آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» معادله را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم؛ $y''+\frac{x}{x^{2}(1-x)}y'+\frac{1}{x^{2}(1-x)}y=0$. در نتیجه تابع $p(x)=\frac{1}{x(1-x)}$ و $q(x)=\frac{1}{x^{2}(1-x)}$ است. واضح است که $x_0=0$ و $x_0=1$ نقاط غیرعادی معادله هستند. اما آیا این نقاط منظم هستند یا نامنظم؟ برای این منظور حدهای p_0 و q_0 را در نقاط موردنظر محاسبه می‌کنیم:

$$x_0=0\Rightarrow\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{1}{x(1-x)}=1\\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^{2}\dfrac{1}{x^{2}(1-x)}=1\end{cases}\Rightarrow$$

به دلیل موجود بودن هر دو حد، پس $x_0=0$ نقطه غیرعادی منظم است.

$$x_0=1\Rightarrow\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\dfrac{1}{x(1-x)}=-1\\ q_0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{2}\dfrac{1}{x^{2}(1-x)}=0\end{cases}\Rightarrow$$

به دلیل موجود بودن هر دو حد، پس $x_0=1$ نقطه غیرعادی منظم است.

۲ـ گزینه «۴» ابتدا معادله را بر $(x-1)$ تقسیم کرده تا به فرم استاندارد تبدیل شود:

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+\frac{\cot\pi x}{(x-1)}\frac{dy}{dx}+\frac{\operatorname{cosec}^{2}\pi x}{x-1}y=0\Rightarrow y''+\frac{\cos\pi x}{(x-1)\sin\pi x}y'+\frac{1}{(x-1)\sin^{2}\pi x}y=0$$

دو تابع $P(x)$ و $q(x)$ به دست آمدند. چون $x_0=1$ و $x_0=0$ هر دو مخرج کسرها را صفر می‌کنند پس نقاط غیرعادی معادله هستند.

۳ـ گزینه «۳» از آنجا که $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی معادله است و حدهای $P_0=\frac{1}{4}$ و $q_0=\frac{1}{8}$ موجود هستند پس این نقطه غیرعادی منظم می‌باشد و ریشه‌های معادله مشخصه متناظر عبارتند از:

$$r^{2}+(P_0-1)r+q_0=0\Rightarrow r^{2}+(\frac{1}{4}-1)r+\frac{1}{8}=0\Rightarrow r^{2}-\frac{3}{4}r+\frac{1}{8}=0\Rightarrow\begin{cases}r_1=\frac{1}{2}\\ r_2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

۴ـ گزینه «۳» چون ریشه‌های مخرج $p(x)=q(x)=\frac{1}{2+x^{2}}$ برابر $\pm i\sqrt{2}$ هستند و به فاصله $|\pm i\sqrt{2}-1|=\sqrt{(\pm\sqrt{2})^{2}+1}=\sqrt{3}$ از $x_0=1$ قرار دارند، شعاع همگرایی $R=\sqrt{3}$ است.

۵ـ گزینه «۴» ضریب x^{2} از رابطه $c_2=\frac{y''(0)}{2!}$ و ضریب x^{3} از رابطه $c_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌شود. با مشتق‌گیری از معادله و جایگذاری شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases}y''-xy'=e^{-x}\\ y'''-y'-xy''=-e^{-x}\end{cases}\xrightarrow{\text{جایگذاری شرایط اولیه}}\begin{cases}y''(0)=1\\ y'''(0)-(-3)-0=-1\Rightarrow y'''(0)=-4\end{cases}$$

$$\Rightarrow c_2=\frac{y''(0)}{2}=\frac{1}{2}\quad\&\quad c_3=\frac{y'''(0)}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

۶ـ گزینه «۱» برای نقطه $x_\circ = \circ$ که از نوع عادی است باید ضرایب سری جواب عمومی $y(x)$ را تعیین کرد. با توجه به اینکه جمله عمومی بسط تیلور سری $y(x)$ حول $x_\circ = \circ$ به‌صورت $C_n = \dfrac{y^{(n)}(\circ)}{n!}$ است و گزینه‌ها تا جمله $C_۴$ داده شده‌اند پس دوبار از معادله مشتق می‌گیریم تا به ضابطه $y^{(۴)}(x)$ و پس از آن به $C_۴$ دست یابیم.

$$\begin{cases} y'' + ۴y' + ۶xy = \circ \\ y''' + ۴y'' + ۶y + ۶xy' = \circ \\ y^{(۴)} + ۴y''' + ۶y' + ۶y' + ۶xy'' = \circ \end{cases} \xrightarrow[y'(\circ)=C_۱ ,\, y(\circ)=C_\circ]{\text{جایگذاری } x=\circ \text{ درمعادله}} \begin{cases} y''(\circ) + ۴C_۱ + \circ = \circ \Rightarrow y''(\circ) = -۴C_۱ \\ y'''(\circ) + ۴y''(\circ) + ۶C_\circ = \circ \Rightarrow y'''(\circ) = ۱۶C_۱ - ۶C_\circ \\ y^{(۴)}(\circ) + ۴y'''(\circ) + ۱۲C_۱ + \circ = \circ \Rightarrow y^{(۴)}(\circ) = -۷۶C_۱ + ۲۴C_\circ \end{cases}$$

پس از تعیین مشتقات به سادگی ضرایب را محاسبه می‌کنیم و در ادامه جواب عمومی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} C_۲ = \dfrac{y''(\circ)}{۲} = \dfrac{-۴C_۱}{۲} = -۲C_۱ \\ C_۳ = \dfrac{y'''(\circ)}{۳!} = \dfrac{۱۶C_۱ - ۶C_\circ}{۶} = \dfrac{-۳C_\circ + ۸C_۱}{۳} \\ C_۴ = \dfrac{y^{(۴)}(\circ)}{۴!} = \dfrac{-۷۶C_۱ + ۲۴C_\circ}{۲۴} = \dfrac{۶C_\circ - ۱۹C_۱}{۶} \end{cases}$$

$$y(x) = C_\circ + C_۱x - ۲C_۱x^۲ + (\frac{-۳C_\circ + ۸C_۱}{۳})x^۳ + (\frac{۶C_\circ - ۱۹C_۱}{۶})x^۴ + \cdots$$

۷ـ گزینه «۳» معادله مشخصه را در $x_\circ = \circ$ به‌دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

$$\Rightarrow r^۲ + (p_\circ - ۱)r + q_\circ = \circ \Rightarrow r^۲ + ۲r + ۱ = \circ \Rightarrow r_۱, r_۲ = -۱ \ , \ (r_۱ - r_۲) = \circ \in Z$$

در نتیجه جواب‌های معادله دیفرانسیل مفروض $y_۱ = x^{-۱}\sum\limits_{n=\circ}^{\infty} C_n x^n$ و $y_۲ = y_۱ Lnx + x^{-۱}\sum\limits_{n=\circ}^{\infty} d_n x^n$ است.

۸ـ گزینه «۲» ابتدا معادله را بر x تقسیم کرده و برای فرم استاندارد معادله یعنی $y'' + \frac{۲}{x}y' + y = \circ$، مقادیر $p_\circ = \lim\limits_{x\to\circ} x\frac{۲}{x} = ۲$ و $q_\circ = \lim\limits_{x\to\circ} x^۲ = \circ$ و همچنین معادله مشخصه $r^۲ + (p_\circ - ۱)r + q_\circ = r^۲ + r = \circ$ را تعیین می‌کنیم. معادله مشخصه دارای ریشه‌های $r_۱ = \circ$ و $r_۲ = -۱$ است. پایه جواب اول به شکل سری فربنیوسی $y_۱ = x^\circ \sum\limits_{n=\circ}^{\infty} C_۱ x^n$ است. اما چون اختلاف ریشه‌ها عدد صحیح است پس پایه جواب دوم طبیعت لگاریتمی دارد و به صورت $y_۲ = ay_۱(x)Lnx + x^{-۱}\sum\limits_{n=\circ}^{\infty} d_n x^n$ است.

۹ـ گزینه «۱» با جایگذاری $y'' = \sum\limits_{n=\circ}^{\infty} n(n-۱)C_n x^{n-۲}$ در معادله داریم:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} n(n-۱)C_n x^{n-۲} + \sum_{n=\circ}^{\infty} C_n x^{n+۱} = \circ \xrightarrow[\text{در سری نخست}]{\text{تبدیل } n-۲ \text{ به } n+۱} \sum_{n=-۲}^{\infty} (n+۳)(n+۲)C_{n+۳}x^{n+۱} + \sum_{n=\circ}^{\infty} C_n x^{n+۱} = \circ$$

از سری اول ۳ جمله نخست را استخراج کرده تا شروع حد پایین سری از $n = \circ$ شود.

$$\circ + \circ + ۲C_۲x^\circ + \sum_{n=\circ}^{\infty} (n+۳)(n+۲)C_{n+۳}x^{n+۱} + \sum_{n=\circ}^{\infty} C_n x^{n+۱} = ۲C_۲ + \sum_{n=\circ}^{\infty} [(n+۳)(n+۲)C_{n+۳} + C_n]x^{n+۱} = \circ$$

برای برقراری تساوی فوق باید علاوه بر $C_۲ = \circ$، جمله عمومی سری نیز صفر شود، یعنی:

$$(n+۳)(n+۲)C_{n+۳} + C_n = \circ \Rightarrow C_{n+۳} = -\frac{C_n}{(n+۳)(n+۲)} \xrightarrow{n\to n-۱} C_{n+۲} = -\frac{C_{n-۱}}{(n+۲)(n+۱)} \quad ; \quad n \geq ۱$$

۱۰ــ گزینه «۲» می‌توان با جایگذاری سری در معادله دیفرانسیل رابطه بازگشتی c_n را تعیین کرد اما به جای استفاده از روش معمول روش سریع را به کار گرفته و معادل جملات y''، xy' و $3y$ را محاسبه کرده و در معادله قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y''=x^{\circ}y''\equiv(n+2)(n+1)C_{n+2} \\ xy'\equiv nC_n \\ 3y\equiv 3C_n \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} (n+2)(n+1)C_{n+2}+nC_n+3C_n=0 \Rightarrow \frac{C_n}{C_{n+2}}=-\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}$$

