t) = -t^{۲} - ۲t - \frac{۱}{۲}$

۴) $y(t) = t^{۲} + ۲t - \frac{۱}{۲}$

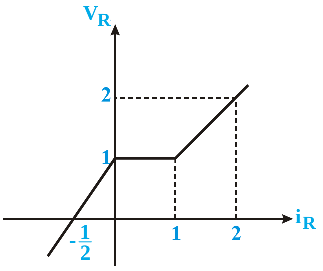
۱۸ـ شبکه N با مقاومت غیرخطی R که مشخصه‌ی ولتاژ ـ جریان آن به شکل نشان داده شده است را همراه با مدار دوگان آن N′ در نظر بگیرید. در مدار شکل (۱)، شبکه N′ را با چه مقاومتی می‌توانیم جایگزین کنیم به شکلی که جریان i تغییر نکند؟



شکل (۱)



N



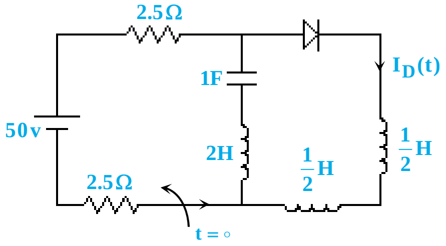
۱) $\frac{۳}{۴}$ اهم

۲) $\frac{۳}{۲}$ اهم

۳) ۱ اهم

۴) ۳ اهم

۱۹ـ در مدار زیر معادله‌ی جریان عبوری از دیود کدام است؟



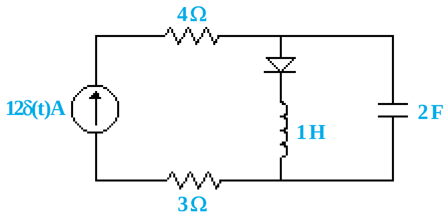
۱) $I_D(t) = \frac{۱۰}{۳}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۳}t \quad (۰ < t < \frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi)$

۲) $I_D(t) = ۱۰\cos ۳t \quad (۰ < t < \pi)$

۳) $I_D(t) = \frac{۲۰}{۳}\cos\sqrt{۳}t \quad (۰ < t < \frac{\pi}{۳})$

۴) $I_D(t) = ۱۰\cos\frac{\sqrt{۳}}{۳}t \quad (۰ < t < \frac{\pi}{۳})$

۲۰ـ در مدار زیر مدت زمان غیرصفر بودن جریان سلف برحسب ثانیه کدام است؟



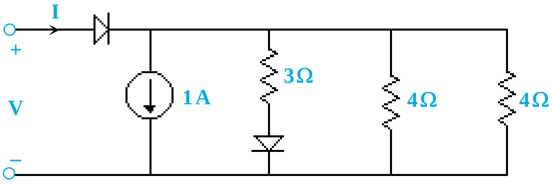
۱) $t = \pi$

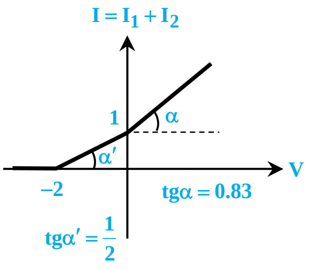
۲) $t = ۲\sqrt{۲}\pi$

۳) $t = \sqrt{۲}$

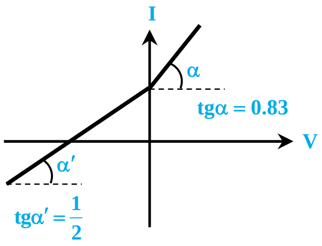
۴) $t = \sqrt{۲}\pi$

۲۱ـ منحنی مشخصه‌ی (I − V) مدار زیر در کدام گزینه رسم شده است؟

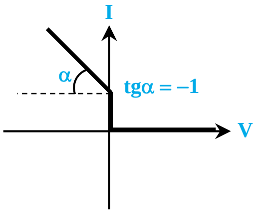




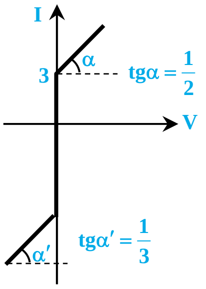
(۱)



(۲)

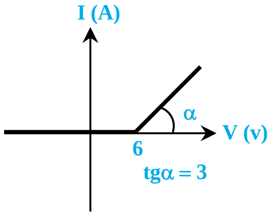


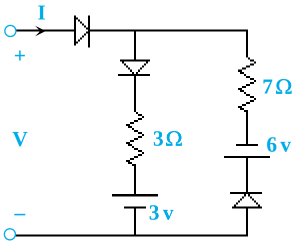
(۳)



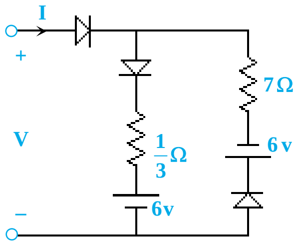
(۴)

۲۲ـ کدامیک از مدارات زیر منحنی مشخصه (I – V) زیر را می‌سازد؟

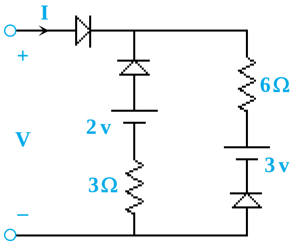




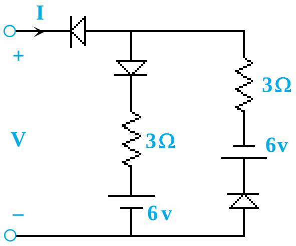
(۱)



(۲)

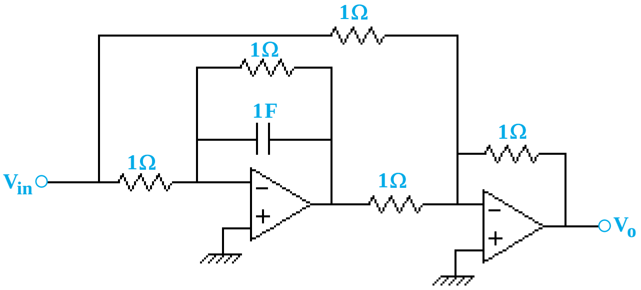


(۳)



(۴)

۲۳ـ معادله‌ی دیفرانسیل ارتباطی V_o با V_{in} کدام است؟



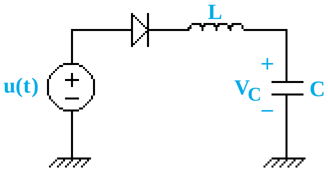
۱) $\frac{dV_o}{dt}+V_o=-\frac{dV_{in}}{dt}$