۱۱ــ گزینه «۲» معادله دیفرانسیل اول لژاندر مرتبه ۲ و معادله دوم لژاندر مرتبه ۳ است. در نتیجه جواب آن‌ها به ترتیب $p_2(x)$ و $p_3(x)$ است. چون مقدار توابع ذکر شده در $x=1$ برابر یک است پس $f(x)=p_2(x)$ و $g(x)=p_3(x)$. در نتیجه انتگرال خواسته شده به فرم جدید زیر بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_{-1}^{1}(f(x)+g(x)+x^2)^2dx=\int_{-1}^{1}(p_2+p_3+x^2)^2dx=\int_{-1}^{1}[p_2^2+p_3^2+(x^2)^2+2p_2p_3+2x^2p_2+2x^2p_3]dx$$

$$\Rightarrow I=\underbrace{\int_{-1}^{1}p_2^2(x)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{-1}^{1}p_3^2(x)dx}_{I_2}+\underbrace{\int_{-1}^{1}x^4dx}_{I_3}+2\underbrace{\int_{-1}^{1}p_2(x)p_3(x)dx}_{I_4}+2\underbrace{\int_{-1}^{1}x^2p_2(x)dx}_{I_5}+2\underbrace{\int_{-1}^{1}x^2p_3(x)dx}_{I_6}$$

از ۶ انتگرال فوق حاصل ۲ انتگرال صفر است. انتگرال I_4 به دلیل مخالف بودن اندیس p_2 و p_3 صفر است و انتگرال I_6 به‌دلیل فرد بودن تابع زیر انتگرال (x^2 زوج و p_3 فرد است که حاصلضرب آنها تشکیل تابعی فرد می‌دهد). دو انتگرال I_1 و I_2 را با توجه به خاصیت تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر محاسبه می‌کنیم، حالا انتگرال I_3 و I_5 را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{1}p_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}\Rightarrow\begin{cases} I_1=\frac{2}{5} \\ I_2=\frac{2}{7}\end{cases}$$

$$I_3=\int_{-1}^{1}x^4dx=2\int_{0}^{1}x^4dx=2\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{2}{5}\Rightarrow I_3=\frac{2}{5}$$

$$I_5=2\int_{-1}^{1}x^2p_2(x)dx\xrightarrow{p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)}I_5=2\int_{-1}^{1}x^2\frac{3x^2-1}{2}dx=2\int_{0}^{1}(3x^4-x^2)dx=2\left(\frac{3x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow I_5=2\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{15}\Rightarrow I_5=\frac{8}{15}\Rightarrow I=\sum_{i=1}^{6}I_i=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{5}+\frac{8}{15}=\frac{170}{105}=\frac{12}{7}$$

۱۲ــ گزینه «۳» اگر دقت کنید تابع x^4 را می‌توان برحسب $P_n(x)$ بسط داد، یعنی $x^4=C_0P_0+C_1P_1+\cdots+C_4P_4$ اگر این رابطه را در انتگرال خواسته شده جایگذاری کنیم داریم:

$$I=\int_{-1}^{1}x^4P_6(x)dx=C_0\int_{-1}^{1}P_0P_6dx+C_1\int_{-1}^{1}P_1P_6dx+\cdots+C_4\int_{-1}^{1}P_4P_6dx=0$$

چون اندیس P_nP_m در انتگرال‌های فوق یکسان نیست پس حاصل انتگرال I صفر می‌شود.

۱۳ــ گزینه «۳» اگر به جای n در رابطه داده شده ۲ قرار دهیم داریم:

$$P_2(x)=\frac{1}{2!2^2}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}(4x(x^2-1))=\frac{4}{8}(x^2-1+2x^2)\Rightarrow P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$

بنابراین $3x^2-1$ برابر $2P_2(x)$ است. در نتیجه انتگرال را به صورت $2\int_{-1}^{1}P_2(x)P_2(x)dx$ نمایش می‌دهیم و از فرمول $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$ حاصل انتگرال برابر $\frac{4}{5}=2\times\frac{2}{2\times2+1}$ است.

۱۴ــ گزینه «۳» اگر بخواهیم رابطه $p_6(x)$ را در انتگرال جایگذاری و حاصل انتگرال را حساب کنیم محاسبه انتگرال بسیار زمانبر است. به جای آن از فرمول $\int_{-1}^{1}p_n^2(x)=\frac{2}{2n+1}$ استفاده کرده و به راحتی مقدار انتگرال را $\frac{2}{13}=\frac{2}{2\times6+1}$ به‌دست می‌آوریم.

۱۵ـ گزینه «۲» واضح است که معادله داده شده بسل مرتبه $v=\frac{۳}{۴}$ است و جواب این معادله برابر $AJ_{\frac{۳}{۴}}(x)+BJ_{-\frac{۳}{۴}}(x)$ خواهد بود.

۱۶ـ گزینه «۲» معادله داده شده بسل مرتبه n است. پایه جواب‌ها برابر $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ هستند. با توجه به رفتار توابع بسل نوع اول و دوم هر دو تابع در $x_\circ=\infty$ میرا هستند اما در $x_\circ=\circ$ تنها $J_n(x)$ محدود بوده و $Y_n(x)$ نامحدود است.

۱۷ـ گزینه «۴» به روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جز و فرمول $\int x^{-u}J_{u+۱}(x)dx=-x^{-u}J_u(x)$ داریم:

$$I=\int x^۲J_۲(x)\,dx=\int x^۳x^{-۱}J_۲(x)dx \Rightarrow \begin{cases} u=x^۳ \Rightarrow du=۳x^۲dx \\ dv=x^{-۱}J_۲dx \Rightarrow v=-x^{-۱}J_۱(x) \end{cases}$$

$$I=uv-vdu=-x^۲J_۱(x)+۳\int xJ_۱(x)dx \Rightarrow \begin{cases} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=x^\circ J_۱(x)dx \Rightarrow v=-J_\circ(x) \end{cases}$$

$$I=-x^۲J_۱(x)+۳(-xJ_\circ(x)+\int J_\circ(x)dx) \Rightarrow I=-x^۲J_۱(x)-۳xJ_\circ(x)+۳\int J_\circ(x)dx$$

۱۸ـ گزینه «۳» از رابطه $\frac{d}{dx}(x^{-v}J_v(x))=-x^{-v}J_{v+۱}$ داریم: $\xrightarrow{v=\circ}\frac{d}{dx}(x^\circ J_\circ(x))=-x^\circ J_{\circ+۱} \Rightarrow J'_\circ(x)=-J_۱(x) \Rightarrow J'_\circ(x)+J_۱(x)=\circ$

۱۹ـ گزینه «۳» توجه کنید که $J_{\frac{۱}{۲}}(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sin x$, $J_{-\frac{۱}{۲}}(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\cos x$. حالا مجموع مربعات آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$J_{\frac{۱}{۲}}^۲(x)+J_{-\frac{۱}{۲}}^۲(x)=(\sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sin x)^۲+(\sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\cos x)^۲=\frac{۲}{\pi x}(\sin^۲x+\cos^۲x)=\frac{۲}{\pi x}$$

۲۰ـ گزینه «۳» معادله مفروض بسل پیراسته مرتبه $v=۲$ است و جواب آن به‌صورت $y(x)=AI_۲(x)+Bk_۲(x)$ است.

آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۱» واضح است که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است و چون $p_0=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{4x}{x^2}=4$ و $q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2\dfrac{2}{x^2}=2$ هر دو موجود و کراندار هستند پس $x_0=0$ نقطه تکین منظم است. اما برای $x=\infty$ تغییر متغیر $x=\dfrac{1}{t}$ را در نظر می‌گیریم و به جای بررسی وضعیت $x=\infty$ در معادله مفروض، وضعیت $t_0=0$ را در معادله جدید مدنظر قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x}\Rightarrow \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\xrightarrow{\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\xrightarrow{\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}$$

حالا $\dfrac{dy}{dx}$ و $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ را برحسب روابط جدید در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2\left(\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt}\right)+4x\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right)+2y=0\Rightarrow\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dt}+2y=0\xrightarrow{t=\frac{1}{x}}t^2\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+2y=0$$

ملاحظه می‌کنید که $t_0=0$ (همان $x_0=\infty$) برای معادله جدید تکین است و چون حدهای $P_0=\lim\limits_{t\to 0}t\dfrac{-2t}{t^2}=-2$ و $q_0=\lim\limits_{t\to 0}t^2\dfrac{2}{t^2}=2$ موجود هستند پس $t_0=0$ تکین منظم است.

۲ـ گزینه «۲» در قدم اول معادله را بر $x(x-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }x(x-1)}y''+\frac{\sin x}{x(x-1)}y'+\frac{2x(x-1)}{x(x-1)}y=0\Rightarrow y''+\frac{\sin x}{x(x-1)}y'+2y=0$$

بنابراین $P(x)=\dfrac{\sin x}{x(x-1)}$ و $q(x)=2$ هستند. $q(x)$ در تمام نقاط تحلیلی است. اما $P(x)$ در نقطه $x=1$ غیرعادی است. چون در نزدیکی $x_0=0$، $\sin x\simeq x$ بنابراین $P(x)=\dfrac{1}{x-1}\xleftarrow{\sin x\simeq x}$ نیز در نقطه $x_0=0$ تحلیلی است. خب تا اینجای کار تنها باید وضعیت منظم یا نامنظم بودن $x_0=1$ را بررسی کرد. بنابراین به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$x_0=1\Rightarrow P_0=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{\sin x}{x(x-1)}=\sin 1\ ,\ q_0=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\times 2=0$$

پس $x_0=1$ به دلیل موجود بودن هر دو حد، یک نقطه غیرعادی منظم معادله محسوب می‌شود اما $x_0=0$ نقطه عادی می‌باشد.