۲) $\frac{۲dV_o}{dt}+V_o=-\frac{dV_{in}}{dt}$

۳) $\frac{۲dV_o}{dt}-V_o=\frac{dV_{in}}{dt}$

۴) $-\frac{۲dV_o}{dt}-V_o=-\frac{۲dV_{in}}{dt}$

۲۴ـ در مدار زیر خازن تا چه مقدار ولتاژ برحسب ولت شارژ می‌شود؟



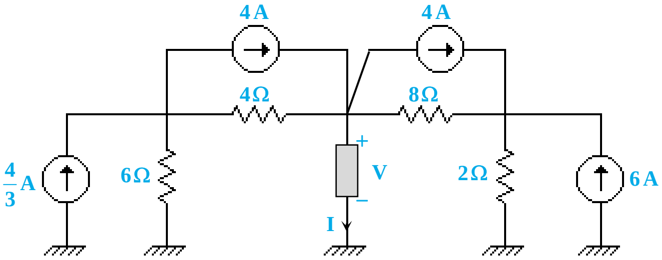
۱) ۱

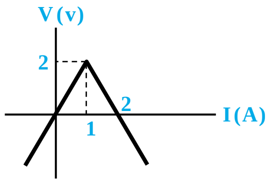
۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۳

۲۵ـ در مدار زیر جریان المان غیرخطی برحسب آمپر کدام است؟





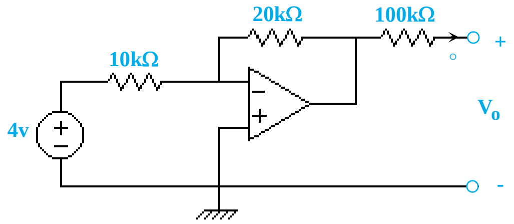
۱) $-\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) $-\frac{۳}{۲}$

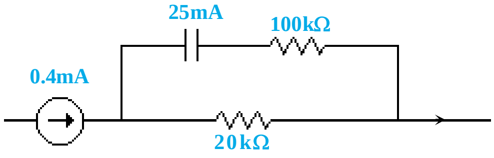
۴) $\frac{۲}{۷}$

پاسخنامه آزمون فصل دوازدهم



۱ـ گزینه «۱» برای حل این تست بهتر است با محاسبه $V_{o}(\infty)$ و ثابت زمانی مدار، با روش تستی به پاسخ صحیح دست پیدا کنیم. مقدار $V_{o}(\infty)$ به راحتی با مدار باز کردن خازن به دست می‌آید:

$$V_{o} = -\frac{۲۰}{۱۰}\times ۴ = -۸v$$



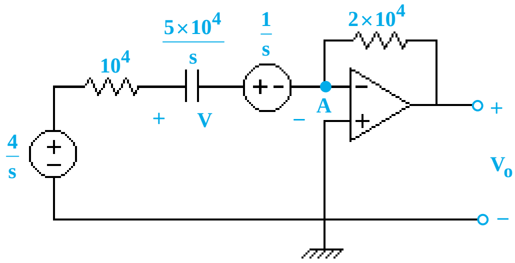
از طرفی با مدلسازی مدار ماقبل آپ امپ به صورت یک منبع جریان می‌توان به راحتی ثابت زمانی مدار را محاسبه کرد:

$$C_T = ۲۵mF\,,\, R_T = (۱۰۰+۲۰)k\Omega = ۱۲۰\,k\Omega$$

$$\Rightarrow \tau = RC = ۲۵\times۱۰^{-۳}\times۱۲۰\times۱۰^{۳} = ۳۰۰۰sec$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای τ و $V_{o}(\infty)$، گزینه (۱) پاسخ تست می‌باشد.

۲ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

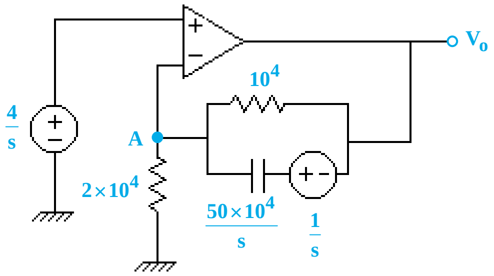


با توجه به برقراری فیدبک منفی، V_A برابر صفر می‌باشد. حال با اعمال KCL در گره A داریم:

$$\frac{۰-\frac{۴}{s}+\frac{۱}{s}}{۱۰^{۴}+\frac{۵\times۱۰^{۴}}{s}}+\frac{۰-V_o}{۲\times۱۰^{۴}}=۰ \Rightarrow \frac{-۳}{s+۵}-\frac{V_o}{۲}=۰ \rightarrow V_o=\frac{-۶}{s+۵}$$

$$\Rightarrow V_o(t) = -۶e^{-۵t}\,u(t)$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

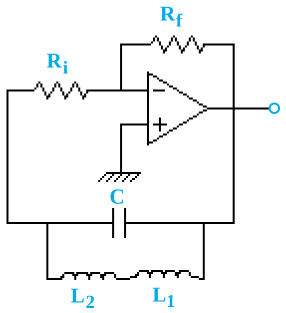


با توجه به برقراری فیدبک منفی، V_A برابر ولتاژ منبع می‌باشد. حال با اعمال KCL در گره‌ی A داریم:

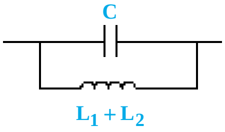
$$\frac{\frac{۴}{s}}{۲\times۱۰^{۴}}+\frac{\frac{۴}{s}-V_o}{۱۰^{۴}}+\frac{\frac{۴}{s}-\frac{۱}{s}-V_o}{\frac{۵۰\times۱۰^{۴}}{s}}=۰ \Rightarrow \frac{۶}{s}-V_o+\frac{۳-sV_o}{۵۰}=۰ \Rightarrow ۳۰۰-۵۰sV_o+۳s-s^{۲}V_o=۰$$

$$\Rightarrow V_o=\frac{۳s+۳۰۰}{s(s+۵۰)}=\frac{۶}{s}-\frac{۳}{s+۵۰} \Rightarrow V_o(t)=(۶-۳e^{-۵۰t})u(t)$$

۴ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه ورودی مثبت آپ امپ جریانی نمی‌کشد، بنابراین دو سر $L_۲,L_۱$ که زمین شده‌اند را می‌توانیم به هم وصل کنیم یعنی:

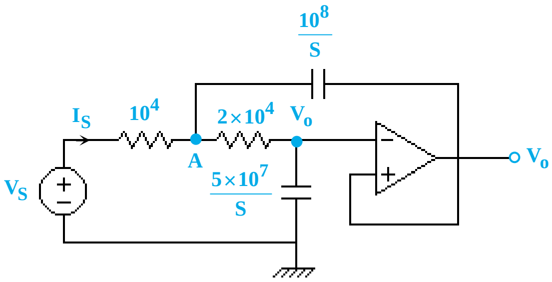


بنابراین فرکانس تشدید برابر است با:



$$\Rightarrow f_r=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(L_۱+L_۲)C}}$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



با توجه به فیدبک منفی، ولتاژ سر منفی آپ امپ برابر V_o می‌باشد. حال داریم:

$$V_A = V_S - ۱۰^۴ I_S$$

$$\text{KCL}(A):\ I_S = \frac{V_S - ۱۰^۴ I_S - V_o}{\frac{۱۰^۸}{s}} + \frac{V_S - ۱۰^۴ I_S - V_o}{۲\times۱۰^۴} \Rightarrow \xrightarrow{s=j۵۰۰۰} (j+۱)V_S-(j+۱)V_o = ۱۰^۴(j+۳)I_S \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

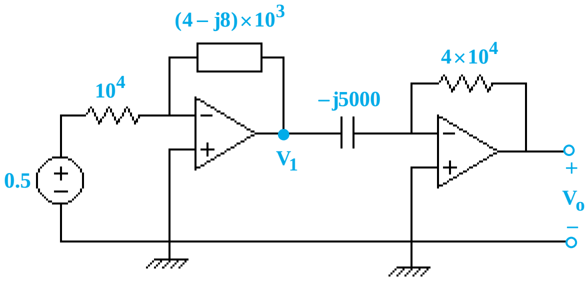
$$\frac{V_S - ۱۰^۴ I_S - V_o}{۲\times۱۰^۴} = \frac{V_o}{\frac{۵\times۱۰^۷}{s}} \xrightarrow{s=j۵۰۰۰} V_S - ۱۰^۴ I_S = (j۲+۱)\,V_o \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow (j+۱)V_S - \frac{j+۱}{j۲+۱}[V_S - ۱۰^۴ I_S] = ۱۰^۴(j+۳)I_S$$

$$\Rightarrow [(j+۱)(j۲+۱)-(j+۱)]V_S = [۱۰^۴(j+۳)(j۲+۱)-(j+۱)\times۱۰^۴]I_S$$

$$\Rightarrow (-۲+j۲)V_S = ۱۰^۴\times j۶\ I_S \rightarrow Z_{in} = ۲۱/۲۱ \measuredangle -۴۵^\circ\ k\Omega$$

۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه فرکانس مدار برابر $۱۰^۳$ می‌باشد، مدار را به حوزه‌ی دائمی سینوسی می‌بریم:

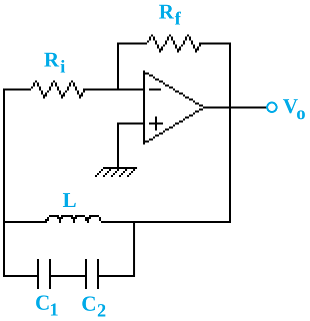


بنابراین داریم:

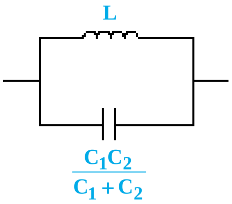
$$V_۱ = -\frac{(۴-j۸)\times۱۰^۳}{۱۰^۴}\times۰/۵ = -(۰/۲-j۰/۴)\ ,\ V_o = \frac{-۴\times۱۰^۴}{-j۵۰۰۰}V_۱ = -j۸\,V_۱$$

$$\Rightarrow V_o = -(۰/۲-j۰/۴)\times(-j۸) = ۳/۶ \measuredangle ۲۶/۶^\circ \rightarrow V_o(t) = ۳/۶\cos(۱۰^۳ t + ۲۶/۶^\circ)$$

۷ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه سر مثبت آپ امپ جریانی نمی‌کشد، بنابراین جریان‌های $C_۲, C_۱$ با هم یکی بوده و با هم سری می‌شوند.

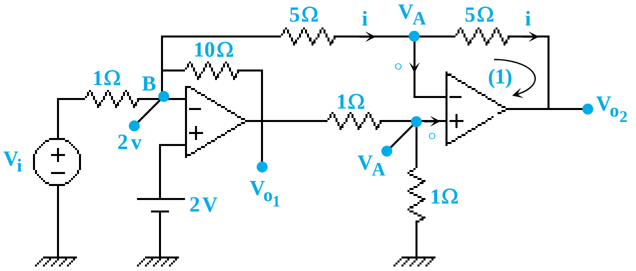


بنابراین فرکانس رزونانس مدار برابر است با:



$$\Rightarrow f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}.L}}$$

۸ـ گزینه«۱» ابتدا با تحلیل مدار ولتاژ خروجی تقویت‌کننده‌ها را بر حسب V_i به‌دست می‌آوریم. بدین منظور مطابق شکل، با استفاده از خواص تقویت‌کننده‌های عملیاتی داریم:



$$V_A = V_{o_۱} \times \frac{۱}{۱+۱} = \frac{V_{o_۱}}{۲}$$

$$i = \frac{۲-V_A}{۵} = \frac{۲-\frac{V_{o_۱}}{۲}}{۵}$$

$$\text{KCL B}: \frac{V_i - ۲}{۱} = \frac{۲-V_{o_۱}}{۱۰} + i = \frac{۲-V_{o_۱}}{۱۰} + \frac{۲-\frac{V_{o_۱}}{۲}}{۵} = ۰/۶ - ۰/۲V_{o_۱}$$

$$\Rightarrow V_{o_۱} = -۵V_i + ۱۳ \qquad (۱)$$

$$\text{KVL}(۱): V_{o_۲} = V_A - ۵i = V_A - (\frac{۲-V_A}{۵}) \times ۵ = -۲ + ۲V_A = -۲ + V_{o_۱}$$

$$\Rightarrow V_{o_۲} = -۵V_i + ۱۱ \qquad (۲)$$

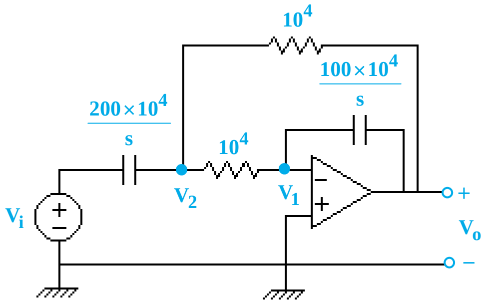
می‌دانیم که اگر ولتاژ خروجی تقویت‌کننده‌های عملیاتی به مقدار ولتاژ تغذیه مثبت یا منفی آن‌ها برسد، به اشباع می‌روند؛ لذا برای جلوگیری از به اشباع رفتن آنها، باید ولتاژ خروجی آن‌ها بین تغذیه مثبت و منفی‌شان قرار گیرد. بنابراین داریم:

$$-۲۰ < V_{o_۱} < ۲۰ \Rightarrow -۲۰ < -۵V_i + ۱۳ < ۲۰ \Rightarrow -۳۳ < -۵V_i < ۷ \Rightarrow -\frac{۷}{۵} < V_i < \frac{۳۳}{۵}$$

$$-۲۰ < V_{o_۲} < ۲۰ \Rightarrow -۲۰ < -۵V_i + ۱۱ < ۲۰ \Rightarrow -۳۱ < -۵V_i < ۹ \Rightarrow -\frac{۹}{۵} < V_i < \frac{۳۱}{۵}$$