۳ـ گزینه «۲» جهت دستیابی به فرم استاندارد معادله دیفرانسیل، آن را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }2x(2+x)}y''-\frac{2(2+3x)}{2x(2+x)}y'+\frac{x}{2x(2+x)}y=0\Rightarrow y''-\frac{2+3x}{x(2+x)}y'+\frac{1}{2(2+x)}y=0$$

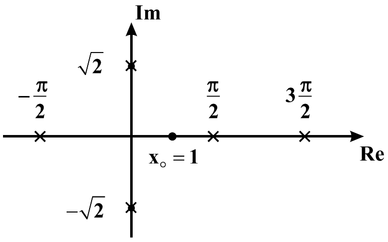
بنابراین داریم $p(x)=-\dfrac{2+3x}{x(2+x)}$ و $q(x)=\dfrac{1}{2(2+x)}$. حالا حدهای p_0 و q_0 را در نقطه $x_0=0$ محاسبه می‌کنیم.

$$x_0=0\Rightarrow\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{-(2+3x)}{x(2+x)}=-1\\[2ex] q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2\dfrac{1}{2(2+x)}=0\end{cases}$$

پس نقطه $x_0=0$ از نوع غیرعادی منظم است چون هر دو حد موجود هستند. اما معادله شاخصی را از رابطه $r^2+(p_0-1)r+q_0=0$ تشکیل داده و داریم:

$$r^2+(-1-1)r+0\Rightarrow r^2-2r=0\Rightarrow\begin{cases}r=2\\ r=0\end{cases}$$

۴ـ گزینه «۲» ریشه‌های مخرج $y=\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x^{۲}+۲}=\dfrac{\sin x}{(x^{۲}+۲)\cos x}$ ، $x=\pm i\sqrt{۲}$ و $k\in\mathbb{Z}$ ، $(۲k+۱)\dfrac{\pi}{۲}$ هستند. کمترین فاصله نقطه $x_{۰}=۱$ تا این نقاط، یعنی شعاع همگرایی، $R=\dfrac{\pi}{۲}-۱$ است.



۵ـ گزینه «۱» از آنجا که ضریب $x^{۴}$ در بسط تیلور جواب $y(x)$ برابر $C_{۴}=\dfrac{y^{(۴)}(۰)}{۴!}$ است، ابتدا باید به ضابطه $y^{(۴)}(x)$ دست یابیم و سپس با جایگذاری شرایط اولیه داده شده $y^{(۴)}(۰)$ را تعیین نماییم. برای این منظور ۲ بار از معادله نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم.

$$\begin{cases} y''(x)=y(۲e^{-x}+۱)\\ y'''(x)=y'(۲e^{-x}+۱)-۲e^{-x}y\\ y^{(۴)}(x)=y''(۲e^{-x}+۱)-۲e^{-x}y'+۲e^{-x}y-۲e^{-x}y'=y''(۲e^{-x}+۱)-۴e^{-x}y'+۲e^{-x}y \end{cases}$$

با قرار دادن $y(۰)=۱$ و $y'(۰)=۱$ در معادله نخست و سپس جایگذاری نتیجه حاصل در معادلات دوم و سوم داریم:

$$\begin{cases} y''(۰)=y(۰)(۲+۱)\ \Rightarrow y''(۰)=۳\\ y'''(۰)=y'(۰)(۲+۱)-۲y(۰)=۳-۲=۱\\ y^{۴}(۰)=y''(۰)(۲+۱)-۴y'(۰)+۲y(۰)=۳\times۳-۴+۲=۷\ \Rightarrow C_{۴}=\dfrac{y^{۴}(۰)}{۴!}=\dfrac{۷}{۴\times۳\times۲}=\dfrac{۷}{۲۴} \end{cases}$$

۶ـ گزینه «۱» واضح است که $x_{۰}=۲$ نقطه عادی معادله است. بنابراین به دنبال جوابی از معادله به‌صورت سری $y=C_{۰}+C_{۱}(x-۲)+C_{۲}(x-۲)^{۲}+\cdots$ هستیم. برای راحتی کار تغییر متغیر $t=x-۲$ را در نظر می‌گیریم. با این تغییر متغیر فرآیند یافتن جواب حول $x_{۰}=۲$ به $t_{۰}=۰$ در معادله دیفرانسیل $y''_t+(t-۱)y'_t+y=۰$ تبدیل می‌شود. حالا برای تک تک جملات معادله جدید معادل‌سازی را انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} y''_t\xrightarrow{k=۲-۰=۲} y''_t\equiv(n+۲)(n+۱)C_{n+۲}\\ ty'_t\xrightarrow{k=۱-۱=۰} ty'_t\equiv nC_n\\ -y'_t\xrightarrow{k=۱-۰=۱} -y'_t\equiv-(n+۱)C_{n+۱}\\ y\xrightarrow{k=۰-۰=۰} y\equiv C_n \end{cases}$$

سپس عبارات فوق را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$y''+(t-۱)y'_t+y\equiv(n+۲)(n+۱)C_{n+۲}+nC_n-(n+۱)C_{n+۱}+C_n=۰\ \Rightarrow C_{n+۲}=\dfrac{C_{n+۱}-C_n}{n+۲}$$

چون اختلاف بزرگترین و کوچکترین اندیس ۲ است پس تمامی ضرایب برحسب ۲ ضریب آغازین یعنی $C_{۰}$ و $C_{۱}$ محاسبه می‌شوند. با مقداردهی به n داریم:

$$\begin{cases} \qquad\quad C_{۰}\\ \qquad\quad C_{۱}\\ n=۰\quad\Rightarrow C_{۲}=\dfrac{C_{۱}-C_{۰}}{۲}\\ n=۱\quad\Rightarrow C_{۳}=\dfrac{C_{۲}-C_{۱}}{۳}=\dfrac{\frac{C_{۱}-C_{۰}}{۲}-C_{۱}}{۳}=-\dfrac{C_{۰}+C_{۱}}{۶}\\ n=۲\quad\Rightarrow C_{۴}=\dfrac{C_{۳}-C_{۲}}{۴}=\dfrac{۱}{۴}\left(-\dfrac{C_{۰}+C_{۱}}{۶}-\dfrac{C_{۱}-C_{۰}}{۲}\right)=\dfrac{C_{۰}-۲C_{۱}}{۱۲}\\ \ \vdots\qquad\ \vdots \end{cases}$$

حالا سری جواب عمومی را می‌نویسیم:

$$y(t)=C_{۰}+C_{۱}t+\left(\dfrac{C_{۱}-C_{۰}}{۲}\right)t^{۲}-\dfrac{C_{۰}+C_{۱}}{۶}t^{۳}+\dfrac{C_{۰}-۲C_{۱}}{۱۲}t^{۴}+\cdots$$

که با جانشینی $t=x-۲$ به خواسته سؤال می‌رسیم:

$$y(x)=C_{۰}+C_{۱}(x-۲)+\dfrac{C_{۱}-C_{۰}}{۲}(x-۲)^{۲}-\dfrac{C_{۰}+C_{۱}}{۶}(x-۲)^{۳}+\dfrac{C_{۰}-۲C_{۱}}{۱۲}(x-۲)^{۴}+\cdots$$

۷ـ گزینه «۲» به سادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0=1$ و $q_0=-9$ است:

$$P_0=\lim_{x\to 0} x\frac{x+x^2}{x^2}=1\quad,\quad q_0=\lim_{x\to 0} x^2\frac{x-9}{x^2}=-9$$

و همچنین معادله مشخصه متناظر $r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-9=0$ دارای ریشه‌های مضاعف $r_{1,2}=3$ می‌باشد. در این صورت با توجه به اینکه ریشه‌ها مضاعف هستند پس یکی از پایه جواب‌های معادله به صورت سری فربنیوسی و جواب دوم آن طبیعت لگاریتمی دارد. یعنی:

$$y_1=x^3\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n\quad,\quad y_2=y_1(x)\mathrm{Ln}x+x^3\sum_{n=0}^{\infty}d_n x^n$$

۸ـ گزینه «۲» چون جواب به صورت سری است پس حل معادله به کمک سری توانی حول $x_0=0$ مدنظر است. با دقت به فرم جواب دو ریشه معادله مشخصه $r_1=0$ و $r_2=-2$ است و جمله عمومی سری فربنیوسی متناظر با ریشه بزرگتر خواسته شده است. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم: $(r_1=0)$

$$\begin{cases} x^2y'' \xrightarrow{k=2-2=0} (n+0+0)(n+0-1)C_n \Rightarrow x^2y''\equiv n(n-1)C_n\\ 3xy' \xrightarrow{k=1-1=0} 3(n+0+0)C_n \Rightarrow 3xy'\equiv 3nC_n\\ -2x^2y' \xrightarrow{k=1-2=-1} -2(n+0-1)C_{n-1} \Rightarrow -2x^2y'\equiv -2(n-1)C_{n-1}\\ -2xy \xrightarrow{k=0-1=-1} -2C_{n-1} \Rightarrow -2xy\equiv -2C_{n-1}\end{cases}$$

برای چهار جمله تشکیل‌دهنده معادله توانستیم معادل‌سازی را انجام دهیم. حالا آن‌ها را در معادله دیفرانسیل قرار داده و با ساده‌سازی داریم:

$$x^2y''+3xy'-2x^2y'-2xy\equiv n(n-1)C_n+3nC_n-2(n-1)C_{n-1}-2C_{n-1}=0\Rightarrow n(n+2)C_n-2nC_{n-1}=0\Rightarrow C_n=\frac{2}{n+2}C_{n-1}\ ,\ n\ge 1$$

خب! حالا به n مقدار داده و ضرایب را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} \qquad C_0=C_0\\ n=1\ \Rightarrow C_1=\frac{2}{3}C_0=\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}C_0=\frac{2^2}{3!}C_0\\ n=2\ \Rightarrow C_2=\frac{2}{4}C_1=\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}C_0=\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}C_0=\frac{2^3}{4!}C_0\\ n=3\ \Rightarrow C_3=\frac{2}{5}C_2=\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}C_0=\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}C_0=\frac{2^4}{5!}C_0\\ \ \vdots\end{cases}$$

$$y_1(x)=C_0x^0\left(1+\frac{2^2}{3!}x+\frac{2^3}{4!}x^2+\frac{2^4}{5!}x^3+\cdots+\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}x^n+\cdots\right)$$

بنابراین جمله عمومی به‌صورت $C_n=\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$ است.