اشتراک دو بازه فوق به صورت $[-\frac{۷}{۵}, \frac{۳۱}{۵}]$ یا $[-۱/۴, ۶/۲]$ خواهد بود که همان محدوده مجاز V_i می‌باشد.

۹ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



با توجه به برقراری فیدبک منفی در آپ امپ، $V_۱$ برابر صفر می‌باشد. حال با اعمال KCL در گره‌های ۱و۲ داریم:

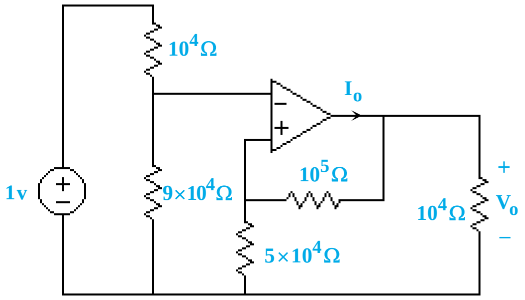
$$\text{KCL}(۱): \frac{۰-V_۲}{۱۰^۴} + \frac{۰-V_o}{\frac{۱۰۰\times۱۰^۴}{s}} = ۰ \Rightarrow V_۲ = \frac{-s}{۱۰۰} V_o \quad (۱)$$

$$\text{KCL}(۲): \frac{V_۲ - V_i}{\frac{۲۰۰\times۱۰^۴}{s}} + \frac{V_۲ - ۰}{۱۰^۴} + \frac{V_۲ - V_o}{۱۰^۴} = ۰ \Rightarrow (\frac{s}{۲۰۰} + ۲) V_۲ = \frac{sV_i}{۲۰۰} + V_o \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \to -(\frac{s+۴۰۰}{۲۰۰})\frac{s}{۱۰۰} V_o = \frac{sV_i}{۲۰۰} + V_o \Rightarrow V_o(s^۲ + ۴۰۰s + ۲۰۰۰۰) = -۱۰۰sV_i$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{-۱۰۰sV_i}{s^۲ + ۴۰۰s + ۲۰۰۰۰} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱۰۰ \\ b = ۴۰۰ \\ c = ۲۰۰۰۰ \end{cases}$$

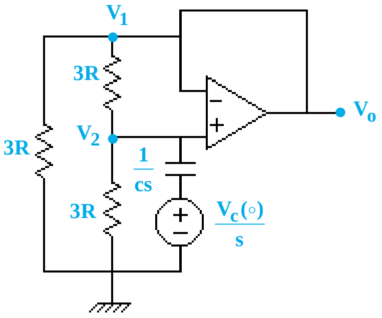
۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به برقراری فیدبک منفی، ولتاژ سرهای مثبت و منفی آپ امپ برابر است. حال با توجه به تقسیم ولتاژ داریم:



$$V_+ = V_- = \frac{۹\times۱۰^۴}{(۹+۱)\times۱۰^۴} = ۰/۹ \text{ v}$$

$$V_+ = \frac{۵\times۱۰^۴}{۵\times۱۰^۴ + ۱۰\times۱۰^۴} V_o \to V_o = ۳V_+ = ۲/۷ \text{ v}$$

۱۱ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و سپس با تبدیل ستاره به مثلث داریم:



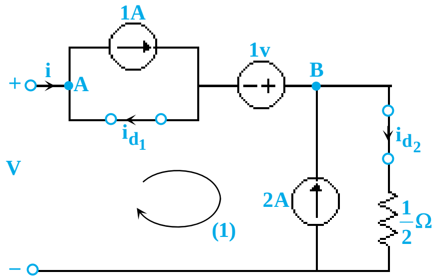
از طرفی با توجه به برقراری فیدبک منفی در آپ امپ داریم:

$$V_۱ = V_۲ = V_O$$

حال با اعمال KCL در گره ۲ داریم:

$$\frac{V_۲}{۳R} + Cs(V_۲ - \frac{V_C(۰)}{s}) + \frac{V_۲ - V_۱}{۳R} = ۰ \to \frac{V_O}{۳R} + CsV_O - CV_C(۰) = ۰ \Rightarrow V_O = \frac{V_C(۰)}{s + \frac{۱}{۳RC}} \to V_O(t) = V_C(۰)e^{-\frac{t}{۳RC}} = ۵e^{-\frac{۱۰۰}{۳}t}$$

۱۲ـ گزینه «۱» استراتژی مناسب برای حل این تست، در نظر گرفتن وضعیت‌های مختلف دیودها و سپس محاسبه‌ی رابطه‌ی میان V و i و همچنین محدوده‌ی مورد نیاز برای V و i جهت رخداد وضعیت موردنظر می‌باشد. با فرض این که دو دیود موجود در مدار روشن باشند، داریم:



$$KCL\ \ A: i_{d_۱} = ۱ - i \qquad (۱)$$

$$KCL\ \ B: i_{d_۲} = ۲ + i \qquad (۲)$$

$$KVL\ \ (۱): V = ۰ - ۱ + \frac{۱}{۲} \times i_{d_۲} \xrightarrow{(۲)} V = -۱ + \frac{۱}{۲} \times (۲ + i) = \frac{۱}{۲}i \Rightarrow i = ۲V$$

می‌بینیم که در این حالت رابطه‌ی $i = ۲V$ برقرار است. حال دقت کنید زمانی دیودها می‌توانند روشن باشند که جریان آنها مثبت باشد؛ لذا براساس روابط (۱) و (۲) داریم:

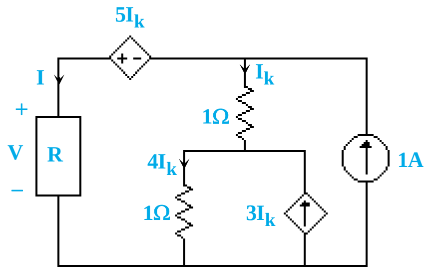
$$\left.\begin{aligned} i_{d_۱} &= ۱ - i \geq ۰ \Rightarrow i \leq ۱ \\ i_{d_۲} &= ۲ + i \geq ۰ \Rightarrow i \geq -۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow -۲ \leq i \leq ۱$$

و می‌توان نتیجه گرفت:

$$i = ۲V \Rightarrow -۱ \leq V \leq \frac{۱}{۲}$$

بنابراین به ازای ولتاژهای $-۱ \leq V \leq \frac{۱}{۲}$، رابطه‌ی $i = ۲V$ برقرار خواهد بود. در سایر ولتاژها یکی از دیودها قطع بوده و جریان i برابر یکی از مقادیر ۱ یا ۲− آمپر خواهد بود.

۱۳ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را ساده می‌کنیم:



$$I = ۱ - I_k$$

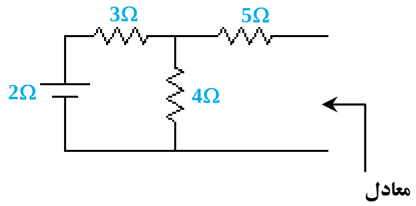
حال با اعمال KVL در حلقه‌ی چپ مدار داریم:

$$-V + ۵I_k + I_k + ۴I_k = ۰ \to V = ۱۰I_k = ۱۰ - ۱۰I$$

حال معادله‌ی بدست آمده را با منحنی مشخصه مقاومت غیرخطی قطع می‌دهیم:

$$۱۰ - ۱۰I = ۵ - I \to ۹I = ۵ \to I = \frac{۵}{۹} = ۰/۵۵A$$

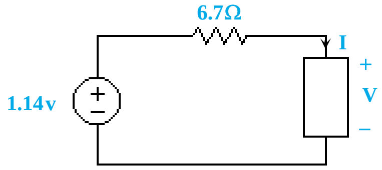
۱۴ـ گزینه «۳» ابتدا مدار معادل تونن دیده شده از دو سر مقاومت غیرخطی را محاسبه می‌کنیم:



$$V_{th} = V_{oc} = \frac{۴}{۴ + ۳} \times ۲ = \frac{۸}{۷}v$$

$$R_{th} = ۴ \| ۳ + ۵ = \frac{۴۷}{۷}\Omega$$

بنابراین داریم:



$$KVL: -۱/۱۴ + ۶/۷I + V = ۰ \Rightarrow I = \frac{\sqrt{۲}\,V}{\sqrt{۱-V^۲}} = \frac{۱/۱۴ - V}{۶/۷}$$

$$\Rightarrow ۹۰V^۲ = (۱-V^۲)(V^۲ - ۲/۲۸V + ۱/۳)$$

$$\rightarrow V^۴ - ۲/۲۸V^۳ + ۹۰/۳V^۲ + ۲/۲۸V - ۱/۳ = ۰$$

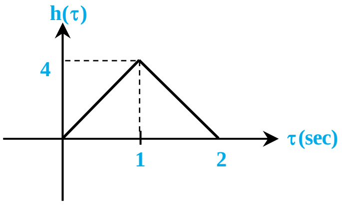
$$V = ۰/۱۱V \rightarrow I = ۰/۱۵۶A \rightarrow P = ۱۷mw$$

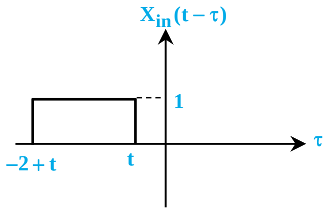
۱۵ـ گزینه «۴» پاسخ حالت صفر برابر است با:

$$y(t) = x_{in}(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{in}(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$t < ۰ \rightarrow y(t) = ۰$$

$$۰ < t < ۱ \rightarrow y(t) = \int_{۰}^{t} ۴\tau d\tau = ۲t^۲$$





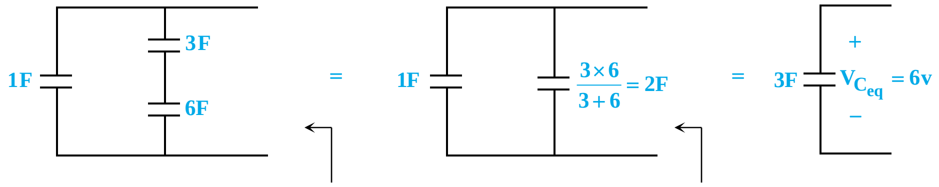
بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح می‌باشد.

۱۶ـ گزینه «۳» در این سؤال باید سمت چپ مدار را که شامل خازن‌ها است، ساده کرده و به یک خازن معادل برسیم. سپس به علت غیرخطی بودن ساختار مقاومتی جعبه N با استفاده از معادله دیفرانسیل، معادله ولتاژ V را به دست آورده و بعد از گذشت زمان $t = ۳Ln\frac{۳}{۲}$ ثانیه، مقدار V را به‌دست می‌آوریم.

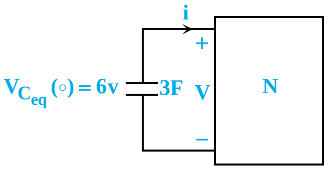
حال سراغ ساده‌سازی و به دست آوردن خازن معادل سمت چپ می‌رویم.

ولتاژ دو سر خازن $C_۳$ برابر با جمع ولتاژ خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ است.

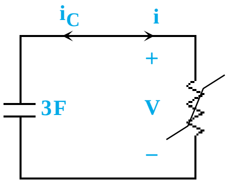
بنابراین ولتاژ دو سر خازن $C_۳$ برابر است با: $۲ + ۴ = ۶v$. با ساده‌سازی خازن‌های سری و موازی داریم:



بنابراین مدار به‌صورت زیر ساده می‌شود:



از آن‌جا که ساختار N مقاومت غیرخطی است، مدار را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:



می‌دانیم که در مدار روبه‌رو:

$$i + i_C = ۰ \qquad (۱)$$

از آن‌جا که ولتاژ اولیه $V_{C_{eq}}(۰) = ۶v$ می‌باشد و پرش ولتاژ نداریم، با بررسی مشخصه مقاومت غیرخطی می‌بینیم که در تکه خط بالایی قرار داریم که معادله آن به‌صورت $i = V + ۳$ می‌باشد. همچنین می‌دانیم که $i_C = C\frac{dV}{dt} = ۳\frac{dV}{dt}$.