۹ـ گزینه «۲» برای نقطه عادی $x_0=0$ مراحل گام به گام را اجرا می‌کنیم:

گام اول: معادل‌سازی جملات تشکیل دهنده معادله دیفرانسیل:

$$y'' \xrightarrow{k=2-0=2} (n+2)(n+1)C_{n+2} \Rightarrow y''\equiv(n+2)(n+1)C_{n+2}$$
$$-x^2y'' \xrightarrow{k=2-2=0} -(n)(n-1)C_{n+0} \Rightarrow -x^2y''\equiv -n(n-1)C_n$$
$$-2xy' \xrightarrow{k=1-1=0} -2nC_{n+0} \Rightarrow -2xy'\equiv -2nC_n$$

گام دوم: جایگذاری روابط فوق در معادله و محاسبه رابطه بازگشتی:

$$(n+2)(n+1)C_{n+2}-n(n-1)C_n-2nC_n=0\Rightarrow (n+2)(n+1)C_{n+2}-n(n+1)C_n=0\Rightarrow C_{n+2}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}C_n\Rightarrow C_{n+2}=\frac{n}{n+2}C_n$$

چون به ازای $n=0$، C_2 صفر می‌شود پس تمامی ضرایب زوج بعدی نیز صفر خواهند بود و تنها ضرایب فرد باقی می‌مانند. با مقداردهی به n داریم:

$$\begin{cases} C_0 \\ C_1 \\ n=1 \Rightarrow C_3=\frac{1}{3}C_1 \\ n=3 \Rightarrow C_5=\frac{3}{5}C_3=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}C_1=\frac{1}{5}C_1 \\ n=5 \Rightarrow C_7=\frac{5}{7}C_5=\frac{5}{7}\times\frac{1}{5}C_1=\frac{1}{7}C_1 \\ \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

گام سوم: نوشتن جواب عمومی و تعیین رابطه عمومی ضرایب:

$$y=C_0+C_1(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1})=C_0+C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

پس رابطهٔ جمله عمومی سری به صورت $C_n=\frac{C_0}{2n+1}$ است.

۱۰ـ گزینه «۴» در معادله داده شده $p_0=1$ و $q_0=-1$ است. بنابراین معادله مشخصه $r^2-1=0$ دارای ریشه مضاعف $r_{1,2}=1$ است. جواب فربنیوسی معادله به‌صورت $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+1}$ است. برای محاسبه ضریب $\frac{x^{21}}{x^{19}}$ باید ابتدا رابطهٔ بازگشتی بین ضرایب را محاسبه کرد و سپس ضرایب C_{20} و C_{18} را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} x^2y'' \xrightarrow{k=2-2=0} (n+1+0)(n+1-1)C_{n+0} \Rightarrow x^2y''\equiv n(n+1)C_n \\ xy' \xrightarrow{k=1-1=0} (n+1+0)C_{n+0} \Rightarrow xy'\equiv (n+1)C_n \\ x^2y \xrightarrow{k=0-2=-2} C_{n-2} \Rightarrow x^2y\equiv C_{n-2} \\ -y \xrightarrow{k=0-0=0} -C_{n+0} \Rightarrow -y\equiv -C_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2y''+xy'+(x^2-1)y\equiv n(n+1)C_n+(n+1)C_n+C_{n-2}-C_n=0 \Rightarrow n(n+2)C_n+C_{n-2}=0 \Rightarrow C_n=\frac{-C_{n-2}}{n(n+2)}\quad ;\quad n\geq 2$$

با توجه به اینکه ضریب x^{21} همان C_{20} و ضریب x^{19} همان C^{18} است داریم:

$$C_{20}=\frac{-C_{18}}{20\times 22}\Rightarrow \frac{C_{20}}{C_{18}}=\frac{-1}{20\times 22}$$

۱۱ـ گزینه «۴» معادله مفروض لژاندر مرتبه ۳ $\lambda(\lambda+1)=3\times 4 \Rightarrow \lambda=3$ است. پس یکی از جواب‌های آن $p_3(x)$ می‌باشد و چون مقدار چند جمله‌ای‌های لژاندر در $x=1$، برابر یک هستند، در نتیجه $f(x)=p_3(x)$. حالا $f(x)=p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ را در نظر گرفته و تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه اول: $f(0)=\frac{1}{2}(0-0)=0$

گزینه دوم: $f(-1)=\frac{1}{2}(5(-1)-3(-1))=\frac{-2}{2}=-1$

گزینه سوم: $\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1 p_3(x)p_3(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 p_3(x)p_3(x)dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2\times 3+1}=\frac{1}{7}$

گزینه چهارم: $f'''(x)=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times 2\times 1\times x^0 \Rightarrow f'''(0)=15$

۱۲ـ گزینه «۱» در صورتی‌که در رابطه داده شده $n=3$ قرار دهیم: $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$. حالا تغییر متغیر $u=\cos x$ را در نظر می‌گیریم که نتیجه $-\sin xdx=du$ را دارد و انتگرال I را بازنویسی می‌کنیم:

$$I=\int_0^{\pi}2\sin(x)\cos(x)(5\cos^2x-3)P_3(\cos x)dx=\int_0^{\pi}2(5\cos^3x-3\cos x)p_3(\cos x)\sin xdx$$

$$I=-2\int_1^{-1}(5u^3-3u)P_3(u)du=-2\int_1^{-1}2P_3(u)P_3(u)du=4\int_{-1}^1 P_3^2(u)du=4\times\frac{2}{2\times 3+1}\Rightarrow I=\frac{8}{7}$$

۱۳ـ گزینه «۲» ضرایب بسط تابع $f(x)$ به صورت $C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$ محاسبه می‌شود. با قراردادن $n=0$ و ۱ و توجه به اینکه $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$ به محاسبه C_0 و C_1 می‌پردازیم:

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\times 1\times dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx\right]=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} xdx=\frac{x^2}{4}\bigg|_{-1}^{0}=-\frac{1}{4}$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int f(x)\times x\times dx=\frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{0} f(x)xdx+\int_{0}^{1} f(x)xdx\right]=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0} x^2dx=\frac{1}{2}x^3\bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$$

۱۴ـ گزینه «۱» رابطه بازگشتی داده شده را به صورت $(2n+1)xp_n=(n+1)p_{n+1}+np_{n-1}$ نوشته و در آن یک بار به جای n، $n-1$ و بار دیگر $n+1$ قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{n\to n-1}(2n-1)xp_{n-1}=np_n+(n-1)p_{n-2}$$

$$\xrightarrow{n\to n+1}(2n+3)xp_{n+1}=(n+2)p_{n+2}+(n+1)p_n$$

طرفین دو تساوی فوق را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$(2n-1)(2n+3)x^2p_{n-1}p_{n+1}=n(n+1)p_n^2+n(n+2)p_{n+2}p_n+(n-1)(n+2)p_{n-2}p_{n+2}+(n-1)(n+1)p_{n-2}p_n$$

از طرفین تساوی فوق در بازه متقارن $(-1,1)$ انتگرال گرفته و با توجه به خاصیت تعامد حاصل انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$(2n-1)(2n+3)\int_{-1}^{1} x^2p_{n-1}p_{n+1}dx=n(n+1)\underbrace{\int_{-1}^{1} p_n^2dx}_{I_1}+n(n+2)\underbrace{\int_{-1}^{1} p_np_{n+2}dx}_{I_2}+(n-1)(n+2)\underbrace{\int_{-1}^{1} p_{n-2}p_{n+2}dx}_{I_3}$$

$$+(n^2-1)\underbrace{\int_{-1}^{1} p_np_{n-2}dx}_{I_4}\xrightarrow[I_1=\frac{2}{2n+1}]{I_2=I_3=I_4=0}(2n-1)(2n+3)\int_{-1}^{1} x^2p_{n-1}p_{n+1}dx=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{1} x^2p_{n-1}p_{n+1}dx=\frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\xrightarrow{n=3}\int_{-1}^{1} x^2p_2p_4dx=\frac{2\times 3\times 4}{5\times 7\times 9}=\frac{8}{105}$$

۱۵ـ گزینه «۲» باید تابع مسأله از y به u تغییر داده شود. با مشتق‌گیری از $y=ux^{\frac{1}{2}}$ نسبت به x داریم:

$$\xrightarrow{\frac{dy}{dx}} y'=x^{\frac{1}{2}}u'+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})} y''=x^{\frac{1}{2}}u''+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u'-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u'=x^{\frac{1}{2}}u''+x^{-\frac{1}{2}}u'-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x^{\frac{5}{2}}u''+x^{\frac{3}{2}}u'-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}u+(x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}})u=0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } x^{-\frac{1}{2}}} x^2u''+xu'-\frac{1}{4}u+x^2u+\frac{1}{4}u=0\Rightarrow x^2u''+xu'+(x^2-0)u=0$$

ملاحظه می‌کنید که معادله دیفرانسیل جدید بسل مرتبه صفر است.