حال طبق رابطه (۱) داریم:

$$\begin{cases} ۳\frac{dV}{dt} + V + ۳ = ۰ \\ V(۰) = ۶v \end{cases} \Rightarrow V(t) = ۹e^{-\frac{t}{۳}} - ۳ \qquad (۲)$$

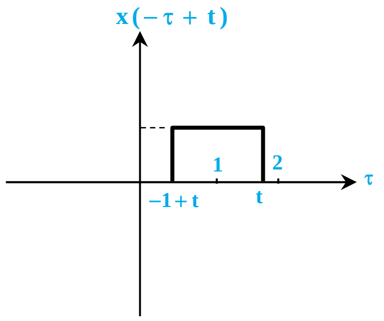
با جایگذاری $t = ۳Ln\frac{۳}{۲}$ در رابطه (۲) داریم:

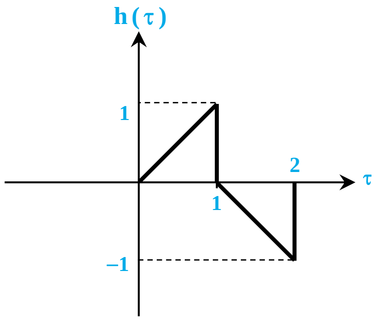
$$V(t = ۳Ln\frac{۳}{۲}) = ۹e^{-Ln\frac{۳}{۲}} - ۳ = ۹(\frac{۲}{۳}) - ۳ = ۳v$$

۱۷ـ گزینه «۲» پاسخ حالت صفر سیستم برابر است با:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

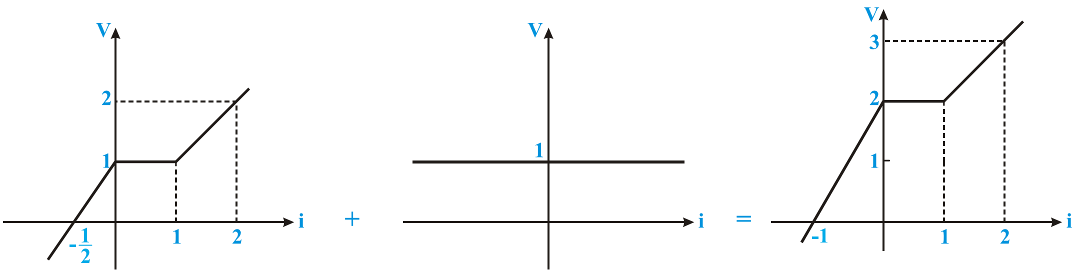
برای $۱<t<۲$ داریم:



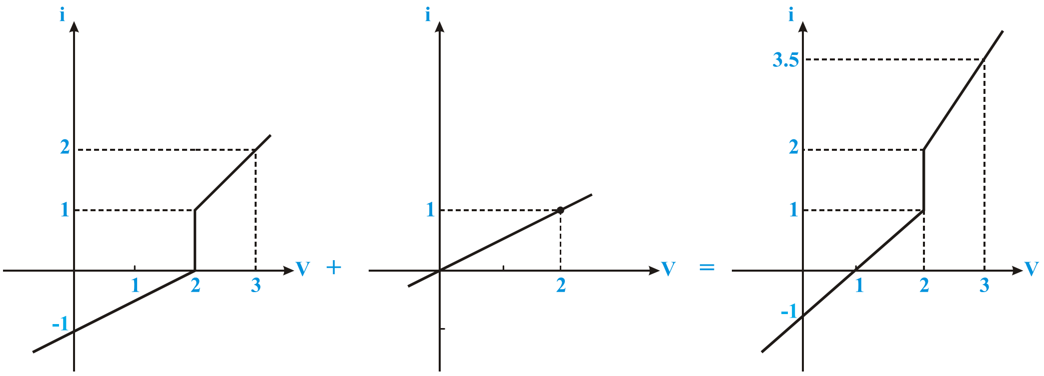


$$y(t)=\int_{-۱+t}^{۱}\tau d\tau+\int_{۱}^{t}(-\tau+۱)d\tau=\frac{\tau^۲}{۲}]_{-۱+t}^{۱}+(-\frac{\tau^۲}{۲}+\tau)]_{۱}^{t}=\frac{۱-(t-۱)^۲}{۲}+\frac{(-t^۲+۲t)-(-۱+۲)}{۲}\Rightarrow y(t)=-t^۲+۲t-\frac{۱}{۲}$$

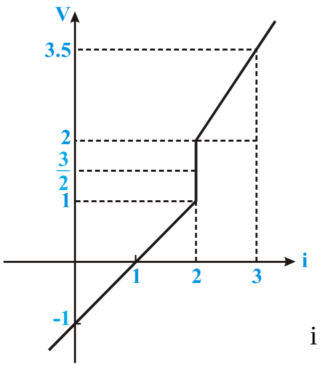
۱۸ـ گزینه «۱» برای حل این تست ابتدا باید این نکته را در نظر گرفت که با توجه به تساوی ولتاژهای یک مدار با جریان‌های مدار دوگان و همچنین جریان‌های آن مدار با ولتاژهای مدار دوگان، منحنی مشخصه $v-i$ یک مدار، مشخصه $i-v$ مدار دوگان آن می‌باشد و بالعکس. لذا می‌توانیم بدون ترسیم مدار دوگانِ شبکه N یا همان N'، مشخصه‌ی $v-i$ آن را تعیین کنیم. برای این کار باید مشخصه $i-v$ مدار N را به‌دست آوریم. با توجه به سری شدن مقاومت غیرخطی R با منبع ولتاژ یک ولتی، مشخصه $v-i$ این دو المان در شاخه‌ی مربوطه با هم جمع می‌شود:



حال برای یافتن مشخصه $i-v$ شبکه N، می‌توان مشخصه $i-v$ شاخه‌ی مذکور و مقاومت ۲ اهمی را با هم جمع کرد:



با توجه به توضیحات ابتدایی مشخصه $i-v$ شبکه N، همان مشخصه $v-i$ شبکه N' است:



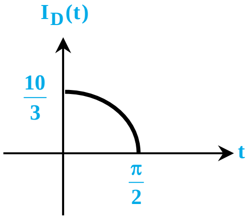
مطابق با این مشخصه به ازای $V=\frac{۳}{۲}v$ داریم:

$i=۲A$

حال طبق قضیه جانشینی می‌توان شبکه N را با مقاومت R جایگزین نمود که مقدار آن برابر است با:

$$R=\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}\Omega$$

۱۹ـ گزینه «۱» می‌دانیم دیود تا زمانی که جریانش مثبت است، روشن بوده و به محض اینکه جریان صفر شده و می‌خواهد منفی شود، دیود خاموش می‌شود و اجازه‌ی عبور جریان منفی نمی‌دهد. حال با بررسی گزینه‌ها داریم:



گزینه‌ی ۱:

$$۰<t<\frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi \to ۰<\frac{\sqrt{۳}}{۳}t<\frac{\pi}{۲}$$

پس گزینه‌ی ۱ امکان‌پذیر است.

گزینه‌ی ۲:

$۰<t<\pi \to ۰<۳t<۳\pi \to$ $\cos ۳t$ در بازه‌هایی منفی بوده و قابل قبول نمی‌باشد.

گزینه‌ی ۳:

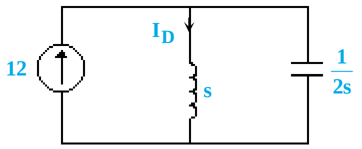
$۰<t<\frac{\pi}{۳}\to ۰<\sqrt{۳}t<\frac{\sqrt{۳}\pi}{۳}\to$ $\cos\sqrt{۳}t$ در بازه‌ی $\frac{\pi}{۲}<\sqrt{۳}t<\frac{\sqrt{۳}\pi}{۳}$ منفی بوده و قابل قبول نیست.

گزینه‌ی ۴:

$۰<t<\frac{\pi}{۳}\to ۰<\frac{\sqrt{۳}}{۳}t<\frac{\sqrt{۳}\pi}{۹}\to$

$\cos\frac{\sqrt{۳}}{۳}t$ در این بازه، همواره مثبت است، ولی با توجه به اینکه در انتهای بازه مقدار I_D صفر نمی‌باشد، قابل قبول نیست.

۲۰ـ گزینه «۴» ابتدا فرض می‌کنیم دیود روشن باشد و مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم. حال با محاسبه‌ی جریان دیود و به دست آوردن لحظه‌ی صفر شدن جریان آن، مدت زمان هدایت دیود و یا همان مدت زمان غیر صفر بودن جریان سلف را بدست می‌آوریم:

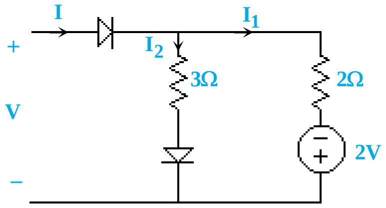


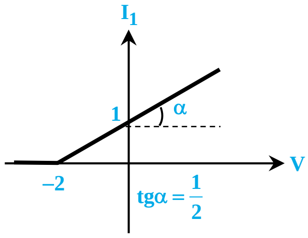
$$\Rightarrow I_D=\frac{\frac{۱}{۲s}}{s+\frac{۱}{۲s}}\times ۱۲=\frac{۱۲}{۲s^۲+۱}=\frac{۶}{s^۲+\frac{۱}{۲}}$$

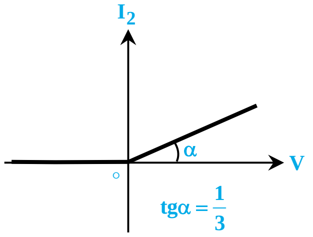
$$\Rightarrow I_D(t)=۶\sqrt{۲}\sin\frac{t}{\sqrt{۲}}$$

$$I_D(t)>۰\to ۰<\frac{t}{\sqrt{۲}}<\pi\to ۰<t<\sqrt{۲}\pi\to t_{on}=\sqrt{۲}\pi(\text{sec})$$

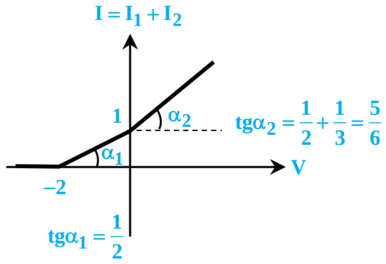
۲۱ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را با استفاده از تبدیل نورتن به تونن، به دو شاخه‌ی موازی تبدیل کرده و سپس هر شاخه‌ی آن را جداگانه تحلیل می‌کنیم.





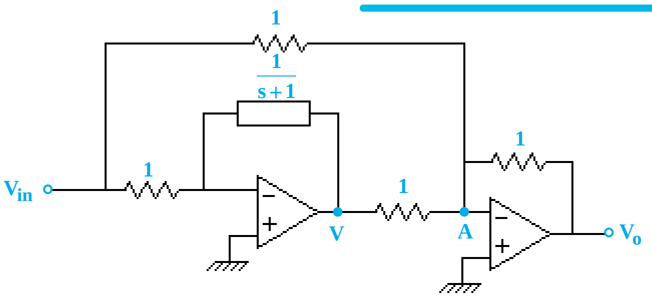


حال جریان I را از مجموع این دو جریان به دست می‌آوریم:



۲۲ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه به ازای ولتاژهای منفی جریان صفر می‌باشد، بنابراین دیود ورودی باید بـه صـورت مسـتقیم قـرار داشـته باشـد. بنـابراین گزینه‌ی ۴ نادرست است. از طرفی در گزینه‌ی ۳ دیود هر دو شاخه‌ی موازی به صورت معکوس بسته شده است، بنابراین مسیری برای عبـور جریـان ورودی در این حالت وجود ندارد و جریان ورودی همواره برابر صفر خواهد بود. پس گزینه‌ی ۳ هم نادرست خواهد بود. در گزینه‌های ۱و۲ فقط دیود شاخه‌ی موازی سمت چپ، هم‌جهت با ورودی می‌باشد، بنابراین جریان ورودی تنها از این مسیر عبور خواهد کرد. از آنجا که شروع برقراری جریان ورودی در ولتـاژ ۶ ولـت می‌باشد، پس در سمت منفی دیود شاخه‌ی موازی چپ، باید منبع ولتاژ ۶ ولتی قرار گیرد و همچنین با توجه به اینکه شـیب منفـی $I-V$ بـرای $V>۶$ برابر ۳ می‌باشد، بنابراین مقاومت سری با آن نیز باید $\frac{۱}{۳}$ اهم باشد. پس گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح می‌باشد.