۱۶ـ گزینه «۱» با مقایسه معادله داده شده با فرم کلی $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$ تغییر متغیر مناسب $t=3x$ است. معادله جدید به‌دست آمده پس از تغییر متغیر، بسل مرتبه ۲ خواهد بود. که جواب آن به‌صورت $y=C_1J_2(3x)+C_2Y_2(3x)$ می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۱» انتگرال داده شده از جمع دو انتگرال I_1 و I_2 تشکیل شده است:

$$I=\int_0^1 [xJ_0(x)+x^3J_0(x)]dx \Rightarrow I\underbrace{\int_0^1 xJ_0(x)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^1 x^3J_0(x)dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_0^1 xJ_0(x)dx \xrightarrow{\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)dx=x^{\nu}J_{\nu}(x)} I_1=xJ_1(x)\Big|_0^1=J_1(1)$$

$$I_2=\int_0^1 x^3J_0(x)dx=\int_0^1 x^2(x^1J_0(x)dx) \Rightarrow \begin{cases} u=x^2 \Rightarrow du=2xdx \\ dv=xJ_0(x)dx \Rightarrow v=xJ_1(x)\end{cases}$$

$$I_2=uv-\int vdu=x^3J_1(x)-2\int x^2J_1(x)dx \xrightarrow{\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)dx=x^{\nu}J_{\nu}} I_2=(x^3J_1(x)-2x^2J_2(x)+C)\Big|_0^1 \Rightarrow I_2=J_1(1)-2J_2(1)$$

$$I=I_1+I_2=J_1(1)+J_1(1)-2J_2(1)=2(J_1(1)-J_2(1))$$

۱۸ـ گزینه «۱» رابطه بازگشتی $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)$ را به کارگرفته و در آن به جای ν، $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)+J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) \Rightarrow J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x}{x}-\cos x) \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \sqrt{\frac{2}{\pi x}}} \frac{J_{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}=\frac{\sin x}{x}-\cos x \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{\sin x}{x}-\cos x$$

۱۹ـ گزینه «۱» تغییر متغیر $xy=t$ که نتیجه آن $xdy=dt$ است را در نظر گرفته و داریم:

$$x\int_0^x J_{\nu}(t)(\frac{t}{x})^{\nu+1}.\frac{dt}{x}=x\int_0^x x^{-\nu-2}t^{\nu+1}J_{\nu}(t)dt=x^{-\nu-1}\int_0^x t^{\nu+1}J_{\nu}(t)dt$$

با استفاده از رابطه انتگرالی $\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)dx=x^{\nu}J_{\nu}(x)$، حاصل انتگرال فوق را تعیین می‌کنیم:

$$x^{-\nu-1}(t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t))\Big|_0^x=x^{-\nu-1}\times x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)=J_{\nu+1}(x)$$

۲۰ـ گزینه «۱» همانگونه که ملاحظه می‌کنید $x_0=0$ نقطه غیرعادی است و چون حدهای $p_0=-1$ و $q_0=-\frac{5}{4}$ موجود هستند پس این نقطه از نوع غیرعادی منظم می‌باشد.

$$p_0=\lim_{x\to 0} x\frac{-x}{x^2}=-1 \qquad \& \qquad q_0=\lim x^2\frac{-(x^2+\frac{5}{4})}{x^2}=-\frac{5}{4}$$

حالا معادله مشخصه را تشکیل داده و ریشه‌های آن را تعیین می‌کنیم.

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \Rightarrow r^2+(-1-1)r-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow r^2-2r-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow r_1=\frac{5}{2}\ ,\ r_2=-\frac{1}{2}$$

تفاضل دو ریشه $r_1-r_2=3\in Z$ یک عدد صحیح است. بنابراین به استثنای پایه جواب نخست که ارتباطی به چگونگی تفاضل دو ریشه نداشته و همیشه فرم سری فربنیوسی دارد، پایه جواب دوم طبیعت لگاریتمی خواهد داشت.

$$y_1(x)=x^{\frac{5}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \qquad \& \qquad y_2(x)=ay_1(x)Lnx+x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$$

آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۳» ابتدا هر دو معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم. برای این منظور معادله‌ها را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم.

$$\text{I}: \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} y''+\frac{\sin x}{x}y=0 \qquad \text{II}: \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x^3} y''+\frac{\sin x}{x^3}y=0$$

در معادله اول $P(x)=0$ و $q(x)=\frac{\sin x}{x}$ که در نزدیکی نقطه $x_0=0$ به دلیل هم ارز بودن $\sin x$ و x می‌توان آن را به صورت $q(x)\simeq\frac{x}{x}=1$ نوشت. با این کار مشخص شد که در معادله اول $x_0=0$ نقطه عادی است. اما برای معادله دوم حد q_0 را محاسبه می‌کنیم:

$$q_0=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\simeq\frac{x}{x}=1$$

چون حد موجود و متناهی است پس برای این معادله $x_0=0$ غیرعادی منظم است.

۲ـ گزینه «۱» اگر معادله را به صورت استاندارد بنویسیم:

$$q(x)=\frac{x^2}{(x-3)\sin x} \text{ و } p(x)=\frac{x}{(x-3)\sin x}$$

نقاط $x_0=3$ و $x=k\pi$ مخرج $p(x)$ و $q(x)$ را صفر می‌کنند که در گزینه‌ها تنها $x_0=0$ و $x_0=3$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. چون در $x_0=0$ توابع $\sin x$ و x هم‌ارزند، در نتیجه p و q در این نقطه تحلیلی هستند. یعنی $x_0=0$ نقطه عادی است. اما $x_0=3$ تکین است و داریم:

$$p_0=\lim_{x\to 3}(x-3)p(x)=\frac{3}{\sin 3} \qquad \& \qquad q_0=\lim_{x\to 0}(x-3)^2p(x)=\frac{x(x-3)}{\sin x}=0$$

چون p_0 و q_0 موجود هستند پس $x_0=3$ نقطه تکین منظم است.

۳ـ گزینه «۲» اگر معادله دیفرانسیل را به فرم استاندارد بنویسیم، توابع $p(x)=\frac{1+6x}{2x(1+x)}$ و $q(x)=\frac{2}{2x(1+x)}=\frac{1}{x(1+x)}$ را به آسانی به‌دست می‌آوریم. حالا چون $x_0=0$ نقطه غیرعادی است، باید حدهای p_0 و q_0 را محاسبه نماییم. در صورت موجود بودن حدود، $x_0=0$ نقطه تکین منظم است و می‌توان در این نقطه معادله مشخصه را تشکیل داد:

$$p_0=\lim_{x\to 0}xp(x)=\lim_{x\to 0}x\frac{1+6x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2} \qquad \& \qquad q_0=\lim_{x\to 0}x^2q(x)=\lim_{x\to 0}x^2\frac{2}{x(1+x)}=0$$

پس $x_0=0$ تکین منظم بوده و معادله مشخصه را می‌توان تشکیل داد:

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2+(\frac{1}{2}-1)r+0=0 \Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r=0 \Rightarrow r_1=\frac{1}{2}\,,\, r_2=0$$

۴ـ گزینه «۴» سری داده شده حول نقطه $x_0=0$ نوشته شده و این نقطه برای معادله دیفرانسیل مفروض تکین است. به دلیل موجود بودن $p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{4x}{4x^2(x+1)}=1$ و $q_0=\lim_{x\to 0}x^2\frac{-1}{4x^2(x+1)}=-\frac{1}{4}$، $x_0=0$ تکین منظم است. معادله مشخصه متناظر $r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{1}{4}=0$ دارای ریشه‌های $r_1=\frac{1}{2}$ و $r_2=-\frac{1}{2}$ است؛ $((r_1-r_2)=1\in\mathbb{Z})$. پایه جواب اول دارای فرم فربنیوسی $y_1=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ و پایه جواب دوم طبیعت لگاریتمی دارد:

$$y_2(x)=ay_1(x)\text{Ln}x+x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$$

۵ـ گزینه «۳» چون نقطه $x_0 = 0$ از نوع عادی است، پس جواب را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ در نظر گرفته و $y(x)$ را تعیین می‌کنیم.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x+1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x+1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (1-n)C_n x^n = x+1$$

در سری اول توان x را از $n-1$ به n تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)C_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)C_{n+1}x^n \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)C_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (1-n)C_n x^n = x+1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)C_{n+1} - (n-1)C_n]x^n = x+1$$

با توجه به سمت راست تساوی، در سمت چپ نیز دو جمله اول سری را استخراج می‌کنیم:

$$(C_1 + C_0) + 2C_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)C_{n+1} - (n-1)C_n]x^n = x+1$$

با مقایسه ضرایب x^0 و x^1 و ... داریم: (از شرایط اولیه: $C_0 = y(0) = 0$)

$$\begin{cases} C_1 + C_0 = 1 \xrightarrow{C_0=0} C_1 = 1 \\ 2C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} \\ (n+1)C_{n+1} - (n-1)C_n = 0 \Rightarrow C_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}C_n \quad ; \; n \geq 2 \end{cases}$$

حالا در رابطه بازگشتی فوق به n مقدار داده و داریم:

$$\begin{cases} n=2 & \Rightarrow C_3 = \frac{1}{3}C_2 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1!}{3!} \\ n=3 & \Rightarrow C_4 = \frac{2}{4}C_3 = \frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{2!}{4!} \\ n=4 & \Rightarrow C_5 = \frac{3}{5}C_4 = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{3!}{5!} \\ \vdots & \vdots \\ n=n-1 & \Rightarrow C_n = \frac{(n-2)!}{n!} \end{cases}$$

در نهایت جواب معادله به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)!}{n!}x^n$ است. برای محاسبه فاصله همگرایی نیز از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n-1)!}{(n+1)!}}{\frac{(n-2)!}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n-1)!n!}{(n+1)!(n-2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{n+1}\right| = 1 \xrightarrow{|x-x_0|<R} |x-0|<1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

۶ـ گزینه «۱» نقطه $x_\circ = \circ$ برای معادله فوق یک نقطه عادی است. در گام نخست به روش معادل‌سازی سه جمله معادله، رابطه بازگشتی ضرایب را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} y'' \xrightarrow{k=2-0=2} (n+2)(n+1)C_{n+2} \\ -2xy' \xrightarrow{k=1-1=0} -2nC_n \\ 2y \xrightarrow{k=0-0=0} 2C_n \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} (n+2)(n+1)C_{n+2} - 2nC_n + 2C_n = 0 \Rightarrow C_{n+2} = \frac{2(n-1)C_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{n+2}}{C_n} = \frac{2(1-n)}{(n+2)(n+1)}$$