۲۳ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



با توجه به اینکه در هر دو آپ امپ فیدبک منفی برقرار است، بنـابراین داریم:

$$V_+ = V_- = ۰$$

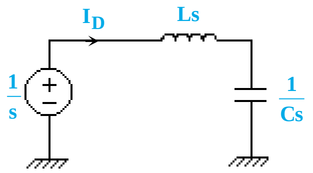
$$V = -\frac{\frac{۱}{s+۱}}{۱} V_{in} = -\frac{۱}{s+۱} V_{in}$$

$$KCL(A): \frac{۰-V}{۱} + \frac{۰-V_{in}}{۱} + \frac{۰-V_o}{۱} = ۰ \Rightarrow V_o = -V - V_{in} = [\frac{۱}{s+۱} - ۱]V_{in} = \frac{-s}{s+۱} V_{in}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{dV_o}{dt} + V_o = -\frac{dV_{in}}{dt}$$

۲۴ـ گزینه «۲» با توجه به مثبت بودن منبع ولتاژ در زمان‌های مثبت و اینکه خازن بدون شرط اولیه می‌باشد، ابتدا دیود روشن می‌شود. حال بـرای بدسـت آوردن ولتاژ شارژ خازن، زمان خاموش شدن دیود را محاسبه کرده و ولتاژ خازن را در آن زمان به دست می‌آوریم:



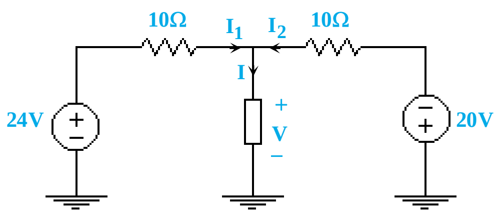
$$\Rightarrow I_D = \frac{\frac{۱}{s}}{Ls + \frac{۱}{Cs}} = \frac{\frac{۱}{L}}{s^۲ + \frac{۱}{LC}}$$

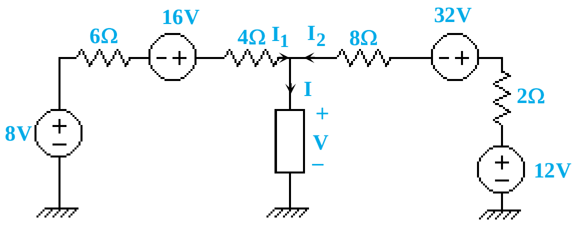
$$\Rightarrow I_D(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\frac{t}{\sqrt{LC}} \rightarrow V_C(t) = \frac{۱}{C}\int_۰^t I_D(t)dt = ۱ - \cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

حال با توجه به اینکه جریان دیود در لحظه‌ی $t = \pi\sqrt{Lc}$ برابر صفر می‌شود، بنابراین در این لحظه دیود خاموش شده و ولتاژ خازن ثابت بـاقی مـی‌مانـد. پس حداکثر ولتاژ خازن برابر است با:

$$V_c(t = \pi\sqrt{LC}) = ۱ - \cos\pi = ۲v$$

۲۵ـ گزینه «۴» ابتدا با تبدیل معادل نورتن به تونن داریم:





حال با اعمال KVL در حلقه‌های چپ و راست مدار داریم:

$$\begin{cases} ۲۴ - ۱۰I_۱ = V \\ -۲۰ - ۱۰I_۲ = V \end{cases} \rightarrow ۴ - ۱۰(I_۱ + I_۲) = ۲V \rightarrow ۲V = -۱۰I + ۴ \Rightarrow V = -۵I + ۲$$

با قطع دادن این معادله با مشخصه‌ی المان غیرخطی داریم:

$$I<۱ \rightarrow \begin{cases} V = ۲I \\ V = -۵I + ۲ \end{cases} \rightarrow ۷I = ۲ \Rightarrow I = \frac{۲}{۷} A$$ ق ق

$$I>۱ \rightarrow \begin{cases} V = -۲I + ۴ \\ V = -۵I + ۲ \end{cases} \rightarrow ۳I = -۲ \rightarrow I = -\frac{۲}{۳} A$$ غ ق ق

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی
« مدارهای الکتریکی ۲»

آزمون ۱

۱ـ گزینه «۲»　۲ـ گزینه «۲»　۳ـ گزینه «۱»　۴ـ گزینه «۴»　۵ـ گزینه «۳»

۶ـ گزینه «۴»　۷ـ گزینه «۳»　۸ـ گزینه «۱»　۹ـ گزینه «۱»　۱۰ـ گزینه «۱»

۱۱ـ گزینه «۱»　۱۲ـ گزینه «۱»　۱۳ـ گزینه «۳»　۱۴ـ گزینه «۳»　۱۵ـ گزینه «۳»

آزمون ۲

۱ـ گزینه «۱»　۲ـ گزینه «۲»　۳ـ گزینه «۲»　۴ـ گزینه «۳»　۵ـ گزینه «۴»

۶ـ گزینه «۲»　۷ـ گزینه «۴»　۸ـ گزینه «۳»　۹ـ گزینه «۱»　۱۰ـ گزینه «۱»

۱۱ـ گزینه «۲»　۱۲ـ گزینه «۱»　۱۳ـ گزینه «۲»　۱۴ـ گزینه «۴»　۱۵ـ گزینه «۲»

آزمون ۳

۱ـ گزینه «۳»　۲ـ گزینه «۳»　۳ـ گزینه «۳»　۴ـ گزینه «۲»　۵ـ گزینه «۳»

۶ـ گزینه «۱»　۷ـ گزینه «۱»　۸ـ گزینه «۴»　۹ـ گزینه «۴»　۱۰ـ گزینه «۱»

۱۱ـ گزینه «۲»　۱۲ـ گزینه «۳»　۱۳ـ گزینه «۳»　۱۴ـ گزینه «۲»　۱۵ـ گزینه «۳»

آزمون ۴

۱ـ گزینه «۳»　۲ـ گزینه «۱»　۳ـ گزینه «۳»　۴ـ گزینه «۲»　۵ـ گزینه «۴»

۶ـ گزینه «۲»　۷ـ گزینه «۳»　۸ـ گزینه «۴»　۹ـ گزینه «۲»　۱۰ـ گزینه «۴»

۱۱ـ گزینه «۲»　۱۲ـ گزینه «۳»　۱۳ـ گزینه «۳»　۱۴ـ گزینه «۲»　۱۵ـ گزینه «۲»

آزمون ۵

۱ـ گزینه «۲»　۲ـ گزینه «۳»　۳ـ گزینه «۲»　۴ـ گزینه «۱»　۵ـ گزینه «۳»

۶ـ گزینه «۲»　۷ـ گزینه «۳»　۸ـ گزینه «۴»　۹ـ گزینه «۳»　۱۰ـ گزینه «۴»

۱۱ـ گزینه «۱»　۱۲ـ گزینه «۲»　۱۳ـ گزینه «۴»　۱۴ـ گزینه «۳»　۱۵ـ گزینه «۳»

آزمون ۶

۱ـ گزینه «۲»　۲ـ گزینه «۳»　۳ـ گزینه «۱»　۴ـ گزینه «۱»　۵ـ گزینه «۲»

۶ـ گزینه «۱»　۷ـ گزینه «۱»　۸ـ گزینه «۲»　۹ـ گزینه «۴»　۱۰ـ گزینه «۲»

۱۱ـ گزینه «۴»　۱۲ـ گزینه «۱»　۱۳ـ گزینه «۲»　۱۴ـ گزینه «۳»　۱۵ـ گزینه «۳»