حالا باید حاصل $\frac{C_2}{C_6} = (\frac{C_6}{C_4} \times \frac{C_4}{C_2})^{-1}$ را محاسبه کنیم. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \frac{C_6}{C_4} = \frac{2(1-4)}{(4+2)(4+3)} = -\frac{6}{6\times 7} = -\frac{1}{7} \\ \frac{C_4}{C_2} = \frac{2(1-2)}{(2+2)(2+3)} = -\frac{2}{4\times 5} = -\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{C_6}{C_2} = -\frac{1}{7} \times (-\frac{1}{10}) = \frac{1}{70} \Rightarrow \frac{C_2}{C_6} = 70$$

۷ـ گزینه «۲» با دقت به فرم گزینه‌ها مشخص می‌شود جواب حول $x_\circ = \circ$ مدنظر است. پس معادله مشخصه را در این نقطه به‌دست می‌آوریم:

$$p_\circ = \lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{3x-1}{x(x-1)} = 1 \quad \& \quad q_\circ = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = x^2 \frac{1}{x(x-1)} = 0$$

$$r^2 + (p_\circ - 1)r + q_\circ = 0 \Rightarrow r^2 + 0 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0$$

در نتیجه معادله یک جواب فربنیوسی به‌صورت $y_t = x^\circ \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ و یک جواب لگاریتمی به‌صورت $y_2 = y_1 Lnx + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ دارد. ابتدا y_1 را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور روش معادل‌سازی را به کار می‌گیریم:

$$\begin{cases} x^2 y'' \xrightarrow{k=2-2=0} n(n-1)C_{n+0} \Rightarrow x^2 y'' = n(n-1)C_n \\ -xy'' \xrightarrow{k=2-1=1} -(n+1)nC_{n+1} \Rightarrow -xy'' = -n(n+1)C_{n+1} \\ 3xy' \xrightarrow{k=1-1=0} 3nC_n \\ -y' \xrightarrow{k=1-0=1} -(n+1)C_{n+1} \Rightarrow -y' = -(n+1)C_{n+1} \\ y \xrightarrow{k=0-0=0} C_{n+0} \Rightarrow y = C_n \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} n(n-1)C_n - n(n+1)C_{n+1} + 3nC_n - (n+1)C_{n+1} + C_n = 0 \Rightarrow -(n+1)^2 C_{n+1} + (n+1)^2 C_n = 0 \Rightarrow C_{n+1} = C_n$$

در نتیجه جواب اول به‌صورت مقابل است: $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_\circ x^n = \frac{C_\circ}{1-x}$

پس پایه جواب دوم به‌صورت $y_2 = \frac{C_\circ Lnx}{1-x} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ است که با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه دوم می‌تواند پایه جواب دوم معادله باشد.

۸ـ گزینه «۳» برای نقطه غیرعادی $x_\circ=\circ$، حدهای $p_\circ=\lim\limits_{x\to\circ} x\dfrac{x(۲x+۱)}{۲x^۲}=\dfrac{۱}{۲}$ و $q_\circ=\lim\limits_{x\to\circ} x^۲\dfrac{-۱}{۲x^۲}=-\dfrac{۱}{۲}$ موجود هستند. پس این نقطه تکین منظم بوده و معادله مشخصه $r^۲+(p_\circ-۱)r+q_\circ=r^۲-\dfrac{۱}{۲}r-\dfrac{۱}{۲}=\circ$ دارای ریشه‌های $r_۱=۱$ و $r_۲=-\dfrac{۱}{۲}$ است. چون تفاضل دو ریشه غیرصحیح است پس هر دو جواب فرم فربنیوسی دارند. ضابطه بازگشتی ضرایب سری را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲x^۲y'' \xrightarrow{k=۲-۲=\circ} ۲(n+r+\circ)(n+r-۱)C_{n+\circ} \Rightarrow ۲x^۲y''\equiv ۲(n+r)(n+r-۱)C_n\\ ۲x^۲y' \xrightarrow{k=۱-۲=-۱} ۲(n+r-۱)C_{n-۱} \Rightarrow ۲x^۲y'\equiv ۲(n+r-۱)C_{n-۱}\\ xy' \xrightarrow{k=۱-۱=\circ} (n+r)C_{n+\circ} \Rightarrow xy'\equiv(n+r)C_n\\ -y \xrightarrow{k=\circ-\circ=\circ} -C_{n+\circ} \Rightarrow -y\equiv -C_n\end{cases}$$

از جایگذاری روابط فوق در معادله داریم:

$$۲(n+r)(n+r-۱)C_n+۲(n+r-۱)C_{n-۱}+(n+r)C_n-C_n=\circ \Rightarrow (n+r-۱)(۲n+۲r+۱)C_n+۲(n+r-۱)C_{n-۱}=\circ$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{-۲(n+r-۱)}{(n+r-۱)(۲n+۲r+۱)}C_{n-۱} \Rightarrow C_n=\frac{-۲C_{n-۱}}{۲n+۲r+۱} \Rightarrow \begin{cases} r_۱=۱ \quad ; C_n=\dfrac{-۲C_{n-۱}}{۲n+۳}\\ r_۲=-\dfrac{۱}{۲}\ ;\ d_n=\dfrac{-d_{n-۱}}{n}\end{cases}$$

حالا در هر دو رابطه بازگشتی به n مقدار می‌دهیم:

$$\begin{cases} C_n=\dfrac{-۲}{۲n+۳}C_{n-۱} \quad ; n\ge ۱\\ C_\circ=C_\circ\\ n=۱ \Rightarrow C_۱=\dfrac{-۲C_\circ}{۵}\\ n=۲ \Rightarrow C_۲=\dfrac{-۲C_۱}{۷}=-\dfrac{۲}{۷}\times-\dfrac{۲}{۵}C_\circ=\dfrac{۴}{۷\times۵}C_\circ\\ n=۳ \Rightarrow C_۳=\dfrac{-۲C_۲}{۹}=-\dfrac{۲}{۹}\times\dfrac{۴}{۷\times۵}C_\circ=\dfrac{-۸}{۹\times۷\times۵}C_\circ\\ \vdots \quad \vdots\end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} d_n=-\dfrac{۱}{n}d_{n-۱} \quad ; n\ge ۱\\ d_\circ=d_\circ\\ n=۱ \Rightarrow d_۱=-\dfrac{۱}{۱}d_\circ=-d_\circ=\dfrac{-۱}{۱!}d_\circ\\ n=۲ \Rightarrow d_۲=-\dfrac{۱}{۲}d_۱=\dfrac{۱}{۲}d_\circ=\dfrac{۱}{۲!}d_\circ\\ n=۳ \Rightarrow d_۳=-\dfrac{۱}{۳}d_۲=-\dfrac{۱}{۳}\times\dfrac{۱}{۲}d_\circ=\dfrac{-۱}{۳!}d_\circ\\ \vdots \quad \vdots\end{cases}$$

$$y_۱(x)=C_\circ x^۱(۱-\frac{۲}{۵}x+\frac{۴}{۷\times۵}x^۲-\frac{۸}{۹\times۷\times۵}x^۳+\cdots)+d_\circ x^{-\frac{۱}{۲}}(۱-x+\frac{۱}{۲!}x^۲-\frac{۱}{۳!}x^۳+\cdots+\frac{(-)^n x^n}{n!})$$

۹ـ گزینه «۳» $x_\circ=\circ$ یک نقطه غیرعادی منظم است چون هر دو حد $p_\circ$ و $q_\circ$ موجود هستند.

$$p_\circ=\lim_{x\to\circ} x\frac{x+\alpha}{x}=\alpha \quad , \quad q_\circ=\lim_{x\to\circ} x^۲\frac{\alpha+۱}{x}=\circ \xrightarrow{r^۲+(P_\circ-۱)r+q_\circ=\circ} r^۲+(\alpha-۱)r=\circ \Rightarrow \begin{cases} r_۱=۱-\alpha\\ r_۲=\circ\end{cases}$$

چون α یک عدد غیرصحیح و منفی است پس ریشه بزرگتر معادله مشخصه $\gamma_۱=۱-\alpha$است. حالا باید رابطه بازگشتی سری فربنیوسی ریشه بزرگتر یعنی $y(x)=x^{۱-\alpha}\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}C_n x^n$ را بیابیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} xy'': \xrightarrow{k=۲-۱=۱} xy''\equiv(n+(۱-\alpha)+۱)(n+(۱-\alpha)+\circ)C_{n+۱}=(n+۲-\alpha)(n+۱-\alpha)C_{n+۱}\\ xy': \xrightarrow{k=۱-۱=\circ} xy'\equiv(n+(۱-\alpha)+\circ)C_n=(n+۱-\alpha)C_n\\ \alpha y': \xrightarrow{k=۱-\circ=۱} \alpha y'\equiv(n+(۱-\alpha)+۱)C_{n+۱}=(n+۲-\alpha)C_{n+۱}\\ (\alpha+۱)y: \xrightarrow{k=\circ-\circ=\circ} (\alpha+۱)y\equiv(\alpha+۱)C_n\end{cases}$$

روابط فوق را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$(n+۲-\alpha)(n+۱-\alpha)C_{n+۱}+(n+۱-\alpha)C_n+(n+۲-\alpha)C_{n+۱}+(\alpha+۱)C_n=\circ$$

$$\Rightarrow (n+۲-\alpha)(n+۱-\alpha+۱)C_{n+۱}+(n+۱-\alpha+\alpha+۱)C_n=\circ \Rightarrow (n+۲-\alpha)^۲C_{n+۱}+(n+۲)C_n=\circ$$

$$\Rightarrow C_{n+۱}=-\frac{n+۲}{(n+۲-\alpha)^۲}C_n \quad ; \quad n\ge\circ$$

۱۰ـ گزینه «۱» از روی سری داده شده واضح است که جواب حول $x_0 = 2$ مدنظر است که این نقطه برای معادله از نوع عادی است. حالا تغییر متغیر $t = x - 2$ را در نظر گرفته و معادله دیفرانسیل را براساس این تغییر متغیر اصلاح می‌نماییم.

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow ([t+2]^2 - 1)y'' + 3(t+2)y' + (t+2)y = 0 \Rightarrow (t^2 + 4t + 3)y'' + 3(t+2)y' + (t+2)y = 0$$

حالا معادل‌سازی را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} t^2y'' \equiv n(n-1)C_n \\ 4ty'' \equiv 4(n+1)nC_{n+1} \\ 3y'' \equiv 3(n+2)(n+1)C_{n+2} \end{cases} ; \begin{cases} 3ty' \equiv 3nC_n \\ 6y' \equiv 6(n+1)C_{n+1} \end{cases} ; \begin{cases} ty \equiv C_{n-1} \\ 2y \equiv 2C_n \end{cases}$$

حالا جایگذاری در معادله را انجام می‌دهیم و داریم:

$$n(n-1)C_n + 4n(n+1)C_{n+1} + 3(n+1)(n+2)C_{n+2} + 3nC_n + 6(n+1)C_{n+1} + C_{n-1} + 2C_n = 0$$

رابطه فوق را ساده کرده و خواهیم داشت:

$$3(n+1)(n+2)C_{n+2} + 2(2n+3)(n+1)C_{n+1} + (n^2 + 2n + 2)C_n + C_{n-1} = 0$$

۱۱ـ گزینه «۴» معادله دیفرانسیل داده شده از نوع لژاندر مرتبه ۵ است و جواب آن برابر $y = \psi(x) = P_5(x)$ است. با توجه به اینکه $P_5(x)$ تابعی فرد است پس $x^{2n}P_5(x)$ همواره فرد خواهد بود و انتگرال آن در یک بازه متقارن صفر می‌شود.

۱۲ـ گزینه «۲» روابط بازگشتی $\begin{cases} xp'_n = np_n + p'_{n-1} \\ p'_{n+1} - p'_{n-1} = (2n+1)p_n(x) \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. در رابطه دوم به‌جای n، $n-2$، $n-4$، $n-6$ و ... قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{n \to n-2} p'_{n-1} - p'_{n-3} = (2n-3)p_{n-2}$$
$$\xrightarrow{n \to n-4} p'_{n-3} - p'_{n-5} = (2n-7)p_{n-4}$$
$$\xrightarrow{n \to n-6} p'_{n-5} - p'_{n-7} = (2n-11)p_{n-6}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

طرفین تساوی‌های فوق را با هم جمع کرده و رابطه برای p'_{n-1} به‌دست می‌آوریم:

$$p'_{n-1} = (2n-3)p_{n-2} + (2n-7)p_{n-4} + (2n-11)p_{n-6} + \cdots$$

حالا p'_{n-1} را در رابطه بازگشتی اول؛ یعنی $xp'_n = np_n + p'_{n-1}$ قرار می‌دهیم:

$$xp'_n = np_n + (2n-3)p_{n-2} + (2n-7)p_{n-4} + \cdots$$

حالا طرفین را در p_n ضرب کرده و انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$xp_np'_n = np_n^2 + (2n-3)p_n p_{n-2} + (2n-7)p_np_{n-4} + \cdots \Rightarrow \int_{-1}^{1} xp_np'_n dx = \int_{-1}^{1} np_n^2 dx + (2n-3)\int_{-1}^{1} p_np_{n-2}dx + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} xp_np'_x dx = n \times \frac{2}{2n+1} + 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} xp_np'_n dx = \frac{2n}{2n+1}$$

۱۳ـ گزینه «۲» به دو طریق می‌توان ضرایب بسط تابع x^4 برحسب چند جمله‌ای لژاندر نوشت. یکی بکارگیری فرمول انتگرالی $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} x^4 p_n(x)dx$ بوده و دیگری، به کمک فرم گزینه‌ها، استفاده از تساوی $x^4 = ap_4 + bp_2 + cp_0$ است. در هر دو روش نیاز به دانستن $p_n(x)$ وجود دارد. ابتدا $p_4(x)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور رابطه داده شده در صورت مسأله را بکار گرفته و داریم:

$$p_4(x) = \frac{1}{2^4 \times 4!}\frac{d^4}{dx^4}(x^2-1)^4 \quad \Rightarrow (x^2-1)^4 = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$$

$$p_4(x) = \frac{1}{16 \times 24}(8 \times 7 \times 6 \times 5x^4 - 4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3x^2 + 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

پس از محاسبه $p_4(x)$ نیاز به محاسبه $p_2(x)$ و $p_0(x)$ نیز است اما دقت کنید که $p_0(x)$ و $p_2(x)$ در برگیرنده x^4 نیستند و تنها $p_4(x)$ این امکان را دارد. حالا اگر $p_4(x)$ را در تساوی $x^4 = ap_4 + bp_2 + cp_0$ قرار دهیم ضریب x^4 در سمت راست تساوی، $\frac{35}{8}a$ می‌شود در نتیجه ثابت a باید $\frac{8}{35}$ باشد.

۱۴ـ گزینه «۲» با ساده‌سازی داریم:

$$\frac{1+t}{t\sqrt{1-2xt+t^2}}-\frac{1}{t}=\frac{1}{t}\times(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}+(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t}$$

از طرفی $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)$ بوده که با جایگذاری در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\frac{1+t}{t\sqrt{1-2xt+t^2}}-\frac{1}{t}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n+\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n-\frac{1}{t}\qquad(*)$$

حالا سری $\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n$ را بسط داده و داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n=P_0+tP_1+t^2P_2+t^3P_3+\cdots+t^nP_n+t^{n+1}P_{n+1}+\cdots\xrightarrow{P_0=1}\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n=1+t(P_1+tP_2+t^2P_3+\cdots+t^nP_{n+1}+\cdots)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n=1+t\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_{n+1}\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه}*}\frac{1+t}{t\sqrt{1-2xt+t^2}}-\frac{1}{t}=\frac{1}{t}\left[1+t\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_{n+1}\right]+\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n-\frac{1}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(P_n+P_{n+1})t^n$$

۱۵ـ گزینه «۲» برای معادله فوق $p_0=\lim_{x\to0}x\frac{2}{4x}=\frac{1}{2}$ و $q_0=\lim_{x\to0}x^2\frac{1}{4x}=0$ است. پس معادله مشخصه $r^2+(p_0-1)r+q_0=0\Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r=0$ است و ریشه‌های آن $r_1=\frac{1}{2}$ و $r_2=0$ است.

چون هر دو پایه جواب به فرم سری فربنیوسی است ما رابطه بازگشتی ضرایب سری $\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$ را محاسبه می‌کنیم و در ادامه برای مشخص شدن سری به جای r مقادیر آن را قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$4xy''\xrightarrow{k=2-1=1}4xy''\equiv4(n+r+1)(n+r)C_{n+1}$$

$$2y'\xrightarrow{k=1-0=1}2y'\equiv2(n+r+1)C_{n+1}$$

$$y\xrightarrow{k=0-0=0}y\equiv C_n$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}4(n+r+1)(n+r)C_{n+1}+2(n+r+1)C_{n+1}+C_n=0\Rightarrow C_{n+1}=\frac{-C_n}{2(n+r+1)(2n+2r+1)}\quad;\quad n\ge0$$

در نتیجه رابطه بازگشتی به ازای ریشه $r=\frac{1}{2}$ برابر $C_{n+1}=\frac{-C_n}{2(n+\frac{3}{2})(2n+2)}=\frac{-C_n}{(2n+3)(2n+2)}$ و به ازای $r=0$ به صورت زیر می‌باشد:

$$d_{n+1}=\frac{-d_n}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{-d_n}{(2n+2)(2n+1)}$$

حالا برای رابطه بازگشتی $r=\frac{1}{2}$ به n مقدار داده و داریم:

$$\begin{cases} C_0=C_0=\dfrac{C_0}{1!}\\ n=0\quad C_1=\dfrac{-C_0}{3\times2}=\dfrac{-C_0}{3!}\\ n=1\quad C_2=\dfrac{-C_1}{5\times4}=\dfrac{-1}{5\times4}\times\dfrac{-C_0}{3\times2}=\dfrac{C_0}{5!}\\ n=2\quad C_3=\dfrac{-C_2}{7\times6}=\dfrac{-1}{7\times6}\times\dfrac{C_0}{5!}=-\dfrac{C_0}{7!}\\ \quad\vdots\qquad\qquad\vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_1(x)=C_0x^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{3!}x+\dfrac{1}{5!}x^2-\dfrac{1}{7!}x^3+\cdots\right)\\ y_1(x)=C_0\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1!}-\dfrac{(\sqrt{x})^3}{3!}+\dfrac{(\sqrt{x})^5}{5!}-\dfrac{(\sqrt{x})^7}{7!}+\cdots\right)\xrightarrow{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}y_1(x)=C_0\sin(\sqrt{x}) \end{cases}$$

با تکرار همین روند برای رابطه بازگشتی $r=0$ داریم:

$$d_{n+1}=\frac{-d_n}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\begin{cases} \qquad\quad d_0=d_0=\dfrac{d_0}{1!} \\ n=0 \quad \Rightarrow d_1=\dfrac{-d_0}{2\times 1}=\dfrac{-d_0}{2!} \\ n=1 \quad \Rightarrow d_2=\dfrac{-d_1}{4\times 3}=\dfrac{-1}{4\times 3}\times\dfrac{-d_0}{2\times 1}=\dfrac{d_0}{4!} \\ n=2 \quad \Rightarrow d_3=\dfrac{-d_2}{6\times 5}=\dfrac{-1}{6\times 5}\times\dfrac{d_0}{4!}=-\dfrac{d_0}{6!} \\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_2(x)=d_0\left(\dfrac{1}{1!}-\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{4!}-\dfrac{x^3}{6!}+\cdots\right) \\ y_2(x)=d_0\left(1-\dfrac{(\sqrt{x})^2}{2!}+\dfrac{(\sqrt{x})^4}{4!}-\dfrac{(\sqrt{x})^6}{6!}+\cdots\right)\xrightarrow{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots} y_2(x)=d_0\cos(\sqrt{x}) \end{cases}$$

و در نهایت، جواب عمومی معادله به صورت جمع دو پایه جواب است. یعنی:

$$y(x)=C_0\sin x^{\frac12}+d_0\cos x^{\frac12}\xrightarrow{A=C_0\,,\,B=d_0} y(x)=A\sin x^{\frac12}+B\cos x^{\frac12}$$

۱۶ـ گزینه «۱» توجه داریم که هدف از ۲ تغییر متغیر این است که $y\to u$ و $x\to t$ تغییر یابد. بنابراین به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x}u \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}u+\sqrt{x}\frac{du}{dx}\xrightarrow{\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(u+2x\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)\xrightarrow{\frac{dt}{dx}=\sqrt{2}x}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(u+2\sqrt{2}x^2\frac{du}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[u+2\sqrt{2}x^2\frac{du}{dt}\right]\right)=-\frac14x^{-\frac32}\left(u+2\sqrt{2}x^2\frac{du}{dt}\right)+\frac12x^{-\frac12}\left(\frac{du}{dx}+4\sqrt{2}x\frac{du}{dt}+2\sqrt{2}x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}\right)\right)\xrightarrow{\frac{d()}{dx}=\frac{d}{dt}()\frac{dt}{dx}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac14x^{-\frac32}\left(u+2\sqrt{2}x^2\frac{du}{dt}\right)+\frac12x^{-\frac12}\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}+4\sqrt{2}x\frac{du}{dt}+2\sqrt{2}x^2\frac{d^2u}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{dt}{dx}=\sqrt{2}x}\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac14x^{-\frac32}\left(u+2\sqrt{2}x^2\frac{du}{dt}\right)+\frac12x^{-\frac12}\left(\sqrt{2}\,x\frac{du}{dt}+4\sqrt{2}x\frac{du}{dt}+4x^3\frac{d^2u}{dt^2}\right)\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=2x^{\frac52}\frac{d^2u}{dt^2}+2\sqrt{2}x^{\frac12}\frac{du}{dt}-\frac14x^{-\frac32}u$$

رابطه y'' و $y=\sqrt{x}u$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$2x^{\frac52}\frac{d^2u}{dt^2}+2\sqrt{2}x^{\frac12}\frac{du}{dt}-\frac14x^{-\frac32}u+2x^2\sqrt{x}u=0\xrightarrow{x=(t\sqrt{2})^{\frac12}}2t^{\frac54}2^{\frac58}\frac{d^2u}{dt^2}+2\sqrt{2}t^{\frac14}2^{\frac18}\frac{du}{dt}-\frac14t^{-\frac34}2^{-\frac38}u+2t^{\frac54}2^{\frac58}u=0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } t^{\frac34}}2\times2^{\frac58}t^2\frac{d^2u}{dt^2}+2^{\frac{13}{8}}t\frac{du}{dt}+\left(2^{\frac{13}{8}}t^2-\frac14 2^{-\frac38}\right)u=0\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } 2^{-\frac{13}{8}}}t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}+(t^2-2^{-4})u=0$$

معادله جدید بسل مرتبه $\nu=2^{-2}=\frac14$ است و جواب آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$u(t)=AJ_{\frac14}(t)+BJ_{-\frac14}(t)\xrightarrow{u=\frac{y}{\sqrt{x}}}\frac{y}{\sqrt{x}}=AJ_{\frac14}(t)+BJ_{-\frac14}(t)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \sqrt{x}}y=x^{\frac12}\left(AJ_{\frac14}(t)+BJ_{-\frac14}(t)\right)\xrightarrow{t=\frac{x^2}{\sqrt{2}}}y=x^{\frac12}\left(AJ_{\frac14}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)+BJ_{-\frac14}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

۱۷ــ گزینه «۳» رابطه بازگشتی $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$ را در نظر گرفته و با انتقال $J_{\nu+1}$ به سمت راست تساوی داریم:

$$J_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\nu=-\frac{3}{2}} J_{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{x}J_{-\frac{3}{2}}-J_{-\frac{1}{2}} & (1)\\ \xrightarrow{\nu=-\frac{1}{2}} J_{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}-J_{\frac{1}{2}} & (2)\end{cases}$$

حالا رابطه (۲) را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$J_{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{x}(-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}-J_{\frac{1}{2}})-J_{-\frac{1}{2}}=\frac{3-x^2}{x^2}J_{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{x}J_{\frac{1}{2}}$$

با جایگزینی $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ داریم:

$$J_{-\frac{5}{2}}(x)=\frac{3-x^2}{x^2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x+\frac{3}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{3-x^2}{x^2}\cos x+\frac{3}{x}\sin x)\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}}J_{-\frac{5}{2}}(\frac{\pi}{2})=\frac{12}{\pi^2}$$

۱۸ــ گزینه «۳» با مقداردهی به n داریم:

$$\begin{cases}n=0\rightarrow\frac{d}{dx}(J_0^2+J_1^2)=2(0-\frac{1}{x}J_1^2)\\ n=1\rightarrow\frac{d}{dx}(J_1^2+J_2^2)=2(\frac{1}{x}J_1^2-\frac{2}{x}J_2^2)\\ n=2\rightarrow\frac{d}{dx}(J_2^2+J_3^2)=2(\frac{2}{x}J_2^2-\frac{3}{x}J_3^2)\\ \vdots\qquad\vdots\end{cases}$$

روابط فوق را با هم جمع کرده و داریم:

$$\frac{d}{dx}(J_0^2+2(J_1^2+J_2^2+J_3^2+\cdots))=2(0-\frac{2}{x}J_1^2+\frac{2}{x}J_1^2-\frac{4}{x}J_2^2+\frac{4}{x}J_2^2-\frac{6}{x}J_3^2+\cdots)=0$$

توجه کنید که در رابطه فوق و در سمت راست تساوی جملات دو به دو با همدیگر حذف می‌شوند و همچنین با افزایش n به سمت بی‌نهایت $J_n\rightarrow 0$. لذا عبارت $J_0^2+2(J_1^2+J_2^2+\cdots)$ برابر عدد ثابت C است که مشتق آن نسبت به x صفر می‌شود. برای محاسبه ثابت C باید توجه کنید که به ازای $x=0$ تمامی J_nها به استثنای $J_0(0)$ برابر صفر می‌شوند. یعنی $J_n(0)=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$. پس ثابت C را نیز به سادگی می‌توان محاسبه کرد:

$$J_0^2+2(J_1^2+J_2^2+J_3^2+\cdots)=C\xrightarrow[J_n(0)=0;n\neq 0]{J_0(0)=1}1=C$$

۱۹ــ گزینه «۲» با جایگذاری $n=0$ در رابطه $J_n(x)$ داریم: $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\phi)d\phi$. اکنون برای محاسبه انتگرال خواسته شده داریم:

$$I=\int_0^\infty e^{-x}J_0(x)dx=\int_0^\infty e^{-x}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\phi)d\phi\right]dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-x}\cos(x\sin\phi)d\phi dx$$

حالا ترتیب انتگرال‌گیری را برعکس می‌کنیم:

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\int_0^\infty e^{-x}\cos(x\sin\phi)dx\right]d\phi\qquad(*)$$

از ریاضیات به خاطر داریم که حاصل انتگرال $\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)$ است. بنابراین داریم: $(b=x\sin\phi$ و $a=-1)$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(x\sin\phi)dx=\frac{1}{1+\sin^2\phi}e^{-x}(x\sin\phi.\sin(x\sin\phi)-\cos(x\sin\phi))\Big|_0^\infty=\frac{1}{1+\sin^2\phi}$$

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\frac{1}{1+\sin^2\phi})d\phi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\frac{\tan\phi}{\sec\phi})^2}d\phi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\phi}{\sec^2\phi+tg^2\phi}d\phi\xrightarrow{\sec^2\phi=1+tg^2\phi}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\phi}{1+2tg^2\phi}d\phi$$

$$\xrightarrow{tg\phi=u\ \Rightarrow\sec^2\phi d\phi=du}\frac{2}{\pi}\int\frac{du}{1+2u^2}=\frac{2}{\pi}\frac{tg^{-1}(\sqrt{2}u)}{\sqrt{2}}\xrightarrow{u=tg\phi}\frac{2}{\pi\sqrt{2}}tg^{-1}(\sqrt{2}tg\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

توجه: برای حل این انتگرال از $\int\frac{a\,dx}{1+(ax)^2}=tg^{-1}(ax)$ استفاده شده است.

۲۰ـ گزینه «۱» از بسط تابع $\sin(x\sin\phi)$ استفاده کرده و دو بار از طرفین تساوی نسبت به ϕ مشتق می‌گیریم:

$$\sin(x\sin\phi) = ۲\sin\phi.J_۱ + ۲\sin ۳\phi.J_۳ + ۲\sin ۵\phi.J_۵ + \cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{d\phi}} \cos(x\sin\phi).x\cos\phi = ۲(J_۱\cos\phi + ۳J_۳\cos ۳\phi + ۵J_۵\cos ۵\phi + \cdots)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{d\phi}} -\sin(x\sin\phi).(x\cos\phi)^۲ - \cos(x\sin\phi).x\sin\phi = ۲(-J_۱\sin\phi - ۳^۲J_۳\sin ۳\phi - ۵^۲J_۵\sin ۵\phi - \cdots)$$

در آخرین رابطه، به‌جای ϕ، $\frac{\pi}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$\circ - x\cos(x) = -۲(۱^۲J_۱ - ۳^۲J_۳ + ۵^۲J_۵ - \cdots) \Rightarrow x\cos x = ۲(۱^۲J_۱ - ۳^۲J_۳ + ۵^۲J_۵ - \cdots)$$